7 MATEMATIČKI PROBLEMI I EKSPOZICIJE 7

UREDNIK SERIJE: Dr DRAGOSLAV S. MITRINOVIĆ

D. S. MITRINOVIĆ i D. D. ADAMOVIĆ

NIZOVI I REDOVI

DEFINICIJE • STAVOVI • ZADACI • PROBLEMI

TREĆE, ISPRAVLJENO I DOPUNJENO IZDANJE

Naučna knjiga

BEOGRAD, 1987.

MATEMATIČKI PROBLEMI I EKSPOZICIJE

Urednik serije: Dr D. S. MITRINOVIĆ

1. Dr V. Devidé:	ZADACI IZ APSTRAKTNE ALGEBRE, 1968, 1974, 1979.
2. Dr B. Stanković:	OSNOVI FUNKCIONALNE ANALIZE, 1968, 1975.
3. Dr M. Prvanović:	PROJEKTIVNA GEOMETRIJA, 1968.
4. Dr M. Marjanović:	METRIČKI PROSTORI, STIELTJESOV I LEBESGUEOV INTEGRAL, 1968.
5. Dr D. S. Mitrinović:	ALGEBRA – ZBIRKA PROBLEMA IZ KOMBINATORIKE, POLINOMA I JEDNAČINA, 1969.
6. J. Ulčar:	PROJEKTIVNA I DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA – ZBIRKA PROBLEMA, 1969.
7. Dr D. S. Mitrinović– Dr D. D. Adamović:	NIZOVI I REDOVI – DEFINICIJE, STAVOVI, ZADACI, PROBLEMI, 1971, 1980, 1987.
8. Dr D. S. Mitrinović– Dr J. D. Kečkić:	CAUCHYJEV RAČUN OSTATAKA SA PRIMENAMA, 1978.
9. Dr D. S. Mitrinović– Dr J. D. Kečkić:	METODI IZRAČUNAVANJA KONAČNIH ZBIROVA, 1984.
10. Dr J. Kečkić:	LINEARNA ALGEBRA, TEORIJA I ZADACI, 1985.
11. Dr M. Prvanović:	PROJEKTIVNA GEOMETRIJA, 1986.
12. Dr J. E. Pečarić:	KONVEKSNE FUNKCIJE: NEJEDNAKOSTI, 1987.

Recenzent
Dr Dobrilo Đ. Tošić

Za izdavača Dr *Blažo Perović,* urednik *Nikola Dončev,* tehnički urednik *Gordana Krstić*

Tiraž 500 primeraka

ISBN 86-23-20008-X

Štampa GRO „Prosveta“ – Niš

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Ova knjiga ima obeležja serije *Tutorial Texts*, u kojoj je prvopotpisani objavio pet knjiga*.

Tekst se sastoji iz pregleda definicija i teorema kao i iz niza zadataka i problema iz teorije nizova i redova. Zadaci i problemi dobrim delom su rešeni i čine znatno veći deo knjige, dok su teoreme navedene bez dokaza. Dokazi nekoliko teorema izloženi su ipak u obliku rešenja među problemima.

Knjiga je u prvom redu namenjena studentima prirodno-matematičkih, a zatim studentima tehničkih fakulteta. Ona će takođe biti korisna svim matematičarima i inženjerima koji se služe teorijom nizova i redova u svom teorijskom i praktičnom radu.

Teorijska osnova rešavanja zadataka i problema, čiji je kostur izložen na početku knjige, sastoji se uglavnom u sadržaju odgovarajućih delova kompletnijeg kursa matematičke analize. Specijalne oblasti moderne teorije nizova i redova, kao što su zbirljivost, teorija aproksimacija, noviji rezultati teorije trigonometrijskih redova itd, nisu obrađene, naročito ne šire i eksplicitno. Treba napomenuti da je u knjizi na prvom mestu reč o realnim nizovima i redovima. Materijal u vezi sa kompleksnim nizovima i redovima predstavlja uzgrednu dopunu i odnosi se uglavnom na slučajeve u kojima se rezultati iz realnog područja, bez suštinske izmene metoda, prenose na kompleksno područje (naravno, uz korišćenje tehnike rada sa kompleksnim brojevima). Specifični rezultati i metode teorije analitičkih funkcija bitno se ne koriste niti pretpostavljaju, mada se na nekoliko mesta u napomenama na njih ukazuje.

Tekst je pripreman duže vreme (od 1965). Rešenja su po pravilu proverena. Bilo je teškoća u klasifikaciji i raspoređivanju zadataka i problema, i to možda nije izvršeno besprekorno. Autori takođe ne mogu biti sasvim zadovoljni srazmerom u kojoj su u knjizi zastupljene pojedine oblasti. Ali, kao što to često kažu pisci, u sledećem izdanju biće sve bolje.

Izvori za kolekciju zadataka i problema bile su u prvom redu knjige:

D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema*, knjiga 2, drugo izdanje, Beograd 1960;

D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema*, knjiga 1, treće izdanje, Beograd 1962;

G. Pólya i G. Szegö: *Zadači i teoremi iz analiza*, Moskva 1956;

K. Knopp: *Infinite sequences and series*, New York 1956;

E. C. Francis and J. E. Littlewood: *Examples in infinite series with solutions*, Cambridge 1949;

D. S. Mitrinović: *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima*, knjiga 2, drugo izdanje, Beograd 1967.

---

* *Elementary Inequalities* (Groningen 1964),
Functions of a Complex Variable (Groningen 1965),
Elementary Matrices (Groningen 1965),
Calculus of Residues (Groningen 1965),
Differential Geometry (Groningen 1969).

Takođe je bio koristan članak:

D. D. Adamović: *O gornjem i donjem limesu*, Matematička biblioteka, sveska 21, Beograd 1961, str. 35—63.

Razni časopisi, u prvom redu *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Magazine*, *Revue de Mathématiques Spéciales*, bili su takođe izvor za probleme.

U početnoj fazi priprema ove knjige uzeo je učešća dr *D. Ž. Đoković* (sada profesor Univerziteta Waterloo u Kanadi).

U tehničkoj pripremi rukopisa za štampu autorima su pomogli dr *D. Đ. Tošić*, dr *R. R. Janić*, *I. Lacković*, *M. D. Mitrinović* i *D. V. Slavić*. Slike je izradio *D. V. Slavić*.

Profesor *E. Stipanić*, profesor *S. B. Prešić*, docent *P. M. Vasić* i asistent dr *J. D. Kečkić* pročitali su rukopis u završnoj fazi i stavili primedbe koje su doprinele da se na nekim mestima poboljšaju formulacije.

Koncepcija knjige pripada prvopotpisanom, a drugopotpisani je obavio veći deo posla u njenom pripremanju.

23. juna 1970.

D. S. Mitrinović
D. D. Adamović

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Devet godina posle pojave prvog izdanja knjige *Nizovi i redovi* (Beograd 1971) njeni autori mogu da konstatuju da je ona dosta dobro prihvaćena od onih kojima je prvenstveno bila namenjena, pa i od šire matematičke zajednice, o čemu, pored ostalog, govori okolnost što je u 1978. godini izdanje u potpunosti rasprodato. Sem toga, prikazi merodavne stručne kritike u poznatim referativnim časopisima Новые книги за рубежом (11 (1973), 34—35), *Mathematical Reviews* (October 1975, 7876), *Zentralblatt für Mathematik* (246 (1973), 241) — bili su povoljni. Tako, na primer, u sovjetskom časopisu recenzent M. A. Akivis, između ostalog, kaže:

> Первые два раздела книги содержат обозначения, применяемые в дальнейшем, и обзор теории последовательностей и рядов. В этом обзоре приведены основные определения и сформулированы без доказательства основные теоремы. Объем этого обзора соответствует объему полного университетского курса математического анализа.
>
> Последующие разделы содрежат большое число упражений и задач из теорий последовательностей и рядов. Здесь наряду с простыми, но хорошо подобранными и чрезвычайно полезными упражнениями имеются задачи повышенной трудности, приближающиеся по стилю к задачем из известной книги Полиа и Сеге. В книге большое место отведено задачам на доказательство и исследование.
>
> В целом книга является полезным пособием по математическому анализу. Она поможет преподавателям, ведущим занятия по соответствующей тематике, обогатить эти занятия разнообразными и хорошо

подобранными задачами. Многие из задач и циклов задач, имеющихся в книге, могут быть использованы для решения на кружках и семинарах по математическому анализу для студентов младших курсов.

Gore navedene činjenice podstakle su autore da pripreme za štampu novo izdanje knjige.

Predgovor prvom izdanju sadržao je primedbu — lako autoironično intoniranu — da će, »kao što to često kažu pisci, u sledećem izdanju biti sve bolje«. Ovu primedbu autori su, međutim, ozbiljno shvatili kao obećanje i obavezu, prema sebi i budućim čitaocima, da će se savesno potruditi da to novo izdanje zaista u svakom pogledu bude bolje i uspelije od prvog. Imali su pritom na prvom mestu u vidu prevazilaženje tada uočenih i u predgovoru pomenutih nedostataka u pogledu klasifikacije i raspoređivanja zadataka i problema, ali takođe i otklanjanje svih drugih nekorektnosti i nedostataka koji bi u međuvremenu bili primećeni, opšte formalno-stilsko doterivanje, kao i izvesno obogaćenje i osveženje sadržaja, uz odgovarajuće izostavljanje manje korisnog i manje zanimljivog materijala, — sve ovo bez izmene osnovne koncepcije i fizionomije knjige.

Međutim, zbog sticaja izvesnih nepovoljnih okolnosti, uglavnom tehničkih i finansijskih ograničenja, autori su, na žalost, bili u mogućnosti da samo delimično, u suženim okvirima, ostvare ovu svoju nameru. Ta ograničenja nisu dozvolila obimnije intervencije na tekstu prvog izdanja, naročito veća pomeranja i premeštanja u njemu, jer bi to iziskivalo ponovno slaganje teksta, što je sada veoma skupo. Zbog toga, ono što je u pripremanju novog izdanja urađeno svodi se na sledeće: sistematski je pregledan i preispitan čitav tekst starog izdanja i u njemu ispravljene sve primećene greške, štamparske, tehničke i stvarne; otklonjeni su i ostali veći i manji nedostaci i izvršena potrebna stilska doterivanja — jedno i drugo u meri koju su pomenute ograničavajuće okolnosti dozvolile; na nekoliko mesta zadaci ili problemi zamenjeni su drugima; veći broj novih problema, u većini sa rešenjima, dodat je knjizi i numerisan sa 5.93 do 5.127; navedeno je, u vidu posebnog priloga, nekoliko novijih rezultata iz teorije redova; najzad, knjizi su priključeni, na kraju, *Spisak kriterijuma konvergencije i ostalih važnijih teorema* i *Indeks imena*.

Autori su uvereni da je svim ovim izmenama knjiga poboljšana u više pogleda, mada su one još dosta daleko od pune realizacije njihovog prvobitnog plana. Ostaje da se ta realizacija, možda i uz nešto povišene ambicije, prenese na sledeće, treće izdanje knjige Nizovi i redovi, kada i ukoliko se za njega bude ukazala prilika.

Tehničko ostvarenje nabrojenih izmena bilo je, upravo zbog navedenih ograničenja i okvira, delikatan posao. Njegov veći deo savesno i znalački obavio je profesor dr *Dobrilo Tošić*, koji je uz to zajedno sa autorima pregledao veliki deo novog i izmenjenog teksta. Docent dr *Ivan Lacković* dao je više komentara na osnovu kojih je poboljšan tekst na više mesta u knjizi. Takođe je bilo dragocena uspešna saradnja ekipe tipografa koji su radili na ovom izdanju.

Asistent *Ljiljana Marković*, pomoću računara IBM 1130, izradila je slike na str. 35, 36, 37, 206, 215, 216, 234 i 273.

Do upotrebe različitih oznaka $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ (kao i $\lim\limits_{x\to +0} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$) za isti objekt — desni limes nije, međutim, došlo slučajno ni omaškom, nego namerno, jer su oba ova tipa označavanja u upotrebi i nalazila su se u prvobitnim verzijama nekih materijala koji su ušli u ovu kolekciju.

Napominjemo da ovo izdanje sadrži ukupno 534 zadatka i problema, od kojih je većina sa rešenjima, dok su iskazima (énoncés) velikog broja zadataka i problema dodati rezultati.

Obaveštenja o osnovnom karakteru i strukturi knjige kao i o najvažnijoj korišćenoj literaturi sadržana su u predgovoru prvom izdanju.

Spisku ove literature mogla bi se dodati jedinica D. S. Mitrinović: *Predavanja o redovima*, drugo izdanje, Beograd 1980.

Autori bi želeli da dobiju komentare i kritičke primedbe o ovom izdanju, kao i sugestije za eventualno treće izdanje ove knjige.

D. S. Mitrinović

1. februara 1980. *D. D. Adamović*

Beograd

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Drugo izdanje *Nizova i redova* rasprodato je u nešto kraćem vremenu nego prvo. Na inicijativu i predlog našeg preduzimljivog izdavača, odlučili smo da sada pripremimo i treće izdanje ove knjige. Međutim, u našem predgovoru drugom izdanju već pomenute finansijske i tehničke „nepovoljne okolnosti" — traju još uvek, pa ni sada ni približno nismo mogli da ostvarimo u istom predgovoru najavljenu i opisanu temeljnu reviziju knjige koja bi je učinila „u svakom pogledu boljom i uspelijom". Suprotno tome, ovog puta morali smo se ograničiti na još manje intervencije, koje su se većim delom sastojale u ispravkama izvesnog broja u međuvremenu primećenih nekorektnosti i grešaka. Znatno manji deo tih intervencija su suštinska poboljšanja pojedinih mesta.

Najveće izmene koje su ovog puta učinjene su sledeće: Na str. 54 dat je vrlo kratak prilog o istorijatu i značaju teorije redova; uz više drugih ispravki na str. 307—308, str. 308 dopunjena je slikom koja je omaškom bila izostavljena. Najzad, na str. 320—321 potpuno je izmenjen sadržaj problema 5.119.

Uvereni smo da je svim ovim ispravkama i izmenama u knjizi postignuto njeno dalje poboljšanje i da će ova njena nova verzija biti pogodnija za čitanje i korišćenje od prethodne.

Kao što je bilo rečeno i u prethodnom predgovoru, ostaje da se naš ambiciozni plan njene opsežne revizije prenese na sledeće izdanje. Sve primedbe čitalaca autori će sa zahvalnošću primiti i uzeti u obzir.

1. septembra 1987. *D. S. Mitrinović*

Beograd

Smiljanićeva 38

D. D. Adamović

Ljube Stojanovića 5

0. OZNAKE I NEKI PRETHODNI POJMOVI

0.1. Logičke oznake. Ako slova p i q označavaju bilo kakve iskaze, tada:

$p \Rightarrow q$ znači »p povlači q« (ili »p implicira q«; ili »ako p, onda q«); $\Rightarrow$ je oznaka (logičke) *implikacije*;

$p \Leftrightarrow q$ znači »p je ekvivalentno sa q« (ili »p ako i samo ako q«); $\Leftrightarrow$ je oznaka (logičke) *ekvivalencije*;

$p \wedge q$ znači »p i q«; $\wedge$ je oznaka *konjunkcije*;

$p \vee q$ znači »p ili q« (nema isključni smisao); $\vee$ je oznaka *disjunkcije*;

$\neg p$ označava *negaciju* iskaza p.

0.2. Simbol $\stackrel{\text{def}}{=}$ znači »jednako po definiciji«; na primer, definicija tangensa može se ovako kratko formulisati

$$\operatorname{tg} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sin x}{\cos x}.$$

0.3. Skupovne oznake. Skupovi se obično označavaju velikim slovima, a njihovi elementi malim.

$a \in A$ znači: »a je element skupa A«.

$a \notin A$ znači da a nije element skupa A.

Skup čiji su elementi objekti a, b i c i samo oni označava se sa $\{a, b, c\}$; na primer, $\{1, 3, 5\}$ i $\{5, 5, 1, 3\}$ su oznake za jedan isti skup, koji obrazuju brojevi 1, 3 i 5; na sličan način označavaju se i neki beskonačni skupovi; tako se skup svih prirodnih brojeva većih od 4 može označiti sa $\{5, 6, \ldots\}$.

$\{x : \alpha(x)\}$

gde je $\alpha(x)$ neka osobina objekta x (iskazana pomoću logičkih i matematičkih simbola i reči), označava skup svih objekata x koji imaju osobinu $\alpha(x)$; na primer, $\{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ je drukčija oznaka za skup $\{0, 1, 2\}$, a $\{x : x \in A\}$ za skup A.

$A \subset B$ znači: »A je *podskup* skupa B« (ili: »skup A je sadržan u skupu B«), tj. svaki element skupa A je i element skupa B; $\subset$ je oznaka *skupovne inkluzije*.

$A \cup B$ označava *uniju* skupova A i B, tj. skup koji obrazuju svi elementi skupova A i B i samo oni; može se staviti, primenom već navedenih oznaka,

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

$A \cap B$ označava *presek* skupova A i B, tj. skup svih zajedničkih elemenata ta dva skupa; dakle,

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

$A \setminus B$ označava *razliku* skupova A i B, tj. skup svih onih elemenata skupa A koji nisu elementi skupa B; dakle,

$$A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

0.4. Standardne oznake nekih skupova.

N	skup svih prirodnih brojeva;
$\mathbf{N}_0$	$\mathbf{N} \cup \{0\}$;
Z	skup svih celih brojeva;
Q	skup svih racionalnih brojeva;
R	skup svih realnih brojeva;
$\mathbf{R}^+$	skup svih realnih pozitivnih brojeva;
C	skup svih kompleksnih brojeva.

Ako neki uslov ne ispunjava ni jedan objekt, kaže se da je skup svih takvih objekata *prazan*; oznaka praznog skupa je $\emptyset$. Dakle, ako je a neki nemogućan uslov, tada je

$$\emptyset = \{x : a(x)\}.$$

Na primer,

$$\emptyset = \{x : x^2 + 1 = 0 \wedge x \in \mathbf{R}\}.$$

0.5. Intervali. Ako $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$, tada:

$$(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a < x < b\}$$

označava *otvoreni interval* a, b, tj. skup svih realnih brojeva između a i b;

$$[a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a \leq x \leq b\}$$

je *zatvoreni interval* a, b;

$$[a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a < x \leq b\}$$

su *poluotvoreni* (ili *poluzatvoreni*) *intervali*;

$$(a, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a < x\};$$

$$[a, +\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : a \leq x\};$$

$$(-\infty, a) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x < a\};$$

$$(-\infty, a] \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x \leq a\}.$$

0.6. Apsolutna vrednost. $|a|$ označava apsolutnu vrednost broja a.
Za a realno:

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} a \ (a \geq 0) \\ -a \ (a < 0). \end{cases}$$

Opštija definiciona jednakost, za a kompleksno:

$$|a| \stackrel{\text{def}}{=} + \sqrt{\operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2};$$

ovde su $\operatorname{Re}(a)$ i $\operatorname{Im}(a)$ redom realni i imaginarni deo kompleksnog broja a.

0.7. $[a]$ označava najveći ceo broj koji nije veći od realnog broja a; za svako realno a važi

$$[a] \leq a < [a] + 1.$$

0.8. Uređeni par. Funkcija (preslikavanje). Najviše dvočlani skup čiji se elementi a i b, ukoliko su različiti, nalaze u određenom poretku (tako da je utvrđeno koji je od njih prvi, a koji drugi) naziva se *uređeni par*. Uređeni par kod koga je a prvi, a b drugi element, označava se sa (a, b). Ako su (a, b) i (c, d) uređeni parovi,

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d.$$

Formalnu definiciju pojma uređenog para (kojom se ovaj pojam svodi na pojam skupa) daje sledeća definiciona jednakost:

$$(a, b) \overset{\text{def}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Element a je *prva komponenta* (*koordinata*), element b je *druga komponenta* (*koordinata*) uređenog para (a, b).

$A \times B$ označava skup svih uređenih parova čije su prve komponente elementi skupa A, a druge elementi skupa B. $A \times B$ se naziva *direktni* ili *Dekartov proizvod* skupova A i B.

Neka su A i B neprazni skupovi. Ako je f podskup skupa $A \times B$ sa osobinom da je svaki element skupa A prva komponenta jednog i samo jednog elementa skupa f, kaže se da je f *funkcija* koja preslikava skup A u skup B, ili da je f *preslikavanje* skupa A u skup B, ili da je f funkcija definisana na skupu A a sa vrednostima u skupu B. Da je f preslikavanje skupa A u skup B označava se na sledeći način:

$$f \colon A \to B.$$

Skup A zove se *domen* ili *definiciono područje* funkcije f. Skup svih drugih komponenata svih elemenata skupa f je *antidomen* ili *skup vrednosti* funkcije f.

Ako je $(x, y) \in f$, tada se x naziva *originalom*, a y *slikom* (tog originala), i ovo se drugačije označava sa $y = f(x)$. Kaže se drugačije i da je $f(x)$ *vrednost* funkcije f u (tački) x, ili vrednost koju funkcija f uzima za vrednost x nezavisno promenljive.

Funkcija f može se označiti i na jedan od sledećih načina:

$$x \mapsto f(x) \quad (x \in A), \ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in A},$$

pri čemu se, ukoliko je domen A kontekstom određen ili se ne precizira, u obe oznake može izostaviti deo $x \in A$.

U tradiciji je, naročito u elementarnoj matematici i matematičkoj analizi, da se kaže »funkcija $f(x)$«, umesto: »funkcija f«, ili »funkcija $x \mapsto f(x)$«, mada $f(x)$ označava vrednost funkcije f u tački x. Kaže se, na primer, »funkcija x^2«, a u stvari pravilno je reći: »funkcija f definisana sa $f(x) = x^2$«, ili »funkcija $x \mapsto x^2$«. U ovoj knjizi nije poštovana ta tradicija.

Ako je X podskup skupa A, tada se skup svih vrednosti koje funkcija uzima za vrednosti nezavisno promenljive iz X naziva *slikom* skupa X i označava se $f(X)$; dakle,

$$f(X) \overset{\text{def}}{=} \{y : (\exists x \in X)\ y = f(x)\}.$$

Za bilo koji skup Y, skup svih elemenata x skupa A za koje je $f(x) \in Y$ naziva se *inverznom slikom* skupa Y i označava sa $f^{-1}(Y)$; dakle,

$$f^{-1}(Y) \overset{\text{def}}{=} \{x : f(x) \in Y\}.$$

0.9. Prošireni sistem realnih brojeva. Često se, radi lakšeg izražavanja mnogih pojmova i činjenica matematičke analize, skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ dopunjuje sa dva elementa: simbolima $-\infty$ i $+\infty$ (umesto $+\infty$ može se pisati samo ∞). Ovako proširen skup $\mathbf{R}$ označava se sa $\mathbf{R}_\infty$. Dakle,

$$\mathbf{R}_\infty \overset{\text{def}}{=} \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Relacija poretka $\leq$ proširuje se sa skupa $\mathbf{R}$ na čitav skup $\mathbf{R}_\infty$ sledećim dopunskim konvencijama:

$$-\infty < a,\ a < +\infty\ (a \in \mathbf{R}); \quad -\infty < +\infty.$$

Takođe se četiri osnovne računske operacije sa skupa $\mathbf{R}$ proširuju na skup $\mathbf{R}_\infty$ sledećim konvencijama:

$$a + \infty = +\infty + a = +\infty \quad (-\infty < a \in \mathbf{R}_\infty),$$
$$a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty \quad (+\infty > a \in \mathbf{R}_\infty),$$
$$-(+\infty) = -\infty,$$
$$a(\pm\infty) = (\pm\infty)a = \begin{cases} \pm\infty & (0 < a \in \mathbf{R}_\infty) \\ \mp\infty & (0 > a \in \mathbf{R}_\infty), \end{cases}$$
$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Nijedna od ovako na $\mathbf{R}_\infty$ proširenih operacija nije potpuna, jer izrazi

$$+\infty + (-\infty), \quad -\infty + \infty, \quad 0(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\cdot 0, \quad \frac{a}{0}\,(a \in \mathbf{R}_\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

nisu definisani (nemaju smisla u $\mathbf{R}_\infty$).

Skup $\mathbf{R}_\infty$ u kome su ovako uvedene relacija $\leq$ i osnovne operacije naziva se *prošireni sistem realnih brojeva.*

0.10. Nekoliko pojmova u vezi sa poretkom u R i u $\mathbf{R}_\infty$.

Definicija 0.10.1. Neka je A neprazan skup realnih brojeva. Ako relacija $x \in A$ povlači nejednakost $x \leq a$, za realan broj a kaže se da je *majoranta* ili *gornja granica* skupa A. Ako relacija $x \in A$ povlači nejednakost $b \leq x$, za realan broj b kaže se da je *minoranta* ili *donja granica* skupa A. Za skup A kaže se da je *s gornje (s desne) strane ograničen* ili *neograničen* prema tome da li ima ili nema majorantu, a da je *s donje (s leve) strane ograničen* ili *neograničen* prema tome da li ima ili nema minorantu. Sa obe strane ograničen skup naziva se *ograničenim* skupom. Ako nema tu osobinu, kaže se da je skup *neograničen.*

Može se primetiti da neprazan skup A ili nema nijednu majorantu ili ih ima beskonačno (kontinuum) mnogo. Isto važi i za minorante.

Definicija 0.10.2. Majoranta skupa A koja pripada skupu naziva se *maksimumom* tog skupa, a minoranta koja pripada skupu njegovim *minimumom.* Ova dva broja označavaju se redom sa

$$\max A \text{ i } \min A.$$

Maksimum je, očigledno, najveći, a minimum najmanji broj iz skupa.

Jasno je da, na primer, s gornje strane ograničen skup ne mora imati maksimum.

Definicija 0.10.3. Minimum skupa majoranata skupa A naziva se *supremum* ili *gornja međa* skupa A. Maksimum skupa minoranata skupa A naziva se *infimum* ili *donja međa* skupa A. Ova dva broja označavaju se redom sa

$$\sup A \text{ i } \inf A.$$

Ako je $A = \{x_i : i \in I\}$, $\max A$, $\min A$, $\sup A$ i $\inf A$ mogu se redom označiti i sa

$$\max_{i\in I} x_i, \quad \min_{i\in I} x_i, \quad \sup_{i\in I} x_i, \quad \inf_{i\in I} x_i.$$

Sledeća dva tvrđenja bez teškoća se mogu proveriti:

1° Sa navedenom definicijom supremuma ekvivalentna je ova definicija: za broj a kaže se da je supremum skupa A ako je: a) a majoranta skupa A; b) za svako realno $y < a$ postoji takvo $x \in A$ da je $x > y$. Analogno se može reći za infimum.

2° Maksimum skupa je njegov supremum, minimum skupa je njegov infimum.

Konvencija 0.10.3.1. Ako je skup A neograničen s gornje strane, stavlja se $\sup A = +\infty$, a ako je neograničen s donje strane, $\inf A = -\infty$.

Svi prethodni pojmovi mogu se na isti način definisati za neprazne skupove u proširenom sistemu realnih brojeva, i u tom slučaju ostaju u važnosti sve prethodne činjenice. Osim toga, tada konvencija 0.10.3.1. postaje suvišna. Naime, svaki u $\mathbf{R}$ s gornje (s donje) strane neograničen skup realnih brojeva ima u $\mathbf{R}_\infty$, očigledno, kao supremum (infimum) element $+\infty$ $(-\infty)$.

Na nekim mestima u ovoj knjizi pojmovi supremuma i infimuma uzimaju se u ovom, nešto širem, smislu, tj. ne usvaja se samo konvencija 0.10.3.1, nego se simboli sup i inf primenjuju i na skupove koji, pored realnih brojeva, mogu imati kao elemente $+\infty$ ili $-\infty$.

0.11. Matematička indukcija. Neka $p(n)$ označava bilo kakav (matematički) iskaz koji se odnosi na prirodan broj n. Tada važi sledeće tvrđenje (*princip matematičke* ili *totalne* (*potpune*) *indukcije*):

Ako važi $p(1)$ i ako, za svako $n \in \mathbf{N}$, važenje iskaza $p(n)$ povlači važenje iskaza $p(n+1)$, tada $p(n)$ važi za svako $n \in \mathbf{N}$.

Postoje razne druge varijante ovog principa. Na primer, u njegovoj formulaciji skup $\mathbf{N}$ može se zameniti skupom $\mathbf{N_m} = \{m, m+1, \ldots\}$ $(m \in \mathbf{Z})$, uz istovremenu zamenu $p(1)$ sa $p(m)$. Isto tako, implikacija $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ može se zameniti implikacijom:

$$\big(p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots \wedge p(n)\big) \Rightarrow p(n+1).$$

Ekvivalencija obe ove opštije varijante sa gornjom formulacijom principa matematičke indukcije dokazuje se bez teškoća.

Dokazivanje stavova primenom ovog principa naziva se *matematička indukcija, totalna indukcija* ili, kraće, *indukcija*.

U matematici se često pribegava i tzv. *induktivnoj definiciji*. Ona se sastoji u definisanju niza bilo kakvih objekata

$$A_1, \ldots, A_n, \ldots$$

(tj. jednog preslikavanja skupa $\mathbf{N}$ u bilo kakav neprazan skup) time što se određuje vrednost za A_1 i daje postupak jednoznačnog određivanja vrednosti za A_{n+1} pomoću vrednosti za $A_1, \ldots, A_n$.

0.12. Simboli $\sum$ i $\prod$. Ako su a_k $(k \in \mathbf{Z})$ realni ili kompleksni brojevi, tada je

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{def}}{=} a_1 + \cdots + a_n, \qquad \prod_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{def}}{=} a_1 \cdots a_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ovi izrazi mogu se i induktivno definisati na sledeći način:

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1, \quad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot a_{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Opštije, za $p, q \in \mathbf{Z}$ i $p \leq q$, stavlja se

$$\sum_{k=p}^{q} a_k \overset{\text{def}}{=} a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q, \qquad \prod_{k=p}^{q} a_k \overset{\text{def}}{=} a_p \cdot a_{p+1} \cdots a_q.$$

Za definisane izraze važi *pravilo pomeranja indeksa*, naime:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=p}^{q} a_k &= \sum_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r} = \sum_{k=p-r}^{q-r} a_{k+r}, \\ \prod_{k=p}^{q} a_k &= \prod_{k=p+r}^{q+r} a_{k-r} = \prod_{k=p-r}^{q-r} a_{k+r} \end{aligned}\right\} \quad (r \in \mathbf{Z}).$$

0.13. Nekoliko važnih nejednakosti[1]

1° *Bernoullieva nejednakost:*

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \quad (h \geq -1;\ n \in \mathbf{N}).$$

[1] Videti:
D. S. Mitrinović, saradnik P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti*, Beograd 1970.

Precizniji oblik:

$$(1+h)^n > 1 + nh \quad (-1 < h \neq 0;\ n = 2, 3, \ldots).$$

2° *Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine:*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (a_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq n),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Specijalni slučaj:

$$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \qquad (a_1, a_2 \geq 0),$$

sa jednakošću ako i samo ako je $a_1 = a_2$.

3° *Hölderova nejednakost:* Ako je $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada za realne ili kompleksne brojeve a_k i b_k $(1 \leq k \leq n)$ važi

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

sa jednakošću ako i samo ako su brojevi $|a_k|^p$ redom proporcionalni brojevima $|b_k|^q$ $(1 \leq k \leq n)$.

Specijalni slučaj (Cauchy-Schwarzova nejednakost: $p = q = 2$)

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4° *Minkowskieva nejednakost:* Ako je $p > 1$, za realne ili kompleksne brojeve a_k i b_k $(1 \leq k \leq n)$ važi

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

sa jednakošću u drugoj nejednakosti ako i samo ako su brojevi $|a_k|$ redom proporcionalni brojevima $|b_k|$ $(1 \leq k \leq n)$.

1. PREGLED TEORIJE NIZOVA I REDOVA

1.1. NIZOVI

1.1.1. DEFINICIJE

1.1.1.1. Svaka funkcija $\mathbf{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ naziva se *nizom kompleksnih brojeva* ili kraće, *kompleksnim nizom*. Ako je, specijalno, $\mathbf{a} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, tada se $\mathbf{a}$ naziva *nizom realnik brojeva* ili *realnim nizom*. Kompleksni i realni nizovi zovu se *brojni* ili *numerički nizovi*.

U teoriji brojnih nizova umesto $\mathbf{a}(n)$ često se piše a_n. Uređeni par (n, a_n) naziva se *n-tim članom niza* $\mathbf{a}$. Često se, radi kraćeg izražavanja, kaže da je a_n n-ti član niza $\mathbf{a}$. Broj n naziva se tada *indeksom* člana a_n.

Sam niz $\mathbf{a}$ obično se označava sa a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Upotrebljavaju se takođe sledeće oznake:

$$a_n \, (n \in \mathbf{N}); \quad (a_n)_{n \in \mathbf{N}}; \quad (a_n); \quad (a_1, a_2, \ldots); \quad a_n.$$

Skup $\mathbf{N}$ je *domen* ili *skup indeksa* niza (a_n) (videti 0.8).

Skup $\mathbf{a}(\mathbf{N})$ naziva se *skupom vrednosti* ili *antidomenom* niza (a_n) (videti 0.8).

U prethodnom izlaganju skup $\mathbf{N}$ može se zameniti skupom $\mathbf{N_m} = \{m, m + 1, \ldots\}$, gde je $m \in \mathbf{N}_0$. Kako se ovaj opštiji slučaj u pogledu pojmova i rezultata ne razlikuje bitno od slučaja kada je domen niza $\mathbf{N}$ (stav 1.2.2.1), u ovom pregledu teorije nizova ograničićemo se na slučaj niza sa domenom $\mathbf{N}$.

1.1.1.2. Po definiciji, niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je *ograničen* ili *neograničen* zajedno sa svojim skupom vrednosti.

Za realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ brojevi $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n$ i $\inf\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n$, koji se redom nazivaju *supremum* i *infimum niza*, definisani su sa

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} a_n \overset{\text{def}}{=} \sup \mathbf{a}(\mathbf{N}), \quad \inf_{n \in \mathbf{N}} a_n \overset{\text{def}}{=} \inf \mathbf{a}(\mathbf{N}).$$

Ako je $\sup\limits_{n \in \mathbf{N}} a_n < +\infty$, kaže se da je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *s gornje strane ograničen*; u suprotnom slučaju, isti niz je *s gornje strane neograničen*. Pojmovi »*s donje strane ograničen niz*« *i* »*s donje strane neograničen niz*« analogno se definišu. Za niz koji je i s donje strane ograničen kaže se kratko da je *ograničen;* ako niz nije ograničen, kaže se da je *neograničen.*

1.1.1.3. Monotoni nizovi. Ako je $a_n \leq a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, kaže se da je realan niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *(monotono) rastući.* Ako je $a_n \geq a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$, niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ je *(monotono) opadajući.* Prethodnim nejednakostima u kojima su redom znaci $\leq$ i $\geq$ zamenjeni sa $<$ i $>$ redom se definišu *strogo* (ili *striktno*) *rastući* i *strogo* (ili *striktno*) *opadajući niz.* U sva četiri slučaja kaže se da je niz *monoton;* u poslednja dva kaže se i da je on *strogo* ili *striktno monoton.* (U drukčijoj terminologiji, umesto rastući, opadajući, strogo rastući i strogo opadajući niz kaže se redom: neopadajući, nerastući, rastući i opadajući niz. U daljem izlaganju koristićemo uvek prvi način izražavanja.)

Realan niz može monotono rasti, monotono opadati, itd. i za $n \geq m$, gde je $m \in \mathbf{N}$ fiksirano, ili *za dovoljno veliko n,* ukoliko postoji $m \in \mathbf{N}$ (koje se ne precizira) takvo da je $a_n \leq a_{n+1}$ za $n \geq m$, itd.

Upotrebljavaju se takođe sledeće oznake:

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \nearrow$ rastući niz;

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \searrow$ opadajući niz;

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \uparrow$ strogo rastući niz;

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \downarrow$ strogo opadajući niz.

1.1.1.4. Podniz. Za niz b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ kaže se da je *podniz niza* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ako je

$$b_n = a_{p_n} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde je p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ strogo rastući niz prirodnih brojeva.

1.1.1.5. Konvergencija. Granična vrednost. Kaže se da je niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *konvergentan* ili da *konvergira* (*teži*) *ka broju a* ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj $n_0 \in \mathbf{N}$ da je

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{za svako } n \geq n_0;$$

drugim rečima, ako svaka okolina* tačke a sadrži sve članove niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ čiji su indeksi dovoljno veliki. U tom slučaju, broj a zove se *granična vrednost* ili *limes* niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i piše se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a, \quad \text{ili} \quad a_n \to a \quad (n \to +\infty).$$

Često se za niz kaže samo da *konvergira* ili da je *konvergentan*, bez pominjanja broja ka kome konvergira.

Niz koji konvergira ka nuli zove se *nula-niz.*

Za niz koji ne konvergira kaže se da *divergira* ili da je *divergentan.*

1.1.1.5.1. Za realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ kaže se da teži ka $+\infty$ (*ka pozitivnoj beskonačnosti*) i piše

$$a_n \to +\infty \ (n \to +\infty), \text{ ili } \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty,$$

ako za svako $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $a_n > M$ za svako $n \geq n_0$. Analogno se definiše značenje iskaza »niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *teži ka* $-\infty$ (*ka negativnoj beskonačnosti*)«; odgovarajuća oznaka je

$$a_n \to -\infty \ (n \to +\infty), \text{ ili } \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

Za realne nizove koji teže ka $+\infty$ ili ka $-\infty$ kaže se takođe da *stvarno divergiraju.* Realni nizovi koji nisu ni konvergentni ni stvarno divergentni nazivaju se *oscilatornim nizovima.* S obzirom na druge varijante prethodnih oznaka, ako $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, odnosno $a_n \to -\infty$ $(n \to +\infty)$, kaže se i da je $+\infty$, odnosno $-\infty$, *limes* niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

---

* *Okolinom* tačke (broja) a u sistemu kompleksnih brojeva naziva se (u jednoj varijanti tog pojma) svaki disk (otvoreni krug) sa centrom u toj tački i poluprečnika $\varepsilon > 0$, a u sistemu realnih brojeva svaki interval oblika $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$.

1.1.1.5.2. Kaže se da kompleksan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *teži ka* ∞ (*ka beskonačnosti*) i piše

$$a_n \to \infty \ (n \to +\infty), \text{ ili } \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty,$$

ako $|a_n| \to +\infty \quad (n \to +\infty)$.

1.1.1.6. Tačka nagomilavanja. Za kompleksan broj a kaže se da je tačka nagomilavanja niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ako za svako $\varepsilon > 0$ i svako $n_0 \in \mathbf{N}$ postoji prirodan broj $n \geq n_0$ takav da je $|a_n - a| < \varepsilon$; drugim rečima, ako svaka okolina tačke a sadrži članove niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sa proizvoljno velikim indeksima.

1.1.1.7. Donji i gornji limes. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ realan niz i S skup svih njegovih tačaka nagomilavanja (S može biti i prazan skup). *Gornjim limesom* (sinonimi: *limes superior, gornja tačka nagomilavanja*) niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ naziva se element L skupa $\mathbf{R}_\infty$ koji se određuje na sledeći način:

$$L = \begin{cases} +\infty, & \text{ako je niz } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ neograničen s gornje strane;} \\ -\infty, & \text{ako je niz } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ s gornje strane ograničen i skup } S \text{ je prazan (tj. ako je } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty); \\ \sup S, & \text{ako je niz } (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ s gornje strane ograničen i skup } S \text{ nije prazan.} \end{cases}$$

Analogno se definiše *donji limes* (*limes inferior, donja tačka nagomilavanja*) niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Gornji limes niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ označava se jednim od sledeća dva simbola

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \quad \text{ili} \quad \limsup_{n\to+\infty} a_n,$$

a donji limes istog niza jednim od simbola

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \quad \text{ili} \quad \liminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Prema odgovarajućim tvrđenjima u 1.1.2, gornji i donji limes jednoznačno su određeni (kao elementi skupa $\mathbf{R}_\infty$) za svaki realan niz i svaki od njih je tačka nagomilavanja niza u slučaju kad je konačan. Stoga, ako je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n \in \mathbf{R}$, imamo $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n = \max S$, a ako je $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n \in \mathbf{R}$, tada je $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n = \min S$.

Često se u slučaju kad je realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ neograničen s gornje, odnosno s donje strane, kaže da je simbol $+\infty$, odnosno $-\infty$, njegova tačka nagomilavanja. Ako se ova konvencija usvoji, tada se, uz na prirodan način na skup $\mathbf{R}_\infty$ proširen poredak skupa $\mathbf{R}$ (videti 0.10), gornji i donji limes mogu bez ograničenja definisati na sledeći način:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \sup S, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \inf S,$$

a takođe i ovako:

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \max S, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \overset{\text{def}}{=} \min S.$$

1.1.1.8. Ako je $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, piše se $a_n \sim b_n$ $(n \to +\infty)$ i kaže da se niz $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *asimptotski ponaša* kao niz $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ (ili da je prvi niz *asimptotski jednak* drugom).

Neka su (a_n) i (b_n) realni nizovi i neka je $b_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Tada se piše:

$$a_n = O(b_n) \text{ ako je niz } \frac{a_n}{b_n} \text{ ograničen; } a_n = o(b_n) \text{ ako niz } \frac{a_n}{b_n} \text{ teži ka } 0.$$

1.1.2. TEOREME O KONVERGENCIJI I O TAČKAMA NAGOMILAVANJA NIZOVA

Na početku navodimo jedan stav iz osnova matematičke analize, koji posebno igra fundamentalnu ulogu u teoriji brojnih nizova.

1.1.2.0. Svaki neprazan i sa gornje strane ograničen skup realnih brojeva ima supremum, a svaki neprazan i sa donje strane ograničen skup realnih brojeva ima infimum.

Navedeni stav ne odnosi se direktno na nizove, ali se bitno koristi u dokazu nekih najvažnijih od sledećih teorema o brojnim nizovima. Sve one od tih teorema u čijoj formulaciji ili u vezi s kojima nije izričito rečeno da je reč o realnim nizovima odnose se na opšti slučaj kompleksnog niza.

1.1.2.1. Ako se doda ili oduzme konačan broj članova nizu, ili se izmene vrednosti konačnog broja njegovih članova,[1] ne menjaju se: njegova ograničenost (odnosno neograničenost), njegova konvergencija, granična vrednost i tačke nagomilavanja.

1.1.2.2. Granična vrednost niza je i njegova tačka nagomilavanja. Obrnuto ne važi. Niz može imati samo jednu graničnu vrednost.

1.1.2.3. Ako niz teži ka a, tada i svaki njegov podniz teži ka a.

1.1.2.4. Tačka nagomilavanja podniza nekog niza je tačka nagomilavanja tog niza.

1.1.2.5. Ako je a tačka nagomilavanja nekog niza, postoji podniz toga niza koji konvergira ka a.

Sledeće dve teoreme odnose se na realne nizove.

1.1.2.6. Ako je $a_n \le b_n \le c_n$ za dovoljno veliko n i ako je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} c_n = b$, tada je niz b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergentan i $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$. Pri tome b može biti proizvoljan element skupa $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.7. 1° Ako je $a_n \le b_n$ za dovoljno veliko n i ako postoje $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, tada je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \le \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

2° Ako je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n < \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, tada je $a_n < b_n$ za dovoljno veliko n.

---

[1] Čitalac će lako dati precizno tumačenje ovim formulacijama.

1.1.2.8. Teorema o konvergenciji monotonih nizova. Svaki monoton i ograničen realni niz je konvergentan.

Pri tome, ako je niz (a_n) opadajući i (s gornje strane) ograničen, važi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\geq 1} a_n$, a ako je opadajući i (s gornje strane) ograničen, imamo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \inf\limits_{n\geq 1} a_n$.

1.1.2.9. Dedekindova teorema. Neka su a_n i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ realni nizovi sa osobinama: $a_n \nearrow, b_n \searrow$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $a_n \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.
Tada su oba ova niza konvergentna i njihova zajednička granična vrednost c zadovoljava dvostruku nejednakost $a_n \leq c \leq b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. U slučaju kad je $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$ $(n = 1, 2, \ldots)$ prethodna dvostruka nejednakost može se zameniti preciznijom: $a_n < c < b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

1.1.2.10. Bolzano-Weierstrassova teorema. Svaki ograničen niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

1.1.2.11. Da bi brojni niz konvergirao, potrebno je i dovoljno da bude ograničen i da ima samo jednu tačku nagomilavanja.

1.1.2.12. Cauchyev kriterijum konvergencije. Da bi niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergirao, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|a_p - a_q| < \varepsilon \quad \text{za} \quad p \geq q \geq n_0.$$

1.1.2.13. Ako je niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan, tada je konvergentan i niz $|a_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i važi $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right|$.

Egzistencija i konačnost limesa na levoj strani ne povlači egzistenciju limesa na desnoj strani.

1.1.2.13.1. Uz konvenciju $|\pm\infty| = +\infty$, za realne nizove važe oba tvrđenja prethodne teoreme u kojoj je konvergencija (tj. egzistencija konačnog limesa) zamenjena egzistencijom limesa u $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.14. Ako su nizovi a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergentni, tada su konvergentni i nizovi $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i tada je

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n,\\
(1)\qquad &\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n - \lim_{n\to+\infty} b_n,\\
&\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} b_n.
\end{aligned}$$

Ako je još $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \neq 0$, tada je i niz a_n/b_n (n dovoljno veliko) konvergentan i važi jednakost

$$(2)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}.$$

Egzistencija i konačnost bilo kog (posebno) od limesa na levim stranama jednakosti (1) i (2) ne povlači egzistenciju ni $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ ni $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

1.1.2.14.1. Uz isključenje slučajeva kad se na desnoj strani javlja jedan od izraza

$$+\infty-\infty, \quad -\infty+\infty, \quad 0\cdot(\pm\infty), \quad (\pm\infty)\cdot 0, \quad \frac{a}{0}\ (a\in \mathbf{R}_\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

sva tvrđenja teoreme 1.1.2.14, u kojoj je konvergencija zamenjena egzistencijom limesa u $\mathbf{R}_\infty$, važe i u $\mathbf{R}_\infty$.

1.1.2.15. Ako je gornji limes realnog niza konačan, on je najveća tačka nagomilavanja (tj. maksimum skupa tačaka nagomilavanja) tog niza. Analogno tvrđenje važi za donji limes.

1.1.2.16. Da bi realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ imao limes u $\mathbf{R}_\infty$ (tj. konvergirao ili težio ka pozitivnoj ili negativnoj beskonačnosti), potrebno je i dovoljno da bude

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

1.1.2.17. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ realan niz. Ako je $a_n\leq A$ za dovoljno veliko n, tada je $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n\leq A$; ako je $a_n\geq a$ za proizvoljno velike vrednosti n, tada je $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n\geq a$; ako je $a_n\leq A$ za proizvoljno velike vrednosti n, tada je $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n\leq A$; ako je $a_n\geq a$ za dovoljno veliko n, tada je $\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n \geq a$.

1.1.2.18. Da bi realan broj L bio gornji limes realnog niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon>0$ nejednakost $a_n<L+\varepsilon$ bude zadovoljena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n>L-\varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n. Da bi realan broj l bio donji limes istog niza, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon>0$ nejednakost $a_n>l-\varepsilon$ bude zadovoljena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n<l+\varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n.

1.1.2.19. Neka su a_n i b_n $(n\in\mathbf{N})$ realni nizovi. Ako je za n dovoljno veliko $a_n\leq b_n$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} b_n \quad \text{i} \quad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

(Tvrđenje 1° teoreme 1.1.2.7 je specijalan slučaj ove teoreme.)

1.1.2.20. 1° Neka su $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dva realna niza. Uz isključenje slučajeva kad se javljaju izrazi koji nemaju smisla, važe sledeće nejednakosti:

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} (a_n+b_n) \leq \varliminf_{n\to+\infty} a_n + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

2° Ako je još $a_n\geq 0$, $b_n\geq 0$ za dovoljno veliko n, tada, uz isto ograničenje kao napred, važe nejednakosti

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to+\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leq \varliminf_{n\to+\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to+\infty} b_n.$$

1.1.2.21. Za svaki realan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ je

$$\varliminf_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty}(-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

Ako je $a_n > 0\,(n = 1, 2, \ldots)$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}, \quad \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n},$$

gde se, pored već usvojene konvencije $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, uzima da je $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

1.1.2.22. Stolzova teorema. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dva realna niza. Ako $b_n \to +\infty\ (n\to+\infty)$ i $b_n\uparrow$ za n dovoljno veliko, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \leq \varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Posledica 1. Specijalno, pod istim pretpostavkama, iz egzistencije limesa

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

(u $\mathbf{R}_\infty$) sleduje egzistencija limesa $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ kao i jednakost

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

Egzistencija leve strane poslednje jednakosti ne povlači egzistenciju desne strane iste jednakosti.

Stolzova teorema ima još sledeće važne posledice:

1.1.2.22.1. Cauchyeva teorema. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, tada je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = a.$$

Posledica 1 Stolzove teoreme i Cauchyeva teorema važe i kada je a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ kompleksan niz.

1.1.2.22.2. Ako je $a_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} = a$.

1.1.2.22.3. Ako je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \varliminf_{n\to+\infty} a_n^{1/n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty} a_n^{1/n} \leq \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Specijalno, pod istom pretpostavkom, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = a$ izlazi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = a$.

1.1.2.23. Nekoliko partikularnih rezultata

1.1.2.23.1. $\alpha_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \uparrow, \quad \beta_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \downarrow \quad (n = 1, 2, \ldots);$

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = e \in (2, 3);$$

$$\alpha_n < e < \beta_n, \quad 0 < e - \alpha_n < \beta_n - \alpha_n < \frac{3}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right).$$

Broj e, zajednički limes nizova α_n, β_n i $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, je transcendentan i ima decimalni razvoj $e = 2{,}71828\ 18284\ 59045 \ldots$

1.1.2.23.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log n\right) = \gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532 \ldots$

Broj γ zove se Eulerova konstanta.

Primedba. Još nije ustanovljeno da li je γ racionalan ili iracionalan broj.

1.1.2.23.3. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0 \quad (|a| < 1).$

1.1.2.23.4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0 \quad (|a| > 1).$

1.1.2.23.5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \quad (a \in \mathbf{C}).$

1.1.2.23.6. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1 \quad (a > 0).$

1.1.2.23.7. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/n} = 1.$

1.1.2.23.8. Stirlingova formula.[1] Navešćemo dva oblika ove formule.

Precizniji oblik:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1;\ n \in \mathbf{N}).$$

Manje precizni oblik:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} \quad (n \to +\infty).$$

[1] Detaljnije o Stirlingovoj formuli videti:
D. S. Mitrinović, saradnik P. M. Vasić: *Analitičke nejednakosti*. Beograd 1970, str. 175–179.

1.1.3. FUNKCIONALNI NIZOVI

1.1.3.1. Pojam *funkcionalnog niza* $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, gde su $x \mapsto f_n(x)$ realne funkcije realne nezavisno promenljive sa istim domenom, definiše se na sličan način kao pojam brojnog niza.

Realne funkcije realne promenljive mogle bi se, u prethodnom tekstu i u nekim od sledećih rezultata, zameniti kompleksnim funkcijama kompleksne promenljive, ali izlaganje koje sleduje pretpostavlja da je reč o nizovima realnih funkcija realne promenljive.

1.1.3.2. Ako je konvergentan brojni niz koji se dobija od niza $(f_n(x))_{n\in \mathbf{N}}$ stavljajući $x = x_0$, kaže se da *funkcionalni niz* $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ *konvergira u tački* $x = x_0$.

Skup svih tačaka u kojima niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira zove se ***skup konvergencije*** ovog funkcionalnog niza.

Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ za svako $x \in E \,(\subset \mathbf{R})$, funkcija $x \mapsto f(x)$ naziva se *graničnom funkcijom niza* $(f_n(\;))_{n\in\mathbf{N}}$ *na skupu* E.

1.1.3.3. Neka je $E\,(\subset \mathbf{R})$ skup na kome su sve funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definisane. Ako postoji nenegativan realan broj M takav da je $|f_n(x)| \leq M$ za svako $x \in E$ i za svako $n \in \mathbf{N}$, kaže se da je niz $f_1, f_2, \ldots$ *uniformno ograničen na* E.

1.1.3.4. Neka su sve funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definisane na skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$. Ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$ i svako $x \in E$, kaže se da *niz* $f_n(x)$ *uniformno konvergira ka funkciji* $x \mapsto f(x)$ *na skupu* E.

Ako je skup E interval, onda se u 1.1.3.2, 1.1.3.3 i 1.1.3.4 na svim mestima reči »na E« mogu zameniti rečima »u (intervalu) E«.

1.1.3.4.1. Neka je $G_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$ za dati skup $E\,(\subset \mathbf{R})$ i neka je

$$\Delta_n = \sup_{x\in E} G_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Da bi niz $f_n(x)$ na E uniformno konvergirao ka $f(x)$, potrebno je i dovoljno da bude $\lim\limits_{n\to+\infty} \Delta_n = 0$.

Ako $x_n \in E\; (n = 1, 2, \ldots)$ i $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, G_n(x_n) > 0$, tada $f_n(x)$ ne konvergira uniformno ka $f(x)$ na E.

1.1.3.5. Cauchyev kriterijum za uniformnu konvergenciju. Funkcionalni niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ uniformno konvergira na skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$ ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

za svako $p \geq q \geq n_0$ i za svako $x \in E$.

1.1.3.6. Ako su sve funkcije $x \mapsto f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ neprekidne na skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$ i niz $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ na E uniformno konvergira ka $f(x)$, tada je i funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna na skupu E.

1.1.3.7. Neka je $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ niz realnih funkcija koje su u Riemannovom smislu integrabilne u intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Ako ovaj niz u

$[a, b]$ uniformno konvergira ka funkciji $x \mapsto f(x)$, tada je funkcija $x \mapsto f(x)$ u $[a, b]$ u Riemannovom smislu integrabilna i važi jednakost

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

1.1.3.7.1. Teorema Arzelà. Neka je svaka od funkcija $x \mapsto f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ u Riemannovom smislu integrabilna u intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Ako je ovaj niz u $[a, b]$ uniformno ograničen i konvergira ka funkciji $x \to f(x)$ koja je u $[a, b]$ integrabilna u Riemannovom smislu, tada važi jednakost (3).

1.1.3.8. Neka su sve funkcije $f_1, f_2, \ldots$ definisane u intervalu (a, b) $(a < b)$, i neka su ispunjeni sledeći uslovi:

1° niz $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergira za neko $x_0 \in (a, b)$;

2° sve funkcije $x \to f_n'(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ imaju konačne vrednosti za svako $x \in (a, b)$;

3° niz $f_n'(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b).

Tada:

a) niz $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ uniformno konvergira u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b);

b) granična funkcija $x \mapsto f(x)$ niza $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ima izvod u (a, b) i

c) $f'(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n'(x)$ za svako $x \in (a, b)$.

Primedba 1. Prethodna teorema često se navodi u (za dokaz) jednostavnijem obliku u kome se pretpostavka 2° zamenjuje pretpostavkom da su svi izvodi $x \to f_n'(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ neprekidni u intervalu (a, b).

Primedba 2. Uz zamenu na svim mestima E $(\subset \mathbf{R})$ sa E $(\subset \mathbf{C})$, definicije 1.1.3.2, 1.1.3.3 i 1.1.3.4, kao i teoreme 1.1.3.4.1, 1.1.3.5 i 1.1.3.6, važe i za nizove kompleksnih funkcija kompleksne promenljive. Teorema 1.1.3.7 takođe ima svoj analogon za slučaj kompleksnih funkcionalnih nizova.

1.2. REDOVI

1.2.1. BROJNI REDOVI

1.2.1.1. Neka je

$$a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

niz kompleksnih brojeva. Simbolička oznaka formalnog beskonačnog sumiranja članova ovoga niza

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \quad \text{ili} \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots, \tag{2}$$

naziva se *brojnim* (*numeričkim*) *redom* ili, kraće, *redom*. Po definiciji, n-ti član niza (1) je ujedno i *n-ti član* reda (2).

Opštije, brojni red može imati oblik

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \quad \text{ili} \quad a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots \quad (n_0 \in \mathbf{N}_0). \tag{2'}$$

Ponekad se terminu »brojni red« pridaje uže značenje brojnog reda čiji su svi članovi realni brojevi.

Zbir

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

naziva se *n-tom parcijalnom sumom* reda (2).

1.2.1.2. Konvergencija brojnog reda. Ako niz parcijalnih suma S_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ brojnog reda (2) konvergira ka (konačnoj) granici S, kaže se da red (2) *konvergira* ili da je *konvergentan*. Broj S u tom slučaju naziva se *sumom* (*zbirom*) reda (2) i označava jednim od simbola (2), tako da se može pisati

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S, \quad \text{ili} \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = S.$$

Ako brojni red ne konvergira, kaže se da *divergira* ili da je *divergentan*.

Ako red (2) konvergira, broj

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

naziva se njegovim *n-tim ostatkom*.

n-tim ostatkom reda (2) naziva se takođe *red* $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ $(n \in \mathbf{N})$, bez obzira na to da li red (2) konvergira ili divergira. Koje od ova dva značenja ima pojam n-tog ostatka uvek treba da bude jasno iz konteksta izlaganja.

Da bi se kratko označilo da niz parcijalnih suma reda (2) teži ka $+\infty$, odnosno ka $-\infty$, piše se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -\infty.$$

1.2.1.3. Operacije sa redovima. Neka su

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{3}$$

dva brojna reda i neka je λ kompleksan broj. Proizvod broja λ i prvog od redova (3), zatim zbir, razlika i Cauchyev proizvod redova (3) definišu se respektivno kao sledeći redovi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda\, a_n); \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n); \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n); \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad (c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}).$$

Ako se za pomenute operacije upotrebe odgovarajuće uobičajene oznake, može se pisati

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n); \tag{4}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \qquad (c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}). \tag{5}$$

Bez teškoća se ustanovljava da prve dve operacije uvode u skup svih brojnih redova (ili u skup svih brojnih redova sa realnim članovima) jednu strukturu vektorskog prostora.

1.2.1.3.1. Ako su oba reda (3) konvergentna, tada konvergira i njihov zbir, i tada su sume ova tri reda vezane drugom jednakošću (4), sa znacima $+$. Ako je jedan od redova (3) konvergentan a drugi divergentan, njihov zbir je divergentan. Ako su oba reda divergentna, njihov zbir može konvergirati ili divergirati. Za razliku redova važe analogna tvrđenja.

Ako je $\lambda \neq 0$, brojni red i njegov proizvod sa λ istovremeno konvergiraju i divergiraju. Drukčije se kaže da su ta dva reda *ekvikonvergentna.*

Na osnovu prethodnog, skup svih konvergentnih brojnih redova je podprostor vektorskog prostora pomenutog u 1.2.1.3.

1.2.1.4. Opšti Cauchyev kriterijum konvergencije redova. Da bi red (2) konvergirao, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$ za svako $n \geq n_0$ i za svako $p \geq 1$.

Posledice.

1.2.1.4.1. Ako je red (2) konvergentan, tada je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

1.2.1.4.2. Ako red (2) konvergira, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=p_n}^{q_n} a_k = 0$ za bilo koja dva niza prirodnih brojeva p_n i q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ koji teže ka $+\infty$.

1.2.1.5. Ako je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan, kaže se da je red (2) *apsolutno konvergentan* ili da *apsolutno konvergira*.

1.2.1.6. Svaki apsolutno konvergentan red je konvergentan.

1.2.1.6.1. Za red koji konvergira, ali ne konvergira apsolutno, kaže se da je *neapsolutno* (*uslovno*) *konvergentan* ili da *neapsolutno* (*uslovno*) *konvergira*.

1.2.1.7. Teorema o Cauchyevom množenju redova. Ako su oba reda (3) konvergentna i bar jedan od njih apsolutno konvergira, tada je njihov Cauchyev proizvod takođe konvergentan i sume ova tri reda vezane su jednakošću (5). Ako su oba reda (3) apsolutno konvergentna, takav je i njihov Cauchyev proizvod. Ako su redovi (3) i njihov Cauchyev proizvod konvergentni, tada su sume ova tri reda vezane jednakošću (5).

Iskazi 1.2.1.8 — 1.2.1.16 odnose se na *redove sa nenegativnim* ili *sa pozitivnim članovima*, tj. na redove oblika (2) sa osobinom da je $a_n \geq 0$, odnosno $a_n > 0$, za n dovoljno veliko. Sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$ često se označava da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa nenegativnim članovima konvergira.

1.2.1.8. Za konvergenciju reda sa nenegativnim članovima potrebno je i dovoljno da njegov niz parcijalnih suma bude ograničen.

1.2.1.9. Ako je $0 \leq a_n \leq b_n$ za dovoljno veliko n, tada konvergencija reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tag{6}$$

povlači konvergenciju reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \tag{6'}$$

a divergencija reda (6′) povlači divergenciju reda (6).

1.2.1.9.1. Ako je, za dovoljno veliko n, $a_n > 0$ i $b_n > 0$ i $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, tada konvergencija reda (6) povlači konvergenciju reda (6′), a divergencija reda (6′) povlači divergenciju reda (6).

1.2.1.9.2. Ako je $a_n \geq 0$ za dovoljno veliko n i

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = a \qquad (0 < a < +\infty),$$

tada su redovi (6) i (6′) ekvikonvergentni.

Prethodne tri teoreme često se nazivaju *principima upoređivanja* za konvergenciju i divergenciju redova sa nenegativnim članovima.

1.2.1.10. Integralni kriterijum konvergencije. Ako je realna funkcija $x \to f(x)$ nenegativna i opadajuća za $x \geq 1$, tada su red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \quad \text{i niz} \quad \int_1^n f(x)\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$\left(\text{ili red } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \text{ i nesvojstven integral } \int_1^{+\infty} f(x)\,dx\right)$ ekvikonvergentni.

1.2.1.11. Cauchyev kondenzacioni kriterijum. Neka je $a_n \geq 0$ i $a_n \searrow$ $(n \in \mathbf{N}_0)$. Tada su redovi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$ ekvikonvergentni.

1.2.1.12. Cauchyev kriterijum. Neka je $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ red sa nenegativnim članovima.

Ako postoji $q \in (0, 1)$ takvo da je $C_n \overset{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a_n} \leq q$ za dovoljno veliko n, tada ovaj red konvergira. Ako je $C_n \geq 1$ za proizvoljno velike vrednosti n, isti red divergira.

1.2.1.12.1. Drugi oblik Cauchyevog kriterijuma. Neka je $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ red sa nenegativnim članovima. Ako je $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, C_n < 1$, posmatrani red konvergira, a ako je $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, C_n > 1$, isti red divergira.

Svi iskazi 1.2.1.13 — 1.2.1.16.2 odnose se na red sa pozitivnim članovima

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n. \tag{7}$$

1.2.1.13. D'Alembertov kriterijum. Ako postoji $q \in (0, 1)$ takvo da je, za dovoljno veliko n, $D_n \overset{\text{def}}{=} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$, tada red (7) konvergira. Ako je $D_n \geq 1$ za dovoljno veliko n, red (7) divergira.

1.2.1.13.1. Drugi oblik D'Alembertovog kriterijuma. Ako je $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, D_n < 1$, red (7) konvergira, a ako je $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, D_n > 1$, red (7) divergira.

1.2.1.14. Kummerov kriterijum. Neka je $b_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ako postoji $\delta > 0$ takvo da je za dovoljno veliko n

$$K_n \overset{\text{def}}{=} b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq \delta,$$

tada red (7) konvergira. Ako red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{b_n}$ divergira i važi jednakost $K_n \leq 0$ za dovoljno veliko n, tada red (7) divergira.

1.2.1.14.1. Drugi oblik: Neka je $b_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Ako je $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, K_n > 1$, red (7) konvergira. Ako je red $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/b_n$ divergentan i $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, K_n < 1$, tada red (7) divergira.

1.2.1.15. Raabeov kriterijum. Ako postoji broj $\mu > 1$ takav da je za dovoljno veliko n

$$R_n \overset{\text{def}}{=} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \mu,$$

tada red (7) konvergira. Ako je $R_n \leq 1$ za dovoljno veliko n, red (7) divergira.

1.2.1.15.1. Drugi oblik. Nejednakost $\underline{\lim}_{n\to+\infty} R_n > 1$ povlači konvergenciju, a nejednakost $\overline{\lim}_{n\to+\infty} R_n < 1$ divergenciju reda (7).

1.2.1.15′. Bertrandov kriterijum. Sa oznakom

$$B_n \overset{\text{def}}{=} \left(n\,(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) - 1\right)\log n,$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} B_n > 1$ povlači konvergenciju, a $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n < 1$ divergenciju reda (7).

1.2.1.16. Gaussov kriterijum.

1.2.1.16.1. Prva varijanta (Opšti slučaj). Ako je za dovoljno veliko n

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = l + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

gde su l, λ i $\varepsilon > 0$ fiksirani brojevi, tada red (7) konvergira kada je $l > 1$, ili $l = 1$ i $\lambda > 1$, a divergira kada je $l < 1$, ili $l = 1$ i $\lambda \leq 1$.

1.2.1.16.2. Druga varijanta. Neka je za dovoljno veliko n količnik a_n/a_{n+1} racionalna funkcija od n oblika $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{n^p + \alpha\, n^{p-1} + \cdots}{n^p + \beta\, n^{p-1} + \cdots}$.
Tada red (7) konvergira ili divergira prema tome da li je $\alpha - \beta > 1$ ili $\alpha - \beta \leq 1$.

1.2.1.17. Pringsheimova teorema. Ako je za dovoljno veliko n niz a_n nenegativan i nerastući, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} (na_n) = 0$ potreban uslov za konvergenciju reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Ovaj uslov nije dovoljan.

1.2.1.18. Naizmenični redovi.

1.2.1.18.1. Definicija. *Naizmeničnim* (*alternativnim*) redom naziva se brojni red oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n, \quad \text{sa} \quad b_n \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

1.2.1.18.2. Leibnitzova teorema o naizmeničnim redovima. Ako je $b_n \searrow$ za $n \geq 1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, tada naizmenični red (8) konvergira i za njegov n-ti ostatak $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} b_k$ važi procena

$$R_n = (-1)^n\, \theta_n\, b_n \quad (0 \leq \theta_n \leq 1;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Ako je, specijalno, $b_n \downarrow$ $(n \geq 1)$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, važi preciznija procena

(10) $$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 < \theta_n < 1;\ n = 1, 2, \ldots).$$

(10) se može rečima iskazati ovako: n-ti ostatak ima znak prvog izostavljenog člana reda i po apsolutnoj vrednosti je manji od njega. (9) se iskazuje na sličan način.

Jedan praktičan metod za ispitivanje konvergencije reda oblika

(11) $$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n \quad (b_n > 0 \text{ za dovoljno veliko } n)$$

daje sledeći stav: Neka je za dovoljno veliko n

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),$$

gde su λ i $\varepsilon > 0$ fiksirani brojevi. Tada red (11) apsolutno konvergira, neapsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $\lambda > 1$, $0 < \lambda \leq 1$, ili $\lambda \leq 0$.

Specijalno, ako je za dovoljno veliko n količnik b_n/b_{n+1} racionalna funkcija oblika

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{n^p + \alpha n^{p-1} + \cdots}{n^p + \beta n^{p-1} + \cdots},$$

tada red (1) apsolutno konvergira, neapsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $\alpha - \beta > 1$, $0 < \alpha - \beta \leq 1$, ili $\alpha - \beta \leq 0$.

1.2.1.19. Dirichletov kriterijum. Ako je: 1° niz $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ograničen i 2° niz b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ za dovoljno veliko n monotono teži nuli, tada red

(12) $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

konvergira.

1.2.1.20. Abelov kriterijum. Ako je: 1° red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konvergentan i 2° niz b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ za n dovoljno veliko monoton i ograničen, tada red (12) konvergira.

1.2.1.21. Grupisanje i permutovanje članova kod redova.

1.2.1.21.1. Neka je p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ strogo rastući niz prirodnih brojeva i neka je $p_0 = 0$ i $A_n = \sum_{k=p_{n-1}}^{p_n - 1} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Tada se kaže da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n$ *dobijen grupisanjem članova* reda (7).

1.2.1.21.2. Neka je φ jedna permutacija skupa $\mathbf{N}_0$ (jedno biunivoko preslikavanje tog skupa na sebe samog). Tada se niz

$$b_n = a_{\varphi(n)} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

naziva *permutacija* niza a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, a za red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ kaže se da je *dobijen permutovanjem članova* reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$, ili, kraće, da je *permutacija* reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1.2.1.21.3. Ako jedan red konvergira, tada svaki red dobijen od tog reda grupisanjem njegovih članova takođe konvergira.

Ako red dobijen od datog reda grupisanjem njegovih članova (apsolutno) konvergira, dati red ne mora (apsolutno) konvergirati.

1.2.1.21.4. Da bi konvergentan red ostao konvergentan posle bilo kakvog permutovanja njegovih članova, potrebno je i dovoljno da taj red bude apsolutno konvergentan.

1.2.1.21.5. Ako brojni red sa realnim članovima neapsolutno konvergira, tada su redovi formirani od njegovih pozitivnih i od njegovih negativnih članova (bez promene poretka) oba divergentni.

1.2.1.21.6. U istom slučaju, neka je a proizvoljan realan broj ili jedan od simbola $-\infty$ i $+\infty$. Tada postoji red dobijen permutovanjem članova posmatranog reda čija je suma a (Riemannova teorema).

1.2.1.22. Brzina konvergencije realnih brojnih redova. Neka konvergentni realni brojni redovi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$ imaju respektivno ostatke R_n i $\overline{R_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Tada se kaže da prvi red *brže konvergira* nego drugi ako je

$$R_n = o\,(|\overline{R_n}|) \quad (n \to +\infty).$$

Za dati konvergentan red od posebnog su interesa, naročito sa gledišta približnog izračunavanja njegove sume, redovi koji brže konvergiraju ka istoj sumi, ili ka sumi vezanoj sa sumom datog reda nekom jednostavnom relacijom.

1.2.1.22.1. Ako je $b_n > 0$ za dovoljno veliko n i $a_n = o\,(b_n)\,(n \to +\infty)$, tada red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ brže konvergira nego red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

1.2.1.22.2. Ako je $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = S \in \mathbf{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = \sigma$, tada je

$$S = \lambda\sigma + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \lambda \frac{b_n}{a_n}\right) a_n$$

(Kummerova transformacija reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$).

Pri tome, ako je a_n stalnog znaka za dovoljno veliko n, red

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\lambda\frac{b_n}{a_n}\right)a_n$$

brže konvergira nego red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1.2.1.22.3. Eulerova transformacija. Ako je $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S \in \mathbf{R}$, tada je

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_k = S.$$

Neka niz b_n $(n=0, 1, \ldots)$ ispunjava sledeće uslove:

1° Važe nejednakosti $D^{(k)} b_n > 0$ $(n=0, 1, \ldots;\ k=1, 2, \ldots)$, gde je $D^{(1)} b_n = b_n - b_{n+1}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$; $D^{(k+1)} b_n = D^{(k)} b_n - D^{(k)} b_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ k=1, 2, \ldots)$; kaže se da je u tom slučaju niz (b_n) *kompletno opadajući*;

2° $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$;

3° postoji $b > \frac{1}{2}$ takvo da je $\frac{b_{n+1}}{b_n} \geq b$ za dovoljno veliko n.

Tada red dobijen Eulerovom transformacijom reda $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n b_n$ brže konvergira od ovog reda.

1.2.1.23. Važe sledeće procene ostatka $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ konvergentnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1° Ako je $|a_{k+1}/a_k| \leq q < 1$ za $k \geq n_0 \in \mathbf{N}$, tada

$$|R_n| \leq |a_n|\frac{q}{1-q} \quad (n \geq n_0),$$

a takođe i

$$|R_n| \leq |a_{n_0}|\frac{q^{n+1-n_0}}{1-q} \quad (n \geq n_0).$$

2° Ako je $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ za $k > n_0$, tada

$$|R_n| \leq \frac{q^{n+1}}{1-q} \quad (n \geq n_0).$$

3° Ako je: $a_k = b_k c_k$, b_k opadajući niz, $\left|\sum_{k=1}^{m} c_k\right| \leq M < +\infty$ $(m \geq n_0)$ i sem toga $\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$ (uslovi Dirichletovog kriterijuma), tada

$$|R_n| \leq 2\,Mb_{n+1} \quad (n \geq n_0).$$

Ako je, specijalno, $c_k = \sin kx$ $(k \in \mathbf{N})$, ili $c_k = \cos kx$ $(k \in \mathbf{N})$, važi procena

$$|R_n| \leq \frac{2b_{n+1}}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|} \qquad (n \in \mathbf{N};\ x \notin (2k\pi;\ k \in \mathbf{Z})).^*$$

4° Ako je $a_k = f(k)$ $(k \geq n_0 \in \mathbf{N})$, gde je funkcija $x \mapsto f(x)$ za $x \geq n_0$ nenegativna i opadajuća, i pri tome integral $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira, tada je

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int_{n}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (n \geq n_0),$$

pri čemu su obe nejednakosti stroge u slučaju kada je $x \mapsto f(x)$ strogo opadajuća funkcija za $x \geq n_0$.

Specijalno, $\dfrac{1}{(a-1)(n+1)^{a-1}} < \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} < \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}$ $(n \in \mathbf{N};\ a > 1)$.

1.2.1.24. Dvostruki nizovi i redovi

1.2.1.24.1. Svaka funkcija

$$\mathbf{a}: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{C}$$

naziva se *dvostrukim nizom* (kompleksnih brojeva). Ako je $\mathbf{a}(\mathbf{N} \times \mathbf{N}) \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{a}$ je, specijalno, *dvostruki niz realnih brojeva* ili *realan dvostruki niz.*

Umesto $\mathbf{a}((p, q))$ $(p, q \in \mathbf{N})$, obično se piše $a_{(p,q)}$, ili, češće, $a_{p,q}$, i u vezi sa tim, sam dvostruki niz $\mathbf{a}$ označava se na sledeći način

(13) $$a_{p,q} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots).$$

U prethodnom izlaganju skup $\mathbf{N}$ može na svim mestima biti zamenjen skupom $\mathbf{N}_0$.

Uređena trojka $(p, q, a_{p,q})$ naziva se (p, q)-ti član niza (13). Često se, uprošćavajući izražavanje, kaže i da je $a_{p,q}$ (p, q)-ti član niza (13).

1.2.1.24.2. Neka je $\mathbf{a}$ dvostruki niz kompleksnih brojeva, tj. jedno preslikavanje skupa $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ u $\mathbf{C}$, i neka je φ jedno biunivoko preslikavanje skupa $\mathbf{N}$ na skup $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Tada se niz kompleksnih brojeva b_n $(n = 1, 2, \ldots)$, gde je $b_n = a_{(\varphi(n))}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ naziva *svrstavanjem* (*u jednostruki niz*) dvostrukog niza (13).

1.2.1.24.3. Kaže se da dvostruki niz (13) *konvergira* ili *teži* ka kompleksnom broju b, ili da ima graničnu vrednost (limes) b, u oznaci

$$\lim_{\substack{p \to +\infty \\ q \to +\infty}} a_{p,q} = b, \text{ ili } a_{p,q} \to b \quad (p, q \to +\infty),$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji takvo $n_0 \in \mathbf{N}$ da je

$$|a_{p,q} - b| < \varepsilon \quad \text{čim je} \quad p, q \geq n_0.$$

Analogno se definiše i označava osobina dvostrukog realnog niza da teži ka $-\infty$ ili ka $+\infty$.

* Nije, međutim, teško ustanoviti da se u ovom slučaju iz desne strane nejednakosti može ukloniti faktor 2.

1.2.1.24.4. Cauchyev kriterijum za konvergenciju dvostrukih nizova. Da bi dvostruki niz (13) konvergirao, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$|a_{r,s} - a_{p,q}| < \varepsilon \quad \text{čim je} \quad p, q, r, s \geq n_0.$$

1.2.1.24.5. Neka je

$$a_{p,q} \quad (p, q = 0, 1, 2, \ldots) \tag{14}$$

dvostruki niz kompleksnih brojeva. Simbol formalnog beskonačnog sumiranja

$$\sum_{p=0,\, q=0}^{+\infty} a_{p,q} \quad \Bigl(\text{ili} \ \sum_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q}\Bigr), \tag{15}$$

ili, u razvijenom obliku,

$$\begin{aligned} & a_{0,0} + a_{0,1} + \cdots + a_{0,n} + \cdots \\ & + a_{1,0} + a_{1,1} + \cdots + a_{1,n} + \cdots \\ & + \cdots \\ & + a_{n,0} + a_{n,1} + \cdots + a_{n,n} + \cdots \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{15'}$$

naziva se *dvostruki red.*

(p, q)-ti član niza (14) naziva se *(p, q)-tim članom* dvostrukog reda (15) odnosno (15').

Ako je niz b_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ jedno svrstavanje niza (14), kaže se da je red $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *svrstavanje (u jednostruki red) dvostrukog reda* (15).

1.2.1.24.6. Za dvostruki red kaže se da *konvergira* (ili da *apsolutno konvergira*) ako svako njegovo svrstavanje konvergira. U suprotnom slučaju za dvostruki red se kaže da *divergira.*

Da bi dvostruki red konvergirao, potrebno je i dovoljno da jedno njegovo svrstavanje bude apsolutno konvergentan red.

Ako dvostruki red konvergira, zajednička vrednost suma svih njegovih svrstavanja naziva se *zbirom* (*sumom*) dvostrukog reda. On se označava istim simbolom kao i sam dvostruki red.

1.2.1.24.7. Dvostruki redovi (15) i

$$\sum_{p,\, q=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \tag{16}$$

su ekvikonvergentni. Za konvergenciju reda (15) potrebno je i dovoljno da postoji pozitivan konačan broj M takav da je svaki zbir konačnog broja članova reda (16) (bez ponavljanja istih članova) manji od M.

1.2.1.24.8. Neka je $|a_{p,q}| \leq |b_{p,q}|$, sem za konačan broj parova indeksa.

Tada konvergencija reda

$$\sum_{p,\, q=0}^{+\infty} b_{p,q} \tag{17}$$

povlači konvergenciju dvostrukog reda (15), a divergencija reda (15) povlači divergenciju reda (17).

1.2.1.24.9. Broj S je suma dvostrukog reda (15) ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je, za svaki zbir Σ konačnog broja članova reda (15) (bez ponavljanja istih članova) koji sadrži sve članove oblika $a_{p,q}$ $(p \leq n_0, q \leq n_0)$,

$$|\Sigma - S| < \varepsilon.$$

1.2.1.24.10. Ako redovi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergiraju, tada dvostruki red $\sum_{p,q=0}^{+\infty} a_p b_q$ konvergira i važi jednakost

$$\sum_{p,q=0}^{+\infty} a_p b_q = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \sum_{q=0}^{+\infty} b_q.$$

1.2.1.24.11. Neka je dvostruki red (15) konvergentan. Tada:

1° Svaki od redova $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ $(p \in \mathbf{N}_0)$ apsolutno konvergira; neka S_p označava sumu p-tog od tih redova.

2° Red $\sum_{q=0}^{+\infty} S_p$ apsolutno konvergira i važi jednakost

$$\sum_{p=0}^{+\infty} S_p = \sum_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q}.$$

3° Odgovarajući iskazi važe i za redove $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$ $(q \in \mathbf{N}_0)$, tako da su tačne jednakosti

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = \sum_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q}. \tag{18}$$

Ako je jedan od brojeva

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} |a_{p,q}| \quad \text{i} \quad \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,q}|$$

konačan, tada je konačan i drugi od njih i dvostruki red (15) konvergira, pa važe jednakosti (18).

1.2.1.24.12. Na analogan način definišu se m-tostruki nizovi i redovi (m prirodan broj)

$$a_{p_1, p_2, \ldots, p_m}, \text{ odnosno } \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_m = 0}^{+\infty} a_{p_1, p_2, \ldots, p_m}.$$

Prethodni rezultati koji se odnose na dvostruke redove mogu se preneti na ovaj opšti slučaj.

Primedba. Postoji i drukčija definicija **konvergencije** i sume dvostrukog reda.

$$(\alpha) \qquad \sum_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q},$$

prema kojoj se za dvostruki red (α) kaže da konvergira i ima sumu S ako je

$$\lim_{p,q\to+\infty} S_{p,q} = S \in \mathbf{R},$$

gde je $S_{p,q} = \sum_{k=0}^{p} \sum_{l=0}^{q} a_{k,l}$. I u tom slučaju piše se $\sum_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q} = S$.

Ovakva konvergencija dvostrukog reda (α) naziva se i *relativnom* ili *uslovnom konvergencijom*, **za razliku od gore definisane konvergencije, kojoj se daje i naziv *apsolutne konvergencije*.**

Ranija i prethodna definicija konvergencije dvostrukog reda nisu ekvivalentne. Naime, ako red (α) konvergira u smislu ranije definicije (tj. ako je apsolutno konvergentan), tada on konvergira i u smislu prethodne definicije (tj. relativno konvergira) i ima isti broj kao sumu u smislu obe definicije. Relativna konvergencija reda (α), međutim, ne povlači njegovu apsolutnu konvergenciju.

Ako oba izraza

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} \quad \text{i} \quad \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}$$

imaju određene i konačne vrednosti, pa čak i kad su te vrednosti međusobno jednake, red (α) ne mora relativno konvergirati.

S druge strane, relativna konvergencija reda (α) ne povlači ni konvergenciju svih jednostrukih redova

$$(\beta) \qquad \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} \quad (p = 0, 1, 2, \ldots),$$

ni svih jednostrukih redova

$$(\gamma) \qquad \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \quad (q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Isto tako, kad dvostruki red (α) relativno konvergira, red $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} a_{p,n-p}$ (sumiranje po sporednim dijagonalama) ne mora konvergirati, niti mora, ukoliko je konvergentan, imati istu sumu kao red (α).

Važi, međutim, sledeći stav (Pringsheim):

Neka dvostruki red (γ) relativno konvergira ka sumi S. Ako su tada svi redovi (β) konvergentni, važi jednakost

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q},$$

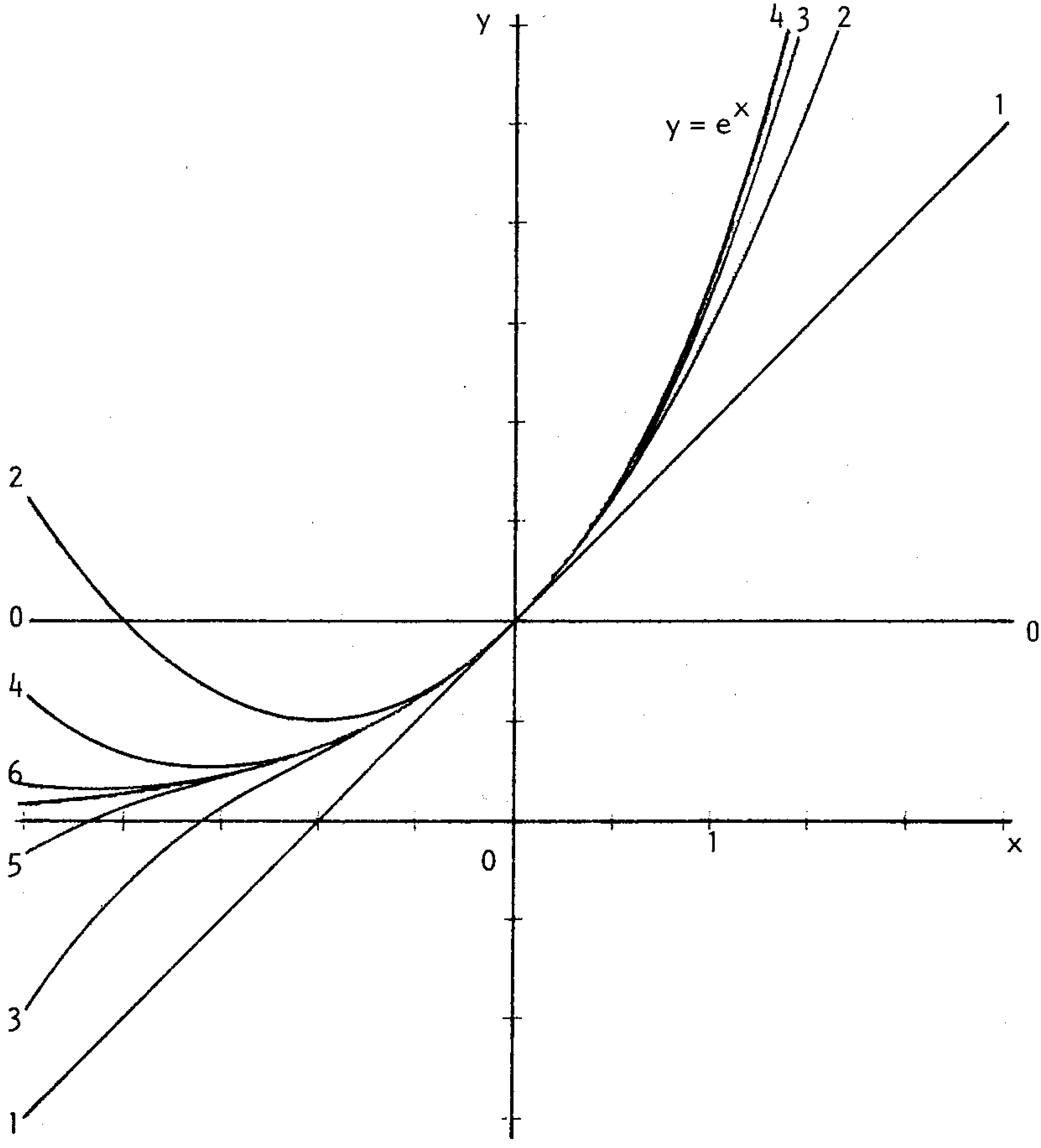
a ako su konvergentni svi redovi (γ), važi

$$S = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q}.$$

1.2.2. FUNKCIONALNI REDOVI

1.2.2.1. Slično kao u slučaju nizova, na osnovu pojma brojnog reda dolazi se do pojma funkcionalnog reda, koji ima oblik

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x), \text{ ili } u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \tag{19}$$



Slika prikazuje približavanje parcijalnih suma funkcionalnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ka sumi tog reda e^x.

Grafik n-te parcijalne sume posmatranog reda, na ovoj i na sledeće dve slike, označen je brojem n.

gde su $x \mapsto u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ realne funkcije realne promenljive, definisane na istom skupu.

Umesto »funkcionalan red . . . « može se, u odgovarajućem kontekstu, reći i samo »red . . . «.

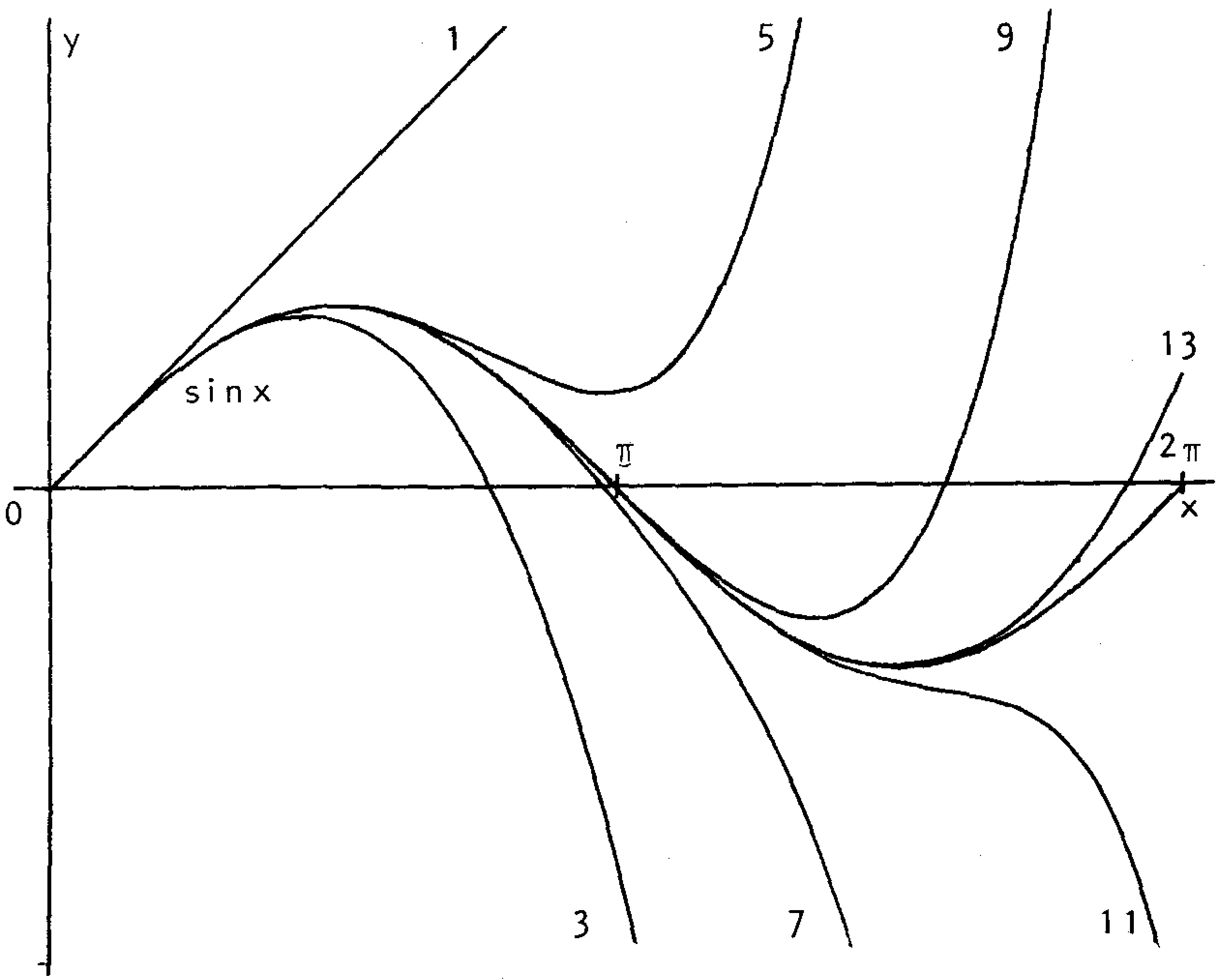
Pojmovi »konvergencije u tački« i »skupa konvergencije« definišu se za funkcionalni red (19) na isti način kao za funkcionalni niz.

Za funkcionalni red (19) kaže se da je *uniformno ograničen* odnosno *uniformno konvergentan* na nekom skupu $E\,(\subset \mathbf{R})$ ako je njegov niz parcijalnih suma

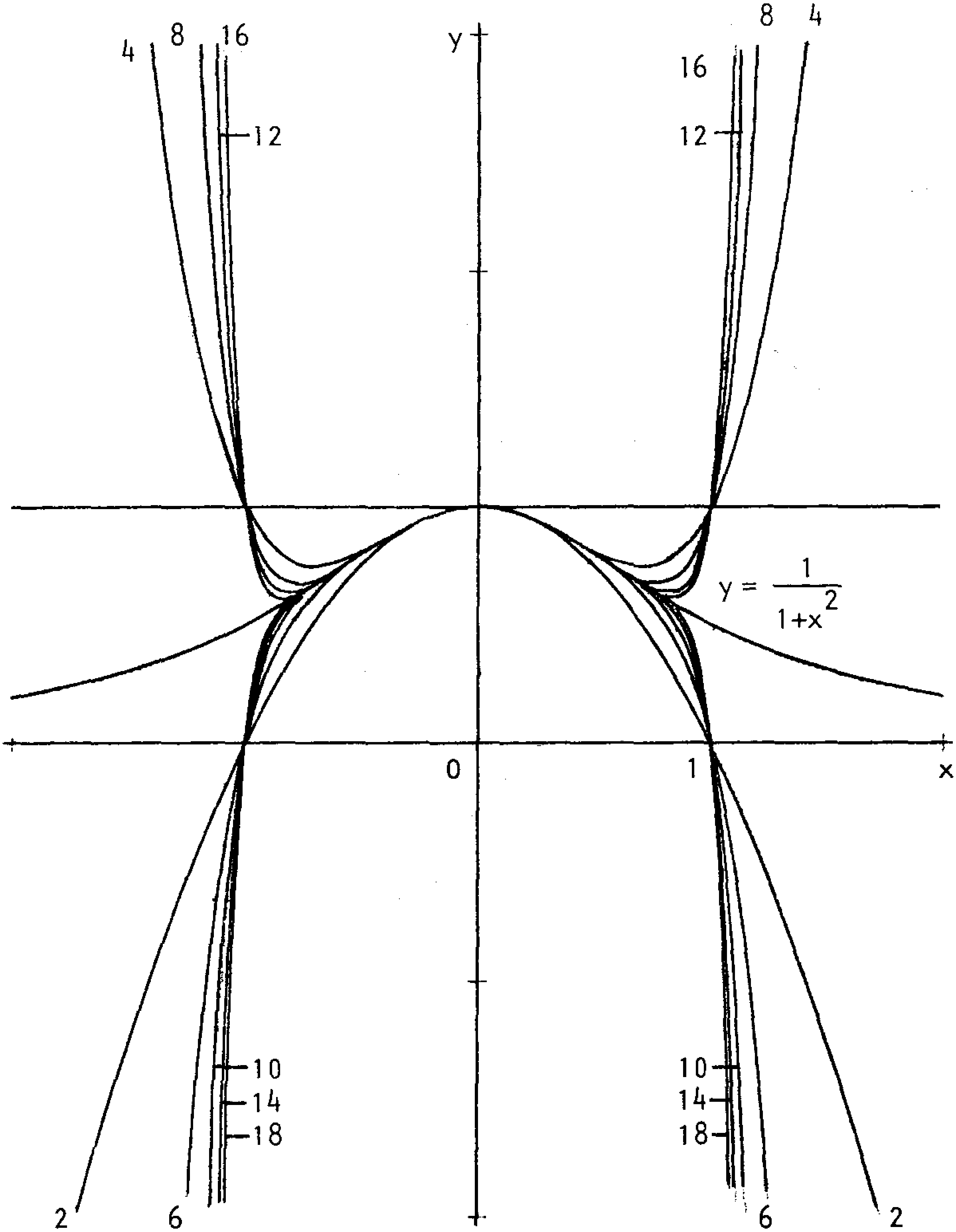
$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

uniformno ograničen odnosno uniformno konvergentan na istom skupu.

Od rezultata koji će biti dole navedeni, rezultati 1.2.2.2 — 1.2.2.6 važe i za realne i za kompleksne funkcionalne redove (i njihovi dokazi za ta dva slučaja u suštini su istovetni), dok se rezultati 1.2.2.7 i 1.2.2.8 odnose samo na realne funkcionalne redove. Formulacije standardnih stavova o integraciji i diferenciranju kompleksnih funkcionalnih redova zahtevaju pojmove teorije analitičkih funkcija i stoga ih nećemo ovde navesti



Približavanje grafika parcijalnih suma funkcionalnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ ka grafiku njegove sume $x \mapsto \sin x$.



Približavanje parcijalnih suma funkcionalnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ ka njegovoj sumi

$$x \to \frac{1}{1+x^2}, \text{ za } -1 < x < 1.$$

1.2.2.2. Cauchyev kriterijum za uniformnu konvergenciju funkcionalnog reda. Red (19) uniformno konvergira na E ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 (\in \mathbf{N})$ takvo da je

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \text{ čim je } n \geq n_0,\ p \in \mathbf{N} \text{ i } x \in E.$$

1.2.2.3. Weierstrassov kriterijum. Ako je $|u_n(x)| \leq a_n$ ($x \in E$; n dovoljno veliko), gde je brojni red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konvergentan, tada red (19) uniformno konvergira na skupu E.

1.2.2.4. Dirichletov kriterijum. Neka je:

1° niz parcijalnih suma reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x) \tag{20}$$

uniformno ograničen na E;

2° niz

$$b_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{21}$$

za svako $x \in E$ monoton i uniformno konvergira ka nuli na skupu E.

Tada red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x)\, b_n(x) \tag{22}$$

uniformno konvergira na skupu E.

1.2.2.5. Abelov kriterijum. Neka: 1° red (20) uniformno konvergira na E; 2° niz (21) je uniformno ograničen na E i za svako $x \in E$ je monoton. Tada je red (22) uniformno konvergentan na E.

1.2.2.6. Ako su sve funkcije

$$x \mapsto u_n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{23}$$

neprekidne na nekom skupu E i red (19) je na skupu E uniformno konvergentan, tada je suma ovog reda na E neprekidna.

1.2.2.7. Ako su sve funkcije (23) integrabilne u Riemannovom smislu u intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ i red (19) uniformno konvergira na $[a, b]$, tada je suma reda (19) u Riemannovom smislu integrabilna u $[a, b]$ i važi jednakost

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \tag{24}$$

1.2.2.7.1. Jednakost (24) ostaje tačna kad se u prethodnom iskazu pretpostavka o uniformnoj konvergenciji reda (19) zameni pretpostavkom o uniformnoj ograničenosti na $[a, b]$ niza parcijalnih suma istog reda, pod uslovom da je njegova suma integrabilna na $[a, b]$ u Riemannovom smislu.

1.2.2.8. Neka su sve funkcije (23) definisane u intervalu (a, b) $(a < b)$. Ako su spunjeni sledeći uslovi:

1° red (19) konvergira za neko $x_0 \in (a, b)$;

2° sve funkcije $x \mapsto u_n'(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ su neprekidne u (a, b);

3° red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$ uniformno konvergira na svakom ograničenom i zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b), — tada:

a) red (19) uniformno konvergira na svakom ograničenom i zatvorenom intervalu sadržanom u (a, b);

b) suma reda (19) diferencijabilna je u (a, b);

c) za svako $x \in (a, b)$ važi jednakost

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

1.2.2.8.1. Prethodni iskaz ostaje tačan ako se u njemu uslov 2° zameni uslovom da je $x \mapsto u_n'(x)$ konačno za $x \in (a, b)$ i $n = 0, 1, 2, \ldots$

1.2.3. BESKONAČNI PROIZVODI

1.2.3.1. Neka je

$$p_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

niz kompleksnih brojeva. Simbol formalnog beskonačnog množenja

$$\prod_{n=0}^{+\infty} p_n, \text{ ili, u razvijenom obliku, } p_0 p_1 p_2 \cdots, \tag{26}$$

naziva se *beskonačnim proizvodom.* Proizvod $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ zove se *n-tim parcijalnim proizvodom* beskonačnog proizvoda (26).

Termin »beskonačni proizvod« ponekad se zamenjuje kraćim terminom »proizvod«.

1.2.3.2. Kaže se da beskonačni proizvod *konvergira* ako niz njegovih parcijalnih proizvoda konvergira konačnom broju različitom od nule. Ovaj broj naziva se *vrednost beskonačnog proizvoda* i označava istim simbolom kao i sam beskonačni proizvod.

Ako je konačan broj članova niza (25) jednak nuli, a beskonačni proizvod koji odgovara nizu dobijenom izostavljanjem ovih članova konvergira u napred preciziranom smislu, kaže se takođe da beskonačni proizvod (26) *konvergira* i da je njegova vrednost nula.

U svim ostalim slučajevima za beskonačni proizvod (26) kaže se da *divergira.* Pri tome, ako je, specijalno, najviše konačno mnogo članova niza (25) jednako nuli, a niz parcijalnih proizvoda beskonačnog proizvoda formiranog od preostalih članova konvergira ka nuli, kaže se da proizvod (26) *divergira ka nuli.*

1.2.3.2.1. U svim slučajevima kad $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = P$ postoji, kao konačna ili beskonačna vrednost (bez obzira na to da li proizvod (26) konvergira u smislu prethodne definicije), može se pisati $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = P$.

1.2.3.3. Da bi beskonačni proizvod (26) konvergirao, potrebno je da bude

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 1. \tag{27}$$

Ovaj uslov nije dovoljan.

1.2.3.3.1. S obzirom na prethodno, često se beskonačni proizvod (26) označava sa

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + u_n). \tag{28}$$

U tom slučaju u_n se naziva *n-tim članom* beskonačnog proizvoda (28). Uslov (27) postaje tada $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

1.2.3.4. Za konvergenciju beskonačnog proizvoda (28) potrebno je i dovoljno da red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \log(1 + u_n)$, sa dovoljno velikim prirodnim brojem n_0 i sa vrednostima od $\operatorname{Im}\{\log(1 + u_n)\}$ sadržanim **u intervalu** $(-\pi, \pi]$ **za** $n \geq n_0$, **bude konvergentan.**

1.2.3.5. Za konvergenciju beskonačnog proizvoda (28) potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav prirodan broj n_0 da je za svako $n \geq n_0$ i $p \geq 1$

$$\left| \prod_{k=n+1}^{n+p} (1 + u_k) - 1 \right| < \varepsilon.$$

1.2.3.6. Ako je $u_n \geq 0$ za dovoljno veliko n, ili je $u_n < 0$ za dovoljno veliko n, tada beskonačni proizvod (28) konvergira ako i samo ako konvergira red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n. \tag{29}$$

1.2.3.7. Apsolutna konvergencija. Ako je beskonačni proizvod $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1 + |u_n|)$ konvergentan, za beskonačni proizvod (28) kaže se da je *apsolutno konvergentan.*

1.2.3.7.1. Svaki apsolutno konvergentan beskonačni proizvod je konvergentan.

1.2.3.7.2. Beskonačni proizvod (28) apsolutno konvergira ako i samo ako red (29) apsolutno konvergira.

1.2.3.7.3. Ako je beskonačan proizvod apsolutno konvergentan, onda su sve njegove permutacije konvergentni beskonačni proizvodi i imaju istu vrednost. Pri tome se *permutacijom* proizvoda (28) naziva svaki beskonačan proizvod oblika $\prod\limits_{n=0}^{+\infty} (1 + v_n)$, gde je v_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ permutacija niza u_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ (videti 1.2.1.21.2).

1.2.3.8. Neka je red (29) konvergentan. Tada beskonačni proizvod (28) konvergira ili divergira ka nuli prema tome da li je red $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ konvergentan ili divergentan.

1.2.3.9. Beskonačni proizvodi funkcija. Kaže se da beskonačni proizvod funkcija (realnih ili kompleksnih) nezavisno promenljive x (realne ili kompleksne) $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n(x))$ konvergira na skupu S ($\subset \mathbf{R}$ ili $\subset \mathbf{C}$, prema slučaju) ako su sve funkcije $x \mapsto u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ definisane na S i brojni beskonačni proizvod $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n(x_0))$ konvergira za svako $x_0 \in S$.

1.2.3.9.1. Za beskonačni proizvod funkcija $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n(x))$ kaže se da *uniformno konvergira* na skupu S ako konvergira na S i ako funkcionalni niz $\prod_{k=0}^{n} (1+u_k(x))$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ uniformno konvergira na S.

1.2.3.9.2. Neka su sve funkcije $x \to u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ definisane na skupu S. Ako postoje takvi brojevi a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ da je

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad (x \in S;\ n \in \mathbf{N}_0) \text{ i } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty,$$

tada beskonačni proizvod $\prod_{n=0}^{+\infty} (1+u_n(x))$ uniformno konvergira na S.

1.2.4. POTENCIJALNI REDOVI

1.2.4.1. *Potencijalnim* (*stepenim*) *redom* naziva se svaki funkcionalni red oblika

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \tag{30}$$

ili, opštije, oblika

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n. \tag{30'}$$

Ovde se pretpostavlja da su a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$, kao i x i x_0, kompleksni brojevi. Često se posebno proučavaju redovi (30') kod kojih su a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$, x i x_0 realni brojevi. Takve redove zovemo *realnim potencijalnim redovima*, a redove (30') u opštem slučaju *kompleksnim potencijalnim redovima*. Izlaganje koje sleduje odnosiće se najvećim delom na kompleksne potencijalne redove.

Treba napomenuti da se neki od rezultata koje ćemo niže izneti drukčije dokazuju za slučaj kompleksnog nego za slučaj realnog potencijalnog reda: u kompleksnom slučaju oni se izvode iz opštih rezultata teorije kompleksnih analitičkih funkcija.

Potencijalni red oblika (30') može se lako, jednostavnom smenom, svesti na potencijalni red oblika (30). Stoga se ono što sleduje najvećim delom direktno odnosi samo na potencijalne redove oblika (30).

1.2.4.2. Poluprečnik i krug konvergencije

1.2.4.2.1. Za svaki potencijalni red (30) realizuje se jedan od sledeća tri slučaja:

1° red konvergira za $x = 0$, a divergira za $x \neq 0$;

2° postoji takav pozitivan i konačan broj R da red apsolutno konvergira za $|x| < R$ a divergira za $|x| > R$;

3° red apsolutno konvergira za svako x.

Broj R iz slučaja 2° naziva se *poluprečnikom* (*radijusom*) *konvergencije* reda (30). Ovaj pojam prenosi se i na slučajeve 1° i 3°, stavljajući da je u njima redom $R = 0$ i $R = +\infty$. Sa tako proširenom definicijom, poluprečnik konvergencije postoji za svaki red (30).

1.2.4.2.2. Hadamardova formula. U svim slučajevima poluprečnik konvergencije potencijalnog reda (30) dat je formulom

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

pri čemu se u slučajevima kad je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ i $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ desnoj strani formule redom pripisuju vrednosti 0 i $+\infty$.

Pod pretpostavkom egzistencije limesa na desnoj strani, važi i *D'Alembertova formula*

$$R = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

1.2.4.2.3. U slučajevima 1° i 2° iz 1.2.4.2.1 oblast kompleksne ravni $|x| \leq R$ naziva se *krugom konvergencije* potencijalnog reda (30). U slučaju 3° kaže se da je čitava kompleksna ravan krug konvergencije.

U slučaju realnog potencijalnog reda oblika (30), ako je $R < +\infty$, tada se $[-R, R]$ naziva *intervalom konvergencije* reda, a ako je $R = +\infty$, interval konvergencije je, po definiciji, skup svih realnih brojeva.

1.2.4.2.4. Ako je $0 < R < +\infty$, na krugu $|x| = R$ red (30) može: svuda divergirati, u nekim tačkama divergirati i u nekim neapsolutno konvergirati i, najzad, svuda apsolutno konvergirati.

Ako je $0 < R < +\infty$ i red (30) realan, tada (30) može: divergirati za $x = \pm R$, neapsolutno konvergirati za $x = -R$ i divergirati za $x = +R$, divergirati za $x = -R$ i neapsolutno konvergirati za $x = +R$, neapsolutno konvergirati za $x = \pm R$ i, najzad, apsolutno konvergirati za $x = \pm R$.

Skup svih tačaka u kojima red (30) konvergira, a koji se u tom slučaju naziva *tačnim intervalom konvergencije* reda (30), može, dakle, biti: $(-R, +R)$, $[-R, +R)$, $(-R, +R]$ ili $[-R, +R]$.

1.2.4.2.5. Ako je $R > 0$ poluprečnik konvergencije reda (30), tada red (30) uniformno konvergira za $|x| \leq r < R$. U slučaju kad je red (30) realan, on uniformno konvergira na svakom intervalu oblika $[-r, +r]$ $(0 < r < R)$.

Prema tome, ako je $R > 0$, suma reda (30) je neprekidna funkcija u krugu $|x| < R$, odnosno u intervalu $(-R, R)$.

1.2.4.2.6. Neka je $R \in (0, +\infty)$ poluprečnik konvergencije reda (30). Ako je

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| R^n < +\infty,$$

tj. drukčije rečeno, ako red (30) apsolutno konvergira bar u jednoj tački periferije svog kruga konvergencije, odnosno bar na jednom kraju svog intervala konvergencije, tada red (30) uniformno konvergira za $|x| \leq R$ i u tom slučaju njegova suma je neprekidna funkcija na krugu $|x| \leq R$, odnosno na intervalu $[-R, +R]$.

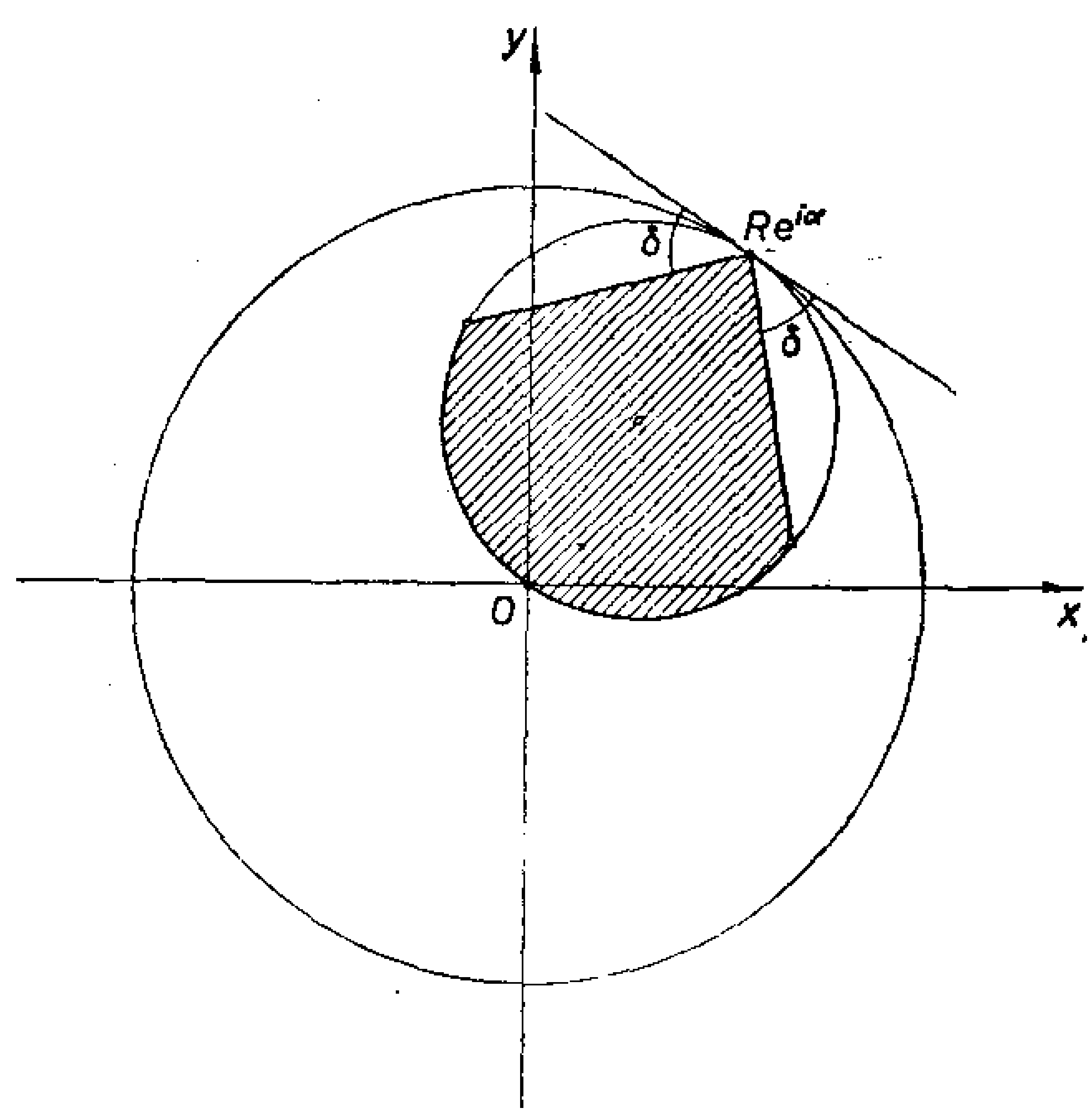
1.2.4.3. Abelova teorema.

1.2.4.3.1. *Slučaj realnog reda.* Neka je (30) realan potencijalan red i $R \in (0, +\infty)$ njegov poluprečnik konvergencije. Ako on konvergira za $x = R$ (za $x = -R$), tada on uniformno konvergira za $x \in [0, R]$ (za $x \in [-R, 0]$), tako da je njegova suma neprekidna funkcija na intervalu $(-R, R]$ (na intervalu $[-R, R)$).

1.2.4.3.2. *Slučaj kompleksnog reda.* Neka je (30) kompleksan potencijalni red i $R \in (0, +\infty)$ njegov poluprečnik konvergencije. Ako (30) konvergira za $x = R\,e^{\alpha i}$ (α realan broj), tada (30) uniformno konvergira na svakom skupu određenom sa

$$\left|x - \frac{1}{2} R e^{\alpha i}\right| \leq \frac{1}{2} R \wedge |\arg(R e^{\alpha i} - x) - \alpha| \leqslant \frac{\pi}{2} - \delta \left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right),$$

tako da je suma reda (30) neprekidna funkcija na svakom takvom skupu (na slici predstavljenom šrafiranom površinom).



1.2.4.4. Ako je za $|x| < r$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

tada je $a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

1.2.4.5. Ako potencijalni redovi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

imaju redom pozitivne poluprečnike konvergencije R_1 i R_2, tada je za

$$|x| < R = \min(R_1, R_2):$$

$$1^\circ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n;$$

$$2^\circ \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \text{ sa } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

pri čemu poluprečnici konvergencije redova na desnoj strani nisu manji, a mogu biti i veći od R.

1.2.4.6. Neka je $R > 0$ poluprečnik konvergencije reda (30). Tada za $|x| < R$ važi:

1° $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$,

2° $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$,

gde se u kompleksnom slučaju uzima integral po duži koja spaja tačke O i x.

Oba potencijalna reda na desnim stranama u 1° i 2° imaju poluprečnik konvergencije R.

Ako u tački $x = x_0$ svog kruga (intervala) konvergencije konvergira red (30), ili, štaviše, samo red na desnoj strani u 2°, tada jednakost 2° važi i za x_0 umesto x, pri čemu je u drugom slučaju integral na levoj strani nesvojstven.

1.2.4.7. Neka je:

1° $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ za $|x| < R_1$,

2° $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ za $|x| < R_2$,

3° $|a_0| < R_2$.

Tada postoji broj $r > 0$ i kompleksni brojevi c_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ tako da je

$$g(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad \text{za} \quad |x| < r.$$

1.2.4.8. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (|x| < r)$$

i $a_0 \neq 0$. Tada postoje broj $\varrho \in (0, r)$ i kompleksni brojevi b_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ tako da je

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad (|x| < \varrho).$$

1.2.4.9. Neka je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (|x| < R).$$

Ako je $R - |x_0| = r > 0$, postoje takvi kompleksni brojevi b_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ da je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x - x_0)^n \quad \text{za} \quad |x - x_0| < r. \tag{31}$$

Poluprečnik konvergencije reda (31) nije manji od r.

1.2.4.10. Neka je

$$f(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{za} \quad |x - x_0| < R.$$

Ako je $a_1 \neq 0$, za dovoljno malo $r > 0$ postoji jedna i samo jedna funkcija $y \mapsto g(y)$ takva da je, za $|y - y_0| < r$:

$$g(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n (y - y_0)^n, \quad f(g(y)) = y.$$

1.2.4.11. Ako, za kompleksnu (realnu) funkciju $x \mapsto f(x)$ i za tačku x_0, postoji $r > 0$ takvo da je za $|x - x_0| < r$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \tag{32}$$

gde su a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) kompleksni (realni) brojevi, ili, drukčije rečeno, ako se funkcija $x \mapsto f(x)$ može razviti u potencijalni red u tački $x = x_0$, kaže se da je f *analitička funkcija* u tački x_0.

Ako je kompleksna funkcija analitička u svakoj tački (otvorene) oblasti O, kaže se da je ta funkcija analitička u oblasti O. Za realnu funkciju kaže se da je analitička u otvorenom intervalu I ako je analitička u svakoj tački tog intervala.

1.2.4.11.1. Ako kompleksna (realna) funkcija $x \to f(x)$ ima reprezentaciju (32) za $|x - x_0| < r$, ta funkcija je, prema 1.2.4.9, analitička u krugu (intervalu) $|x - x_0| < r$.

1.2.4.11.2. Ako je funkcija $x \to f(x)$ analitička u tački $x = x_0$, tada je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \quad \text{za} \quad |x - x_0| < r. \tag{33}$$

Reprezentacija (33) analitičke funkcije (odnosno odgovarajućeg potencijalnog reda) naziva se *Taylorova formula*, a u specijalnom slučaju kad je $x_0 = 0$ *Maclaurinova formula.*

Posebno, u slučaju realne funkcije ostatak reda (33)

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)$$

ima sledeće reprezentacije:

Lagrangeov oblik ostatka

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0))(x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Cauchyev oblik ostatka

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta_n(x - x_0))(1 - \theta_n)^n (x - x_0)^{n+1} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

1.2.4.12. Nekoliko najvažnijih partikularnih razvoja elementarnih funkcija u potencijalne redove:

1° $\quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{C});$

2° $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $(x \in \mathbf{C})$;

3° $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $(x \in \mathbf{C})$;

4° $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ $(x \in \mathbf{C})$;

5° $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$ $(x \in \mathbf{C})$;

6° $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n$ $(|x| < 1;\ a \in \mathbf{C})$;

7° $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ $(|x| < 1)$.

Može se dodati da jednakosti 7° i 6° sa $-1 < \operatorname{Re}(a) < 0$ važe i za $|x| = 1$, $x \neq -1$, dok jednakost 6° sa $\operatorname{Re}(a) > 0$ važi za $|x| \leq 1$. Sa $a = 0, 1, 2, \ldots$ ona štaviše važi za svako x (Newtonova binomna formula).

1.2.4.12.1. Za $|x| < 2\pi$ je

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = 1 - \frac{1}{2} x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} x^{2n},$$

gde su B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Bernoullievi brojevi.

Pri tome je

$$B_{2k-1} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

kao i

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30},$$

$$B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{12} = -\frac{691}{2730},\ B_{14} = \frac{7}{6},\ B_{16} = -\frac{3617}{510},\ B_{18} = \frac{43867}{798},$$

$$B_{20} = -\frac{174611}{330}.$$

Ustanovljeno je da su Bernoullievi brojevi B_{2n} $(n = 1, 2, \ldots)$ naizmenično pozitivni i negativni i da niz njihovih modula teži ka $+\infty$ kad $n \to +\infty$. Preciznije, važi asimptotska formula

$$B_{2n} \sim (-1)^{n-1} 4\pi \sqrt{e} \left(\frac{n}{\pi e}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \quad (n \to +\infty).$$

1.2.4.13. Dvostruki potencijalni redovi. To su dvostruki redovi oblika

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{m,n}\, x^m y^n, \tag{34}$$

gde su $a_{m,n}$ $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$ realne konstante, a x i y realne nezavisno promenljive.

Za svaki takav red (34) sledeća tri slučaja su jedino moguća:

1° Red (34) konvergira samo za $x = y = 0$.

2° Postoji zatvorena kriva (nazvana *separatrisa konvergencije*), koja je simetrična prema koordinatnim osama i sadrži jednu i samo jednu tačku svake nehorizontalne i nevertikalne poluprave sa početkom u koordinatnom početku, takva da je red (34) (apsolutno) konvergentan u unutrašnjoj oblasti ograničenoj tom krivom a divergentan u spoljašnjoj oblasti; u tačkama krive red može konvergirati ili divergirati, ali uvek jednovremeno jedno ili drugo u tačkama simetričnim prema koordinatnim osama.

3° Red (34) konvergira za svako x i y.

Unutrašnja oblast ograničena krivom pomenutom u 2°, ukoliko njena unutrašnjost nije prazna, odnosno čitava ravan Oxy u slučaju 3°, naziva se *oblast konvergencije* reda (34).

U unutrašnjosti svoje oblasti konvergencije dvostruki potencijalni red (34) može se diferencirati po x i y i tako dobijeni dvostruki potencijalni redovi imaju istu oblast konvergencije kao red (34). Suma $f(x, y)$ reda (34) može se u unutrašnjosti oblasti konvergencije reda napisati u obliku

$$f(x, y) = \sum_{m,n=0}^{+\infty} \frac{1}{m!\,n!} \left(\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m\, \partial y^n}\right)_{\substack{x=0\\ y=0}} x^m y^n .$$

Teorija opštijih dvostrukih redova

$$\sum_{m,n=0}^{+\infty} a_{m,n}\, (x - x_0)^m\, (y - y_0)^n$$

svodi se, bez teškoća, na teoriju redova oblika (34).

1.2.4.14. Asimptotski redovi. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana za dovoljno veliko x. Za red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n}$ kaže se da je *asimptotski red* ili *asimptotski razvoj* funkcije f (u okolini pozitivne beskonačnosti) ako je, za svako $n \in \mathbf{N}_0$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{-k} + o\,(x^{-n}) \quad (x \to +\infty).$$

Ovo se označava sa

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{-n} \quad (x \to +\infty), \tag{α}$$

pri čemu se poslednja zagrada zajedno sa onim što ona obuhvata, u odgovarajućem kontekstu, može izostaviti. Slično se definiše asimptotski razvoj funkcije u okolini negativne beskonačnosti.

1.2.4.14.1. Ako važi (α), tada je,

$$(\beta) \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{-k} \right) = a_n \quad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Obrnuto, (β) povlači (α).

(β) znači da je asimptotski razvoj funkcije, ukoliko postoji, jednoznačno određen.

1.2.4.14.2. Dve različite funkcije mogu imati isti asimptotski razvoj.

1.2.4.14.3. Ako je

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n} \quad \text{i} \quad g(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{-n},$$

tada je:

1° $f(x) + g(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^{-n}$

2° $f(x) g(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{-n}$, sa $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

1.2.4.14.4. Sa

$$f(x) \sim g(x) + h(x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n}$$

često se, po konvenciji, drukčije označava da je

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n}.$$

1.2.5. FOURIEROVI REDOVI

1.2.5.1. Realan funkcionalan red oblika

$$(35) \qquad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

naziva se *trigonometrijski red.* Brojevi a_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ i b_n $(n=1, 2, \ldots)$ su njegovi *koeficijenti.*

1.2.5.1.1. Ako je red (35) uniformno konvergentan u intervalu $[-\pi, +\pi]$ (ili, što se svodi na isto, u bilo kom intervalu oblika $[x_0, x_0 + 2\pi]$), on se može u istom intervalu integraliti član po član, tako da je u tom slučaju, ukoliko je sa $f(x)$ označena suma reda (35),

$$(36) \qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx$$

$$(n = 1, 2, \ldots).$$

Ovo su *Euler-Fourierove formule.*

1.2.5.2. Neka je $x \mapsto f(x)$ realna funkcija takva da su

$$\text{(37)} \qquad \text{integrali } \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx \text{ i } \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\,dx \text{ konačni,}$$

pri čemu je reč o Riemannovim integralima, običnim ili nesvojstvenim. Tada su svi brojevi a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dati formulama (36) konačni. Oni se nazivaju *Fourierovim koeficientima* a red (35) *Fourierovim redom* funkcije $x \mapsto f(x)$ za interval $[-\pi, +\pi]$. Činjenica da je (35) Fourierov red funkcije za interval $[-\pi, +\pi]$ simbolički se ovako obeležava

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad x \in [-\pi, +\pi].$$

U svemu napred rečenom, interval $[-\pi, +\pi]$ može se zameniti bilo kojim intervalom oblika $[a, a + 2\pi]$ (a realan broj). Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ o kojoj je u ovoj tački reč periodična sa periodom 2π, reči »u odnosu na interval $[a, a + 2\pi]$« na svim mestima mogu se izostaviti, tako da se u tom slučaju jednostavno govori o njenim Fourierovim koeficijentima i o njenom Fourierovom redu.

U daljem izlaganju podrazumevaće se svuda da je uzet u obzir interval $[-\pi, +\pi]$, jer se svi rezultati lako prenose sa ovog intervala na bilo koji drugi interval oblika $[a, a + 2\pi]$. Pri tome će se upotrebljavati kraći termini i oznake, sem u nekoliko specijalnih slučajeva.

Primedba. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ispunjava uslove (37), tako da ima Fourierov red (F), tada red (F) može divergirati, u pojedinim, ili čak u svim, tačkama intervala $[-\pi, +\pi]$; isto tako, red (F) može u pojedinim tačkama, čak i u njih beskonačno mnogo, konvergirati, ali ka brojevima različitim od vrednosti funkcije f u tim tačkama. S druge strane, ako dati trigonometrijski red (35) konvergira za svako $x \in [-\pi, +\pi]$ tako da njegova suma $f(x)$ definiše za $x \in [-\pi, +\pi]$ realnu funkciju $x \mapsto f(x)$, tada funkcija f može nemati Fourierov red, a kad ga ima, on se može razlikovati od reda (35).

Prema tome, u vezi sa Fourierovim i trigonometrijskim redovima, mogu se, pored ostalih, postaviti sledeća pitanja:

1° Kada Fourierov red (F) date funkcije $x \mapsto f(x)$, u pojedinim tačkama ili za $x \in [-\pi, +\pi]$, konvergira?

2° Kada red (F), u pojedinim tačkama ili za $x \in [-\pi, +\pi]$, konvergira ka $f(x)$?

3° Kada dati trigonometrijski red (35) konvergira?

4° Ukoliko red (35) konvergira za svako $x \in [-\pi, +\pi]$, pod kojim uslovima je on Fourierov red svoje sume?

Dobar deo rezultata teorije trigonometrijskih redova, od kojih ovde izlažemo samo nekoliko osnovnih, daju (delimične) odgovore na ta pitanja.

Napomenimo još da se u modernoj teoriji Fourierovih redova uslov (37) obično zamenjuje uslovom da je funkcija f u Lebesgueovom smislu integrabilna na intervalu $[-\pi, +\pi]$.

1.2.5.2.1. Neka funkcija $x \mapsto f(x)$ ispunjava uslov (37). Ako je ona parna, formule (36) postaju

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad b_n = 0, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

a ako je neparna, formule (36) uzimaju oblik

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \; b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

U prvom slučaju Fourierov red se svodi na

(38) $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$$

i naziva se *kosinusni red*, a oblik Fourierovog reda koji odgovara drugom slučaju

(39) $$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx$$

naziva se *sinusni red*. Ovi nazivi primenjuju se, uopšte, na trigonometrijske redove oblika (38) odnosno (39).

1.2.5.2.2. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ispunjava uslov (37), za njene Fourierove koeficijente važi

$$a_n = o(1), \quad b_n = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

1.2.5.2.3. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ ograničene varijacije u $[-\pi, +\pi]$, tada

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to +\infty).$$

1.2.5.2.4. Ako periodična funkcija $x \mapsto f(x)$ s periodom 2π ima u intervalu $[-\pi, +\pi]$ u Riemannovom smislu integrabilan k-ti izvod (k prirodan broj), tada

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad (n \to +\infty).$$

1.2.5.3. Neka je $x \mapsto f(x)$ periodična funkcija sa periodom 2π koja ispunjava uslov (37).

1° Ako je ona ograničene varijacije u izvesnom intervalu koji sadrži u svojoj unutrašnjosti tačku x_0, tada njen Fourierov red konvergira za $x = x_0$ i ima sumu

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right).$$

2° Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ ograničene varijacije i neprekidna na intervalu $[a, b]$ $(a < b)$, njen Fourierov red uniformno konvergira (ka $f(x)$) u svakom intervalu $[\alpha, \beta]$ sadržanom u (a, b).

1.2.5.3.1. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ periodična sa periodom 2π i takva da se interval $[-\pi, +\pi]$ može podeliti na konačan broj podintervala takvih da je u unutrašnjosti svakog od njih funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna i monotona. Neka je, sem toga, u svakoj tački diskontinuiteta

(40) $$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right);$$

i pri tome su limesi $f(x_0 \pm 0)$ konačni. (U tom slučaju kaže se da su ispunjeni *Dirichletovi uslovi.*) Tada Fourierov red funkcije $x \mapsto f(x)$ za svako x konvergira ka $f(x)$ i to uniformno u svakom zatvorenom intervalu sadržanom u nekom otvorenom intervalu u kome je funkcija $x \mapsto f(x)$ neprekidna.

1.2.5.4. Neka je $x \mapsto f(x)$ periodična funkcija sa periodom 2π koja ispunjava uslov (37). Ako su u tački $x = x_0$ konačna sva četiri broja

$$f(x_0 - 0), \quad f(x_0 + 0), \quad f_-'(x_0), \quad f_+'(x_0),$$

gde je

$$f_-'(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0 - 0)}{x - x_0}, \quad f_+'(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0 + 0)}{x - x_0}, \tag{41}$$

tada Fourierov red funkcije $x \mapsto f(x)$ konvergira ka broju $\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$ za $x = x_0$.

1.2.5.4.1. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ periodična sa periodom 2π. Ako se interval $[-\pi, +\pi]$ može podeliti na konačan broj delova takvih da u unutrašnjosti svakog od njih funkcija $x \mapsto f(x)$ ima konačan izvod, a na krajevima ima konačne jednostrane limese i izvode (pri čemu su ovi poslednji definisani jednakostima (41)) i ako svuda važi (40), tada Fourierov red funkcije $x \mapsto f(x)$ za svako x_0 konvergira ka $f(x_0)$.

1.2.5.4.2. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ periodična sa periodom 2π i ako ona svuda ima konačan izvod koji je u intervalu $[-\pi, +\pi]$ integrabilan u Riemannovom smislu, tada Fourierov red ove funkcije uniformno i apsolutno konvergira (ka $f(x)$) u intervalu $[-\pi, +\pi]$.

1.2.5.5. Neka je $x \mapsto f(x)$ periodična funkcija sa periodom 2π koja ispunjava uslov (37). Ako su $f(x_0 - 0)$ i $f(x_0 + 0)$ konačni brojevi, tada je Fourierov red funkcije $x \mapsto f(x)$ za $x = x_0$ $(C, 1)$ zbirljiv ka vrednosti

$$\frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0));$$

ovo znači da, ako se n-ta parcijalna suma Fourierovog reda funkcije $x \mapsto f(x)$ označi sa S_n i stavi

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x),$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sigma_n(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)).$$

To je *Fejérova teorema.*

1.2.5.5.1. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ periodična sa periodom 2π i neprekidna u intervalu $[-\pi, +\pi]$, tada niz $\sigma_n(x)$ uniformno konvergira ka $f(x)$ u $[-\pi, +\pi]$.

1.2.5.5.2. Ako su dve funkcije periodične sa periodom 2π i neprekidne u intervalu $[-\pi, +\pi]$, i imaju jednake odgovarajuće Fourierove koeficijente, tada se te dve funkcije podudaraju.

1.2.5.5. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ispunjava uslove (37) i $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 \, dx < +\infty$, tada:

1° Za svaki prirodan broj n, integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (f(x) - T_n(x))^2 \, dx,$$

gde je

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

trigonometrijski polinom reda n, uzima najmanju moguću vrednost kada je $\alpha_k = a_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ i $\beta_k = b_k$ $(k = 1, \ldots, n)$; ovde su a_k i b_k Fourierovi koeficijenti funkcije $x \mapsto f(x)$.

2° Važi Besselova nejednakost

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 \, dx.$$

1.2.5.6.1. Ako je funkcija $x \mapsto f(x)$ integrabilna u Riemannovom smislu u intervalu $[-\pi, +\pi]$, tada važi jednakost

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)^2 \, dx$$

(Parsevalova formula).

1.2.5.6.2. Ako je još funkcija $x \mapsto g(x)$ integrabilna u Riemannovom smislu u intervalu $[-\pi, +\pi]$, i pritom

$$g(x) \sim \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

tada važi jednakost

$$\frac{1}{2} a_0 \alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

1.2.5.7. Neka za funkciju $x \mapsto f(x)$, integrabilnu u Riemannovom smislu, važi

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Tada je za $x \in [-\pi, +\pi]$

$$\int_0^x f(t) \, dt = \frac{1}{2} a_0 x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n (1 - \cos nx)}{n}$$

(integracija član po član Fourierovog reda integrabilne funkcije u Riemannovom smislu.)

1.2.5.8. Ako dva trigonometrijska reda konvergiraju u $[-\pi, +\pi]$ i u svakoj tački ovog intervala, sem eventualno u konačno mnogo tačaka, imaju jednake sume, tada se odgovarajući koeficijenti tih trigonometrijskih redova podudaraju.

1.2.5.9. Svi prethodni pojmovi i rezultati mogu se bez teškoća primeniti na opštiji slučaj dobijen zamenom intervala $[-\pi, +\pi]$ intervalom oblika $[a-l, a+l]$ $(l>0)$ i ujedno zamenom funkcija $x \mapsto \cos nx$ i $x \mapsto \sin nx$ respektivno sa

$$x \mapsto \cos \frac{n\pi x}{l} \text{ i } x \mapsto \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

1.2.5.10. Važe sledeće sumacione formule:

$$1^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi - x}{2} \qquad (x \in (0, 2\pi));$$

$$2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\log\left(2 \sin \frac{x}{2}\right) \qquad (x \in (0, 2\pi));$$

$$3^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \sin nx = \frac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} \qquad (x \text{ realno}; \ |a| < 1);$$

$$4^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos nx = \frac{1}{2} \frac{1-a^2}{1 - 2a\cos x + a^2} - \frac{1}{2} \qquad (x \text{ realno}; \ |a| < 1).$$

Pri tome su leve strane Fourierovi redovi za interval $[0, 2\pi]$ funkcija na desnim stranama.

1.2.5.11.0. Fourierov integral. Ovde je reč o jednom tipu integrala sa beskonačnim granicama koji je unekoliko analogan sa Fourierovim redom. Osnovni rezultat ove oblasti glasi:

Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana za svako realno x i pri tome su ispunjeni uslovi:

1° $x \mapsto f(x)$ je funkcija ograničene varijacije na svakom ograničenom intervalu;

2° $x \mapsto f(x)$ ima najviše konačan broj prekidnih tačaka u svakom ograničenom intervalu;

$$3^\circ \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx < +\infty.$$

Tada je, za svako realno x,

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) \, dt \right) du = \frac{\pi}{2} \big(f(x-0) + f(x+0)\big).$$

1.2.5.11.1. Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ispunjava uslove iz 1.2.5.11.0 i uz to je svuda neprekidna i parna, tada iz

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos xt \, dt \quad (x \text{ realno})$$

izlazi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cos xt \, dt \quad (x \text{ realno}).$$

Ako funkcija $x \mapsto f(x)$ ispunjava uslove iz 1.2.5.11.0 i uz to je svuda neprekidna i neparna, tada za svako realno x

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \; g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin xt \, dt \Rightarrow (\forall x \in \mathbf{R}) \; f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \sin xt \, dt.$$

Primedba 1. Pored materijala iz teorije nizova i redova izloženog u ovoj glavi i poznavanja elementarne matematike, rešavanje zadataka i problema u narednim glavama knjige zahteva, u većoj ili manjoj meri, primenu osnovnih, opštih znanja iz drugih oblasti matematičke analize, kao što su osnovni pojmovi i činjenice o realnim funkcijama, graničnim vrednostima i neprekidnosti funkcija, o izvodu, integralu, itd. U tekstu rešenja ne ukazuje se eksplicitno na te elemente

Primedba 2. Nastanak teorije nizova i redova kao matematičkog područja vremenski se približno podudara sa nastankom savremenog infinitezimalnog računa u XVII i XVIII veku (Newton, Leibniz, Fermat, Taylor, Moivre, Euler), čiji je od početka bila bitan sastavni deo, mada je njenih više ili manje značajnih začetaka bilo i u ranijim vremenima, počev od antičkog doba. Treba naglasiti da ovo područje od samog početka nije bilo, a ni danas nije, samo predmet proučavanja kao takvo, zbog svoje unutrašnje zanimljivosti, nego, u velikoj meri, i zbog brojnih i raznovrsnih primena u drugim oblastima kako matematičke analize, tako i matematike uopšte, pa i ostalih prirodnih nauka. Naročito redovi, na prvom mestu potencijalni i trigonometrijski (i uz njih neki drugi tipovi funkcionalnih redova), igraju značajnu ulogu u mnogim pitanjima realne i kompleksne matematičke analize. Ta uloga potencijalnih redova, na primer, fundamentalna je i konstruktivna ne samo za teoriju analitičkih kompleksnih funkcija, nego i za sam pojam analitičke funkcije. Takođe, primena redova veoma je značajna u teoriji diferencijalnih jednačina, običnih i parcijalnih.

Primedba 3. Osnovno i u izvesnom pogledu najvažnije uopštenje pojma konvergencije i sa njime povezanih pojmova za realne i kompleksne nizove — predstavljaju odgovarajući pojmovi za nizove u topološkim i metričkim prostorima. Pojmovi reda, njegove konvergencije, apsolutne konvergencije, itd. adekvatna uopštenja dobijaju u normiranom, specijalno Banachovom i Hilbertovom prostoru.

Uopštenja sasvim drukčijeg tipa, u drugom pravcu, konvergencije realnih i kompleksnih nizova i redova predstavljaju razne permanentne zbirljivosti (permanentni postupci sumiranja).

S obzirom na osnovni karakter i namenu ove knjige (videti predgovor I izdanju), u njoj se ne izlažu uopštenja prvog tipa. Iz istog razloga, u prostranu oblast teorije zbirljivosti zašlo se samo nekoliko puta (u ovoj glavi Cauchyevom — 1.1.2.22.1 — i Abelovom teoremom — 1.2.4, koje se mogu smatrati početnim elementima te teorije, i u nekoliko problema u 5. glavi), periferno i fragmentarno, bez bilo kakve eksplicitnosti i sistematičnosti, čak i bez upotrebe specifične terminologije.

2. ZADACI I PROBLEMI IZ NIZOVA

2.1. Poznato je pet prvih članova jednog niza (a_n):

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 5.$$

Da li postoji samo jedna elementarna formula kojom su dati navedeni članovi niza?

Odgovor. Ne. Na primer, svaka od formula

$$a_n = n,$$

$$a_n = \frac{n}{1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)},$$

$$a_n = n\,[1 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)]$$

određuje niz (a_n) sa datih prvih pet članova, ali je šesti član:

$$a_6 = 6 \qquad \text{(u prvom slučaju)},$$

$$a_6 = \frac{6}{1+5!} \qquad \text{(u drugom slučaju)},$$

$$a_6 = 6\,(1+5!) \qquad \text{(u trećem slučaju)}.$$

2.2. Razložiti proizvoljan niz na beskonačno mnogo podnizova.

2.3. Primerom dokazati da niz koji se može razložiti na beskonačno mnogo podnizova koji konvergiraju ka istoj granici — ne mora biti konvergentan.

2.4. Šta su tačke nagomilavanja nizova čiji n-ti članovi zadovoljavaju jednačinu

$$x^2 - \frac{n+3}{2\,n}\,x + \frac{n+1}{2\,n^2} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)?$$

Odgovor. Koreni ove jednačine su $x_1 = \dfrac{n+1}{2\,n}$ i $x_2 = \dfrac{1}{n}$. Prema tome, ima beskonačno mnogo nizova (a_n) za koje važi

$$a_n^2 - \frac{n+3}{2\,n}\,a_n + \frac{n+1}{2\,n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

i tačke nagomilavanja tih nizova su brojevi $\dfrac{1}{2}$ i 0, pri čemu ovi nizovi mogu imati kao tačke nagomilavanja samo prvi, samo drugi, ili oba broja (u prva dva slučaja nizovi su konvergentni, a u trećem divergentni).

2.5. Primenom Cauchyevog kriterijuma konvergencije dokazati da su sledeći nizovi konvergentni:

$$1^\circ \quad a_n = b_0 + b_1 q + \cdots + b_n q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

gde je

$$|b_k| < M \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ i } |q| < 1;$$

$$2^\circ \quad a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. 1° Kako je $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k q^k$, imamo

$$a_n - a_{n+p} = \sum_{k=0}^{n} b_k q^k - \sum_{k=0}^{n+p} b_k q^k = -\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k q^k,$$

tj.

(1)
$$|a_n - a_{n+p}| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k q^k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |b_k|\, |q|^k \leq M \sum_{p=n+1}^{n+p} |q|^k$$

$$= M\, |q|^{n+1} \frac{1 - |q|^p}{1 - |q|} \leq \frac{M}{1 - |q|} |q|^{n+1}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Izaberimo prirodan broj $N = N(\varepsilon)$ tako da je

(2)
$$\frac{M}{1 - |q|} |q|^{N+1} < \varepsilon.$$

Ova nejednakost je ekvivalentna sa

$$|q|^N < \frac{\varepsilon(1 - |q|)}{M\,|q|}, \text{ tj. } N > \frac{1}{\log |q|} \log \frac{\varepsilon(1 - |q|)}{M\,|q|},$$

na osnovu čega zaključujemo da je uvek moguće odrediti $N(\varepsilon)$. Za takvo $N(\varepsilon)$ i $n \geq N(\varepsilon)$ na osnovu (1) i (2) imamo

$$|a_n - a_{n+p}| \leq \frac{M}{1 - |q|} |q|^{n+1} \leq \frac{M}{1 - |q|} |q|^{N+1} < \varepsilon.$$

Na osnovu Cauchyevog kriterijuma konvergencije, niz (a_n) je konvergentan.

2° Ovo je specijalan slučaj niza 1°, gde je

$$b_k = \sin k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \qquad q = \frac{1}{2}, \qquad M = 1.$$

Kako je niz 1° konvergentan, i ovaj niz je konvergentan.

2.6. Na osnovu definicije granične vrednosti niza, dokazati da za niz (a_n), gde je $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, važi

(1)
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Dokaz. Da bi niz (a_n) konvergirao ka nuli, potrebno je i dovoljno da za svako $\varepsilon > 0$ postoji neki prirodan broj $N(\varepsilon)$ tako da važi nejednakost

(2)
$$|a_n - 0| < \varepsilon \qquad (n > N(\varepsilon)).$$

Kako su svi brojevi c_n pozitivni, nejednakosti (2) možemo dati oblik

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<\varepsilon \qquad (n>N(\varepsilon))$$

ili

$$\varepsilon\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}\right)>1 \quad (n>N(\varepsilon)). \tag{3}$$

Kako je

$$\sqrt[3]{(n+1)^2}>\sqrt[3]{n^2} \quad \text{i} \quad \sqrt[3]{n(n+1)}>\sqrt[3]{n^2},$$

nejednakost (3) važi utoliko pre ako je

$$3\varepsilon\sqrt[3]{n^2}>1, \text{ tj. } n>\frac{1}{\sqrt{27\,\varepsilon^3}} \quad (n>N(\varepsilon)).$$

Ova nejednakost važi ako uzmemo da je

$$N(\varepsilon)=\max\left(\left[\frac{1}{\sqrt{27\,\varepsilon^3}}\right],1\right).$$

Prema tome, za svako pozitivno ε važi

$$n>\max\left(\left[\frac{1}{\sqrt{27\,\varepsilon^3}}\right],1\right)\Rightarrow\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}<\varepsilon.$$

2.7. Dat je niz $a_n=(n^2-n+1)^{-1}$ i pozitivan broj ε. Odrediti jedan prirodan broj $N(\varepsilon)$ tako da je $|a_n|<\varepsilon$ za $n>N(\varepsilon)$.

Rešenje. Kako je

$$|a_n|=\frac{1}{n^2-n+1}<\frac{1}{(n-1)^2} \qquad (n>1),$$

uslov $|a_n|<\varepsilon$ je ispunjen ako je

$$\frac{1}{(n-1)^2}<\varepsilon \text{ tj. } (n-1)^2>\frac{1}{\varepsilon} \text{ tj. } n>1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Prema tome, za $N(\varepsilon)$ dobijamo $N(\varepsilon)=1+\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$.

2.8. Ako je $u_n=\dfrac{n^2+n-1}{3n^2+1}$, odrediti jedan prirodan broj $N(\varepsilon)$ takav da je

$$\left|u_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \quad (\varepsilon>0) \quad \text{za svako} \quad n>N(\varepsilon).$$

Takođe, naći najmanji prirodan broj $N_0(\varepsilon)$ za koji je

$$\left|u_n-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \text{ ako je } n>N_0(\varepsilon).$$

Rešenje. Pođimo od jednakosti

$$\left|u_n-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{n^2+n-1}{3n^2+1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{3n-4}{3(3n^2+1)} \qquad (n>1).$$

Kako je

$$\left| u_n - \frac{1}{3} \right| = \frac{3n-4}{3(3n^2+1)} < \frac{3n}{9n^2} = \frac{1}{3n},$$

za $\frac{1}{3n} < \varepsilon$ dobijamo $n > \frac{1}{3\varepsilon}$. Dakle, $N(\varepsilon) = \max\left(\left[\frac{1}{3\varepsilon}\right], 1\right)$.

Da bismo našli $N_0(\varepsilon)$, treba odrediti sve pozitivne vrednosti $n\,(> 1)$ za koje je

$$\frac{3n-4}{3(3n^2+1)} < \varepsilon \ \text{ tj. } 9\varepsilon n^2 - 3n + 3\varepsilon + 4 > 0.$$

Tražene vrednosti n su

$$n > \frac{1}{6\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon(3\varepsilon+4)}\right),$$

gde je ε takav pozitivan broj da je $1 - 4\varepsilon(3\varepsilon+4) \geq 0$, tj. $\varepsilon \leq \frac{\sqrt{19}-4}{6}$ i $n > 1$.

Traženi broj je $N_0(\varepsilon) = \max\left\{\frac{1}{6\varepsilon}\left(1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon(3\varepsilon+4)}\right), 1\right\} \left(0 < \varepsilon \leq \frac{\sqrt{19}-4}{6}\right)$.

Ako je $\varepsilon > \frac{\sqrt{19}-4}{6}$ onda je $N_0(\varepsilon) = 1$.

2.9. Ispitati monotoniju i ograničenost niza

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{4n^2-3}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Za koje n važi nejednakost $a_n > 3$?

2.10. Dokazati da je niz

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

monoton i ograničen.

Dokaz. Prva tri člana ovog niza su: $e_1 = 2$, $e_2 = 2\frac{1}{4}$, $e_3 = 2\frac{10}{27}$, odakle izlazi da je $e_1 < e_2 < e_3$. Dokazaćemo da je $e_n < e_{n+1}$ za svako n.

Kako je

$$1 + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

dobija se

$$(1) \qquad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{n+1}{n} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Pošto je $-\frac{1}{n+1} > -1$, na osnovu Bernoullieve nejednakosti nalazi se

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} > 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

te iz (1) sleduje

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n},$$

tj. $e_{n+1} > e_n$. Dakle, niz je strogo rastući.

Kako je $1 - \frac{1}{4n^2} < 1$, imamo

$$1+\frac{1}{2n} < \frac{1}{1-\frac{1}{2n}},$$

(2)
$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}}.$$

Prema Bernoullievoj nejednakosti je

$$\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{n} > 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Dalje je

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}} < 4,$$

te iz (2) sleduje

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4, \text{ tj. } e_{2n} < 4.$$

Budući da je $e_n < e_{2n}$, dobijamo takođe $e_n < 4$, što dokazuje da je niz ograničen s gornje strane.

Primedba. Kako je niz (e_n) monoton i ograničen, on je konvergentan; njegova granična vrednost označava se sa e: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$.

2.11. Dokazati da je niz

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

monoton i ograničen i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Dokaz. Prva tri člana niza su $a_1 = 4$, $a_2 = 3\,\frac{3}{8}$, $a_3 = 3\,\frac{13}{81}$, odakle sleduje da je $a_1 > a_2 > a_3$.

Dokazaćemo da za svako n važi $a_n > a_{n+1}$.

Najpre imamo

(1)
$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}.$$

Na osnovu Bernoullieve nejednakosti je

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} > 1+\frac{n+2}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n},$$

pa se iz jednakosti (1) dobija $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, odakle izlazi da je $a_n > a_{n+1}$, što je i trebalo dokazati.

Granična vrednost niza je

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Primedba. Na osnovu ovog i prethodnog zadatka dobijaju se nejednakosti

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{i} \quad \frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

2.12. Ispitati konvergenciju nizova (a_n) i (b_n) čiji su prvi članovi proizvoljno uzeti, a ostali članovi zadovoljavaju uslov:

$$a_{n+1} = \max(a_n, b_n), \qquad b_{n+1} = \min(a_n, b_n), \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2.13. Primenom Cauchyevog kriterijuma konvergencije dokazati da su sledeći nizovi konvergentni:

$$1^\circ \ a_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$2^\circ \ a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2.14. Dokazati da je niz

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

divergentan.

Dokaz 1. Dati niz raste, ali, kao što ćemo dokazati, nije ograničen odozgo. Pođimo od jednakosti

$$(1) \qquad a_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$$

Izrazi u zagradama imaju oblik

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

Imamo nejednakost

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k} > (2^k - 2^{k-1})\cdot\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2},$$

jer je svaki, sem poslednjeg, od sabiraka na levoj strani veći od $1/2^k$, a ukupan broj sabiraka je $2^k - 2^{k-1}$.

Kako je, prema ovome, svaki od $n-1$ izraza u zagradama u (1) veći od $\frac{1}{2}$, imamo

$$a_{2^n} > 1 + \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \qquad (n \geq 2).$$

Prema tome, dati niz nije ograničen i divergira ka $+\infty$.

Dokaz **2.** Konvergencija niza (a_n) ka konačnoj granici a implicirala bi

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{2n}-a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} - \lim_{n\to+\infty} a_n = a - a = 0.$$

Međutim, u ovom slučaju je

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2.15. Dokazati da za niz

$$x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad x_2 = \frac{ax_1}{\sqrt{a^2+x_1^2}}, \quad \ldots, \quad x_{n+1} = \frac{ax_n}{\sqrt{a^2+x_n^2}}, \quad \ldots \quad (a, b > 0)$$

važi

$$(1) \qquad n \geq \frac{a^2}{\varepsilon^2} \Rightarrow x_n < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0).$$

Rešenje. Bez teškoća se dokazuje da je $x_n = \dfrac{a\,b}{\sqrt{a^2+n\,b^2}}$. Stoga

$$x_n < \frac{a\,b}{\sqrt{n\,b^2}} = \frac{a}{\sqrt{n}} \leq \frac{a}{\sqrt{\dfrac{a^2}{\varepsilon^2}}} = \varepsilon \text{ za } n \geq \frac{a^2}{\varepsilon^2},$$

čime je dokazana implikacija (1).

2.16. Dokazati da se pomoću formula

$$a_n = 3\,s^{2n} - 2\,s^n - 1, \qquad b_n = 4\,s^{2n} + 4\,s^n, \qquad c_n = 5\,s^{2n} + 2\,s^n + 1$$
$$(s = 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$$

može dobiti beskonačno mnogo Pitagorinih trojki brojeva, tj. trojki prirodnih brojeva (a_n, b_n, c_n) za koje je $a_n^2 + b_n^2 = c_n^2$.

Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ i rezultatu dati geometrijsku interpretaciju povezujući ga sa uglovima trougla čije su strane 3, 4, 5.

2.17. Dokazati da je

$$(1) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0 \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. **1.** Najpre imamo

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1 = 1 + n + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + \binom{n}{3} + \cdots + 1$$
$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + 1 > \frac{n^2}{2},$$

jer su svi izostavljeni sabirci pozitivni.

Dakle,

$$2^n > \frac{n^2}{2},$$

tj.

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n}. \tag{2}$$

Ako $n \to +\infty$, tada $\frac{2}{n} \to 0$ i iz nejednakosti (2) sleduje (1).

***Rešenje* 2.** Stavimo li $a_n = \frac{n}{2^n}$ $(n \in \mathbf{N})$, dobijamo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \to \frac{1}{2} \qquad (n \to +\infty),$$

tako da za dovoljno veliko n važi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \text{tj.} \quad a_{n+1} < a_n.$$

Dakle, niz (a_n) je za dovoljno veliko n monotono opadajući i ograničen s donje strane (nulom), pa postoji i konačno je $x = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Onda je

$$x = \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2} x \Rightarrow x = 0.$$

***Rešenje* 3.** Prema Stolzovoj teoremi je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n - 2^{n-1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

2.18. Ispitati da li je niz čiji je opšti član $a_n = n\left(1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$ nula-niz.

Rešenje. Kako je

$$\frac{1}{n} = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \left(1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}}\right)\left(1 + \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}\right),$$

dobijamo

$$a_n = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3} + \sqrt[5]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}} \to \frac{1}{5} \qquad (n \to +\infty).$$

Dakle, dati niz je konvergentan i njegova granična vrednost je $\frac{1}{5}$, što znači da $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nije nula-niz.

2.19. Dokazati sledeća tvrđenja:

1° Neka je (a_n) realan niz i neka su A i a realni brojevi. Ako je $a_n \le A$ za dovoljno veliko n, tada je $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}}\, a_n \le A$; ako je $a_n \ge a$ za proizvoljno velike vrednosti n, tada je $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}}\, a_n \ge a$; ako je $a_n \le A$ za proizvoljno velike vrednosti n, tada je $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}}\, a_n \le A$; ako je $a_n \ge a$ za n dovoljno veliko, tada je $\underline{\lim\limits_{n \to +\infty}}\, a_n \ge a$.

2° Da bi realan broj L bio gornji limes niza (a_n), potrebno je i dovoljno da, za svako $\varepsilon > 0$, nejednakost $a_n < L + \varepsilon$ bude ispunjena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n > L - \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n. Da bi realan broj l bio donji limes istog niza, potrebno je i dovoljno da, za svako $\varepsilon > 0$, nejednakost $a_n > l - \varepsilon$ bude ispunjena za dovoljno veliko n, a nejednakost $a_n < l + \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n.

3° Neka su (a_n) i (b_n) realni nizovi. Ako je za n dovoljno veliko $a_n \leq b_n$, tada je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

Dokaz. 1° Neka je za n dovoljno veliko $a_n \leq A \in \mathbf{R}$. Tada je niz ograničen sa gornje strane i stoga je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n < +\infty$. Ako bi neka tačka nagomilavanja niza bila veća od A, bilo bi $a_n > A$ za proizvoljno velike vrednosti n, u suprotnosti sa pretpostavkom. Stoga, ako je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{R}$, mora biti $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \leq A$. Poslednja nejednakost očigledno je tačna i kada je $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Neka je $a_n \geq a$ za proizvoljno velike vrednosti n. Ako je niz i ograničen sa gornje strane, tj. **ako postoji realan broj $b \geq a$ takav da je $a_n \leq b$ $(n \in \mathbf{N})$, tada očigledno postoji podniz (a_{p_n})** niza (a_n) čiji se svi članovi nalaze u intervalu $[a, b]$. Niz (a_{p_n}) onda, prema Bolzano-Weierstrassovom stavu, ima tačku nagomilavanja $c \in [a, b]$. Dakle, niz (a_n) ima tada tačku nagomilavanja $c \geq a$ i stoga je u tom slučaju $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \geq c$. Ako niz (a_n) nije ograničen sa gornje strane, imamo

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = +\infty \geq a.$$

Na sličan način dokazuju se poslednja dva tvrđenja pod 1°.

2° Neka broj L u odnosu na niz (a_n) ispunjava navedene uslove. Tada je, prema 1°, za svako $\varepsilon > 0$

$$L - \varepsilon \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \leq L + \varepsilon;$$

puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = L$.

Neka je $L = \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$. Tada je L tačka nagomilavanja niza (a_n), pa mora, za svako $\varepsilon>0$, biti $a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, tj. $a_n > L - \varepsilon$ sa proizvoljno velikim vrednostima n. Ako, sa nekim fiksiranim $\varepsilon > 0$, ne bi bilo $a_n < L + \varepsilon$ za n dovoljno veliko, imalo bi se, sa istim ε, $a_n \geq L + \varepsilon$ za proizvoljno velike vrednosti n i stoga, prema 1°, $L = \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \geq L + \varepsilon > L$. Dobijena protivrečenost dokazuje da mora za svako $\varepsilon > 0$ biti $a_n < L + \varepsilon$ ukoliko je n dovoljno veliko.

Tvrđenje koje se odnosi na broj l analogno se dokazuje.

3° Pretpostavimo da je za n dovoljno veliko $a_n \leq b_n$. Neka je

$$a = \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n > \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = b,$$

i neka je $a > c > b$. Onda je za n dovoljno veliko $a_n > c$. Zaista, ako je $a \in \mathbf{R}$, ovo izlazi iz drugog tvrđenja pod 2°, a u slučaju kad je $a = +\infty$, iz činjenice da je tada $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Prema drugom tvrđenju pod 2°, ukoliko je $b \in \mathbf{R}$, i na osnovu činjenice da $b = -\infty$ znači da je niz (a_n) sa donje strane neograničen, za proizvoljno velike vrednosti n je $b_n < c$. Dakle, za proizvoljno veliko n je tada $a_n > b_n$. Dobijena protivrečnost sa polaznom pretpostavkom dokazuje da ta pretpostavka povlači nejednakost $a \leq b$.

Drugo tvrđenje analogno se dokazuje.

2.20. 1° Dokazati da za bilo koja dva niza a_n i b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ važe nejednakosti

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n)$$

$$\leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n,$$

uz isključenje onih nejednakosti koje sadrže izraze $+\infty - \infty$ ili $-\infty + \infty$.

2° Ako je $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dokazati da važe i nejednakosti

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \, \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \, \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n \, \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n$$

uz isključenje onih koje sadrže proizvode $0 \cdot (+\infty)$ ili $(+\infty) \cdot 0$.

Ako $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ postoji kao konačan broj, dokazati da je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

Ako je uz to $a > 0$ i $b_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dokazati da je takođe

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) = a \, \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n, \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) = a \, \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n.$$

Rešenje. Neka je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = l_1, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = l_2, \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = L_1, \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty} b_n = L_2.$$

Od nejednakosti u 1°, dokazaćemo samo

(1) $$l_1 + L_2 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq L_1 + L_2,$$

a od onih u 2° samo

(2) $$l_1 L_2 \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leq L_1 L_2 \qquad (a_n, b_n \geq 0 \ (n \in \mathbb{N})).$$

Dokazi ostalih nejednakosti su analogni.

1° Neka su L_1 i L_2 realni brojevi. Ako je tada $\varepsilon > 0$ unapred dato, za n dovoljno veliko je, prema prethodnom problemu pod 2°,

(3) $$a_n < L_1 + \varepsilon, \quad b_n < L_2 + \varepsilon$$

i odatle

$$a_n + b_n < L_1 + L_2 + 2\varepsilon$$

za dovoljno veliko n. Odavde je, prema prethodnom problemu pod 1°,

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq L_1 + L_2 + 2\varepsilon.$$

Puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se desna nejednakost (1). Ako je jedan od limesa L_1 i L_2 jednak $+\infty$, a drugi $> -\infty$, desna nejednakost (1) očigledno važi. Neka je, dalje, $L_1 = -\infty$ i $L_2 < +\infty$. Tada postoji $a \in \mathbb{R}$ takvo da je

(4) $$b_n \leq a \qquad \text{za svako } n.$$

Ako je $m \in \mathbb{R}$ proizvoljno izabrano, biće

(5) $$a_n \leq m - a, \qquad \text{za dovoljno veliko } n.$$

Prema (4) i (5),

$$a_n + b_n \leq m, \qquad \text{za dovoljno veliko } n.$$

To znači da je u ovom slučaju $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = -\infty$, tj.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) = -\infty = L_1 + L_2.$$

Neka je l_1, $L_2 \in \mathbf{R}$. Tada je, sa unapred izabranim $\varepsilon > 0$,

(6) $\qquad a_n > l_1 - \varepsilon, \qquad$ za n dovoljno veliko,

(7) $\qquad b_n > L_2 - \varepsilon, \qquad$ za n proizvoljno veliko,

i odatle

$$a_n + b_n > l_1 + L_2 - 2\varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Odavde, prema prethodnom problemu pod 1°, izlazi

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) \geq l_1 + L_2 - 2\varepsilon.$$

Puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) \geq l_1 + L_2$. Ako je jedan od limesa l_1 i L_2 jednak $-\infty$, a drugi $< +\infty$, leva nejednakost u (1) očigledno važi. Ako je $l_1 = +\infty$ i $L_2 > -\infty$ postoji $a \in \mathbf{R}$ takvo da je

(8) $\qquad b_n > a, \qquad$ za n proizvoljno veliko,

i sa unapred datim $M \in \mathbf{R}$ je

(9) $\qquad a_n > M - a, \qquad$ za n dovoljno veliko.

Prema (8) i (9),

(10) $\qquad a_n + b_n > M, \qquad$ za n proizvoljno veliko.

Ako je $l_1 > -\infty$ i $L_2 = +\infty$, slično se ustanovljava da takođe važi (10), sa proizvoljnim unapred datim realnim brojem M. U oba slučaja, niz $(a_n + b_n)$ je, dakle, sa gornje strane neograničen i stoga

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n + b_n) = +\infty = l_1 + L_2.$$

2° Pretpostavimo da je $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$. Neka su, prvo, L_1 i L_2 realni brojevi. Tada za n dovoljno veliko ponovo važe nejednakosti (3). Množenjem se ustanovljava da je za dovoljno veliko n

$$a_n b_n < (L_1 + \varepsilon)(L_2 + \varepsilon);$$

odatle,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n b_n) \leq (L_1 + \varepsilon)(L_2 + \varepsilon)$$

i dalje $(\varepsilon \to +0)$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} (a_n b_n) \leq L_1 L_2.$$

Ako je jedan od limesa L_1 i L_2 jednak $+\infty$, a drugi > 0, desna nejednakost (2) očigledno ponovo važi.

Neka je $0 < l_1 < +\infty$, $0 < L_2 < +\infty$ i neka je $0 < \varepsilon \leq \min\{l_1, L_2\}$.

Tada su ponovo ispunjeni uslovi (6) i (7), pri čemu je $l_1 - \varepsilon \geq 0$, $L_2 - \varepsilon \geq 0$. Množenjem se ustanovljava da je

$$a_n b_n \geq (l_1 - \varepsilon)(L_2 - \varepsilon), \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko,}$$

i odatle, prvo, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n b_n) \geq (l_1 - \varepsilon)(L_2 - \varepsilon)$, pa zatim $(\varepsilon \to 0+)$ $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} (a_n b_n) \geq l_1 L_2$. Ako je jedan od limesa l_1 i L_2 nula, a drugi $< +\infty$, leva nejednakost u (2) očigledno važi. Neka je $l_1 = +\infty$ i $L_2 > 0$. Tada postoji $a \in (0, +\infty)$ takvo da je

(11) $\qquad b_n > a, \qquad$ za n proizvoljno veliko,

i sa unapred datim $M \in (0, +\infty)$ je

(12) $\qquad a_n > \dfrac{M}{a}, \qquad$ za n dovoljno veliko.

Prema (11) i (12) je

(13) $$a_n b_n > M, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko.}$$

Ako je $l_1 > 0$ i $L_2 = +\infty$, na sličan način ustanovljava se da je uslov (13) ispunjen sa proizvoljnim $M \in (0, +\infty)$. U oba slučaja je, dakle, $\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) = +\infty = l_1 L_2$.

Ako je $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$, tada obe nejednakosti u (1) važe i uz to je $\varliminf_{n\to+\infty} a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = a$, tako da se dobija

$$a + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) \leq a + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$$

i odatle $\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$. Na sličan način dokazuje se da je tada $\varliminf_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = a + \varliminf_{n\to+\infty} b_n$. Ako je još $a > 0$, tada obe nejednakosti u (2) važe, tako da se dobija

$$a \varlimsup_{n\to+\infty} b_n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) \leq a \varlimsup_{n\to+\infty} b_n,$$

tj. $\varlimsup_{n\to+\infty} (a_n b_n) = a \varlimsup_{n\to+\infty} b_n$, i slično $\varliminf_{n\to+\infty} (a_n b_n) = a \varliminf_{n\to+\infty} b_n$.

2.21. Dokazati sledeća tvrđenja:

1° Za svaki realan niz (a_n) $(n \in \mathbf{N})$ je

$$\varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} (-a_n) = -\varliminf_{n\to+\infty} a_n.$$

2° Ako je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tada je

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to+\infty} a_n}, \quad \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to+\infty} a_n},$$

gde se, pored opšte konvencije $\dfrac{1}{+\infty} = 0$, uzima da je $\dfrac{1}{0} = +\infty$.

Rešenje. 1° Ako je $L = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n \in \mathbf{R}$ i $\varepsilon > 0$ je proizvoljno izabrano, tada je, prema problemu 2.19 pod 2°,

$$a_n < L + \varepsilon, \qquad \text{za dovoljno veliko } n,$$
$$a_n > L - \varepsilon, \qquad \text{za proizvoljno veliko } n,$$

tj.

$$-a_n > -L - \varepsilon, \qquad \text{za dovoljno veliko } n,$$
$$-a_n < -L + \varepsilon, \qquad \text{za proizvoljno veliko } n,$$

i odatle, ponovo prema 2.19,

$$\varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -L = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Ako je $L = +\infty$, niz (a_n) je sa gornje strane neograničen; niz $(-a_n)$ je onda neograničen sa donje strane i stoga

$$\varliminf_{n\to+\infty} (-a_n) = -\infty = -\varlimsup_{n\to+\infty} a_n.$$

Ako je, najzad, $L = -\infty$, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, pa imamo $\lim\limits_{n\to+\infty}(-a_n) = +\infty$ i odatle

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}(-a_n) = +\infty = -L = -\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

Na osnovu prethodno ustanovljenog, za bilo koji niz (a_n) je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty}(-(-a_n)) = -\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-a_n),$$

tj.

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}(-a_n) = -\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n.$$

2° Neka je

(1) $$a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako je $L = \overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n \in (0, +\infty)$ i $\varepsilon \in (0, L)$, tada je

$$a_n < L + \varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko},$$

$$a_n > L - \varepsilon > 0, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko},$$

i odatle

(2) $$\frac{1}{a_n} > \frac{1}{L+\varepsilon}, \qquad \text{za } n \text{ dovoljno veliko},$$

(3) $$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{L-\varepsilon}, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko}.$$

Prema problemu 2.19 pod 1°, iz (2) izlazi

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{L+\varepsilon},$$

a iz (3)

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{L-\varepsilon}.$$

Puštajući da $\varepsilon \to +0$, dobija se

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

Ako je $L = 0$, tada je, sa proizvoljno izabranim $M \in (0, +\infty)$,

$$0 < a_n < \frac{1}{M}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{a_n} > M, \qquad \text{za dovoljno veliko } n,$$

što znači da je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim}\limits_{n\to+\infty} a_n}.$$

Ako je $L = +\infty$, tada, sa unapred datim $\varepsilon \in (0, +\infty)$, imamo

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1}{a_n} < \varepsilon, \qquad \text{za } n \text{ proizvoljno veliko}.$$

Odatle,

$$0 \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \leq \varepsilon$$

i dalje $(\varepsilon \to 0+)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0 = \frac{1}{L} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n}.$$

Prema napred ustanovljenom, za bilo koji niz (a_n) koji ispunjava uslov (1),

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, \frac{1}{\dfrac{1}{a_n}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, \dfrac{1}{a_n}},$$

tj.

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, a_n}.$$

2.22. Za realan ili kompleksan niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ kaže se da je *razložen* ili *razbijen* na podnizove

(1) $$(a_{p_n}),\ (a_{q_n}),\ \ldots,\ (a_{s_n}),$$

ako su (p_n), (q_n), ..., (s_n) strogo rastući nizovi prirodnih brojeva čiji su skupovi vrednosti dva po dva disjunktni, dok je unija svih ovih skupova vrednosti skup svih prirodnih brojeva. Na sličan način definiše se razlaganje niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ na beskonačno mnogo podnizova.

1° Dokazati: Ako je niz (a_n) razložen na konačan broj nizova (1) i ako su S, S_p, S_q, ..., S_s redom skupovi tačaka nagomilavanja nizova (a_n) i (1), tada je

(2) $$S = S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s.$$

Sem toga, ako svi nizovi (1) konvergiraju ka broju a, tada i niz (a_n) konvergira ka a.

2° Dokazati primerom da divergentan niz može biti razložen na beskonačno mnogo nizova koji svi konvergiraju ka istom broju, tako da jednakost (2) ne mora biti tačna u slučaju beskonačnog razlaganja.

Rešenje. 1° Važenje inkluzije

(3) $$S \supset S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s$$

očigledno je.

Neka je $x \notin S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s$. Tada postoje pozitivni brojevi ε_p, ε_q, ..., ε_s i prirodni brojevi n_p, n_q, ..., n_s tako da je $|x - a_{p_n}| > \varepsilon_p$ za $n > n_p$, $|x - a_{q_n}| > \varepsilon_q$ za $n > n_q$, ..., $|x - a_{s_n}| > \varepsilon_s$ za $n > n_s$. Stavimo li

$$\varepsilon = \min(\varepsilon_p, \varepsilon_q, \ldots, \varepsilon_s),\quad m = \max(p_{n_p}, q_{n_q}, \ldots, s_{n_s}),$$

biće, očigledno, $|x - a_n| > \varepsilon$ za $n > m$, što znači da je $x \notin S$. Time je dokazana inkluzija

(4) $$S \subset S_p \cup S_q \cup \cdots \cup S_s.$$

Iz (3) i (4) izlazi (2).

Tvrđenje koje se odnosi na specijalan slučaj izlazi iz (3) i iz očigledne činjenice da je niz koji se može razložiti na konačno mnogo ograničenih nizova i sam ograničen.

2° Neka je

$a_n = 0$, ako je $n = 2^k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$,

$a_n = 1$, u suprotnom slučaju.

Tada svi nizovi

$$(a_{2n-1}),\quad (a_{2(2n-1)}),\quad (a_{2^2(2n-1)}),\ \ldots,\ (a_{2^k(2n-1)}),\ \ldots$$

konvergiraju ka broju 1 a niz (a_n) divergira.

Primedba. Ako je niz (a_n) razbijen na konačan broj podnizova, bez teškoća se dokazuje i da je:

(a) $\inf a_n$ jednak najmanjem od infimuma podnizova,

(b) $\sup a_n$ jednak najvećem od supremuma podnizova,

(c) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ jednak najmanjem od donjih limesa podnizova,

(d) $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$ jednak najvećem od gornjih limesa podnizova.

2.23. Dokazati da je, za svaki niz realnih brojeva (a_n),

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = \inf_{n\geq 1}(\sup_{\nu\geq n} a_\nu), \tag{1}$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{\nu\geq n} a_\nu). \tag{2}$$

Rešenje. Dokazujemo samo jednakost (1). Dokaz jednakosti (2) je analogan. Stavimo

$$L = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n,\qquad L_n = \sup_{\nu\geq n} a_\nu,\qquad L_0 = \inf_{n\geq 1}(\sup_{\nu\geq n} a_\nu).$$

Ako je $L = +\infty$, nejednakost

$$L_0 \leq L \tag{3}$$

svakako važi. Ako je $L < +\infty$, i $L < a \in \mathbf{R}$, tada, prema stavu 1.1.2.18, postoji $n \in \mathbf{N}$ takvo da je $a_\nu < a\ (\nu \geq n)$, pa $L_n = \sup\limits_{\nu\geq n}(a_\nu) \leq a$. Odavde, kako je $L_0 \leq L_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, izlazi $L_0 \leq a$. Puštajući da $a \to L$, dobija se odatle (3).

Sa druge strane, iz $a_\nu \leq L_n\ (\nu \geq n;\ n = 1, 2, \ldots)$, prema 1.1.2.17, sleduje $L = \overline{\lim\limits_{\nu\to+\infty}}\, a_\nu \leq L_n\ (n = 1, 2, \ldots)$. Odatle,

$$L \leq \inf_{n\geq 1} L_n = L_0. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) izlazi (1).

2.24. Za date brojne nizove $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ odrediti: $\inf a_n$, $\sup a_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n$.

1° $a_n = 1 - \dfrac{1}{n}$; 2° $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$; 3° $a_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$;

4° $a_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$; 5° $a_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;

6° $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$; 7° $a_n = (-1)^n n$; 8° $a_n = n^{(-1)^n n}$;

9° $a_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

Rešenje. 1° Niz je konvergentan jer je

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=1.$$

Zato je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} a_n=\overline{\lim}_{n\to+\infty} a_n=1.$$

Kako je niz rastući, važi

$$\inf a_n=a_1=0,\qquad \sup a_n=\lim_{n\to+\infty}a_n=1.$$

2° Kako je

$$a_{2n}=1+\frac{1}{2n},\qquad a_{2n-1}=-\frac{1}{2n-1},$$

zaključujemo da je

$$\inf a_n=\inf a_{2n-1}=-1,\qquad \sup a_n=\sup a_{2n}=\frac{3}{2}.$$

Ovde smo iskoristili činjenice da je $a_{2n}>0>a_{2n-1}$, da je niz $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ opadajući i da je niz $(a_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}}$ rastući.

Iz istih činjenica sleduje da je

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_{2n-1}=0,\qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=1.$$

Ovde smo, u stvari, iskoristili primedbu iz problema 2.22: niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bio je razbijen na dva podniza (a_{2n}) i (a_{2n-1}). Ovu primedbu koristićemo i u ostalim tačkama ovog zadatka.

3° Niz (a_n) razbijmo na dva podniza (a_{2n}) i (a_{2n-1}). Kako je

$$a_{2n}=-2-\frac{3}{2n},\qquad a_{2n-1}=2+\frac{3}{2n-1},$$

zaključujemo da je niz (a_{2n}) rastući, a niz (a_{2n-1}) opadajući. Imamo

$$\inf a_{2n}=a_2=-\frac{7}{2},\qquad \inf a_{2n-1}=\lim_{n\to+\infty}a_{2n-1}=2,$$

$$\sup a_{2n}=\lim_{n\to+\infty}a_{2n}=-2,\qquad \sup a_{2n-1}=a_1=5.$$

Dakle,

$$\inf a_n=-\frac{7}{2},\qquad \sup a_n=5,\qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty}a_n=-2,\qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty}a_n=2.$$

4° Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ razbijamo na tri podniza:

$$(a_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}},\qquad (a_{4n})_{n\in\mathbf{N}},\qquad (a_{4n-2})_{n\in\mathbf{N}}.$$

Kako je

$$a_{2n-1}=1,$$

$$a_{4n}=1+\frac{4n}{4n+1}=2-\frac{1}{4n+1},$$

$$a_{4n-2}=1-\frac{4n-2}{4n-1}=\frac{1}{4n-1},$$

zaključujemo da je

$$\inf a_{2n-1} = \sup a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = 1.$$

$$\inf a_{4n} = a_4 = \frac{9}{5},$$

$$\sup a_{4n} = \lim_{n\to+\infty} a_{4n} = 2,$$

$$\inf a_{4n-2} = \lim_{n\to+\infty} a_{4n-2} = 0,$$

$$\sup a_{4n-2} = a_2 = \frac{1}{3}.$$

Odavde sleduje

$$\inf a_n = 0, \qquad \sup a_n = 2, \qquad \varliminf_{n\to+\infty} a_n = 0, \qquad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 2.$$

5° Kako je

$$a_{4n} = 2, \quad a_{4n-3} = 6, \quad a_{4n-2} = -4, \quad a_{4n-1} = 0$$

za svako $n \in \mathbf{N}$, zaključujemo da je

$$\inf a_n = \varliminf_{n\to+\infty} a_n = -4, \qquad \sup a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 6.$$

6° Razbijmo niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ na tri podniza:

$$(a_{3n})_{n\in\mathbf{N}}, \qquad (a_{3n-1})_{n\in\mathbf{N}}, \qquad (a_{3n-2})_{n\in\mathbf{N}}.$$

Kako je

$$a_{3n} = \frac{3n-1}{3n+1} = 1 - \frac{2}{3n+1},$$

$$a_{3n-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{3n-2}{3n} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n},$$

$$a_{3n-2} = -\frac{1}{2}\,\frac{3n-3}{3n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n-1},$$

zaključujemo da je

$$\inf a_{3n} = a_3 = \frac{1}{2}, \quad \sup a_{3n} = \lim_{n\to+\infty} a_{3n} = 1.$$

$$\inf a_{3n-1} = \inf a_{3n-2} = \lim_{n\to+\infty} a_{3n-1} = \lim_{n\to+\infty} a_{3n-2} = -\frac{1}{2},$$

$$\sup a_{3n-1} = a_2 = -\frac{1}{6}, \qquad \sup a_{3n-2} = a_1 = 0.$$

Odavde sleduje

$$\inf a_n = -\frac{1}{2}, \qquad \sup a_n = 1, \qquad \varliminf_{n\to+\infty} a_n = -\frac{1}{2}, \qquad \varlimsup_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

7° Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ razbijmo na podnizove: $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ i $(a_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}}$. Kako je $a_{2n} = 2n$, $a_{2n-1} = -2n+1$, zaključujemo da je

$$\inf a_{2n} = a_2 = 2, \qquad \sup a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = +\infty;$$

$$\inf a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = -\infty, \qquad \sup a_{2n-1} = a_1 = -1.$$

Odavde sleduje

$$\inf a_i = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = -\infty, \qquad \sup a_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = +\infty.$$

8° Razbijmo niz $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$ na dva podniza:

$$(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}, \qquad (a_{2n-1})_{n\in\mathbf{N}}.$$

Kako je

$$a_{2n} = (2\,n)^{2n}, \qquad a_{2n-1} = \frac{1}{(2\,n-1)^{2n-1}},$$

zaključujemo da je

$$\inf a_{2n} = a_2 = 4, \qquad \sup a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = +\infty,$$

$$\inf a_{2n-1} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n-1} = 0, \qquad \sup a_{2n-1} = a_1 = 1.$$

Odavde sleduje

$$\inf a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = 0, \qquad \sup a_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = +\infty.$$

9° Niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ razbijmo na tri podniza: $(a_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_{4n-1})_{n\in\mathbf{N}}$, $(a_{4n-3})_{n\in\mathbf{N}}$.

Kako je

$$a_{2n} = 1, \qquad a_{4n-1} = -4\,n+2, \qquad a_{4n-3} = 4\,n-2,$$

zaključujemo da je

$$\inf a_{2n} = \sup a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1,$$

$$\inf a_{4n-1} = \lim_{n\to+\infty} a_{4n-1} = -\infty,$$

$$\sup a_{4n-1} = a_3 = -2,$$

$$\inf a_{4n-3} = a_1 = 2.$$

$$\sup a_{4n-3} = \lim_{n\to+\infty} a_{4n-3} = +\infty.$$

Odavde izlazi

$$\inf a_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = -\infty, \qquad \sup a_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty}\, a_n = +\infty.$$

2.25. Odrediti

$$1^\circ \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\,\pi, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\,\pi;$$

$$2^\circ \quad \overline{\lim}_{n\to+\infty}\, n\sin^2\frac{n\,\pi}{2}, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty}\, n\sin^2\frac{n\,\pi}{2}.$$

Rešenje. 1° Kako je $\cos n\,\pi = (-1)^n$,

$$\text{za } n = 2\,k \text{ je} \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\,\pi = 1+\frac{1}{2\,k},$$

$$\text{za } n=2\,k+1 \text{ je} \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\,\pi = -\left(1+\frac{1}{2\,k+1}\right).$$

Na osnovu toga je

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\,\pi = \lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2\,k}\right) = 1,$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos n\,\pi = -\lim_{k\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2\,k+1}\right) = -1.$$

2° Kako je $\sin^2 \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & (n = 2k) \\ 1 & (n = 2k+1) \end{cases}$, dolazimo do rezultata: za $n = 2k$ je $n \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 0$, a za $n = 2k+1$ je $n \sin^2 \frac{n\pi}{2} = 2k+1$, gde je n prirodan broj ili nula. Na osnovu toga je

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, n \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \lim_{k\to+\infty} (2k+1) = +\infty, \quad \text{i} \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, n \sin^2 \frac{n\pi}{2} = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0.$$

2.26. Ako je $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, $n \in \mathbf{N}$, dokazati da je

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} a_n = -\frac{3}{2}; \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = -1; \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n = 1; \quad \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n = \frac{4}{3}.$$

Primedba. Uopšte važe nejednakosti

$$\inf_{n\in\mathbf{N}} a_n \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \leq \overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n \leq \sup_{n\in\mathbf{N}} a_n.$$

2.27. Odrediti $\underline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n$ i $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ako je

$$1^\circ \ a_n = \frac{n^2}{1+n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}; \quad 2^\circ \ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4};$$

$$3^\circ \ a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}; \quad 4^\circ \ a_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

2.28. Neka je (x_n) niz realnih ili kompleksnih brojeva.

1° Dokazati da konvergencija sva tri podniza

$$(x_{2n}),\ (x_{2n-1}),\ (x_{3n}) \tag{1}$$

povlači konvergenciju niza.

2° Da li iz konvergencije dva od nizova (1) sleduje konvergencije niza (x_n)?

3° Da li konvergencija svih nizova $(x_{sn})_{n\in\mathbf{N}}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ povlači konvergenciju niza (x_n)?

Rešenje. 1° Ako su sva tri niza (1) konvergentna, tada, prvo, podnizovi

$$(x_{6n}) \quad \text{i} \quad (x_{3n}) \tag{2}$$

niza (x_{3n}) $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiraju ka istoj granici, pa zatim, kako su nizovi (2) redom podnizovi nizova (x_{2n}) i (x_{2n-1}), poslednja dva niza imaju istu graničnu vrednost. To, međutim, znači da je niz (x_n) konvergentan.

2° Odgovor je negativan za svaku kombinaciju po dva od nizova (1): za $x_n = (-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, prva dva niza (1) konvergiraju, a treći divergira; ako je $x_n = 0$ ili $x_n = 1$ prema tome da li je broj n prost ili složen, niz (x_n) divergira iako su prvi i treći od nizova (1) konvergentni; najzad, ako je $x_n = 0$ za $n = 2^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ i $x_n = 1$ za sve ostale vrednosti n, tada drugi i treći od nizova (1) konvergiraju, a niz (x_n) divergira.

3° Odgovor je negativan, što dokazuje drugi od primera navedenih pod 2°: u ovom slučaju svi nizovi $(x_{sn})_{n\in\mathbf{N}}$ $(s = 2, 3, \ldots)$ konvergiraju ka broju 1, a niz (x_n) divergira.

2.29. Dokazati Stolzovu teoremu:

Ako je y_n strogo rastući niz i pri tome $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tada

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani postoji, kao konačan broj ili kao pozitivna ili negativna beskonačnost.

Dokaz. Neka je

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

konačan broj i neka je $\varepsilon\ (> 0)$ proizvoljno izabrano. Tada postoji prirodan broj n_0 takav da je, za svaki prirodan broj k veći od n_0, $y_k > 0$ i

$$L - \varepsilon < \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < L + \varepsilon,$$

tj.

$$(L - \varepsilon)(y_k - y_{k-1}) < x_k - x_{k-1} < (L + \varepsilon)(y_k - y_{k-1}) \quad (y_k - y_{k-1} > 0).$$

Stavljajući u poslednjoj dvostrukoj nejednakosti redom $k = n_0 + 1, \ldots, n\ (n > n_0)$ i sabirajući sve te nejednakosti, dobijamo

$$(L - \varepsilon)(y_n - y_{n_0}) < x_n - x_{n_0} < (L + \varepsilon)(y_n - y_{n_0}) \qquad (n > n_0),$$

ili kako je $y_n > 0$,

$$\frac{x_{n_0}}{y_n} + (L - \varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) < \frac{x_n}{y_n} < \frac{x_{n_0}}{y_n} + (L + \varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) \qquad (n > n_0).$$

Puštajući ovde da $n \to +\infty$, dobija se

$$L - \varepsilon \le \varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le L + \varepsilon;$$

puštajući potom da $\varepsilon \to +0$, dolazi se do zaključka da niz $\frac{x_n}{y_n}$ konvergira i da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Na sličan način ustanovljava se da tvrđenje važi i u slučajevima kada je $L = +\infty$ ili $L = -\infty$.

Primedba. Istim metodom može se dokazati i sledeće opštije tvrđenje:

Ako je y_n strogo rastući niz i pri tome $y_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tada je, za bilo koji realan niz x_n,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \le \varliminf_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \le \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

2.30. Ako je $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ i $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 2$ $(n \ge 1)$, tada je $a_n = n^2$. Dokazati ovo metodom matematičke indukcije.

2.31. Dokazati da Fibonacciev niz

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \quad (n \text{ prirodan broj ili nula})$$

zadovoljava sledeće jednakosti:

$1°$ $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 1 \qquad (n \ge 0),$

2° $\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1} = u_{2n+2} \qquad (n \geq 0),$

3° $\sum_{k=0}^{n} u_{2k} = u_{2n+1} - 1 \qquad (n \geq 0),$

4° $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k u_k = u_{2n-1} - 1 \qquad (n \geq 1),$

5° $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^{k+1} u_k = u_{2n} + 1 \qquad (n \geq 0),$

6° $\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = u_n u_{n+1} \qquad (n \geq 0),$

7° $\sum_{k=0}^{2n-1} u_k u_{k+1} = u_{2n}^2 \qquad (n \geq 1),$

8° $u_{n-1} u_{n+1} - u_n^2 = (-1)^n \qquad (n \geq 1),$

9° $u_{n+1} = u_m u_{n-m} + u_{m+1} u_{n-m+1} \qquad (n \geq m \geq 0),$

10° $u_{2n+1} = u_n^2 + u_{n+1}^2 \qquad (n \geq 0),$

11° $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 \qquad (n \geq 1),$

12° $u_{3n} = u_n^3 + u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 \qquad (n \geq 1),$

13° $u_n^4 = 1 + u_{n-2} u_{n-1} u_{n+1} u_{n+2} \qquad (n \geq 2),$

14° $\sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+2}}{u_{k+1} u_{k+3}} = \frac{u_3}{u_1 u_2} - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2} u_{n+3}}.$

2.32. Niz je dat sa $u_{n+1} = \dfrac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ $(n \geq 1)$, $u_1 = 1$. Naći graničnu vrednost ovog niza.

Rešenje. Za $t > 0$ funkcija f data sa

$$f(t) = \frac{2(2t+1)}{t+3} = 2\left(2 - \frac{5}{t+3}\right)$$

rastuća je i pozitivna, a $u_2 = \dfrac{3}{2} > 1 = u_1$. Indukcijom se onda dokazuje da je ovaj niz pozitivan i rastući za $n \geq 1$. Kako je $f(t) < 4$ $(t > 0)$, zaključujemo da je $u_n < 4$ za $n \geq 1$. Iz prethodnog izlazi konvergencija posmatranog niza i pozitivnost njegovog limesa. Dalje,

$$u = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3} = \frac{2(2u+1)}{u+3},$$

tj.

$$u^2 - u - 2 = 0.$$

Koreni ove jednačine su -1 i 2. Dakle, $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

Primedba. Na osnovu rešenja problema 5.57, može se dokazati da niz koji zadovoljava gornju rekurentnu formulu konvergira ka -1 ili 2, osim u slučajevima kada je u_1 jednako jednom od članova niza (v_n) definisanog sa:

$v_1 = -3$, $v_{n+1} = \dfrac{3v_n - 2}{4 - v_n}$ $(n \geq 1)$. Pri tome je $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$ ako i samo ako je $u_1 = -1$.

Slična uopštenja mogu se, na osnovu pomenutog problema, dati i rešenjima nekih drugih zadataka iz ovog poglavlja.

2.33. Ispitati konvergenciju niza s_n, gde je $s_1 = \sqrt{2}$, $s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Rešenje. Pretpostavljajući da je $s_k < 2$, dobijamo

$$s_{k+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_k}} < \sqrt{2 + 2} = 2 \Rightarrow s_{k+1} < 2.$$

Kako je $s_1 = \sqrt{2} < 2$, zaključujemo da je $s_n < 2$ za svako $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Dakle, niz s_k ograničen je s gornje strane.

Kako je $s_2 > s_1$ i $s_{k+1}^2 - s_k^2 = \sqrt{s_k} - \sqrt{s_{k-1}}$, tako da pretpostavka $s_k > s_{k-1}$ povlači $s_{k+1} > s_k$, niz s_n je monotono rastući.

Prema tome, $s_n \to s < 2$ $(n \to +\infty)$. Pri tome se s nalazi iz jednačine $s = \sqrt{2 + \sqrt{s}}$, odakle se dobija

$$s = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}(79 + 3\sqrt{249})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(79 - 3\sqrt{249})} - 1\right).$$

2.34. Dokazati da je za svako $x_0 > -1$ niz $x_n = 1/\sqrt{1 + x_{n-1}}$ $(n \geq 1)$ konvergentan.

2.35. Niz $x_0, x_1, x_2, \ldots$ dat je sa

$$x_0 = c, \ (a + b)\, x_{n+1} = x_n^2 + ab \quad (c > 0;\ b > a > 0).$$

1° Ako je $c > b$, tada (x_n) raste i teži ka $+\infty$.

2° Ako je $a < c < b$, tada (x_n) opada i teži ka a.

3° Ako je $0 < c < a$, tada (x_n) raste i teži ka a.

Dokazati tvrđenja 1°, 2° i 3°.

2.36. Niz je dat sa

$$a_1 = a + b, \quad a_n = a_1 - \frac{ab}{a_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots;\quad a \geq b > 0).$$

Naći $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Posebno ispitati slučaj $a = b > 0$.

Uputstvo. Dokazati najpre da je

$$a_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^n - b^n} \qquad (a > b).$$

2.37. Ispitati konvergenciju niza

$$a_1 = a > 0, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{\lambda}{a_{n-1}}\right) \quad (\lambda > 0;\quad n = 2, 3, \ldots).$$

2.38. Ispitati konvergenciju niza

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Rešenje. Najpre matematičkom indukcijom dokazujemo da je

$$a_{2n} = \frac{p_n}{p_n + 1}, \tag{1}$$

gde je p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ strogo rastući niz prirodnih brojeva. Ako se pretpostavi da (1) važi za $n \leq k$ i da je $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, dobijamo

$$a_{2k+1} = \frac{2}{1 + \dfrac{p_k}{p_k + 1}} = \frac{2\,p_k + 2}{2\,p_k + 1},$$

$$a_{2k+2} = \frac{2}{1 + \dfrac{2\,p_k + 2}{2\,p_k + 1}} = \frac{p_{k+1}}{p_{k+1} + 1},$$

gde je $p_{k+1} = 4\,p_k + 2$ broj veći od p_k. Ovo, s obzirom na $a_2 = \dfrac{2}{3}$, dokazuje tvrđenje.

Na osnovu prethodnog

$$a_{2n+1} = \frac{2\,p_n + 2}{2\,p_n + 1} \quad (n = 1, 2, \ldots);\ p_n \to +\infty \quad (n \to +\infty), \tag{2}$$

Iz (1) i (2) izlazi $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

Primedba. Primenom drugog metoda (videti primedbu uz 2.32), može se ustanoviti da niz

$$a_1 = a,\ a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

gde je $a \notin \{b_1, b_2, \ldots\}$, sa $b_1 = -1$, $b_n = \dfrac{2}{b_{n-1}} - 1$ $(n = 2, 3, \ldots)$, konvergira ka -2 ili ka 1 prema tome da li je $a = -2$ ili $a \neq -2$.

2.39. 1° Dokazati da jednačina $e^x = ax$ $(a > 0)$ ima dva, jedan ili nema ni jedan koren prema tome da li je $a > e$, $a = e$ ili $a < e$.

2° Dat je niz (u_n), gde je

$$u_{n+1} = u_n\, e^{u_n - u_{n-1}} \quad (u_0 \text{ i } u_1 \text{ fiksirani realni brojevi}).$$

Ako je $e^{u_0} \geq e u_1$ i u_0 nije veće od većeg korena jednačine

$$e^x = \frac{e^{u_0} x}{u_1}, \tag{1}$$

tada dati niz monotono konvergira ka manjem korenu jednačine (1). U svim ostalim slučajevima niz (u_n) je monoton i divergentan.

Dokazati ova tvrđenja.

2.40. Dokazati da $a_n - a_{n-1} \to d$ $(n \to +\infty)$ povlači $\dfrac{a_n}{n} \to d$ $(n \to +\infty)$.

Dokaz. Stavljajući, saglasno pretpostavci,

$$a_n - a_{n-1} = d + \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n = o(1),\ n \to +\infty),$$

dobijamo

$$\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k + d \qquad (n \to +\infty),$$

odakle tvrđenje neposredno izlazi na osnovu Cauchyeve teoreme (1.1.2.22.1).

2.41. Ispitati monotoniju i konvergenciju nizova

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}, \quad b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2.42. Ispitati monotoniju nizova

$$1^\circ \ a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n; \quad 2^\circ \ a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3};$$

$$3^\circ \ a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. 1° Koristeći Bernoullievu nejednakost, za $n \geq 2$ dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right)^{n-1} \left(\frac{n^2}{1+n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{(n-1)^2}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{1+n^2}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\left(1 - \frac{n}{1+n^2}\right) = 1 + \frac{n^2 + 1 - n^2 + n - n}{(n-1)(n^2+1)} \\ &= 1 + \frac{1}{(n-1)(n^2+1)} > 1 \\ &\Rightarrow a_n \downarrow \ (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

$$2^\circ \qquad a_n = \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) \uparrow \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

$$3^\circ \qquad a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \downarrow \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2.43. Dokazati da monotono rašćenje (opadanje) niza a_n $(n \in \mathbf{N})$ povlači monotono rašćenje (opadanje) niza

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

2.44. Dat je funkcionalni niz

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

1° Odrediti graničnu funkciju $x \mapsto f(x)$ datog niza i nacrtati njen grafik.

2° Da li dati niz uniformno konvergira ka f na skupu $\mathbf{R}$?

Rešenje. 1° Granična funkcija f data je sa

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| > 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| < 1. \end{cases}$$

2° Iz činjenice da su svi članovi ovog niza neprekidni, a granična funkcija nije neprekidna, izlazi da konvergencija nije uniformna.

2.45. Dat je niz funkcija

$$x \mapsto f_n(x) = n(nx-1)\, e^{-n(nx-1)^2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Dokazati da $f_n(x) \to 0$ $(n \to +\infty;\ -1 \leq x \leq 0)$ uniformno, kao i da dati niz ne konvergira uniformno za $0 \leq x \leq 1$.

2.46. Neka je $f_n(x) = 2n^2 xe^{-n^2x^2}$ (x realno; $n = 1, 2, \ldots$). Izračunati, za $x > 0$,

$$\int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,dt \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^x f_n(t)\,dt,$$

i objasniti rezultat poređenja ove dve vrednosti.

Primedba. Dati funkcionalni niz nije uniformno ograničen za $x \geq 0$.

2.47. Ispitati monotoniju i konvergenciju niza

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)2n}} \quad (n \in \mathbf{N})$$

Rezultat. **Niz strogo opada i** $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \log 2$.

2.48. Ispitati monotoniju i konvergenciju niza a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ definisanog jednakostima

$$a_1 = \frac{c}{2} \ (c > 0), \ 2a_n = c + a_{n-1}^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Rezultat. **Niz strogo raste za svako** $c\,(>0)$ **i teži ka** $+\infty$ **ili ka** $1 - \sqrt{1-c}$ **prema tome da li je** $c > 1$ **ili** $0 < c \leq 1$.

2.49. Neka je $x \mapsto f(x)$ u intervalu $(0, 1]$ monotono opadajuća funkcija sa osobinom $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$. Dokazati da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

bilo da integral na desnoj strani konvergira bilo da divergira ka $+\infty$.

Dokaz. Ako se stavi

$$g_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \left(\frac{k-1}{n} < x \leq \frac{k}{n};\ k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots\right),$$

za $x \in (0, 1]$ je

$$g_n(x) \leq f(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odavde je

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g_n(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Puštajući da $n \to +\infty$, dobija se

(1) $$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_0^1 f(x)\,dx.$$

S druge strane, neka je $\varepsilon \in (0, 1)$ takvo da je $f(x) > 0$ za $0 < x \leq \varepsilon$. Ako se, za svaki prirodan broj n veći od $\frac{1}{\varepsilon}$, stavi $p_n = [\varepsilon n]$, biće

$$\frac{p_n}{n} \leq \varepsilon < \frac{p_n + 1}{n}, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=p_n+1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(n > \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Odavde se dobija, puštajući da $n \to +\infty$,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=p_n+1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{p_n + 1}{n} - \varepsilon\right) f\left(\frac{p_n+1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=p_n+2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] + \lim_{n\to+\infty} \left(\varepsilon - \frac{p_n}{n}\right) f\left(\frac{p_n+1}{n}\right)$$

$$= \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, dx + 0 = \int_{\varepsilon}^{1} f(x)\, dx,$$

a puštajući potom da $\varepsilon \to 0+$, dolazi se do nejednakosti

(2) $$\varliminf_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_{0}^{1} f(x)\, dx.$$

Iz (1) i (2) izlazi tvrđenje koje dokazujemo.

Primedba. Na osnovu prethodnog, lako se ustanovljava da je, uopšte,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

kad god je funkcija f monotona u ograničenom intervalu $(a, b]$, bilo da integral $\int_{a}^{b} f(x)\, dx$ ima konačnu vrednost, bilo da je jednak $+\infty$ ili $-\infty$.

2.50. Ispitati konvergenciju niza a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ datog sa

$$a_1 = a, \; a_2 = b, \; a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \qquad (n = 3, 4, \ldots).$$

Rešenje. Niz $x_n = q^n$ zadovoljava jednakosti

(1) $$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 3, 4, \ldots)$$

ako i samo ako je, za $q \neq 0$,

$$q^2 = \frac{1}{2}(q + 1), \text{ tj. } 2q^2 - q - 1 = 0,$$

tako da se za q $(\neq 0)$ dobijaju vrednosti $q_1 = 1$ i $q_2 = -\frac{1}{2}$. Niz čiji je opšti član

$$x_n = A + \frac{(-1)^n}{2^n} B \qquad (A \text{ i } B \text{ proizvoljne konstante})$$

takođe zadovoljava jednakosti (1). Da bi se on podudario sa nizom (a_n), potrebno je i dovoljno da bude

$$A - \frac{1}{2} B = a, \qquad A + \frac{1}{4} B = b.$$

Odavde je

$$A = \frac{1}{3}(a + 2b), \qquad B = \frac{4}{3}(b - a);$$

tj.

$$a_n = \frac{1}{3}(a + 2b) + \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \frac{4}{3}(b - a) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odatle neposredno dobijamo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{3}(a + 2b).$$

Primedba. Uopštavanjem izloženog postupka, bez teškoća može se ispitati konvergencija i, u slučaju konvergencije, odrediti granična vrednost niza a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ datog jednakostima

$$a_1 = a, \; a_2 = b, \; a_n = \alpha\, a_{n-1} + \beta\, a_{n-2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

2.51. 1° Niz realnih brojeva (x_n) određen je sa

$$\text{(1)} \qquad x_{n+2} = \alpha\, x_{n+1} + (1 - \alpha)\, x_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \; x_1 = a, \; x_2 = b.$$

Ispitati konvergenciju i divergenciju niza (x_n) u zavisnosti od realnih brojeva α, a i b.

2° Proučiti konvergenciju i divergenciju niza (x_n) datog sa (1), gde su α, a i b proizvoljni kompleksni brojevi.

Rešenje. 1° Ako je $\alpha = 1$, tada je $x_1 = a$, $x_n = b$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Neka je $\alpha \neq 1$. Karakteristična jednačina diferencne jednačine

$$x_{n+2} = \alpha\, x_{n+1} + (1 - \alpha)\, x_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

glasi

$$t^2 - \alpha t + \alpha - 1 = 0.$$

Njena diskriminanta je $(\alpha - 2)^2$, a koreni su $t_1 = 1$ i $t_2 = \alpha - 1$. Ako je $\alpha \neq 2$, niz (x_n) dat je sa

$$x_n = A + B(\alpha - 1)^n \quad (n \in \mathbf{N}),$$

gde se konstante A i B određuju iz uslova

$$A + B(\alpha - 1) = a, \quad A + B(\alpha - 1)^2 = b,$$

koji daju

$$A = a + \frac{a - b}{\alpha - 2}, \quad B = \frac{b - a}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}.$$

Ako je $\alpha = 2$, niz (x_n) dat je formulom $x_n = C + D\,n$ $(n \in \mathbf{N})$, pri čemu su ispunjeni uslovi $C + D = a$, $C + 2D = b$, koji daju $C = 2a - b$, $D = b - a$.

Iz svega prethodnog neposredno se izvode sledeći zaključci:

Ako je $\alpha = 1$, niz konvergira ka b. Ako $\alpha \in (0, 1) \cup (1, 2)$ (tj. $\alpha \neq 1$ i $|\alpha - 1| < 1$), niz konvergira ka broju $a + \dfrac{a - b}{\alpha - 2}$. Ukoliko je $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$, niz konvergira ako i samo ako je $a = b$; u tom slučaju niz je konstantan.

Može se dodati da, u slučaju kad je $\alpha \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$ i $a \neq b$, niz ima dve konačne tačke nagomilavanja a i b, ima tačke nagomilavanja $-\infty$ i $+\infty$, ili teži ka $\operatorname{sgn}\big((b - a)\big)(+\infty)$, prema tome da li je $\alpha = 0$, $\alpha < 0$, ili $\alpha \geq 2$.

2° Sličnim rasuđivanjem dolazi se do zaključka da niz (x_n) konvergira u slučajevima kad je: $|\alpha - 1| < 1$ (α pripada unutrašnjosti kruga sa centrom u tački 1 i poluprečnikom 1) ili $|\alpha - 1| \geq 1$ i $a = b$; a divergira kad je $|\alpha - 1| \geq 1$ i $a \neq b$. Ostavljamo čitaocu da bliže prouči ponašanje niza u svakom od ovih slučajeva.

2.52. Odrediti opšti član a_n i ispitati konvergenciju niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definisanog sa

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\,(n=1,2,\ldots),\qquad a_1=1,\ a_2=1.$$

2.53. Nejednakosti

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n<e<\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

impliciraju nejednakosti

$$(1)\qquad \frac{1}{n+1}<\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)<\frac{1}{n}\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Iskoristiti nejednakosti (1) za dokaz jednakosti

$$(2)\qquad \lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\Big)=\log 2.$$

Rešenje. Prema (1) imamo

$$\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}<\log\frac{n}{n-1},$$

$$\log\frac{n+2}{n+1}<\frac{1}{n+1}<\log\frac{n+1}{n},$$

$$\log\frac{2n+1}{2n}<\frac{1}{2n}<\log\frac{2n}{2n-1}.$$

Sabiranjem svih ovih nejednakosti dobijamo

$$\log\frac{2n+1}{n}<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}<\log\frac{2n}{n-1}.$$

Poslednja dvostruka nejednakost, s obzirom na

$$\lim_{n\to+\infty}\log\frac{2n+1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\log\frac{2n}{n-1}=\log 2,$$

povlači jednakost (2).

Primedba. Korišćenjem jednakosti (2) integral $\int_1^2\frac{dx}{x}$ može se izračunati direktno na osnovu definicije određenog integrala. Naime, deleći interval $[1,2]$ na n jednakih delova, dobijamo

$$\int_1^2\frac{dx}{x}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\Big)=\log 2.$$

2.54. Dokazati da niz

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\qquad (n=1,2,\ldots)$$

konvergira. (Njegov limes γ poznat je pod imenom Eulerove konstante i ima vrednost $\gamma=0{,}5772156649\ldots$).

Dokaz 1. Uporedno sa datim nizom posmatraćemo niz

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log (n+1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Kako je

$$a_n - b_n = \log \frac{n+1}{n} > 0, \text{ tj. } a_n > b_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \to +\infty} \log \frac{n+1}{n} = 0,$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \log (n+1) + \log n = \frac{1}{n+1} - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 - \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \text{ tj. } a_n \downarrow,$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \log (n+2) + \log (n+1) = \frac{1}{n+1} - \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[1 - \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right] > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \text{ tj. } b_n \uparrow,$$

nizovi a_n i b_n konvergiraju ka zajedničkom limesu $\gamma = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$, pri čemu je

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \gamma < a_n < \cdots < a_2 < a_1 \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Pomoću ovih nejednakosti mogle bi se izračunavati približne vrednosti Eulerove konstante γ, **uz procenu greške, ali takav postupak bio bi prilično zametan. Iz njih, međutim, odmah izlazi da $\gamma \in (0, 1)$, a takođe i preciznija procena $\frac{3}{2} - \log 3 < \gamma < \frac{3}{2} - \log 2$.**

Dokaz 2. Na osnovu jednakosti $a_n - a_{n+1} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$, i nejednakosti (videti 2.53)

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{n+1} < \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

zaključujemo da je $a_n > a_{n+1}$, tj. dati niz je opadajući.

Iz desne nejednakosti u (1) redom izlazi

$$\sum_{k=1}^{n} \log \left(1 + \frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad \log \prod_{=1}^{n} \frac{k+1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

tj.

$$\log (n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) < a_n.$$

Na osnovu poslednje nejednakosti zaključujemo da je $a_n > 0$.

Dakle, dati niz opada i ograničen je, što znači da je konvergentan.

2.55. Ako je

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}},$$

odrediti $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Rešenje. Količnik $\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}$ može se napisati u obliku

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}.$$

Ako je funkcija $x\mapsto f(x)$ integrabilna u intervalu $[0, 1]$, važi jednakost

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

U posmatranom slučaju, funkcija $x\mapsto f(x)$ ima oblik $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$. Stoga, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{\sqrt{n}}=$ $=2(\sqrt{2}-1)$.

2.56. Primenom Stirlingove formule ili na drugi način, dokazati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza

$$a_n=(n!)^{\log^\alpha n}\,a^{-n^\beta}\quad (n=1, 2, \ldots,\ \alpha>0,\ a>1,\ \beta>1).$$

2.57. Ispitati da li je niz

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\qquad (n=1, 2, \ldots)$$

konvergentan ili divergentan.

Uputstvo. Obrazovati $a_{n+1}-a_n$ i koristiti se nejednakošću

$$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\le n\,\frac{1}{n+1}<1\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Generalizacija. Posmatrati niz

$$a_{nk}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{kn}\qquad (n=1, 2, \ldots),$$

gde je k fiksni prirodni broj ≥ 2.

2.58. Izračunati graničnu vrednost $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)}{n^3}$.

Rešenje.

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2+\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{2n+1}{3}\right)}{n^3}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)2(n+2)}{3\cdot 2\cdot n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)=\frac{1}{3}\,.$$

2.59. Izračunati granične vrednosti:

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + (1+2) + (1+2+3) + \cdots + (1+2+\cdots+n)}{n^3};$$

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \cdots + \frac{(4n-1)^3}{n^4}\right);$$

$$L_3 = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$$

Rešenje.

$$L_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+1)}{2n^3} = \frac{1}{2\cdot 3} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{6};$$

$$L_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{4n-1} k^3}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{(4n-1)\cdot 4n}{2}\right)^2}{n^4} = 4\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(4n-1)^2}{n^2}$$

$$= 4 \lim_{n\to+\infty} \left(4 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4^3;$$

$$L_3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$= 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + \sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} = 1.$$

Primedba. Primena Stolzove teoreme (1.1.2.22) omogućuje lakše dobijanje prethodnih vrednosti za L_1 i L_2, kao i rezultata u 2.58.

2.60. Odrediti granične vrednosti nizova:

1° $a_n = \dfrac{n^2}{a^n}$ $(a > 0)$; 2° $a_n = \dfrac{\log n}{n}$;

3° $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ $(p > -1)$;

4° $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}$ $(p > 0)$;

5° $a_n = \dfrac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}$ $(p > -1)$.

Rezultat. 3° $\dfrac{1}{p+1}$; 4° $\dfrac{1}{2}$; 5° $\dfrac{2^p}{p+1}$.

2.61. Odrediti granične vrednosti

$$1^\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(k+2)(k+4)}{\sum_{k=1}^{n} k(2k+1)(k+2)}; \qquad 2^\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)}{\sum_{k=1}^{n} k(k+3)(2k+1)}$$

2.62. Ispitati da li su nizovi, čiji su opšti članovi

$$1^\circ\ a_n = \sqrt{n^3}\,(\sqrt{n^4+4} - n^2); \qquad 2^\circ\ a_n = \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n},$$

nula-nizovi.

Rešenje. **1° Niz (a_n) je nula niz ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj $N(\varepsilon) > 0$ takav da je $|a_n| < \varepsilon$ za $n > N(\varepsilon)$.**

Kako je

$$a_n = \frac{4\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^4+4} + n^2} < \frac{4\sqrt{n^3}}{2n^2} = \frac{2}{\sqrt{n}},$$

biće $|a_n| < \varepsilon$ ako je

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \quad \left(\Leftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2}\right).$$

Prema tome, za $N(\varepsilon)$ možemo uzeti $N(\varepsilon) = \max\left(\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right], 1\right)$.

2.63. Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right)$.

Rešenje.

$$n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < n \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}.$$

Odavde je

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}} < 1.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$, dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}\right) = 1.$$

2.64. Da li su tačne jednakosti

$$1^\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1} = \operatorname{sgn} x; \qquad 2^\circ \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx = \operatorname{sgn} x?$$

2.65. Ako je $f(x) = x^2 + x + 1$, odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n \log \dfrac{f(n+1)}{f(n)}\right)$.

Rešenje.
$$\lim_{n\to+\infty} \left(n \log \frac{f(n+1)}{f(n)}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(n \log \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(n \log \left(1 + \frac{2n+2}{n^2+n+1}\right)\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \frac{2n+2}{n^2+n+1} = 2.$$

Ovde je primenjena relacija $\log(1+t) \sim t \ (t \to 0)$.

2.66. Dat je niz $(a_n)_{n\in\mathrm{N}}$ pomoću
$$a_{n+2} - 5\,a_{n+1} + 6\,a_n = 0 \ (n \geq 1), \qquad a_1 = 0, \qquad a_2 = -6.$$
Naći a_n i ispitati konvergenciju datog brojnog niza.

Rezultat. $a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$. Niz je divergentan.

2.67. Ispitati monotoniju i konvergenciju niza
$$a_1 > 0, \quad a_n = \frac{a_{n-1}(a_{n-1}^2 + 3\,a)}{3\,a_{n-1}^2 + a} \qquad (n = 2, 3, \ldots; \ a > 0).$$

Rešenje. Stavljajući

(1) $$a_n = b_n \sqrt{a} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

dobijamo

(2) $$b_n = \frac{b_{n-1}^3 + 3b_{n-1}}{3\,b_{n-1}^2 + 1} \qquad (n = 2, 3, \ldots), \quad b_1 > 0,$$

i dalje
$$b_n - 1 = \frac{b_{n-1}^3 + 3\,b_{n-1} - 3\,b_{n-1}^2 - 1}{3\,b_{n-1}^2 + 1} = \frac{(b_{n-1} - 1)^3}{3\,b_{n-1}^2 + 1}.$$

Dakle, $b_n \lesseqgtr 1 \ (n = 1, 2, \ldots)$ prema tome da li je $b_1 \lesseqgtr 1$.

Pod pretpostavkom $b_1 \neq 1$ dobijamo
$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n-1}^2 + 3}{3\,b_{n-1}^2 + 1} = 1 + \frac{2(1 - b_{n-1}^2)}{3\,b_{n-1}^2 + 1} \gtrless 1, \quad b_1 \lessgtr 1,$$
što znači da niz b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ strogo opada ili raste prema tome da li je $b_1 > 1$ ili $b_1 < 1$.

Iz prethodnih činjenica izlazi da niz (b_n) u svim slučajevima ima konačnu i pozitivnu graničnu vrednost x. Puštajući u (2) da $n \to +\infty$, dobijamo
$$x = \frac{x(x^2+3)}{3\,x^2 + 1} \quad (x > 0), \quad \text{ili} \quad 3x^2 + 1 = x^2 + 3, \quad \text{tj.} \quad x = 1.$$

Uzevši u obzir (1), na kraju možemo za niz a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ reći da strogo raste, strogo opada ili je konstantan prema tome da li je $a_1 < \sqrt{a}$, $a_1 > \sqrt{a}$ ili $a_1 = \sqrt{a}$, i da je, u sva tri slučaja, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sqrt{a}$.

2.68. Da li su konvergentni sledeći nizovi:

1° $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$; 2° $\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ $(n=1,2,\ldots)$?

Ako jesu, naći njihove granične vrednosti.

Rezultat. 1° 0; 2° 1.

2.69. Ispitati konvergenciju niza

$$u_1=\frac{a^a}{(a+1)^{a+1}},\quad u_n=\frac{u_1}{(1-u_{n-1})^a}\qquad (n>1;\ a>0).$$

Rešenje. Imamo $0<u_1<1$, i stoga

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{1}{(1-u_1)^a}>1.$$

Kako je još

(1) $$f(t)=\frac{u_1}{(1-t)^a}\ \uparrow\ (t<1),$$

posmatrani niz raste, pod uslovom da je definisan za svako n. Pod poslednjom pretpostavkom, granična vrednost t ovog niza je koren jednačine $g(t)\equiv f(t)-t=0$. Budući da je

$$g'(t)=\frac{au_1}{(1-t)^{a+1}}-1=0$$

samo za $t=t_0=\dfrac{1}{a+1}$ i $g(t_0)=0$, zaključujemo da je t_0 jedini koren jednačine $g(t)=0$.

Zbog $u_1=\left(\dfrac{a}{1+a}\right)^a\dfrac{1}{1+a}<t_0$ i s obzirom na (1), imamo dalje

$$u_n<t_0\Rightarrow u_{n+1}=f(u_n)<f(t_0)=t_0.$$

Prema tome, dati niz definisan je za svako n i $u_n<t_0\ (<1)$ za svako n. Iz svega prethodnog izlazi da taj niz konvergira i da je $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{1+a}$.

Primedba. Na osnovu prethodnog rešenja, lako se može ustanoviti da, opštije, niz

$$u_1<\frac{1}{a+1},\quad u_n=\frac{u_1}{(1-u_{n-1})^a}\qquad (n>1;\ a>0)$$

striktno raste i konvergira ka $\dfrac{1}{a+1}$.

2.70. Trougao T_n ima temena A_n, B_n i C_n sa odgovarajućim uglovima α_n, β_n i γ_n. Neka je K_n upisani krug u trouglu T_n. Niz trouglova $T_1,\ldots,T_n,\ldots$ dat je na sledeći način:

1° T_1 je proizvoljan trougao;

2° T_n $(n\geq 2)$ se dobija od T_{n-1} kada se za A_n, B_n i C_n redom uzmu dodirne tačke kruga K_{n-1} sa stranicama $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}A_{n-1}$ i $A_{n-1}B_{n-1}$.

Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n$.

Rešenje. Prema slici je

$$2\,\alpha_n + \alpha_{n-1} = \pi,$$

tj.

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_{n-1},$$

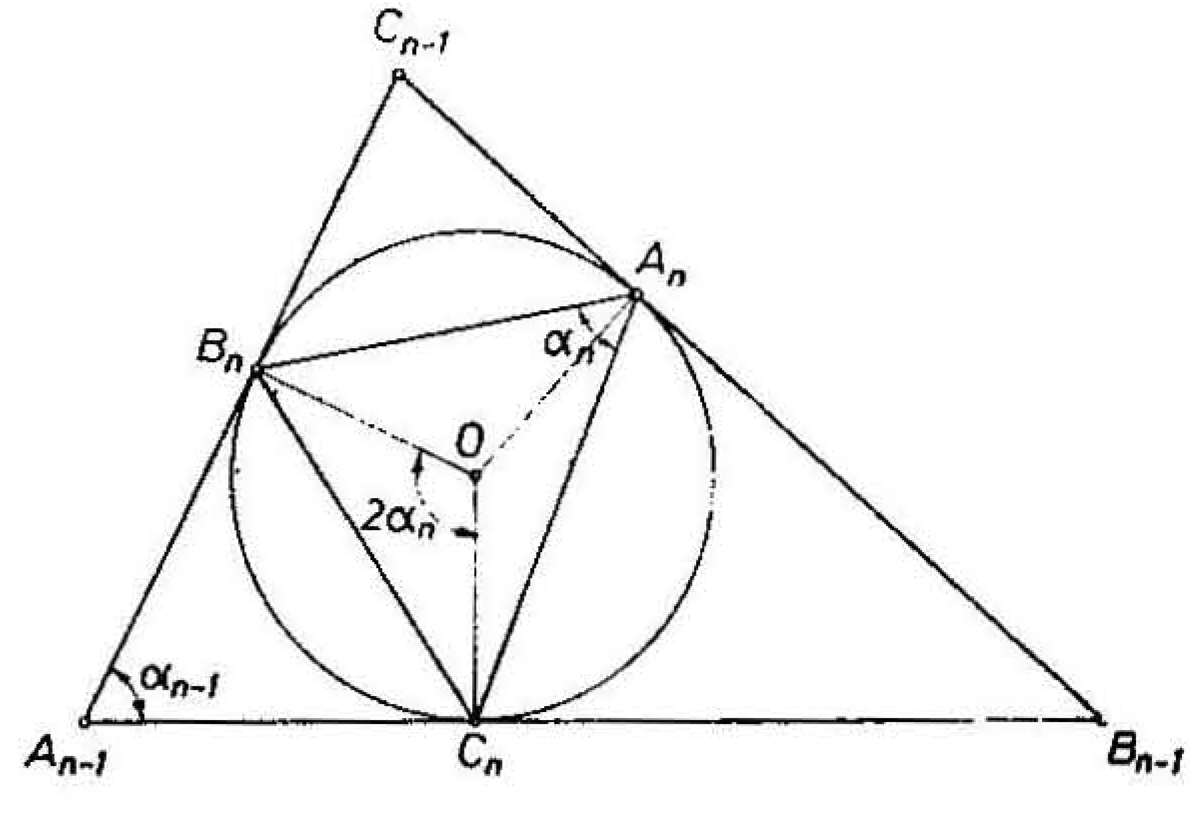
tako da imamo jednakosti

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_{n-1},$$

$$\alpha_{n-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_{n-2},$$

$$\vdots$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha_1.$$



Množeći k-tu od ovih jednakosti sa $\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ i sabirajući ih potom, dobijamo

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\right) + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}\alpha_1.$$

Odavde,

(1)
$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\pi.$$

Analogno dobijamo

(2)
$$\lim_{n\to+\infty} \beta_n = \frac{1}{3}\pi, \quad \lim_{n\to+\infty} \gamma_n = \frac{1}{3}\pi.$$

Na osnovu (1) i (2), može se reći da trougao T_n »teži da postane ravnostrani trougao« kad $n \to +\infty$.

2.71. Neka je $\max(a, b) = \begin{cases} a & (a \geq b), \\ b & (a < b). \end{cases}$

Dokazati da $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$ $(n \to +\infty)$ ako $a_n \to a$, $b_n \to b$ $(n \to +\infty)$.

***Rešenje* 1.** Neka je $a > b$. Tada je $\frac{1}{2}(a-b) > 0$, pa za dovoljno veliko n imamo

$$a_n > a - \frac{1}{2}(a-b) = b + \frac{1}{2}(a-b) > b_n,$$

što znači da je $\max(a_n, b_n) = a_n$ za n dovoljno veliko, tako da $\max(a_n, b_n) \to a = \max(a, b)$ $(n \to +\infty)$. Ako je $b > a$, očigledno takođe $\max(a_n, b_n) \to \max(a, b)$ $(n \to +\infty)$. Ako je $a = b$, za proizvoljno $\varepsilon > 0$ imamo $a_n, b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ukoliko je n dovoljno veliko, pa odatle i $\max(a_n, b_n) \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ za n dovoljno veliko, što znači da u tom slučaju $\max(a_n, b_n) \to a = \max(a, b)$ $(n \to +\infty)$.

***Rešenje* 2.** Imamo

$$\max(a_n, b_n) = \frac{1}{2}(a_n + b_n + |a_n - b_n|) \to \frac{1}{2}(a + b + |a-b|) = \max(a, b) \quad (n \to +\infty).$$

2.72. 1° Ispitati konvergenciju niza $\left(1-\frac{\alpha_n}{n}\right)^n$, gde je $\alpha_n < n$ $(n=1, 2, \ldots)$ i $\alpha_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

2° Čemu teži niz $\left(1+\frac{\beta_n}{n}\right)^n$ ako $\beta_n > 0$ $(n=1, 2, \ldots)$ i $\beta_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$?

Rešenje. 1° Ako je A (>0) proizvoljno izabrano, za n dovoljno veliko je $\alpha_n > A$, i odatle, s obzirom na $\alpha_n < n$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

$$0 < 1 - \frac{\alpha_n}{n} < 1 - \frac{A}{n},$$

tj.

$$0 < \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{A}{n}\right)^n.$$

Puštajući ovde prvo da $n \to +\infty$, pa zatim da $A \to +\infty$, dobijamo redom sledeće nejednakosti

$$0 \leq \varliminf_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leq e^{-A},$$

$$0 \leq \varliminf_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leq \varlimsup_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \leq 0.$$

Dakle,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = 0.$$

2° Ako je B (>0) proizvoljno izabrano, za n dovoljno veliko je $\beta_n > B$, tako da imamo

$$\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n > \left(1 + \frac{B}{n}\right)^n.$$

Odatle,

$$\varliminf_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n \geq e^B,$$

i dalje

$$\varliminf_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n \geq \lim_{B\to+\infty} e^B = +\infty,$$

što znači da

$$\left(1 + \frac{\beta_n}{n}\right)^n \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$

2.73. Ako je $\lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$, dokazati da je svaka tačka intervala $(\varliminf_{n\to+\infty} a_n, \varlimsup_{n\to+\infty} a_n)$ tačka nagomilavanja niza a_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dokaz. Stavimo

$$l = \varliminf_{n\to+\infty} a_n, \qquad L = \varlimsup_{n\to+\infty} a_n$$

i neka je $a \in (l, L)$. Pretpostavimo da a nije tačka nagomilavanja niza a_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Tada postoje brojevi b i c koji zadovoljavaju nejednakost $l < b < a < c < L$ i prirodan broj n_1 tako da za $n > n_1$ imamo $a_n \notin [b, c]$. S druge strane, postoji takav prirodan broj n_2 da $n > n_2$ povlači

$|a_{n+1} - a_n| < c - b$. Kako je l tačka nagomilavanja niza, postoji $m > \max(n_1, n_2)$ takvo da je $a_m < b$. Iz pretpostavke da je $a_n < b$ za neko $n \geq m$ izlazi

$$a_{n+1} \leq a_n + |a_{n+1} - a_n| < b + c - b = c,$$

pa, kako $a_{n+1} \notin [b, c]$, imamo $a_{n+1} < b$. Tako se matematičkom indukcijom ustanovljava da je $a_n < b$ za $n \geq m$. Odatle, $L = \overline{\lim_{n \to +\infty}}\, a_n \leq b < L$. Dobijena protivurečnost dokazuje teoremu.

2.74. 1° Dokazati teoremu:

Neka je $b_{k,n} > 0$ $(k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Ako

$$\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} \to 1 \quad (n \to +\infty)$$

uniformno u odnosu na k, tj. ako za svako ε (> 0) postoji takvo m da $n > m$ povlači

$$\left| \frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} - 1 \right| < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

tada je

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n},$$

pod uslovom da limes na desnoj strani ima konačnu vrednost.

2° Naći granične vrednosti sledećih nizova:

α) $\displaystyle a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt[p]{1 + \frac{k^{q-1}}{n^q}} - 1 \right) \qquad (p \neq 0, q > 0);$

β) $\displaystyle b_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k-1}{n^2} a \quad (a \neq 0);$

γ) $\displaystyle c_n = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{\frac{k}{n^2}} - 1 \right) \quad (a > 0);$

δ) $\displaystyle d_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$

Rešenje. 1° Ako stavimo

$$\frac{a_{k,n}}{b_{k,n}} = 1 + \varepsilon_{k,n} \qquad (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),$$

imamo

(1) $$\sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n} b_{k,n}.$$

Iz konačnosti limesa niza $\sum_{k=1}^{n} b_{k,n}$ izlazi da postoji takvo konačno $M > 0$ da je

(2) $$\sum_{k=1}^{n} b_{k,n} \leq M \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno izabrano. U saglasnosti sa pretpostavkom, postoji m takvo da

$$|\varepsilon_{k,n}| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (n > m;\ k = 1, \ldots, n).$$

Dalje imamo, s obzirom na (2), za $n > m$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n}\, b_{k,n} \right| < \frac{\varepsilon}{M} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n} \leq \varepsilon .$$

To znači da $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,n}\, b_{k,n} = 0$. Iz (1) onda izlazi

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} b_{k,n}.$$

Primedba 1. Uslov $b_{k,n} > 0\ (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ može se zameniti uslovom da $b_{k,n}$ ne menja znak za dovoljno veliko n.

Primedba 2. Količnik $a_{k,n}/b_{k,n}$ svakako konvergira ka 1 uniformno u odnosu na k ako je

$$a_{k,n} = f(c_{k,n}),\ b_{k,n} = g(c_{k,n}) \quad (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots),\ \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

gde $c_{k,n}$ uniformno u odnosu na k teži ka nuli kad $n \to +\infty$.

2 α) Za $k = 1, \ldots, n$ je $c_{k,n} = \dfrac{k^{q-1}}{n^q} \leq \max\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^q}\right)$, odakle izlazi da $c_{k,n}$ teži ka nuli kad $n \to +\infty$ uniformno u odnosu na k. Uzimajući u obzir dokazano tvrđenje pod 1° i primedbu 2 i uočavajući da

$$\frac{\sqrt[p]{1+x} - 1}{\dfrac{1}{p}\, x} \to 1 \qquad (x \to 0),$$

dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{q-1}}{n^q} = \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{q-1}}{n^q - (n-1)^q}$$

$$= \frac{1}{p} \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n}}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^q} = \frac{1}{p\, q}.$$

Ovde je primenjena Stolzova teorema. Može se postupiti i na sledeći način (definicija određenog integrala u Riemannovom smislu za $q \geq 1$ i dopunski rezultat za $0 < q < 1$ (videti 2.49)):

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{q-1}}{n^q} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{q-1} \frac{1}{n} = \int_0^1 t^{q-1}\, dt = \frac{1}{q}.$$

β) Kako je

$$\left| \frac{2k-1}{n^2}\, a \right| \leq \frac{2n-1}{n^2} |a| \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

istim rasuđivanjem kao napred dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{n^2}\, a = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^2}\, n^2 = a.$$

γ) Kao u prethodnom slučaju, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \log a \cdot \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \log a \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\log a.$$

δ) Rasuđujući kao u prethodnim slučajevima, dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} \log d_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

2.75. Neka su a i b ($a > b$) dva pozitivna broja. Nizove (a_n) i (b_n) definisaćemo sa

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad a_1 = a, \quad b_1 = b.$$

Dokazati da ovi nizovi konvergiraju ka istoj granici.

Dokaz. Dokažimo najpre da je

(1) $$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > b_n > \cdots > b_2 > b_1 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ove nejednakosti su očigledno tačne za $n = 1$. Pretpostavimo da one važe za neki prirodan broj n. Da bismo dokazali njihovo važenje za prirodan broj $n + 1$, dovoljno je ustanoviti da je

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n.$$

Sve ove nejednakosti, međutim, izlaze iz pretpostavke $a_n > b_n > 0$ i iz činjenice da su a_{n+1} i b_{n+1} redom aritmetička i geometrijska sredina pozitivnih brojeva a_n i b_n. Tvrđenje (1) je tako dokazano matematičkom indukcijom.

Iz (1) izlazi da su nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i ograničeni, tako da $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ postoje i imaju konačne vrednosti, koje ćemo redom označiti sa A i B. Puštajući da $n \to +\infty$ u jednakosti

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

dobijamo
$$A = \frac{A+B}{2}, \quad \text{tj. } A = B.$$

Primedba. Zajednički limes o kome je ovde reč naziva se aritmetičko-geometrijska sredina brojeva a i b. (Pojam i termin potiču od Gaussa.) Ova sredina može se eksplicitno izraziti kao funkcija od a i b uz pomoć eliptičkih integrala. O ovoj sredini videti:

D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Sredine*, Matematička biblioteka, sv. 40, Beograd 1969, str. 51–52.

2.76. Brojni nizovi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vezani su pomoću jednakosti

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n + b_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Ako je $a_1 > b_1 > 0$, dokazati da je

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > 0 \qquad (n \geq 1).$$

Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

2.77. Brojni nizovi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definisani su sa

(1) $$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2\,a_n b_n}{a_n + b_n},$$

pri čemu su njihovi prvi članovi a_1 i b_1 dati.

Ako je $a_1 > b_1 > 0$, dokazati da je

(2) $$a_n > b_n > 0,$$

(3) $$a_{n+1} < a_n, \quad b_{n+1} > b_n,$$

(4) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Dokaz. Dokazaćemo samo jednakost (4). Prema (3), niz (a_n) opada, a prema (2) je ograničen. Stoga je niz (a_n) konvergentan.

Na osnovu (3), niz (b_n) raste. Kako je, prema (2), $a_1 > a_n > b_n$, niz (b_n) je ograničen, pa je i konvergentan i važi $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n > 0$.

Ako stavimo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l_1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = l_2$, iz (1) dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n\right), \quad \text{tj.} \quad l_1 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$$

odakle je

$$l_1 = l_2 = l, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = l > 0.$$

Slično dobijamo ako ovaj postupak primenimo na jednakost kojom je definisan niz (b_n). Sada ćemo odrediti l. Iz (1) izlazi

$$a_{n+1}\, b_{n+1} = a_n\, b_n,$$

odakle je

$$a_k\, b_k = a_1\, b_1.$$

Kako je

$$\lim_{k\to+\infty} (a_k\, b_k) = \lim_{k\to+\infty} a_k \cdot \lim_{k\to+\infty} b_k = l^2 \quad \text{i} \quad \lim_{k\to+\infty} (a_k\, b_k) = a_1\, b_1,$$

dobijamo $l = \sqrt{a_1\, b_1}$.

Primedba. Nizovi formirani pomoću formula (1) nazivaju se aritmetičko-harmonijske ili harmonijsko-aritmetičke sredine. O ovome videti:

D. S. Mitrinović i P. M. Vasić: *Sredine*, Matematička biblioteka, sv. 40, Beograd 1969, str. 52–55.

2.78. Dati su nizovi $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pozitivnih brojeva, definisani sa

$$a_{n+1} = a_n + 2\, b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 2.$$

Dokazati da su članovi niza $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$, gde je $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, naizmenično veći i manji od $\sqrt{2}$, i da je

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|c_n - \sqrt{2}|.$$

Naći $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.

Rešenje. Iz datih relacija sleduje

(1) $$c_{n+1} = \frac{a_n + 2\, b_n}{a_n + b_n} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1}.$$

Kako je $a_n > 0$ i $b_n > 0$ $(n\in\mathbf{N})$, zaključujemo da je i $c_n > 0$ $(n\in\mathbf{N})$. Na osnovu (1), dobijamo

(2) $$c_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{c_n + 2}{c_n + 1} - \sqrt{2} = \frac{-(\sqrt{2} - 1)\, c_n + \sqrt{2}\,(\sqrt{2} - 1)}{c_n + 1}$$

$$= -\frac{\sqrt{2} - 1}{c_n + 1}(c_n - \sqrt{2}).$$

Kako je $c_n > 0$, iz (2) izlazi

$$c_n > \sqrt{2} \Rightarrow c_{n+1} < \sqrt{2}, \qquad c_n < \sqrt{2} \Rightarrow c_{n+1} > \sqrt{2}.$$

Kako je $c_1 = \frac{3}{2} > \sqrt{2}$, zaključujemo da je

$$c_{2n} < \sqrt{2}, \qquad c_{2n-1} > \sqrt{2} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Iz $c_n > 0 \, (n \in \mathbf{N})$ sleduje

$$0 < \frac{\sqrt{2} - 1}{c_n + 1} < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}.$$

Na osnovu ovoga, iz (2) izlazi

$$|c_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2} |c_n - \sqrt{2}|,$$

i dalje

$$|c_n - \sqrt{2}| < \frac{1}{2^{n-1}} |c_1 - \sqrt{2}| \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Odavde,

$$\lim_{n \to +\infty} |c_n - \sqrt{2}| = 0, \quad \text{tj.} \lim_{n \to +\infty} c_n = \sqrt{2}.$$

2.79. Niz nenegativnih brojeva $a_n \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$, definisan je sa

$$a_n^2 = 3 a_{n-1} - 2 \qquad (n \geq 1).$$

Ako je $1 \leq a_0 \leq 2$, ispitati da li je $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ konvergentan niz, i ako je odgovor potvrdan, odrediti njegovu graničnu vrednost.

2.80. Dat je niz

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{t + a_n} \quad (t \geq 0 \text{ fiksno}; \ n = 1, 2, \ldots),$$

tj. niz

$$0, \quad \sqrt{t}, \quad \sqrt{t + \sqrt{t}}, \quad \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t}}}, \ldots \qquad (t > 0).$$

Dokazati da je

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} a_n &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4t}) && (t > 0), \\ &= 0 && (t = 0), \end{aligned}$$

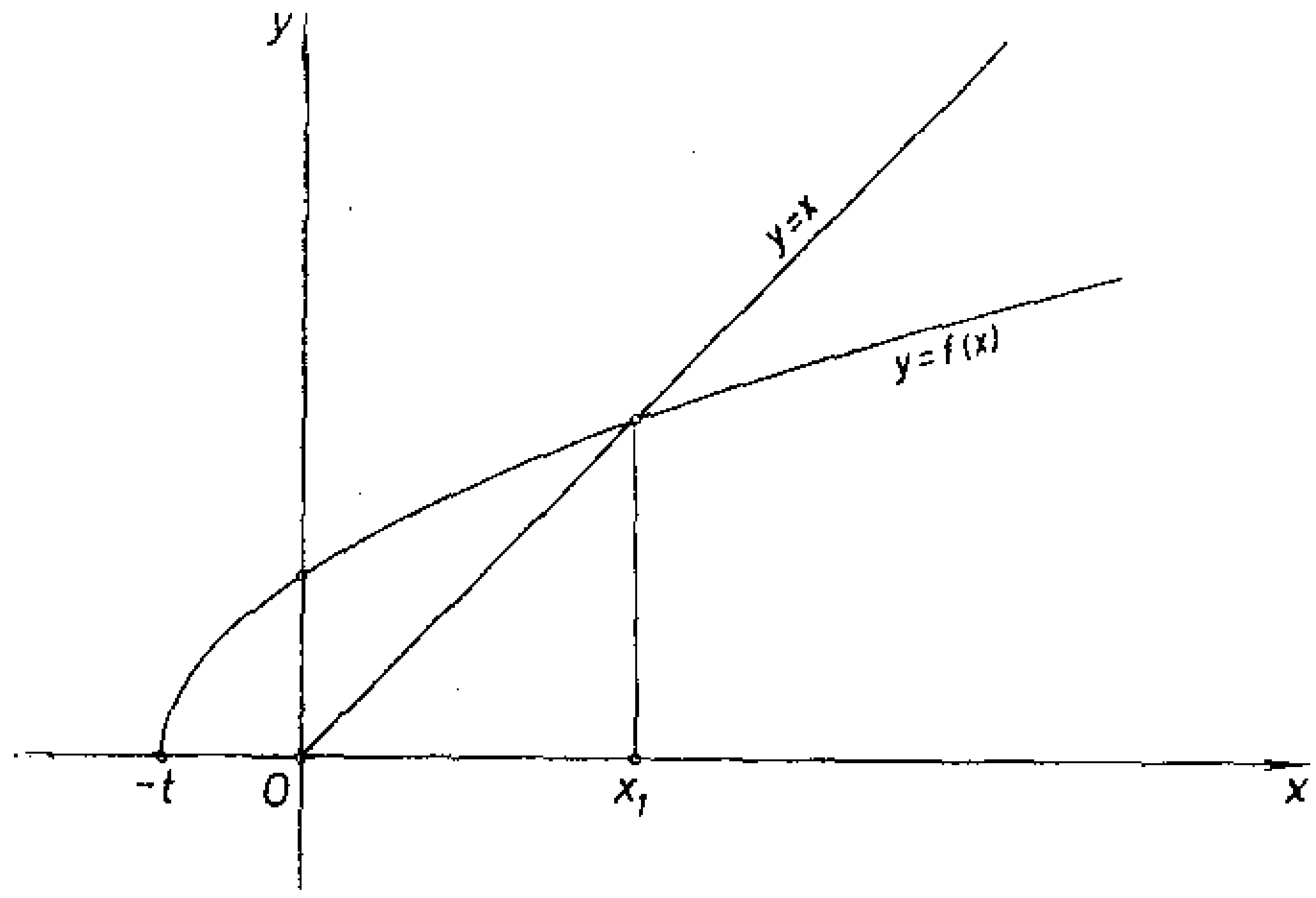
što znači da je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ prekidna funkcija od t u tački $t = 0$.

Primedba. Može se rešiti i sledeći opštiji problem: U zavisnosti od nenegativnih vrednosti za t i mogućnih realnih vrednosti za a, ispitati monotoniju, konvergenciju i graničnu vrednost niza (a_n) datog sa

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \sqrt{t + a_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. Neka je, najpre, $t > 0$. Funkcija $x \to f(x) = \sqrt{t + x}$ ima na slici prikazani grafik. Ona je definisana za $x \geq -t$, i $f(x) > x$, $f(x) = x$ ili $f(x) < x$, prema tome da li je $-t \leq x < x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4t})$, $x = x_1$ ili $x > x_1$. Za a dolaze u obzir vrednosti iz intervala $[-t, +\infty)$. Indukcijom se bez teškoća može ustanoviti da, ako je $a \in [-t, x_1)$, tada $a_n \uparrow \, (n \in \mathbf{N})$ i $a_n < x_1$

($n \in \mathbf{N}$). Odatle izlazi konvergencija niza (a_n) u tom slučaju, kao i jednakost $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_1$. Na isti način se ustanovljava da, ako je $a > x_1$, niz (a_n) strogo opadajući teži ka x_1. Najzad, u slučaju kada je $a = x_1$, niz, očigledno, ima konstantnu vrednost x_1.



Ako je $t = 0$, sličnim rasuđivanjem ustanovljava se da niz (a_n) konstantno ima vrednost 0, strogo rastući konvergira ka 1, konstantno uzima vrednost 1, ili strogo opadajući konvergira ka broju 1, prema tome da li je $a = 0$, $0 < a < 1$, $a = 1$ ili $a > 1$.

Slična kompletnija analiza ponašanja, pod opštijim pretpostavkama, može se izvršiti za još nekoliko rekuretno definisanih nizova koji se navode u problemima iz ovog odeljka.

2.81. Dat je niz

$$a_1 = 0, \qquad a_{n+1} = \frac{x}{2+a_n} \qquad (x \geq 0 \text{ fiksno}; \; n = 1, 2, \ldots),$$

tj.

$$0, \; \frac{x}{2}, \; \frac{x}{2+\dfrac{x}{2}}, \; \frac{x}{2+\dfrac{x}{2+\dfrac{x}{2}}}, \ldots$$

Dokazati da

$$a_n \to \sqrt{x+1} - 1 \qquad (n \to +\infty).$$

Primedba. Ovaj niz je koristan za približno izračunavanje $\sqrt{k}$ $(k > 1)$. Ako se gore stavi $x = k - 1$, dobija se $a_n \to \sqrt{k} - 1$.

2.82. Niz a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ispunjava uslove: $2 < a_1 < 3$, $5\,a_{n+1} = a_n^{\,2} + 6$. Dokazati da je ovaj niz konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

2.83. Niz (x_n) definisan je rekurzivno sa

$$(1) \qquad x_n = \frac{n-1}{n}\, x_{n-1} + \frac{1}{n}\, x_{n-2} \qquad (x_0, x_1 \text{ fiksni realni brojevi}).$$

Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Rešenje. Predstavimo (1) u obliku

$$(2) \qquad x_n - x_{n-1} = -\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{n}.$$

Odavde izlazi

$$x_k - x_{k-1} = (-1)^k \frac{x_0 - x_1}{k!} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Posle sumiranja nalazi se

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (x_0 - x_1)}{k!}, \quad \text{tj.} \quad x_n = x_0 + (x_0 - x_1) \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Odavde,

$$x_n \to x_0 + (x_0 - x_1) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Kako je $\frac{1}{e} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$, dolazi se do

$$x_n \to x_1 + (x_0 - x_1)\, e^{-1} \qquad (n \to +\infty).$$

2.84. Za $k > 1$ dati su nizovi (a_n) i (b_n), gde je

$$a_n = \big(k(k-1) + a_{n-1}\big)^{1/2}, \qquad a_1 = \big(k(k-1)\big)^{1/2},$$

$$b_n = (k\, b_{n-1})^{1/2}, \qquad b_1 = k^{1/2}.$$

Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = k$.

Rešenje. Kako je $a_{n+1}^2 - a_n^2 = a_n - a_{n-1}$ i $a_2 > a_1$, matematičkom indukcijom zaključujemo da je niz a_n rastući. Dokažimo da je $a_n < k$. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno, jer je $\big(k(k-1)\big)^{1/2} < k$. Neka je $a_{n-1} < k$; tada je $a_n = \big(k(k-1) + a_{n-1}\big)^{1/2} < \big(k(k-1) + k\big)^{1/2} = k$.

Prema tome, iz pretpostavke da je tvrđenje tačno za $n - 1$ sleduje da je ono tačno za n. Dakle, $a_n < k$ za svaki prirodan broj n. Kako je niz (a_n) ograničen i rastući, on je konvergentan. Stavimo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = s$. Tada, na osnovu $a_n^2 = k(k-1) + a_{n-1}$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} a_n^2 = k(k-1) + \lim_{n\to+\infty} a_{n-1} \Rightarrow s^2 = k(k-1) + s \Rightarrow s = k,$$

jer je $s > 0$, pa rešenje $s = 1 - k < 0$ ne dolazi u obzir.

Dakle, zaista je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = k$.

Za niz (b_n) može se na sličan način zaključiti da je rastući i ograničen. Ako stavimo $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = t$, iz $b_n^2 = k\, b_{n-1}$ dobijamo $t^2 = kt \Rightarrow t = k \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = k$, čime je tvrđenje dokazano.

2.85. Dokazati da niz

$$x_0, \quad x_1 = \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}, \ldots, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{ab^2 + x_n^2}{a+1}}, \ldots \quad (0 < x_0 < b; \quad a > 0)$$

strogo raste i da je ograničen. Odrediti $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Rešenje. Ispitajmo da li je

$$(1) \qquad x_0 < x_1, \quad \text{tj.} \quad x_0 < \sqrt{\frac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}.$$

Pretpostavimo da ovo nije tačno več da je $x_0 \geq \sqrt{\dfrac{ab^2 + x_0^2}{a+1}}$. Posle kvadriranja dobijamo

$$(a+1)\,x_0^2 \geq a\,b^2 + x_0^2 \Leftrightarrow a\,x_0^2 \geq a\,b^2 \Leftrightarrow x_0^2 \geq b^2 \quad (\text{jer je } a > 0).$$

Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom $x_0 < b$, pa je zaista $x_0 < x_1$.

Pretpostavimo sada da je $x_{n-1} < x_n$ za neko n. Tada je

$$\frac{a\,b^2 + x_{n-1}^2}{a+1} < \frac{a\,b^2 + x_n^2}{a+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a\,b^2 + x_{n-1}^2}{a+1}} < \sqrt{\frac{a\,b^2 + x_n^2}{a+1}} \Leftrightarrow x_n < x_{n+1}.$$

Prema tome, metodom indukcije dokazali smo da niz $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ raste.

Dokazaćemo sada nejednakost $x_n < b$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Za $n = 1$ ovo je tačno jer je

$$\frac{a\,b^2 + x_0^2}{a+1} < b^2 \Leftrightarrow x_0^2 < b^2 \qquad (\text{uslov zadatka}).$$

Ako za neko n važi $x_n < b$, tada je takođe

$$\frac{a\,b^2 + x_n^2}{a+1} < \frac{a\,b^2 + b^2}{a+1} = b^2 \Leftrightarrow x_{n+1} < b.$$

Ovim smo završili induktivni dokaz da je $x_n < b$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dati niz raste i ograničen je s gornje strane. Prema tome, niz ima graničnu vrednost.

Ako stavimo $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = t$, tada iz $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a\,b^2 + x_n^2}{a+1}}$ sleduje $t = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$.

2.86. Dokazati da je niz $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2\,a_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergentan.

2.87. Dokazati da je niz (u_n), gde je

$$u_{n+1} = \frac{6\,(1 + u_n)}{7 + u_n}, \quad u_1 = c > 0,$$

ograničen sa gornje strane. Odrediti graničnu vrednost ovog niza.

2.88. Ispitati konvergenciju niza (a_n) čiji je opšti član

$$(1) \qquad a_n = \left(1 - \frac{1^\alpha}{n^\alpha}\right)\left(1 - \frac{2^\alpha}{n^\alpha}\right)\cdots\left(1 - \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha}\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

gde je α realan broj.

Rešenje. Ako je $\alpha = 0$, tada $a_n = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$ i stoga $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ako je $\alpha > 0$, imamo

$$0 < a_n \leq 1 - \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

i odatle je ponovo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

U slučaju kad $\alpha < 0$, stavljajući $\alpha = -\beta$, dobijamo

$$(2) \qquad a_n = (-1)^{n-1}(n^\beta - 1)\left(\left(\frac{n}{2}\right)^\beta - 1\right)\cdots\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^\beta - 1\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Za $\beta = 1$, prema (2), imamo $a_n = (-1)^{n-1}$, tako da niz (1) za $\alpha = -1$ oscilira između konačnih granica.

Za $\beta > 1$ važe nejednakosti

$$\left(\left(\frac{n}{p}\right)^\beta - 1\right)\left(\left(\frac{n}{n-p}\right)^\beta - 1\right) > \left(\frac{n}{p} - 1\right)\left(\frac{n}{n-p} - 1\right) = 1 \quad (1 \le p < n),$$

$$\left(\frac{n}{n/2}\right)^\beta - 1 > 2 - 1 = 1,$$

tako da, prema (2), dobijamo

$$|a_n| \ge (n^\beta - 1)\left(\left(\frac{n}{n-1}\right)^\beta - 1\right) = (n^\beta - 1)\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\beta} - 1\right)$$

$$\sim \beta\, n^{\beta-1} \to +\infty \qquad (n \to +\infty).$$

Dakle, za $\alpha < -1$ imamo $|a_n| \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, tako da u tom slučaju niz (1) divergira.

Ako je $0 < \beta < 1$, koristeći nejednakost

$$\left(\left(\frac{n}{p}\right)^\beta - 1\right)\left(\left(\frac{n}{n-p}\right)^\beta - 1\right) < \left(\frac{n}{p} - 1\right)\left(\frac{n}{n-p} - 1\right) = 1 \quad (1 \le p < n),$$

$$\left(\frac{n}{n/2}\right)^\beta - 1 < 2 - 1 = 1$$

i jednakost (2), dolazimo do procene

$$|a_n| \le (n^\beta - 1)\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-\beta} - 1\right) \sim \beta\, n^{\beta-1} \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Prema tome, za $-1 < \alpha < 0$, imamo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Primedba. Problem se može rešiti i na sledeći način, koji dovodi do preciznijih procena ponašanja niza. Isključićemo trivijalan slučaj $\alpha = 0$.

1° Neka je $\alpha > 0$. Prema **2.49**,

$$A_n = \frac{1}{n}\log a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left[1 - \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\right] \to \int_0^{1-}\log(1 - t^\alpha)\,dt = -l(\alpha) \quad (n \to +\infty;\ l(\alpha) > 0),$$

tj.

$$A_n = -l(\alpha) + o(1) \qquad (n \to +\infty),$$

i odatle

$$0 < a_n = e^{-n[l(\alpha) + o(1)]} \qquad (n \to +\infty). \tag{3}$$

Dakle, u ovom slučaju niz uzima samo pozitivne vrednosti i konvergira ka nuli eksponencijalnom brzinom. Preciznije, važi procena (3), gde je pozitivan broj $l(\alpha)$ dat sa

$$l(\alpha) = \int_0^1 \log\frac{1}{1 - t^\alpha}\,dt.$$

2° Ako je $\alpha < 0$, dobijamo, stavljajući $\alpha = -\beta$ $(\beta > 0)$,

$$a_n = (-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\left(\frac{n}{k}\right)^\beta - 1\right) = (-1)^n |a_n|, \tag{4}$$

$$|a_n| = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\left(\frac{n}{k}\right)^\beta - 1\right),$$

i dalje, s obzirom na problem 2.49,

$$\frac{1}{n}\log|a_n| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\log\left(\left(\frac{k}{n}\right)^{-\beta} - 1\right) \to \int_{0+}^{1-}\log(t^{-\beta} - 1)\,dt = m(\beta) \qquad (n \to +\infty),$$

gde je napisani nesvojstveni integral konvergentan. Za $0 < \beta_1 < \beta_2$ i $0 < t < 1$, imamo $t^{-\beta_2} - 1 > t^{-\beta_1} - 1 > 0$ i odatle

$$m(\beta_2) - m(\beta_1) = \int_0^1 \log\frac{t^{-\beta_2} - 1}{t^{-\beta_1} - 1}\,dt > 0,$$

dakle, $m(\beta)$ strogo raste za $\beta > 0$. Stoga,

$$m(\beta) < m(1) = \int_0^1 \log(t^{-1} - 1)\,dt = \int_0^1 \log(1 - t)\,dt - \int_0^1 \log t\,dt = 0 \quad (0 < \beta < 1),$$

$$m(\beta) > m(1) = 0 \qquad (\beta > 1).$$

Na osnovu prethodnog i jednostavnog razmatranja slučaja $\alpha = -1$, za $\alpha < 0$ važi (4) i pri tome

$$(5) \qquad 0 < |a_n| = \begin{cases} e^{n\,[|m(-\alpha)| + o(1)]} & (n \to +\infty;\quad \alpha < -1) \\ 1 & (n = 2, 3, \ldots;\quad \alpha = -1) \\ e^{-n\,[|m(-\alpha)| + o(1)]} & (n \to +\infty;\quad -1 < \alpha < 0), \end{cases}$$

gde je

$$m(-\alpha) = \int_0^1 \log(t^{\alpha} - 1)\,dt \neq 0 \quad \text{za} \quad \alpha \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0).$$

Dakle, niz za $-1 < \alpha < 0$ konvergira ka nuli, a za $\alpha \leq -1$ oscilira, i to za $\alpha = -1$ konačno, a za $\alpha < -1$ beskonačno. Pri tome za $|a_n|$ važi procena (5).

2.89. Neka je k_1 nenegativan ceo broj i $k_2 > k_1$ prirodan broj. Kada $n \to +\infty$, dokazati da je

$$\sum_{k=k_1 n+1}^{k_2 n} \frac{1}{k^p} \begin{cases} \sim n^{1-p}\,\dfrac{k_2^{1-p} - k_1^{1-p}}{1-p} & (p \neq 1,\ k_1 > 0,\ \text{ili}\ p < 1,\ k_1 = 0) \\ \to \log\dfrac{k_2}{k_1} & (p = 1,\ k_1 > 0). \end{cases}$$

Rešenje. Neka je $p \neq 1$, $k_1 > 0$, ili $p < 1$, $k_1 = 0$. Imamo

$$\sum_{k=k_1 n+1}^{k_2 n} \frac{1}{k^p} = \sum_{k=1}^{(k_2-k_1)n} \frac{1}{(k_1 n + 1)^p} = n^{1-p} \sum_{k=1}^{(k_2-k_1)n} \frac{1}{\left(k_1 + \dfrac{k}{n}\right)^p} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\sim n^{1-p} \int_0^{k_2-k_1} \frac{dt}{(k_1 + t)^p} = n^{1-p}\,\frac{k_2^{1-p} - k_1^{1-p}}{1-p} \quad (n \to +\infty).$$

U slučaju kada je $0 < p < 1$ i $k_1 = 0$ iskorišćena je činjenica da se nesvojstveni integral sa konačnim granicama monotone funkcije može prikazati u obliku limesa na isti način kao običan Riemannov integral (videti 2.49).

Neka je $p = 1$, $k_1 > 0$. Prema poslednjoj primedbi je

$$\sum_{k=k_1n+1}^{k_2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{(k_2-k_1)n} \frac{1}{k_1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \to \int_0^{k_2-k_1} \frac{dt}{k_1 + t} = \log k_2 - \log k_1 = \log \frac{k_2}{k_1} \qquad (n \to +\infty).$$

U poslednjem slučaju može se postupiti i na sledeći način:

$$\sum_{k=k_1n+1}^{k_2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k_2n} \frac{1}{k} - \log(k_2 n) - \left(\sum_{k=1}^{k_1n} \frac{1}{k} - \log(k_1 n)\right)$$
$$+ \log \frac{k_2}{k_1} \to \log \frac{k_2}{k_1} \qquad (n \to +\infty).$$

U slučaju kada je $p < 1$ i $k_1 \geq 0$ do gornjeg rezultata moglo se doći i primenom Stolzove teoreme (1.1.2.22)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=k_1n+1}^{k_2n} \frac{1}{k^p}}{n^{1-p}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=k_2n+1}^{k_2n+k_2} \frac{1}{k^p} - \sum\limits_{k=k_1n+1}^{k_1n+k_1} \frac{1}{k^p}}{n^{1-p} - (n-1)^{1-p}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p\left(\sum\limits_{k=1}^{k_2} \frac{1}{(k_2 n + k)^p} - \sum\limits_{k=1}^{k_1} \frac{1}{(k_1 n + k)^p}\right)}{n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-p}\right)}$$

$$= \frac{\frac{k_2}{k_2{}^p} - \frac{k_1}{k_1{}^p}}{1-p} = \frac{k_2{}^{1-p} - k_1{}^{1-p}}{1-p}.$$

2.90. Dokazati jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} (2^k - 1) = \log 2.$$

Rešenje. S jedne strane imamo

(1) $$0 < \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx < \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

S druge strane je

(2) $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx = \int_1^2 \frac{(t-1)^n}{t}\, dt = \int_1^2 \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} t^{k-1} + \frac{(-1)^n}{t}\right) dt$$

$$= (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \binom{n}{k} (2^k - 1) + \log 2\right).$$

Poređenjem rezultata (1) i (2), dobija se data jednakost.

2.91. Dokazati da

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{a}{n} + O(n^{-2})\ (a \neq 0)$$

povlači $u_n \sim cn^a$ $(c = \text{const} \neq 0)$.

Dokaz. Iz pretpostavke tvrđenja izlazi

$$\log \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a}{n} + O(n^{-2}),$$

što povlači

$$\log \frac{u_n}{u_1} = a \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} O(k^{-2}) = a(\log n + \gamma) + A + o(1),$$

gde je γ Eulerova konstanta i $A = \sum_{k=1}^{+\infty} O(k^{-2})$. Odavde tvrđenje neposredno sleduje.

2.92. Dokazati da je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a + kb)}}{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kb)} = \frac{2}{e} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

Rešenje. Kako je

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kb) = \frac{1}{n} \left(na + \frac{n(n-1)}{2} b \right) \sim \frac{b}{2} n \qquad (n \to +\infty),$$

primenom posledice 1.1.2.22.3 Stolzove teoreme dobija se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} (a + kb)}}{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (a + kb)} = \frac{2}{b} \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{\prod_{k=0}^{n-1} (a + kb)}{n^n}}$$

$$= \frac{2}{b} \lim_{n \to +\infty} \left((a + nb) \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \right) = \frac{2}{b} \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a + nb}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \right) = \frac{2}{b} \cdot b \cdot \frac{1}{e} = \frac{2}{e}.$$

2.93. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ integrabilna u Riemannovom smislu na segmentu $[a, b]$ i neka je

$$\delta_n = \frac{b - a}{n},\ f_{k,n} = f(a + k\,\delta_n)\ (k = 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Dokazati da je

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \delta_n f_{k,n} \right) = \exp\left(\int_a^b f(x)\, dx \right).$$

Rešenje. Kako je $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$ i

(1) $\quad |\delta_n f_{k,n}| \leq \delta_n M, \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| < +\infty \ (k = 1, \ldots, n; \quad n = 1, 2, \ldots),$

za n dovoljno veliko imamo

(2) $$|\delta_n f_{k,n}| \leq \frac{1}{2} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

tako da se za dovoljno veliko n može staviti

(3) $$\prod_{k=1}^{n} (1 + \delta_n f_{k,n}) = A_n B_n,$$

gde je

$$A_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\log(1 + \delta_n f_{k,n}) - \delta_n f_{k,n}\right)\right),$$

(4) $$B_n = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \delta_n f_{k,n}\right).$$

Kako je

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t) - t}{t^2} = -\frac{1}{2},$$

postoji pozitivan konačan broj P takav da je

(5) $$\left|\frac{\log(1+t) - t}{t^2}\right| \leq P \quad \left(|t| \leq \frac{1}{2}\right).$$

Prema (1), (2) i (5), za dovoljno veliko n imamo

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\log(1 + \delta_n f_{k,n}) - \delta_n f_{k,n}\right)\right| \leq n\, P\, \delta_n^2 M^2 = \frac{PM^2 (b-a)^2}{n} \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

što znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 1$.

Odavde i prema (3) i (4), s obzirom na definiciju Riemannovog integrala, izlazi

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + \delta_n f_{k,n}) = \lim_{n\to+\infty} B_n = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta_n f_{k,n}\right) = \exp\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

2.94. Dokazati da funkcionalni niz $\dfrac{\sin nx}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ uniformno konvergira u intervalu $(0, +\infty)$, kao i da to nije slučaj sa funkcionalnim nizom $\dfrac{\sin nx}{nx}$ $(n \in \mathbf{N})$.

2.95. Dokazati da je funkcionalni niz

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

1° ograničen za svako $x \in \mathbf{R}$;
2° uniformno ograničen u svakom intervalu oblika $[a, b]$ $(0 < a \leq b < 2\pi)$;
3° nije uniformno ograničen ni u jednom intervalu oblika $[0, a]$ $(a > 0)$.

2.96. Dokazati konvergenciju i odrediti granične vrednosti sledećih nizova:

1° $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

2° $$b_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{1^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

2.97. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz realnih ili kompleksnih brojeva, i neka je

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k; \quad \sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k; \quad \tau_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k \quad (n\in\mathbf{N}).$$

Dokazati da:

1° $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = l\in\mathbf{R}$ povlači $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = l$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_n = 0$;

2° $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n = l\in\mathbf{R}$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\tau_n = \tau\in\mathbf{R}$ povlači $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = l$ i $\tau = 0$.

3° Dokazati da se u prethodnim tvrđenjima skup $\mathbf{R}$ ne može zameniti skupom $\mathbf{R}_\infty$.

2.98. Dokazati da, za $0 < a < 1$, niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^a} - \frac{n^{1-a}}{1-a} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

konvergira ka konačnoj i pozitivnoj granici.

2.99. 1° Dokazati da

$$a_n \to a\in\mathbf{R}\ (n\to+\infty) \text{ i } b_n\to b\in\mathbf{R}\ (n\to+\infty)$$

povlači

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n+1-k} \to a\, b \quad (n\to+\infty)$$

2° Dokazati da, na primer,

$$a_n\to+\infty\ (n\to+\infty) \text{ i } b_n\to+\infty\ (n\to+\infty)$$

ne povlači

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n+1-k} \to +\infty \quad (n\to+\infty).$$

2.100. Neka $f_n(x)\to f(x)$ $(n\to+\infty;\ x\in S)$, gde je S neprazan podskup skupa realnih brojeva. Neka je tada $m(\varepsilon, x)$ najmanji prirodan broj n_0 takav da, ukoliko je $\varepsilon > 0$, $x\in S$, $n_0 \le n\in\mathbf{N}$ povlači $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Dokazati da je za uniformnu konvergenciju funkcionalnog niza $x\to f_n(x)$ $(n\in\mathbf{N})$ na skupu S potrebno i dovoljno da, za svako fiksirano ε, funkcija m bude ograničena funkcija od x.

2.101. Dokazati da funkcionalni niz

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} \quad (n\in\mathbf{N})$$

uniformno konvergira na skupu $\mathbf{R}$, a funkcionalni niz

$$g_n(x) = n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right) \quad (n\in\mathbf{N})$$

ne konvergira uniformno na intervalu $(0, +\infty)$.

2.102. Dokazati sledeća tvrđenja o nizovima realnih brojeva (a_n) i (b_n) pod pretpostavkom $b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$:

1° Važe implikacije:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n = +\infty \wedge a_n \sim b_n \; (n \to +\infty) \Rightarrow \max\limits_{1\le k\le n} a_k \sim \max\limits_{1\le k\le n} b_n \, (n \to +\infty);$

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n = 0 \wedge (\forall n \in \mathbb{N})\, a_n > 0 \wedge a_n \sim b_n \; (n \to +\infty) \Rightarrow \min\limits_{1\le k\le n} a_k \sim \min\limits_{1\le k\le n} b_k$ $(n \to +\infty);$

(3) $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n < +\infty \wedge a_n \sim b_n \; (n \to +\infty) \Rightarrow \sup\limits_{k\ge n} a_k \sim \sup\limits_{k\ge n} b_k \; (n \to +\infty);$

(4) $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n > 0 \wedge a_n \sim b_n \; (n \to +\infty) \Rightarrow \inf\limits_{k\ge n} a_k \sim \inf\limits_{k\ge n} b_k \; (n \to +\infty).$

2° Iz implikacije (1) ne može se izostaviti uslov $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n = +\infty$, a iz implikacije (2) nije mogućno ukloniti uslov $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n = 0$. Takođe, u implikaciji (1) simbol max ne može se zameniti simbolom min, a u (2) min se ne može zameniti sa max.

3° Ukoliko se u asimptotskoj jednakosti nizova (a_n) i (b_n) da od uobičajenog širi smisao — postojanja konačnih i pozitivnih konstanti m i M takvih da je

$$m \le \frac{a_n}{b_n} \le M \text{ za dovoljno veliko } n,$$

tada takođe važe implikacije (1) — (4), pri čemu se iz (1) može izostaviti uslov $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n = +\infty$, a iz (2) uslov $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, b_n = 0$.

2.103. 1° Neka je preslikavanje $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidno i neka postoji $x \in \mathbf{R}$ takvo da je niz

$$\frac{x + F(x) + \cdots + F^{n-1}(x)}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

gde je $F^n = F \circ F^{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ i $F^1 = F$, ograničen. Dokazati da preslikavanje F tada ima bar jednu fiksnu tačku, tj. da postoji bar jedno rešenje jednačine $F(t) = t$.

2° Dokazati da se u prethodnom tvrđenju skup $\mathbf{R}$ ne može zameniti skupom $\mathbf{C}$.

Dokaz. 1° Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi problema. Ako postoje realni brojevi y i z takvi da je $F(y) < y$ i $F(z) > z$, tj. $F(y) - y < 0$ i $F(z) - z > 0$, tada neprekidna funkcija g definisana na $\mathbf{R}$ sa $g(t) = F(t) - t \; (t \in \mathbf{R})$ u tački y uzima negativnu a u tački z pozitivnu vrednost, pa postoji tačka u, između y i z, u kojoj se ona anulira, tj. sa osobinom $F(u) = u$.

U suprotnom slučaju imamo

$$\text{(A)} \quad F(t) \ge t \quad (t \in \mathbf{R}), \quad \text{ili} \quad \text{(B)} \quad F(t) \le t \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Ako je ispunjen uslov (A), niz

$$F^n(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \text{sa} \quad F^{\circ}(t) \equiv t,$$

zbog $F^{n+1}(x) = F(F^n(x)) \ge F^n(x)$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, monotono raste, pa postoji $\lim\limits_{n\to+\infty} F^n(x)$. Jednakost $\lim_{n \to +\infty} F^n(x) = +\infty$ imala bi za posledicu, prema Stolzovoj teoremi (1.1.2.22), jednakost

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x + F(x) + \cdots + F^{n-1}(x)}{n} = +\infty,$$

suprotno drugom od pretpostavljenih uslova. Stoga je

$$u = \lim_{n \to +\infty} F^n(x) \in \mathbf{R},$$

i odatle

$$u = \lim_{n \to +\infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \to +\infty} F(F^n(x)) = F(\lim_{n \to +\infty} F^n(x)) = F(u).$$

Do istog zaključka dolazi se, na sličan način, pod pretpostavkom (B).

2° Preslikavanje $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ definisano sa

$$F(z) = 2ie^{\frac{\pi i z}{2}} + z \quad (z \in \mathbf{C})$$

neprekidno je na $\mathbf{C}$. Kako je $F(1) = -1$ i $F(-1) = 1$, imamo

$$\left| \frac{1 + F(1) + \cdots + F^{n-1}(1)}{n} \right| \le \frac{1}{n} \le 1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Ovo preslikavanje, međutim, nema fiksnu tačku.

2.104. Neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana na konačnom intervalu $[a, b]$ i neka je $f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n}$ $(a \le x \le b;\ n \in \mathbf{N})$. Dokazati da tada funkcionalni niz $f_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ na intervalu $[a, b]$ uniformno konvergira ka $f(x)$.

2.105. Dokazati da:

1° neprekidnost funkcije f u intervalu (a, b) povlači uniformnu konvergenciju na svakom konačnom intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ funkcionalnog niza

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \quad (a < x < b; \quad n \in \mathbf{N});$$

2° neprekidnost izvoda funkcije f u (a, b) povlači uniformnu konvergenciju na svakom konačnom intervalu $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ funkcionalnog niza

$$x \to g_n(x) = \frac{1}{n}\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \quad (a < x < b;\ n \in \mathbf{N}).$$

2.106. Neka funkcija $x \mapsto f(x)$ ima za svako $x \in \mathbf{R}$ sve izvode i neka funkcionalni niz $f^{(n)}(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ uniformno konvergira ka $g(x)$ na svakom konačnom intervalu. Dokazati da je tada $g(x) = Ce^x$ $(x \in \mathbf{R})$, gde je C konstanta.

3. ZADACI I PROBLEMI IZ TEORIJE REDOVA

3.1. KONVERGENCIJA REDOVA I OPERACIJE SA NJIMA

3.1.1. Izračunati sumu reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. Kako je

$$\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}\right),$$

imamo

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdots m} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\cdots(k+m)}\right),$$

odakle sleduje

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m!\,m} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

3.1.2. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}; \qquad 2^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}; \qquad 3^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2};$$

$$4^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}; \qquad 5^\circ \ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}; \qquad 6^\circ \ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\log n} \ (a \text{ realno}).$$

Rešenje. 1° Ovo je red sa pozitivnim članovima: $a_n = \dfrac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to +\infty \qquad (n \to +\infty),$$

na osnovu D' Alembertovog kriterijuma zaključujemo da je dati red divergentan.

2° Red ima pozitivne članove $a_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. Kako je

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{2} > 1 \qquad (n \to +\infty),$$

na osnovu Cauchyevog kriterijuma zaključujemo da red divergira.

3° Članovi reda $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$ su pozitivni. Kako je

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n = \left(1-\frac{n}{n^2+n+1}\right)^n \to e^{\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\frac{n}{n^2+n+1}\right)} = e^{-1} < 1 \qquad (n \to +\infty),$$

red, prema Cauchyevom kriterijumu, konvergira.

4° Pod pretpostavkom $a \neq 0$, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{|a|^n} = \begin{cases} 0 & (|a| > 1) \\ +\infty & (|a| \leq 1), \end{cases}$$

pa prema Cauchyevom kriterijumu, red konvergira ili divergira prema tome da li je $|a| > 1$ ili $0 < |a| \leq 1$. Za $a = 0$ članovi reda nisu definisani.

5° Indukcijom može se dokazati nejednakost

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} > \frac{1}{2n-1}. \tag{1}$$

Budući da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ divergentan, na osnovu (1) zaključujemo da je i dati red divergentan.

Do istog zaključka dolazi se primenom Raabeovog ili Gaussovog kriterijuma.

6° Neka je $|a| < 1$ i posmatrajmo izraze

$$u_n = \frac{a^{n-1}}{n\,a^{n-1} + \log n}, \qquad v_n = \frac{|a|^{n-1}}{\log n}, \qquad \frac{v_n}{|u_n|} = \left|1 + \frac{n\,a^{n-1}}{\log n}\right|.$$

Kako $n\,a^{n-1} \to 0\,(n \to +\infty)$ jer je $|a| < 1$, zaključujemo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{|u_n|} = 1. \tag{2}$$

Red $\Sigma\, v_n$ je konvergentan jer je $v_n < |a|^{n-1}$ za $n \geq 3$. Na osnovu toga i (2) zaključujemo da je red $\Sigma\, u_n$ za $|a| < 1$ apsolutno konvergentan.

Ako je $|a| \geq 1$, imamo

$$u_n = \frac{a^{n-1}}{n\,a^{n-1} + \log n} = \frac{1}{n\left(1 + \frac{\log n}{n\,a^{n-1}}\right)} \sim \frac{1}{n} \qquad (n \to +\infty),$$

što znači da je red $\Sigma\, u_n$ divergentan.

Dakle, dati red konvergira za $|a| < 1$, i divergira za $|a| \geq 1$. Primetimo da a mora biti takvo da je

$$n\,a^{n-1} + \log n \neq 0 \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

jer u suprotnom neki član datog reda nema smisla.

3.1.3. Dokazati da su redovi

$$1^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}; \qquad 2^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}; \qquad 3^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\,n!}{(2n)!}$$

konvergentni.

Rešenje. 1° Članovi ovog reda su pozitivni brojevi $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} \qquad (n \to +\infty),$$

kako je $\frac{1}{e} < 1$, prema D'Alembertovom kriterijumu dati red je konvergentan.

2° Članovi ovog reda su pozitivni brojevi $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

prema D'Alembertovom kriterijumu zaključujemo da je ovaj red konvergentan.

3° Ovo je red sa pozitivnim članovima $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Kako je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4} \qquad (n \to +\infty),$$

na osnovu D'Alembertovog kriterijuma zaključujemo da je red konvergentan.

3.1.4. Ispitati da li je red, čiji je opšti član $u_n = \sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt{n^2+1}$, konvergentan ili divergentan.

3.1.5. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n, \quad \text{sa} \quad u_n = \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \quad (a \text{ realan broj}). \tag{1}$$

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|\, n}{n+1} = |a|,$$

red (1) konvergira za $|a| < 1$ i divergira za $|a| > 1$.

Ako je $|a| = 1$, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Kako opšti član ne teži nuli kad $n \to +\infty$, red (1) divergira za $|a| = 1$.

3.1.6. Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira i pri tome $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, da li red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right) \text{ konvergira?}$$

Posebno proučiti slučaj kad je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

3.1.7. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \frac{n!}{n^n}$ konvergira za $|a| < e$, divergira za $|a| \geq e$.

Uputstvo. Ako je $|a| \neq e$, konvergencija, odnosno divergencija, može se dokazati primenom D'Alembertovog kriterijuma. Ako je $|a| = e$, ovaj red divergira jer je

$$|u_{n+1}| > |u_n| > 0 \left(|u_n| = e^n \frac{n!}{n^n} \right).$$

3.1.8. Primenom Cauchyevog integralnog kriterijuma ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \frac{n+1}{n-1}.$$

Rešenje. Uočimo funkciju f definisanu sa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{x+1}{x-1} \qquad (x \geq 2).$$

Kako je $f(x) > 0$ i $f'(x) = -\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}\,(x^2-1)} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} \log \dfrac{x+1}{x-1} \right) < 0$, zaključujemo da je f pozitivna opadajuća funkcija.

Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$\int_2^t \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{x+1}{x-1}\, dx = 2\sqrt{x} \log \frac{x+1}{x-1} \bigg|_2^t + \int_2^t \frac{4\sqrt{x}}{x^2-1}\, dx.$$

Smena $\sqrt{x} = z$ daje

$$\int_2^t \frac{4\sqrt{x}}{x^2-1}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{t}} \frac{8z^2}{z^4-1}\, dz = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{t}} \left(\frac{2}{z-1} - \frac{2}{z+1} + \frac{4}{z^2+1} \right) dz$$

$$= 2\left(\log \frac{z-1}{z+1} + 4 \operatorname{arctg} z \right) \bigg|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{t}}.$$

Prema tome je

$$\int_2^t \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{x+1}{x-1}\, dx = 2\sqrt{t} \log \frac{t+1}{t-1} + 2 \log \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}+1} + 4 \operatorname{arctg} \sqrt{t}$$

$$- 2 \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - 4 \operatorname{arctg} \sqrt{2} - 2\sqrt{2} \log 3,$$

odakle je

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{\sqrt{x}} \log \frac{x+1}{x-1}\, dx = 2\left(\pi - \log(3 - 2\sqrt{2}) - \sqrt{2} \log 3 - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}\right).$$

Dakle, dati red je konvergentan.

3.1.9. Ispitati konvergenciju redova čiji su opšti članovi:

$$1^\circ \quad \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx; \qquad 2^\circ \quad \int_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. 1° Stavimo $u_n = \int\limits_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx$. Parcijalna suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ jednaka je

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} e^{-\sqrt{x}}\, dx = \int\limits_1^n e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

Smenom $x = t^2$ i parcijalnom integracijom dobijamo

$$S_{n-1} = 2\int\limits_1^{\sqrt{n}} e^{-t}\, t\, dt = -2(t+1)e^{-t}\Big|_1^{\sqrt{n}} = -2(\sqrt{n}+1)\, e^{-\sqrt{n}} + \frac{4}{e}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = \dfrac{4}{e}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ je konvergentan i njegova suma je $\dfrac{4}{e}$.

2° Neka je $u_n = \int\limits_0^{\pi/n} \dfrac{\sin^3 x}{1+x}\, dx$. Kako je, u intervalu integracije,

$$0 < \frac{\sin^3 x}{1+x} < \sin^3 x < x^3 \qquad (x \neq 0 \text{ i } x \neq \pi)$$

dobijamo

$$0 < u_n = \int\limits_0^{\pi/n} \frac{\sin^3 x}{1+x}\, dx < \int\limits_0^{\pi/n} \sin^3 x\, dx < \int\limits_0^{\pi/n} x^3\, dx = \frac{\pi^4}{4n^4} = v_n.$$

Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ konvergentan, zaključujemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ takođe konvergentan.

3.1.10. Ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx; \quad 2^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_n^{n+1} e^{-x}\, dx.$$

Rešenje. 1° Iz jednakosti

$$\sum_{n=1}^{k} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \int\limits_{\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

i iz činjenice da integral $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \dfrac{\sin^2 x}{x}\, dx$ divergira, uzimajući u obzir nenegativnost funkcije

$x \mapsto \dfrac{\sin^2 x}{x}$ za $x \geqslant \pi$, zaključujemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{\sin^2 x}{x}\, dx$ takođe divergentan.

2° Iz činjenice da je integral $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x}\, dx$ konvergentan i iz jednakosti

$$\sum_{n=1}^{k} \int\limits_n^{n+1} e^{-x}\, dx = \int\limits_1^{k+1} e^{-x}\, dx$$

sleduje da posmatrani red konvergira.

3.1.11. Dokazati da ako je $u_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tada $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n < +\infty$ povlači

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{u_n} - 1) < +\infty \qquad (a > 0).$$

Uputstvo. $a^{u_n} - 1 \sim u_n \log a \; (n \to +\infty)$.

3.1.12. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \log \left|\cos \frac{x}{n}\right|$, gde je $x \neq m\frac{\pi}{2}$ (m ceo broj različit od nule).

Rešenje. Kako je

$$\log \left|\cos \frac{x}{n}\right| = \frac{1}{2} \log \left(1 - \sin^2 \frac{x}{n}\right) \sim -\frac{x^2}{2n^2} \quad (n \to +\infty),$$

zaključujemo da je dati red konvergentan za svako $x \neq m\frac{\pi}{2}$ (m ceo broj različit od nule).

3.1.13. Ispitati konvergenciju redova čiji su opšti članovi:

$$1^\circ \;\; \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}; \quad 2^\circ \;\; n^2 e^{-n}; \quad 3^\circ \;\; \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}; \quad 4^\circ \;\; (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n\right).$$

3.1.14. Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, dokazati da konvergira i red $\sum_{n=1}^{+\infty} (A\, a_n + B\, a_{n+1})$ sa proizvoljnim realnim konstantama A i B.

3.1.15. Ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan red sa pozitivnim članovima, ispitati u pogledu konvergencije redove

$$1^\circ \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + n a_n}; \qquad 2^\circ \;\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}.$$

Rešenje. 1° Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + n\, a_n}$ može konvergirati ili divergirati. Prvo nastupa, na primer, kad je

$$a_n = \begin{cases} 1, \text{ za } n = m^2 & (m = 1, 2, \ldots), \\ b_n, \text{ za ostale vrednosti } n, & \end{cases}$$

gde je $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima. Naime, tada je

$$\sum_{k=1}^{n} a_n < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{1 + k\, b_k}$$

$$< \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Drugo nastupa u slučaju kada je niz $n\, a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ograničen, a takođe kada poslednji niz teži beskonačnosti. Zaista, u ovim slučajevima imamo

$$\frac{a_n}{1 + n\, a_n} \geq \frac{a_n}{1 + M} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

za neko $M \in (0, +\infty)$, odnosno

$$\frac{a_n}{1 + n\, a_n} \sim \frac{a_n}{n\, a_n} = \frac{1}{n} \qquad (n \to +\infty).$$

2° Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$ konvergira kad god je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, bez obzira na to da li je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan ili divergentan, jer je tada

$$\frac{a_n}{1 + n^2 a_n} < \frac{a_n}{n^2\, a_n} = \frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

3.1.16. Neka je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokazati da konvergencija reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1}$$

povlači konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n\, a_{n+1}}. \tag{2}$$

Dokazati da važi i obrnuto, tj. da konvergencija reda (2) povlači konvergenciju reda (1), ukoliko je niz a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ monoton, ali ne i u opštem slučaju.

Rešenje. Prvo tvrđenje izlazi iz nejednakosti

$$\sqrt{a_n\, a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}\, (a_n + a_{n+1}).$$

Neka je niz

$$a_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

monoton. Ako red (2) konvergira, niz (3) je opadajući i stoga

$$a_{n+1} \leq \sqrt{a_n\, a_{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tj. i red (1) konvergira. Poslednje tvrđenje dokazuje slučaj kada je

$$a_{2k-1} = 1, \quad a_{2k} = b_k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

gde je $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k\, a_{k+1}} < \sum_{k=1}^{2n} \sqrt{a_k\, a_{k+1}} = 2 \sum_{k=1}^{n} b_k < 2 \sum_{k=1}^{+\infty} b_k < +\infty \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

tj. red (2) konvergira. Red (1), međutim, divergira jer mu opšti član ne teži nuli.

3.1.17. Ako su redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$ konvergentni, dokazati da su redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\, v_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)^2$ apsolutno konvergentni.

Rešenje. Kako je $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$, zaključujemo da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n v_n|$ konvergentan, tj. red $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n$ je apsolutno konvergentan.

Iz jednakosti $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2 u_n v_n$ i prethodno dokazanog sleduje da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n)^2$ konvergentan i to apsolutno jer su njegovi članovi nenegativni.

3.1.18. Ako $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ konvergira, dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} a_n$ apsolutno konvergira.

Uputstvo. Primeniti rezultat iz 3.1.17.

3.1.19. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

3.1.20. Za koje realne brojeve x konvergira red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 + 6x - 16}\right)^n ?$$

Rešenje. Dati red konvergira za one i samo za one brojeve x koji zadovoljavaju dvostruku nejednakost

$$-1 \leq \frac{x^2 - 4x - 8}{x^2 + 6x - 16} < 1,$$

tj. za $x \in [-4, 4/5) \cup [3, +\infty)$.

3.1.21. 1° Neka je a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ opadajući niz pozitivnih brojeva. Dokazati da je jedan potreban uslov za konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ da bude

$$\lim_{n \to +\infty} n a_n = 0. \tag{1}$$

Dokazati da, u posmatranom slučaju, uslov (1) nije dovoljan za konvergenciju ovog reda.

2° Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sa pozitivnim članovima može konvergirati kad uslov (1) nije ispunjen.

Rešenje. 1° Konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ povlači

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k = 0. \tag{2}$$

S druge strane, s obzirom na pretpostavljenu osobinu niza a_n $(n = 1, 2, \ldots)$, imamo

(3)
$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n} = n\, a_{2n} = \frac{1}{2}(2n\, a_{2n}) > 0,$$

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} a_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} a_{2n+1} = (n+1)\, a_{2n+1} = \frac{n+1}{2\,n+1}(2\,n+1)\, a_{2n+1} > 0.$$

Iz (2) i (3) izlazi (1).

Niz pozitivnih brojeva

$$a_n = \frac{1}{n \log (n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

opada i ispunjava uslov (1), a odgovarajući red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

2° Neka je

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ za } n = k^2 \ (k = 1, 2, \ldots) \\ \dfrac{1}{n^2}, \text{ za sve ostale prirodne brojeve } n. \end{cases}$$

Tada je, za $n = 1, 2, \ldots,$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

tako da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. U ovom slučaju, međutim,

$$k^2 a_{k^2} = 1 \ (k = 1, 2, \ldots),$$

što znači da na_n ne teži nuli.

3.1.22. Za koje realne brojeve a red

(1)
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^a}{n}$$

konvergira, a za koje a ovaj red apsolutno konvergira?

Rešenje. Red (1) konvergira za svako realno a. Zaista, kako je

$$\left(\frac{(\log t)^a}{t}\right)' = \frac{a(\log t)^{a-1} - (\log t)^a}{t^2} = \frac{(\log t)^{a-1}(a - \log t)}{t^2} < 0$$

za $t > e^a$, niz $\dfrac{1}{n}(\log n)^a$ za svako realno a opada ukoliko je $n > e^a$.

Za $a \geq 0$ red (1) ne konvergira apsolutno, jer red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira. Za $a < 0$ red čiji su članovi apsolutne vrednosti članova reda (1) ekvikonvergentan je sa integralom

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{(\log x)^a}{x} \, dx = \int_{\log 2}^{+\infty} t^a \, dt,$$

pa konvergira za $a < -1$, a divergira za $a \geq -1$.

Dakle, red (1) apsolutno konvergira ako i samo ako je $a < -1$.

3.1.23. Ispitati da li je proizvod zbirova redova

$$1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$\frac{1}{b} - \frac{a\,x}{b\,(b+a)} + \frac{a^2\,x^2}{b\,(b+a)\,(b+2\,a)} - \cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{a^n\,x^n}{b\,(b+a)\,(b+2\,a)\cdots(b+na)} + \cdots$$

jednak zbiru reda

$$\frac{1}{b} + \frac{x}{a+b} + \frac{1}{2!}\frac{x^2}{2\,a+b} + \frac{1}{3!}\frac{x^3}{3\,a+b} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{x^n}{na+b} + \cdots.$$

Za koje x ovo važi?

3.1.24. Za koje realne brojeve x konvergiraju redovi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^k}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}?$$

3.1.25. Neka je $x > 0$ i $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i neka red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ divergira. Dokazati konvergenciju reda

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \cdots$$

i naći njegov zbir.

Rešenje. Stavimo li

$$A_n = \frac{a_1}{a_2 + x} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1} + x}, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k,$$

dobijamo

$$\frac{A_k}{A_{k-1}} = \frac{a_k}{a_{k+1} + x}, \text{ tj. } A_k\,a_{k+1} + A_k\,x = A_{k-1}\,a_k \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Sabiranje ovih jednakosti od indeksa 2 do indeksa n daje

(1) $$A_n a_{n+1} + S_n x - A_1 x = A_1 a_2 \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Kako je

(2) $$0 < A_n\, a_{n+1} = a_1 \frac{a_2}{a_2 + x} \cdots \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + x}$$

$$= a_1 \frac{1}{\left(1 + \dfrac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{x}{a_{n+1}}\right)} < \frac{a_1}{x \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{a_k}} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

s obzirom na pretpostavljenu divergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$, dobija se, puštajući da u (1) $n \to +\infty$,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{A_1 (x + a_2)}{x} = \frac{a_1}{x}.$$

Dakle, posmatrani red konvergira i zbir mu je jednak $\dfrac{a_1}{x}$.

Primedba. Prema (1) i (2), posmatrani red konvergira i bez pretpostavke o divergenciji reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$. To se može ustanoviti i primenom Kummerovog kriterijuma:

$$a_{n+1} \frac{A_n}{A_{n+1}} - a_{n+2} = x > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

3.1.26. Neka je $b_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$:

1° konvergira ako je

$$\varliminf_{n \to +\infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) > 0;$$

2° divergira ako je za dovoljno veliko n

$$n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) \leq 0,$$

i specijalno, ako je

$$\varlimsup_{n \to +\infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) < 0.$$

3.1.27. Ako je $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i

(1) $$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}$$

gde je $\varepsilon > 0$ i β_n ograničen niz, tada:

1° postoji pozitivna konstanta K tako da

(2) $$a_n \sim K \frac{1}{n^\alpha} \qquad (n \to +\infty);$$

2° red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira za $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$;

3° red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergira za $\alpha > 0$, a divergira za $\alpha \leq 0$.

Dokaz. 1° Neka je k prirodan broj takav da je za $n > k$

$$\left| \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}} \right| < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Koristeći se jednakostima

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_k} \prod_{\nu=k+1}^{n} \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}; \qquad \prod_{\nu=k+1}^{n} \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} = \exp\left(\sum_{\nu=k+1}^{n} \log \frac{a_{\nu-1}}{a_\nu} \right);$$

$$\log(1+x) = x + O(x^2) \quad (x \to 0),$$

neposredno dobijamo

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_k} \exp\left(\sum_{\nu=k}^{n-1} \log\left(1 + \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{a_k} \exp\left(\sum_{\nu=k}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} + O\left(\left(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} \right)^2 \right) \right) \right).$$

Kako je dalje

$$\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} + O\left(\left(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\beta_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} \right)^2 \right) = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\gamma_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} \qquad (\nu \geq k),$$

gde je γ_ν izvestan ograničen niz, imamo

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_k} \exp\left(\sum_{\nu=k}^{n-1} \left(\frac{\alpha}{\nu} + \frac{\gamma_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} \right) \right). \tag{4}$$

Na osnovu jednakosti

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu} = \log n + \gamma + \varepsilon_n \qquad (\gamma \text{ Eulerova konstanta; } \varepsilon_n \to 0 \text{ kada } n \to +\infty)$$

jednakost (4) postaje

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_k} \exp(\alpha \log n + \delta_n),$$

gde je δ_n konvergentan niz $\left(\text{jer je red sa opštim članom } \frac{\gamma_\nu}{\nu^{1+\varepsilon}} \text{ konvergentan}\right)$.

Iz poslednje jednakosti izlazi

$$a_n \sim K \cdot \frac{1}{n^\alpha} \quad (n \to +\infty), \quad \text{gde je } K = a_k \lim_{n \to +\infty} e^{-\delta_n} > 0. \tag{5}$$

2° Na osnovu (5) imamo da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira za $\alpha > 1$ a divergira za $\alpha \leq 1$.

3° Ako je $\alpha > 0$, onda je, prema (1), počevši od nekog ranga $a_{n-1} > a_n$, pa je niz a_n opadajući. Na osnovu (5) dobijamo $a_n \to 0$. Dakle, prema Leibnizovom kriterijumu, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$

konvergira. Ako je $a \leq 0$ onda, prema (5), dobijamo da a_n ne teži nuli kada $n \to +\infty$, pa red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ divergira.

Primedba 1. Bez teškoća uviđa se, na osnovu izloženog dokaza, da sva gornja tvrđenja, osim dela tvrđenja pod 3° koji se odnosi na konvergenciju, važe i kad se $\beta_n/n^{1+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$) u (1) zameni n-tim članom α_n bilo kod apsolutno konvergentnog reda, kao i da će pomenuto tvrđenje pod 3° o konvergenciji važiti ukoliko je još $\alpha_n = o(n^{-1})$ $(n \to +\infty)$.

Primedba 2. Rezultati 2° i 3° podudaraju se u suštini redom sa Gaussovim kriterijumom **1.2.1.16.1.** i sa stavom na 28. strani pod **1.2.1.18.2.** Umesto da se, kao gore, u dokazu tvrđenja 2° i dela tvrđenja 3° primenjuje rezultat 1°, tvrđenje 2° za $\alpha \neq 1$ može se neposredno izvesti iz Raabeovog kriterijuma, a za $\alpha = 1$ dobiti na osnovu Bertrandovog kriterijuma, dok se tvrđenje 3° za $\alpha < 0$ može dokazati uočavanjem činjenice da u tom slučaju $a_n \uparrow$ za n dovoljno veliko, za $\alpha = 0$ jednostavnim rasuđivanjem koje pokazuje da tada a_n ne teži nuli, i na sličan način za $0<\alpha<1$.

3.1.28. Ispitati konvergenciju redova:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(4^n (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)\, n!} \quad (p, a, \beta, \gamma \text{ realni brojevi}).$$

Uputstvo. Primeniti kriterijume iz prethodnog zadatka.

3.1.29. Ispitati konvergenciju redova:

1° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$;

2° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n!\, n^q}$,

gde su p i q realni brojevi.

3.1.30. Data je racionalna funkcija

$$x \mapsto R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q} \quad (a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0),$$

pri čemu je $|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \cdots + b_q| > 0$ za $x \geq n_0$ (n_0 prirodan broj). Ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju reda $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n R(n)$.

3.1.31. Za koje vrednosti brojeva a (> 0) i b (> 0) red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1+a)\cdots(1+na)}{(1+b)\cdots(1+nb)}$$

konvergira?

3.1.32. Ispitati koji je od sledećih redova konvergentan i u slučaju konvergencije utvrditi da li je to apsolutna ili uslovna konvergencija:

$$1^\circ \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}; \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, n!\, \sin a \sin \frac{a}{2} \cdots \sin \frac{a}{n};$$

$$3^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad 4^\circ \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n}}.$$

3.1.33. Dokazati da red

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

konvergira, a da red

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots,$$

sastavljen od istih članova kao i red (1), divergira.

Primedba. Videti 3.1.44.

3.1.34. Neka je

$$f(n) = a_n > 0, \quad 0 < A \le \frac{a_{n+1}}{a_n} \le B < +\infty \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

i neka je funkcija $x \mapsto f(x)$ monotona u svakom intervalu $[n, n+1]$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dokazati da su $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ ekvikonvergentni.

Rešenje. Pod navedenim pretpostavkama je

$$\min(a_k, a_{k+1}) \le \int_k^{k+1} f(x)\, dx \le \max(a_k, a_{k+1}) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

i dalje

$$C a_k \le \int_k^{k+1} f(x)\, dx \le D a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

gde je

$$C = \min(A, 1)\ (> 0), \quad D = \max(B, 1).$$

Stoga je

$$C \sum_{k=1}^{n-1} a_k \le \int_1^n f(x)\, dx \le D \sum_{k=1}^{n-1} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odavde izlazi ekvikonvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i integrala $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$, jer je

$$f(x) \ge \min(a_n, a_{n+1}) > 0 \qquad (x \in [n, n+1];\ n = 1, 2, \ldots).$$

3.1.35. Dokazati sledeću teoremu:

Neka je $a_n > 0$ za dovoljno veliko n, i neka je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan. Pretpostavimo još da je funkcija $x \mapsto f(x)$ za x dovoljno veliko monotono opadajuća i pozitivna. Tada konvergencija integrala

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\, dx \qquad (x_0 \text{ dovoljno veliko})$$

povlači konvergenciju reda

$$(2) \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n f(S_n) \qquad \left(S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\,; \quad n_0 \text{ dovoljno veliki prirodan broj}\right).$$

Pod dopunskom pretpostavkom

$$(3) \qquad a_n = O(a_{n-1}) \qquad (n \to +\infty),$$

divergencija integrala (1) povlači divergenciju reda (2).

Dokazati da se uslov (3) ne može izostaviti iz drugog tvrđenja navedene teoreme.

Rešenje. Prvo tvrđenje teoreme izlazi iz nejednakosti

$$a_n f(S_n) \le \int_{S_{n-1}}^{S_n} f(x)\, dx \qquad (n \text{ dovoljno veliko}),$$

a drugo iz nejednakosti

$$\int_{S_{n-1}}^{S_n} f(x)\, dx \le a_n f(S_{n-1}) \le M a_{n-1} f(S_{n-1}) \qquad (n \text{ dovoljno veliko}; \ M < +\infty),$$

pri čemu je važenje druge od njih obezbeđeno uslovom (3).

Nemogućnost da se iz drugog tvrđenja izostavi uslov (3) može se dokazati slučajem kada

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \to +\infty \qquad (n \to +\infty)$$

i kada su ispunjeni ostali uslovi. Tada je, prema Stolzovoj teoremi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{S_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = 1,$$

i odatle $\qquad \log S_n \sim \log a_n \qquad (n \to +\infty).$

Odavde izlazi da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n f(S_n)$ konvergira ako se uzme da je $f(x) = \dfrac{1}{x \log x}$ i a_n takvo da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\log a_n}$ konvergira (stavljajući, na primer, $a_n = 2^{n^2}$). Integral (1) u ovom slučaju, međutim, divergira.

Primedba. 1° U formulaciji teoreme integral se može zameniti ekvikonvergentnim redom $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$.

2° Uslov (3) može se zameniti uslovom $a_n = O(1)$ $(n = +\infty)$.

3.1.36. Dokazati sledeći kriterijum Jermakova:

Neka je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda,$$

gde je funkcija $x \mapsto f(x)$ za $x > 0$ pozitivna i opadajuća. Tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konvergira kad je $\lambda < 1$, a divergira kad je $\lambda > 1$.

Rešenje. S obzirom na pretpostavku o f, red $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ i niz $\int_1^n f(t)\,dt$ su ekvikonvergentni.

Neka je $\lambda < 1$. Tada postoje $\mu \in (0, 1)$ i $m \in \mathbf{N}$ tako da je

$$e^x f(e^x) \leq \mu f(x) \qquad (x \geq m).$$

Odatle je, za $n > k \geq m$,

$$\int_{e^k}^{e^n} f(x)\,dx = \int_k^n e^x f(e^x)\,dx \leq \mu \int_k^n f(x)\,dx.$$

Stoga, ako stavimo

$$e_1 = e^m, \qquad e_n = e^{e_{n-1}} \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

dobijamo

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x)\,dx = \int_{e^m}^{e^{e_1}} f(x)\,dx \leq \mu \int_m^{e_1} f(x)\,dx,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x)\,dx \leq \mu \int_{e_1}^{e_2} f(x)\,dx \leq \mu^2 \int_m^{e_1} f(x)\,dx,$$

$$\vdots$$

$$\int_{e_{n-1}}^{e_n} f(x)\,dx \leq \mu^{n-1} \int_m^{e_1} f(x)\,dx,$$

ili, posle sabiranja,

$$\int_{e_1}^{e_n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \int_m^{e^m} f(x)\,dx < \frac{\mu}{1-\mu} \int_m^{e^m} f(x)\,dx \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

što znači da niz $\int_1^n f(x)\,dx$ konvergira.

Drugi deo kriterijuma može se dokazati na sličan način.

Primedba. U kriterijumu Jermakova broj e može se zameniti bilo kojim brojem koji je veći od 1.

3.1.37. Ispitati konvergenciju sledećih redova

$$1^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right); \qquad 2^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) \quad (a \text{ realan broj}).$$

Rešenje. 1° Kako je

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2} - \pi n\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

i niz $\sin \dfrac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ za dovoljno veliko n opada i teži nuli, ukoliko je $a \neq 0$, i kako, za $a \neq 0$,

$$\sin \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} \sim \frac{\pi a^2}{2n} \qquad (n \to +\infty),$$

posmatrani red neapsolutno ili apsolutno konvergira prema tome da li je $a \neq 0$ ili $a = 0$.

2° Red divergira, sem za $a = 0$, kada konvergira apsolutno.

Zaista, ako je $a \neq 0$, funkcija

$$n \mapsto \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2} - 2\pi n\right) = \sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$$

za dovoljno veliko n je pozitivna i asimptotski se ponaša kao $\pi a^2/n$ kad $n \to +\infty$.

3.1.38. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \sin(n^2)}{n}; \qquad 2^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2).$$

Rešenje. 1° Stavljajući $a_n = \sin n \sin(n^2)$, dobijamo

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k} \sin n \sin(n^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\cos(n^2-n) - \cos(n^2+n)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\left(\cos\left((n-1)^2+n-1\right) - \cos(n^2+n)\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(k^2+k)\right) = O(1)\ (k \to +\infty).$$

Odavde sleduje konvergencija posmatranog reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$, na osnovu Dirichletovog stava (1.2.2.4).

2° Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2)$ divergira, stoga što njegov opšti član ne teži nuli. Da bismo ovo dokazali, stavimo

$$n^2 = \pi p_n + q_n \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

gde je p_n prirodan broj i $|q_n| < \pi/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Ako bi bilo $\sin(n^2) = o(1)$ $(n \to +\infty)$, imali bismo

$$o(1) = |\sin(\pi p_n + q_n)| = |\sin q_n|$$

i odatle $q_n = o(1)$ $(n \to +\infty)$. Onda bismo imali

$$2n+1 = (n+1)^2 - n^2 = \pi(p_{n+1} - p_n) + o(1) = \pi r_n + o(1),$$

gde bi r_n $(n = 2, 3, \ldots)$ bili celi brojevi. Dalje bi bilo

$$2 = 2(n+1)+1-(2n+1) = \pi(r_{n+1} - r_n) + o(1),$$

što bi značilo da niz celih brojeva konvergira ka iracionalnom broju $2/\pi$. Dobijena nemogućnost dokazuje tvrđenje.

Napomenimo da se na isti način može dokazati da nizovi $\sin n$ i $\sin(n^2)$ ne konvergiraju.

3.1.39. Primerom dokazati da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i jednakost $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$ ne povlače konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Rešenje. Ako je

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n},$$

tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira i $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = 1$, ali red $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira.

3.1.40. Dokazati da je

$$(1) \qquad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k+1} < \frac{x^{2n+2}}{(n+2)(1-x^2)} \qquad (|x| < 1).$$

Dokaz. Imamo

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k+1} = x^{2n+2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{n+2+k}$$

$$< \frac{x^{2n+2}}{n+2} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2k} = \frac{x^{2n+2}}{(n+2)(1-x^2)} \qquad (|x| < 1).$$

3.1.41. Dokazati da red $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}\sqrt{1+kx}}$ uniformno konvergira za $x \geq 0$.

3.1.42. Da li se iz činjenice da je red $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ apsolutno i uniformno konvergentan na segmentu $[a, b]$ može izvesti zaključak da je red $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|$ uniformno konvergentan na $[a, b]$?

Rešenje. Odgovor je negativan, što se dokazuje primerom reda

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{(1+x^2)^n},$$

koji je apsolutno i uniformno konvergentan na $[0, 1]$, dok red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.

Tačnost tvrđenja o apsolutnoj konvergenciji je očigledna. Ostatak reda (1) ima oblik

$$R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x}{(2+x^2)(1+x^2)^n},$$

tako da je

$$|R_n(x)| \leq \frac{x}{(1+x^2)^n} = \varphi_n(x) \qquad (x \in [0, 1]; \quad n = 1, 2, \ldots).$$

Kako je

$$\varphi_n'(x) = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}},$$

funkcija $x \mapsto \varphi_n(x)$ uzima na $[0, 1]$ maksimalnu vrednost za $x = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$. Prema tome, za $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$, imamo

$$|R_n(x)| \leq \varphi_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{2n-1}\right)^n} \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

što znači da red (1) uniformno konvergira za $x \in [0, 1]$.

S druge strane, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$ ima ostatak $\overline{R_n(x)} = \dfrac{1}{x(1+x^2)^n}$. Kako $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \in (0, 1]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i

$$\overline{R_n(x_n)} = \frac{\sqrt{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \to +\infty \qquad (n \to +\infty),$$

ovaj red ne konvergira uniformno za $x \in [0, 1]$.

3.1.43. Ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju redova:

$$1^\circ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} \quad (p \neq 0); \qquad 2^\circ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}.$$

Rešenje. 1° U slučaju kada je $p < 0$ red očigledno divergira. Neka je $p > 0$. Parcijalna suma posmatranog reda može se napisati u obliku

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \sum_{n=2}^{k} (-1)^n \left(\frac{1}{n^p + (-1)^n} - \frac{1}{n^p}\right) + \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$$= -\sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^{2p}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)} + \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{n^p}.$$

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p}$ konvergira apsolutno za $p > 1$ i neapsolutno za $0 < p \leq 1$, a red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2p}\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right)}$ apsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $p > \dfrac{1}{2}$ ili $0 < p \leq \dfrac{1}{2}$, to, uzimajući u obzir i početnu napomenu, dolazimo do zaključka da posmatrani red apsolutno konvergira za $p > 1$, neapsolutno konvergira za $\dfrac{1}{2} < p \leq 1$ i divergira za $0 \neq p \leq \dfrac{1}{2}$.

2° Parcijalne sume reda mogu biti predstavljene u obliku

$$\sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p} = \sum_{n=2}^{k} (-1)^n \left(\frac{1}{(n+(-1)^n)^p} - \frac{1}{n^p}\right) + \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{n^p}$$

$$= \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n\left(\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{-p} - 1\right)}{n^p} + \sum_{n=2}^{k} \frac{(-1)^n}{n^p}.$$

Postoji, dalje, konstanta $M > 0$ takva da je

$$\left|\frac{(-1)^n\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^p-1\right)}{n^p}\right| \leq \frac{M}{n^{p+1}} \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Uzimajući u obzir činjenicu da opšti član reda ne teži nuli za $p \leq 0$, zaključujemo da red apsolutno konvergira, neapsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $p > 1$, $0 < p \leq 1$ ili $p \leq 0$.

3.1.44. Ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju sledećih redova:

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p} \ (p \text{ realno}); \qquad 2^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n}.$$

Rešenje. 1° Očigledno, red apsolutno konvergira za $p > 1$, ne konvergira apsolutno za $0 < p \leq 1$ i divergira za $p \leq 0$.

Neka je $0 < p \leq 1$. U svakoj grupi uzastopnih članova sa indeksima $n^2, n^2+1, n^2+2, \ldots, (n+1)^2-1$ $(n=1,2,\ldots)$ svi članovi imaju isti znak i ovi znaci za pomenute grupe naizmenično su pozitivni i negativni. Stoga, ako se stavi

$$A_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^p} \qquad (n=1,2,\ldots),$$

tada je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n A_n \tag{1}$$

jedan od redova dobijenih grupisanjem članova posmatranog reda bez promene poretka. Za $\frac{1}{2} < p < 1$ imamo

$$0 < A_n < \frac{1}{n^{2p}} + \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^p}\,dt = o(1) + \frac{1}{1-p}\left((n+1)^{2-2p} - n^{2-2p}\right)$$

$$= o(1) + \frac{1}{1-p} n^{2-2p}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2(1-p)} - 1\right) \leq o(1) + M n^{1-2p} \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

gde M označava pozitivnu konstantu. Za $p = 1$,

$$0 < A_n < \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k^{3/4}} \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Dakle, $A_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ za $\frac{1}{2} < p \leq 1$. Kako je

$$(n+2)^2 - 1 - (n+1)^2 + 1 - \left((n+1)^2 - 1 - n^2 + 1\right) = 2,$$

za $\frac{1}{2} < p \leq 1$ imamo takođe

$$A_n - A_{n+1} = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \left(\frac{1}{k^p} - \frac{1}{(2n+1+k)^p}\right) - \frac{1}{((n+2)^2-2)^p} - \frac{1}{((n+2)^2-1)^p}$$

$$> \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \left(\frac{1}{((n+1)^2-1)^p} - \frac{1}{(2n+(n+1)^2)^p}\right) - \frac{2}{(n+1)^{2p}}$$

$$= (2n+1)\big((n^2+2n)^{-p}-(n^2+4n+1)^{-p}\big)-2(n+1)^{-2p}$$

$$= 2n^{-2p}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2p}{n}-1+\frac{4p}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-1-O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\sim 2(2p-1)\,n^{-2p} \qquad (n\to+\infty),$$

što znači da je $A_n - A_{n+1} > 0$ za dovoljno veliko n. U prethodnom minoriranju korišćena je okolnost da je funkcija

$$t \mapsto g(t) = \frac{1}{t^p} - \frac{1}{(2n+1-t)^p} \qquad (p>0),$$

zbog

$$g'(t) = -p\left(\frac{1}{t^{p+1}} - \frac{1}{(2n+1+t)^{p+1}}\right) < 0 \qquad (t>0),$$

strogo opadajuća za $t > 0$.

Prema tome, za $\frac{1}{2} < p \leq 1$ red (1) konvergira na osnovu Leibnizovog kriterijuma. Kako se svaka parcijalna suma posmatranog reda od po indeksu najbliže parcijalne sume istog reda koja je u isti mah i parcijalna suma reda (1) razlikuje za veličinu po apsolutnoj vrednosti manju od odgovarajućeg člana reda (1), zaključujemo da posmatrani red konvergira za $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

Za $0 < p \leq \frac{1}{2}$ imamo

$$A_n > \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{t^p}\,dt = \frac{1}{1-p}\,n^{2-2p}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2-2p}-1\right) \sim 2\,n^{1-2p} \qquad (n\to+\infty),$$

pa A_n ne teži nuli. To znači da red (1), pa stoga i posmatrani red, divergira za $0 < p \leq \frac{1}{2}$.

Tako smo ustanovili da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ apsolutno konvergira, neapsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $p > 1$, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ ili $p \leq \frac{1}{2}$.

Primedba. Na sličan način može se ispitati konvergencija reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[q]{n}]}}{n^p} \qquad (q \text{ prirodan broj}).$$

2° Stavimo $p_n = [e^n]$ i $P_n = \sum\limits_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} \frac{1}{k}$. Bez teškoća se uviđa da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n P_n \tag{2}$$

jedan od redova dobijenih grupisanjem članova reda

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{[\log n]}}{n}. \tag{3}$$

Kako je, s obzirom na 1.1.2.23.2,

$$P_n = \sum_{k=p_n+1}^{p_{n+1}} \frac{1}{k} = \log p_{n+1} - \log p_n + o(1) = \log \frac{p_{n+1}}{p_n} + o(1)$$

$$= \log \frac{e^{n+1} + O(1)}{e^n + O(1)} + o(1) = 1 + o(1) \qquad (n \to +\infty),$$

red (3), pa onda i red (2), divergira.

3.1.45. Ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \quad \frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \cdots \qquad (p, q \text{ realni brojevi});$$

$$2^\circ \quad 1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots \qquad (p \text{ realan broj}).$$

Rezultat. 1° Ako je $p > 1$ i $q > 1$, red apsolutno konvergira; ako je $0 < p = q \leq 1$, red neapsolutno konvergira; u ostalim slučajevima, red divergira.

2° Red apsolutno konvergira za $p > 1$, neapsolutno konvergira za $p = 1$, a divergira za $p < 1$.

3.1.46. Dokazati da je

$$\left[1\Big/\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)\right] = n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde je $[x]$ celi deo realnog broja x.

Rešenje. Kako je $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, imamo

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Koristeći nejednakosti

$$\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} \qquad (k > 1),$$

dobijamo

$$\frac{1}{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{n}.$$

Odatle je

$$n + 1 > 1\Big/\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} > n \Rightarrow \left[1\Big/\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right] = n,$$

tj.

$$\left[1\Big/\left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)\right] = n.$$

3.1.47. Odrediti intervale u kojima red $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos^n x \cos nx$ uniformno konvergira.

Rezultat. Dati red uniformno konvergira na svakom segmentu realne ose koji ne sadrži ni jednu od tačaka $k\pi$ (k ceo broj).

3.1.48. Ako je p nenegativan ceo broj, izračunati

$$\lim_{x\to 1-0} (1-x)^{p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n.$$

Rešenje. Imamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n = (x\,\mathrm{D})^p \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = (x\,\mathrm{D})^p \frac{1}{1-x},$$

gde je $\mathrm{D} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Matematičkom indukcijom može se dokazati da je

$$(x\,\mathrm{D})^p \frac{1}{1-x} = p!\, \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}} + \frac{P(x)}{(1-x)^p},$$

gde je P polinom po x koji zavisi od p. Stoga, za $x \in (-1, 1)$ imamo

$$(1-x)^{p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n = p!x^p + (1-x)\, P(x)$$

i odatle

$$\lim_{x\to 1-} (1-x)^{p+1} \sum_{n=1}^{+\infty} n^p x^n = p!.$$

Primedba. Do istog rezultata može se doći i na osnovu problema 5.50.

3.1.49. Neka $u(x)$ označava apsolutnu vrednost razlike između broja x i najbližeg celog broja, tj. neka je

$$u(x) = \min(x - [x],\ \ [x] + 1 - x).$$

Dokazati da je funkcija f data sa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u(4^n x)}{4^n} \tag{1}$$

neprekidna za svako x, ali da nigde nema izvod. (Ovaj primer potiče od B. L. van der Waerdena.)

Dokaz. Kako je $0 \le u(x) \le \dfrac{1}{2}$ za $x \in (-\infty, +\infty)$, red (1), prema Weierstrassovom kriterijumu, uniformno konvergira za $x \in (-\infty, +\infty)$. Svi članovi ovog reda su svuda neprekidne i periodične funkcije sa periodom 1. Iz prethodnog izlazi da je i f svuda neprekidna i periodična funkcija sa periodom 1.

Ostaje da se dokaže da funkcija $x \mapsto f(x)$ nigde nema izvod. Neka je x_0 bilo koji realan broj. Za svaki prirodan broj n, skup intervala

$$I_n^\nu = \left\{x : \frac{\nu}{2\cdot 4^n} \le x < \frac{\nu+1}{2\cdot 4^n}\right\} \qquad (\nu \text{ ceo broj})$$

ostvaruje jednu podelu realne ose na disjunktne delove. Samo jedna od tačaka $x_0 \pm \dfrac{1}{4^{n+1}}$ pripada intervalu I_n^ν koji sadrži x_0. Označićemo ovaj interval sa $I_n(x)$ a tu tačku sa x_n. Očigledno, $x_n \to x_0\ (n \to +\infty)$.

Imamo

$$f(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\frac{u(4^k x_0)}{4^k}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{u(4^k x_0)}{4^k},$$

$$f(x_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{u(4^k x_n)}{4^k}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{u(4^k x_n)}{4^k}.$$

Međutim,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{u(4^k x_0)}{4^k}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{u(4^k x_n)}{4^k},$$

jer je funkcija

$$x\mapsto\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{u(4^k x)}{4^k}$$

periodična sa periodom $1/4^{n+1}$ i $x_n-x_0=\pm 1/4^{n+1}$. Prema tome,

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\,\frac{u(4^k x_n)-u(4^k x_0)}{x_n-x_0}.$$

Funkcija $x\mapsto u(4^k x)$ $(1\le k\le n)$ je u intervalu $I_n(x)$ linearna sa nagibom jednakim $\pm 4^k$. Stoga,

$$\frac{u(4^k x_n)-u(4^k x_0)}{x_n-x_0}=\pm 4^k,$$

tako da dobijamo

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1).$$

Ovaj zbir je, međutim, parcijalna suma divergentnog reda. Dakle, konačna granična vrednost

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}$$

ne postoji, pa onda ne postoji ni $f'(x_0)$.

3.1.50. Dokazati da konvergencija reda

$$c_1+2c_2+3c_3+\cdots$$

povlači konvergenciju svakog od redova

$$c_n+2c_{n+1}+3c_{n+2}+\cdots=t_n\qquad(n=2,3,\ldots),$$

kao i jednakost $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$.

Rešenje. Red

$$c_n+2c_{n+1}+3c_{n+2}+\cdots,\ \text{tj.}\ \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{n+k-1}(n+k-1)\,c_{n+k-1},$$

prema Abelovom kriterijumu, konvergira za svako $n=2,3,\ldots$ Ako stavimo $r_k=\sum\limits_{\nu=k}^{+\infty}\nu c_\nu$ $(k=1,2,\ldots)$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
|t_n| &= \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(k-n+1)\,c_k\right| \\
&= \left|\sum_{k=n}^{+\infty} kc_k-(n-1)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}\cdot k\,c_k\right| \\
&= \left|r_n-(n-1)\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}(r_k-r_{k+1})\right| \\
&= \left|r_n-\left(1-\frac{1}{n}\right)r_n+(n-1)\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)r_k\right| \\
&\le \sup_{k\ge n}|r_k|\left(\frac{1}{n}+\frac{n-1}{n}\right)\to 0 \quad (n\to+\infty).
\end{aligned}
$$

3.1.51. Dokazati da je red čiji je opšti član $u_n=\int\limits_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{t\cdot\sin t}{1+t^2}\,dt$ konvergentan, ali nije apsolutno konvergentan.

Na osnovu ovog izvesti zaključak da je integral $\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\cdot\sin t}{1+t^2}\,dt$ konvergentan, ali nije apsolutno konvergentan.

3.1.52. Dokazati sledeće tvrđenje: Ako je red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$ dobijen od reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ time što su iz reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ izostavljeni svi ili neki članovi jednaki nuli, ili time što je u red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ umetnuto, na proizvoljan način, konačno ili beskonačno mnogo članova jednakih nuli, uz uslov da se između uzastopnih članova umeće najviše konačno mnogo novih članova, tada su redovi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_n$ istovremeno: konvergentni, apsolutno konvergentni, sa ograničenim nizovima parcijalnih suma; oni, sem toga, imaju u slučaju konvergencije jednake sume, a u slučaju divergencije iste skupove tačaka nagomilavanja nizova parcijalnih suma (u $\mathbf{R}$ i u $\mathbf{R}_\infty$).

3.1.53. 1° U slučaju kada je $a_n\ge 0$ za dovoljno veliko n, dokazati da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ konvergira ako i samo ako konvergiraju oba reda

$$
(1)\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}\quad \text{i}\quad \sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1},
$$

i da tada važi jednakost

$$
(2)\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.
$$

2° Dokazati da je u opštem slučaju konvergencija oba reda (1) dovoljan uslov za konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, kao i da jednakost (2) važi kad god dve od tri sume u njoj imaju konačne vrednosti.

3° Uopštiti prethodna tvrđenja.

3.1.54. Ispitati konvergenciju redova:

1° $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\log n)^a}{n^b} \quad (a, b > 0);$

2° $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\log n)^{\log n}}{n^c} \quad (c > 0).$

3.1.55. Dokazati da ograničenost niza parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i ograničenost varijacije niza (b_n) (videti 5.47) povlače konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

3.1.56. Ispitati konvergenciju reda čiji je opšti član

$$u_n = n^a \Big((n+1)^{\frac{n+1}{n}} - (n-1)^{\frac{n-1}{n}}\Big),$$

gde je a realan broj.

3.1.57. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) \frac{\sin (n\theta + a)}{n},$$

gde su θ i a realni brojevi.

3.1.58. Da li se a i b mogu tako izabrati da red čiji je opšti član

$$\sqrt[3]{n^3 + n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1} + a + \frac{b}{n}$$

bude konvergentan.

Rezultat. $a = -\frac{1}{3}, \quad b = \frac{5}{18}.$

3.1.59. Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-a_0}$ ima ograničen niz parcijalnih suma, dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-a}$ konvergira za $a > a_0$, a apsolutno konvergira za $a > a_0 + 1$.

3.1.60. Dokazati primerom da red oblika $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$, gde je $b_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$, može divergirati.

3.1.61. Ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju sledećih redova:

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}; \quad 2^\circ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log^2 n} \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1}\right);$$

$$3^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} \quad (p \in \mathbf{R}); \quad 4^\circ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\log \log n}.$$

3.1.62. Ispitati konvergenciju redova:

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+p}}; \quad 2^\circ \sum_{n=2}^{+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \cdot \log \frac{n-1}{n+1};$$

$$3^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^p; \quad 4^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\log(k+1)}{\log(k+1+p)},$$

gde je p realan broj.

3.1.63. Dokazati da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sa nenegativnim članovima povlači konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\alpha} \sqrt{a_n}$, ukoliko je $\alpha > \frac{1}{2}$, kao i da ova implikacija ne važi ni za jedno $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

3.1.64. Dokazati da je za konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa realnim nenegativnim članovima potrebno da bude $\varliminf_{n \to +\infty} (n\, a_n) = 0$.

3.1.65. 1° Dokazati da konvergencija reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ čiji su članovi nenegativni i monotono **opadaju** povlači konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$.

2° Dokazati da, ako je još $a_n - 2\, a_{n+1} + a_{n+2} \geq 0$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, tada $n^2 (a_n - a_{n+1}) \to 0$ $(n \to +\infty)$.

3.1.66. Neka je $n\, a_n$ monotono opadajući niz realnih nenegativnih brojeva. Dokazati da je tada za konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ potrebno da bude $\lim_{n \to +\infty} (n\, a_n \log n) = 0$.

3.1.67. Primerom dokazati da red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sa pozitivnim članovima može konvergirati i kada niz $(a_n\, n^\alpha)$ ne konvergira ka nuli ni za jedno $\alpha > 0$.

3.1.68. Neka su $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentni redovi sa nenegativnim članovima. Šta se tada može reći o konvergenciji redova $\sum_{n=1}^{+\infty} \min(a_n, b_n)$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} \max(a_n, b_n)$?

3.1.69. Neka su svi članovi reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivni i neka je

$$K_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}}{\sum_{k=1}^{n} a_{2k}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dokazati sledeća tvrđenja:

1° ako je

(1) $$a_{n+1} \leq a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

i red divergira, tada je $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n = 1$;

2° ako je ispunjen uslov (1) i red konvergira, tada $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n$ postoji i može imati bilo koju vrednost iz intervala $[1, +\infty)$ i ni jednu van njega.

3° ako je $a_{n+1} < a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i red konvergira, $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n$ može imati bilo koju vrednost iz intervala $(1, +\infty)$ i nijednu van njega.

3.1.70. Neka su redovi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ konvergentni. Dokazati da u tom slučaju nejednakosti

$$a_m < b_m; \quad a_n \leq b_n \qquad (n \in \mathbf{N}_0 \setminus \{m\}),$$

gde je m jedan od elemenata skupa $\mathbf{N}_0$, povlače nejednakost

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n < \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

3.1.71. Neka je $a_n \leq c_n \leq b_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Dokazati da tada konvergencija redova $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ povlači konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, kao i da divergencija prva dva reda ne povlači divergenciju trećeg reda.

3.1.72. Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ neapsolutno konvergentan red i neka je

$$P_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|a_k| + a_k), \quad Q_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|a_k| - a_k).$$

Dokazati da je $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$.

3.1.73. Dokazati da se suma konvergentnog reda ne menja ako se njegovi članovi permutuju tako da se nijedan od njih ne udaljuje od svog ranijeg mesta za više od m mesta, gde je m dati prirodan broj.

3.1.74. Dokazati da se članovi neapsolutno konvergentnog reda mogu, bez promene poretka, grupisati tako da dobijeni red bude apsolutno konvergentan.

3.1.75. Dokazati da je Cauchyev proizvod reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ i istog tog reda divergentan red.

3.1.76. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-p} \sin nx$:

1° uniformno konvergira na skupu $\mathbf{R}$, ako je $p > 1$;

2° uniformno konvergira u svakom intervalu $[a, b]$ $(0 < a \leq b < 2\pi)$, ako je $0 < p \leq 1$;

3° u poslednjem slučaju ne konvergira uniformno ni u jednom intervalu $[0, a]$ $(a > 0)$, niti apsolutno konvergira ni za jedno $x \notin \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

3.1.77. Odrediti skupove na kojima konvergiraju sledeći redovi:

$$1^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \log^n x; \qquad 2^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}; \qquad 3^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n};$$

$$4^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} x\, e^{-nx}; \qquad 5^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \qquad 6^\circ \ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x\,(x+n)}{n}\right)^n,$$

gde je x realan broj.

3.1.78. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+nx)}{nx^n}$ uniformno konvergira na svakom intervalu oblika $[a, +\infty)$ $(a > 1)$.

3.1.79. Dokazati da funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ uniformno konvergira na intervalu $[0, +\infty)$ i da funkcionalni red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ uniformno konvergira na skupu $\mathbf{R}$.

3.1.80. Dokazati da funkcionalni redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \sin nx}{\sqrt{n+x}}$$

uniformno konvergiraju na skupu $[0, +\infty)$.

3.1.81. Dokazati da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n(1-x)}{(1+x)\log n}$ uniformno konvergira za $x \in [0, 1]$.

3.1.82. Dokazati da je, za svako realno x,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^1 t^{xt}\, dt.$$

3.1.83. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n (1-x^n)$ ne konvergira uniformno u intervalu $[0, 1]$.

3.1.84. Dokazati da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n (1-x)}{n(1-x^{2n})} \to \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (x \to 1-).$$

3.1.85. Dokazati da uniformna konvergencija reda $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ na intervalu $[a, b]$ povlači uniformnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ na istom intervalu.

3.1.86. Dokazati da, ako funkcionalni red $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ ima na intervalu $[a, b]$ nenegativne članove i na istom intervalu uniformno konvergira, tada red $\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{a \le x \le b} u_n(x)$ ne mora konvergirati; drugim rečima, da postoje funkcionalni redovi koji na izvesnom intervalu imaju nenegativne članove i uniformno konvergiraju, a čija se uniformna konvergencija ne može dokazati pomoću Weierstrassovog kriterijuma.

3.1.87. Neka je $a_n \ge 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i neka red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

1° Dokazati da tada $\alpha_n = \max_{k \ge n} a_k$ postoji, kao realan broj, za svako $n \in \mathbf{N}$.

2° Ispitati da li tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ mora konvergirati.

3.2. POTENCIJALNI REDOVI

3.2.1. Proveriti razvoje

$$1^\circ \quad \frac{x}{1+x^3} = x - x^4 + x^7 - x^{10} + \cdots \qquad (-1 < x < +1).$$

$$2^\circ \quad e^x \log(1+x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{3\,x^5}{40} + \cdots \qquad (-1 < x \leq +1).$$

3.2.2. Ispitati konvergenciju reda

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

Rezultat. Red konvergira za $|x| < 1$, divergira za $|x| > 1$. Za $x = 1$ red divergira, dok za $x = -1$ konvergira.

3.2.3. Ispitati konvergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^k}$.

Rezultat. Za svako k red konvergira ako je $|x| < 1$, a divergira ako je $|x| > 1$. Za $x = 1$ red konvergira samo ako je $k > 1$, dok za $x = -1$ konvergira samo za $k > 0$.

3.2.4. Razviti $(a+b)^\lambda$ po uopštenom binomnom obrascu kad λ nije prirodan broj ili nula i kada je $a > b > 0$.

Rešenje. Iz

$$\frac{1}{a^\lambda}(b+a)^\lambda = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^\lambda = 1 + \binom{\lambda}{1}\left(\frac{b}{a}\right) + \binom{\lambda}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \cdots$$

sleduje

$$(a+b)^\lambda = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\lambda}{k} a^{\lambda-k}\, b^k.$$

3.2.5. Polazeći od jednakosti

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \qquad (|x| < 1),$$

sumirati redove: $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^k.$

Rešenje. Koristeći se jednakostima

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\,x^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k x^k\right), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^{k-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k\right)$$

i jednakošću (1) za $|x| < 1$, dobijamo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k x^k = x \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{x}{(1-x)^2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^k = x \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 x^{k-1} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^k = x \sum_{k=1}^{+\infty} k^3 x^{k-1} = \frac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}.$$

Generalizacija. Sumirati $K_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^n x^k \; (n \in \mathbf{N})$.

Primedba. R. Stalley [1], M. S. Klamkin [2] i D. Zeitlin [3] dali su više metoda za sumiranje zbira $K_n(x)$ za $|x| < 1$. Oni su dobili sledeći rezultat:

$$K_n(x) = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \binom{n+1}{m-1} (r-m+1)^n \right) \cdot x^r.$$

Literatura

[1] R. Stalley: *A generalization of the geometric series*, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 325–327.

[2] M. S. Klamkin: *On generalization of the geometric series*, Amer. Math. Monthly **64** (1957), 91–92.

[3] D. Zeitlin: *Two methods for the evaluation of* $\sum_{k=0}^{+\infty} k^n x^k$, Amer. Math. Monthly **68**(1961), 986–989.

3.2.6. Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$.

Rezultat. Ovaj red konvergira za $-2 \leq x < 0$.

3.2.7. Odrediti interval konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} n(x-1)^n$.

Rezultat. Ovaj red konvergira za $0 < x < 2$.

3.2.8. Odrediti skup konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n x^n}$.

Rešenje. Ovo je potencijalni red po $\frac{1}{x}$. Primenimo D'Alembertov kriterijum:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{2^{n+1} x^{n+1}} \cdot \frac{2^n x^n}{n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n+1}{n} \frac{1}{2x} \right| = \frac{1}{2|x|}.$$

Ovaj red konvergira ako je $\frac{1}{2|x|} < 1$, tj. ako je $|x| > \frac{1}{2}$. Za $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{1}{2}$ imamo $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n$. Ovi redovi su divergentni.

Prema tome, red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n x^n}$ je konvergentan za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

3.2.9. Ako je $x \mapsto P(x)$ polinom, ispitati konvergenciju reda čiji je opšti član:

$1°$ $P(n)\frac{x^n}{n!}$; $\quad 2°$ $P(n)\, x^n$.

Rešenje. 1° Za dati red je

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{P(n)\dfrac{x^n}{n!}}{P(n+1)\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}(n+1)\left|\frac{P(n)}{P(n+1)\,x}\right| = \frac{1}{|x|}\lim_{n\to+\infty}(n+1)\left|\frac{P(n)}{P(n+1)}\right|$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)P(n)}{P(n+1)} = +\infty$, red konvergira za svako x.

2° Za dati red je

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{P(n)\,x^n}{P(n+1)\,x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{P(n)}{P(n+1)\,x}\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Stoga red konvergira za $-1 < x < 1$. Za $x = \pm 1$ red ne konvergira jer redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} P(n)$ i $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n P(n)$ imaju članove koji ne teže nuli kada $n \to +\infty$.

3.2.10. Dokazati da red $\sum_{n=0}^{+\infty} p^{n^2} x^n$ $(0 < p < 1)$ konvergira za svako x.

Rešenje. Poluprečnik konvergencije je

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{p^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} p^n} = +\infty.$$

3.2.11. Dokazati da je funkcija $x \mapsto \frac{x\log x}{x^2+1}$ opadajuća počev od jedne vrednosti $x = x_0$. Odrediti $[x_0]$.

Za koje vrednosti x konvergira potencijalni red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n\log n}{n^2+1}x^n$?

Rešenje. Posmatrajmo funkciju $x \mapsto f(x) = \frac{x\log x}{x^2+1}$ čiji je izvod $f'(x) = \frac{1+x^2+(1-x^2)\log x}{(1+x^2)^2}$.
Nule funkcije $x \mapsto g(x) = 1 + x^2 + (1-x^2)\log x$ određujemo iz jednačine $g(x) = 0$, koja se za $x \neq 1$ može predstaviti u obliku $\log x = \frac{x^2+1}{x^2-1}$. Za $x > 1$ je $\log x > 0$; $\log x \to +\infty$

kada $x \to +\infty$; $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} > 0$ za svako x i $\dfrac{x^2+1}{x^2-1} \to 1$ kada $x \to +\infty$. Za $x > 1$ funkcija $x \to \log x$ strogo monotono raste, a funkcija $x \to \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ strogo monotono opada, pa jednačina $g(x) = 0$ ima samo jedan realan koren u intervalu $(1, +\infty)$. Lako je pokazati da je taj koren $x_0 \in (3, 4)$, pa je onda $[x_0] = 3$. Treba još pokazati da ovo x_0 ispunjava uslove zadatka. Kako je za $x > x_0$ $\log x > \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, $g(x) < 0$, a i $f(x) > 0$, f je opadajuća funkcija za $x > x_0$.

Poluprečnik konvergencije datog potencijalnog reda određujemo iz

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n}\,\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 1,$$

dakle, red konvergira za svako $x \in (-1, 1)$.

Za $x = 1$ dati red postaje $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{n\log n}{n^2+1}$. Kako je $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{n\log n}{n^2+1} = 0$, ovaj red je konvergentan prema Leibnizovom kriterijumu. (Konačan broj prvih članova reda ne utiče na konvergenciju.)

Za $x = -1$ dati red postaje $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n\log n}{n^2+1}$. Kako je $\dfrac{n\log n}{n^2+1} \sim \dfrac{\log n}{n}$, a red $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\log n}{n}$ po Cauchyevom integralnom kriterijumu divergira, taj red takođe divergira.

Dakle, dati red konvergira za svako $x \in (-1, 1]$.

3.2.12. Dokazati

$$(1)\qquad 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Rešenje. Red $y = \sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{x^{3k}}{(3k)!}$ konvergira za svako x. Polazeći od

$$y' = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{3k-1}}{(3k-1)!},\qquad y'' = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{3k-2}}{(3k-2)!},\qquad y'' + y' + y = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!},$$

dobijamo

$$y'' + y' + y = e^x.$$

Opšte rešenje ove jednačine je

$$y = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}\,x}{2} + B\sin\frac{\sqrt{3}\,x}{2}\right).$$

Ovo rešenje mora da ispunjava uslove: $y = 1$ za $x = 0$ i $y' = 0$ za $x = 0$. Iz dve tako dobijene jednačine određuju se A i B i tako se dolazi do izraza na desnoj strani u (1).

3.2.13. Razviti u potencijalni red oblika $\sum a_k x^k$ funkciju f, datu sa

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+2)(x^2+1)}.$$

Rešenje. Iz

$$f(x)=-\frac{\frac{1}{5}}{4-x^2}-\frac{\frac{1}{5}}{1+x^2}=-\frac{\frac{1}{20}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\frac{\frac{1}{5}}{1+x^2}$$

i razvoja

$$\frac{1}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\ \text{za}\ |x|<2,\ \text{i}\ \frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\ \text{za}\ |x|<1,$$

dobijamo da je, za $|x|<1$,

$$f(x)=-\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n+\frac{1}{2^{2(n+1)}}\right)x^{2n}.$$

3.2.14. Odrediti prva četiri člana u razvoju $\sum a_k x^k$ funkcije f definisane pomoću

$$f(x)=\frac{1+x-x^2}{(1+2x)(1-x)(1+x^2)}.$$

3.2.15. Proveriti razvoje:

$$1^\circ\ \frac{1+3x^2}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}(2n^2+1)x^n;\qquad 2^\circ\ \frac{1}{(x-1)(x-2)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n-1}{2^n}x^{n-1}.$$

Odrediti poluprečnike konvergencije ovih redova.

3.2.16. Razviti u Taylorov red, u okolini $x=0$, sledeće funkcije:

$$1^\circ\ x\mapsto\frac{x}{x^2+1};\qquad 2^\circ\ x\mapsto\frac{x}{(x^2+1)^2};\qquad 3^\circ\ x\mapsto\frac{x}{x-1};$$

$$4^\circ\ x\mapsto\frac{x}{(x-1)^2};\qquad 5^\circ\ x\mapsto\frac{x}{(x-1)^2(x^2+1)^2};$$

$$6^\circ\ x\mapsto\frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)};\qquad 7^\circ\ x\mapsto\frac{x}{(1+x)^2(1-x^2)}.$$

Rešenje. 1° Iz

$$\text{(1)}\qquad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\qquad(-1<x<+1)$$

sleduje

$$\text{(2)}\qquad \frac{x}{x^2+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n+1}\qquad(-1<x<+1).$$

2° Diferenciranjem jednakosti (1) dobijamo

$$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}\qquad(-1<x<+1),$$

tj.

$$\text{(3)}\qquad \frac{x}{(x^2+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}n\,x^{2n-1}\qquad(-1<x<+1).$$

3° Iz

$$(4) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad (-1 < x < +1)$$

izlazi

$$(5) \qquad \frac{x}{x-1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \qquad (-1 < x < +1).$$

4° Diferenciranjem jednakosti (4) dobijamo

$$(6) \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \qquad (-1 < x < +1),$$

te je

$$(7) \qquad \frac{x}{(x-1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n \qquad (-1 < x < +1).$$

5° Da bismo razvili funkciju u red, rastavimo je prethodno na parcijalne razlomke, naime

$$(8) \qquad \frac{x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2},$$

odakle imamo identitet

$$(9) \quad x = A(x-1)(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x-1)^2(x^2+1) + (Ex+F)(x-1)^2.$$

Ako je $x = 1$, nalazimo $B = \frac{1}{4}$.

Diferencirajući (9) i zatim stavljajući $x = 1$, dobijamo

$$1 = 4A + 8B, \quad \text{tj.} \quad A = -\frac{1}{4}.$$

Za $x = i$ (i imaginarna jedinica) (9) postaje

$$i = (Ei + F)(-2i), \quad \text{tj.} \quad Ei + F = -\frac{1}{2}.$$

Kako su E i F realni, odavde dobijamo $E = 0$, $F = -\frac{1}{2}$. Upoređujući koeficijente uz x^5 u (9), nalazimo

$$0 = A + C, \quad \text{tj.} \quad C = \frac{1}{4}.$$

Na kraju, za $x = 0$ jednakost (9) postaje

$$0 = -A + B + D + F, \quad \text{tj.} \quad D = 0.$$

(8) postaje

$$(10) \qquad \frac{x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{4}\frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

Ako u (6) stavimo $-x^2$ umesto x, dolazimo do

$$(11) \qquad \frac{1}{(x^2+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} n x^{2n-2} \qquad (-1 < x < +1).$$

Iz (10), (4), (6), (2) i (11) izlazi

$$\frac{x}{(x-1)^2 (x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} 2n x^{2n-2}\right),$$

gde je $-1 < x < +1$.

3.2.17. U okolini $x = 0$ razviti u Taylorov red funkciju $x \mapsto \log \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

3.2.18. Proveriti razvoje:

$$1^\circ \quad (1 + x)^x = 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5\,x^4}{6} + \cdots \qquad (x > -1);$$

$$2^\circ \quad e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \cdots\right) \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

3.2.19. Dokazati da za svako realno x važe sledeći razvoji:

$$1^\circ \quad \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + \frac{2}{45}\,x^6 - \cdots = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,2^{2n}\,x^{2n};$$

$$2^\circ \quad \sin^3 x = x^3 - \frac{1}{2}\,x^5 + \frac{13}{120}\,x^7 - \cdots = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{3^{2n} - 1}{(2\,n + 1)!}\,x^{2n+1};$$

$$3^\circ \quad \sin^4 x = x^4 - \frac{2}{3}\,x^6 + \cdots = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{2^{2n-1}\,(2^{2n-2} - 1)}{(2\,n)!}\,x^{2n};$$

$$4^\circ \quad \sin^5 x = x^5 - \frac{5}{6}\,x^7 + \cdots = \frac{5}{16}\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{5^{2n} - 3^{2n+1} + 2}{(2\,n + 1)!}\,x^{2n+1};$$

$$5^\circ \quad \cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3}\,x^4 - \frac{2}{45}\,x^6 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{2^{2n-1}}{(2\,n)!}\,x^{2n};$$

$$6^\circ \quad \cos^3 x = 1 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{7}{8}\,x^4 - \frac{61}{240}\,x^6 + \cdots = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{3^{2n-1} + 1}{(2\,n)!}\,x^{2n};$$

$$7^\circ \quad \cos^4 x = 1 - 2\,x^2 + \frac{5}{3}\,x^4 - \frac{34}{45}\,x^6 + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{2^{2n-1}\,(2^{2n-2} + 1)}{(2\,n)!}\,x^{2n}.$$

3.2.20. Razviti u potencijalni red, u okolini $x = 0$, funkciju $x \mapsto 4\sin^2 x \cos x$.

Rešenje. Iz identiteta $4\sin^2 x \cos x = \cos x - \cos 3\,x$ i razvoja

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2\,n)!} \qquad (|x| < +\infty)$$

sleduje

$$4\sin^2 x \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{x^{2n}}{(2\,n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{(3\,x)^{2n}}{(2\,n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{3^{2n} - 1}{(2\,n)!}\,x^{2n}.$$

3.2.21. U okolini $x = 0$ razviti u potencijalni red funkciju $x \mapsto e^{x\cos a}\cos(x\sin a)$.

Rešenje. Iz jednakosti

$$e^{x\cos a}\cos(x\sin a) + ie^{x\cos a}\sin(x\sin a) = e^{xe^{ai}}$$

i razvoja

$$e^{xe^{ai}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xe^{ai})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos na}{n!}x^n + i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin na}{n!}x^n$$

dobijamo

$$e^{x\cos a}\cos(x\sin a) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos na}{n!}x^n, \quad \text{i} \quad e^{x\cos a}\sin(x\sin a) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n!}x^n.$$

3.2.22. U okolini $x = 0$ razviti u potencijalni red funkcije

$$x \to \frac{x\sin a}{1 - 2x\cos a + x^2}, \qquad x \to \frac{1 - x\operatorname{ch} a}{1 - 2x\operatorname{ch} a + x^2}.$$

Rešenje. Kako je $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n$ $(|z| < 1)$, za $z = xe^{ai}$ $(|x| < 1)$ dobijamo

$$\frac{1}{1 - xe^{ai}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{nai} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\cos na + i\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\sin na.$$

S druge strane je

$$\frac{1}{1 - xe^{ai}} = \frac{1 - x\cos a}{1 - 2x\cos a + x^2} + i\,\frac{x\sin a}{1 - 2x\cos a + x^2},$$

te je

$$\frac{x\sin a}{1 - 2x\cos a + x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\sin na.$$

Isto tako je

$$\frac{1 - x\cos a}{1 - 2x\cos a + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\cos na.$$

Ako ovde umesto a stavimo ai, dobijamo

$$\frac{1 - x\operatorname{ch} a}{1 - 2x\operatorname{ch} a + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\operatorname{ch} na.$$

3.2.23. Proveriti razvoje:

1° $\dfrac{x}{\log\dfrac{1}{1-x}} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^3}{24} - \cdots;$

2° $\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{30}x^7 + \dfrac{29}{756}x^9 + \cdots;$

3° $\dfrac{x^2}{x - \log(1-x)} = 2 + \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{9}x^2 + \dfrac{8}{135}x^3 + \cdots;$

4° $\log(1+\sin x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{24} - \cdots;$

5° $\operatorname{th} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2\,x^5}{15} - \cdots.$

3.2.24. U okolini $x = 0$ razviti u potencijalni red funkcije:

1° $x \mapsto f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}\,dt;$ $\qquad 2^\circ$ $x \mapsto g(x) = \int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt.$

Rezultat. $f(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^\nu}{\nu!}\,\dfrac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1},\quad g(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^\nu}{(2\nu+1)!}\,\dfrac{x^{2\nu+1}}{2\nu+1} \qquad (-\infty < x < +\infty).$

3.2.25. Proveriti razvoje:

1° $e^{\sin x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^5}{15} - \dfrac{x^6}{240} + \dfrac{x^7}{90} + \dfrac{31\,x^8}{5760} + \cdots;$

2° $e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{7\,x^4}{24} + \dfrac{x^5}{24} + \dfrac{29\,x^6}{144} - \cdots.$

3.2.26. Za koje realne brojeve x konvergira red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$?

3.2.27. Odrediti ekstremne vrednosti funkcije $x \mapsto f(x) = \cos x + \operatorname{ch} x$.

Rešenje. Iz izraza

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + \operatorname{sh} x \\ &= -\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) + \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= 2\,x^3\left(\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{7!} + \frac{x^8}{11!} + \cdots\right) \qquad (-\infty < x < +\infty) \end{aligned}$$

sleduje da se $f'(x)$ anulira samo za $x = 0$.

Kako je $f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 2$, imamo $\min f(x) = 2$ za $x = 0$. □

3.2.28. Za koje realne brojeve x konvergira red

$$\sum_{n=2}^{+\infty} x^n \log \frac{\log(n+1)}{\log n}\ ? \tag{1}$$

Rešenje. Neka je

$$a_n = \log \frac{\log(n+1)}{\log n} = \log\left(1 + \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\right).$$

Kako je

$$\log\left(1 + \frac{1}{t}\right) \sim \frac{1}{t} \qquad (t \to +\infty),$$

dobija se

$$(2)\qquad a_n = \log\left(1 + \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\right) \sim \frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n} \sim \frac{1}{n\log n} \qquad (n \to +\infty).$$

Odavde izlazi da je poluprečnik konvergencije datog potencijalnog reda jednak

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\log(n+1)}{n\log n} = 1.$$

Za $x = 1$ red (1) postaje

$$(3)\qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \log\frac{\log(n+1)}{\log n}$$

i divergira stoga što je, s obzirom na (2), red ekvikonvergentan sa divergentnim redom $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n\log n}$.

Za $x = -1$ dobija se alternativni red

$$\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\right),$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriterijumu.

Prema tome, red (1) konvergira za $-1 \le x < 1$.

3.2.29. U okolini tačke $x = 0$ razviti funkciju $x \mapsto \dfrac{\log(1+x)}{1+x}$ u Taylorov red.

Rešenje. Polazeći od razvoja

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \qquad (-1 < x < 1),$$

gde oba reda apsolutno konvergiraju za $-1 < x < +1$, i primenjujući Cauchyevo množenje redova, dolazimo do razvoja

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}x^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Dobijeni red konvergira za $-1 < x < 1$.

3.2.30. Funkciju $x \mapsto \log(x + \sqrt{1-x^2})$ izraziti najpre u obliku integrala i razviti je potom u potencijalni red u okolini $x = 0$.

3.2.31. Razviti funkciju $x \mapsto f(x) = \dfrac{12x+5}{(6x^2-5x+1)^2}$ u red oblika $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ i odrediti poluprečnik konvergencije tog reda.

3.2.32. Proveriti sledeće razvoje:

$$1^\circ \quad \frac{1-x^2}{1-2x\cos a+x^2}=1+2\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos na \qquad (|x|<1);$$

$$2^\circ \quad \frac{1-x\operatorname{sh} a}{1-2x\operatorname{ch} a+x^2}=1+\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \operatorname{sh} na \qquad (|x|<1)$$

i odrediti poluprečnik konvergencije ovih redova.

Uputstvo. Razložiti prvo funkcije na levim stranama na proste razlomke oblika $\dfrac{A}{x-a}$. Može se vršiti i sumiranje redova na desnim stranama.

Primedba. Red u 1° može se shvatiti i kao Fourierov red, gde je x parametar i a promenljiva. To omogućuje da se na jednostavan način dođe do rezultata

$$\int_0^\pi \frac{\cos na}{1-2x\cos a+x^2}\,da=\frac{\pi x^n}{1-x^2} \qquad (|x|<1;\ n=0,1,2,\ldots).$$

3.2.33. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad \frac{n^n}{n!}<e^n \qquad (n=1,2,\ldots).$$

***Rešenje* 1.** Za $x>0$ je

$$e^x=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}>\frac{x^n}{n!} \qquad (n=1,2,\ldots);$$

ako se stavi $x=n$, ova nejednakost postaje

$$e^n>\frac{n^n}{n!} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

***Rešenje* 2.** Ako se stavi $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$, dobija se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e \qquad (n=1,2,\ldots),$$

jer niz $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ strogo rastući teži ka e. Stoga za $n=2,3,\ldots$ $(a_1=1)$ imamo

$$a_n=a_1\prod_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}}<\prod_{k=2}^{n} e=e^{n-1}<e^n.$$

Za $n=1$ je $a_1=1<e$.

Time je data nejednakost dokazana i ujedno dobijena nejednakost

$$\frac{n^n}{n!}<e^{n-1} \qquad (n=2,3,\ldots),$$

koja je preciznija od (1).

3.2.34. Proveriti razvoj

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}=\sum_{n=1}^{+\infty} n\,(x^{2n-1}+x^{2n}) \qquad (-1<x<1).$$

3.2.35. Dokazati da je

$$f(x) = 2\log\frac{2}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{x}{1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^3}{3} + \cdots \quad (-1 < x < 1).$$

Uputstvo. Razviti najpre $f'(x)$ u potencijalni red i uzeti u obzir da je $f(0) = 0$.

3.2.36. Da li je tačna jednakost

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k^2} = \int_0^x \frac{1}{t}\log\frac{1}{1-t}\,dt \qquad (0 < |x| < 1)?$$

3.2.37. Data je funkcija $t \mapsto f(t) = \int_0^t x^2\cos(x^2)\,dx$.

1° Razviti f u potencijalni red i odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

2° Izračunati $f(2^{-1})$ sa greškom manjom od 10^{-5}.

Rešenje. 1° Kako je

$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!},$$

imamo

$$x^2\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n)!}, \quad \text{tj.} \quad \int_0^t x^2\cos(x^2)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+3}}{(2n)!\,(4n+3)},$$

i dalje

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{4n+3}}{(2n)!\,(4n+3)}. \tag{1}$$

Poluprečnik konvergencije R poslednjeg reda određuje se iz

$$R^{-1} = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n}{(2n)!\,(4n+3)}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!\,(4n+7)}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+7)}{4n+3} = +\infty,$$

tj. $R = +\infty$. **Dakle, red (1) konvergira za** $t \in (-\infty, +\infty)$.

2° Za $t = 2^{-1}$ imamo

$$f(2^{-1}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!\cdot(4n+3)\cdot 2^{4n+3}}.$$

Ako je

$$\frac{1}{(2n+2)!\cdot(4n+7)\cdot 2^{4n+7}} < 10^{-5}, \tag{2}$$

tada je, kao što se lako uviđa, apsolutna vrednost greške manja od 10^{-5}. Nejednakost (2) je zadovoljenja za $n \geq 1$, tako da je

$$f(2^{-1}) \approx \frac{1}{3\cdot 8} - \frac{1}{2!\cdot 7\cdot 2^7},$$

sa greškom manjom od 10^{-5}. Odatle, $f(2^{-1}) \approx 0{,}041109$.

3.2.38. Proveriti razvoje

$$\frac{1}{\log(1+x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}x + \frac{1}{24}x^2 + \cdots;$$

$$\frac{1}{\log\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)} = \frac{1}{x} + \frac{x^{n-1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{(n+2)\cdot n!} + \cdots \qquad (n > 1);$$

$$\log(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} + \cdots;$$

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x} = 1 - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{n+1}{1!}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{(n+1)(n+2)}{2!}\frac{x^{n+3}}{(n+3)!} + \cdots.$$

3.2.39. Dokazati da je

$$\frac{3\sin 2t}{2(2+\cos 2t)} = t - \frac{4}{45}t^5 + o(t^5) \qquad (t \to 0).$$

Rešenje. Kako je funkcija $t \mapsto f(t) = \dfrac{3\sin 2t}{2(2+\cos 2t)}$ neparna, brojevi A_k $(k = 1, 2, 3)$ mogu se odrediti tako da bude

$$f(t) = A_1 t + A_2 t^3 + A_3 t^5 + o(t^5) \qquad (t \to 0).$$

Kako je, dalje,

$$\sin 2t = 2t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{15}t^5 + o(t^5), \qquad \cos 2t = 1 - 2t^2 + \frac{2}{3}t^4 + o(t^4) \qquad (t \to 0),$$

imamo

$$3t - 2t^3 + \frac{2}{5}t^5 + o(t^5) = 3A_1 t + (3A_2 - 2A_1)t^3 + \left(3A_3 + \frac{2}{3}A_1 - 2A_2\right)t^5 + o(t^5) \quad (t \to 0),$$

odakle dobijamo $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = -\dfrac{4}{15}$, što je trebalo dokazati.

3.2.40. Dokazati jednakost

$$\frac{\sin 2x}{1+\sin x} = 2x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0).$$

Rešenje. Kako je

$$\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \frac{1}{1+\sin x} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sin^k x \qquad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right),$$

dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin x} &= 1 - \sin x + \sin^2 x + O(\sin^3 x)\\ &= 1 - (x + O(x^3)) + (x + O(x^3))^2 + O(x^3)\\ &= 1 - x + x^2 + O(x^3) \qquad (x \to 0),\\ \frac{\sin 2x}{1+\sin x} &= \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\right)(1 - x + x^2 + O(x^3))\\ &= 2x - 2x^2 + 2x^3 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) + x\left(2 - \frac{4}{3}x^2\right)O(x^3)\\ &= 2x - 2x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0).\end{aligned}$$

3.2.41. Razviti funkciju $x \mapsto \operatorname{ch} x$ u red stepena sa osnovom $e^x - 1$ i ustanoviti za koje realne vrednosti x važi taj razvitak.

Rešenje. Stavljajući $e^x - 1 = t$, nalazimo

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(1 + t + \frac{1}{1+t}\right) = \frac{1}{2}(1 + t + 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots),$$

tj.

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n t^n.$$

Ova nejednakost važi za $|t| = |e^x - 1| < 1$, tj. za $x < \log 2$.

3.2.42. Razviti funkciju $x \mapsto \log|\sin x|$ u potencijalni red po $\cos x$.

3.2.43. Koristeći se jednakošću

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt \qquad (|x| < 1), \tag{1}$$

razviti funkciju $x \mapsto \log\dfrac{1+x}{1-x}$ po Taylorovoj formuli i proceniti grešku pri aproksimaciji ove funkcije Taylorovim polinomom.

Stavljajući

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{k+1}{k} \qquad (k \text{ prirodan broj}), \tag{2}$$

dokazati da je

$$\log(k+1) \approx \log k + \frac{2}{2k+1} \tag{3}$$

sa greškom po apsolutnoj vrednosti manjom od $\dfrac{1}{6k(k+1)(2k+1)}$.

Rešenje. Integraleći identitet

$$\frac{2}{1-t^2} = 2\left(1 + t^2 + \cdots + t^{2n-2} + \frac{t^{2n}}{1-t^2}\right)$$

u intervalu $[0, x]$ ($|x| < 1$), dobijamo

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right) + R_n \qquad (|x| < 1), \tag{4}$$

gde je

$$R_n = 2\int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2}\,dt \qquad (|x| < 1) \tag{5}$$

greška pri aproksimaciji funkcije $x \mapsto \log\dfrac{1+x}{1-x}$ ($|x| < 1$) njenim Taylorovim polinomom

$$2\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right).$$

Kako je $|t| \leq |x| < 1$, imamo

$$|R_n| = \left| 2 \int_0^x \frac{t^{2n}}{1-t^2} \, dt \right| \leq \frac{2}{1-x^2} \left| \int_0^x t^{2n} \, dt \right| = \frac{2\,|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

Dakle, apsolutna vrednost greške manja je od $\dfrac{2\,|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}$.

Primećujemo da je, prema (5), greška pozitivna ili negativna prema tome da li je $x > 0$ ili $x < 0$.

Stavljajući $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{k+1}{k}$, dobijamo $x = \dfrac{1}{2k+1}$, tako da je

$$\log \frac{k+1}{k} \approx 2\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{3(2k+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} \right),$$

pri čemu je greška pozitivna i manja od

$$\frac{1}{2(2n+1)k(k+1)(2k+1)^{2n-1}}.$$

Uzimajući samo prvi član ($n = 1$), dobijamo

$$\log \frac{k+1}{k} \approx \frac{2}{2k+1}, \quad \text{tj.} \quad \log(k+1) \approx \log k + \frac{2}{2k+1},$$

pri čemu je greška pozitivna i manja od $\dfrac{1}{6k(k+1)(2k+1)}$.

3.2.44. Aproksimirati funkciju $x \mapsto f(x) = \int_0^x (1+t^4)^{-1/2} \, dt$ u okolini $x = 0$ Taylorovim polinomom T_5 petog stepena i proceniti grešku za $|x| \leq \delta < 1$. U kom intervalu $[-\delta, +\delta]$ je apsolutna vrednost greške aproksimacije manja od $\dfrac{1}{24 \cdot 10^9}$?

Rešenje. Aproksimirajmo najpre funkciju $x \mapsto g(x) = (1+x)^{-1/2}$ u okolini tačke $x = 0$ Taylorovim polinomom prvog stepena. Formula

$$g(x) = g(0) + x\,g'(0) + \frac{x^2}{2!} g''(\theta x) \qquad (0 < \theta = \theta(x) < 1)$$

daje onda jednakost

$$(1+x^4)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{8} \frac{x^8}{(1 + x^4\,\theta(x^4))^{5/2}} \qquad (x \in (-\infty, +\infty)).$$

Integraleći od 0 do x, dobijamo

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^4)^{1/2}} \, dt = x - \frac{1}{10} x^5 + \frac{3}{8} \int_0^x \frac{t^8}{(1 + t^4\,\theta(t^4))^{5/2}} \, dt.$$

Funkcija $x \mapsto x - \dfrac{1}{10} x^5$ je traženi polinom T_5, jer

$$\left| \frac{3}{8} \int_0^x \frac{t^8}{(1+t^4\,\theta(t^4))^{5/2}} \, dt \right| \leq \frac{3}{8} \left| \int_0^x t^8 \, dt \right| = \frac{1}{8 \cdot 3} |x|^9 = o(|x|^5) \qquad (x \to 0).$$

Greška pri aproksimaciji funkcije f polinomom T_5 data je formulom

$$R_5 = \frac{3}{8} \int_0^x \frac{t^8}{(1 + t^2\,\theta\,(t^4))^{5/2}}\, dt.$$

Odatle je, za $|x| \leq \delta$, $|R_5| < \frac{3}{8} \left| \int_0^x t^8\, dt \right| \leq \frac{\delta^9}{24}$.

Da bi bilo $|R_5| < \frac{1}{24 \cdot 10^9}$, dovoljno je da je $\delta < \frac{1}{10}$. Dakle, u intervalu $\left[-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}\right]$ apsolutna vrednost greške aproksimacije je manja od $\frac{1}{24 \cdot 10^9}$.

3.2.45. Odrediti prvih pet članova Taylorovog razvoja funkcije f date sa

$$f(x) = e^x - \frac{a + 2\,b\,x + x^2}{a - 2\,b\,x + x^2} \tag{1}$$

u okolini tačke $x = 0$. Koristeći tako dobijeni razvoj, odrediti a i b tako da funkcija f bude infinitezimala najvišeg mogućeg reda u odnosu na x kada $x \to 0$.

Rešenje. Da bismo dobili Taylorov razvoj funkcije f, primenićemo metodu neodređenih koeficijenata. Stavljajući

$$\frac{a + 2\,b\,x + x^2}{a - 2\,b\,x + x^2} = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + c_4\,x^4 + c_5\,x^5 + \cdots,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} a + 2bx + x^2 &= (a - 2\,bx + x^2)(c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 + c_3\,x^3 + c_4\,x^4 + c_5\,x^5 + \cdots) \\ &= ac_0 + ac_1\,x + ac_2\,x^2 + ac_3\,x^3 + ac_4\,x^4 + ac_5\,x^5 + \cdots \\ &\quad - 2\,bc_0\,x - 2\,bc_1\,x^2 - 2\,bc_2\,x^3 - 2\,bc_3\,x^4 - 2\,bc_4\,x^5 - \cdots \\ &\quad + c_0\,x^2 + c_1\,x^3 + c_2\,x^4 + c_3\,x^5 + \cdots. \end{aligned}$$

Poredeći koeficijente uz iste stepene na levoj i na desnoj strani ove jednakosti, dobijamo sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} a &= a\,c_0, & 0 &= a\,c_3 - 2\,b\,c_2 + c_1, \\ 2\,b &= a\,c_1 - 2\,b\,c_0, & 0 &= a\,c_4 - 2\,b\,c_3 + c_2, \\ 1 &= a\,c_2 - 2\,b\,c_1 + c_0, & 0 &= a\,c_5 - 2\,b\,c_4 + c_3, \end{aligned}$$

čije rešavanje daje

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{4\,b}{a}, \quad c_2 = \frac{8\,b^2}{a^2}, \quad c_3 = \frac{4\,b\,(4\,b^2 - a)}{a^3},$$

$$c_4 = \frac{16\,b^2\,(2\,b^2 - a)}{a^4}, \quad c_5 = \frac{4\,b}{a^5}\,(16\,b^4 - 12\,a\,b^2 + a^2).$$

Na osnovu prethodnog dobijamo sledeći razvoj

$$\begin{aligned} f(x) = &\left(1 - \frac{4\,b}{a}\right) x + \left(\frac{1}{2} - \frac{8\,b^2}{a^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4\,b\,(4\,b^2 - a)}{a^3}\right) x^3 \\ &+ \left(\frac{1}{24} - \frac{16\,b^2\,(2\,b^2 - a)}{a^4}\right) x^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{4\,b}{a^5}\,(16\,b^4 - 12\,a\,b^2 + a^2)\right) x^5 + \cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

Da bi funkcija f bila infinitezimala najvišeg mogućeg reda kad $x \to 0$, konstante a i b treba da budu tako određene da maksimalan broj prvih koeficijenata u razvoju (2) bude jednak nuli.

Izjednačavanje sa nulom prvog koeficijenta daje $a = 4b$. Tada i drugi koeficijent postaje jednak nuli. Izjednačavanjem trećeg člana razvitka sa nulom i vodeći računa o prethodnoj jednakosti $a = 4b$, nalazimo $a = 12$, $b = 3$. Lako se proverava da se ovako određenim vrednostima za a i b anulira i četvrti koeficijent razvoja (2) i da njegov peti koeficijent postaje $1/720$.

Prema tome,

$$e^x - \frac{12 + 6x + x^2}{12 - 6x + x^2} = \frac{x^5}{720} + o(x^5) \qquad (x \to 0),$$

tj. sa ovako određenim vrednostima za a i b funkcija f je infinitezimala petog reda u odnosu na x kad $x \to 0$. Ovaj red je najviši mogućni.

Primedba. Videti sledeći zadatak.

3.2.46. Odredite realne brojeve a, b, c, d tako da granična vrednost

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(e^x - \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}\right)$$

bude konačna.

Rešenje. Prvo imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(e^x - \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5(1 + cx + dx^2)}\left\{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + c\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} + d\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} - 1 - ax - bx^2\right\}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5(1 + cx + dx^2)}\left\{(1 + c - a)x + \left(\frac{1}{2} + c + d - b\right)x^2\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{c}{2} + d\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{c}{6} + \frac{d}{2}\right)x^4 + \left(\frac{1}{120} + \frac{c}{24} + \frac{d}{6}\right)x^5$$

$$\left. + \sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!} + \frac{c}{(n+1)!} + \frac{d}{n!}\right)x^{n+2}\right\}.$$

Na osnovu ovog zaključujemo da granična vrednost postoji ako i samo ako je

$$1 + c - a = 0, \quad \frac{1}{2} + c + d - b = 0, \quad \frac{1}{6} + \frac{c}{2} + d = 0, \quad \frac{1}{24} + \frac{c}{6} + \frac{d}{2} = 0,$$

tj.

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{12}, \qquad c = -\frac{1}{2}, \qquad d = \frac{1}{12}.$$

Tada je

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^5}\left(e^x - \frac{1 + ax + bx^2}{1 + cx + dx^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + cx + dx^2}\left\{\left(\frac{1}{120} + \frac{c}{24} + \frac{d}{6}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{n=4}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+2)!} + \frac{c}{(n+1)!} + \frac{d}{n!}\right)x^{n+2}\right\} = \frac{1}{120} + \frac{c}{24} + \frac{d}{6} = \frac{1}{720}.$$

Primedba. Uporediti sa prethodnim zadatkom.

3.2.47. Ako je

$$(1) \qquad y = \frac{\log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

tada je

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}+xy-1=0, \tag{2}$$

$$(x^2+1)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}+(2n+1)x\frac{d^ny}{dx^n}+n^2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=0 \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{3}$$

Koristeći ovo, dokazati razvoj

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}2^{2n}x^{2n+1} \tag{4}$$

i odrediti poluprečnik konvergencije reda u (4).

Rešenje. Iz (1) neposredno izlazi (2). Diferencirajući (2), dobija se

$$(x^2+1)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+y=0, \tag{5}$$

što predstavlja jednakost (3) za $n=1$. Ako se, zatim, pretpostavi da (3) važi za $n=k$, tj. da je

$$(x^2+1)\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}+(2k+1)x\frac{d^ky}{dx^k}+k^2\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}=0,$$

diferenciranjem ove jednačine dobija se

$$(x^2+1)\frac{d^{k+2}y}{dx^{k+2}}+(2k+3)x\frac{d^{k+1}y}{dx^{k+1}}+(k+1)^2\frac{d^ky}{dx^k}=0.$$

Dakle, tada je (3) tačno i za $n=k+1$. Time je dokazano važenje jednakosti (3) za svako n. Stavljajući u (1) i (3) $x=0$, dobijamo

$$y=0, \qquad \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=-n^2\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Odavde se lako izvodi da je

$$\left.\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}\right|_{x=0}=0, \qquad \left.\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}}\right|_{x=0}=(-2^2)^n(n!)^2 \quad (n=0,1,\ldots).$$

Prema (5), dobijamo za funkciju (1) sledeći razvoj

$$y=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n2^{2n}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \tag{6}$$

Za poluprečnik konvergencije R reda u (6) imamo

$$R=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{2^2}\frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+1)^2}}=1.$$

3.2.48. Razviti funkciju $x\mapsto f(x)=1/(1+x+x^2+x^3)$ u potencijalni red u okolini tačke $x=0$.

Rešenje. Kako se funkcija f može napisati u obliku

$$f(x)=\frac{1-x}{1-x^4} \qquad (x\neq 1), \qquad (1)=\frac{1}{4},$$

dobijamo, za $|x|<1$,

$$f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n}=1-x+x^4-x^5+x^8-x^9+\cdots.$$

3.2.49. Dokazati sledeće razvoje

$$\sin(x+h) = \sin x + h\cos x - \frac{h^2}{2!}\sin x - \frac{h^3}{3!}\cos x + \frac{h^4}{4!}\sin x + \cdots,$$

$$\cos(x+h) = \cos x - h\sin x - \frac{h^2}{2!}\cos x + \frac{h^3}{3!}\sin x + \frac{h^4}{4!}\cos x - \cdots.$$

3.2.50. 1° Razviti funkciju $x \mapsto f(x) = \operatorname{ch} x \cos x$ u potencijalni red.

2° Izračunati vrednost ove funkcije za $x = 1$ sa greškom manjom od 10^{-7}.

Rešenje. Korišćenjem jednakosti $\operatorname{ch} x = \cos(ix)$ posmatrana funkcija može se napisati u obliku

$$f(x) = \cos(ix)\cos x,$$

tj.

$$f(x) = \frac{1}{2}\Big(\cos(1+i)x + \cos(1-i)x\Big),$$

tako da, s obzirom na

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad (|t| < +\infty),$$

dobijamo

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Big((i+1)^{2n} + (i-1)^{2n}\Big)\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Kako je

$$\big((i+1)^2\big)^n + \big((i-1)^2\big)^n = 2^n i^n \big(1 + (-1)^n\big),$$

koeficijenti posmatranog reda za n neparno anuliraju se, tako da dobijamo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{4n}}{(2n)!}.$$

2° **Stavljajući $x = 1$, dobijamo naizmeničan brojni red i apsolutne vrednosti njegovih** članova monotono opadajući teže nuli.

Stoga se ostatak R_n ovog reda može majorirati na sledeći način

$$|R_n| < \frac{4^{n+1}}{(4n+4)!}.$$

Nejednakost $\dfrac{4^{n+1}}{(4n+4)!} < 10^{-7}$ tačna je za $n \geq 3$. Prema tome, sa greškom po apsolutnoj vrednosti manjom od 10^{-7}, imamo

$$\operatorname{ch} 1 \cos 1 \approx 1 - \frac{4}{4!} + \frac{4^2}{8!} - \frac{4^3}{12!} = 0{,}8337303\ldots.$$

Ovaj broj razlikuje se od broja 0,8337300 za manje od $0{,}5 \cdot 10^{-7}$. Kako se, s druge strane, lako može proveriti da je $R_3 < 0{,}5 \cdot 10^{-7}$, dobijamo

$$\operatorname{ch} 1 \cos 1 \approx 0{,}8337300$$

sa apsolutnom vrednošću greške manjom od 10^{-7}.

3.2.51. U okolini $x = 0$ razviti funkciju

$$x \mapsto \int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}\,dx$$

u potencijalni red.

3.2.52. U okolini tačke $x = 0$ razviti funkciju $x \mapsto \log(1/\sqrt{1 - 2x\cos\theta + x^2})$ u potencijalni red i odrediti poluprečnik konvergencije tog reda.

3.2.53. Proveriti razvitak

$$\int_0^t \frac{1}{(1 + x^3)^{1/2}}\, dx = t - \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{t^7}{7} - \cdots \qquad (|t| < 1).$$

Ako se ovaj integral aproksimira zbirom prva tri člana reda na desnoj strani, kolika se greška pri tome čini? Za $t = 1/2$ približno izračunati integral i odrediti gornju granicu apsolutne vrednosti greške.

3.2.54. Proveriti da li je za svako x

$$\exp(e^x) = e + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k, \qquad a_k = \frac{1}{k!}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k}{n!} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Proveriti takođe sledeću rekurentnu formulu

$$k\, a_k = a_{k-1} + \frac{1}{1!}a_{k-2} + \frac{1}{2!}a_{k-3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}a_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

kao i da li je $a_3 = \dfrac{5\,e}{3!}$.

3.2.55. Pokazati da je

$$\exp\left(-\frac{x}{2}\right) \cdot \log\left(1 + \frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \cdots (-2 < x \leq 2)$$

Ispitati da li se ovaj red može napisati u obliku

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x^k \qquad (-2 < x \leq 2),$$

gde je

$$a_k = (-1)^{k+1}\frac{1}{2\,k}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(k-n)!\, n}.$$

3.2.56. Za dovoljno veliko x naći takvu aproksimaciju jednostavnijim izrazom funkcije

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$$

da greška bude infinitezimala oblika $O(x^{-5})$

Rezultat. x^{-1}.

Primedba. Šta se može zaključiti o grešci iz jednakosti

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x + \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})} \qquad (|x| \geq 1),$$

koju prethodno treba proveriti?

3.2.57. Ako važi razvoj

$$x \operatorname{cotg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \qquad (0 < |x| < 2\,\delta),$$

proveriti da li je

$$x \operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - 2^{2n})\, a_n x^{2n} \qquad (|x| < \delta).$$

Na osnovu toga, ili na neki drugi način, dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n} (1 - 2^{2k})\, a_k\, a_{n-k} = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ 0 & (n > 1). \end{cases}$$

3.2.58. Razviti funkciju f datu sa

$$f(x) = \log (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$$

u potencijalan red u okolini $x = 0$.

Uputstvo. Napisati najpre funkciju f u obliku

$$f(x) = \log \frac{1 - x^5}{1 - x} \quad (x \neq 1), \qquad f(1) = \log 5.$$

3.2.59. Dokazati da je

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\cos x)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

i odrediti koeficijente a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3. Naći formulu koja izražava koeficijente b_{n+1} pomoću koeficijenata a_k, b_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Rešenje. Može se ustanoviti da je

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \cdots, \qquad (\cos x)^x = 1 - \frac{1}{2} x^3 + \cdots,$$

gde je poluprečnik konvergencije $\pi/2$*. Stavljajući $g(x) = (\cos x)^x$, imamo

(1) $$g'(x) = g(x)\,(\log \cos x - x \operatorname{tg} x).$$

Kako je

$$(\log \cos x)' = -\operatorname{tg} x = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

dobijamo

$$\log \cos x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1},$$

$$-x \operatorname{tg} x = -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

$$\log \cos x - x \operatorname{tg} x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) a_n x^{n+1},$$

---

* Poluprečnik konvergencije $\pi/2$ određuje se primenom *kompleksne analize*.

tako da jednakost (1) postaje

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, b_n\, x^{n-1} = -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) a_n\, x^{n+1}\right).$$

Poredeći koeficijente uz x^n na obema stranama ove jednakosti, dobijamo

$$-(n+1)\, b_{n+1} = 2\, a_0\, b_{n-1} + \frac{3}{2}\, a_1\, b_{n-2} + \frac{4}{3}\, a_1\, b_{n-2} + \cdots + \frac{n+1}{n}\, a_{n-1}\, b_0.$$

Primenjujući ovu formulu, nalazimo, na primer, $b_4 = 0$, $b_5 = -1/12$. Dobijene formule mogu se uprostiti uočavajući da je $x \to \operatorname{tg} x$ neparna funkcija.

3.2.60. Razviti funkciju $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x^2-2x}}{x^2+1}$ u potencijalni red po $\dfrac{1}{x}$ i dokazati da za dovoljno veliko $x\,(>0)$ važi približna formula

$$\frac{x\sqrt{x^2-2x}}{x^2+1} \approx 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2},$$

gde su a i b brojne konstante koje treba odrediti.

3.2.61. Razviti funkciju $x \mapsto f(x) = \operatorname{sh}(x^2)$ u potencijalni red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ i ispitati konvergenciju tog reda. Dokazati da pri aproksimaciji

$$\operatorname{sh}(4^{-1}) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k\, 4^{-k}$$

važi jednakost

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, 4^{-k} = \frac{\bar{\vartheta}}{(2n+1)!\, 2^{4n}} \qquad \left(\frac{1}{4} < \bar{\vartheta} < 1\right).$$

Rešenje. Kako je

$$\operatorname{sh}(x^2) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} - e^{-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1-(-1)^n\right) \frac{x^{2n}}{n!},$$

dobijamo

(1) $$\operatorname{sh}(x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}.$$

Red (1) konvergira za svako x. Za $x = \dfrac{1}{2}$ nalazimo

$$\operatorname{sh}(4^{-1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!\, 2^{4k-2}}.$$

Za aproksimaciju

$$\operatorname{sh}(4^{-1}) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)!\, 2^{4k-2}},$$

prema Lagrangeovoj formi ostatka primenjenoj na funkcije $x \to e^{x^2}$ i $x \to e^{-x^2}$, dobijamo

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!\, 2^{4k-2}} = \frac{1}{(2n+1)!\, 2^{4n+2}} \left(e^{\frac{\theta}{4}} + e^{-\frac{\vartheta}{4}} \right) (0 < \theta < 1,\ 0 < \vartheta < 1).$$

Odavde je, dalje,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!\, 2^{4k-2}} < \frac{e^{1/4}+1}{(2n+1)!\, 2^{4n+2}} < \frac{1}{(2n+1)!\, 2^{4n}},$$

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!\, 2^{4k-2}} > \frac{1}{(2n+1)!\, 2^{4n+2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{(2n+1)!\, 2^{4n}},$$

tj.

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!\, 2^{4k-2}} = \frac{\bar{\vartheta}}{(2n+1)!\, 2^{4n}} \qquad \left(\frac{1}{4} < \bar{\vartheta} < 1\right).$$

3.2.62. Data je funkcija

$$t \mapsto f(t) = \int_0^t \operatorname{arc\,tg} x \, dx.$$

1° Razviti funkciju f u potencijalan red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ i ispitati konvergenciju ovog reda.

2° Oceniti grešku pri aproksimaciji $f(10^{-1}) \approx \sum_{n=0}^{2} a_n 10^{-n}$.

Rešenje. 1° Kako je

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (|x| < 1),$$

dobijamo

$$\operatorname{arc\,tg} x = \int_0^x \frac{1}{1+u^2} du = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x \leq 1)$$

i dalje

(1)
$$f(t) = \int_0^t \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Poluprečnik konvergencije reda (1) je $R = 1$, stoga što je toliki poluprečnik konvergencije geometrijskog reda od koga smo pošli, ili, direktno, zato što je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left| \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} \right|}{\left| \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)(2n+4)} \right|} = 1.$$

Red (1) konvergira (apsolutno) i za $t = \pm 1$, jer red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},$$

konvergira. Odavde, kako su onda obe strane jednakosti (1) neprekidne funkcije za $|t| \leq 1$, izlazi da (1) važi za svako $t \in [-1, +1]$.

2° Prema prethodnom, imamo

$$f(10^{-1}) \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)\,10^{2n+2}},$$

sa greškom

$$R_2 = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)\,10^{2n+2}}.$$

Odatle,

$$|R_2| < \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 10^8} < 2 \cdot 10^{-10}.$$

3.2.63. Dokazati da je, za $x > 1$,

$$\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \frac{959}{2304}x^5 + \cdots.$$

3.2.64. Dokazati formulu

$$(1+x)^{1+x} = 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0).$$

Dokaz. Koristeći potencijalni razvoj funkcije $x \mapsto \log(1+x)$ u okolini koordinatnog početka $x = 0$ sa Peanoovim oblikom ostatka

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \qquad (x \to 0),$$

dobijamo

$$(1+x)^{1+x} = \exp((1+x)\log(1+x)) = \exp\left((1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\right)$$

$$= \exp\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \qquad (x \to 0).$$

Dalje, kako je

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3) \qquad (u \to 0),$$

imamo

$$(1+x)^{1+x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o\left(\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3\right)$$

$$= 1 + x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) \qquad (x \to 0).$$

3.2.65. Dokazati da je

$$1 + x^{\frac{1}{1-x}} = 1 + x + x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{11}{6}x^4 + \cdots.$$

3.2.66. U obliku potencijalnog reda u okolini početka prikazati eliptički integral prve vrste

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \,\mathrm{d}\theta \qquad (0 < k < 1).$$

Rešenje. Koristeći se formulom

$$(1 + z)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m}{n} z^n \qquad (|z| < 1),$$

dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-k^2 \sin^2 \theta)^n.$$

Kako je

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

imamo dalje

(1)
$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \sin^{2n} \theta.$$

Ovaj red uniformno konvergira za $0 \leq \theta \leq \pi/2$, jer $|\sin^{2n} \theta| \leq 1$ $(0 \leq \theta \leq \pi/2;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$, a red

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$$

konvergira. Stoga se red u (1) može integraliti član po član u granicama od 0 do $\pi/2$. Tako dobijamo

(2)
$$K(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta \,\mathrm{d}\theta.$$

Integral $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \,\mathrm{d}\theta$ zadovoljava rekurentnu formulu

(3)
$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

koja se lako može izvesti parcijalnom integracijom. Pomoću (3) se ustanovljava da je

$$J_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} J_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Zamenjujući ovaj izraz za J_{2n} u (2), dolazimo najzad do traženog razvitka

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 k^{2n} \qquad (0 < k < 1).$$

3.3. SUMIRANJE REDOVA I RAZVIJANJE FUNKCIJA U REDOVE

3.3.1. Odrediti sumu reda $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$.

Rešenje. Pošto je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \frac{1}{n+1} - 1,$$

dobijamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - 1,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = 2\log 2 - 1.$$

3.3.2. Dat je red $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

1° Odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

2° Odrediti izraz za f' u konačnom obliku, pa iz njega izvesti izraz za samu funkciju f.

3° Za $x = 1/2$ sabrati dovoljan broj članova, da bi $f(1/2)$ bilo izračunato sa greškom manjom od 10^{-3}.

3.3.3. Odrediti poluprečnik konvergencije i zbir reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

3.3.4. Dokazati jednakost

$$\int_0^1 \left(-\frac{1}{x^2}\log(1-x) - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

i na osnovu nje izračunati navedeni integral.

3.3.5. Odrediti poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{2n(2n+1)}$ i pokazati da se zbir ovog reda može izraziti u konačnom obliku.

3.3.6. Odrediti poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n\,x^n}{(n+1)(n+3)(n+4)}$ i pokazati da se zbir ovog reda za vrednosti x za koje je konvergentan može izraziti u konačnom obliku.

Rešenje. Pođimo od reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \tag{1}$$

čiji je poluprečnik konvergencije $R = 1$. Iz (1) jedno za drugim dobijamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+1)(n+3)} = -\int_0^x x\log(1-x)\,dx = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\log(1-x),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+4}}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \int_0^x \left\{\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)\log(1-x)\right\}dx$$

$$= -\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3}+\frac{5x^3}{36}-\left(\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{6}\right)\log(1-x),$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3x^2}+\frac{5}{36x}-\left(\frac{1}{3x^4}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{6x}\right)\log(1-x),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{d}{dx}\left\{-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3x^2}+\frac{5}{36x}-\left(\frac{1}{3x^4}-\frac{1}{2x^3}+\frac{1}{6x}\right)\log(1-x)\right\}$$

$$= \frac{48-30x-11x^2}{36x^4}+\frac{8-9x+x^3}{6x^5}\log(1-x),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{48-30x-11x^2}{36x^3}+\frac{8-9x+x^3}{6x^4}\log(1-x). \tag{2}$$

Kako je $R = 1$ poluprečnik konvergencije reda (1), svi ostali redovi koji su navedeni imaju isti poluprečnik konvergencije. Dati red takođe je konvergentan i za $x = \pm R = \pm 1$. Formula (2) izražava sumu datog reda u konačnom obliku (funkcija na desnoj strani te formule nije definisana za $x = 0$ i $x = 1$, pa tada treba naći odgovarajuću graničnu vrednost).

3.3.7. Ako je $|x| < 1$, dokazati da je zbir potencijalnog reda

$$\frac{2^2x^2}{1\cdot 4}+\frac{3^2x^3}{2\cdot 5}+\frac{4^2x^4}{3\cdot 6}+\cdots$$

funkcija f data sa

$$f(x) = \frac{4-x^3}{3x^2}\log(1-x)+\frac{12-6x-2x^2+5x^3}{9x(1-x)} \quad (x \neq 0), \qquad f(0) = 0.$$

3.3.8. Sumirati red $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{k(k+1)}$.

3.3.9. 1° Odrediti poluprečnik konvergencije R binomnog reda

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad (a \text{ realno}).$$

U slučaju kada je R konačno, ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju reda (1) na krajevima intervala konvergencije.

2° Dokazati jednakost

$$(2) \qquad (1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n \qquad (|x|<1 \text{ i } a \text{ realno}):$$

a) korišćenjem Taylorove formule;

b) diferenciranjem reda (1) član po član.

U kojim slučajevima jednakost (2) važi i za $x = 1$, za $|x| = 1$, odnosno za svako $x \in \mathbf{R}$?

Rešenje. 1° Ako je $a \in \mathbf{N}_0$, red (1) očigledno konvergira za svako realno x, tako da je tada $R = +\infty$.

Pod pretpostavkom $a \notin \mathbf{N}_0$, imamo

$$a_n = \binom{a}{n} \neq 0 \qquad (n \in \mathbf{N})$$

i dalje

$$(3) \qquad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{a-n} < 0 \qquad (n > a),$$

$$(4) \qquad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{n+1}{n-a} \qquad (n > a).$$

Prema (4), u ovom slučaju $R = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$, i sem toga, zbog $1-(-a) = 1+a$, za $|x| = 1$ red (1) apsolutno konvergira ako i samo ako je $a > 0$ (Gaussov kriterijum). Iz (3) izlazi da je red (1) za $x = 1$ naizmeničan a za $x = -1$ sa članovima stalnog znaka, ukoliko je $n > a$. Odatle, iz prethodno ustanovljenog i ponovo iz (4), na osnovu 1.2.1.18.2, izlazi da red (1) za $x = 1$ neapsolutno konvergira ili divergira, prema tome da li je $-1 < a < 0$ ili $a \leq -1$, kao i da red (1) za $x = -1$ divergira čim je $a < 0$.

Došli smo, dakle, do sledećeg rezultata:

$$R = \begin{cases} +\infty \ (a \in \mathbf{N}_0) \\ 1 \ (a \notin \mathbf{N}_0); \end{cases}$$

ako je $a > 0$, red (1) apsolutno konvergira za $|x| = 1$;

ako $-1 < a < 0$, red (1) neapsolutno konvergira za $x = 1$, divergira za $x = -1$;

ako $a \leq -1$, red (1) divergira za $|x| = 1$.

2° Neka je $a \notin \mathbf{N}_0$.

a) Primenom Maclaurinove formule, sa Cauchyevim oblikom ostatka, na funkciju $x \mapsto f(x) = (1+x)^a$, za fiksirano $x \in (-1, 1)$, dobija se

(5) $$\left.\begin{aligned} &(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k + R_n, \\ &R_n = a\binom{a-1}{n}(1+\theta_n x)^{a-n-1}(1-\theta_n)^n x^{n+1}, \\ &0 < \theta_n < 1. \end{aligned}\right\} \quad (n \in \mathbf{N})$$

Imamo

(6) $$|R_n| = |ax| \left|\binom{a-1}{n} x^n\right| \cdot \left(\frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x}\right)^n \cdot (1+\theta_n x)^{a-1} = |ax|\, \alpha_n \cdot \beta_n \cdot \gamma_n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Prema prethodnom rezultatu $R = 1$ (ili, direktno, na osnovu činjenice da $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = |x| < 1$), dobijamo

(7) $$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0.$$

Množenje nejednakosti $-1 < x$ sa $\theta_n\,(>0)$ daje $-\theta_n < \theta_n x$, tj. $0 < 1 - \theta_n < 1 + \theta_n x$; odatle, $0 < \frac{1-\theta_n}{1+\theta_n x} < 1$, pa

8) $$0 < \beta_n < 1 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Dalje,

(9) $$|\gamma_n| \le (1 + \theta_n |x|)^{a-1} \le (1+|x|)^{a-1} \qquad (n \in \mathbf{N};\quad a \ge 1).$$

Množenje nejednakosti $\theta_n < 1$ sa $-|x|\,(\le 0)$ daje $-\theta_n |x| \ge -|x|$; odavde, $1 + \theta_n x \ge 1 - \theta_n |x| \ge 1 - |x| > 0$. Stoga,

(10) $$|\gamma_n| \le (1-|x|)^{a-1} \quad (n \in \mathbf{N};\ a < 1).$$

Prema (6), (7), (8), (9) i (10), imamo $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$. Odatle i iz (5) izlazi jednakost (2).

b) Stavimo li $y = y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n$, diferenciranjem ovog reda član po član (na osnovu stava 1.2.4.6) dobijamo:

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{a}{n-1} (a-n+1)\, x^{n-1} \\ &= a \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{a}{n-1} x^{n-1} - x \sum_{n=2}^{+\infty} \binom{a}{n-1} (n-1)\, x^{n-2} \\ &= a \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{a}{n} x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{a}{n} n x^{n-1} = ay - xy' \qquad (|x| < 1), \end{aligned}$$

ili

$$(1+x)\, y' = ay \qquad (|x| < 1).$$

Odavde je, posle integracije,

(11) $$|y| = C(1+x)^a \qquad (|x| < 1).$$

Stavljajući $x = 0$, dobija se $C = 1$, pa (11) postaje

(12) $$|y| = (1+x)^a \qquad (|x| < 1).$$

Kako se, prema (12), funkcija $x \mapsto y(x)$ ne anulira za $|x| < 1$ i kako je ova funkcija za $|x| < 1$ neprekidna, mora biti $y = |y|$ ($|x| < 1$) ili $y = -|y|$ ($|x| < 1$). Druga mogućnost otpada, zbog $y(0) = 1$. Dakle,

$$y = (1 + x)^a \qquad (|x| < 1).$$

Ako je $a = 0$, jednakost (2) trivijalno važi za svako $x \in \mathbf{R}$. Ona važi za svako $x \in \mathbf{R}$ i kada je $a \in \mathbf{N}$ (Newtonova binomna formula). Ovo poslednje može se dokazati primenom, u odgovarajućoj formi, na taj slučaj, bilo rasuđivanja pod a), bilo rasuđivanja pod b).

Korišćenjem neprekidnosti obe strane jednakosti (2) i rezultata dobijenih pod 1°, zaključuje se da (2) važi za $-1 \leq x \leq 1$ kad je $0 < a \notin \mathbf{N}$, za $-1 < x \leq 1$ kad je $-1 < a < 0$, a samo za $-1 < x < 1$ kad je $a \leq -1$.

3.3.10. Izračunati zbir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)(x+k+1)(x+k+2)}$.

Šta se dobija kada $n \to +\infty$?

Rešenje. Opšti član odgovarajućeg reda može se predstaviti u obliku

$$\frac{1}{(x+k)(x+k+1)(x+k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \frac{1}{(x+k+1)(x+k+2)}\right).$$

Po izvršenom sabiranju dobija se

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+n)(x+n+2)}\right).$$

Za $n \to +\infty$ dobija se zbir beskrajnog reda $S = \dfrac{1}{2x(x+1)}$ za $x \neq 0$ i $x \neq -1$.

3.3.11. Dokazati jednakost

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}\cos^2 \dfrac{x}{2^n}} \qquad (x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Uputstvo. Prvo izračunati zbir $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. Može se i iskoristiti jednakost

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{4}{\sin^2 2t} - \frac{1}{\sin^2 t}.$$

3.3.12. Ako je $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s$ $(a_n > 0)$, dokazati da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n}{n(n+1)} = s.$$

3.3.13. Sumirati n prvih članova reda

$$\frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{6}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots.$$

Uputstvo. Poći od opšteg člana $u_n = \dfrac{n+3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \dfrac{1}{3^n}$ predstavljenog u obliku

$$u_n = \frac{1}{2n(n+1)} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Traženi zbir je

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

3.3.14. Proveriti $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\pi} t \sin nt \, dt = \pi \log 2.$

3.3.15. Proveriti $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^n} = \frac{e(e+1)}{(e-1)^3}.$

3.3.16. Sumirati redove:

1° $\quad \dfrac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots,$

2° $\quad \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2!} + \dfrac{3\cdot 5\cdot 7}{4!} + \dfrac{5\cdot 7\cdot 9}{6!} + \cdots.$

Rezultat. 1° Zbir prvih n članova je izraz $n(3n+7)/[2(n+1)(n+2)]$, koji $\to 3/2$, ako $n \to +\infty$.

2° $\dfrac{1}{2}(7e + 4 - e^{-1})$.

3.3.17. Za koje su vrednosti realnog broja t redovi

$$1 + t\cos\theta + t^2 \cos 2\theta + \cdots; \qquad t\sin\theta + t^2 \sin 2\theta + \cdots$$

konvergentni? Sumirati ove redove za slučaj kad su konvergentni.

3.3.18. Sumirati $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k \sin(k-1)a.$

Uputstvo. Poći od

$$\sum_{k=1}^{n} x^k \cos(k-1)a + i \sum_{k=1}^{n} x^k \sin(k-1)a \quad (i \text{ imaginarna jedinica}).$$

Rezultat. $(x\sin a - x^n \sin na + x^{n+1} \sin(n-1)a)/(1 - 2x\cos a + x^2)$.

3.3.19. Sumirati red $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n(n+1)}$ $(x \neq 0)$. Šta se dobija za $x = 1$?

Rešenje. Poći ćemo od identiteta

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{n} - \operatorname{arctg} \frac{x}{n+1} = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 + n(n+1)} \quad (n \geq 1).$$

Za konačan broj m članova dobija se

$$\sum_{n=0}^{m} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n(n+1)} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{m} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n(n+1)}$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{m+1} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x - \operatorname{arctg} \frac{x}{m+1}.$$

Kad $m \to +\infty$, zbir beskrajnog reda je $\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$, pa je

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+1\cdot 2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+2\cdot 3} + \cdots = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

Za $x=1$ je

$$\frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \cdots,$$

tj.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \cdots$$

3.3.20. Sumirati red

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \log \left| 2\cos \frac{a}{2^n} - 1 \right| \qquad \left(a \neq \frac{2^n}{3} (3k \pm 1)\pi,\ n \in \mathbf{N}_0,\ k \in \mathbf{Z} \right).$$

Rešenje. Kako je $(2\cos 2a+1)/(2\cos a+1) = 2\cos a - 1$, dobija se

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \log \left| 2\cos \frac{a}{2^k} - 1 \right| = \log |2\cos 2a + 1| - \log \left| 2\cos \frac{a}{2^n} + 1 \right|,$$

i odatle

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \log |2\cos 2a+1| - \log 3.$$

Primedba. Pokazati da, kad a ispunjava navedeni uslov, svakako mora biti $2\cos 2a + 1 \neq 0$ i prema tome izvedena formula (2) ima uvek smisla pri navedenim uslovima.

3.3.21. Sumirati redove

$$1^\circ \ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}, \qquad 2^\circ \ \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \cdots \quad (|x| \neq 1).$$

3.3.22. Odrediti zbir S reda $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, gde je

$$u_n(x) = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x^n + x^{-n}} - \frac{1}{x^{n+1} + x^{-n-1}} \right),$$

za sve realne vrednosti promenljive x za koje je dati red konvergentan.

Rezultat. $S(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)} \quad (|x| \neq 1).$

3.3.23. Dokazati formulu

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{+\infty} 2^{2\nu} \sin^4 \frac{a}{2^\nu} = a^2 - \sin^2 a.$$

Rešenje. Ako stavimo $a_\nu = 2^{2\nu} \sin^4 \dfrac{a}{2^\nu}$, dobijamo

$$\begin{aligned} a_\nu &= 2^{2\nu} \sin^4 \frac{a}{2^\nu} = 2^2 \sin^2 \frac{a}{2^\nu}\left(1 - \cos^2 \frac{a}{2^\nu}\right) \\ &= 2^{2\nu}\left(\sin^2 \frac{a}{2^\nu} - \sin^2 \frac{a}{2^\nu}\cos^2 \frac{a}{2^\nu}\right) \\ &= 2^{2\nu}\left(\sin^2 \frac{a}{2^\nu} - \frac{1}{2^2}\sin^2 \frac{a}{2^{\nu-1}}\right) \\ &= 2^{2\nu}\sin^2 \frac{a}{2^\nu} - 2^{2(\nu-1)}\sin^2 \frac{a}{2^{\nu-1}}. \end{aligned}$$

Odavde,

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 2^{2n} \sin^2 \frac{a}{2^n} - \sin^2 a \to a^2 - \sin^2 a \qquad (n \to +\infty).$$

Time je dokazana jednakost (1).

3.3.24. Sumirati $1 + \dfrac{2^2 x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{n^2 x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$

Rešenje. Odredimo A_0, A_1, A_2 tako da je

$$(2n)^2 \equiv A_0 + A_1(2n-2) + A_2(2n-2)(2n-3).$$

Neposredno se zaključuje da je $A_2 = 1$. Ako se stavi $n = 1$ i $n = 3/2$, dobija se $A_0 = 4$ i $A_1 = 5$, pa je

$$n^2 \equiv 1 + \frac{5}{4}(2n-2) + \frac{1}{4}(2n-2)(2n-3).$$

Primenom ovog rezultata nalazi se

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 x^{2n-2}}{(2n-2)!} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{5}{4}x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{1}{4}x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-4}}{(2n-4)!} \\ &= \operatorname{ch} x + \frac{5}{4} x \operatorname{sh} x + \frac{1}{4} x^2 \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

Generalizacija. Navedeni postupak može se primeniti na sumiranje redova oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k x^{2n-2}}{(2n-2)!} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Za slučaj $k = 3$ treba $(2n)^3$ izraziti u obliku

$$A_0 + A_1(2n-2) + A_2(2n-2)(2n-3) + A_3(2n-2)(2n-3)(2n-4).$$

Kako je

$$n^3 = 1 + \frac{19}{8}(2n-2) + \frac{9}{8}(2n-2)(2n-3) + \frac{1}{8}(2n-2)(2n-3)(2n-4),$$

dobija se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 x^{2n-2}}{(2n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \frac{19x}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{9x^2}{8}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-4}}{(2n-4)!}$$

$$+ \frac{x^3}{8}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{2n-5}}{(2n-5)!} = \left(1 + \frac{9x^2}{8}\right)\operatorname{ch} x + \left(\frac{19x}{8} + \frac{x^3}{8}\right)\operatorname{sh} x.$$

3.3.25. Odrediti zbir reda

(1) $$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \cdots,$$

ako se zna da je

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2.$$

Rešenje. Uporedo sa redom (1) posmatrajmo red

(3) $$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots$$

koji se dobija iz reda (1) naznačenim grupisanjem članova.

Koristeći se rezultatom (2), dobijamo

(4) $$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\log 2.$$

Parcijalne sume reda (1) i (3) označimo sa S_n odnosno S'_n. Bez teškoća nalazimo

(5) $$S_{3n} = S'_{2n}, \quad S_{3n+1} = S'_{2n} + \frac{1}{2n+1}, \quad S_{3n+2} = S'_{2n+1}.$$

Kako $S'_{2n} \to S$, $S'_{2n+1} \to S$ kad $n \to \infty$, iz (5) dobijamo

$$S_{3n} \to S, \quad S_{3n+1} \to S, \quad S_{3n+2} \to S \quad \text{kad} \quad n \to +\infty, \quad \text{tj.} \quad S_n \to S \quad \text{kad} \quad n \to +\infty.$$

Prema tome, red (1) je konvergentan i njegova suma je takođe $S = \frac{1}{2}\log 2$.

Primedba. Iz (4) bez dopunskih razmatranja nismo mogli zaključiti da je $\frac{1}{2}\log 2$ suma reda (1), jer u opštem slučaju konvergencija reda dobijenog grupisanjem članova nekog reda ne povlači konvergenciju tog reda (1.2.1.21.3).

3.3.26. Odrediti poluprečnik konvergencije i zbir reda

(1) $$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 3x^3 + \frac{1}{4}x^4 + 5x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^{n+1}} x^n.$$

Rešenje. Za $|x| \geq 1$ dati red je divergentan.

Za $|x| < 1$ redovi

(2) $$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 \cdots,$$

(3) $$x + 3x^3 + 5x^5 + \cdots$$

apsolutno su konvergentni.

Dati red (1) je apsolutno konvergentan za $|x| < 1$, jer je ovaj zbir redova (2) i (3).

Za $|x| < 1$ imamo

$$1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{4} x^4 + \cdots = 1 + \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{2} \log(1 - x^2),$$

$$x(1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots) = x \frac{d}{dx}(x + x^3 + x^5 + \cdots) = x \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x^2} = x \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

Zbir reda (1) je

$$S(x) = 1 - \frac{1}{2} \log(1-x^2) + \frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2} \qquad (|x| < 1).$$

3.3.27. Dokazati da je za $|z| < 1$ potencijalni red $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{2n+1}$ rešenje funkcionalne jednačine $f\left(\frac{2z}{1+z^2}\right) = (1+z^2) f(z)$.

Rešenje. Imamo $z f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ tj. $(z f(z))' = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n} = \frac{1}{1-z^2}$ $(|z| < 1)$. Integracijom dobijamo:

$$z f(z) = \int_0^z \frac{1}{1-z^2}\, dz = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Odavde izlazi

$$f(z) = \frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z} \qquad (|z| < 1).$$

Ova funkcija zadovoljava gornju funkcionalnu jednačinu.

3.3.28. Koristeći se jednakošću

(1) $$\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-nt}}{n!} e^{-t}\, dt \qquad (n \in \mathbf{N}_0),$$

sumirati red

(2) $$I(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Rešenje. Na osnovu (1) dobija se

$$I(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-nt}}{n!} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(zte^{-t})^n}{n!} e^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{zte^{-t}} \cdot e^{-t}\, dt.$$

Smenom $e^{-t} = x$ poslednji integral postaje

(3) $$I(z) = \int_0^1 e^{-zx \log x}\, dx.$$

Prema tome, sumu reda (2) izrazili smo pomoću određenog integrala (3). Tako, na primer, za $z = 1$ imamo

$$\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}},$$

tj.

$$\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

3.3.29. Polazeći od integrala

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\, dx \text{ i } J_n = \int_0^1 \frac{x^{3n}}{1+x^2}\, dx,$$

sumirati redove

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \cdots$$

Uputstvo. Da bismo našli S_1, treba upotrebiti rekurentnu formulu $I_n + I_{n-1} = \dfrac{1}{2n-1}$ i dokazati da je

$$I_n = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}\right).$$

3.3.30. Ako se članovi reda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

permutuju tako da grupu p uzastopnih pozitivnih smenjuje grupa q uzastopnih negativnih članova, dokazati da je $\log 2 + \dfrac{1}{2} \log \dfrac{p}{q}$ suma dobijenog reda.

Rešenje. Ako je S_n parcijalna suma dobijenog reda, imamo

$$S_{(p+q)n} = \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{qn} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2pn} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{pn} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{qn} \frac{1}{k}$$

$$= \log 2pn - \frac{1}{2} \log pn - \frac{1}{2} \log qn + o(1)$$

$$= \log 2 + \frac{1}{2} (\log pn - \log qn) + o(1) \to \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{p}{q} \qquad (n \to +\infty).$$

Uočavajući da se parcijalna suma S_n posmatranog reda razlikuje od njegove po indeksu najbliže parcijalne sume oblika $S_{(p+q)n}$ za veličinu koja teži nuli, dolazi se do zaključka da je dobijena granična vrednost i suma posmatranog reda.

3.3.31. Konstruisati grafik funkcije f date sa $f(x) = \sin x^2$, i približno izračunati $\int_0^1 \sin x^2 \,dx$ tako da apsolutna vrednost greške bude manja od 0,001.

Rešenje. Kako je $f(-x) = f(x)$, grafik funkcije f je simetričan u odnosu na y-osu. Kriva seče x-osu u tačkama $x = \pm\sqrt{k\pi}$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Funkcija ima maksimum 1 u tačkama $x = \pm\sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}}$, a minimum -1 u tačkama $x = \pm\sqrt{(4k+3)\frac{\pi}{2}}$. Pored toga kriva ima minimum u tački $O(0, 0)$.

Kako je

$$\sin x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} \qquad (|x| < +\infty),$$

dobija se

$$\int_0^1 \sin x^2 \,dx = \left[\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(2n-1)!\,(4n-1)}\right]_0^1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!\,(4n-1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \cdots.$$

Budući da je dobijeni red naizmeničan kod koga apsolutna vrednost opšteg člana monotono opada i teži nuli i kako je treći član manji od 0,001, približna vrednost integrala sa greškom manjom od 0,001 je

$$\int_0^1 \sin x^2 \,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42}.$$

3.3.32. 1° Ispitati i grafički prikazati funkciju $x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x}\cos x$.

2° Razviti $x \mapsto \cos x$ u Taylorov red u okolini tačke $x = 0$ i, primenjujući ovaj razvoj, predstaviti $x \mapsto g(x) = \int_0^x \sqrt{t}\cos t \,dt$ u obliku potencijalnog reda.

3° Ako se funkcija $g\,(0 \le x \le 1)$ aproksimira sa prva četiri člana razvoja, proceniti grešku. Rezultat primeniti na izračunavanje integrala $g(1)$ i utvrditi sa koliko je tačnih decimala dobijen rezultat.

Rešenje. 1° Funkcija f definisana je za $x \ge 0$. Njene nule su $x = 0$ i $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

Kako je

$$y' = \frac{\cos x - 2x\sin x}{2\sqrt{x}},$$

apscise ekstremnih tačaka možemo dobiti, na primer, grafičkim rešavanjem sistema jednačina

$$y = 2x \quad \text{i} \quad y = \operatorname{cotg} x.$$

2° Kako je

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2\,k)!} \qquad (|x| < +\infty),$$

imamo

$$g(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1/2}}{(2\,k)!}\, dt \Leftrightarrow g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{2\,x^{2k+3/2}}{(2\,k)!\,(4\,k+3)}.$$

3° Dobijeni red je alternativan i za $0 \leq x \leq 1$ njegovi članovi po apsolutnoj vrednosti monotono teže nuli. Stoga je greška R_4 koja nastaje kada se zadrže prva četiri člana ocenjena sa

$$0 < R_4 < \frac{2}{19 \cdot 8!}.$$

Prema tome, ako se uzme

$$g(1) \approx \frac{2}{3} - \frac{2}{7 \cdot 2!} + \frac{2}{11 \cdot 4!} - \frac{2}{15 \cdot 6!} = 0{,}53120009\ldots,$$

dobija se $0 < R_4 < 0{,}0000027$, pa je u ovom rezultatu prvih pet decimala sigurno tačno.

3.3.33. Data je funkcija f pomoću $f(x) = \log \operatorname{ch} x$.

1° Ispitati funkciju f i nacrtati njen grafik.

2° U okolini nule zameniti funkciju f drugom funkcijom g, gde je g Taylorov polinom drugog stepena funkcije f, i koristeći se funkcijom R, datom sa $R(x) = |f(x) - g(x)|$, dokazati da greška te aproksimacije na segmentu $[0, 1]$ ne premaša 0,08.

Rešenje. 1° Funkcija f definisana je za svako realno x i simetrična je u odnosu na ordinatnu osu, jer je $f(-x) = f(x)$.

Kako je

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \{f(x) \mp x\} = -\log 2,$$

prave $y = \pm x - \log 2$ su asimptote krive $y = f(x)$. Uz to je

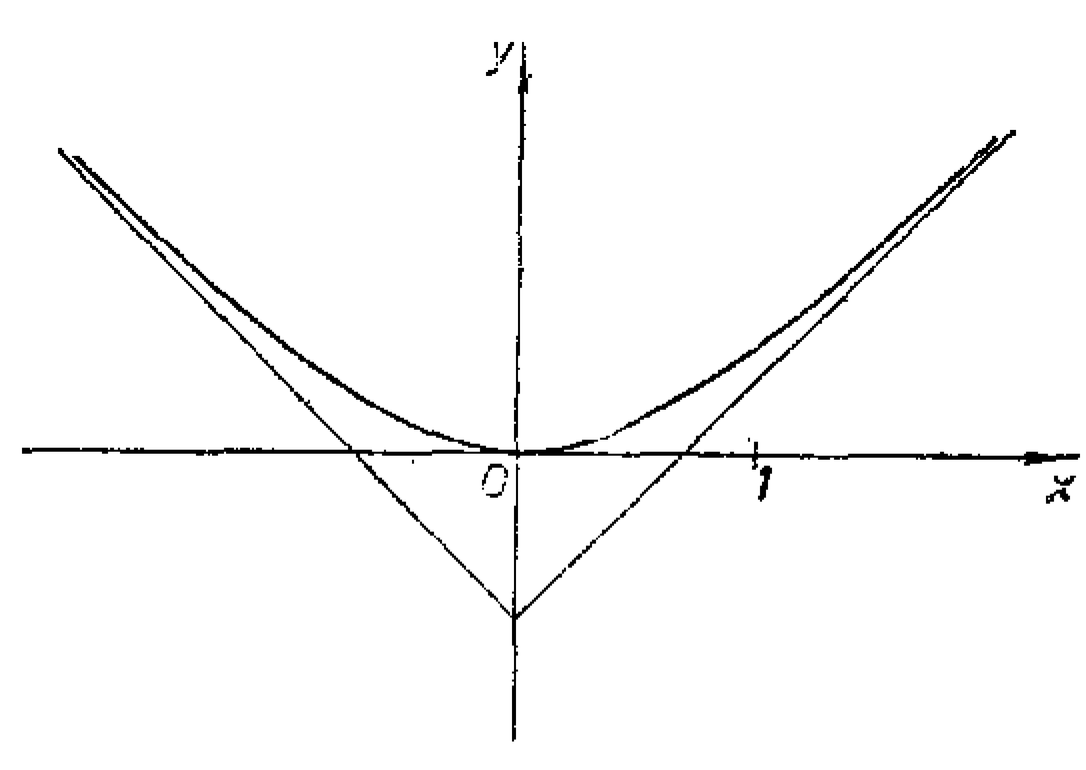
$$f(0) = 0 \quad \text{i} \quad f(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \neq 0.$$

Prvi izvod $f'(x) = \operatorname{th} x$ anulira se za $x = 0$.

Kako je još $f'(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, funkcija f u tački $x = 0$ ima minimum.

Za sve vrednosti x funkcija f je ispupčenjem okrenuta naniže, što sleduje iz nejednakosti

$$f''(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0 \quad \text{za} \quad x \in (-\infty, +\infty).$$



2° Kako je

$$g(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) = \frac{1}{2} x^2,$$

funkcija

$$x \to R(x) = |f(x) - g(x)| = \left| \log \operatorname{ch} x - \frac{1}{2} x^2 \right|$$

je ostatak dobijen prethodnom aproksimacijom. Ona je u intervalu procene greške aproksimacije rastuća, jer je $R'(x) > 0$ za $x \in (0, 1)$, gde je $R'(x) = x - \operatorname{th} x$, pa zato na krajevima tog intervala dostiže svoju najmanju, odnosno najveću vrednost.

Najveća vrednost funkcije R na segmentu $[0, 1]$ je

$$R(1) = \left| \log \frac{e^2+1}{2e} - \frac{1}{2} \right| \approx 0{,}066 < 0{,}08.$$

Primedba. Dokazati da je $\log 2 = \int\limits_0^{+\infty} (1 - \operatorname{th} x)\, dx$, i dati geometrijsko tumačenje ovom rezultatu koristeći se osobinama funkcija f i f'.

3.3.34. Izračunati $\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}\, dx$ sa pet tačnih decimala.

Rešenje. Kako je

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{720} + \cdots,$$

dobijamo

$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}\, dx = \left(x - \frac{x^3}{18} + \frac{x^5}{600} - \frac{x^7}{5040} + \cdots \right) \Bigg|_{x=0}^{x=0,2}$$

$$= 0{,}2 - \frac{0{,}008}{18} + \frac{0{,}00032}{600} - \frac{0{,}0000128}{5040} + \cdots.$$

Ako zadržimo prva tri sabirka, greška je manja od 0,000000003. Stoga je

$$\int\limits_0^{0,2} \frac{\sin x}{x}\, dx = 0{,}19955\ldots$$

3.3.35. Izračunati $\int\limits_0^{0,3} e^{-x^2}\, dx$ sa pet tačnih decimala.

Rezultat. 0,29123 ...

3.3.36. Dat je integral

$$I_n = \int\limits_0^1 x^a (\log x)^n\, dx \qquad (a \geq 0;\ n \text{ prirodan broj}).$$

1° Dokazati rekurentnu relaciju $I_n = -\frac{n}{a+1} I_{n-1}$, i izračunati integral I_n.

2° Polazeći od razvoja funkcije $x \to e^x$ u potencijalni red i primenjujući rezultat iz tačke 1°, izračunati $\int\limits_0^1 x^x\, dx$ na tri tačne decimale.

Rezultat. 1° $I_n = (-1)^n \frac{n!}{(a+1)^{n+1}}$. 2° $\int\limits_0^1 x^x\, dx = \int\limits_0^1 e^{x \log x}\, dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \cdots = 0{,}783\ldots$

3.3.37. Ispitati konvergenciju i naći zbirove sledećih redova

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2\,n)!} \cdot (2\,x)^{2n}; \qquad 2^\circ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2\,n)!}\, x^n.$$

Rešenje. 1° Kako je

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2\,n)!}\, 2^{2n} = \frac{((n-1)!)^2}{2^n\, n!\,(2\,n-1)!!}\, 2^{2n} = \frac{(n-1)!}{n\,(2\,n-1)!!}\, 2^n,$$

možemo pisati

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{n\,(2\,n-1)!!}\, 2^n\, x^{2n}. \tag{1}$$

Prema poznatoj formuli, poluprečnik konvergencije ovog reda je

$$R = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{2\,n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}} = 1.$$

Za $x = \pm 1$ opšti član reda postaje $u_n = 2^n \dfrac{(n-1)!}{n\,(2n-1)\,!!}$, pa iz

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,n+1}{n}\,\frac{n+1}{n} = \frac{2\,n^2+3\,n+1}{2\,n^2},$$

zbog $\dfrac{3}{2} > 1$, izlazi (Gaussov kriterijum) da red za $x = \pm 1$ apsolutno konvergira. Odatle zaključujemo da red apsolutno i uniformno konvergira za $|x| \le 1$.

Za $|x| < 1$ može se prema prethodnom, na osnovu stava 1.2.4.6, desna strana jednakosti (1) diferencirati proizvoljan broj puta član po član. Stoga, za $|x| < 1$,

$$y'' = 4 + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-3)!!}\, 2^n\, x^{2n-2} = 4 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}\, 2^n\, x^{2n} = 4 + xz, \tag{2}$$

gde je

$$z = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}\, 2^n\, x^{2n-1}.$$

Integracijom za $|x| < 1$ dobijamo

$$\int_0^x z\, dx = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\, 2^n\, x^{2n} = xu, \tag{3}$$

gde je

$$u = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\, 2^n\, x^{2n-1}.$$

Ponovnom integracijom dobija se

$$\int_0^x u\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{n\,(2\,n-1)!!}\, 2^n\, x^{2n} = y. \tag{4}$$

Prema (3) i (4),

$$z = (xy')' = y' + xy'',$$

pa jednakost (2) postaje

$$y'' = 4 + xy' + x^2 y''$$

ili

$$(1 - x^2)\, y'' - xy' - 4 = 0, \quad \text{tj.} \quad y'' - \frac{x}{1 - x^2}\, y' - \frac{4}{1 - x^2} = 0.$$

Odavde,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left(C + 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right) = \frac{C}{\sqrt{1 - x^2}} + 4\, \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Stavljajući ovde $x = 0$, dobijamo $C = 0$, jer je

$$y' = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(2n-1)!!}\, 2^n x^{2n-1} = 0 \qquad (x = 0),$$

tako da je

$$y = 2\, (\arcsin x)^2 + C_1.$$

Ako se ponovo stavi $x = 0$, dobija se $C_1 = 0$. Dakle, s obzirom na Abelovu teoremu o neprekidnosti (1.2.4.3),

$$y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big((n-1)!\big)^2}{(2n)!}\, (2x)^{2n} = 2\, (\arcsin x)^2 \qquad (|x| \le 1).$$

2° Kako je

$$\frac{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}}{\dfrac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(2(n+1)\big)!}} = \frac{2n\,(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4 \qquad (n \to +\infty),$$

poluprečnik konvergencije reda datog pod 2° jednak je 4. Za $x = 4$ opšti član reda postaje $v_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\, 4^n$, pa, zbog $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} = \dfrac{n\,(2n+1)}{2\,(n+1)^2} < 1$, red ne konvergira za $x = \pm 4$. Dakle, interval konvergencije je $(-4, +4)$.

Za $0 \le x < 4$ može se staviti

(1) $$x = (2t)^2,$$

pa dobijamo

(2) $$y = 1 + t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 2^{2n} t^{2n-1} = 1 + tz \qquad (|t| < 1),$$

gde je

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\, 2^n t^{2n-1};$$

odavde izlazi

(3) $$\int_0^t z\, dt = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,\big((n-1)!\big)^2}{(2n)!}\, 2^n t^{2n} = \frac{1}{2}\, tu,$$

gde je

$$u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,((n-1)!)^2}{(2n)!} 2^n t^{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2t)^{2n}\right)' = \frac{2\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}};$$

pri čemu je iskorišćen rezultat prve tačke. Prema (2) i (3), za $|t| < 1$ imamo

$$y = 1 + t\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\arcsin t\right)' = 1 + t\left(\frac{\arcsin t}{\sqrt{(1-t^2)^3}} + \frac{t}{1-t^2}\right).$$

Dakle, prema (1), za $x \geq 0$

$$y = \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{3/2}}\arcsin\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{4}{4-x}.$$

Ako je $-4 < x < 0$, stavljajući

(4) $$x = -(2t)^2$$

dobijamo

$$y = 1 + t\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(-1)^n 2^{2n} t^{2n-1} \qquad (|t| < 1)$$

i dalje, na isti način kao u prethodnom slučaju,

(5) $$y = 1 + \frac{1}{2}(tu)' \cdot t,$$

gde

$$u = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(-1)^n (2t)^{2n}\right)'.$$

Postupajući slično kao u prvoj tački, dobijamo za $v = 2u$ diferencijalnu jednačinu

$$v' = -4 - tv - t^2 v', \quad \text{tj.} \quad (1+t^2)\,v' + tv + 4 = 0.$$

Odavde,

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(D - 4\log\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right);$$

zbog $v(0) = 0$, imamo $D = 0$, tj. $v = -\dfrac{4\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)}{\sqrt{1+t^2}}$. Tako, prema (5), imamo

$$y = 1 - t\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\log\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)' = 1 - t\left(\frac{\log(t+1+t^2)}{\sqrt{(1+t^2)^3}} + \frac{t}{1+t^2}\right).$$

Dakle, za $-4 < x < 0$, s obzirom na (4), dobijamo

$$y = -\frac{4\sqrt{-x}}{\sqrt{(4-x)^3}}\log\frac{\sqrt{4-x}+\sqrt{-x}}{4} + \frac{4}{4-x}.$$

3.3.38. Razviti funkcije

1° $x \mapsto e^{x\cdot \operatorname{ch} a}\cdot \operatorname{ch}(x \operatorname{sh} a)$, $\quad 2^\circ$ $x \mapsto e^{x\cdot \operatorname{ch} a} \operatorname{sh}(x \operatorname{sh} a)$ $\quad (a \in \mathbb{R})$,

u potencijalni red u okolini početka.

Rezultat. 1° $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \operatorname{ch}(na)$, 2° $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \operatorname{sh}(na)$.

3.3.39. Sumirati redove

1° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(2n-1)^2 (2n+1)^2}$; 2° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2}$;

3° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 (n+1)^2 (n+2)^2}$.

3.3.40. Sumirati red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$, gde se uzima glavna grana funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$.

3.3.41. 1° Neka je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n+a}{n+b} \qquad (n \in \mathbf{N};\ a \in \mathbf{R},\ b > -1).$$

Dokazati da tada red $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako je $a > b+1$ i sumirati ovaj red ukoliko je poslednji uslov ispunjen.

2° Primeniti prethodni rezultat na redove:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+d)\ldots(a+(n-1)d)}{b(b+d)\ldots(b+(n-1)d)} \quad (a, b, d > 0); \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}.$$

3.4. DVOSTRUKI REDOVI

3.4.1. Odrediti

$$\lim_{\substack{p\to+\infty\\ q\to+\infty}} a_{p,q}, \qquad \lim_{p\to+\infty}\left(\lim_{q\to+\infty} a_{p,q}\right), \qquad \lim_{q\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} a_{p,q}\right)$$

ako je

$$1^\circ\ a_{p,q}=\frac{p\cdot q}{p^3+q^3}; \qquad 2^\circ\ a_{p,q}=\frac{(-1)^p p^2 q^3}{p^3+q^6} \qquad (p, q=1, 2, \ldots).$$

3.4.2. Dokazati da iz apsolutne konvergencije dvostrukog reda $\sum\limits_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ izlazi

$$\lim_{p\to+\infty,\, q\to+\infty} a_{p,q}=0.$$

Rešenje. Apsolutna konvergencija reda $\sum\limits_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q}$ povlači konvergenciju reda $\sum\limits_{p,q=0}^{+\infty} |a_{p,q}|$. Prema odgovarajućem stavu 1.2.1.24.9, za unapred dato $\varepsilon>0$ postoji onda $n_0\in\mathbf{N}$ takvo da je

$$\sum_{p,q=0}^{+\infty} |a_{p,q}|-\sum_{p,q=0}^{n_0} |a_{p,q}|<\varepsilon.$$

Odatle za $\mu>n_0$ ili $\nu>n_0$ imamo

$$|a_{\mu\nu}|=\left(\sum_{p,q=0}^{n_0} |a_{p,q}|+|a_{\mu,\nu}|\right)-\sum_{p,q=0}^{n_0} |a_{p,q}|\le\sum_{p,q=0}^{+\infty} |a_{p,q}|-\sum_{p,q=0}^{n_0} |a_{p,q}|<\varepsilon.$$

Dakle, $\lim\limits_{\mu\to+\infty,\nu\to+\infty} a_{\mu,\nu}=0.$

Primedba. Dokazano je, u stvari, nešto više: da za svako $\varepsilon>0$ postoji $n_0\in\mathbf{N}$, takvo da $\mu>n_0$ ili $\nu>n_0$ povlači $|a_{\mu,\nu}|<\varepsilon$.

3.4.3. Ako postoji broj k takav da je $0<k<1$ i da je $\sqrt[p+q]{|a_{p,q}|}\le k$, sem za konačan broj parova indeksa, dokazati da je dvostruki red

$$(1) \qquad \sum_{p,q=0}^{+\infty} a_{p,q}$$

apsolutno konvergentan. Dokazati i da dvostruki red (1) divergira ako je $\sqrt[p+q]{|a_{p,q}|} \geq 1$ za beskrajno mnogo parova indeksa.

Rešenje. Neka je $\sqrt[p+q]{|a_{p,q}|} \leq k < 1$ sem za konačan broj parova indeksa p i q. Tada je za iste vrednosti indeksa p i q

$$|a_{p,q}| \leq k^{p+q} \qquad (0 < k < 1),$$

pa kako dvostruki red

$$\sum_{p,q=0}^{+\infty} k^{p+q} = \sum_{p=0}^{+\infty} k^p \cdot \sum_{q=0}^{+\infty} k^q$$

konvergira, red (1), prema stavu 1.2.1.24.8, apsolutno konvergira.

Ako je za beskrajno mnogo parova indeksa

$$\sqrt[p+q]{|a_{p,q}|} \geq 1, \quad \text{tj.} \quad |a_{p,q}| \geq 1,$$

tada nije ispunjen potreban uslov za apsolutnu konvergenciju dvostrukog reda (1) (videti primedbu uz rešenje prethodnog problema).

3.4.4. Dokazati da red $\displaystyle\sum_{p,q=1}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha q^\beta}$ apsolutno konvergira kad je $\alpha > 1$, $\beta > 1$, a ne konvergira apsolutno ako taj uslov nije ispunjen.

Rešenje. Tvrđenje izlazi iz činjenice da posmatrani dvostruki red (apsolutno) konvergira ako i samo ako konvergiraju oba reda

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p^\alpha} \quad \text{i} \quad \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q^\beta}.$$

3.4.5. Dokazati da dvostruki red $\displaystyle\sum_{p,q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ apsolutno konvergira za $\alpha > 2$, a ne konvergira apsolutno za $\alpha \leq 2$.

Rešenje. Imamo

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+(n+1-k))^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{n}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}} \qquad (n \to +\infty),$$

pa red dobijen grupisanjem članova jednostrukog reda obrazovanog od posmatranog dvostrukog reda ređanjem njegovih članova po dijagonalama — konvergira ili divergira prema tome da li je $\alpha > 2$ ili $\alpha \leq 2$. Zbog pozitivnosti svih članova dvostrukog reda, odatle neposredno izlazi da i pomenuti jednostruki red, a takođe i posmatrani dvostruki red, apsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $\alpha > 2$ ili $\alpha \leq 2$.

3.4.6. Pomoću dvostrukog reda dokazati jednakost

$$\sum_{p=1}^{+\infty} p\, k^{p-1} = \frac{1}{(1-k)^2} \qquad (|k| < 1).$$

Rešenje. Imamo, za $|k| < 1$,

$$
(1) \qquad
\begin{aligned}
1 + k + k^2 + k^3 + \cdots &= \frac{1}{1-k},\\
0 + k + k^2 + k^3 + \cdots &= \frac{k}{1-k},\\
0 + 0 + k^2 + k^3 + \cdots &= \frac{k^2}{1-k},\\
0 + 0 + 0 + k^3 + \cdots &= \frac{k^3}{1-k},\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Iste ovakve jednakosti važe i sa $|k|$ umesto k. Zbir desnih strana tih jednakosti sa $|k|$ predstavlja konvergentan red. Stoga se sumiranjem jednakosti (1), prema stavu 1.2.1.24.11, dobija

$$1 + 2k + 3k^2 + 4k^3 + \cdots = \frac{1}{1-k} \sum_{\nu=1}^{+\infty} k^{\nu-1} = \frac{1}{(1-k)^2},$$

tj.

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu k^{\nu-1} = \frac{1}{(1-k)^2}.$$

3.4.7. Dokazati da red $\sum\limits_{p,q=0}^{+\infty} x^p y^q$ apsolutno konvergira ako i samo ako je $|x| < 1$, $|y| < 1$ i da njegova suma za te vrednosti x i y iznosi $\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$.

3.4.8. Dokazati da red $\sum\limits_{p,q=0}^{+\infty} \dfrac{x^p y^q}{p!\,q!}$ apsolutno konvergira za svako x i y i da je njegova suma e^{x+y}.

3.4.9. Ispitati za koje vrednosti x i y apsolutno konvergira red

$$\sum_{p,q=0}^{+\infty} (-1)^{p+q} \left(\frac{x^{2p+1} y^{2q}}{(2p+1)!\,(2q)!} + \frac{x^{2p} y^{2q+1}}{(2p)!\,(2q+1)!} \right)$$

i za sve te vrednosti odrediti sumu ovog reda.

3.4.10. Neka je $a > 0$, $b > 0$. Ispitati za koje vrednosti x i y apsolutno konvergira dvostruki red

$$\sum_{p,q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \cdot \frac{x^p y^q}{a^p b^q}$$

i za te vrednosti odrediti sumu ovog reda.

Rešenje. Posmatrani red je apsolutno konvergentan ako i samo ako je to slučaj sa redom

$$\sum_{p,\,q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} \frac{|x|^p\,|y|^q}{a^p\, b^q}$$

Ovaj red sa pozitivnim članovima apsolutno konvergira ako i samo ako je konačan zbir

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{|x|}{a}\right)^{k}\left(\frac{|y|}{b}\right)^{n-k}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}\right)^{n},$$

tj. ako i samo ako je $\frac{|x|}{a}+\frac{|y|}{b}<1$ (videti sliku). Za ove vrednosti x i y imamo

$$\sum_{p,\,q=0}^{+\infty}\frac{(p+q)!}{p!\,q!}\frac{x^{p}y^{q}}{a^{p}b^{q}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{a}\right)^{k}\left(\frac{y}{b}\right)^{n-k}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{n}=\frac{1}{1-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}.$$

3.4.11. Dokazati da je

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}=-2,\qquad \sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}=0,$$

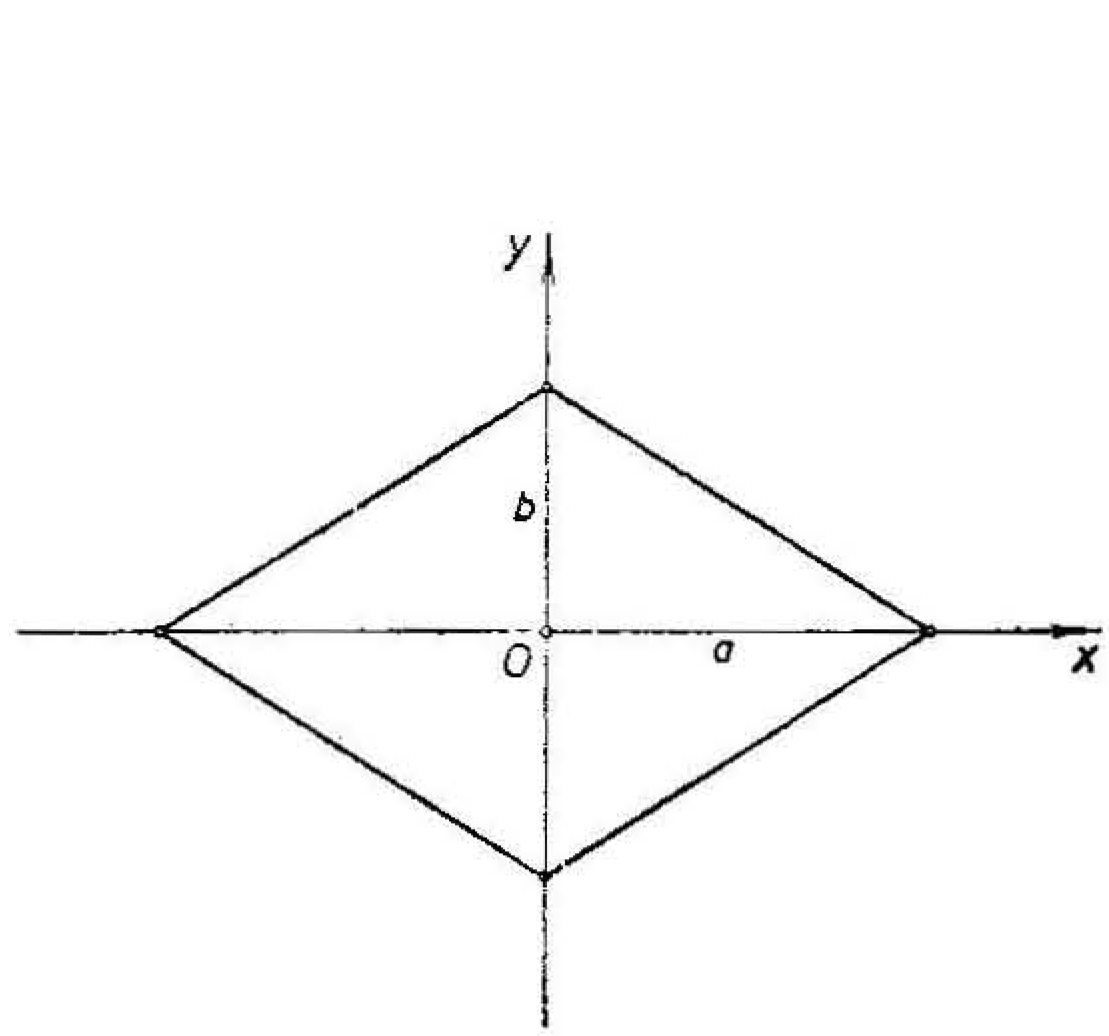
gde je $a_{ij}=0\;(i<j)$, $a_{ij}=-1\;(i=j)$, $a_{ij}=2^{j-i}\;(i>j)$.

Primedba. Ako su $a_{ij}\geq 0$ za svako i i j, tada je

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}a_{ij}=\sum_{j=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{+\infty}a_{ij}.$$

3.4.12. Dvostruki red $\sum\limits_{m,n=0}^{+\infty}a_{m,n}$ ima razvijeni oblik

$$\begin{array}{l}
0+0+0+0+0+0+\cdots\\
-1+1+0+0+0+0+\cdots\\
+0-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+0+0+\cdots\\
+0+0-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0+0+\cdots\\
+0+0+0-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0+\cdots\\
+0+0+0+0-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\cdots\\
+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\cdot\cdot\cdot.
\end{array}$$



Uz zadatak 3.4.10.

1° Dokazati da red $\sum\limits_{m,n=0}^{+\infty}a_{m,n}$ konvergira relativno (videti primedbu na kraju izlaganja pod 1.2.1.24), a ne konvergira apsolutno.

2° Dokazati da je

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} a_{k,p-k} = 0.$$

3.4.13. 1° Dokazati da dvostruki red

$$\begin{array}{rl} & 1+1+1+1+\cdots \\ & +1-1-1-1-\cdots \\ (1) & +1-1+0+0+\cdots \\ & +1-1+0+0+\cdots \\ & +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

čija prva dva reda-vrste i prva dva reda-kolone divergiraju, relativno konvergira ka sumi 2.

2° Dokazati da red formiran od zbirova članova na sporednim dijagonalama u (1) ima zbir različit od 2.

3.4.14. Za dvostruki red $\sum\limits_{m,n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ čiji je razvijeni oblik

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\cdots \\ +\frac{1}{2^2}-\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^2}-\frac{7}{8^2}+\frac{7}{8^2}-\frac{15}{16^2}+\frac{15}{16^2}-\cdots \\ +\frac{1}{2^3}-\frac{3^2}{4^3}+\frac{3^2}{4^3}-\frac{7^2}{8^3}+\frac{7^2}{8^3}-\frac{15^2}{16^3}+\frac{15^2}{16^3}-\cdots \\ +\frac{1}{2^4}-\frac{3^3}{4^4}+\frac{3^3}{4^4}-\frac{7^3}{8^4}+\frac{7^3}{8^4}-\frac{15^3}{16^4}+\frac{15^3}{16^4}-\cdots \\ +\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

dokazati dledeće:

1° Svi redovi-vrste apsolutno konvergiraju i red obrazovan od zbirova ovih redova takođe apsolutno konvergira, pri čemu je

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} = 1.$$

2° Svi redovi-kolone apsolutno konvergiraju, a red obrazovan od zbirova tih redova divergira.

3° Red $\sum\limits_{m,n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ ne konvergira relativno.

3.4.15. 1° Dokazati da je

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+q}\,p\,q}{(p+q)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+q}\,p\,q}{(p+q)^2} = \frac{1}{6}\left(\log 2-\frac{1}{4}\right).$$

2° Dokazati da dvostruki red

$$(1) \qquad \sum_{p,\,q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+q}\, p\, q}{(p+q)^2}$$

ne konvergira relativno. Preciznije, ustanoviti da dvostruki niz

$$s_{m,\,n} = \sum_{p=1}^{m} \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^{p+q}\, p\, q}{(p+q)^2} \qquad (m, n = 1, 2, \ldots)$$

oscilira između granica $\frac{1}{6}\left(\log 2 - \frac{5}{8}\right)$ i $\frac{1}{6}\left(\log 2 + \frac{1}{8}\right)$.

3° Dokazati da niz parcijalnih suma reda formiranog od zbirova članova na sporednim dijagonalama reda (1) oscilira između $-\infty$ i $+\infty$.

3.4.16. Dokazati sledeća dva integralna kriterijuma konvergencije dvostrukog reda sa pozitivnim članovima.

1° Ako je $f(x, y) > 0\,(x \geq 1, y \geq 1)$ i funkcija $(x, y) \mapsto f(x, y)$ opada za $x \geq 1$, $y \geq 1$, posebno po x i posebno po y, tada su red $\sum_{p,\,q=1}^{+\infty} f(p, q)$ i integral $\int_1^{+\infty} \int_1^{+\infty} f(x, y)\, dx\, dy$ ekvikonvergentni.

2° Ako je $f(x, y) > 0$ $(x \geq 1,\ y \geq 1)$ i

$$0 < g(t) \leq f(x, t-x) \leq G(t) \quad (1 \leq x \leq t,\ t \geq 1),$$

gde su $t \mapsto t\, g(t)$ i $t \mapsto t\, G(t)$ za $t \geq 1$ opadajuće funkcije, tada konvergencija integrala $\int_1^{+\infty} t\, G(t)\, dt$ povlači konvergenciju reda $\sum_{p,\,q=1}^{+\infty} f(p, q)$, a divergencija integrala $\int_1^{+\infty} t g(t)\, dt$ povlači divergenciju reda $\sum_{p,\,q=1}^{+\infty} f(p, q)$.

3.4.17. Dokazati Hilbertovu teoremu:

Ako je $a_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, tada važi nejednakost

$$\sum_{p,\,q=1}^{+\infty} \frac{a_p\, a_q}{p+q} \leq A \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2,$$

gde je A apsolutna konstanta.

3.5. BESKONAČNI PROIZVODI

3.5.1. Naći vrednost sledećih beskonačnih proizvoda:

$$1^\circ\ \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right);\quad 2^\circ\ \prod_{n=2}^{+\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1};\quad 3^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{2^n};$$

$$4^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\operatorname{ch}\frac{x}{2^n};\quad 5^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right);\quad 6^\circ\ \prod_{n=0}^{+\infty}(1+x^{2^n})\ \ (|x|<1);$$

$$7^\circ\ \prod_{n=0}^{+\infty}(1+2^{-2^n});\quad 8^\circ\ \prod_{n=3}^{+\infty}\frac{n^2-4}{n^2-1};\quad 9^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right);$$

$$10^\circ\ \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right);\quad 11^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)};$$

$$12^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}\ (a>0);\quad 13^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}};\quad 14^\circ\ \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{3n}{3n-1}\cdot\frac{3n}{3n+1}.$$

Rešenje.

$$1^\circ\ P_n=\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{n}k\right)^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}\qquad(n\to+\infty);$$

odatle,

$$\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

$$2^\circ\ P_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n}(k+1)}\cdot\frac{\prod_{k=2}^{n}((k+1)^2-(k+1)+1)}{\prod_{k=2}^{n}(k^2-k+1)}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{n^2+n+1}{3}\to\frac{2}{3}\qquad(n\to+\infty);$$

dakle,

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

3° Za $x = 0$ vrednost proizvoda je, očigledno, 1

Neka je $x \neq 0$. Ako je $\cos \frac{x}{2^m} = 0$ za neko $m \in \{1, 2, \ldots\}$, tada je vrednost proizvoda 0, a s druge strane, $\frac{x}{2^m} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k ceo broj) i odatle $x = 2^{m-1}(1 + 2k)\pi$, tj. $\sin x = 0$.

Ako je $\cos \frac{x}{2^n} \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tada je $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i stoga

$$\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2^{k-1}}}{\sin \frac{x}{2^k}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \to \frac{\sin x}{x} \qquad (n \to +\infty).$$

Dakle,

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

4° Na sličan način kao u prethodnom slučaju, dolazi se do sledećeg rezultata

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0). \end{cases}$$

5° Imamo

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{2n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2k-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k-1}{2k} = 1,$$

$$P_{2n-1} = P_{2n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2n}} \to 1 \qquad (n \to +\infty);$$

dakle,

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = 1.$$

6° Za $|x| < 1$ imamo

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \prod_{k=0}^{n} \frac{1 - x^{2^{k+1}}}{1 - x^{2^k}} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} \to \frac{1}{1 - x} \qquad (n \to +\infty);$$

odatle,

$$\prod_{k=0}^{+\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1 - x} \qquad (|x| < 1).$$

7° Na osnovu prethodnog rezultata:

$$\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + 2^{-2^n}) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

8° Imamo

$$P_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{k^2-4}{k^2-1} = \prod_{k=3}^{n} \frac{(k-2)(k+2)}{(k-1)(k+1)}$$

$$= \frac{\prod\limits_{k=3}^{n} (k-2) \cdot \prod\limits_{k=3}^{n} (k+2)}{\prod\limits_{k=3}^{n} (k-1) \cdot \prod\limits_{k=3}^{n} (k+1)} = \frac{1 \cdot (n+2)}{(n-1) \cdot 4} \to \frac{1}{4} \qquad (n \to +\infty);$$

dakle,

$$\prod_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1} = \frac{1}{4}.$$

9° Kako je

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k^2+2k+1}{k(k+2)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^2}{k(k+2)}$$

$$\frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)\right)^2}{\prod\limits_{k=1}^{n} k \cdot \prod\limits_{k=1}^{n} (k+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2 \qquad (n \to +\infty),$$

dobijamo

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right) = 2.$$

10° Imamo

$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+2)(k-1)}{k(k+1)}$$

$$= \frac{n+2}{3n} \to \frac{1}{3} \qquad (n \to +\infty)$$

i odatle

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

11° U ovom slučaju,

$$P_n = \frac{3 \cdot (2n+7)}{(2n+3) \cdot 7} \to \frac{3}{7} \qquad (n \to +\infty)$$

i stoga

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{3}{7}.$$

12° Kako je

$$\prod_{k=1}^{n} a^{\frac{(-1)^k}{k}} = a^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}} \to a^{-\log 2} \qquad (a > 0, \quad n \to +\infty),$$

dobijamo

$$\prod_{n=1}^{+\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}} = a^{-\log 2} \qquad (a > 0).$$

13° U ovom slučaju imamo

$$P_n = \frac{e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}}{n+1} = e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n} \cdot \frac{n}{n+1} \to e^{\gamma} \qquad (n \to +\infty),$$

gde je γ Eulerova konstanta. Dakle,

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = e^{\gamma}.$$

14° Na osnovu Stirlingove formule

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n},$$

dobija se

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(3k)^2}{(3k-1)(3k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(3k)^3}{(3k-1)\,3k\,(3k+1)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{3n}(2\pi)^{3/2} n^{3n+3/2} e^{-3n}}{(2\pi)^{1/2}(3n+1)^{3n+1+1/2} e^{-3n-1}}$$

$$= 2\pi e \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{3n} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{3/2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}};$$

dakle,

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3.5.2. Dokazati jednakost (F. Viète)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots.$$

Rešenje. Jednakost neposredno sleduje iz rezultata problema 3.5.1 pod 3°, za $x = \frac{\pi}{2}$.

3.5.3. Dokazati direktno da beskonačni proizvodi $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ i $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ divergiraju.

Dokaz. Imamo

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = n+1 \to +\infty \qquad (n \to +\infty),$$

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{n} \to 0 \qquad (n \to +\infty);$$

dakle,

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty, \qquad \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 0.$$

3.5.4. Dokazati Wallisovu formulu

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

i na osnovu nje dokazati da je

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi},\quad \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Rešenje. Stavimo $I_m=\int_0^{\pi/2}\sin^m x\,dx$. Kako je

$$0<\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{2};\quad n=1,2,\ldots\right),$$

dobijamo

$$0<I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1},$$

i odatle

$$(1)\qquad 1<\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}<\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

gde je iskorišćena rekurentna formula

$$(2)\qquad I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2}\qquad (m=2,3,\ldots).$$

Iz (1) izlazi

$$(3)\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1,$$

a iz (2)

$$(4)\qquad I_{2n}=\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k},\qquad I_{2n+1}=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}.$$

Prema (3) i (4),

$$\frac{\pi}{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\,\frac{2k+1}{2k}=1.$$

Poslednja jednakost može se prikazati u obliku

$$(5)\qquad \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Prema (5), imamo

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{4n^2-1}{4n^2}=\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}=\frac{2}{\pi};$$

zatim:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{2k(2k+2)}{(2k+1)^2}=\frac{\prod_{k=1}^{n}2k\cdot\prod_{k=1}^{n}(2n+2)}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$$

$$=\frac{\prod_{k=1}^{n}2k\cdot\prod_{k=2}^{n+1}2k}{\prod_{k=2}^{n+1}(2k-1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}=\frac{\prod_{k=1}^{n}2k\cdot\prod_{k=1}^{n}2k\cdot\frac{1}{2}\cdot(2n+2)}{\left(\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\right)\cdot(2n+1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\to\frac{1}{2}\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{2k}{2k-1}\cdot\frac{2k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}\quad(n\to+\infty$$

tj.

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Primedba. Wallisova formula (5) može se dokazati korišćenjem Stirlingove formule, na sličan način kao jednakost

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(videti rešenje problema 3.5.1 pod 14°). Ovde je ona izvedena na drugi način stoga što se obično Stirlingova formula dokazuje pomoću Wallisove formule.

3.5.5. Ispitati običnu i apsolutnu konvergenciju sledećih beskonačnih proizvoda:

1° $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^p}\right)$ (p realno); 2° $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^p}\right)$ (p realno);

3° $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{a^n}{2^n}\right)$ (a realno); 4° $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)$ (p realno);

5° $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{\log n}\right)$; 6° $\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$;

7° $\prod_{n=n_0}^{+\infty}\frac{n^2+an+b}{n^2+\alpha n+\beta}$ (a, b, α, β realni brojevi; $n^2+\alpha n+\beta>0$ za $n\geq n_0$);

8° $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$; 9° $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$; 10° $\prod_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n^2]{n}$.

Rešenje. 1° Kako je $\frac{1}{n^p}>0$ ($n\in\mathbf{N}$) i kako red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ apsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $p>1$ ili $p\leq 1$, posmatrani proizvod apsolutno konvergira za $p>1$, a divergira za $p\leq 1$.

2° Kako je $-\frac{1}{n^p}<0$ ($n=2, 3, \ldots$), zaključujemo da posmatrani proizvod apsolutno konvergira ili divergira ka nuli prema tome da li je $p>1$ ili $p\leq 1$.

3° Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{2^n}$ za $|a|<2$ apsolutno konvergira, a niz $\frac{a^n}{2^n}$ za $|a|\geq 2$ ne teži ka nuli. Stoga, posmatrani beskonačni proizvod apsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $|a|<2$ ili $|a|\geq 2$.

4° Za $p\leq 0$ niz $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ ne teži nuli. Za $0<p\leq 1$ red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ neapsolutno konvergira, pri čemu red $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)^2$ konvergira ili divergira prema tome da li je $\frac{1}{2}<p\leq 1$ ili $0<p\leq\frac{1}{2}$. Najzad, za $p>1$ red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ apsolutno konvergira.

Na osnovu prethodnog, beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right)$ apsolutno konvergira za $p>1$, neapsolutno konvergira za $\frac{1}{2}<p\leq 1$, a divergira za $p\leq\frac{1}{2}$, i to ka nuli za $0<p\leq\frac{1}{2}$.

5° Kako red $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$ konvergira, a red $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\log n}\right)^2$ divergira, posmatrani proizvod divergira ka nuli.

6° Kako je $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, posmatrani proizvod apsolutno konvergira.

7° Za $n \geq n_0$ imamo

$$\frac{n^2 + \alpha n + \beta}{n^2 + an + b} = 1 + \frac{(\alpha - a)n + \beta - b}{n^2 + an + b}.$$

Odavde izlazi da posmatrani proizvod apsolutno konvergira ili divergira prema tome da li je $\alpha - a = 0$ ili $\alpha - a \neq 0$. U drugom slučaju, proizvod divergira ka nuli ili ka pozitivnoj beskonačnosti prema tome da li je $\alpha - a < 0$ ili $\alpha - a > 0$.

8° Kako je

$$\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

posmatrani proizvod divergira ka nuli.

9° Kako je

$$0 < \log \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^2}$$

i kako red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, posmatrani proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}}$ je apsolutno konvergentan.

10° Slično kao u prethodnom slučaju, iz

$$0 < \log \sqrt[n^2]{n} = \frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (n \text{ dovoljno veliko})$$

izlazi apsolutna konvergencija beskonačnog proizvoda $\prod_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

3.5.6. Neka je $p_n > 0$, $q_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Da li konvergencija oba proizvoda $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\prod_{n=1}^{+\infty} q_n$ povlači konvergenciju proizvoda:

1° $\prod_{n=1}^{+\infty} (p_n + q_n)$; 2° $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n^2$; 3° $\prod_{n=1}^{+\infty} p_n q_n$; 4° $\prod_{n=1}^{+\infty} \frac{p_n}{q_n}$?

Rešenje. 1° Konvergencija oba proizvoda

$$(1) \qquad \prod_{n=1}^{+\infty} p_n \quad \text{i} \quad \prod_{n=1}^{+\infty} q_n$$

povlači $\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = 1$, tj. $\lim_{n \to +\infty} (p_n + q_n) = 2$, tako da proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty} (p_n + q_n)$ u tom slučaju uvek divergira ka pozitivnoj beskonačnosti.

2°, 3°, 4°. Kako je

$$\log p_n^2 = 2 \log p_n, \quad \log(p_n q_n) = \log p_n + \log q_n, \quad \log \frac{p_n}{q_n} = \log p_n - \log q_n,$$

konvergencija oba proizvoda (1) povlači konvergenciju sva tri proizvoda 2°, 3° i 4°, a apsolutna konvergencija oba proizvoda (1) povlači apsolutnu konvergenciju proizvoda 2°, 3° i 4°.

3.5.7. Ako je $x_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ $(n \in \mathbf{N})$, dokazati da proizvodi

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \cos x_n \quad \text{i} \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x_n}{x_n}$$

apsolutno konvergiraju ili divergiraju ka nuli prema tome da li je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^2$ konvergentan ili divergentan.

Rešenje. Pod prethodnom pretpostavkom o nizu (x_n), za konvergenciju svakog od dva proizvoda neophodno je da bude $x_n = o(1)$ $(n \to +\infty)$. Tvrđenje onda sleduje iz činjenice da je, pod tim uslovom,

$$\cos x_n = 1 - \frac{1}{2} x_n^2 + o(x_n^2), \quad \frac{\sin x_n}{x_n} = 1 - \frac{1}{6} x_n^2 + o(x_n^2) \qquad (n \to +\infty).$$

3.5.8. Ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju sledećih beskonačnih proizvoda:

1° $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$ (p realno); 2° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

3° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}$ (x realno, $c > 0$);

4° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{\log(n+x) - \log n}$ $(x > \cancel{-1})$; /0

5° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$; 6° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{2n}\right)$;

7° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^p$ ($x \neq 0$, p realan broj); 8° $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$;

9° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right)$;

10° $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$.

Rešenje. 1° Kako je

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^p \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-p} = \left(1 - \frac{p}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 - \frac{p}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

proizvod $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$ za svako realno p apsolutno konvergira.

2° Posmatrani proizvod, zbog

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

apsolutno konvergira.

3° Imamo

$$\left(1-\frac{x}{c+n}\right)e^{\frac{x}{n}} = \left(1-\frac{x}{n}\left(1+\frac{c}{n}\right)^{-1}\right)e^{\frac{x}{n}}$$

$$= \left(1-\frac{x}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\left(1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \left(1-\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1+\frac{x}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

pa posmatrani proizvod za svako $c > 0$ i za svako realno x apsolutno konvergira.

4° Sa svakim $x > -1$, red čiji je opšti član, za $n \geq 2$,

$$\log \sqrt[n]{\log(n+x) - \log n} = \frac{1}{n}\log\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim -\frac{\log n}{n} \qquad (n \to +\infty)$$

divergira i ima negativne članove za dovoljno veliko n. Stoga posmatrani proizvod za svako $x > -1$ divergira ka nuli.

5° Kako red sa opštim članom

$$\log \sqrt[n]{n^{(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n}\log n$$

(prema Leibnizovom kriterijumu) neapsolutno konvergira, to i posmatrani proizvod konvergira neapsolutno.

6° Za svako realno x,

$$\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}} = \left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{2n}+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{n}+\frac{x^3}{n\sqrt{n}}+\frac{x^4}{4n^2}\right)\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

Stoga posmatrani proizvod apsolutno konvergira za svako realno x.

7° Pretpostavimo da je $\sin\frac{x}{n} \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, tj. $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. Tada

$$\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 \sim -\frac{\frac{x^3}{3n^3}}{\frac{x}{n}} = -\frac{1}{3}\frac{x^2}{n^2} \qquad (n \to +\infty)$$

i stoga proizvod $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}$, pa i posmatrani proizvod za svako realno p, apsolutno konvergira.

Ako je $x \in \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, za dovoljno veliko n je $\sin \frac{x}{n} \neq 0$, pa za $p > 0$ posmatrani proizvod ponovo konvergira, a nije definisan za $p \leq 0$.

8° Beskonačni proizvod čiji je n-ti faktor

$$\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

divergira ka nuli, jer red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergira, a red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2$ divergira. Odatle izlazi da beskonačni proizvod $\prod\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ divergira ka $+\infty$.

9° Kako je

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1, \text{ za } n = 4k \text{ ili } n = 4k - 3 \\ -1, \text{ za } n = 4k - 1 \text{ ili } n = 4k - 2 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

i stoga

$$\left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| \leq 1 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}$, prema Dirichletovom kriterijumu, neapsolutno konvergira. Kako red s opštim članom

$$\left(\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

konvergira, posmatrani proizvod neapsolutno konvergira.

10° Red

$$(1) \qquad \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{4n+1}} + \cdots$$

neapsolutno konvergira. Zaista, ako je S_n njegova n-ta parcijalna suma, imamo

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{4k+1}}\right),$$

pa kako

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{4k+1}} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(2 - \left(1 - \frac{1}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{1}{4k}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{k}} \left(2 - 1 - \frac{1}{8k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) - 1 + \frac{1}{8k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{k^2\sqrt{k}}\right),$$

S_{3n} konvergira. Odatle izlazi konvergencija reda (1), budući da njegov opšti član teži nuli. Kako red čiji su članovi kvadrati članova reda (1), tj. red

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} + \cdots,$$

divergira, zaključujemo da posmatrani proizvod divergira ka nuli.

3.5.9. Dokazati jednakost

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})} \qquad (|x| < 1).$$

***Rešenje* 1.** Oba proizvoda, a takođe i svi proizvodi koje dobijamo u sledećem postupku apsolutno konvergiraju. Stoga,

$$\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^n} = \frac{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n})}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^n)}$$

$$= \frac{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n})}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})}.$$

***Rešenje* 2.** Stavimo

$$f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^n) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1}) \qquad (|x| < 1).$$

S obzirom na apsolutnu konvergenciju svih sledećih beskonačnih proizvoda, za $|x| < 1$ imamo

$$f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^{2n-1}) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - x^{2n-1})$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^{2n}) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + x^{2n-1}) (1 - x^{2n-1})$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty} \big(1 + (x^2)^n\big) \cdot \prod_{n=1}^{+\infty} \big(1 - (x^2)^{2n-1}\big) = f(x^2)$$

i odavde $f(x) = f(x^{2^n})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tj. kako je funkcija f neprekidna u tački $x = 0$ (uniformna konvergencija oba beskonačna proizvoda za $|x| \leq r < 1$),

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x^{2^n}) = f\big(\lim_{n \to +\infty} x^{2^n}\big) = f(0) = 1 \qquad (|x| < 1).$$

Odatle neposredno izlazi jednakost koju dokazujemo.

3.5.10. Dokazati da niz

$$a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

konvergira ka konačnoj pozitivnoj granici. Izvesti odatle Stirlingovu formulu u obliku

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \qquad (n \to +\infty).$$

Rešenje. Imamo

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = e \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{(k+1)!\, e^{k+1}}{(k+1)^{k+1+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{k^{k+\frac{1}{2}}}{k!\, e^k} \right)$$

$$= e \prod_{k=1}^{n} \left(e \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k-\frac{1}{2}} \right),$$

tako da je za dokaz tvrđenja o nizu a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ dovoljno ustanoviti da beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty} e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}$ konvergira. To izlazi iz

$$\log \left(e \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \to +\infty).$$

Dakle, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a \in (0, +\infty)$ i odatle

(1) $$n! = a \cdot n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \alpha_n \; (n = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 1.$$

S druge strane, kako je

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2 (2n+1)}$$

$$= \frac{((2n)!!)^4}{((2n-1)!!\,(2n)!!)^2 (2n+1)} = \frac{2^{4n} (n!)^4}{((2n)!)^2 (2n+1)},$$

iz Wallisove formule $\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$ izlazi

(2) $$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!\, n^{1/2}}.$$

Ako se na desnoj strani jednakosti (2) oba faktorijela zamene odgovarajućim vrednostima datim sa (1), dobija se

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n} a^2 n^{2n+1} e^{-2n} \alpha_n^2}{a \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \alpha_{2n} n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a\, \alpha_n^2}{\alpha_{2n}^2} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

tj. $a = \sqrt{2\pi}$.

Iz prethodnog izlazi

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \qquad (n \to +\infty).$$

3.5.11. Dokazati da beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$, gde je

$$u_{2k-1} = -\frac{1}{\sqrt{k}}, \qquad u_{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

konvergira, mada oba reda $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ divergiraju.

Rešenje. Divergencija oba reda $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$ izlazi iz

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (u_{2k-1} + u_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k^2 > \sum_{k=1}^{n} u_{2k-1}^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

S druge strane, ako se sa P_n označi n-ti parcijalni proizvod beskonačnog proizvoda $\prod_{n=1}^{+\infty} (1+u_n)$, imamo

$$P_{2n} = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_{2k-1})(1 + u_{2k}) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \to \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \in (0, +\infty) \qquad (n \to +\infty),$$

jer proizvod $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)$ konvergira. Kako još

$$P_{2n-1} = \frac{P_{2n}}{1 + u_{2n}} = \frac{P_{2n}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}} \to \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

zaključujemo da je beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$ konvergentan.

3.5.12. Dokazati da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} (x^2 - k^2)$ za neku necelu vrednost $x = x_0$ povlači njegovu konvergenciju za svako realno x.

Rešenje. Neka broj x_0 nije ceo i neka je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \prod_{k=1}^{n} (x_0^2 - k^2)$ konvergentan. Za bilo koje fiksirano realno x tada je niz

$$(1)\qquad \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2-k^2)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x_0{}^2-k^2)}\qquad (n=1,2,\ldots)$$

stalno definisan. Kako je $\dfrac{x^2-n^2}{x^2{}_0-n^2}$ za dovoljno veliko n pozitivno i veće ili manje od 1 prema tome da li je $|x|<|x_0|$ ili $|x|>|x_0|$, niz (1) je za dovoljno veliko n monoton. Kao niz parcijalnih proizvoda beskonačnog proizvoda

$$(2)\qquad \prod_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2-n^2}{x_0{}^2-n^2},$$

niz (1) je ograničen, jer (2), zbog

$$\frac{x^2-n^2}{x_0{}^2-n^2}=1-\frac{x_0{}^2-x^2}{n^2-x_0{}^2},$$

konvergira. Na osnovu prethodnog, red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}(x^2-k^2),$$

čiji se n-ti član može izraziti u obliku

$$a_n\prod_{k=1}^{n}(x_0{}^2-k^2)\cdot\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}(x^2-k^2)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x_0{}^2-k^2)},$$

prema Abelovom stavu, konvergira.

3.5.13. Neka je p_n $(n=1,2,\ldots)$ niz svih prostih brojeva većih od 1 i poređanih po veličini (dakle: $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5,\ldots$).

1° Dokazati da je

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n{}^x}\right)^{-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\qquad (x>1).$$

2° Dokazati da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p_n}$ divergentan.

Primedba. Oba ova rezultata potiču od Eulera.

Rešenje. 1° Kako je $p_k{}^x\geq 2$ $(k=1,2,\ldots;\ x\geq 1)$, imamo

$$\left(1-\frac{1}{p_k{}^x}\right)^{-1}=1+\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{1}{(p_k{}^\nu)^x}\qquad (k=1,2,\ldots;\quad x\geq 1).$$

Odavde, prema odgovarajućim rezultatima o množenju redova i o dvostrukim redovima sa pozitivnim članovima, izlazi

$$(1)\qquad \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{p_k{}^x}\right)^{-1}=\sum_{\nu=1}^{+\infty}{}'\,\frac{1}{\nu^x}=\sum_{\nu=1}^{p_n}\frac{1}{\nu^x}+\sum_{p_n+1}^{+\infty}{}'\,\frac{1}{\nu^x}\qquad (n=1,2,\ldots;\ x\geq 1)$$

gde znak $'$ uz zbir označava da se sabiranje vrši samo preko jedinice i onih prirodnih brojeva ν koji predstavljaju proizvode stepena prostih brojeva $p_1, \ldots, p_n$. Svi prirodni brojevi koji ispunjavaju uslov $1 < \nu \leq p_n$ imaju, naravno, tu osobinu; ovo opravdava drugu jednakost u (1). Iz (1) izlazi da je, za $x > 1$,

$$0 < \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{\,x}}\right)^{-1} - \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{1}{k^x} = \sum_{\nu=p_n+1}^{+\infty}{}' \frac{1}{k^x} < \sum_{\nu=p_n+1}^{+\infty} \frac{1}{\nu^x} \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

ν

tj.

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^{\,x}}\right)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k^{\,x}}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{1}{\nu^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

2° Iz jednakosti (1), sa $x = 1$, izlazi

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1} > \sum_{\nu=1}^{p_n} \frac{1}{\nu} \to +\infty \qquad (n \to +\infty),$$

što znači da beskonačni proizvod

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

divergira ka nuli. Ovo povlači divergenciju reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n}$.

3.5.14. Dokazati da za svako realno (ili kompleksno) x važe jednakosti

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \qquad \cos x = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4\,x^2}{(2\,n-1)^2 \pi^2}\right).$$

Rešenje. Iz Moivreove formule

$$\cos mt + i \sin mt = (\cos t + i \sin t)^m \quad (t \text{ realno; } m \text{ prirodan broj})$$

izlazi

$$\sin(2\,n+1)\,t = (2\,n+1) \cos^{2n} t \sin t - \binom{2\,n+1}{3} \cos^{2n-2} t \sin^3 t + \cdots,$$

tj.

(1) $$\sin(2\,n+1)\,t = \sin t \, P(\sin^2 t) \qquad (t \text{ realno; } n \text{ prirodan broj})$$

gde je $P(u)$ polinom stepena $\leq n$. Kako se leva strana anulira kad t uzima vrednosti

$$t_k = \frac{k\,\pi}{2\,n+1} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

koje sve pripadaju intervalu $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, prema (1) brojevi

$$u_k = \sin^2 t_k \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

su međusobno različite nule polinoma $P(u)$. Odatle,

$$P(u) = A \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{u}{\sin^2 t_k}\right)$$

i dalje, prema (1),

(2) $$\sin(2n+1)t = A\sin t\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Očigledno,

$$A = \lim_{t\to 0}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} = 2n+1.$$

Sa ovom vrednošću za A i posle smene

$$t = \frac{x}{2n+1} \qquad (x \textbf{ realno}),$$

(2) postaje

(3) $$\sin x = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{n=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right) \qquad (x \text{ realno};\ n = 1, 2, \ldots).$$

Neka je, za fiksirano realno x, $m \in \mathbf{N}$ takvo da je $(m+1)\pi > |x|$ i neka je $n > m$. Onda se (3) može pisati u obliku

(4) $$\sin x = P_m^{(n)}\,Q_m^{(n)},$$

gde je

$$P_m^{(n)} = (2n+1)\sin\frac{x}{2n+1}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right),$$

$$Q_m^{(n)} = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\dfrac{x}{2n+1}}{\sin^2\dfrac{k\pi}{2n+1}}\right).$$

Sa tako fiksiranim m je

(5) $$\lim_{n\to+\infty} P_m^{(n)} = x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Pretpostavimo sada da je

(6) $$x \notin \{k\pi : k = 0, \pm 1, \ldots\}.$$

Iz (4) i (5) izlazi da

(7) $$\lim_{n\to+\infty} Q_m^{(n)} = Q_m$$

postoji i ima konačnu vrednost za svako m koje dolazi u obzir. Zbog (6) i $|x| < (m+1)\pi$, važi

$$0 < \frac{|x|}{2n+1} < \frac{k\pi}{2n+1} \leq \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2} \qquad (k = m+1, \ldots, n);$$

odatle i prema poznatoj dvostrukoj nejednakosti

$$\frac{2}{\pi} u < \sin u < u \quad \left(0 < u < \frac{\pi}{2}\right),$$

imamo

$$1 > Q_m^{(n)} > \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{\dfrac{x^2}{(2n+1)^2}}{\dfrac{4}{\pi^2} \cdot \dfrac{k^2 \pi^2}{(2n+1)^2}} \right) = \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right).$$

Odavde, budući da proizvod $\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right)$ konvergira, dobijamo, puštajući da $n \to +\infty$,

(8) $$1 \geq Q_m \geq \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right).$$

Kako je, dalje

$$\lim_{m \to +\infty} \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4k^2}\right) = 1,$$

zaključujemo prema (8) da je

(9) $$\lim_{m \to +\infty} Q_m = 1.$$

Prema (4), (5) i (7), dobijamo

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) \cdot Q_m,$$

i odatle, s obzirom na (9), izlazi

(10) $$\sin x = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Ova jednakost, izvedena pod pretpostavkom (6), važi očigledno i kada se ta pretpostavka odbaci.

Jednakost

(11) $$\cos x = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right)$$

dokazuje se jednostavno na osnovu jednakosti (10) i identiteta $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.

Važenje jednakosti (10) i (11) za svako kompleksno x izvodi se, u kontekstu teorije analitičkih funkcija, iz njihovog važenja na realnoj osi i iz činjenice da su obe strane ovih jednakosti cele funkcije.

3.5.15. Funkcija $x \mapsto \Gamma(x)$, takozvana »*gama funkcija*«, definiše se za svako realno x iz skupa

(1) $$S = (0, +\infty) \cup \bigcup_{k=-\infty}^{0} (k-1, k),$$

na primer, sledećom jednakošću

(2) $$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x \prod_{k=1}^{n} (x+k)}.$$

1° Koristeći pogodan beskonačni proizvod, dokazati da limes u (2) ima konačnu vrednost za svako $x \in S$, tj. da jednakost (2) zaista definiše realnu funkciju $x \mapsto \Gamma(x)$ na skupu S. Dokazati potom jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), && (3)\\ &\frac{1}{\Gamma(x)} = x\, e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}} && (4)\end{aligned}\right\} \quad (x \in S),$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{5}$$

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad \left(x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (k-1, k)\right).$$

Ovde je γ Eulerova konstanta (1.1.2.23.2).

2° Dokazati da funkcija $x \mapsto \Gamma(x)$ ima u skupu S sve izvode i da važi jednakost

$$\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \qquad (x \in S). \tag{6}$$

3° Ispitati tok i približno nacrtati grafik funkcije $x \mapsto \Gamma(x)$.

Rešenje. 1° Za svako $x \in S$ je

$$\frac{n!\, n^x}{x \prod_{k=1}^{n} (x+k)} = \frac{1}{x}\, e^{x\left(\log n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)} \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} e^{\frac{x}{k}}.$$

Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} e^{x\left(\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)} = e^{x \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\log n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)} = e^{-\gamma x} \quad (x \in S).$$

Zatim,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}} = \left(1 - \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1 + \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (x \in S;\, n \to +\infty),$$

tako da, s obzirom na činjenicu da je $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-1}$ konačno i različito od nule za svako $x \in S$ i $n \in \mathbf{N}$, proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}}$ konvergira za $x \in S$.

Prema prethodnom, za svako $x \in S$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^x}{x\prod_{k=1}^{n}(x+k)} = \frac{1}{x}\, e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}}$$

ima konačnu vrednost koja je različita od nule. Time je dokazano prvo tvrđenje pod 1° i ujedno dobijena sledeća reprezentacija gama funkcije

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}} \qquad (x \in S). \tag{7}$$

Prema (2), imamo

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^{x+1}}{(x+1) \prod\limits_{k=1}^{n} (x+1+k)} = x \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{n!\, n^x}{x \prod\limits_{k=1}^{n} (x+k)} \cdot \frac{n}{x+1+n}$$

$$= x\,\Gamma(x) \qquad (x \in S).$$

Jednakost (4) izlazi neposredno iz (7), s obzirom na okolnost da je, prema gornjem tvrđenju o beskonačnom proizvodu u (7), $\Gamma(x) \neq 0$ $(x \in S)$.

Rezultat (5) se, pomoću jednakosti (3), dokazuje matematičkom indukcijom.

Ako $x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (k-1, k)$, tada $x \in S$ i $-x \in S$, pa prema (3), (7) i jednakosti (10) iz 3.5.14, dobijamo

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \Gamma(x) \cdot (-x)\,\Gamma(-x)$$

$$= \frac{1}{x} e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{\frac{x}{n}} \cdot (-x) \frac{1}{-x} e^{-\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1} e^{-\frac{x}{n}}$$

$$= \frac{\pi}{\pi x \prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)} = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad \left(x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} (k-1, k)\right).$$

2° Za $x > 0$ je, prema napred ustanovljenom, $\Gamma(x) \neq 0$ i osim toga je svaki faktor beskonačnog proizvoda u (7) pozitivan. Odatle izlazi $\Gamma(x) > 0$ $(x > 0)$.

Odavde se pomoću formule (3) izvodi da je u intervalima

$$(-1, 0), \quad (-2, -1), \quad (-3, -2), \quad (-4, -3), \ldots$$

funkcija Γ naizmenično negativna i pozitivna.

Neka je $[a, b]$ ograničen interval sadržan u skupu S. Ovaj interval je sadržan ili u $(0, +\infty)$ ili u jednom od intervala $(k-1, k)$ $(k = 0, -1, -2, \ldots)$. Za $x \in [a, b]$ je, prema (7),

$$\log|\Gamma(x)| = -\log|x| + \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} + \log n - \log|n+x|\right). \tag{8}$$

S obzirom na prethodne rezultate, red u (8) konvergira za $x \in [a, b]$ i svaki znak apsolutne vrednosti u (8) može se u čitavom intervalu $[a, b]$ ili ukloniti ili zameniti znakom »—« ispred tim znakom obuhvaćenog izraza. Svi članovi diferenciranog reda u (8)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$$

neprekidne su funkcije u $[a, b]$ i ovaj red u $[a, b]$ uniformno konvergira, prema Weierstrassovom kriterijumu. Zaista, ako $[a, b] \subset (0, +\infty)$, tada je

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right| = \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| = \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n^2} \qquad (x \in [a, b];\ n \in \mathbf{N}),$$

a ako $[a, b] \subset [k-1, k]$, za $k \in \{0, -1, \ldots\}$, tada je

$$\left|\frac{x}{n(n+x)}\right| \leq \frac{|x|}{n(n-|x|)} \leq \frac{|a|}{n(n-|a|)} \qquad (x \in [a, b];\quad n = |k|+1, |k|+2, \ldots).$$

Dakle, na osnovu stava o diferenciranju funkcionalnih redova,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = (\log|\Gamma(x)|)' = -\frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \qquad (x \in S).$$

Odavde je dalje, uz slično obrazloženje,

$$\frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right)^2 = (\log|\Gamma(x)|)'' = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \qquad (x \in S).$$

Kako svi redovi

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(m-1)!}{(n+x)^m} \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

uniformno konvergiraju u svakom intervalu $[a, b]$ i članovi su im u $[a, b]$ neprekidne funkcije, dalje se ustanovljava da je

$$(\log|\Gamma(x)|)^{(m)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^m(m-1)!}{(n+x)^m} \qquad (x \in S;\ m = 2, 3, \ldots).$$

Indukcijom se dokazuje da za svaku funkciju $x \mapsto f(x)$ važi

$$(\log|f(x)|)^{(m)} = \frac{f^{(m)}(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)^m}\ P_m\big(f(x), f'(x), \ldots, f^{(m-1)}(x)\big) \quad (m = 2, 3, \ldots),$$

gde je $(u_1, \ldots, u_m) \mapsto P_m(u_1, \ldots, u_m)$ polinom. Odatle i iz prethodnog sleduje egzistencija svih izvoda funkcije Γ na skupu S.

3° Kako je, prema (5), $\Gamma(1) = 1$, iz (3) se izvodi

$$\Gamma(x) \to +\infty \qquad (x \to +0)$$

i dalje, indukcijom,

$$|\Gamma(x)| \to +\infty \qquad (x \to k;\quad k = 0, -1, -2, \ldots).$$

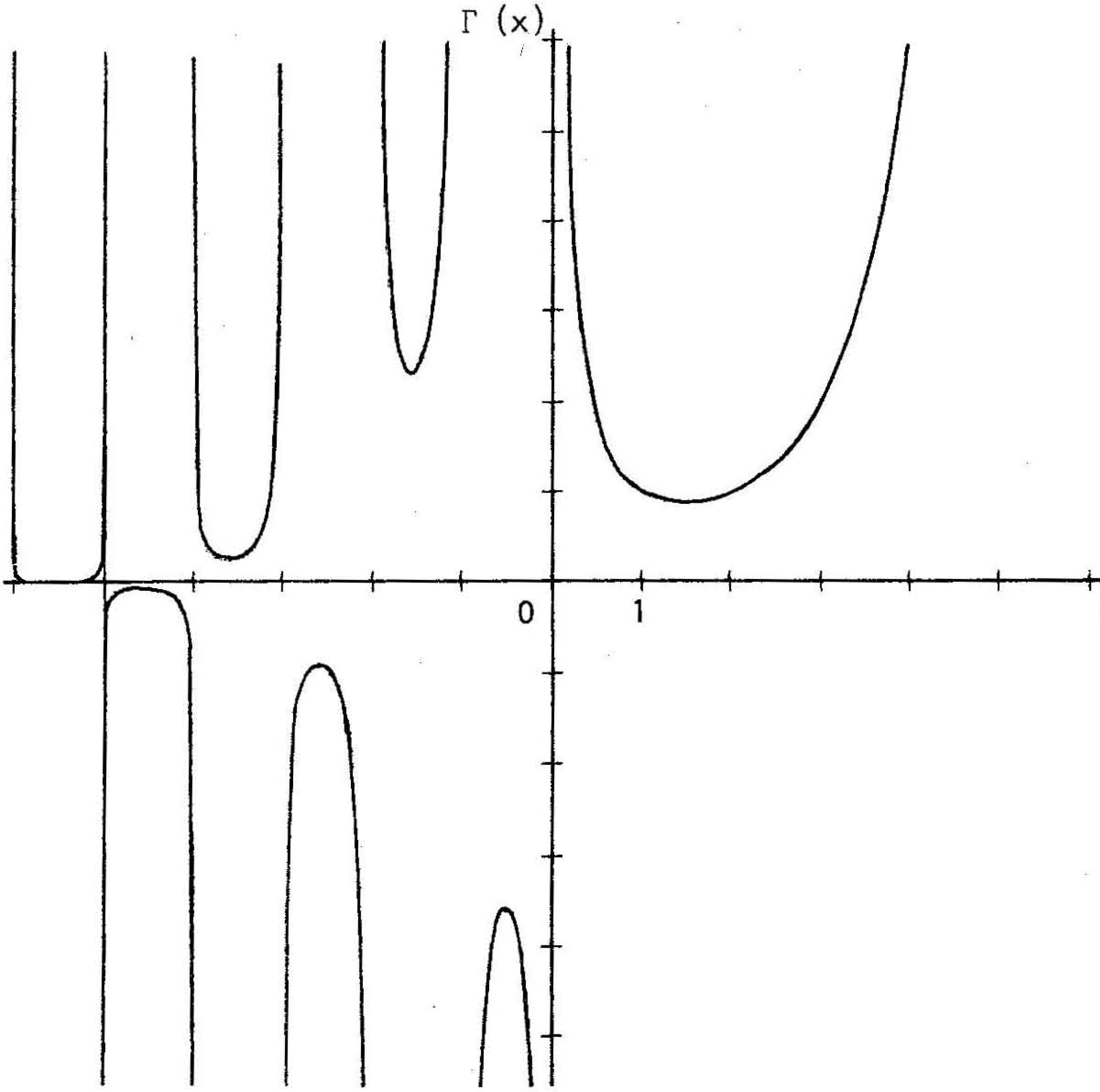
Prema (6), funkcije Γ i Γ'' imaju stalno iste znake. Odatle i iz onoga što je na početku rasuđivanja pod 2° ustanovljeno izlazi da je funkcija $x \mapsto \Gamma(x)$ u intervalima

(9) $$(0, +\infty),\ (-1, 0),\ (-2, -1),\ (-3, -2), \ldots$$

naizmenično prvo pozitivna i konveksna (nadole), pa zatim negativna i konkavna. Konveksnost funkcije Γ u $(0, +\infty)$ povlači njenu monotoniju za dovoljno veliko x, pa kako je, prema (5), $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n = 1, 2, \ldots)$, zaključujemo da $\Gamma(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$.

Nemenjanje konveksnosti funkcije Γ u svakom od intervala (9) i njeno teženje ka beskonačnosti istog znaka kad se x preko tog intervala približava njegovim krajevima ima za posledicu da funkcija tačno jedanput u svakom takvom intervalu uzima ekstremnu vrednost.

Na osnovu prethodnog, grafik funkcije Γ ima na slici prikazani izgled



Može se dodati da se pomoću (3) indukcijom dokazuje da

$$\Gamma(x) \sim \frac{(-1)^k}{(-k)!\,(x-k)} \qquad (x \to k;\ k = 0,\ -1,\ -2, \ldots).$$

Primedba. Rasuđujući u kompleksnom, dokazuje se da proizvod u (7) konvergira u čitavoj kompleksnoj ravni iz koje su isključene tačke

(10) $$0,\ -1,\ -2, \ldots,$$

i to uniformno u svakoj konačnoj i zatvorenoj oblasti koja ne sadrži nijednu od tačaka (10). Kako su još svi faktori proizvoda u (7) analitičke funkcije u kompleksnoj ravni bez tačaka (10), prema odgovarajućem stavu iz teorije analitičkih funkcija jednakost (7) definiše Γ kao analitičku funkciju u kompleksnoj ravni bez tačaka (10). Tačke (10) su njeni polovi prvog reda.

3.5.16. Ako je x realno, ispitati konvergenciju beskonačnih proizvoda:

1° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} (1 - n^{-\frac{2}{3}})\, e^{n^{-\frac{2}{3}}}$; 2° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\dfrac{n\,x}{n+1}\right)^n\right)$;

3° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{x^n}{x^{2n}+1}\right)$; 4° $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x + x^{2n}}{1 + x^{2n}}$.

3.6. FOURIEROVI REDOVI

3.6.0. UVODNI ZADACI O PERIODIČNIM FUNKCIJAMA

Za realnu funkciju f kaže se da ima kao *period* realan broj $\lambda \neq 0$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1° domen S funkcije f zajedno sa svakim brojem x sadrži brojeve $x+\lambda$ i $x-\lambda$;

2° $f(x+\lambda)=f(x) \quad (x \in S)$.

Funkcija koja ima bar jedan period naziva se *periodična funkcija*.

Ako je λ period funkcije f, tada su, očigledno, njeni periodi i svi brojevi $k\lambda$ $(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Najmanji pozitivni period funkcije naziva se *osnovni* ili *primitivni* period ove funkcije. Periodična funkcija ne mora imati osnovni period. To dokazuje primer konstantne funkcije, čiji je period svaki realan broj različit od nule, ili primer Dirichletove funkcije

$$x \mapsto d(x)=\begin{cases} 1 & (x \text{ racionalno}) \\ 0 & (x \text{ iracionalno}), \end{cases}$$

čiji je period svaki racionalan broj različit od nule.

Bez teškoća se dokazuje sledeći stav: Ako realna funkcija f ima osnovni period $\omega>0$, tada funkcija $x \mapsto f(ax+b)$ $(a \neq 0,\ b \in \mathbf{R})$ ima osnovni period $\dfrac{\omega}{|a|}$.

Takođe se lako ustanovljava da je zbir dve periodične funkcije sa istim domenom i uzajamno samerljivim periodima takođe periodična funkcija.

Napominjemo da je D. Blanuša u radu *On periodic functions* (Glasnik matematičko-fizički i astronomski, Zagreb 1966, str. 247—283) dobio nekoliko zanimljivih opštih rezultata o realnim periodičnim funkcijama. Navešćemo samo neke od njih (odnose se na slučaj periodičnih funkcija definisanih na skupu $\mathbf{R}$).

1° Skup svih perioda nekonstantne funkcije može biti prebrojiv ili neprebrojiv, a skup njenih neperioda, tj. realnih brojeva koji nisu njeni periodi, uvek ima moć kontinuuma.

2° Zbir dve nekonstantne periodične funkcije f_1 i f_2 sa nesamerljivim periodima ne može biti periodična funkcija ako su obe funkcije f_1 i f_2 neprekidne u po jednom otvorenom intervalu, ili je jedna od njih neprekidna u otvorenom intervalu, a druga ima osnovni period.

3° Ako su p_1, p_2 i p_3 tri samerljiva pozitivna broja, onda postoje funkcije f_1, f_2 i f_3 čiji je zbir identički jednak nuli i osnovni periodi su im redom p_1, p_2 i p_3 ako i samo ako je

$$p_1^{-1} : p_2^{-1} : p_3^{-1} = a : b : c,$$

gde su a, b i c prirodni brojevi od kojih su svaka dva relativno prosta.

3.6.0.1. Odrediti osnovni period i amplitudu funkcije

$$x \mapsto \alpha \cos p x + \beta \sin p x \qquad (\alpha, \beta, p \text{ realni brojevi, } \alpha^2 + \beta^2 > 0,\ p \neq 0).$$

Rešenje. Stavimo $\alpha = a \sin \theta$, $\beta = a \cos \theta$. Tada je

$$a (\sin \theta \cos p x + \cos \theta \sin p x) \equiv a \sin (p x + \theta),$$

pri čemu je $a = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Amplituda je $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, **a osnovni period** $\dfrac{2\pi}{|p|}$.

3.6.0.2. Odrediti primitivni period funkcija

$$1^\circ\ \theta \mapsto \operatorname{tg}\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right); \qquad 2^\circ\ \theta \mapsto \sin \frac{4}{3}\theta; \qquad 3^\circ\ \theta \mapsto \cos \theta - \cos 3\theta.$$

3.6.0.3. Odrediti osnovni period funkcija:

$$1^\circ\ x \mapsto \cos^4 x + \sin^4 x; \qquad 2^\circ\ x \mapsto \cos^6 x + \sin^6 x.$$

Uputstvo. Date funkcije mogu se izraziti u obliku

$$1^\circ\ x \mapsto \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x; \qquad 2^\circ\ x \mapsto \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x.$$

3.6.0.4. Odrediti osnovni period T svake od funkcija

$$1^\circ\ x \mapsto 2 \sin 2x; \qquad 2^\circ\ x \mapsto \sqrt{\cos x}; \qquad 3^\circ\ x \mapsto \cos \sqrt{x},$$

koja je periodična.

Rezultat. 1° $T = \pi$; 2° $T = 2\pi$; 3° nije periodična.

Primedba. Funkcije $x \mapsto f(x)$ i $x \mapsto g(f(x))$ ne moraju imati iste primitivne periode. Ako je, na primer, $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$, tada je $g\big(f(x)\big) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. Primitivni period funkcije $x \mapsto \cos x$ je 2π, a primitivni period funkcije $x \mapsto \cos^2 x$ je π.

3.6.0.5. Odrediti oblasti definisanosti i osnovne periode za funkcije

$$x \mapsto \log \cos x, \quad \cos \log x, \quad \sin \log x, \quad \log \sin x,$$

$$x \mapsto \log \log \cos x, \quad \cos \log \cos x, \quad \sin \log \sin x, \quad \log \log \sin x.$$

Rešenje. Funkcije $x \mapsto \log \log \cos x$ i $x \mapsto \log \log \sin x$ nisu definisane ni za jedno x. Zaista, $\log \log \cos x$ imalo bi smisla samo ako je $\log \cos x > 0$, tj. $\cos x > 1$, što ne važi ni za jedno x.

Funkcije $x \mapsto \cos \log x$ i $x \mapsto \sin \log x$ nisu periodične jer su definisane samo za $x > 0$. Po definiciji periodične funkcije f sa periodom $T \neq 0$, ako je ona definisana u nekoj tački x, ona je definisana i u svim tačkama $x + k\,T\,(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ i važi

$$f(x) = f(x + k\,T) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Prema tome, funkcija koja je definisana samo za $x > 0$ ne može biti periodična.

Preostale funkcije

$$x \mapsto \log \cos x, \quad \log \sin x, \quad \cos \log \cos x, \quad \sin \log \sin x$$

periodične su i imaju period 2π.

Uopšte, ako je f periodična funkcija sa periodom T i g proizvoljna funkcija čiji domen ima neprazan presek sa skupom vrednosti funkcije f, tada je složena funkcija

$$x \mapsto F(x) = g\big(f(x)\big)$$

takođe periodična sa periodom T. Zaista,

$$F(x + k\,T) = g\big(f(x + kT)\big) = g\big(f(x)\big) = F(x).$$

Funkcija $x \mapsto \log \cos x$ definisana je za $\cos x > 0$, tj. za $x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2\,k\pi - \dfrac{\pi}{2},\, 2\,k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Funkcija $x \mapsto \log \sin x$ definisana je za $\sin x > 0$, tj. za $x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (2\,k\pi,\, 2k\pi + \pi)$.

Funkcija $x \mapsto \cos \log \cos x$ definisana je takođe za $x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \left(2\,k\pi - \dfrac{\pi}{2},\, 2\,k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Funkcija $x \mapsto \sin \log \sin x$ definisana je takođe za $x \in \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} (2\,k\pi,\, 2\,k\pi + \pi)$.

3.6.0.6. Periodički produžiti funkciju f, datu sa $f(x) = 2\,(x - 1)^2$ $(0 \leq x \leq 2)$, van segmenta $[0, 2]$ i novu funkciju g predstaviti formulom za svaki segment. Da li je tako obrazovana funkcija parna?

Primedba. Neka je funkcija f data na polusegmentu $[a, b)$ (ili na poluintervalu $(a, b]$). Periodički produžiti ovu funkciju znači naći periodičnu funkciju F sa periodom $b - a$ koja se na $[a, b)$ (ili na $(a, b]$) poklapa sa funkcijom f. Pri tome će funkcija F u tačkama $a + k\,(b - a)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ biti neprekidna ako je $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$ $\big($ili ako je $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(b)\big)$. U protivnom, u ovim tačkama će funkcija F imati prekide.

Ako je funkcija f data na segmentu $[a, b]$, periodički produžiti ovu funkciju je mogućno ako i samo ako je $f(a) = f(b)$.

Rešenje. Neka je g periodična funkcija perioda $T = 2$, takva da je $g(x) = f(x)$ za $0 \leq x \leq 2$. Ako stavimo $x = 2\,k + t$ (k ceo broj; $0 \leq t \leq 2$), imamo

$$g(x) = g(t + k \cdot 2) = g(t) = 2\,(t - 1)^2 = 2\,(x - 2\,k - 1)^2.$$

Dakle,

$$\boldsymbol{g(x) = 2\,(x - 1 - 2\,k)^2 \text{ za } x \in [2\,k, 2\,k + 2] \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),}$$
$$\textbf{tj. } \boldsymbol{g(x) = 2\,(x - 1 - 2\,[x/2])^2 \text{ za } x \in \mathbf{R}.}$$

Kako je

$$g(-x) = g(-t - k \cdot 2) = g(2 - t) = f(2 - t) = 2\,(1 - t)^2 = g(t) = g(t + k \cdot 2) = g(x),$$

zaključujemo da je g parna funkcija.

3.6.0.7. Funkcija f definisana je sa

$$f(x) = |\sin x| \quad (0 \leq x \leq 2\pi), \qquad f(x) = -|\sin x| \quad (2\pi < x < 4\pi).$$

Periodički produžiti funkciju f van $[0, 4\pi]$ i neka $x \mapsto F(x)$ označava tako formiranu funkciju. Predstaviti F formulom.

3.6.0.8. Funkcija f data je pomoću

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 && (0 \leq x \leq 1), \\ &= \sqrt{x} && (1 \leq x < 2), \\ &= 0 && (2 \leq x \leq 3). \end{aligned}$$

Periodički produžiti funkciju f van segmenta $[0, 3]$ i odrediti izraze pomoću kojih je tako formirana funkcija g definisana na segmentima

$$\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \quad \text{ili} \quad [-7, -5].$$

ezultat.

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x} && \left(\frac{3}{2} \leq x < 2\right), \\ &= 0 && (2 \leq x \leq 3), \\ &= (x-3)^2 && (3 \leq x \leq 4), \\ &= \sqrt{x-3} && \left(4 \leq x \leq \frac{9}{2}\right); \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g(x) &= \sqrt{2} && (x = -7), \\ &= 0 && (-7 < x \leq -6), \\ &= (x+6)^2 && (-6 \leq x \leq -5). \end{aligned}$$

3.6.0.9. Na segmentu $[0, 2]$ data je funkcija f pomoću

$$\begin{aligned} (1) \qquad f(t) &= 0 && \left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \ \frac{5}{3} \leq t \leq 2\right), \\ &= 3t - 1 && \left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}\right), \\ &= 1 && \left(\frac{2}{3} \leq t \leq \frac{4}{3}\right), \\ &= -3t + 5 && \left(\frac{4}{3} \leq t \leq \frac{5}{3}\right). \end{aligned}$$

Ako se definiciona oblast funkcije f proširi uslovom $f(t+2) = f(t)$, tj. ako se pretpostavi da je f periodična funkcija sa periodom 2, eksplicitno odrediti ovu funkcija na segmentu

$$[2n, 2n+2] \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Rešenje. Na osnovu pretpostavke o periodičnosti je

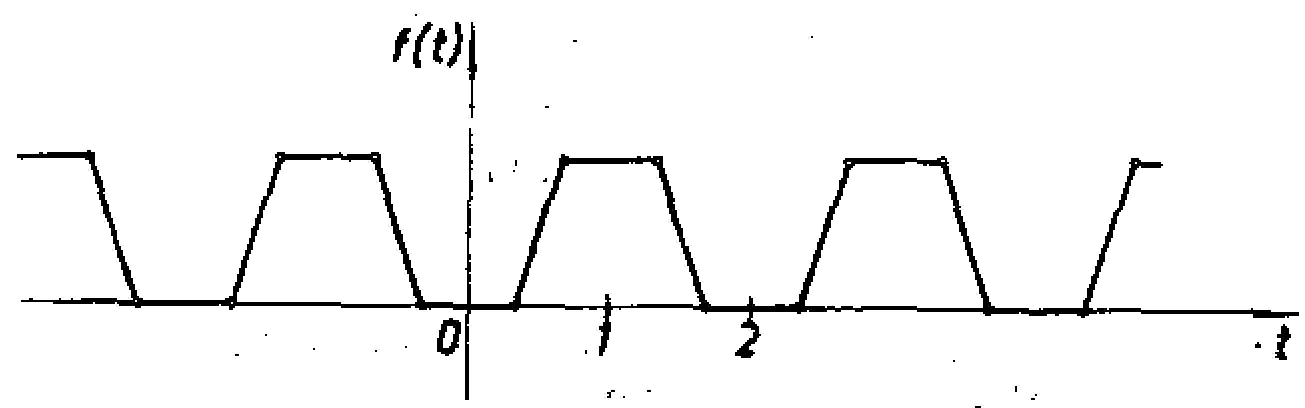
$$f(t) = f(t-2) = f(t-4) = f(t-6).$$

Produžujući ovaj postupak potreban broj puta, dobijamo

$$f(t) = f(t-2n). \tag{2}$$

Ako je $2n \leq t \leq 2n+2$, tada je $0 \leq t - 2n \leq 2$, pa na osnovu (2) i (1) dobijamo

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \left(2n \leq t \leq 2n + \frac{1}{3},\ 2n + \frac{5}{3} \leq t \leq 2n + 2\right), \\ &= 3(t-2n) - 1 && \left(2n + \frac{1}{3} \leq t \leq 2n + \frac{2}{3}\right), \\ &= 1 && \left(2n + \frac{2}{3} \leq t \leq 2n + \frac{4}{3}\right), \\ &= -3(t-2n) + 5 && \left(2n + \frac{4}{3} \leq t \leq 2n + \frac{5}{3}\right). \end{aligned}$$



3.6.0.10. Funkcija f određena je pomoću

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x && (0 \leq x \leq \pi), \\ &= 0 && (\pi \leq x \leq 2\pi), \\ &= -(x-2\pi)^2 && (2\pi \leq x < 3\pi). \end{aligned}$$

Periodički produžiti ovu funkciju van polusegmenta $[0, 3\pi)$ i odrediti izraze kojima je tako formirana funkcija $x \mapsto F(x)$ definisana na polusegmentu

$$[k\pi, (k+3)\pi) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

3.6.0.11. Neka je f periodična funkcija sa osnovnim periodom 2. Ako je ona u poluintervalu $(0, 2]$ definisana sa $f(x) = x^2$, naći $f(x)$ za proizvoljno realno x.

Rešenje. Pomoću jednakosti $f(x) = f(x+2)$ dobijamo

$$f(x) = (x-2)^2 \quad (2 < x \leq 4), \qquad f(x) = (x-4)^2 \quad (4 < x \leq 6)$$

i uopšte

$$f(x) = (x-2k)^2 \quad (2k < x \leq 2k+2; \quad k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Takođe je

$$f(x) = (x-2k)^2 \quad (2k < x \leq 2k+2; \quad k = -1, -2, -3, \ldots).$$

Prema tome, $f(x) = (x - 2k)^2$ ako je $2k < x \leq 2k + 2$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Ceo broj k je izvesna funkcija broja x. Potražimo eksplicitni izraz za ovu funkciju upotrebom funkcije $x \mapsto [x]$ (najveći celi broj koji ne premašuje x). Iz $2k < x \leq 2k + 2$ izlazi $-(k+1) \leq \leq -\frac{x}{2} < -k$, pa je $-(k+1) = \left[-\frac{x}{2}\right]$, odakle je $k = -\left[-\frac{x}{2}\right] - 1$. Na osnovu ovog je

$$f(x) = \left(x + 2 + 2\left[-\frac{x}{2}\right]\right)^2,$$

što predstavlja eksplicitan izraz za f.

3.6.0.12. Dokazati da nekonstantna, za svako $x \in \mathbf{R}$ definisana, periodična funkcija koja nema osnovni period, mora biti prekidna u svakoj tački.

3.6.1. ZADACI IZ FOURIEROVIH REDOVA

3.6.1.1. Razviti u Fourierov red funkciju f datu sa

$$f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}.$$

***Rešenje* 1.** Kako je funkcija $x \mapsto f(x)$ parna, njen Fourierov red će sadržati samo članove sa kosinusima. Koeficijent uz kosinuse dat je formulom

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{2 + \cos x}\, dx,$$

odakle sleduje

$$a_n = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{inx}}{2 + \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})}\, dx = \frac{2}{\pi} \operatorname{Re} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{4 + z + z^{-1}} \cdot \frac{1}{iz}\, dz$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \oint_{|z|=1} \frac{z^n}{z^2 + 4z + 1}\, dz.$$

Podintegralna funkcija ima dva pola: $a = \sqrt{3} - 2$ i $1/a$, od kojih se samo prvi nalazi u jediničnom krugu. Zato je

$$a_n = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(2\pi i \lim_{z \to a} (z - a) \frac{z^n}{(z - a)(z - a^{-1})}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \left(2\pi i \frac{a^n}{a - a^{-1}}\right) = 2 \cdot \frac{2a}{a^2 - 1} a^n = \frac{2}{\sqrt{3}} (\sqrt{3} - 2)^n.$$

Prema tome je

$$\frac{1}{2+\cos x}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{3}-2)^n\cos nx.$$

***Rešenje* 2.** Jednu za drugom možemo izvršiti sledeće transformacije:

$$f(x)=\frac{1}{2+\cos x}=\frac{2\,e^{ix}}{e^{2ix}+4\,e^{ix}+1}=\frac{2\,z}{z^2+4\,z+1}\qquad (z=e^{ix})$$

$$=\frac{2\,z}{(z-a)(z-a^{-1})}=\frac{2\,a}{a^2-1}\left(\frac{1}{1-a\,z}+\frac{a}{z-a}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a^n z^n+\sum_{n=1}^{+\infty}a^n z^{-n}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{+\infty}a^n\cos n\,x\qquad (a=\sqrt{3}-2).$$

***Rešenje* 3.** Prvo imamo

$$2\,\mathrm{Re}\frac{1}{1+\lambda\,e^{ix}}=\frac{1}{1+\lambda\,e^{ix}}+\frac{1}{1+\lambda\,e^{-ix}}=\frac{2\,(1+\lambda\cos x)}{1+\lambda^2+2\,\lambda\cos x}=\frac{\dfrac{1}{\lambda}+\cos x}{\dfrac{1+\lambda^2}{2\,\lambda}+\cos x}.$$

Izaberemo li λ tako da je

$$\frac{1+\lambda^2}{2\,\lambda}=2\qquad (\text{na primer } \lambda=2-\sqrt{3}),$$

dobijamo

$$\frac{2+\sqrt{3}+\cos x}{2+\cos x}=2\,\mathrm{Re}\frac{1}{1+(2-\sqrt{3})\,e^{ix}}.$$

Ovoj jednakosti možemo dati oblik

$$\frac{1}{2+\cos x}=-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Re}\frac{1}{1-(\sqrt{3}-2)\,e^{ix}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{3}-2)^n\cos n\,x.$$

Ovim smo razvili funkciju $x\mapsto f(x)$ u Fourierov red.
Primedba. U rešenjima 2 i 3 koristi se, u stvari, činjenica da je u $[-\pi,\pi]$ uniformno konvergentan trigonometrijski red Fourierov red svoje sume.

3.6.1.2. Razviti u Fourierov red periodičnu funkciju f, perioda $2\,\pi$, koja je za $-\pi\le x<\pi$ data jednakošću $f(x)=x^2$.

Na osnovu dobijenog razvoja izračunati

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\,n+1)^2},\ \ldots.$$

Rešenje. Kako je f parna funkcija, dobija se $b_n = 0$. Koeficijent a_0 dat je formulom

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \, d\, x = \frac{2}{3} \pi^2.$$

Koeficijent a_n dat je sa

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos n\, x \, d\, x = \frac{2}{n\,\pi} \left(x^2 \sin n\, x \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin n\, x \, d\, x \right)$$

$$= \frac{4}{n^2\, \pi} \left(x \cos n\, x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos n\, x \, d\, x \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}.$$

Prema tome je

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos n\, x}{n^2}.$$

Ovaj razvoj važi za svako x jer su za funkciju f ispunjeni Dirichletovi uslovi.

Primedba. Da bismo razvili u Fourierov red funkciju $x \mapsto f(x)$ koja je data na $[a, b)$, ili na $(a, b]$, ili na $[a, b]$, moramo prethodno produžiti ovu funkciju, tj. naći funkciju $x \mapsto F(x)$ sa periodom $b - a$ koja se na $[a, b)$, tj. na $(a, b]$, poklapa sa funkcijom $x \mapsto f(x)$. Pri tome će funkcija $x \mapsto F(x)$ u tačkama $a + k(b - a)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ biti neprekidna ako je

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a), \qquad \text{tj.} \quad \lim_{x \to b-} f(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(b).$$

U protivnom, u ovim tačkama će funkcija $x \mapsto F(x)$ imati prekide. Ako je funkcija f data na segmentu $[a, b]$, periodički produžiti ovu funkciju je mogućno ako i samo ako je $f(a) = f(b)$. U slučaju kada je funkcija f data na segmentu $[a, b]$ i kada je $f(a) \neq f(b)$, možemo postupiti na dva načina: 1° možemo isključiti iz razmatranja vrednosti funkcije f u tačkama $x = a$ i $x = b$, čime smo periodičko produženje funkcije f učinili nedefinisanim u svim tačkama $x = a + k(b - a)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; 2° promeniti vrednosti funkcije f u tačkama $x = a$ i $x = b$ i učiniti da te vrednosti budu jednake. U oba ova slučaja Fourierovi koeficijenti će biti isti, a Fourierov red funkcije f će u tim tačkama konvergirati ka

$$\frac{f(a + 0) + f(b - 0)}{2}.$$

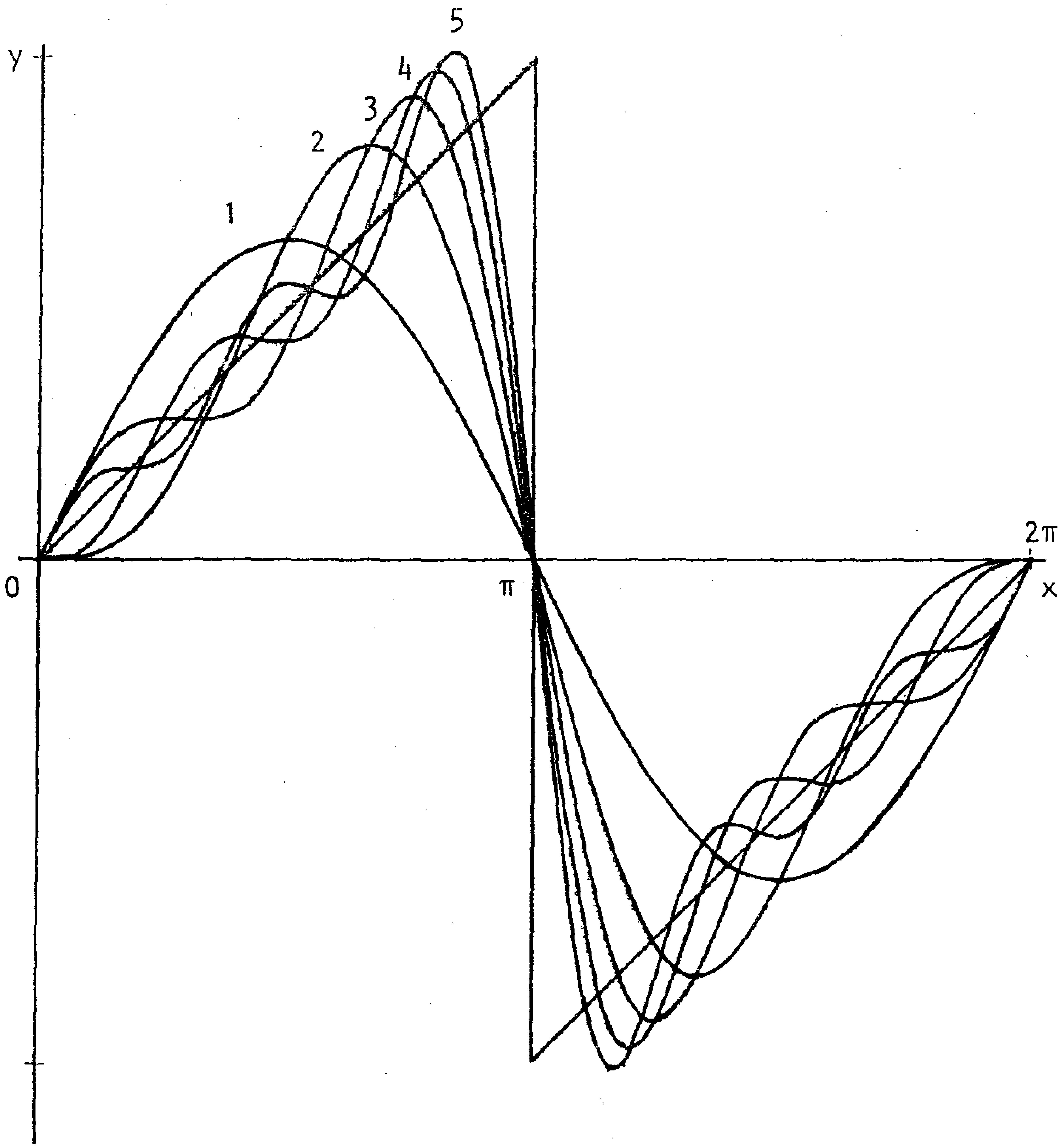
3.6.1.3. Proveriti razvoj

$$x^2 = \frac{4}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \cos nx - \frac{\pi}{n} \sin nx \right) \qquad (0 < x < 2\pi).$$

3.6.1.4. Funkciju $x \mapsto f(x) = x \; (-\pi < x < +\pi)$ razviti u Fourierov red.

Rezultat. Njen Fourierov red je $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n\, x}{n}$.

Na slici su prikazane parcijalne sume s_k toga Fourierovog reda za $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

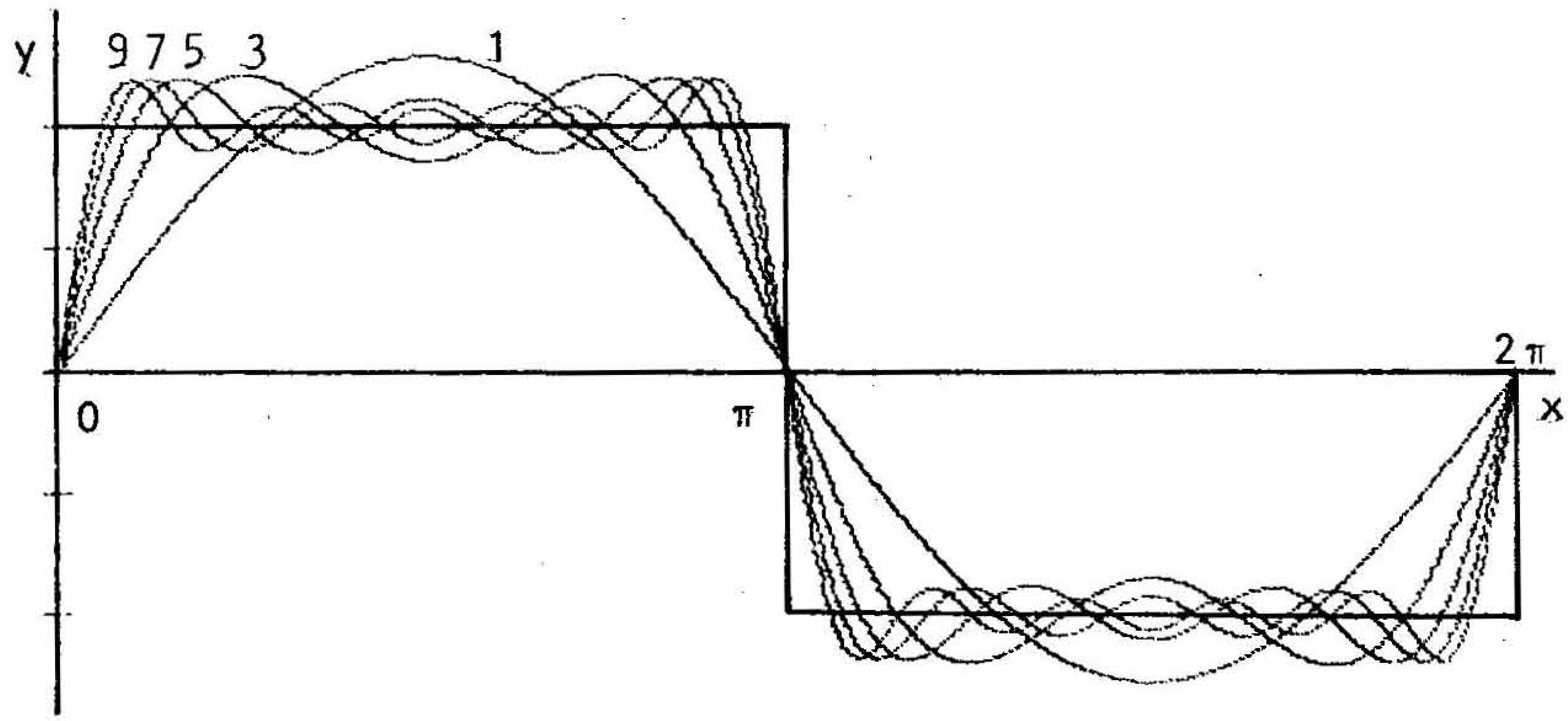


3.6.1.5. Odrediti parcijalnu sumu s_k Fourierovog reda funkcije f date sa

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi), \\ -1 & (\pi \leq x < 2\pi), \end{cases}$$

i zatim prikazati grafički te parcijalne sume s_k za $k = 1, 3, 5, 7, 9$.

Rezultat. $s_k = \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{k} \dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}$ (videti sliku).



3.6.1.6. Ako je k prirodan broj, dokazati da je

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = (-1)^k \frac{2\pi}{k^2}.$$

Koristeći se ovim, razviti u Fourierov red funkciju f datu sa

$$f(x) = x^2 \sin x \qquad (-\pi \leq x \leq +\pi).$$

Zatim dokazati da je $\dfrac{\pi}{8} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}(2n)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$.

Rešenje.

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \frac{1}{k} x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx \, d \tag{1}$$

$$= -\frac{2}{k} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx$$

$$= -\frac{2}{k} \left[-\frac{1}{k} x \cos kx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \right]$$

$$= (-1)^k \frac{2\pi}{k^2} - \frac{2}{k^2} \int_0^{\pi} \cos kx \, dx$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{2\pi}{k^2}$$

Razvoj funkcije f ima oblik

(2) $$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n x$$

jer je f neparna funkcija. Koeficijent b_n se nalazi po formuli

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin x \sin nx \, dx.$$

Kako je $-2 \sin x \sin n x = \cos (n+1) x - \cos (n-1) x$, imamo

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x^2 \cos (n-1) x \, dx - \int_0^\pi x^2 \cos (n+1) x \, dx\right).$$

Za $n > 1$ je $n - 1 > 0$, pa primenom formule (1) dobijamo

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left((-1)^{n-1} \frac{2\pi}{(n-1)^2} - (-1)^{n+1} \cdot \frac{2\pi}{(n+1)^2}\right) \\ &= (-1)^{n-1} \cdot 2 \cdot \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{(n^2-1)^2} \\ &= (-1)^{n-1} \frac{8n}{(n^2-1)^2}. \end{aligned}$$

Za $n = 1$ imamo

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 \, dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos 2x \, dx = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}.$$

Razvoj (2) postaje

(3) $$x^2 \sin x = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right) \sin x + 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{(n^2-1)^2} \sin nx \qquad (-\pi \leq x \leq +\pi).$$

Diferenciranjem dobijamo

(4) $$2x \sin x + x^2 \cos x = \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cos x + 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n^2-1)^2} \cos nx \qquad (-\pi \leq x \leq +\pi).$$

Dozvoljeno je diferenciranje reda (3) član po član jer je novi red apsolutno i uniformno konvergentan. Ako u (4) stavimo $x = \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$\pi = 8 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^2}{(n^2-1)^2} \cos \frac{n\pi}{2} = 8 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{2k-1} \frac{(2k)^2}{(4k^2-1)^2} \cos k\pi.$$

Dakle,

$$\frac{\pi}{8} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2k)^2}{(2k-1)^2 (2k+1)^2}.$$

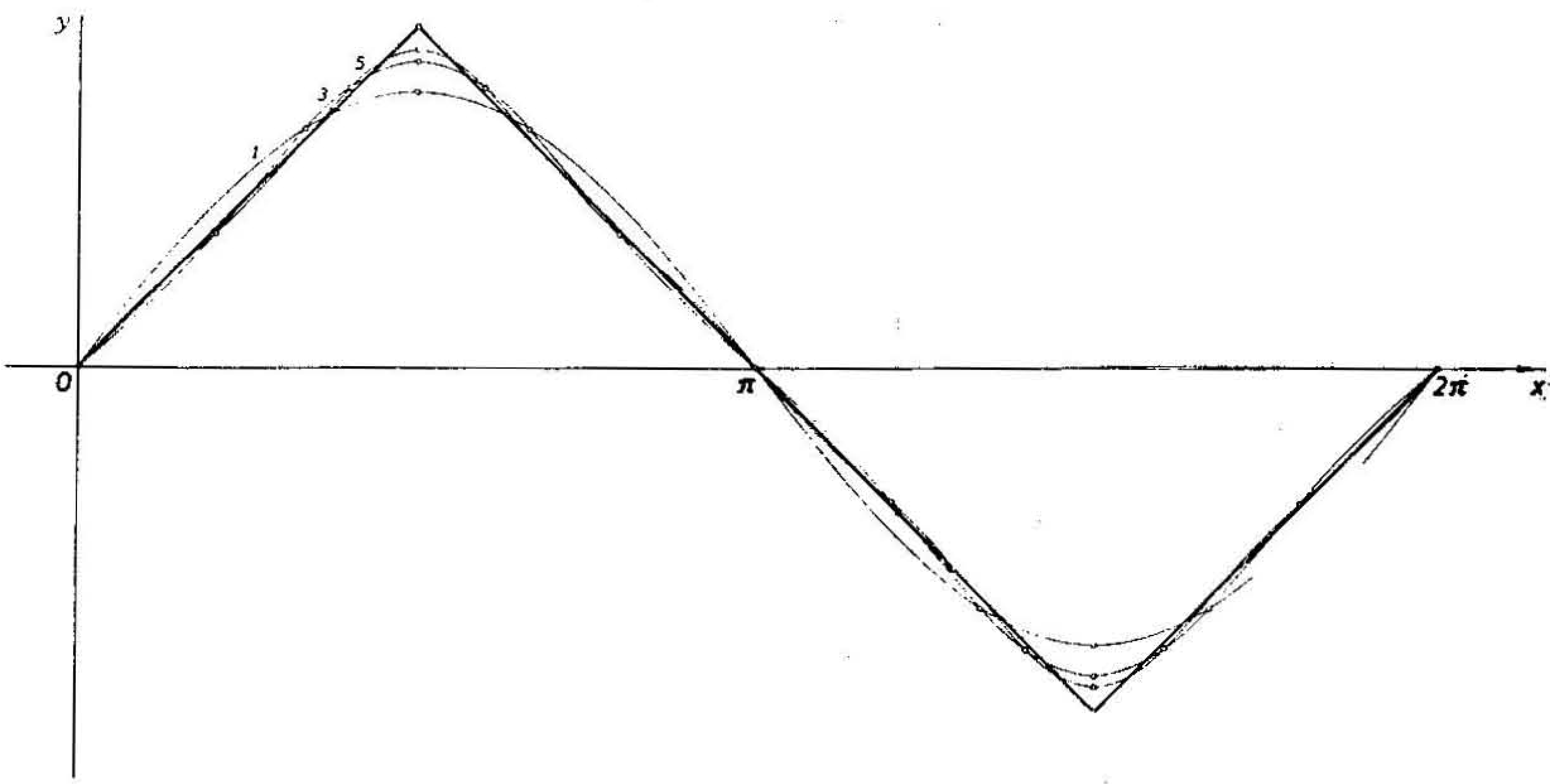
3.6.1.7. Funkciju f datu sa

$$f(x) = x \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$= \pi - x \quad \left(\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{2}\right)$$

razviti u Fourierov red. Grafički prikazati funkciju f i nekoliko prvih parcijalnih suma dobijenog Fourierovog reda.

Rezultat. $f(x) = \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. Na slici su prikazane parcijalne sume s_k Fourierovog reda funkcije $x \mapsto f(x)$ za $k = 1, 3, 5$.



3.6.1.8. Proveriti razvoj $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

Rešenje. Funkcija $x \mapsto f(x) = |\sin x|$ je parna i periodična sa osnovnim periodom

(1) $$T = 2l = \pi.$$

Fourierov razvoj takve funkcije ima oblik

(2) $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l},$$

gde je

(3) $$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Iz (3) za $f(x) = |\sin x|$ i (1) dobijamo

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 2nx \, dx, \tag{4}$$

gde smo se koristili činjenicom da je

$$|\sin x| = \sin x \qquad (0 \leq x \leq \pi).$$

Iz (4) izlazi

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} - \frac{\cos(2n+1)x}{2n+1} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}. \end{aligned}$$

Zamenjujući $f(x)$ i a_n u (2), dobijamo

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}.$$

Ovaj razvoj važi za svako x.

3.6.1.9. Funkciju f, datu sa $f(x) = \frac{1}{12}(2x^3 - 3x^2 + x)$ $(0 \leq x < 1)$, periodički produžiti izvan definicionog intervala. Tako dobijenu periodičnu funkciju F, sa periodom 1, razviti u Fourierov red.

Rešenje. Ako stavimo $x = t + \frac{1}{2}$, dobijamo

$$f(x) = \frac{1}{12} x(x-1)(2x-1) = \frac{1}{6} t \left(t^2 - \frac{1}{4} \right) \qquad (0 \leq x < 1). \tag{1}$$

Iz (1) se vidi da je grafik funkcije f simetričan u odnosu na tačku $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$. Na osnovu ove simetrije zaključujemo da je funkcija F neparna. Prema tome, Fourierov red funkcije F zadržaće samo članove sa sinusima.

Da nismo primetili navedenu osobinu funkcije f, došli bismo do istog zaključka pri izračunavanju koeficijenata a_n.

Primenom obrasca za Fourierove koeficijente dobijamo

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 F(x) \sin 2n\pi x \, dx = 2 \int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x \, dx \\ &= 4 \int_0^{1/2} f(x) \sin 2n\pi x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{1/2} (2x^3 - 3x^2 + x) \sin 2n\pi x \, dx. \end{aligned}$$

Primenom metoda parcijalne integracije imamo

$$b_n = \frac{1}{6n\pi}\left(-(2x^3-3x^2+x)\cos 2n\pi x\Big|_0^{1/2} + \int_0^{1/2}(6x^2-6x+1)\cos 2n\pi x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{6n\pi}\int_0^{1/2}(6x^2-6x+1)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= \frac{1}{12n^2\pi^2}\left((6x^2-6x+1)\sin 2n\pi x\Big|_0^{1/2} - 6\int_0^{1/2}(2x-1)\sin 2n\pi x\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{2n^2\pi^2}\int_0^{1/2}(2x-1)\sin 2n\pi\,dx$$

$$= \frac{1}{4n^3\pi^2}\left((2x-1)\cos 2n\pi x\Big|_0^{1/2} - 2\int_0^{1/2}\cos 2n\pi x\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{(2n\pi)^3}.$$

Prema tome, došli smo do razvoja

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{(2n\pi)^3}.$$

Ovaj razvoj važi za svako x, jer funkcija ispunjava Dirichletove uslove.

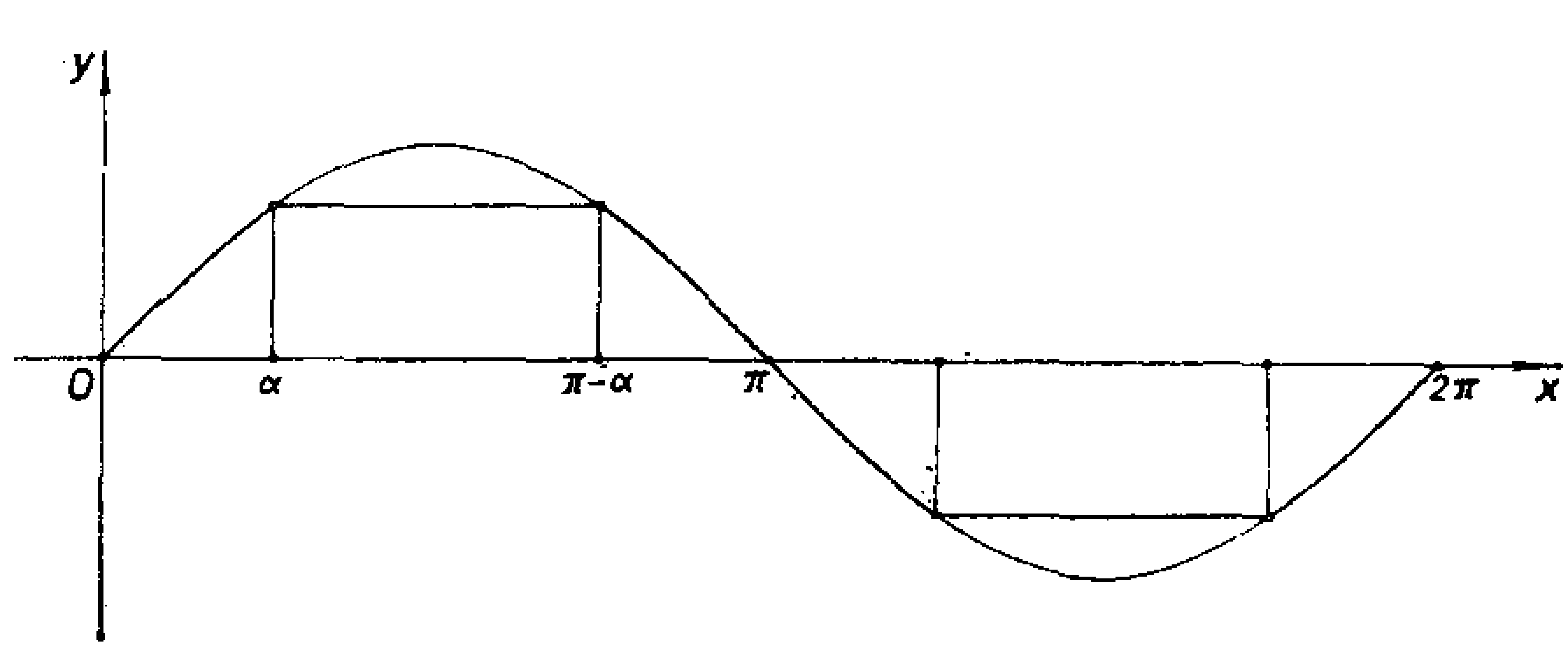
Primedba. Funkcija f se u intervalu u kome je definisana poklapa sa Bernoullievim polinomom trećeg stepena $x \mapsto P_3(x)$.

3.6.1.10. Periodičnu neparnu funkciju, s primitivnim periodom 2π, definisanu relacijama

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x && (0 \le x \le \alpha), \\ &= \sin\alpha && (\alpha \le x \le \pi-\alpha), \qquad \left(0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin x && (\pi-\alpha \le x \le \pi) \end{aligned}$$

razviti u Fourierov red.

Rešenje. Pošto je funkcija neparna, imamo $a_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.



Dalje je

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{a} \sin x \sin nx \, dx + \int_a^{\pi-a} \sin a \cdot \sin nx \, dx + \int_{\pi-a}^{\pi} \sin x \sin nx \, dx\right)$$

Posle izvršenih integracija dobija se

$$b_n = \frac{4}{\pi} \sin \frac{n\pi}{2}\left[\frac{\sin na \cos a - n \sin a \cos na}{n^2 - 1} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{\sin a \sin\left(\frac{n\pi}{2} - na\right)}{n}\right]$$

Odavde se nalazi $b_{2k} = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ i

$$b_{2k-1} = \frac{\sin 2ka}{k(k-1)\pi} - \frac{2 \sin a \cos(2k-1)a}{(k-1)(2k-1)\pi} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{a} \sin^2 x \, dx + \int_a^{\pi-a} \sin a \sin x \, dx + \int_{\pi-a}^{\pi} \sin^2 x \, dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(a + \frac{1}{2}\sin 2a\right).$$

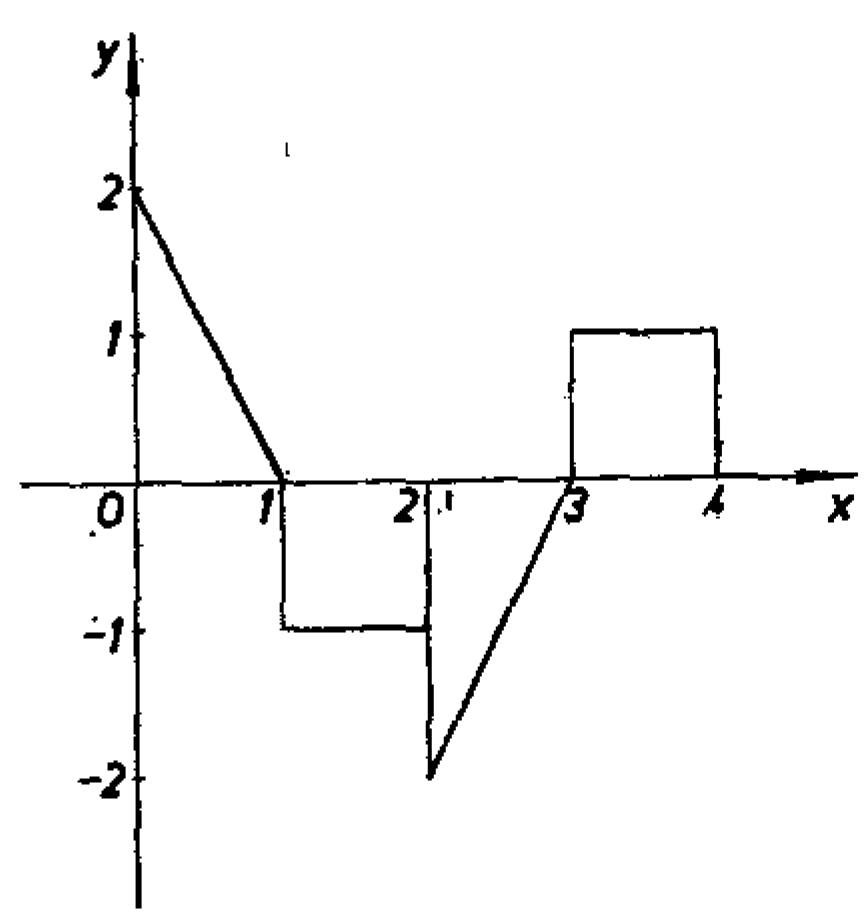
Stoga je

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(2a + \sin 2a)\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{+\infty}\left\{\left[\frac{\sin 2ka}{k(k-1)} - \frac{2\sin a \cos(2k-1)a}{(k-1)(2k-1)}\right]\sin(2k-1)x\right\}.$$

3.6.1.11. Odrediti koeficijente a_n i b_n Fourierovog reda za periodičnu funkciju sa periodom 4, koja je grafički prikazana na slici. Aproksimirati ovu funkciju prvim odnosno sa prva dva harmonika.

Rešenje. Analitički izraz za navedenu funkciju na segmentu $[0, 4]$ glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x + 2 \qquad && (0 < x < 1),\\ &= -1 && (1 < x < 2),\\ &= 2x - 6 && (2 < x < 3),\\ &= 1 && (3 < x < 4). \end{aligned}$$



Fourierov red je oblika

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right),$$

gde je

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^{1} -2(x-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_1^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right.$$

$$\left. + \int_2^{3}(2x-6)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_3^{4}\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)$$

Koeficijent b_n ima isti oblik, samo što svuda umesto $\cos\frac{n\pi x}{2}$ treba staviti $\sin\frac{n\pi x}{2}$.

Kada se izvrši integracija, dobija se

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^2}(1 - \cos n\pi) + \frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}, \qquad b_n = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi) + \frac{8}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Za $n = 2k - 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ je

$$a_{2k-1} = \frac{8}{(2k-1)^2\pi^2} - \frac{4(-1)^k}{(2k-1)\pi}, \qquad b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi} + \frac{8(-1)^k}{(2k-1)^2\pi^2}.$$

Za $n = 2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ je $a_{2k} = 0$ i $b_{2k} = 0$. Takođe je $a_0 = 0$.

Prva aproksimativna funkcija je

$$y_1 = \left(\frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\right)\cos\frac{\pi x}{2} + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\right)\sin\frac{\pi x}{2},$$

a druga

$$y_2 = \left(\frac{8}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\right)\cos\frac{\pi x}{2} + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\right)\sin\frac{\pi x}{2} + \left(\frac{8}{9\pi^2} - \frac{4}{3\pi}\right)\cos\frac{4\pi x}{2} + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{8}{9\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2}.$$

3.6.1.12. Proveriti da li za funkciju f, definisanu pomoću

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{3} &&\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right),\\ &= 0 &&\left(\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\right),\\ &= -\frac{\pi}{3} &&\left(\frac{2\pi}{3} < x < \pi\right), \end{aligned}$$

važe razvoji:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{3}\sqrt{3}\left(\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{11}\cos 11x + \cdots\right)\\ &= \sin 2x + \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 8x + \frac{1}{5}\sin 10x + \cdots \end{aligned}$$

3.6.1.13. Periodičnu funkciju f sa periodom 2π, koja je definisana u intervalu $(-\pi, +\pi)$ sa $f(x) = e^x$, razviti u Fourierov red. Koristeći taj red, odrediti zbirove sledećih numeričkih redova:

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}, \quad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{4n^2+1},$$

$$S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2+1}.$$

Rešenje. Prvo odredimo Fourierove koeficijente za f:

(1) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx = \frac{1}{\pi}(e^\pi - e^{-\pi}) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}\pi,$$

$$(2)\qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(e^x \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi} - e^{-\pi}) + nb_n = \frac{(-1)^n}{\pi}\,2\,\mathrm{sh}\,\pi + nb_n,$$

$$(3)\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^x \sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(e^x \sin nx\Big|_{-\pi}^{+\pi} - n\int_{-\pi}^{+\pi} e^x \cos nx\,dx\right) = -na_n.$$

Jednačine (2) i (3) su linearne po a_n i b_n. Rešenje ovih jednačina je

$$(4)\qquad a_n = (-1)^n \frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi(n^2+1)},\quad b_n = (-1)^{n-1}\frac{2\,n\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi(n^2+1)}.$$

Na osnovu (1) i (4) dobija se

$$(5)\qquad f(x) = 2\,\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos nx - n\sin nx}{n^2+1}\right)\qquad (x \neq (2\,k+1)\,\pi).$$

Za $x = (2\,k+1)\,\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ funkcija f ima prekide prve vrste i njen Fourierov red (5) konvergira ka aritmetičkoj sredini leve i desne granične vrednosti funkcije f. Ta sredina je

$$\frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} = \mathrm{ch}\,\pi.$$

Stavljajući $x = 0$ u (5), dobija se

$$S_1 = \frac{\pi}{2\,\mathrm{sh}\,\pi} - \frac{1}{2}.$$

Za $x = \pi$, na osnovu prethodne primedbe, (5) daje

$$S_2 = \frac{\pi}{2}\coth \pi - \frac{1}{2}.$$

Dalje, imamo

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2}(S_1 + S_2),\qquad S_4 = \frac{1}{2}(S_2 - S_1).$$

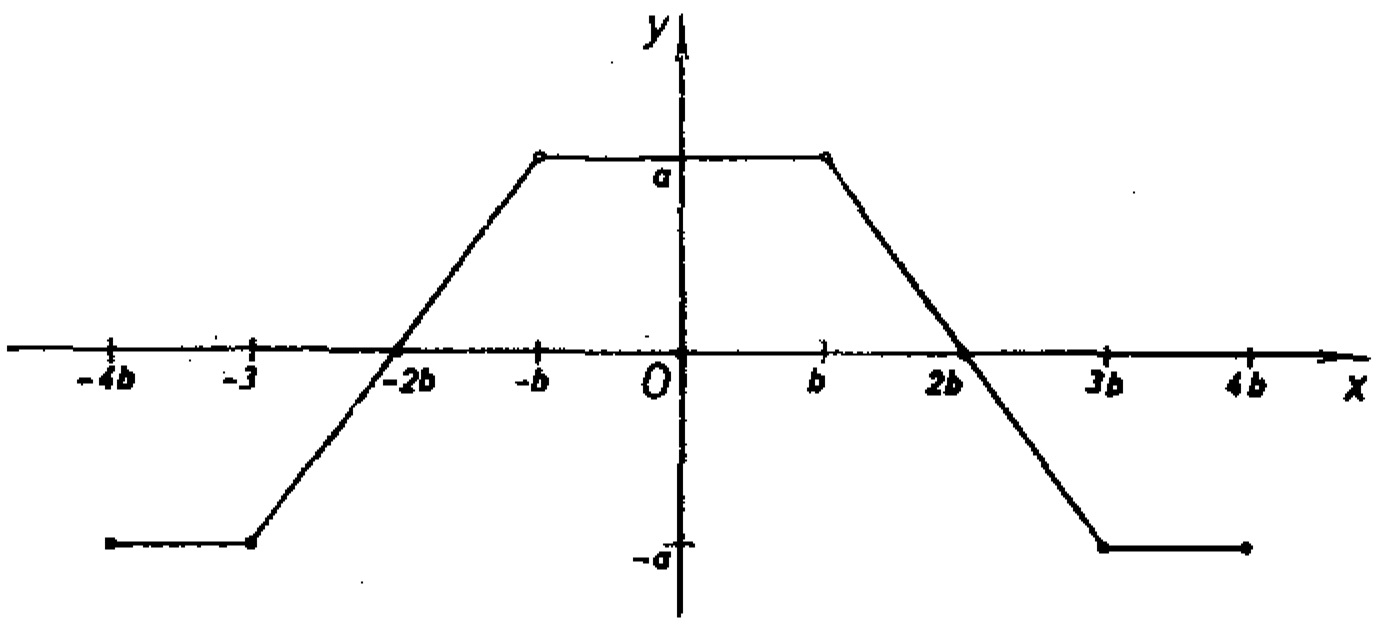
3.6.1.14. Razviti u Fourierov red funkciju koja je na intervalu $(-\pi, +\pi)$ data sa

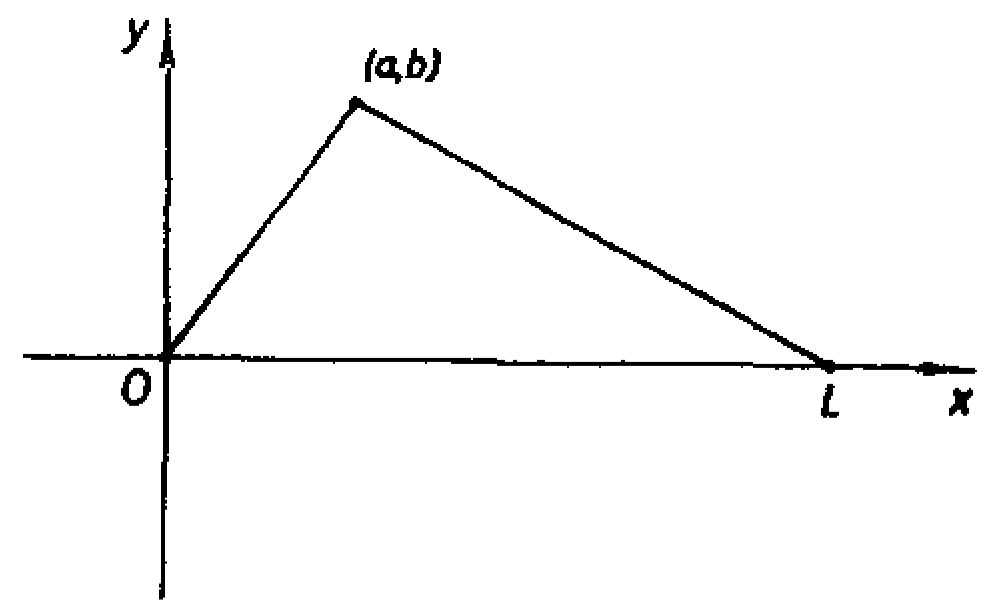
$$f(x) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\mathrm{sh}\,ax}{\mathrm{sh}\,a\pi} - \frac{x}{2}\right).$$

3.6.1.15. Proveriti razvoj

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{\nu=1}^{+\infty}\frac{\nu}{4\,\nu^2-1}\sin 2\,\nu x\qquad (0 < x < \pi);$$

3.6.1.16. Odrediti Fourierov red koji će predstavljati trapezno talasanje prikazano na slici:





3.6.1.17. Razviti u Fourierov red periodičnu funkciju $x \mapsto f(x)$ u sledeća tri slučaja:

1° f je neparna funkcija, a njen grafik u poluperiodu l prikazan je na slici;

2° f je parna funkcija, a njen grafik u poluperiodu l prikazan je na slici;

3° Grafik funkcije f u periodu l prikazan je na slici.

3.6.1.18. Periodičnu funkciju f datu sa

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \qquad x \in [-\pi, -a] \cup [a, \pi] \\ &= \sin \frac{\pi}{a} x, \qquad x \in [-a, +a] \qquad (0 < a < \pi) \end{aligned}$$

razviti u Fourierov red.

Rezultat. Funkcija f je neparna. Njen razvoj glasi

$$f(x) = 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{\pi^2 - n^2 a^2} \sin nx.$$

3.6.1.19. Fourierov red jedne funkcije $x \mapsto f(x)$ u intervalu $(0, 2\pi)$ je

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Dokazati da je Fourierov red funkcije $x \mapsto \int_0^x f(u)\, du$, u istom intervalu $(0, 2\pi)$,

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

gde je

$$A_0 = 2\pi a_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u f(u)\, du, \qquad A_n = -\frac{1}{n} b_n, \quad B_n = -\frac{1}{n} a_0 + \frac{1}{n} a_n.$$

3.6.1.20. Proveriti razvoj

$$x \cos^2 \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sin x = \frac{\sin 2x}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots \quad (-\pi < x < +\pi).$$

3.6.1.21. Razviti funkciju $x \mapsto |x(\pi - x)|$ u Fourierov red u intervalu $(-\pi, +\pi)$.

3.6.1.22. Funkciju f datu sa $f(x) = \operatorname{ch} ax \ (-\pi \leq x \leq +\pi)$ razviti u Fourierov red.

Rezultat.

$$f(x)=\frac{\operatorname{sh} a\pi}{a\pi}+\frac{2a\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2+n^2}.$$

3.6.1.23. 1° Sumirati redove $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n}$. Koristeći dobijene sume, sumirati i sledeće redove:

$$2^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na\cdot\sin nx}{n};\qquad 3^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 na\cdot\sin nx}{n}\qquad\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right);$$

$$4^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n(n+1)};\qquad 5^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1};\qquad 6^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Rešenje. 1° Uvedimo oznake

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n};\quad B=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n};\quad C_m=\sum_{n=1}^{m}\cos nx;\quad D_m=\sum_{n=1}^{m}\sin nx.$$

Tada imamo

$$C_m+iD_m=\sum_{n=0}^{m}e^{nxi}-1=\frac{e^{(m+1)xi}-1}{e^{xi}-1}-1=\frac{e^{(m+1)xi}-1}{e^{\frac{x}{2}i}\left(e^{\frac{x}{2}i}-e^{-\frac{x}{2}i}\right)}-1$$

$$=\frac{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)xi}-e^{-\frac{1}{2}xi}}{2i\cdot\sin\frac{x}{2}}-1$$

i odatle

$$C_m=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x+\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-1=-\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$D_m=\frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}-\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Integracijom izraza za C_m i D_m od π do $x\in(0,2\pi)$ dobijamo

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin nx}{n}=\frac{1}{2}(\pi-x)+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{x}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt,$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{\cos nx}{n}+\sum_{n=1}^{m}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=-\log\sin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{x}\frac{\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt.$$

Kako je $\sin\frac{x}{2} > 0$ za $x \in (0, 2\pi)$, prema Riemann — Lebesgueovoj teoremi,

$$\int_{\pi}^{x} \frac{\sin\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \to 0, \qquad \int_{\pi}^{x} \frac{\cos\left(m + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \to 0, \qquad m \to +\infty.$$

Stoga se iz prethodnih jednakosti dobija, puštajući da $m \to +\infty$,

$$A = \frac{1}{2}(\pi - x), \; B = -\log 2\sin\frac{x}{2} \quad (0 < x < 2\pi). \tag{1}$$

Za $x = 0$ i $x = 2\pi$ je $A = 0$, a drugi red divergira.

2° Imamo, za $x + a \neq 2k\pi$, $x - a \neq 2k\pi$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \cdot \sin nx}{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x-a)}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos n(x+a)}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\log 2\left|\sin\frac{x+a}{2}\right| - \log 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\right) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right|,$$

tj.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \cdot \sin nx}{n} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\frac{x+a}{2}}{\sin\frac{x-a}{2}}\right| \quad (x + a \neq 2k\pi, \; x - a \neq 2k\pi).$$

3° Neka je $0 < x < 2\pi$. Tada, za $0 < a < \frac{\pi}{2}$, imamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na \cdot \sin nx}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1 - \cos 2na)\sin nx}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx\cos 2na}{n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n(x+2a)}{n} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n(x-2a)}{n}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4}(\pi - x) - \frac{1}{8}(\pi - x - 2a) - \frac{1}{8}(\pi - x + 2a) = 0 \\ \qquad (0 < x + 2a < 2\pi, \; 0 < x - 2a < 2\pi), \\ \frac{1}{4}(\pi - x) - \frac{1}{8}\big(\pi - (x - 2\pi + 2a)\big) - \frac{1}{8}(\pi - x + 2a) = -\frac{\pi}{4} \\ \qquad (2\pi < x + 2a < 3\pi, \; 0 < x - 2a < 2\pi), \\ \frac{1}{4}(\pi - x) - \frac{1}{8}(\pi - x - 2a) - \frac{1}{8}\big(\pi - (x + 2\pi) + 2a\big) = \frac{\pi}{4} \\ \qquad (0 < x + 2a < 2\pi, \; -\pi < x - 2a < 0. \end{cases}$$

Dakle,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\,a \sin nx}{n} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & (0 < x < 2\,a), \\ 0 & (2\,a < x < 2\,\pi - 2\,a), \\ -\frac{\pi}{4} & (2\,\pi - 2\,a < x < 2\,\pi), \\ \frac{\pi}{8} & (x = 2\,a), \\ -\frac{\pi}{8} & (x = 2\,\pi - 2\,a). \end{cases}$$

4°

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n\,(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \cos x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin (n+1)\,x}{n+1} - \sin x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos (n+1)\,x}{n+1}$$

$$= -(1 + \cos x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\,(x+\pi)}{n} + \sin x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\,(x+\pi)}{n}$$

$$= 2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) \frac{1}{2}\,x - (\sin x) \log \left(2 \sin \frac{x+\pi}{2}\right)$$

$$= x \sin^2 \frac{x}{2} - \sin x \cdot \log \left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \quad (|x| < \pi);$$

dakle, s obzirom na uniformnu konvergenciju datog reda,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n\,(n+1)} = x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} - (\sin x) \log \left(2 \cos \frac{x}{2}\right) \quad (|x| \leq \pi).$$

5°

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin (2\,n-1)\,x}{2\,n-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin 2\,kx}{2\,k}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) - \frac{1}{4}(\pi - 2\,x) = \frac{\pi}{4} & (0 < x < \pi), \\ 0 \quad (x = \pi), & \\ \frac{1}{2}(\pi - x) - \frac{1}{4}\big(\pi - 2\,(x - \pi)\big) = -\frac{\pi}{4} & (\pi < x < 2\,\pi) \end{cases}$$

6° Red $y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos (2\,n-1)\,x}{(2\,n-1)^2}$ svuda konvergira, a red $-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin (2\,n-1)\,x}{2\,n-1}$, čiji su članovi svuda neprekidne funkcije, uniformno konvergira u svakom intervalu oblika $[\delta, \pi - \delta]$ i svakom intervalu oblika $[\pi + \delta;\ 2\,\pi - \delta]$ $\left(0 < \delta < \frac{\pi}{2}\right)$.

Stoga,

$$y' = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad \big(x \in (0, \pi), \quad x \in (\pi, 2\pi)\big),$$

pa, prema prethodnom rezultatu, integracija od $\frac{\pi}{2}$ do $x \in (0, \pi)$, odnosno od $\frac{3\pi}{2}$ do $x \in (\pi, 2\pi)$, daje

$$y = -\frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \big(x \in (0, \pi)\big),$$

$$y = \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad \big(x \in (\pi, 2\pi)\big).$$

Kako je funkcija y svuda neprekidna, može se staviti

$$y = -\frac{\pi}{4}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in [0, \pi]),$$

$$y = \frac{\pi}{4}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad (x \in [\pi, 2\pi]).$$

Stavljajući, specijalno, $x = 0$ dobija se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3.6.1.24. Razviti u Fourierov red periodičnu funkciju f sa periodom 2π, koja je u intervalu $(-\pi, \pi)$ definisana sa:

1° $f(x) = x \sin x$; 2° $f(x) = x \cos x$.

Rešenje. 1° Kako je

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \qquad (-\pi < x < \pi),$$

imamo:

$$\begin{aligned}
x \sin x &= 2 \sin x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin nx \sin x}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \{\cos(n-1)x - \cos(n+1)x\} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n-1)x}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(n+1)x}{n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} - \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

2° Slično je

$$x \cos x = 2 \cos x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2 \sin nx \cos x}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \{\sin (n-1) x + \sin (n+1) x\}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin (n-1) x}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin (n+1) x}{n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{\sin nx}{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{\sin nx}{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{\sin nx}{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{\sin nx}{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2} \sin x + 2 \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n^2-1} \sin nx.$$

3.6.1.25. Proveriti razvoj

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\nu+1)^3} \sin (2\nu+1) x \qquad (0 \leq x \leq \pi).$$

3.6.1.26. Date su sledeće funkcije: 1° $x \mapsto \sin ax \sin mx$, 2° $x \mapsto \sin ax \cos mx$, 3° $x \mapsto \cos ax \sin mx$, 4° $x \mapsto \cos ax \cos mx$, gde je m ceo broj i a realan broj koji nije ceo broj. Razviti date funkcije u Fourierov red u intervalu $(-\pi, +\pi)$.

Rešenje. Razvijamo najpre funkciju $x \mapsto \sin ax$ u Fourierov red u intervalu $(-\pi, +\pi)$. Pošto je ta funkcija neparna, njen Fourierov red ima oblik:

$$\sin ax = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx, \qquad x \in (-\pi, +\pi). \tag{1}$$

Koeficijente b_n određujemo pomoću formule

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos (a-n) x - \cos (a+n) x] \, dx \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin (a-n) x}{a-n} - \frac{\sin (a+n) x}{a+n} \right]_0^{\pi} = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \frac{(-1)^n n}{a^2-n^2}.$$

Polazeći od (1) i vršeći odgovarajuće transformacije, dobijamo:

$$\sin ax \sin mx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx \sin mx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_n \big(\cos (n-m)x - \cos (n+m)x\big)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_n \cos (n-m)x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_n \cos (n+m)x$$

$$= \sum_{n=-m+1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{n+m} \cos nx - \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{n-m} \cos nx$$

$$= \sum_{n=-m+1}^{m-1} \frac{1}{2} b_{n+m} \cos nx + \frac{1}{2} b_{2m} \cos mx + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{n+m} \cos nx$$

$$- \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_{n-m} \cos nx$$

$$= \frac{1}{2} b_m + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{b_{n+m} + b_{-n+m}}{2} \cos nx + \frac{1}{2} b_{2m} \cos mx$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{b_{n+m} - b_{n-m}}{2} \cos nx.$$

Kako je, na osnovu formule (2),

$$\frac{b_{n+m} + b_{-n+m}}{2} = \frac{b_{n+m} - b_{n-m}}{2} = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+m} (a^2 + n^2 + m^2)}{\big(a^2 - (n+m)^2\big)\big(a^2 - (n-m)^2\big)},$$

prethodni razvoj postaje

$$\sin ax \sin mx = \frac{2 \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{(-1)^m m}{a^2 - m^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+m} m (a^2 + n^2 - m^2)}{[a^2 - (n+m)^2]\,[a^2 - (n-m)^2]} \cos nx \right),$$

i važi za $x \in (-\pi, +\pi)$.

***Rešenje* 2.** Slično razvoju (1), dokazujemo da je

$$\cos bx = \frac{\sin b\pi}{b\pi} + \frac{2b \sin b\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{b^2 - n^2}, \qquad x \in (\pi, +\pi), \tag{3}$$

gde pretpostavljamo da b nije ceo broj. Kako je

$$\sin ax \sin mx = \frac{1}{2} [\cos (a-m)x - \cos (a+m)x]$$

i kako $a+m$ i $a-m$ nisu celi brojevi, primenom razvoja (3) dobijamo

$$\sin ax \sin mx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin (a-m)\pi}{(a-m)\pi} + \frac{2(a-m)\sin (a-m)\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{(a-m)^2-n^2}\right.$$

$$\left. - \frac{\sin (a+m)\pi}{(a+m)\pi} - \frac{2(a+m)\sin (a+m)\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{(a+m)^2-n^2}\right).$$

Posle sređivanja izraza na desnoj strani dolazi se do istog razvoja do koga smo došli u rešenju 1.

3.6.1.27. Razviti u Fourierov red funkciju

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \frac{\sin nx}{\sin x} \qquad (|a|<1):$$

1° primenjujući na dati red Euler-Fourierove formule;

2° sumirajući prethodno dati red.

3.6.1.28. Primenjujući na funkciju

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & (|x|<\alpha) \\ 1 & (\alpha < |x| < \pi) \end{cases}$$

Besselovu jednakost, sumirati redove

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}.$$

3.6.1.29. Data je neprekidna periodična funkcija $x \mapsto f(x)$ sa periodom 2π, za koju su ispunjeni Dirichletovi uslovi. Ako su a_n, b_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ njeni Fourierovi koeficijenti, odrediti Fourierove koeficijente A_n i B_n $(n=0,1,2,\ldots)$ periodične funkcije F date sa

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) f(x+t)\, dt.$$

Primenjujući dobijene rezultate, izvesti jednakost

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

***Rešenje* 1.** Funkcija f ima razvoj

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Funkcija $t \mapsto f(t+x)$ takođe je neprekidna periodična funkcija. Neka je odgovarajući red

$$f(t+x) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt),$$

pri čemu je

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x) \cos nt \, dt, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t+x) \sin nt \, dt.$$

Ako se ovde stavi $t + x = y$, dobija se

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+x}^{\pi+x} f(y) \cos n(y-x) \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cos n(y-x) \, dy.$$

Kako je još

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} (\cos nx) \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cos ny \, dy + \frac{1}{\pi} (\sin nx) \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \sin ny \, dy,$$

biće

$$\alpha_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Na isti način dobija se

$$\beta_n = b_n \cos nx - a_n \sin nx \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Prema izloženom, posle množenja, nalazi se

$$f(t) f(x+t) = \frac{a_0^2}{4}$$

$$+ \frac{a_0}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((a_n \cos nt + b_n \sin nt) + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos nt + (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \sin nt \Big)$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos nt + (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \sin nt \Big).$$

Ako se izvrši integracija, prvi član je $\frac{a_0^2}{2}$, dok je drugi član jednak 0. Kad se u poslednjem članu izvrši množenje i integracija od $-\pi$ do $+\pi$, usled ortogonalnosti, svi članovi jednaki su 0, osim onih kod kojih se pod integralom pojavljuje $\cos^2 nt$ ili $\sin^2 nt$. Kako su ovakvi integrali jednaki π, biće

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(a_n (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + b_n (b_n \cos nx - a_n \sin nx) \Big),$$

tj.

$$F(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \cos nx. \tag{2}$$

Iz Fourierovog reda

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

izlazi

$$A_0 = a_0^2, \quad A_n = a_n^2 + b_n^2, \quad B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako se u jednakosti (2) stavi $x = 0$, usled $F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)^2 \, dt$, dolazi se do jednakosti (1), koju je trebalo dokazati.

Primetimo da je integracija reda član po član mogla biti izvršena s obzirom na 1.2.5.7.

***Rešenje* 2.** Kako je, za $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos nt \, dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin nt \, dt,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(u) \cos nu \, du, \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(u) \sin nu \, du,$$

može se staviti

$$(3) \qquad c_n = a_n + ib_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{int} \, dt, \qquad C_n = A_n + iB_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(u) e^{inu} \, du.$$

Odavde je

$$C_n = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} du \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) f(t+u) e^{inu} \, dt,$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} dt \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) f(t+u) e^{inu} \, du.$$

Ako se stavi $u = v - t$, nalazi se

$$C_n = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(t) f(v) e^{inv} e^{-int} \, dv.$$

Kako je $t \to f(t) e^{inv}$ periodična funkcija sa osnovnim periodom 2π, dobija se

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(v) e^{inv} \, dv = \int_{-\pi}^{+\pi} f(v) e^{inv} \, dv,$$

te je

$$C_n = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int} \, dt \right) \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(v) e^{inv} \, dv \right).$$

Odavde na osnovu (3) izlazi

$$C_n = \bar{c}_n c_n = a_n^2 + b_n^2,$$

te je

$$A_n + iB_n = a_n^2 + b_n^2.$$

Dakle,

$$A_n = a_n^2 + b_n^2, \qquad B_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

uz napomenu da je $A_0 = a_0^2$ jer je $b_0 = 0$.

Sada ćemo dokazati jednakost (1). Pošto je, na osnovu prethodnog rezultata,

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) f(x+t) \, dt = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos nx,$$

tj.

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) f(x+t) \, dt = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) \cos nx,$$

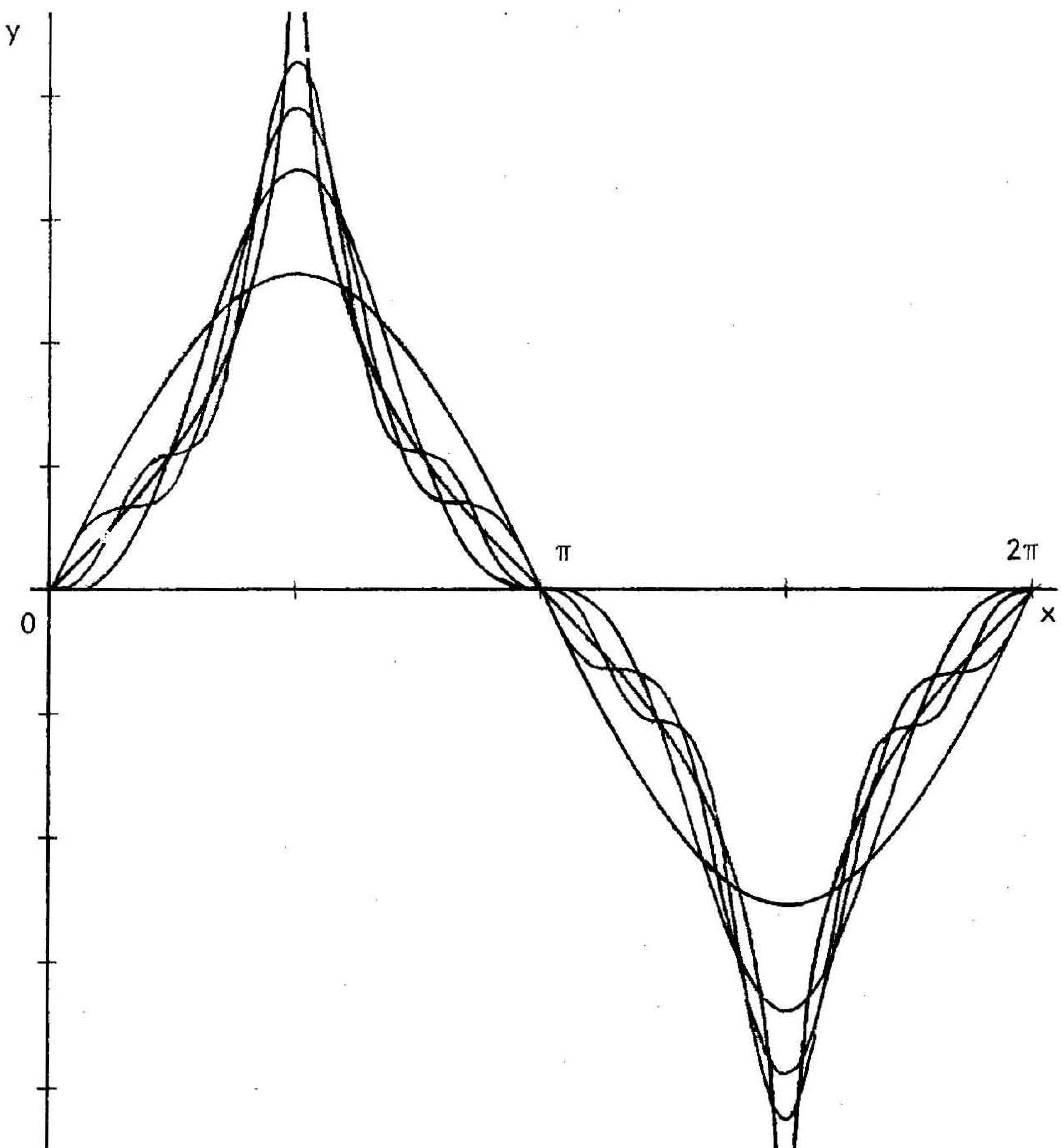
za $x = 0$ dobijamo

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t)^2 \, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

3.6.1.30. Odrediti Fourierov red funkcije $x \mapsto f(x) = \log \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$.

Rezultat. $2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1}$.

Na slici grafički su predstavljene parcijalne sume s_k ovoga reda za $k = 1, 3, 5, 7$.



3.6.1.31. Data je diferencijalna jednačina

$$(1) \qquad y''(x) + y(x) = |\sin x|.$$

Odrediti opšte rešenje jednačine (1) u obliku Fourierovog reda

$$(2) \qquad y(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

i oceniti grešku r_n koja se čini ako se to rešenje aproksimira trigonometrijskim polinomom stepena $2n$.

Rešenje. Ako se zameni u (1) razvoj za $|\sin x|$, dat u zadatku 3.6.1.8 i funkcija y data jednakošću (2), dobija se

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - k^2)(A_k \cos kx + B_k \sin k x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2 k x}{4 k^2 - 1}.$$

Upoređivanjem koeficijenata nalazi se:

$$A_0 = \frac{4}{\pi}, \quad A_{2\nu} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(4 \nu^2 - 1)^2}, \quad A_{2\nu+1} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$B_\nu = 0 \quad (\nu = 2, 3, \ldots); \quad A_1 \text{ i } B_1 \text{ proizvoljni.}$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (2) glasi

$$y(x) = \frac{2}{\pi} + A_1 \cos x + B_1 \sin x + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos 2 k x}{(4 k^2 - 1)^2}.$$

Greška r_n je $\displaystyle\frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\cos 2 k x}{(4 k^2 - 1)^2}$ i za nju važi ocena:

$$|r_n| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(4 k^2 - 1)^2} < \frac{4}{\pi} \int_n^{+\infty} \frac{1}{(4 t^2 - 1)^2} dt.$$

Izračunamo li naznačeni integral, dobija se

$$|r_n| < \frac{2 n}{\pi (4 n^2 - 1)} - \frac{1}{2 \pi} \log \frac{2 n + 1}{2 n - 1}.$$

3.6.1.32. Data je diferencijalna jednačina $2 y y'' = y'^2$.

1° Odrediti partikularni integral $x \mapsto y_p(x)$ date jednačine koji zadovoljava konturne uslove

$$y_p(0) = y_p(2\pi) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

2° Odrediti Fourierov red funkcije $x \mapsto y_p(x)$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$, i dokazati da taj red uniformno konvergira za svako $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ $\left(0 < \varepsilon < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

3° Koliko članova reda treba uzeti u obzir da bi za $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{3\pi}{2}$ ostatak reda bio manji od $\dfrac{1}{50}$?

4° Ako se uzme isti broj članova kao u 3°, koliki će biti ostatak reda za $0 \leq x \leq 2\pi$?

3.6.1.33. Data je diferencijalna jednačina

$$y'' + 16y = f(x),$$

gde je

$$f(x) = x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x < 0\right),$$

$$= 1 \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f(x+\pi) = f(x).$$

Odrediti rešenje ove jednačine u obliku Fourierovog reda.

3.6.1.34. Izraziti funkcije:

$$1^\circ \quad f(x) = 0 \quad (x < 0), \qquad 2^\circ \quad f(x) = 0 \quad (x < 0),$$

$$= e^{-x} \quad (x \geq 0); \qquad = 1 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$= 0 \quad (x > 1)$$

Fourierovim integralom.

Rezultat.

$$1^\circ \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt + t\sin xt}{1+t^2}\,dt; \qquad 2^\circ \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t\cos xt + (1-\cos t)\sin xt}{t}\,dt.$$

3.6.1.35. Funkciju f definisanu sa

$$f(x) = e^{-b|x|}\sin a|x| \quad (-\infty < x < +\infty;\ a, b \text{ realni};\ a \neq 0,\ b \neq 0)$$

predstaviti Fourierovim integralom. Za koje je vrednosti b ovo mogućno?

Rešenje. Da bi funkcija f mogla biti prikazana Fourierovim integralom, dovoljno je, uz konvergenciju odgovarajućeg integrala, da u svakoj tački intervala $(-\infty, +\infty)$ ima konačan levi i desni izvod.

U našem slučaju je:

$$f(x) = -e^{bx}\sin ax \quad (x < 0),$$

$$= 0 \quad (x = 0),$$

$$= e^{-bx}\sin ax \quad (x > 0).$$

Funkcija f je diferencijabilna u svakoj tački intervala $(-\infty, +\infty)$ izuzev u tački $x = 0$. Doista, levi i desni izvodi funkcije f u tački $x = 0$ su redom

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{-e^{bx}\sin ax}{x} = -a,$$

$$f_+'(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-bx}\sin ax}{x} = a.$$

Prema tome, levi izvod i desni izvod u $x = 0$ su konačni, pa je

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt,$$

tj.

$$
(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \left(- \int_{-\infty}^{0} e^{bt} \sin at \cos u(t-x)\, dt + \int_0^{+\infty} e^{-bt} \sin at \cos u(t-x)\, dt \right).
$$

Ako se u integralu $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{bt} \sin at \cos u(t-x)\, dt$ izvrši transformacija $t = -v$ i posle izvršene transformacije integraciona promenljiva ponovo označi sa t, dobija se

$$
f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-bt} \sin at \,\{\cos u(t+x) + \cos u(t-x)\}\, dt,
$$

tj.

$$
(2) \qquad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ux\, du \int_0^{+\infty} e^{-bt} \sin at \cos ut\, dt.
$$

Kako je $\sin at \cos ut = \frac{1}{2}\big(\sin(a+u)t + \sin(a-u)t\big)$, formula (2) postaje

$$
f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos ux\, du \int_0^{+\infty} e^{-bt} \{\sin(a+u)t + \sin(a-u)t\}\, dt.
$$

Drugi integral ima smisla samo ako je $b > 0$. Kako je tada

$$
\int_0^{+\infty} e^{-bt} \sin(a \pm u)t\, dt = \frac{a \pm u}{b^2 + (a \pm u)^2},
$$

dobija se

$$
f(x) = \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{a^2 + b^2 - u^2}{\big(b^2 + (a+u)^2\big)\big(b^2 + (a-u)^2\big)} \cos ux\, du,
$$

tj.

$$
\int_0^{+\infty} \frac{a^2 + b^2 - u^2}{\big(b^2 + (a+u)^2\big)\big(b^2 + (a-u)^2\big)} \cos ux\, du = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2a} e^{bx} \sin ax & (x < 0), \\ 0 & (x = 0), \\ \dfrac{\pi}{2a} e^{-bx} \sin ax & (x > 0). \end{cases}
$$

Ovo važi uz uslov $b > 0$. Ispitati takođe slučaj $b \leq 0$.

3.6.1.36. Neka je $z \mapsto \zeta(z)$ Riemannova zeta funkcija

$$
\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \quad (\operatorname{Re} z > 1), \qquad \zeta(1-z) = \frac{2}{(2\pi)^z} \cdot \cos\frac{z\pi}{2} \cdot \Gamma(z) \cdot \zeta(z).
$$

Za $0 < x < 2\pi$, $\operatorname{Re} a > 0$ i $m = 1, 2, \ldots$ važe jednakosti

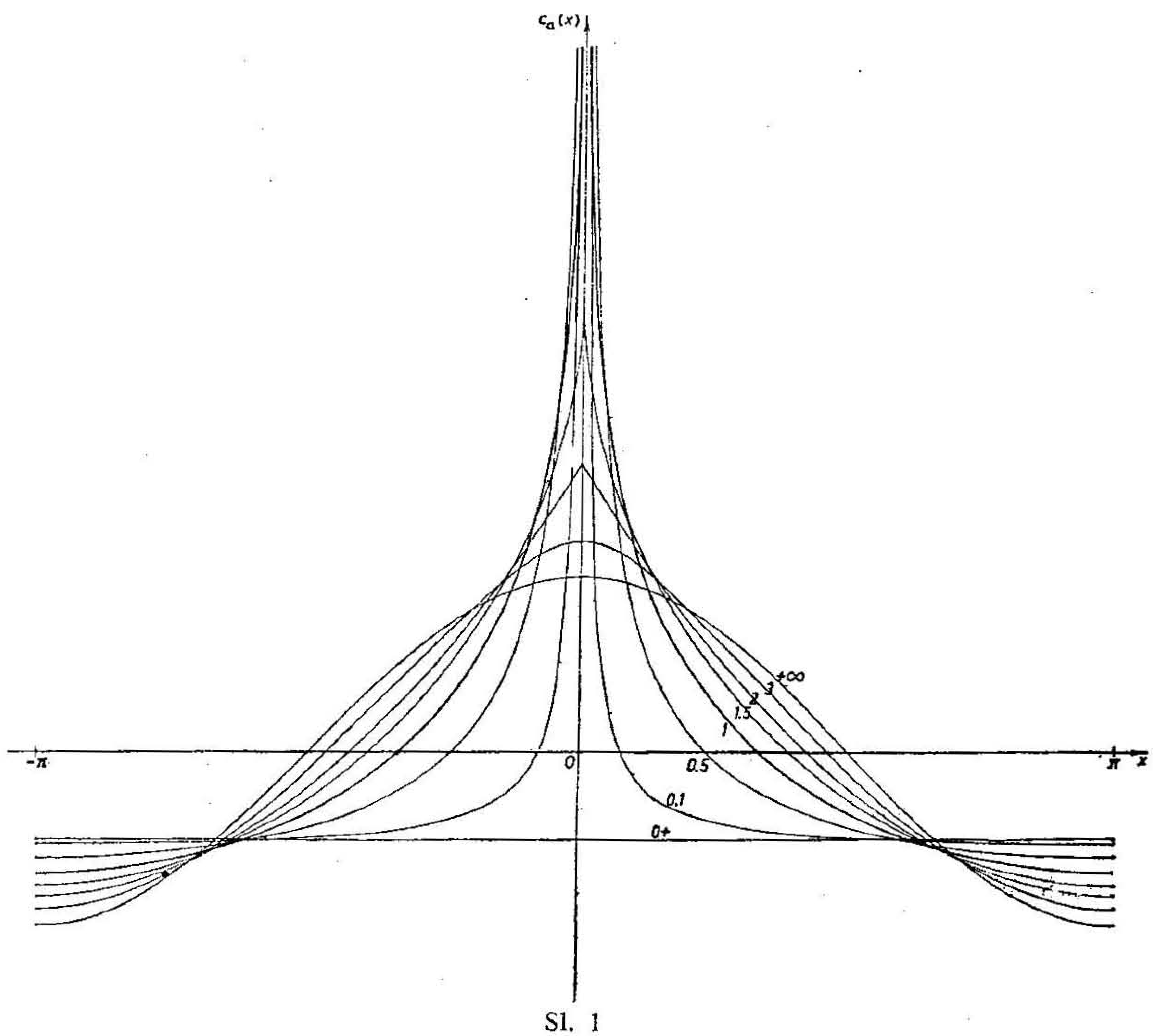
$$(1)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n x}{n^a} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos \frac{a\pi}{2} \cdot \Gamma(a)} x^{a-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \zeta(a-2k)}{(2k)!} x^{2k} \quad (a \neq 2m),$$

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n x}{n^a} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sin \frac{a\pi}{2} \cdot \Gamma(a)} x^{a-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta(a-(2k-1))}{(2k-1)!} x^{2k-1}$$

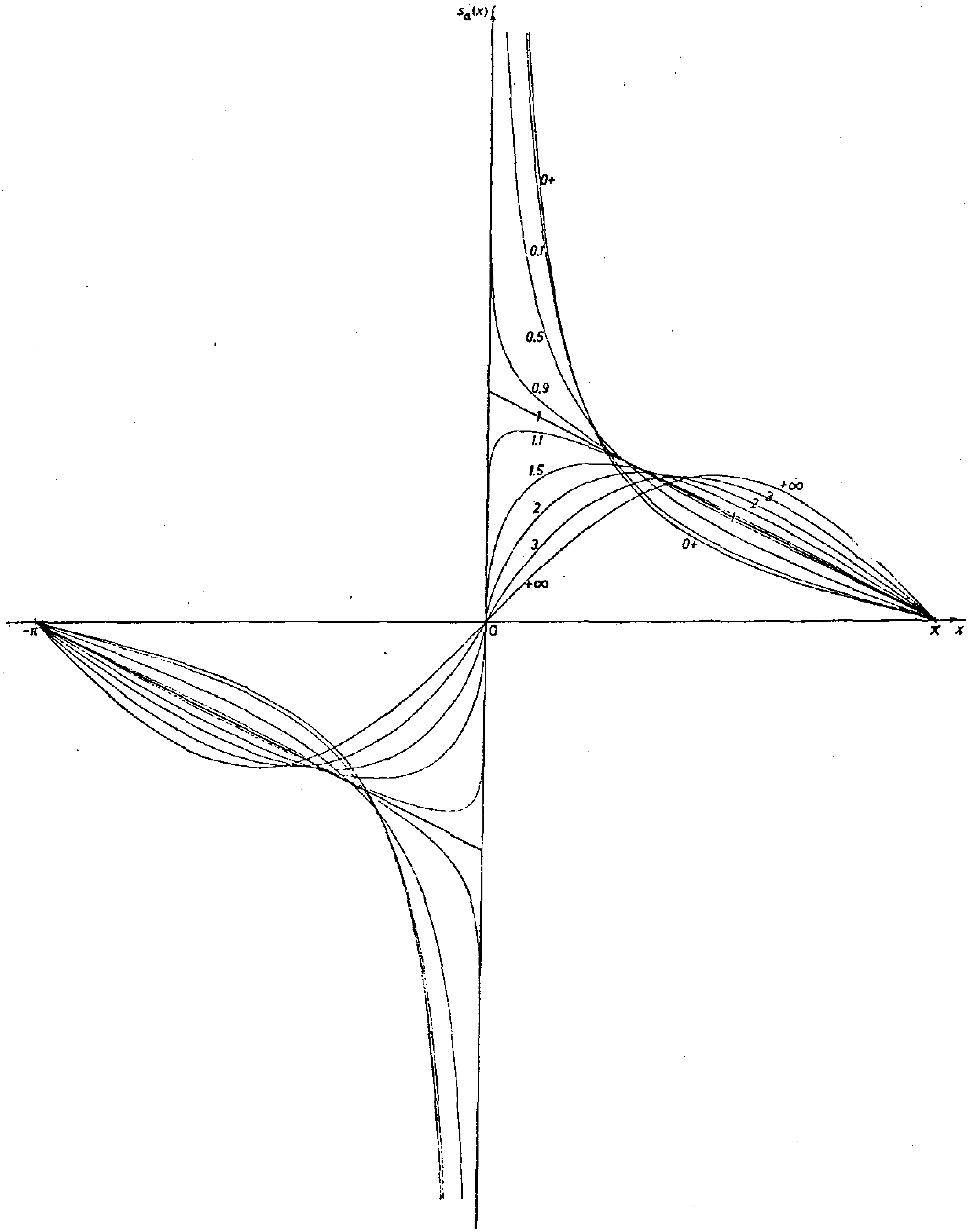
$$(a \neq 2m - 1).$$

Za $a = 2m$, odnosno $a = 2m - 1$, umesto funkcija na desnim stranama jednakosti (1), odnosno (2), treba uzeti njihove granične vrednosti kada $a \to 2m$, odnosno $a \to 2m - 1$.

Na slikama 1 i 2 predstavljene su sume redova (1) i (2) za neke karakteristične vrednosti a.



Sl. 1



Sl. 2

Literatura

D. V. Slavić: *On summation of trigonometric series*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No **247** — No **273** (1969), 107—114.

3.6.1.37. Dokazati da za $\operatorname{Re} s > 0$ i $s \neq m \ (m = 1, 2, \ldots)$ važi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(n-s)}{\Gamma(n)} e^{inx} = \left(2 \sin \frac{x}{2}\right)^{s-1} \exp i \, \frac{(1+s)\,x + (1-s)\,\pi}{2} \, \Gamma(1-s).$$

3.6.1.38. Navesti jedan trigonometrijski red koji nije Fourierov red funkcije sa osobinom $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx < +\infty$ (specijalno, u $[-\pi, \pi]$ u Riemannovom smislu integrabilne funkcije).

Rešenje. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^{\lambda}} \ \left(0 < \lambda \leq \frac{1}{2}\right)$ konvergira za svako $x \in \mathbf{R}$. Međutim, ovaj red ne može biti Fourierov red ovakve funkcije $x \mapsto f(x)$. Pretpostavimo da je tačno suprotno. Tada važi Besselova nejednakost

$$\frac{1}{1^{2\lambda}} + \frac{1}{2^{2\lambda}} + \cdots + \frac{1}{n^{2\lambda}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx.$$

Ako $n \to +\infty$, leva strana ove nejednakosti teži ka $+\infty$, dok je desna strana konačna. Iz ove kontradikcije izlazi tvrđenje.

B. R. Gelbaum-J. M. H. Olmsted: *Counterexamples in Analysis*. San Francisco-London--Amsterdam 1965. — Posebno videti: str. 70—71.

Literatura

D. V. Slavić: *On summation of series*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No **302**—No **319** (1970), 53—59.

4. NIZOVI I REDOVI U KOMPLEKSNOM PODRUČJU

4.1. Dokazati da niz kompleksnih brojeva $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira ka kompleksnom broju z ako i samo ako

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z.$$

Rešenje. Stavimo $\operatorname{Re} z_n = x_n$, $\operatorname{Im} z_n = y_n$, $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$. Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$, tada je, prema stavu 1.2.14,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} (x_n + iy_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + i \lim_{n\to+\infty} y_n = x + iy.$$

Obrnuto, ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = z$, tada iz nejednakosti

$$|x_n - x| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \le |z_n - z|, \ |y_n - y| = |\operatorname{Im}(z_n - z)| \le |z_n - z| \ (n \in \mathbf{N})$$

izlazi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.

4.2. Naći graničnu vrednost niza $\left(\dfrac{n+i}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ i ispitati raspored njegovih članova u kompleksnoj ravni.

Rešenje. Imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+i}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1+\dfrac{i}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} \right) = 0 \cdot 1 = 0.$$

Do istog zaključka dolazi se posmatranjem niza realnih delova članova datog niza

(1) $$x_n = \frac{n}{n^2+1} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

i niza imaginarnih delova njegovih članova

(2) $$y_n = \frac{1}{n^2+1} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Prema (1) i (2),

$$y_n = \frac{1}{n} \cdot x_n, \qquad x_n^2 + y_n^2 = y_n \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Odavde se izvodi zaključak da se n-ti član posmatranog niza nalazi na preseku prave $y = \frac{1}{n} x$ i kruga $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, tako da se svi članovi ovog niza nalaze na pomenutom krugu.

4.3. Odrediti tačke nagomilavanja niza $z_n = \frac{n}{n+1} \cdot i^n$ $(n \in \mathbf{N})$ i ispitati raspored njegovih članova u kompleksnoj ravni.

Rezultat. Tačke nagomilavanja: $1, \ -1, \ i, \ -i$.

4.4. Dat je niz $s_n = s_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+1)\theta}{2^k}$.

Izračunati $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} s_k\right)$.

Uputstvo. Ustanoviti najpre da je

$$s_n(\theta) = \operatorname{Im}\left(e^{i\theta} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{e^{i\theta}}{2}\right)^k\right).$$

4.5. Neka je

$$f_1(z) = f(z) = \frac{1}{2}(z + |z|) \qquad (z = x + iy),$$
$$f_n(z) = f\big(f_{n-1}(z)\big) \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Odrediti $\lim_{n \to +\infty} f_n(i)$.

Rezultat. $\frac{2}{\pi}$.

Primedba. Važi i sledeći opštiji rezultat:

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(z) = \frac{\operatorname{Im} z}{\arg z} \quad \big(\arg z \neq 0 \quad \text{i} \quad \arg z \in (-\pi, \pi]\big)$$
$$= z \ (\arg z = 0).$$

4.6. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n}$ konvergira i odrediti njegovu sumu.

Rešenje. Stavimo $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{i^k}{k}$ $(k \in \mathbf{N})$. Imamo

$$S_{4n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$
$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + i \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \to -\frac{1}{2} \log 2 + i \frac{\pi}{4} \quad (n \to +\infty).$$

jer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Kako je

$$S_{4n-3} = S_{4n} + o(1), \quad S_{4n-2} = S_{4n} + o(1), \quad S_{4n-1} = S_{4n} + o(1) \qquad (n \to +\infty),$$

došli smo do zaključka da posmatrani red konvergira i da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{n} = -\log 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

Primedba. Na osnovu rezultata u 3.6.1.23 pod 1°, dobija se opštija jednakost

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\log\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\pi-\theta}{2} \qquad (0 < \theta < 2\pi).$$

4.7. Proveriti da li je tačan razvoj:

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty} (b^{-n-1} - a^{-n-1})\, z^n \qquad (|z| < |a|),$$

$$= \frac{1}{a-b}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-n-1} z^n\right) \qquad (|a|<|z|<|b|),$$

$$= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{n+1} - b^{n+1})\, z^{-n-2} \qquad (|z|>|b|),$$

gde je $a \neq 0$ i $|a|<|b|$.

Rešenje. Iz identiteta

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b}\,\frac{1}{1-\frac{z}{b}} - \frac{1}{a}\,\frac{1}{1-\frac{z}{a}}\right)$$

sleduje prvi od razvoja navedenih u tekstu zadatka.

Drugi i treći razvoj sleduju redom iz identiteta

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{a}{z}} + \frac{1}{b}\,\frac{1}{1-\frac{z}{b}}\right)$$

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{a}{z}} - \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\frac{b}{z}}\right).$$

4.8. Proveriti da li su u važnosti razvoji:

1° $\dfrac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{2^{n+1}}\quad(|z|<2);\qquad \dfrac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^n}{z^{n+1}}\qquad(|z|>2);$

2° $\dfrac{1}{(z-1)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,z^n\qquad(|z|<1)$

$$=\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\frac{1}{z^n}\qquad(|z|>1);$$

3° $\dfrac{1}{(z-a)^m}=(-a)^{-m}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\cdot\dfrac{z^n}{a^n}\right)\qquad(|z|<|a|),$

$$=\frac{1}{z^m}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!}\frac{a^n}{z^{m+n}}\qquad(|z|>|a|)$$

(m prirodan broj).

Uputstvo.

1° Za $|z|<2$ poći od $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2\left(1-\dfrac{z}{2}\right)}$.

Za $|z|>2$ poći od $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{z\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}$.

4.9. Proveriti i obrazložiti rezultate:

1° $\dfrac{\operatorname{sh} z}{z^2}=\dfrac{1}{z}+\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k+1)!}z^{2k-1}\qquad(|z|>0);$

2° $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}=\dfrac{1}{z}+1-\dfrac{1}{2}z-\dfrac{5}{6}z^2+\cdots\qquad(0<|z|<1);$

3° $\dfrac{1}{z^2(1-z)}=\sum_{k=0}^{+\infty}z^{k-2}\qquad(0<|z|<1)$

$$=-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{k+3}}\qquad(|z|>1);$$

4° $\dfrac{z-1}{z^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(k+1)(z-1)^{k+1}\qquad(|z-1|<1).$

4.10. Odrediti oblast konvergencije u z-ravni reda

$$1+(1-z^2)+(1-z^2)^2+\cdots+(1-z^2)^n+\cdots$$

Koliki je zbir ovoga reda?

Rezultat. Oblast konvergencije određena je sa $|1-z^2|<1$, a zbir ovoga reda je $1/z^2$ u toj oblasti.

4.11. Dokazati da je

$$\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-2^{-n})\,z^{n-1}\qquad(|z|<1),$$

$$=-4\sum_{n=0}^{+\infty}2^{2n}\left(z-\frac{3}{2}\right)^{2n}\qquad\left(\left|z-\frac{3}{2}\right|<\frac{1}{2}\right).$$

4.12. Dokazati da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p^{n^2} z^n$ $(0<p<1)$ konvergira za svako z.

4.13. Odrediti poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ ako

$$\frac{a_{3p+1}}{a_{3p}}\to r_1\neq 0,\quad \frac{a_{3p+2}}{a_{3p+1}}\to r_2\neq 0,\quad \frac{a_{3p}}{a_{3p-1}}\to r_3\neq 0\quad (p\to+\infty).$$

Generalisati.

4.14. Ako su R_1 i R_2 poluprečnici konvergencije redova $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ respektivno, i ako je $0<R_1<R_2<+\infty$, tada je R_1 poluprečnik konvergencije reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)\,z^n$. Posebno ispitati slučaj $R_1=R_2$.

4.15. Dokazati da koeficijenti a_0, a_1, a_2, ... u razvoju

$$\frac{1}{1-z-z^2}=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots$$

formiraju Fibonacciev niz

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

i da je

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

4.16. Odrediti koeficijente $a_1, \ldots, a_k$ tako da je $z=0$ nula reda $k+1$ funkcije f date sa

$$f(z)=1-(1-z)\exp(a_1 z+a_2 z^2+\cdots+a_k z^k).$$

Rezultat. $a_r=\dfrac{1}{r}\quad(r=1,\ldots,k).$

4.17. Dokazati da je Lambertov red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{z^n}{1-z^n}$ konvergentan za $|z|<1$ a divergentan za $|z|\geq 1$.

Dokaz. Za $n = 1, 2, \ldots,$ i $|z| < 1$ jedna za drugom važe nejednakosti:

$$|z|^n \leq |z|,$$
$$|1 - z^n| \geq 1 - |z|^n \geq 1 - |z|,$$
$$\left|\frac{z^n}{1 - z^n}\right| \leq \frac{|z|^n}{1 - |z|}.$$

Na osnovu ove nejednakosti zaključujemo da je Lambertov red konvergentan za $|z| < 1$. Za $|z| \geq 1$ red divergira, jer njegov opšti član ne teži nuli.

4.18. Dokazati da red

$$\frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \frac{z^4}{1 - z^8} + \cdots$$

konvergira ka $\dfrac{z}{1 - z}$ ako je $|z| < 1$, i ka $\dfrac{1}{1 - z}$ ako je $|z| > 1$.

Dokaz. Kako je

$$\frac{z^{2^k}}{1 - z^{2^{k+1}}} = \frac{z^{2^k}}{1 - z^{2^k}} - \frac{z^{2^{k+1}}}{1 - z^{2^{k+1}}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

sabiranjem ovih jednakosti za $k = 0, 1, \ldots, n$ dobijamo

$$S_n = \frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} + \cdots + \frac{z^{2^{n-1}}}{1 - z^{2^k}} + \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z} - \frac{z^{2^{n+1}}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Odavde izlazi

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{z}{1 - z} \qquad (|z| < 1),$$
$$= \frac{1}{1 - z} \qquad (|z| > 1).$$

4.19. Razviti kompleksnu funkciju

$$z \mapsto f(z) = \frac{z^2 \cos az}{(z^2 + 1)(z^2 + 2)} \quad (a > 0)$$

u red koji konvergira za $|z| > \sqrt{2}$.

4.20. Ako se funkcija $z \mapsto \dfrac{1}{\cos z}$ predstavi u obliku reda

$$\frac{1}{\cos z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

dokazati da Eulerovi brojevi E_{2n} zadovoljavaju jednakosti

$$E_0 + \binom{2n}{2} E_2 + \cdots + \binom{2n}{2n} E_{2n} = 0 \quad (n \in \mathbf{N};\ E_0 = 1).$$

4.21. Dokazati da:

1° $z_n \to 0\ (n \to +\infty) \Rightarrow \left(1 + \dfrac{z_n}{n}\right)^n \to 1 \quad (n \to +\infty);$

$$2^\circ \ z_n \to 1 \ (n \to +\infty) \Rightarrow \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \to e \quad (n \to +\infty),$$

gde je (z_n) niz kompleksnih brojeva

Dokaz. Pođimo od nejednakosti

$$(1) \qquad \left|\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n - 1\right| = \left|1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{z_n^k}{n^k} - 1\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k} = \left(1 + \frac{|z_n|}{n}\right)^n - 1.$$

Tvrđenje 1° sleduje neposredno iz poslednje nejednakosti.

Tvrđenje 2° sleduje iz 1° ako se stavi $z_n = 1 + y_n$ i primeti da je

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y_n}{n+1}\right)^n.$$

4.22. Neka je eksponencijalna funkcija $z \mapsto e^z$ definisana sa

$$e^z = e^x \operatorname{cis} y,$$

gde je $\operatorname{cis} y = \cos y + i \sin y$. Dokazati da

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to e^z \ (n \to +\infty)$$

za svako kompleksno z. Dokazati takođe da je konvergencija uniformna na svakom krugu $|z| \leq R < +\infty$.

Dokaz. Prostom transformacijom dobija se

$$(1) \qquad 1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{x}{n} + i\frac{y}{n} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 + i\frac{y}{n+x}\right).$$

Drugi faktor može se napisati u obliku

$$(2) \qquad 1 + i\frac{y}{n+x} = \left(1 + \frac{y^2}{(n+x)^2}\right)^{1/2} \operatorname{cis}\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}\right),$$

gde je uzeta glavna vrednost funkcije $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ zato što je realni deo leve strane pozitivan. Na osnovu (1) i (2) imamo

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{y^2}{(n+x)^2}\right)^{n/2} \operatorname{cis}\left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}\right).$$

Prvi faktor na desnoj strani teži ka e^x kada $n \to +\infty$, drugi faktor teži ka 1. Kompleksna funkcija $y \to \operatorname{cis} y$ realne promenljive y je neprekidna. Otuda,

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{cis}\left(n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}\right) = \operatorname{cis}\left(\lim_{n \to +\infty} n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}\right) = \operatorname{cis} y.$$

Odavde sleduje da je

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x \cdot 1 \cdot \operatorname{cis} y = e^z.$$

Sada ćemo dokazati da je konvergencija uniformna na krugu $|z| \leq R < +\infty$, gde je R proizvoljno izabrano. Neka je $\varepsilon\ (> 0)$ fiksno. Možemo odrediti prirodan broj m takav da je

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{R^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Koristeći

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!},$$

i uzimajući da je $|z|\le R$, $n\ge m$, dobijamo

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{z^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{m}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{R^k}{k!}+\sum_{k=m+1}^{+\infty}\frac{R^k}{k!}$$

$$<\sum_{k=0}^{m}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right)\frac{R^k}{k!}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Prvi sabirak na desnoj strani teži ka nuli kada $n\to+\infty$. Prema tome, postoji $n_0\ge m$ takvo da je za $n\ge n_0$ ovaj sabirak manji od $\frac{\varepsilon}{2}$. Dakle, za $n\ge n_0$ imamo

$$\left|e^z-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\qquad(|z|\le R).$$

Primedba. Ovde smo na dva načina dokazali da niz $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N}_0)$ konvergira ka e^z: »elementarno« i postupkom koji koristi potencijalni razvoj funkcije $z\mapsto e^z$.

4.23. Ako je $R\,(>0)$ radijus konvergencije reda $f(z)=\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_\nu(z-z_0)^\nu$, dokazati formulu

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty}a_{k+n\nu}(z-z_0)^{k+n\nu}=\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\varepsilon^{-pk}f\left((z_0+\varepsilon^p(z-z_0)\right)$$

$$\left(\varepsilon=\exp\frac{2\pi i}{n};\ k=0,1,\dots,n-1\right).$$

4.24. Dokazati da su sve tačke jediničnog kruga $|z|=1$ singularne za analitičku funkciju $z\mapsto f(z)$ definisanu redom

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2^n}.$$

4.25. Data je funkcija

$$z\mapsto f(z)=\frac{1}{a-e^{-iz}}\quad(a>1).$$

1° Razviti ovu funkciju po stepenima od e^{-iz}. Ispitati u kojim oblastima z-ravni dobijeni red konvergira u običnom smislu, apsolutno, odnosno uniformno. Specijalno, ispitati ponašanje reda na rubu oblasti konvergencije.

4.26. Odrediti poluprečnik i krug konvergencije sledećih redova u kompleksnom području:

1° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-1-i)^n}{2^n n}$; 2° $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n}{(n+1)(n+2)} z^n$;

3° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha+i\beta}}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$; 4° $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n} (1+ki)} z^n$.

4.27. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^a \exp(b\,ni + c\sqrt{n}) \qquad (i \text{ imaginarna jedinica})$$

u zavisnosti od realnih vrednosti konstanti a, b, c.

Rešenje. Kako je

$$|n^a \exp(b\,ni + c\sqrt{n})| = n^a \exp(c\sqrt{n}),$$

posmatrani red apsolutno konvergira kada je $c < 0$, ili $c = 0$ i $a < -1$, divergira kada je $c > 0$, ili $c = 0$ i $a \geq 0$, a ne konvergira apsolutno kada je $c = 0$ i $-1 \leq a < 0$. Neka je $c = 0$ i $-1 \leq a < 0$. Ako je tada $b \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, zbog

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{bki}\right| = \left|\frac{1-e^{b(n+1)i}}{1-e^{bi}}\right| \leq \frac{2}{|1-e^{bi}|},$$

posmatrani red, koji u ovom slučaju postaje $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^a e^{bni}$, prema Dirichletovom kriterijumu konvergira. Najzad, ako je $c = 0$, $-1 \leq a < 0$ i $b \in \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, posmatrani red očigledno divergira.

Došli smo, dakle, do sledećih rezultata: red apsolutno konvergira kada je $c < 0$, ili $c = 0$ i $a < -1$, neapsolutno konvergira kada je $c = 0$, $-1 \leq a < 0$ i $b \notin \{2k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, a u svim ostalim slučajevima divergira.

4.28. Množenjem potencijalnih redova, dokazati jednakosti

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}, \quad \sin(2z) = 2 \sin z \cdot \cos z,$$

gde je $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Rešenje. Prema stavu 1.2.1.7, za $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ imamo

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z_1^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z_2^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} z_1^k z_2^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z_1+z_2)^n = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

2° Iz reda dobijenog pod 1° izvesti trigonometrijski (Fourierov) red za funkciju

$$x \mapsto \frac{\sin x}{1+a^2-2\,a\cos x}$$

i, koristeći ovaj red, izračunati integral $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+a^2-2\,a\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Rešenje. 1° Za $|a^{-1} e^{-iz}| < 1$, tj. za $e^y < a \, (z = x + iy)$, imamo

$$f(z) = \frac{1}{a-e^{-iz}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1-a^{-1}e^{-iz}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} e^{-inz} \tag{1}$$

Dobijeni red, prema prethodnom, apsolutno konvergira za $\operatorname{Im} z < \log a$, a divergira za $\operatorname{Im} z \geq \log a$, jer za ove vrednosti z opšti član ne teži nuli. Kako je, za $\operatorname{Im} z \leq \log a - \delta \; (\delta > 0)$,

$$|a^{-1}e^{-iz}| = a^{-1}e^{y} \leq a^{-1}a\,e^{-\delta} = e^{-\delta},$$

posmatrani red uniformno konvergira u svakoj poluravni $\operatorname{Im} z \leq \log a - \delta \qquad (\delta > 0)$.

2° Za $z = x \in \mathbf{R}$ $(y = 0 < \log a)$, (1) postaje

$$\frac{1}{a-e^{-ix}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n} e^{-inx} \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{2}$$

Kako je

$$\frac{1}{a-e^{-ix}} = \frac{a-e^{ix}}{(a-e^{-ix})(a-e^{ix})} = \frac{a-\cos x - i\sin x}{1+a^2-2a\cos x}, \tag{3}$$

izjednačavanje imaginarnih delova leve i desne strane jednakosti (2) daje

$$\frac{\sin x}{1+a^2-2\,a\cos x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n-1} \sin nx \qquad (x \in \mathbf{R}). \tag{4}$$

Red na desnoj strani u (4) uniformno konvergira za $x \in \mathbf{R}$, te je stoga Fourierov red funkcije na levoj strani, i to za svaki interval oblika $[\alpha, \alpha + 2\pi] \quad (\alpha \in \mathbf{R})$.

Iz (4) izlazi, s obzirom na pomenutu uniformnu kovergenciju,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+a^2-2\,a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n-1} \int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n-1}\,\frac{1-(-1)^n}{n} = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{-2n+1}}{2n-1} \\ &= \frac{2}{a}\,\frac{1}{2}\log\frac{1+a^{-1}}{1-a^{-1}} = \frac{1}{a}\log\frac{a+1}{a-1}.\end{aligned}$$

Primedba. Iz (2) se, s obzirom na (3), izjednačavanjem realnih delova izvodi jednakost

$$\frac{a-\cos x}{1+a^2-2a\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{-n-1}\cos nx \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

gde je desna strana Fourierov red funkcije na levoj strani. Odatle neposredno izlazi rezultat

$$\int_0^{\pi} \frac{a-\cos x}{1+a^2-2a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a}.$$

Isto tako, za $z \in \mathbf{C}$ imamo

$$2 \sin z \cos z = 2z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$$= 2z \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!\,(2n-2k)!}$$

$$= 2z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}$$

$$= 2z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} z^{2n}\, 2^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2z)^{2n+1} = \sin (2z),$$

gde je iskorišćen identitet

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n} \qquad (n \in \mathbf{N}_0).$$

4.29. Dokazati Fejérovu nejednakost

$$|E(z, p) - 1| \leq |z|^{p+1} \qquad (|z| \leq 1),$$

gde je

$$E(z, p) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Dokaz. Za funkciju E važi razvoj

(1) $$E(z, p) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_{kp} z^k.$$

Za izvod funkcije E

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E(z, p) = -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$$

važi razvoj

(2) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E(z, p) = -z^p \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_{kp} z^k\right),$$

gde su brojevi B_{kp} $(k = 1, 2, \ldots)$ pozitivni.

Polazeći od (1), dobija se

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} E(z, p) = \sum_{k=1}^{+\infty} k A_{kp} z^{k-1}.$$

Poređenjem (2) i (3) nalazi se

(4) $$A_{1p} = A_{2p} = \cdots = A_{pp} = 0 \text{ i } A_{kp} < 0 \qquad (k > p).$$

Ako se uzmu u obzir formule (4), iz (1) izlazi

(5) $$|E(z, p) - 1| = \left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} A_{kp} z^k \right|$$

$$\leq \sum_{k=p+1}^{+\infty} |A_{kp}|\, |z|^k$$

$$= |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{+\infty} |A_{kp}|\, |z|^{k-p-1}.$$

Kako je $|z| \leq 1$, na osnovu (5) biće

(6) $$|E(z, p) - 1| \leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{+\infty} |A_{kp}|.$$

Budući da je $E(1, p) = 0$, prema (1) i (4) je

(7) $$\sum_{k=p+1}^{+\infty} A_{kp} = -1.$$

Kako su svi A_{kp}, za $k > p$, negativni, iz (7) proističe

(8) $$\sum_{k=p+1}^{+\infty} |A_{kp}| = 1.$$

Polazeći od (6) i uzimajući u obzir (8), dobija se

$$|E(z, p) - 1| \leq |z|^{p+1} \qquad (|z| \leq 1;\ p \text{ prirodan broj}).$$

Literatura

E. Hille: *Analytic Function Theory*, vol. 1. Boston—New York 1959, p. 227.

4.30. Dokazati da se Riemannova zeta-funkcija može predstaviti redom

$$\zeta(s) = -\Gamma(1-s) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{n^s} - \frac{\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(n+1)} \right\} \qquad (\operatorname{Re} s > 0),$$

gde za $\Gamma(k)$ $(k = 0, -1, -2, \ldots)$ treba uzeti

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Gamma(k-\varepsilon) + \Gamma(k+\varepsilon)}{2}.$$

Literatura

D. V. Slavić: *On summation of series*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No **302**—No **318** (1970), 53—59.

4.31. Ako je $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right) \qquad (n \to +\infty),$$

gde je a kompleksan broj i $\varepsilon > 0$, dokazati da je

$$a_n \sim K n^{-a} \qquad (n \to +\infty),$$

sa konstantom $K \neq 0$.

5. RAZNI PROBLEMI

5.1. Primenom redova i korišćenjem rezultata $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ izračunati integral

$$I = \int_0^1 \log x \cdot \log (1 - x) \, \mathrm{d}x.$$

Rešenje. Pođimo od razvoja

$$-\log (1 - x) = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \cdots \qquad (-1 \leq x < +1)$$

i izračunajmo integral

$$J_k = \int_0^1 x^k \log x \, \mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Primenom parcijalne integracije dobijamo

$$J_k = -\frac{1}{(k+1)^2}, \qquad I = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(k+1)^2}.$$

Kako je

$$\frac{1}{k\,(k+1)^2} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2},$$

dobijamo

$$I = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$

Da bismo izračunali zbir poslednjeg numeričkog reda, koristimo rezultat dat u tekstu zadatka. Na taj način dobijamo $I = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

Izvršena integracija član po član lako se može opravdati.

5.2. Izračunati $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 \mathrm{d}x.$

Rešenje. J može se rastaviti na dva integrala

$$J = 2 \int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} \, \mathrm{d}x + 2 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \log \frac{x+1}{x-1} \, \mathrm{d}x.$$

Stavimo li $x = 1/t$, dobijamo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \log \frac{x+1}{x-1} \, dx = \int_1^0 t \log \frac{1+t}{1-t} \, d\,\frac{1}{t} = \int_0^1 \frac{1}{t} \log \frac{1+t}{1-t} \, dt.$$

Prema tome, imamo

$$J = 4 \int_0^1 \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} \, dx. \tag{1}$$

Ako funkciju f datu sa

$$f(x) = \frac{1}{x} \log \frac{1+x}{1-x} \qquad (x \neq 0 \text{ i } |x| < 1),\ f(0) = 2,$$

razvijemo u red oblika $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, integral (1) postaje

$$J = 8 \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \right) dx = 8 \lim_{\varepsilon \to 1-0} \int_0^{\varepsilon} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k+1} \right) dx$$

$$= 8 \lim_{\varepsilon \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^{2k+1}}{(2k+1)^2} = 8 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Kako je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

nalazimo

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \log \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^2 dx = \pi^2.$$

5.3. Izračunati $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{3(n^2+k^2)+4k+1} \operatorname{arctg} \dfrac{3k+1}{3n}$.

Rešenje. Ako stavimo

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3(n^2+k^2)+4k+1} \operatorname{arctg} \frac{3k+1}{3n},$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3(n^2+k^2)+4k+1} \operatorname{arctg} \frac{k}{n},$$

$$c_n = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \operatorname{arctg} \frac{k}{n},$$

imamo

$$|a_n - b_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{3(n^2+k^2)+4k+1} \operatorname{arctg} \frac{\dfrac{1}{3n}}{1 + \dfrac{3k+1}{3n} \dfrac{k}{n}}$$

$$\leq n \cdot \frac{1}{3n} \operatorname{arctg} \frac{1}{3n} \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

$$|b_n - c_n| = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{n(4k+1)}{[3(n^2+k^2)+4k+1](n^2+k^2)} \operatorname{arctg}\frac{k}{n}$$

$$\leq \frac{4n+1}{9n^2}\operatorname{arctg} 1 \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Odavde izlazi

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\operatorname{arctg}\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}^2 x\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{96}.$$

5.4. Za koje vrednosti x konvergira red

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - n)(x^2 - x)^n ?$$

Odrediti u konačnom obliku funkciju F koju definiše (1) za vrednosti x za koje dati red konvergira.

Rezultat. Red (1) je konvergentan ako je $|x^2 - x| < 1$, tj. ako je $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Tražena funkcija F data je sa

$$F(x) = 2x^2(x-1)^2/(1+x-x^2)^3 \qquad (|x^2-x|<1).$$

5.5. Dokazati da je red $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x^n \operatorname{sh}(n+1)a\right)$ konvergentan, ako je $|x| < e^{-a}$ $(a > 0)$, i da je njegov zbir $\operatorname{sh} a/(1 - 2x \operatorname{ch} a + x^2)$.

5.6. Odrediti potencijalni red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ funkcije $x \mapsto \cos^4 x$ i ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n)!\, a_n x^{2n}$.

Rešenje. Kako je

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

kao i

$$\cos 2x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, \quad \cos 4x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!},$$

imamo

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!},$$

tj.

$$\cos^4 x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\frac{2^{2n}}{(2n)!} + \frac{1}{8}\frac{4^{2n}}{(2n)!}\right) x^{2n}.$$

Traženi red je, dakle,

(1) $$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n (2^{2n-1} + 2^{4n-3}) x^{2n},$$

i njegov poluprečnik konvergencije je $R = \frac{1}{4}$, jer je

$$R^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n-1} + 2^{4n-3}}{2^{2n+1} + 2^{4n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{-2n-2} + 2^{-4}}{2^{-2n} + 1} = \frac{1}{2^4}.$$

Za $x = \frac{1}{4}$ i $x = -\frac{1}{4}$ red (1) divergira jer red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{8}\right)$$

divergira. Prema tome, red (1) konvergira za $x \in \left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right)$, a divergira za $x \notin \left(-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}\right)$.

5.7. 1° Ako koeficijenti a_n reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ zadovoljavaju relacije

$$\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| \to L_1, \qquad \left|\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right| \to L_2 \qquad (n \to +\infty;\ L_1, L_2 \in (0, +\infty)),$$

dokazati da je poluprečnik konvergencije ovog reda

(1) $$R = \frac{1}{(L_1 L_2)^{1/2}}.$$

2° Da li jednakost (1) ostaje u važnosti i kada jedna ili obe veličine uzimaju vrednost iz skupa $\{0, +\infty\}$?

3° Navesti primere ovakvih redova.

Rešenje. 1° Pod uslovom da je $L_1 \in (0, +\infty)$, $L_2 \in (0, +\infty)$ imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+2}\, x^{2n+2}}{a_{2n}\, x^{2n}}\right| = |x|^2 \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = |x|^2 \cdot L_1 L_2,$$

tako da red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n}$ konvergira ili divergira prema tome da li je

$$|x| < \frac{1}{(L_1 L_2)^{1/2}} \quad \text{ili} \quad |x| > \frac{1}{(L_1 L_2)^{1/2}}.$$

Na sličan način ustanovljava se isto i za red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1} x^{2n-1}$. Iz ova dva rezultata neposredno sleduje tvrđenje.

2° Prethodno rasuđivanje i rezultat tog rasuđivanja — jednakost (1) lako se mogu preneti na slučajeve kad je $L_1 \in \{0, +\infty\}$ ili $L_2 \in \{0, +\infty\}$, uz isključenje slučaja $L_1 = 0$, $L_2 = +\infty$ i slučaja $L_1 = +\infty$, $L_2 = 0$, kada proizvod $L_1 L_2$ gubi smisao.

3° Kod reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ sa $a_{2n-1} = a_{2n} = 2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je $L_1 = 2$, $L_2 = 1$ i stoga $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

U slučaju reda kod koga je $a_{2n-1} = a_{2n} = \frac{1}{n!}$ $(n = 1, 2, \ldots)$: $L_1 = 0$, $L_2 = 1$, i stoga $R = +\infty$.

Najzad, za oba reda $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n$, gde je za $n = 1, 2 \ldots$

$$b_{2n-1} = 2^{2n-1}, \quad b_{2n} = 3^{2n};$$

$$c_{2n-1} = \frac{1}{(2n)!}, \quad c_{2n} = \frac{1}{n!},$$

imamo $L_1 = 0$, $L_2 = +\infty$. Međutim, može se ustanoviti da je u prvom slučaju $R = \frac{1}{3}$, a u drugom $R = +\infty$.

5.8. 1° Potencijalni red sa konačnim poluprečnikom konvergencije ne može uniformno konvergirati na skupu čija je tačka nagomilavanja neka tačka kruga konvergencije u kojoj red divergira.

2° Potencijalni red koji se ne svodi na polinom i ima beskonačan poluprečnik konvergencije ne može uniformno konvergirati ni na jednom neograničenom delu kompleksne ravni (realne prave).

Dokaz. 1° Neka je $R \in (0, +\infty)$ poluprečnik konvergencije potencijalnog reda

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \tag{1}$$

i neka red (1) divergira za $x = a$, gde je $|a| = R$. Neka je, zatim, S bilo koji skup tačaka koji je sadržan u krugu konvergencije, odnosno, u realnom slučaju, u intervalu konvergencije, reda (1) i koji ima a kao tačku nagomilavanja. Ako bi red (1) uniformno konvergirao na skupu S, za proizvoljno izabrano $\varepsilon > 0$ postojao bi prirodan broj n_0 takav da je, za bilo koje prirodne brojeve m i n koji ispunjavaju uslov $m \geq n \geq n_0$ i za svako $x \in S$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Za fiksirane ovakve brojeve m i n, dobilo bi se onda, puštajući da $x \to a$ preko skupa S,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k a^k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{2}$$

Dakle, tada bi za svako $\varepsilon > 0$ postojao prirodan broj n_0 takav da $m \geq n \geq n_0$ $(m, n \in \mathbf{N})$ povlači (2), što bi bilo u suprotnosti sa pretpostavkom da red (1) divergira za $x = a$.

Time je dokazano da red (1) ne može uniformno konvergirati na skupu S.

2° Neka se potencijalni red (1) ne svodi na polinom i ima beskonačan poluprečnik konvergencije i neka je S neograničen skup tačaka kompleksne ravni, odnosno realne prave. Ako bi red (1) uniformno konvergirao na skupu S, postojao bi takav prirodan broj n_0 da je $|a_n x^n| < 1$ $(x \in S)$ za svaki prirodan broj $n \geq n_0$. Međutim, postoji $m \geq n_0$ takvo da je $a_m \neq 0$, pa zatim, zbog neograničenosti skupa S, postoji $\xi \in S$ takvo da je $|a_m \xi^m| \geq 1$. To znači da red (1) ne može uniformno konvergirati na S.

5.9. Dokazati da su dovoljno veliki koreni jednačine

$$\sec x = 1 + \frac{1}{x}$$

dati približnom formulom

$$x \approx 2n\pi \pm \frac{1}{(n\pi)^{1/2}} \qquad (n \text{ prirodan broj}).$$

Rešenje. Stavimo $x = 2n\pi + y$, pa data jednačina postaje

$$\sec y = 1 + \frac{1}{2n\pi + y}, \text{ tj. } (2n\pi + y)\sec y = 2n\pi + y + 1.$$

Razvijajući $\sec y$ u red u okolini tačke $y = 0$, dobijamo

$$(2n\pi + y)\left(1 + \frac{y^2}{2} + \cdots\right) = 2n\pi + y + 1.$$

Kako je jedan koren ove jednačine vrlo blizak nuli za dovoljno veliko n, možemo zanemariti y^3 i više potencije, pa dobijamo

$$2n\pi + y + n\pi y^2 \approx 2n\pi + y + 1, \text{ i } y \approx \pm\frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Na osnovu toga je $x \approx 2n\pi \pm \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

5.10. Beskrajni proizvod $P = \prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1 + x^{2^k})$ $(|x| < 1)$ predstaviti u obliku potencijalnog reda.

Rešenje. Stavimo li $P_n = \prod\limits_{k=1}^{n}(1 + x^{2^k})$, dobijamo

$$P_n = \frac{(1 - x^2)P_n}{1 - x^2} = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x^2} \qquad (x^2 \neq 1).$$

Ako je $|x| < 1$, iz poslednje jednakosti sleduje

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{1 - x^2} = \sum_{\nu=1}^{+\infty} x^{2\nu} \qquad (|x| < 1).$$

5.11. Ako je $x \mapsto f(x)$ ograničena funkcija, dokazati da je $s_n(x) = O(\log n)$, gde je s_n parcijalna suma Fourierovog reda funkcije f.

5.12. Ako je

$$f_0(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$f_1(x) = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots,$$

dokazati da je

$$f_0(x + y) = f_0(x)f_0(y) + f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y).$$

5.13. Ako je

$$C_{nr}(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{np+r}}{(np+r)!},\quad S_{nr}(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{np+r}}{(np+r)!}$$

$$(r=0,1,\ldots,n-1),$$

izvesti adicione teoreme za $C_{nr}(x+y)$ i $S_{nr}(x+y)$.

Dokazati Knarove formule:

$$\operatorname{sh} x\sin x=S_{42}(x\sqrt{2}),\qquad \operatorname{ch} x\cos x=S_{40}(x\sqrt{2}).$$

(Funkcije $x\mapsto C_{nr}(x)$ i $x\mapsto S_{nr}(x)$ uveo je Ricatti.)

Rešenje. a) Uvedimo hiperkompleksnu jedinicu j koja je definisana na sledeći način:

1° $j^n=1$,

2° Potencije $j^0=1,\ j^1=j,\ j^2,\ j^3,\ldots,\ j^{n-1}$ su linearno nezavisne.

Definišimo eksponencijalnu funkciju pomoću jednakosti

(1)
$$e^{jx}=\sum_{\nu=0}^{+\infty}j^\nu\frac{x^\nu}{\nu!}.$$

Koristeći se uslovom 1°, možemo jednakosti (1) dati oblik

(2)
$$e^{jx}=\sum_{p=0}^{n-1}j^p C_{np}(x).$$

Iz definicije (1) eksponencijalne funkcije $x\mapsto f(x)=e^{jx}$ izvodi se da ona zadovoljava funkcionalnu jednačinu

(3)
$$f(x)f(y)=f(x+y).$$

Dokaz ove jednakosti analogan je njenom dokazu u oblasti kompleksnih brojeva.

Na osnovu (2) i (3) dobijamo

(4)
$$\sum_{p=0}^{n-1}j^p C_{np}(x+y)=\Big(\sum_{p=0}^{n-1}j^p C_{np}(x)\Big)\Big(\sum_{p=0}^{n-1}j^p C_{np}(y)\Big).$$

Iz (4), na osnovu 2° i 1°, sleduje

(5)
$$C_{nr}(x+y)=\sum_{\nu+p=r}C_{n\nu}(x)C_{np}(y)+\sum_{\nu+p=n+r}C_{n\nu}(x)C_{np}(y).$$

b) Postupak u izvođenju je potpuno analogan prethodnom samo što se jedinica j definiše na sledeći način:

1° $j^n=-1$,

2° Potencije $j^0=1,\ j^1=j,\ j^2,\ldots,\ j^{n-1}$ su linearno nezavisne.

Dolazimo do rezultata

(6)
$$S_{nr}(x+y)=\sum_{\nu+p=r}S_{n\nu}(x)S_{np}(y)-\sum_{\nu+p=n+r}S_{n\nu}(x)S_{np}(y).$$

Za $n=2$ formule (5) i (6) lako se proveravaju, jer je:

$$C_{20}(x)=\operatorname{ch} x,\quad C_{21}(x)=\operatorname{sh} x,\quad S_{20}(x)=\cos x,\quad S_{21}(x)=\sin x.$$

5.14. Odrediti asimptotsko ponašanje niza

$$\sum_{k=2}^{n}a^{k^\alpha}k^\beta(\log k)^\gamma\quad(n=2,3,\ldots;\ a>1;\ \alpha\geq 1;\ \beta,\gamma\ \text{realni brojevi}).$$

Rešenje. Prema Stolzovoj teoremi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n^\alpha}\, n^\beta (\log n)^\gamma}{\sum\limits_{k=2}^{n} a^{k^\alpha}\, k^\beta (\log k)^\gamma} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n^\alpha}\, n^\beta (\log n)^\gamma - a^{(n-1)^\alpha} (n-1)^\beta \big(\log (n-1)\big)^\gamma}{a^{n^\alpha}\, n^\beta (\log n)^\gamma}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1 - a^{(n-1)^\alpha - n^\alpha} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\beta \left(\frac{\log (n-1)}{\log n}\right)^\gamma\right)$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{a} & (\alpha = 1) \\ 1 & (\alpha > 1). \end{cases}$$

Prema tome, kada $n \to +\infty$:

$$\sum_{k=2}^{n} a^{k^\alpha}\, k^\beta (\log k)^\gamma \sim \begin{cases} \dfrac{a}{a-1}\, a^n n^\beta (\log n)^\gamma, & \text{ako je } \alpha = 1, \\ a^{n^\alpha}\, n^\beta (\log n)^\gamma, & \text{ako je } \alpha > 1. \end{cases}$$

Primedba. Ovaj problem očigledno predstavlja uopštenje sledećeg problema:

Naći graničnu vrednost niza

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Literatura

K. M. Brown: *Problem E* 2115. Amer. Math. Monthly **75** (1968).

5.15. Ispitati konvergenciju reda sa opštim članom

$$a_n = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} \log^\alpha k}{n^\beta} \qquad (\alpha, \beta \text{ realni brojevi}).$$

Uputstvo. Dokazati prvo relaciju

$$\sum_{k=2}^{n} \log^\alpha k \sim n \log^\alpha n \qquad (n \to +\infty).$$

5.16. Dokazati da konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n n^{-\sigma}$ $(\sigma > 0)$ povlači jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-\sigma} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0.$$

Rešenje. Stavimo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k k^{-\sigma} = S_n \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k = A_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Prema Abelovoj formuli parcijalne sumacije, imamo

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k k^{-\sigma})\, k^\sigma = \sum_{k=1}^{n-1} S_k \big(k^\sigma - (k+1)^\sigma\big) + S_n n^\sigma \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odavde i prema Stolzovoj teoremi, dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n^{-\sigma} A_n &= \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} S_k\left(k^{\sigma} - (k+1)^{\sigma}\right)}{n^{\sigma}}\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}\left((n-1)^{\sigma} - n^{\sigma}\right)}{n^{\sigma} - (n-1)^{\sigma}}\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = 0.\end{aligned}$$

5.17. Parcijalnom integracijom izvesti asimptotski red

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \sim \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2!\cos x}{x^3} - \frac{3!\sin x}{x^4} + \cdots$$

5.18. Data je funkcija greške

$$x \mapsto \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

Parcijalnom integracijom izvesti asimptotski red

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim e^{-x^2}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2 x^3} + \frac{1\cdot 3}{2^3 x^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 x^7} + \cdots\right)$$

i dokazati da je

$$\operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

5.19. Funkciju $x \mapsto (\exp(x \operatorname{cotg} a)) \cos x$ razviti u Taylorov red u okolini tačke $x = 0$.

Rešenje. Ako pođemo od razvoja

$$\begin{aligned} e^{x\operatorname{cotg} a}(\cos x + i\sin x) &= e^{x\operatorname{cotg} a + ix}\\ &= 1 + (x\operatorname{cotg} a + ix) + \frac{1}{2!}(x\operatorname{cotg} a + ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x\operatorname{cotg} a + ix)^n + \cdots,\end{aligned}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} e^{x\operatorname{cotg} a}\cos x = 1 &+ x\operatorname{cotg} a + \frac{1}{2!}x^2(\operatorname{cotg}^2 a - 1) + \cdots\\ &+ \frac{1}{n!}x^n\left(\operatorname{cotg}^n a - \binom{n}{2}\operatorname{cotg}^{n-2} a + \binom{n}{4}\operatorname{cotg}^{n-4} a - \cdots\right) + \cdots,\end{aligned}$$

gde se koeficijent uz $\frac{1}{n!}x^n$ može predstaviti u obliku

$$\frac{1}{\sin^n a}\left(\cos^n a - \binom{n}{2}\cos^{n-2} a\sin^2 a + \binom{n}{4}\cos^{n-4} a\sin^4 a - \cdots\right). \tag{1}$$

Na osnovu Moivreove formule

$$(\cos a + i\sin a)^n = \cos na + i\sin na,$$

zaključuje se da se (1) svodi na $(\cos na)/\sin^n a$.

Prema tome imamo rezultat

$$\big(\exp(x\operatorname{cotg} a)\big)\cos x = 1 + x\operatorname{cotg} a + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}\,\frac{\cos ka}{\sin^k a}\,x^k.$$

Primedba. Rešenje se uprošćava ako se vrše transformacije na sledeći način:

$$e^{x\operatorname{cotg} a}(\cos x + i\sin x) = e^{x(\operatorname{cotg} a + i)} = \exp\Big(x\frac{e^{ia}}{\sin a}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kia}}{k!\,\sin^k a}\,x^k.$$

Odavde sleduje

$$e^{x\operatorname{cotg} a}\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos ka}{k!\,\sin^k a}\,x^k.$$

5.20. Ako je $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, proveriti jednakosti:

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = e^x,$$

$$af''(x) + a^2 f'(x) + f(x) = e^{ax}, \qquad \Big(a = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

$$a^2 f''(x) + a f'(x) + f(x) = e^{a^2 x}.$$

5.21. Ako se funkcija f data sa

$$f(\lambda) = \frac{x\operatorname{ch}\lambda + \operatorname{sh}\lambda}{x\operatorname{sh}\lambda + \operatorname{ch}\lambda}$$

razvije u potencijalni red

$$P_0 + P_1\lambda + \cdots + P_n\lambda^n + \cdots,$$

koeficijent P_n je polinom stepena $n+1$ po x.

Ispitati da li su svi polinomi P_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ deljivi sa $x^2 - 1$.

5.22. Polazeći od činjenice da su funkcije

(1) $\quad x \mapsto \operatorname{ch} x\cos x,\ x \mapsto \operatorname{ch} x\sin x,\ x \mapsto \operatorname{sh} x\cos x,\ x \mapsto \operatorname{sh} x\sin x$

partikularna rešenja diferencijalne jednačine $y^{(4)} + 4y = 0$, ili od identiteta, koji, na primer, za prvu funkciju glasi

$$4\operatorname{ch} x\cos x = \big(\exp x + \exp(-x)\big)\big(\exp(ix) + \exp(-ix)\big),$$

razviti funkcije (1) u potencijalne redove u okolini $x = 0$.

Za funkciju $x \mapsto \operatorname{ch} x\cos x$ traženi razvoj je

$$1 - \frac{4}{4!}x^4 + \frac{4^2}{8!}x^8 - \cdots + (-1)^k\frac{4^k}{(4k)!}x^{4k} + \cdots$$

5.23. Data je funkcija

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 2x^2\cos 2a + 1} \qquad (a \text{ parametar}).$$

1° U okolini tačke $x = 0$ razviti funkciju f u potencijalni red i odrediti njegov poluprečnik konvergencije.

2° Grafički prikazati funkciju f i izračunati integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

5.24. Dokazati jednakost

$$(1)\qquad \Phi_n(x) = \begin{vmatrix} C_{n,0}(x) & C_{n,1}(x) & \cdots & C_{n,n-1}(x) \\ C_{n,n-1}(x) & C_{n,0}(x) & & C_{n,n-2}(x) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ C_{n,1}(x) & C_{n,2}(x) & & C_{n,0}(x) \end{vmatrix} = 1,$$

gde je $C_{n,r}(x)\ (r = 0, 1, \ldots, n-1)$ određeno sa

$$(2)\qquad C_{n,r}(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{x^{r+n\nu}}{(r+n\nu)!}.$$

Dokaz. Iz (2) nalazi se

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} C_{n,r}(x) = C_{n,r-1}(x) \quad (r = 1, \ldots, n-1),$$

$$= C_{n,n-1}(x) \quad (r = 0).$$

Diferencirajući funkciju Φ_n i koristeći se sa (3), dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Odavde sleduje

$$\Phi_n(x) = c \quad (c = \text{const}).$$

Konstantu c izračunavamo stavljajući $x = 0$ u (1). Kako je $C_{n,r}(0) = 0$ za $r = 1, \ldots, n-1$ i $C_{n,0}(0) = 1$, dobija se $c = 1$.

Time je dokazana jednakost (1).

5.25. Odrediti oblast konvergencije funkcionalnog reda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}\right)$$

i izraziti njegovu sumu u obliku jednog potencijalnog reda. Koristeći se tim rezultatom, izračunati $f(1)$. Takođe izračunati $f(1)$ polazeći od datog reda.

Primedba. Suma ovog reda ne može se izraziti u konačnom obliku. Zaista, prema Abelovoj formuli parcijalne sumacije,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \left(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^k}{k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

$$\to -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} = x + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2} \quad (n \to +\infty),$$

a suma poslednjeg reda ne može se, kao što je poznato, napisati u konačnom obliku.

5.26. Dat je red

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2. \tag{1}$$

Dokazati da red (1) konvergira i da je njegova suma merni broj luka s krive $y=\cos x$ na segmentu $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Ako se uzme

$$s\approx\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

proceniti grešku.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2=0,\qquad \frac{\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2}{\dfrac{1}{2n-1}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2}=\frac{4n^2-1}{4n^2+8n+4}<1,$$

na osnovu Leibnizovog kriterijuma za alternativne redove izlazi da red (1) konvergira.

Imamo

$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx \quad \text{i} \quad \sqrt{1+\sin^2 x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\sin^{2n}x,$$

odatle

$$\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx.$$

No, kako je

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}$$

kao i

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n\cdot n!}\qquad (n=1,2,3,\ldots);$$

biće

$$s=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\sin^2 x}\,dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2.$$

Ako je

$$s\approx\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{4}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2,$$

tada je

$$r_4=\sum_{k=5}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^2 \quad \text{i} \quad 0<r_4<\frac{1}{9}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10}\right)^2<0{,}007.$$

Primedba. Pomoću Gaussovog ili Raabeovog kriterijuma može se ustanoviti da posmatrani red, u stvari, apsolutno konvergira.

5.27. Ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} = s(x)$ $(x > 1)$, dokazati da je

$$(x-1)\,s(x) = 1 + \theta(x-1) \qquad (x > 1;\ 0 < \theta < 1).$$

Dokaz. Kako je

$$(n+1)^{-x} < \int_n^{n+1} t^{-x} < n^{-x} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

imamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^{-x} < \int_1^{+\infty} t^{-x}\,dt < \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x} \qquad (x > 1),$$

ili

$$s(x) < 1 + \int_1^{+\infty} t^{-x}\,dt \quad \text{i} \quad \int_1^{+\infty} t^{-x}\,dt < s(x),$$

tj.

$$s(x) < 1 + \frac{1}{x-1}; \quad \frac{1}{x-1} < s(x);$$

odavde,

$$\frac{1}{x-1} < s(x) < \frac{x}{x-1}$$

i najzad

$$(x-1)\,s(x) = 1 + \theta(x-1) \qquad (x > 1;\ 0 < \theta < 1).$$

5.28. Dokazati da je

$$(1) \qquad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-x} = (n+1)^{-x}\big(\theta + (n+1)(x-1)^{-1}\big) \ (x > 1;\ 0 < \theta < 1).$$

Šta se može kazati o proceni greške pomoću obrasca (1) s obzirom na promenljivu x? Proceniti grešku za $x = 5$, $n = 2$ i $x = 10$, $n = 2$.

Dokaz. Slično kao u 5.27, dobijamo

$$r_{n+1}(x) < \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x}\,dt < r_n(x) \quad (x > 1),$$

ili

$$r_n(x) < (n+1)^{-x} + \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x}\,dt, \qquad \int_{n+1}^{+\infty} t^{-x}\,dt < r_n(x),$$

tj.

$$(x-1)^{-1}(n+1)^{1-x} < r_n(x) < (x-1)^{-1}(n+1)^{1-x} + (n+1)^{-x}$$

i najzad

$$r_n(x) = (n+1)^{-x}\,[(n+1)(x-1)^{-1} + \theta] \qquad (x > 1;\ 0 < \theta < 1).$$

Dužina intervala

$$\big((x-1)^{-1}(n+1)^{1-x},\ (x-1)^{-1}(n+1)^{1-x} + (n+1)^{-x}\big)$$

je $(n+1)^{-x}$ i ona opada kad x raste. Prema tome, procena greške $r_n(x)$ utoliko je preciznija ukoliko je vrednost promenljive $x\,(> 1)$ veća.

Za $x = 5$ i $n = 2$ je

$$r_2(5) = 3^{-5}(3 \cdot 4^{-1} + \theta) \quad \text{ili} \quad r_2(5) = (0{,}75 + \theta) \cdot 243^{-1},$$

tj.

$$0{,}75 \cdot 243^{-1} < r_2(5) < 1{,}75 \cdot 243^{-1}.$$

Za $x = 10$ i $n = 2$ je $r_2(10) = 3^{-10}(3 \cdot 9^{-1} + \theta)$,

tj.

$$(3 \cdot 59049)^{-1} < r_2(10) < 4 \cdot (3 \cdot 59049)^{-1}.$$

5.29. Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira i niz b_n ($n \in \mathbf{N}$) monotono rastući teži ka $+\infty$, dokazati da:

$$1^\circ \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{b_k} = o\left(\frac{1}{b_n}\right) \qquad (n \to +\infty);$$

$$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o(b_n) \qquad (n \to +\infty).$$

(Kroneckerova lema).

Rešenje. 1° Pod navedenim uslovima, red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$, prema Dirichletovom stavu, konvergira.

Stavljajući $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dobija se, za $p \geq n$,

$$\left|\sum_{k=n}^{p} \frac{a_k}{b_k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{p} \frac{R_k - R_{k+1}}{b_k}\right| = \left|\sum_{k=n}^{p} \frac{R_k}{b_k} - \sum_{k=n}^{p} \frac{R_{k+1}}{b_k}\right|$$

$$= \left|\frac{R_n}{b_n} + \sum_{k=n+1}^{p} R_k\left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{b_{k-1}}\right) - \frac{R_{p+1}}{b_p}\right|$$

$$\leq \frac{|R_n|}{b_n} + \sum_{k=n+1}^{p} |R_k|\left(\frac{1}{b_{k-1}} - \frac{1}{b_k}\right) + \frac{|R_{p+1}|}{b_p}$$

$$\leq \varepsilon_n\left(\frac{1}{b_n} + \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_p} + \frac{1}{b_p}\right) = \frac{2\varepsilon_n}{b_n},$$

gde je

$$\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} |R_k| \to 0 \qquad (n \to +\infty).$$

Odavde je

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{b_k}\right| \leq 2\varepsilon_n \frac{1}{b_n} = o\left(\frac{1}{b_n}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

2° Neka je, za unapred dato $\varepsilon > 0$,

$$\left|\sum_{k=n_0+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon \qquad (n > n_0).$$

Tada je za $n > n_0$, prema Abelovoj formuli parcijalne sumacije,

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le \frac{1}{b_n}\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k b_k\right| + \left|\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=n_0+1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})\sum_{\nu=n_0+1}^{k} a_\nu + b_n \sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu\right)\right|$$

$$\le \left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n_0} a_k b_k\right| + \frac{\varepsilon}{b_n}\left(\sum_{k=n_0+1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) + b_n\right)$$

$$= \frac{1}{b_n}\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k b_k\right| + \varepsilon\left(2 - \frac{b_{n_0+1}}{b_n}\right).$$

Puštajući prvo da $n \to +\infty$, a zatim da $\varepsilon \to 0+$, dobija se

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le 2\varepsilon, \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \le 0;$$

odatle,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 0, \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = o(b_n) \quad (n \to +\infty).$$

Primedba. Problem **5.16** odnosi se na specijalan slučaj tvrđenja 2°.

5.30. Odrediti poluprečnik konvergencije reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \qquad \left(a_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\right)$$

i funkciju f koja je definisana ovim redom.

Rezultat. $f(x) = x(1-2x)^{-2}$. Poluprečnik konvergencije je $1/2$.

5.31. Izračunati $f^{(n)}(0)$ ako je $f(x) = \dfrac{x e^x}{1-x}$.

Rešenje. Najpre imamo

$$f(x) = -e^x + \frac{e^x}{1-x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = -e^x + \left(e^x \frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

Primenom Leibnizove formule

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)},$$

gde je

$$u = e^x, \quad v = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad (|x| < 1),$$

dobijamo

$$(uv)^{(n)}\Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k!$$

Prema tome, tražena vrednost je

$$f^{(n)}(0) = -1 + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k!.$$

Primedba 1. Ispitati da li je $\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = e.$

Primedba 2. Može se i ovako postupiti: za $|x| < 1$ množenjem potencijalnih redova dobija se

$$f(x) = -e^x + e^x \frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big) x^n;$$

odavde,

$$f^{(n)}(0) = n! \Big(-\frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big) = -1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)! = -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} k!$$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k!$$

5.32. Izračunati

(1) $$\frac{d^{pq}}{dx^{pq}} \Big(\frac{x^p - x^q}{(1+x^p)(1+x^q)}\Big)\Big|_{x=0} \quad (p \text{ i } q \text{ prirodni brojevi}).$$

Rešenje. Pođimo od razlaganja

$$f(x) = \frac{x^p - x^q}{(1+x^p)(1+x^q)} = \frac{1}{1+x^q} - \frac{1}{1+x^p}.$$

Potencijalni red

(2) $$g(x) = \frac{1}{1+x^q} = 1 - x^q + x^{2q} - \cdots + (-1)^p x^{pq} + \cdots$$

konvergentan je za $|x| < 1$. Na osnovu (2) dobija se

$$g^{(pq)}(0) = (-1)^p (pq)!$$

Na analogni način nalazi se

$$h^{(pq)}(0) = (-1)^q (pq)!$$

gde je $h(x) = 1/(1+x^p)$.

Prema tome, za izraz (1) dobija se $\big((-1)^p - (-1)^q\big)(pq)!$

5.33. Dokazati formulu

(1) $$2^{2n+1} D^n \big(x^{n+\frac{1}{2}} D^{n+1} e^{\sqrt{x}}\big) = e^{\sqrt{x}} \qquad (n \in \mathbf{N}_0),$$

gde je $D = \frac{d}{dx}$.

Dokaz. Pođimo od razvoja $e^{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{\frac{k}{2}}}{k!}$. Odavde jedno za drugim imamo

$$\mathrm{D}^{n+1} e^{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}-n\right)\frac{x^{\frac{k}{2}-n-1}}{k!}\right],$$

$$x^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{D}^{n+1} e^{\sqrt{x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}-n\right)\frac{x^{\frac{k-1}{2}}}{k!}\right].$$

$$\mathrm{D}^{n}\left(x^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{D}^{n+1} e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}-n\right)\frac{k-1}{2}\left(\frac{k-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{k-1}{2}-n+1\right)\frac{x^{\frac{k-n}{2}-n}}{k!}\right].$$

Dalje dobijamo

$$2^{2n+1} \mathrm{D}^{n}\left(x^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{D}^{n+1} e^{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[k(k-2)\cdots(k-2n)(k-1)(k-3)\cdots(k-2n+1)\frac{x^{\frac{k-2n-1}{2}}}{k!}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[k(k-1)(k-2)\cdots(k-2n)\frac{x^{\frac{k-2n-1}{2}}}{k!}\right]$$

$$= \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \left[k(k-1)(k-2)\cdots(k-2n)\frac{x^{\frac{k-2n-1}{2}}}{k!}\right]$$

$$= \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \left[\frac{k!}{(k-2n-1)!}\,\frac{x^{\frac{k-2n-1}{2}}}{k!}\right]$$

$$= \sum_{k=2n+1}^{+\infty} \frac{x^{\frac{k-2n-1}{2}}}{(k-2n-1)!}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{i/2}}{i!}$$

$$= e^{\sqrt{x}}.$$

Time je dokaz formule (1) završen.

5.34. Dokazati nejednakost

$$(1) \qquad \frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\log x - \log y} \qquad (x > y > 0).$$

Rešenje. Razvoj

$$\log z = 2\left(\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \cdots\right)$$

važi ako je $z > 0$. Za $z > 1$ je stoga

$$\log z > 2\,\frac{z-1}{z+1}, \quad \text{tj.}\ \frac{z+1}{2} > \frac{z-1}{\log z}.$$

Stavimo li ovde $z = \dfrac{x}{y}$ $(x > y > 0)$, dobijamo

$$\frac{x+y}{2} > \frac{x-y}{\log x - \log y} \qquad (x > y > 0).$$

5.35. Data je funkcija

$$x \mapsto f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1° Nacrtati njen grafik i odrediti osu simetrije grafika.

2° Izračunati veličinu površine ograničene, u prvom kvadrantu, krivom $y = f(x)$ i njenim asimptotama.

3° Na osnovu rezultata pod 1° ispitati monotoniju i konvergenciju nizova

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad b_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Rešenje. 1° Funkcija f definisana je za $x \in (-\infty, -1)$ i za $x \in (0, +\infty)$. Kako je u oba ova intervala $f(x) > 0$ i kako je

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to -1-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$

može se pretpostaviti da je njen grafik simetričan prema pravoj $x = -\dfrac{1}{2}$. To je zaista slučaj, jer je funkcija

$$x \mapsto f\left(-\frac{1}{2} + x\right) = x\log\left(1 + \frac{1}{x - \frac{1}{2}}\right) = x\log\left(-\frac{\frac{1}{2} + x}{\frac{1}{2} - x}\right)$$

parna.

Dalje imamo

$$f'(x) = \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x + \frac{1}{2}}{x(x-1)}, \quad \lim_{x\to 0+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$$

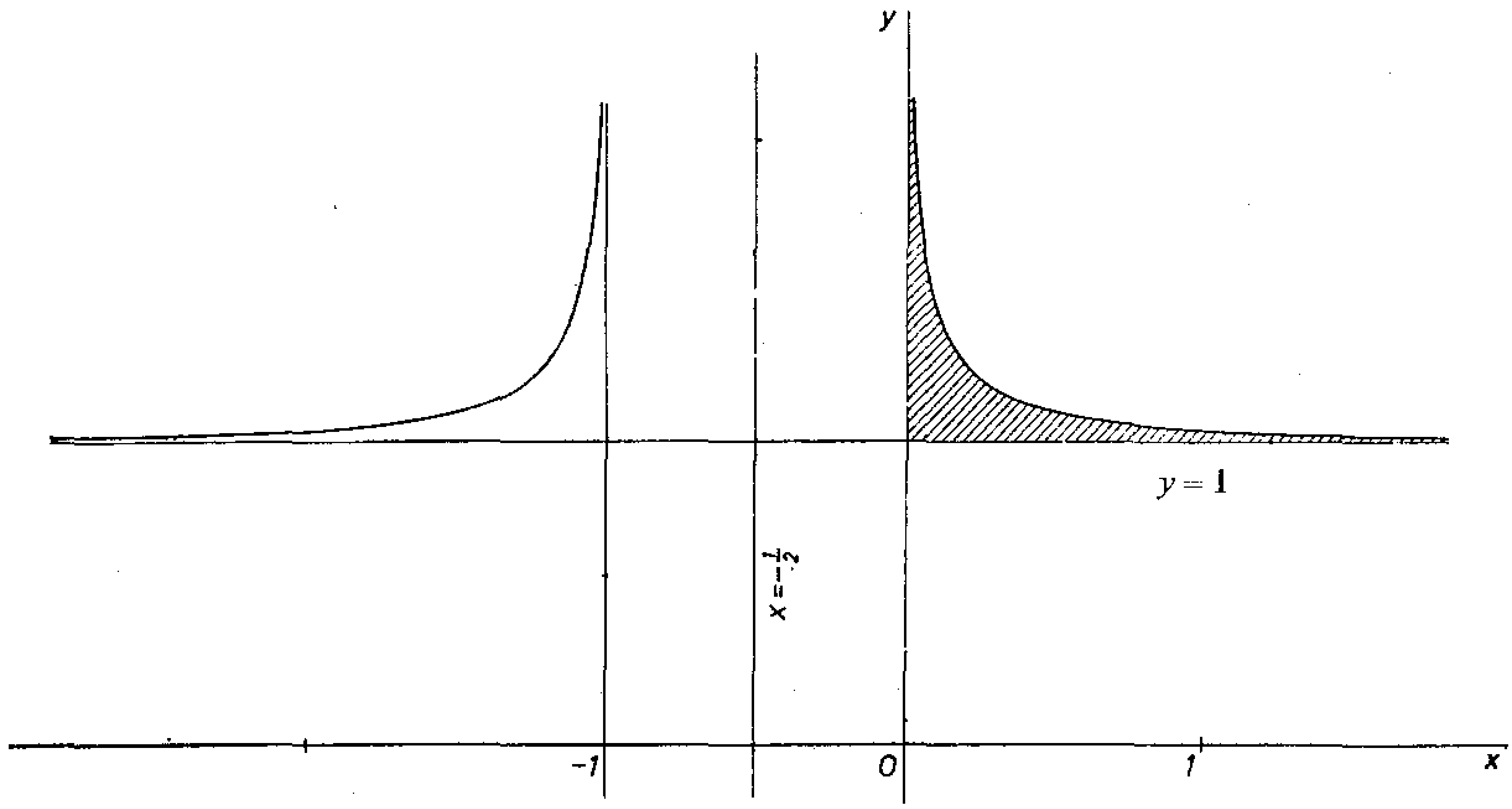
$$= 2\,\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - x(x+1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{1}{2x^2(x+1)^2} > 0 \qquad (x > 0).$$

Dakle, za $x > 0$ grafik funkcije f je konveksan nadole, a f' strogo raste od $-\infty$ do 0, što znači da je $f'(x) < 0$ $(x > 0)$, tj. da je $f(x) > 0$ i strogo opada od $+\infty$ do 1.

Na osnovu ovog imamo grafik prikazan na slici. Njegova osa simetrije je, kao što je pokazano, prava $x = -\dfrac{1}{2}$.

2° Tražena veličina površine (šrafirane na slici) iznosi

$$P = \int_0^{+\infty} (f(x) - 1)\,dx = \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to 0+} F(x),$$



gde $x \mapsto F(x)$ označava primitivnu funkciju funkcije $x \mapsto f(x) - 1$. Imamo

$$F(x) = \int \left(x + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx - x$$

$$= \frac{1}{2}\left((x^2 + x)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \int dx\right) - x = \frac{x}{2}\left((x+1)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right)$$

i odatle

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{2}\left\{\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \lim_{x\to+\infty} x^2\left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{1 + \lim_{t\to 0+} \frac{\log(1+t) - t}{t^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};$$

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = 0.$$

Dakle, $P = \dfrac{1}{4}$.

3° Kako f strogo opada za $x > 0$ i teži ka 1 kada $x \to +\infty$, neposredno izlazi da niz $a_n = e^{f(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ strogo opada i konvergira ka e.

Prema tome, $a_n > e$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ova nejednakost zajedno sa

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{e}{a_n}, \quad b_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

dovodi do zaključka da niz b_n strogo opada i konvergira.

5.36. Data je kriva

(1) $$y = \log(1 + x)$$

i njena tangenta u tački $O(0, 0)$. Neka je $f(t)$ veličina površine ograničene pomenutom tangentom, lukom krive na segmentu $[0, t]$ i pravom $x = t$.

1° Obrazovati funkciju $t \mapsto f(t)$ i razviti je u potencijalni red.

2° Ispitati konvergenciju dobijenog reda.

3° Izračunati $f(10^{-1})$ tako da greška bude manja od 10^{-4}.

4° Geometrijski protumačiti šta predstavlja red $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n}$.

Rešenje. 1° Jednačina tangente krive (1) u tački O je $y = x$. Kako je

$$f(t) = \frac{1}{2} t^2 - \int_0^t \log(1 + x)\, dx \quad \text{i} \quad \log(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n},$$

dobijamo

(2) $$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$

2° Poluprečnik konvergencije reda (2) je

$$R = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

Za $t = 1$ i $t = -1$ red (2) takođe konvergira, jer konvergira red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Dakle, red (2) konvergira za $t \in [-1, +1]$.

3° Budući da je

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(n+2)\, 10^{n+2}},$$

dobijamo

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)(k+2)\, 10^{k+2}}.$$

Sigurno je $|r_n| < 10^{-4}$ ako je

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)\, 10^{n+3}} < 10^{-4}.$$

Poslednja nejednakost je zadovoljena za $n \geq 1$, pa je

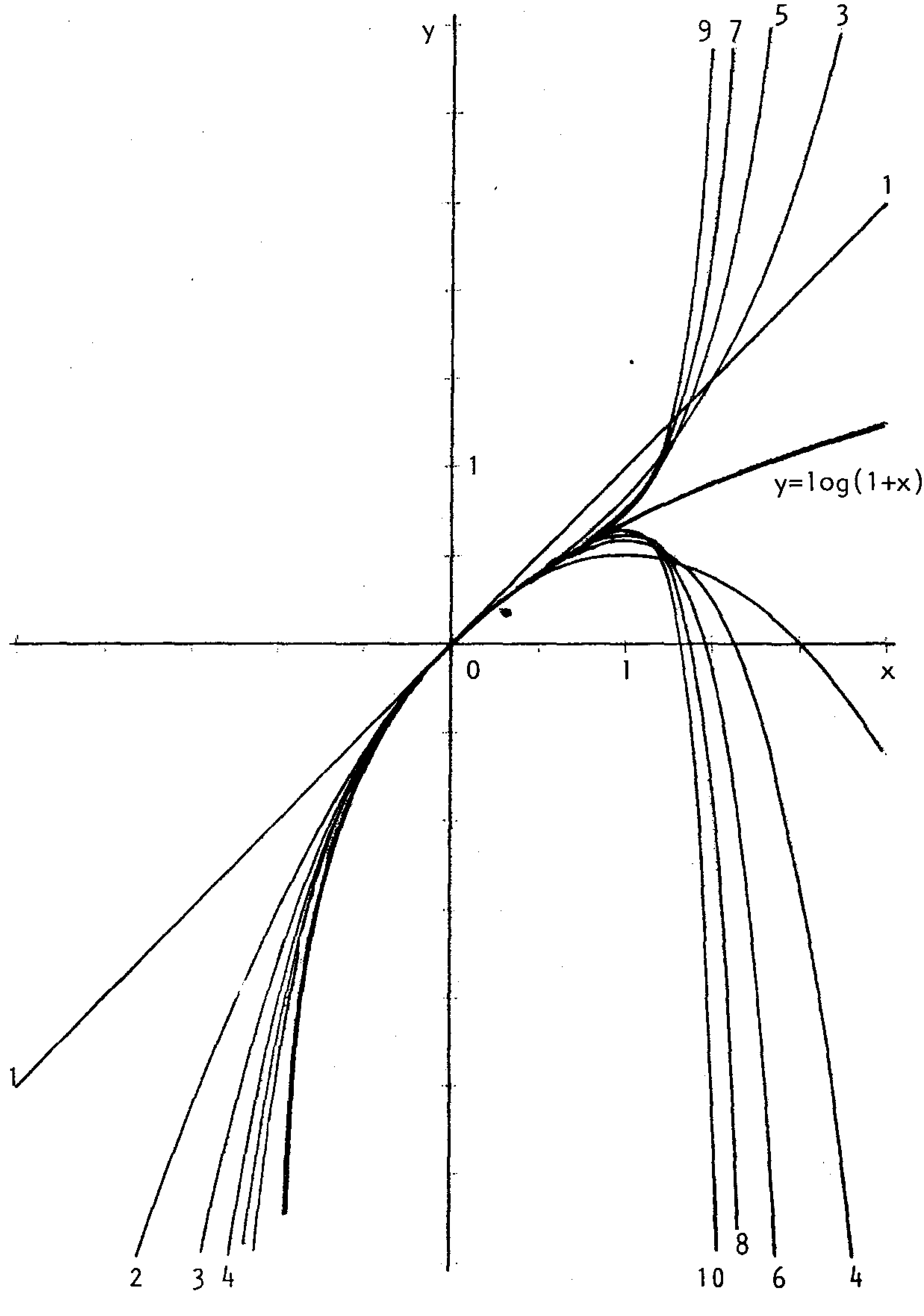
$$f\left(\frac{1}{10}\right) \approx \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 10^3} = \frac{1}{6000}$$

tražena približna vrednost.

4° Imamo

$$dy - \Delta y = t - \log(1 + t) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n},$$

gde je dy diferencijal funkcije (1) u tački O, a Δy priraštaj iste funkcije i t priraštaj argumenta x.


y
9
7
5
3
1
1
y=log(1+x)
0
1
x
1
2
3
4
10
8
6
4

5.37. Funkciju $a \mapsto x(a)$, definisanu sa

$$x \log x + x - 1 = a, \tag{1}$$

aproksimirati u okolini tačke $a = 0$ Taylorovim polinomom trećeg stepena. Na osnovu toga pokazati da je jedno aproksimativno rešenje x_1 jednačine (1), ako je a dovoljno malo, dato formulom

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{16}a^2$$

i oceniti grešku $|x - x_1|$ koja se pri tome čini.

5.38. Data je jednačina (E) $x^2 - x - 2 = a\,x^3$, gde je a realan broj. Ako je a dovoljno malo, pokazati da je $-1 + \dfrac{1}{3}a - \dfrac{8}{27}a^2$ aproksimativna vrednost jednog korena ove jednačine. Izvesti analognu aproksimaciju za koren jednačine (E) koji je blizak broju 2. Najzad, učiniti isto i za treći koren jednačine (E).

5.39. Za izračunavanje granične vrednosti funkcije

$$x \mapsto f(x) = g(x) - h(x), \quad \text{kada} \quad x \to +\infty,$$

gde su:

$$g(x) = (x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m)^{1/m}, \quad h(x) = (x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n)^{1/n},$$

upotrebiti podesne razvoje u redove za funkcije g i h.

5.40. Odrediti asimptote krive

$$y = (x - 2)\exp\frac{1}{x - 3}$$

i nacrtati ovu krivu.

Rešenje. Najpre imamo

$$y \to +\infty \quad (x \to 3+) \quad \text{i} \quad y \to 0 \quad (x \to 3-),$$

što znači da je prava $x = 3$ asimptota date krive.

Kako je

$$\exp\frac{1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{(x-3)^3} + \cdots \qquad (x \neq 3),$$

dobijamo

$$y = (x - 2)\left(1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-3)^2} + \frac{\lambda}{(x-3)^3}\right),$$

gde je λ funkcija od x koja ostaje konačna ako $|x| \to +\infty$.

Poslednja jednakost može se predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} y &= x - 2 + \frac{x-2}{x-3} + \frac{1}{2}\frac{x-2}{(x-3)^2} + \lambda\frac{x-2}{(x-3)^3} \\ &= x - 1 + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{2}\frac{x-2}{(x-3)^2} + \lambda\frac{x-2}{(x-3)^3}. \end{aligned}$$

Kada $|x| \to +\infty$, iz ove jednakosti sleduje

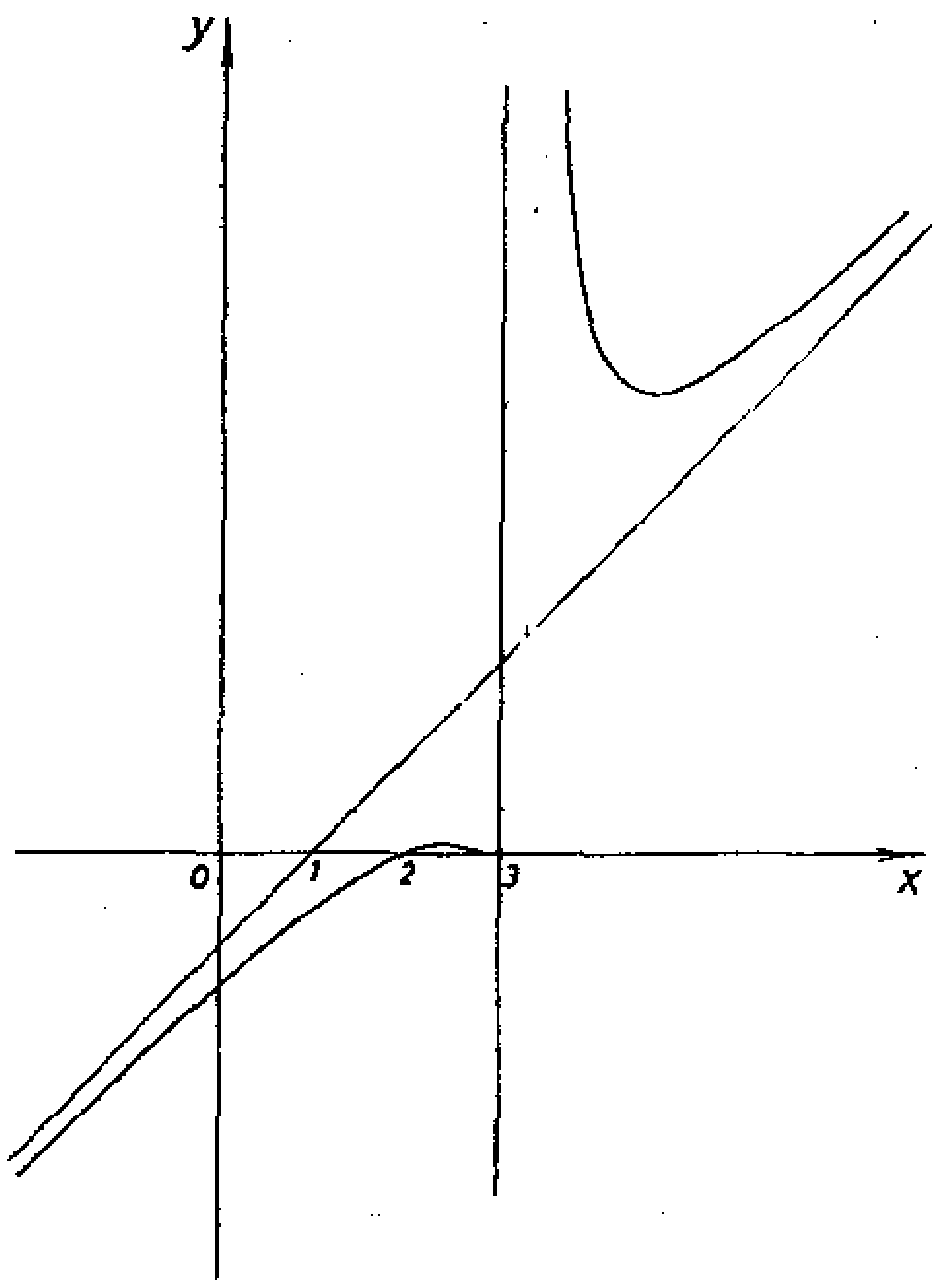
$$y - x + 1 \to 0.$$

Prema tome, jednačina kose asimptote krive (1) je

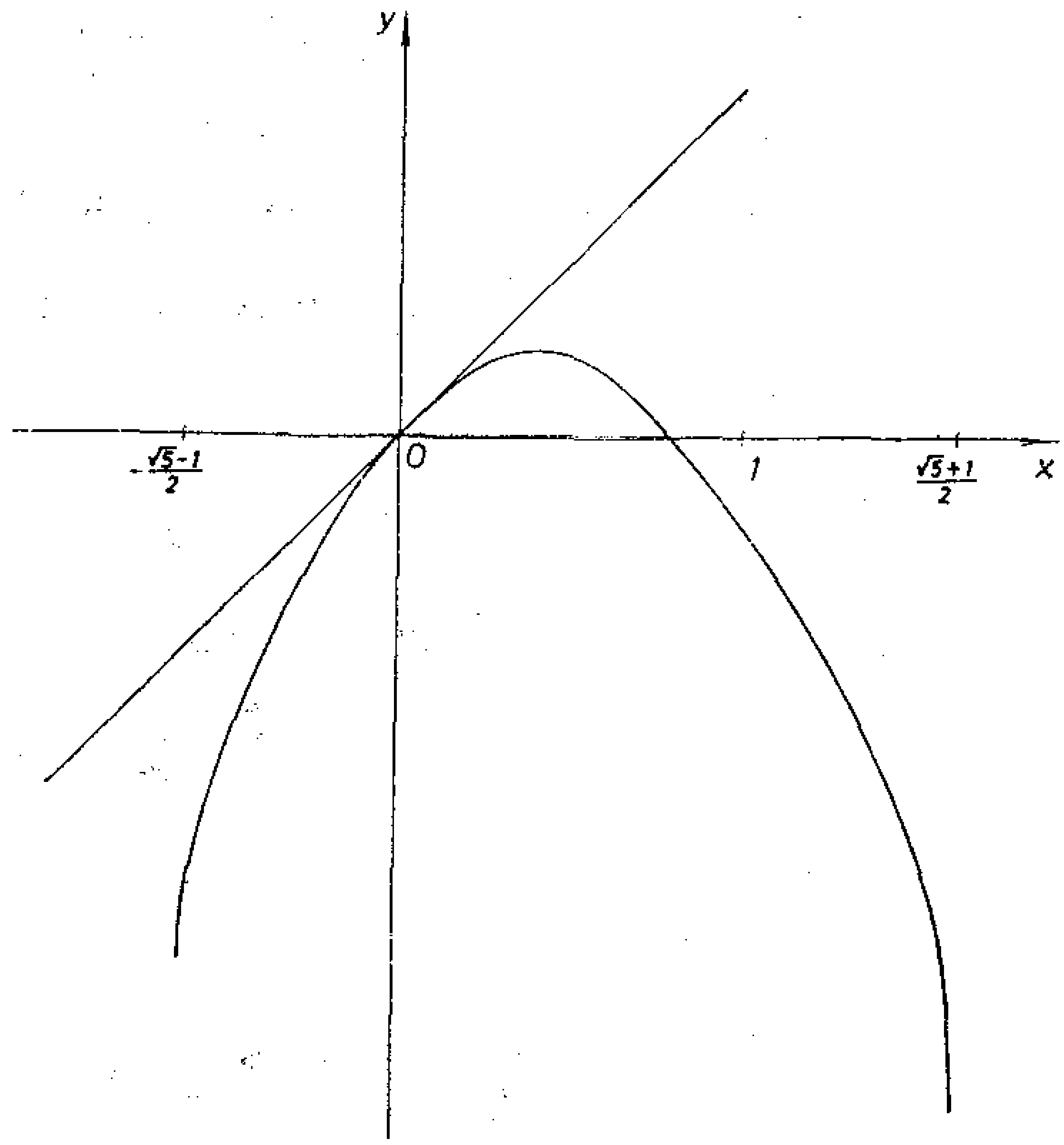
$$y = x - 1.$$

Ostaje još da se ispita da li postoji presek ove asimptote sa datom krivom, ekstremumi itd., da bi se ova kriva što preciznije mogla nacrtati.

Kriva je prikazana na slici 1.



Sl. 1.



Sl. 2.

5.41. Ispitati položaj krive

$$y = \sqrt{1 + x - x^2} - \sqrt[3]{1 - 2x + 3x^2}$$

prema njenoj tangenti u tački $x = 0$.

Rešenje. Za funkcije f i g, definisane pomoću

$$f(x) = \sqrt{1 + x - x^2}, \qquad g(x) = \sqrt[3]{1 - 2x + 3x^2},$$

dobijamo razvoje

$$f(x) = \sqrt{1 + (x - x^2)} = 1 + \binom{1/2}{1}(x - x^2) + \binom{1/2}{2}(x - x^2)^2 + \binom{1/2}{3}(x - x^2)^3 + \cdots;$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt[3]{1 + (-2x + 3x^2)} \\ &= 1 + \binom{1/3}{1}(-2x + 3x^2) + \binom{1/3}{2}(-2x + 3x^2)^2 + \binom{1/3}{3}(-2x + 3x^2)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} y &= f(x) - g(x) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}(x - x^2) - \frac{1}{8}x^2 + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{3}(-2x + 3x^2) - \frac{4}{9}x^2 + \cdots\right); \end{aligned}$$

tj.

$$y = \frac{7}{6} x - \frac{85}{72} x^2 + \lambda x^3,$$

gde je λ funkcija od x koja ostaje konačna kada $x \to 0$.

Prema tome, jednačina tangente date krive u tački $x = 0$ glasi $y = \frac{7}{6} x$.

Razlika između ordinate y_k krive i ordinate y_t tangente za dato x je

$$y_k - y_t = -\frac{85}{72} x^2 + \lambda x^3.$$

U okolini tačke $x = 0$ kriva je ispod tangente. Kriva je prikazana na slici 2.

5.42. Ako niz a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ (strogo) opadajući teži ka nuli i red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira, tada niz

(1) $$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - n a_n$$

(strogo) rastući teži ka pozitivnoj beskonačnosti, a red

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n - a_{n+1})$$

divergira.

Dokaz. Za $n > n_0$ je

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n_0} a_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k - n a_n \geq \sum_{k=1}^{n_0} a_k + (n - n_0) a_n - n a_n = \sum_{k=1}^{n_0} a_k - n_0 a_n,$$

odakle je

$$\varliminf_{n \to +\infty} \alpha_n \geq \sum_{k=1}^{n_0} a_k.$$

Puštajući da $n_0 \to +\infty$, dobija se

$$\varliminf_{n \to +\infty} \alpha_n \geq +\infty, \quad \text{tj.} \quad \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Divergencija reda (2) i (strogo) monotono rašćenje niza (1) izlaze onda iz identiteta

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} k (a_k - a_{k+1}) + n a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

5.43. Ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red čiji su članovi različiti od nule, i ako je niz $a_n - a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ opadajući, tada je $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

Dokaz. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})$ konvergira, pa kako je niz njegovih članova opadajući, mora biti $a_n - a_{n+1} \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Kako bi tada jednakost $a_m - a_{m+1} = 0$ za neki prirodan broj m povukla $a_n - a_{n+1} = 0$ $(n \geq m)$, tj. $a_n = a_m \neq 0$ $(n \geq m)$, zbog konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

mora biti $a_n - a_{n+1} > 0$, $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Onda je

$$0 < \frac{1}{a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}} = \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} < \frac{a_n^2}{a_n - a_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} (a_k^2 - a_{k+1}^2) = \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})(a_k + a_{k+1})$$

$$\leq \frac{1}{a_n - a_{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} (a_n - a_{n+1})(a_k + a_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} (a_k + a_{k+1}) \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

i odatle

$$a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} \to +\infty \quad (n \to +\infty).$$

Literatura

R. O. Davis: *Problem* 5330. Amer. Math. Monthly **74** (1967).

5.44. Neka je (a_n) niz pozitivnih brojeva i neka je $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + a_n a_n^{-1}$ $(n \geq 1)$. Dokazati da je granična vrednost $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ konačna ako i samo ako je zbir $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konačan.

Rešenje. Neposredno se uočava da niz (a_n) raste i vrednosti mu nisu manje od 1. Odatle sleduje

$$a_{n+1} - a_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^{-1} \geq a_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Ako je $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n < +\infty$, prema (1) imamo

$$a_{n+1} - a_1 \geq a^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pa red

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \tag{2}$$

konvergira. Ako je, obrnuto, red (2) konvergentan, tada, zbog

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k a_k^{-1} \leq a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_k < a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

niz (a_n) konvergira.

Literatura

T. M. K. Davison: *Problem E* 1994. Amer. Math. Monthly **75** (1968).

5.45. 1° Dokazati jednakost

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1 + t^b} \, dt \quad (a, b > 0).$$

2° Sumirati redove

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 3n} \quad \text{i} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2 + 3n}.$$

Rešenje. 1° Za $k > 0$ imamo

(1) $$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{k+n} = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \int_0^1 x^{k+n-1}\, dx = \int_0^1 x^{k-1} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n x^n dx$$

$$= \int_0^1 x^{k-1} \frac{1-(-1)^{m+1} x^{m+1}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x} dx + (-1)^m \int_0^1 \frac{x^{m+k}}{1+x} dx.$$

Kako je

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{m+k}}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^{m+k}\, dx = \frac{1}{m+k+1} \to 0 \qquad (m \to +\infty),$$

iz (1) izlazi

(2) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{k+n} = \int_0^1 \frac{x^{k-1}}{1+x} dx.$$

Ako se stavi $k = a/b$, $x = t^b$ $(a, b > 0)$, jednakost (2) postaje

(3) $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt.$$

2° Prema (3),

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \qquad B = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2+3n} = \int_0^1 \frac{x\, dx}{1+x^3}.$$

Kako je

$$A = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx, \quad \text{i} \quad A + B = \int_0^1 \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}},$$

dobijamo

$$A = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 2 \right), \qquad B = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2 \right).$$

5.46. Ako je

(1) $$a_n = |\sin(an\pi)|^{1/n} \quad (a \text{ proizvoljan iracionalan broj}),$$

dokazati da je

(2) $$\lim_{n \to +\infty} a_n = 1.$$

Ako je a $(\neq 0)$ racionalan broj, dokazati da (2) takođe važi ukoliko se iz niza (1) izostave svi članovi koji su jednaki nuli.

5.47. Za niz (a_n) kaže se da je ograničene varijacije ako je red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta a_n|, \text{ sa } \Delta a_n = a_{n+1} - a_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

konvergentan.

1° Dokazati da je svaki niz ograničene varijacije konvergentan i da konvergentan niz ne mora biti ograničene varijacije.

2° Dokazati da je zbir, razlika i proizvod dva niza ograničene varijacije niz ograničene varijacije, kao i da niz recipročnih vrednosti članova niza ograničene varijacije koji ne uzima nulu kao vrednost i ne teži ka nuli — takođe niz ograničene varijacije.

3° Dokazati da je niz ograničene varijacije ako i samo ako predstavlja razliku dva monotono opadajuća konvergentna niza.

Rešenje. 1° Ako je niz (a_n) ograničene varijacije, tada je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \Delta a_n$ konvergentan. Odatle sleduje konvergencija niza (a_n), jer je

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta a_k \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ako je (a_n) niz parcijalnih suma neapsolutno konvergentnog reda, tada ovaj niz konvergira, ali nije ograničene varijacije. Takav je, na primer, niz

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2° Neka su nizovi (a_n) i (b_n) ograničene varijacije i neka je

$$c_n = a_n + b_n, \qquad d_n = a_n b_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Imamo:

$$\begin{aligned}
|\Delta c_n| &= |a_{n+1} + b_{n+1} - (a_n + b_n)| = |(a_{n+1} - a_n) + (b_{n+1} - b_n)| \\
&\leq |a_{n+1} - a_n| + |b_{n+1} - b_n| = |\Delta a_n| + |\Delta b_n| \qquad (n = 1, 2, \ldots); \\
|\Delta d_n| &= |a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n| = |(a_n + \Delta a_n)(b_n + \Delta b_n) - a_n b_n| \\
&= |a_n \Delta b_n + b_n \Delta a_n + \Delta a_n \Delta b_n| \\
&\leq A\,|\Delta b_n| + B\,|\Delta a_n| + 2A\,|\Delta b_n| \\
&= 3A\,|\Delta b_n| + B\,|\Delta a_n| \qquad (n = 1, 2, \ldots),
\end{aligned}$$

gde je

$$A = \sup_{n \geq 1} |a_n| < +\infty, \qquad B = \sup_{n \geq 1} |b_n| < +\infty;$$

dakle, redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta c_n|$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta d_n|$ konvergiraju, što znači da su nizovi (c_n) i (d_n) ograničene varijacije.

Slučaj razlike nizova ograničene varijacije tretira se na sasvim sličan način kao slučaj zbira.

Neka je $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$. Tada je $a = \inf_{n \geq 1} |a_n| > 0$.

Ako stavimo $c_n = 1/a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dobijamo

$$|\Delta c_n| = \left| \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} \right| = \frac{|\Delta a_n|}{|a_{n+1} a_n|} \leq \frac{1}{a^2} |\Delta a_n| \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

što znači da je niz (c_n) ograničene varijacije.

3° Ako je $a_n = b_n - c_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, gde nizovi (b_n) i (c_n) monotono opadaju i brojevi $b = \lim_{n \to +\infty} b_n$ i $c = \lim_{n = +\infty} c_n$ su konačni, tada je

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |\Delta a_k| &\leq \sum_{k=1}^{n} (|\Delta b_k| + |\Delta c_k|) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1} + c_k - c_{k+1}) \\
&= b_1 + c_1 - b_{n+1} - c_{n+1} \to b_1 + c_1 - b - c \qquad (n \to +\infty),
\end{aligned}$$

tako da red $\sum_{n=1}^{+\infty} |\Delta a_n|$ konvergira, tj. niz (a_n) je ograničene varijacije.

Neka je niz (a_n) ograničene varijacije. Tada je niz

$$b_n = \sum_{k=n}^{+\infty} |\Delta a_k| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

monotono opadajući i konvergira (ka nuli). Stavimo

(1) $$c_n = b_n - a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Niz (c_n) je konvergentan, kao razlika dva konvergentna niza.

Kako je

$$a_n - a_{n+1} \leq |\Delta a_n| = b_n - b_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

i stoga, prema (1),

$$c_n - c_{n+1} = (b_n - b_{n+1}) - (a_n - a_{n+1}) \geq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

niz (c_n) je monotono opadajući. Dakle, važi (1) sa monotono rastućim i konvergentnim nizovima (b_n) i (c_n).

5.48. 1° Neka dvostruki niz realnih brojeva λ_{nk} $(n, k = 1, 2, \ldots)$ ispunjava uslove:

$$\lambda_{nk} \geq 0 \; (n, k = 1, 2, \ldots), \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{nk} = 1 \; (n = 1, 2, \ldots).$$

Dokazati da je tada za važenje implikacije

$$s_n \to s \; (n \to +\infty) \Rightarrow t_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{nk} s_k \to s \; (n \to +\infty),$$

sa proizvoljnim nizom realnih brojeva (s_n) i sa konačnim ili beskonačnim s, potrebno i dovoljno da bude $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_{nk} = 0$ za svako fiksirano $k = 1, 2, \ldots$.

2° Neka niz pozitivnih brojeva (p_n) ispunjava uslov $P_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} p_\nu \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Dokazati da tada $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, gde je s konačno ili beskonačno, povlači

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k s_k}{P_n} = s.$$

3° Neka niz pozitivnih brojeva (p_n) ima osobinu da je

(1) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0 \qquad \left(P_n = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu\right).$$

Dokazati da je tada $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$ (s konačno ili beskonačno) povlači

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_{n+1-k} s_k}{P_n} = s.$$

4° Neka su (p_n) i (q_n) dva niza pozitivnih brojeva koji redom ispunjavaju uslove (1) i

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n}{Q_n} = 0 \qquad \left(Q_n = \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu\right).$$

Dokazati da tada:

4°1. važi jednakost

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{r_n}{R_n} = 0, \text{ gde je } r_n = \sum_{k=1}^{n} p_k q_{n+1-k}, \ R_n = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu;$$

4°2. za svaki niz realnih brojeva (s_n), ako oba limesa

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} p_{n+1-k} s_k}{P_n} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} q_{n+1-k} s_k}{Q_n}$$

postoje, kao konačne ili beskonačne vrednosti, tada su oni međusobno jednaki.

5.49. Neka je $v_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i neka redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ konvergiraju. Dokazati da tada

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} = \lambda.$$

Ovde λ može biti konačan broj, $+\infty$ ili $-\infty$.

Rešenje. Neka je λ konačno. Za unapred izabrano $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 takav da je

$$\lambda - \varepsilon < \frac{u_k}{v_k} < \lambda + \varepsilon \qquad (k \geq n_0),$$

tj.

$$(\lambda - \varepsilon) v_k < u_k < (\lambda + \varepsilon) v_k \qquad (k \geq n_0).$$

Odatle,

$$(\lambda - \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} v_k < \sum_{k=n}^{+\infty} u_k < (\lambda + \varepsilon) \sum_{k=n}^{+\infty} v_k \qquad (n \geq n_0),$$

tj.

$$\lambda - \varepsilon < \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} < \lambda + \varepsilon \qquad (n \geq n_0),$$

što znači da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} u_k}{\sum_{k=n}^{+\infty} v_k} = \lambda.$$

Dokaz je sličan u slučajevima kada je $\lambda = +\infty$ ili $\lambda = -\infty$.

5.50. Neka je $b_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i neka red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ konvergira za $|t| < 1$, a divergira za $t = 1$. Dokazati da tada, za bilo koji niz realnih brojeva a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, svaki od uslova

$$(1)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = s,$$

$$(2)\qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} a_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} b_k} = s,$$

gde je s u oba slučaja konačno, povlači

$$(3)\qquad \lim_{t\to1-0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k t^k}{\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k t^k} = s.$$

Pod kojim pretpostavkama može biti i $s = -\infty$ ili $s = +\infty$?

Rešenje. Prvo ćemo dokazati da, pod navedenim uslovima, (1) $\Rightarrow$ (3). Iz (1) izlazi da je, za dovoljno veliko n,

$$|a_n| < (|s| + 1)\, b_n,$$

tako da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ konvergira za $|t| < 1$. Stavimo sada

$$(4)\qquad A_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,\quad B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k t^k,\quad A(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k,\quad B(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k.$$

Imamo

$$B(t) > B_n(t) \qquad (0 < t < 1;\quad n = 0, 1, 2, \ldots),$$

i odatle

$$\varliminf_{t\to1-0} B(t) \geq \lim_{t\to1-0} B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} b_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Puštajući da $n \to +\infty$, dobijamo

$$\varliminf_{t\to1-0} B(t) \geq +\infty,$$

tj.

$$(5)\qquad \lim_{t\to1-0} B(t) = +\infty.$$

Prema (1), za unapred dato $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m takav da je

$$s - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < s + \varepsilon \qquad (k = m+1, m+2, \ldots),$$

tj.

$$(s-\varepsilon) b_k t^k < a_k t^k < (s+\varepsilon) b_k t^k \quad (0 < t < 1;\ k = m+1, m+2, \ldots).$$

Sabiranje ovih nejednakosti daje, prema (4),

$$(s-\varepsilon)\big(B(t) - B_m(t)\big) < A(t) - A_m(t) < (s+\varepsilon)\big(B(t) - B_m(t)\big) \quad (0 < t < 1),$$

ili, zbog $B(t) > 0$ $\quad (0 < t < 1)$,

$$(6)\qquad (s-\varepsilon)\left(1 - \frac{B_m(t)}{B(t)}\right) < \frac{A(t)}{B(t)} - \frac{A_m(t)}{B(t)} < (s+\varepsilon)\left(1 - \frac{B_m(t)}{B(t)}\right) \qquad (0 < t < 1).$$

Prema (5) i s obzirom na činjenicu da su $A_m(t)$ i $B_m(t)$ polinomi po t, iz (6) se dobija, puštajući da $t \to 1-0$,

$$s - \varepsilon \leq \varliminf_{t \to 1-0} \frac{A(t)}{B(t)} \leq \varlimsup_{t \to 1-0} \frac{A(t)}{B(t)} \leq s + \varepsilon,$$

a odatle, puštajući da $\varepsilon \to +0$, imamo $\lim\limits_{t \to 1-0} \dfrac{A(t)}{B(t)} = s$.

Pretpostavimo sada da je ispunjen uslov (2), sa konačnim s. Stavimo $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Prema Abelovoj formuli parcijalne sumacije, imamo

$$\begin{aligned} B_n(t) &= \sum_{k=0}^{n} b_k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} B_k (t^k - t^{k+1}) + B_n t^n \\ &= (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} B_k t^k + B_n t^n \qquad (n = 1, 2, \ldots); \end{aligned}$$

odavde izlazi da red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} B_k t^k$ za $|t| < 1$ konvergira i, dalje, da je

$$B(t) = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} B_k t^k \qquad (|t| < 1).$$

Iz poslednje jednakosti izlazi da je $\lim\limits_{t \to 1-0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} B_k t^k = +\infty$, tj. da red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} B_k t^k$ divergira za $t = 1$ (Abelov stav). Iz pretpostavke izlazi da nejednakost

$$|A_n| \leq (|s| + 1) B_n$$

važi za dovoljno veliko n, tako da i red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} A_k t^k$ konvergira za $|t| < 1$. Odavde i iz jednakosti

$$A_n(t) = (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} A_k t^k + A_n t^n \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

izlazi konvergencija reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ za $|t| < 1$, i jednakost

$$A(t) = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} A_k t^k \qquad (|t| < 1).$$

Na osnovu prethodnih činjenica i dokazane implikacije (1) $\Rightarrow$ (3),

$$\lim_{t \to 1-0} \frac{A(t)}{B(t)} = \lim_{t \to 1-0} \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} A_n t^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_n t^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{A_n}{B_n} = s.$$

Na sličan način kao u prvom delu prethodnog izlaganja, dokazuje se da implikacija (1) $\Rightarrow$ (3) važi i u slučaju kada je $s = -\infty$ ili $s = +\infty$, ako se još pretpostavi da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ konvergira za $|t| < 1$. Takođe se zaključuje da pod dopunskom pretpostavkom da red $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n t^n$ konvergira za $|t| < 1$ (koja, prema (7), povlači prethodnu dopunsku pretpostavku), važi implikacija (2) $\Rightarrow$ (3).

Može se primetiti da implikacija (2) $\Rightarrow$ (3) u stvari povlači implikaciju (1) $\Rightarrow$ (3), u slučaju kada je s konačno bez daljneg, a u slučaju kada je $s = -\infty$ ili $s = +\infty$ pod pretpostavkom da red $\sum_{n=0}^{+\infty} A_n t^n$ konvergira za $|t| < 1$, jer, prema Stolzovoj teoremi, (1) $\Rightarrow$ (2). Ovde smo se bavili obema implikacijama stoga što je svaka posebno od interesa, a i zato što se uz pomoć implikacije (1) $\Rightarrow$ (3), kao što smo videli, upravo dokazuje implikacija (2) $\Rightarrow$ (3).

5.51. Neka je a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ niz realnih brojeva, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i neka je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k = s \tag{1}$$

konačno. Dokazati da je $\lim_{t\to1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = s$.

Rešenje. Stavimo $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Imamo, prema Abelovoj formuli parcijalne sumacije, za $n = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} s_k (t^k - t^{k+1}) + s_n t^n = (1-t) \sum_{k=0}^{n-1} s_k t^k + s_n t^n \tag{2}$$

i dalje, slično,

$$\sum_{k=0}^{n-1} s_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{n-2} \sigma_k (1+k) t^k + \sigma_{n-1} n t^n. \tag{3}$$

Zbog konvergencije niza σ_n, iz (3) izlazi da red $\sum_{k=0}^{+\infty} s_k t^k$ konvergira za $|t| < 1$, i da je

$$\sum_{k=0}^{+\infty} s_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k (1+k) t^k \qquad (|t| < 1); \tag{4}$$

iz (2) se onda izvodi da i red $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ konvergira za $|t| < 1$ i da važi jednakost

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = (1-t) \sum_{k=0}^{+\infty} s_k t^k \qquad (|t| < 1). \tag{5}$$

Prema (1), (5), (4) i prema prethodnom problemu, za $0 < t < 1$ imamo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n t^n = (1-t)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n) \sigma_n t^n$$

$$= \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n (1+n) t^n}{\sum_{n=0}^{+\infty} (1+n) t^n} \to \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = s \qquad (t \to 1-0).$$

5.52. Neka su (p_n) i (q_n) dva niza pozitivnih brojeva koji ispunjavaju uslove

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{np_n}=\alpha<+\infty,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k}{nq_n}=\beta<+\infty,\qquad \alpha+\beta>0.$$

Dokazati da je tada

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{n^2 p_n q_n}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Dokaz. Stavimo

$$P_n=\sum_{k=1}^{n} p_k,\quad Q_n=\sum_{k=1}^{n} q_k\qquad (n=1,2,\ldots).$$

Neka je, najpre, $\alpha>0$, $\beta>0$. U tom slučaju

(1) $$\frac{1}{np_n}\sim\frac{\alpha}{P_n},\ \frac{1}{nq_n}\sim\frac{\beta}{Q_n}\qquad (n\to+\infty);$$

zatim,

(2) $$P_n\to+\infty,\quad Q_n\to+\infty\qquad (n\to+\infty),$$

jer, ako bi, na primer, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n=P$ bilo konačno, imalo bi se, prema (1),

$$p_n\sim\frac{P}{\alpha}\cdot\frac{1}{n}\qquad (n\to+\infty),$$

a to bi povuklo divergenciju reda $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k$, u suprotnosti sa pretpostavkom. Dalje, u ovom slučaju, prema (1),

(3) $$\frac{P_{n-1}}{P_n}=1-\frac{p_n}{P_n}\to 1\qquad (n\to+\infty),$$
$$\frac{Q_{n-1}}{Q_n}\to 1\qquad (n\to+\infty).$$

Na osnovu (1), (2) i (3), primena Stolzove teoreme daje

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{n^2 p_n q_n}&=\alpha\beta\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{P_n Q_n}\\&=\alpha\beta\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{np_n q_n}{(P_{n-1}+p_n)(Q_{n-1}+q_n)-P_{n-1}Q_{n-1}}\\&=\alpha\beta\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{np_n q_n}{P_{n-1}q_n+Q_{n-1}p_n+p_n q_n}\\&=\alpha\beta\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{P_n}{np_n}\cdot\frac{P_{n-1}}{P_n}+\frac{Q_n}{nq_n}\cdot\frac{Q_{n-1}}{Q_n}+\frac{1}{n}}=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Ako je, na primer, $\alpha=0$, $\beta>0$, ponovo imamo $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n=+\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{Q_{n-1}}{Q_n}=1$, a sem toga

$$\frac{1}{np_n}=\frac{\varepsilon_n}{P_n}\qquad (n=1,2,\ldots),\ \lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0.$$

Stoga primena uopštene Stolzove teoreme daje u tom slučaju

$$0 \le \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{n^2 p_n q_n} = \beta \cdot \overline{\lim_{n\to+\infty}} \varepsilon_n \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{P_n Q_n}$$

$$\le \beta \cdot \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{np_n q_n}{P_{n-1} q_n + Q_{n-1} p_n + p_n q_n}$$

$$\le \beta \cdot 0 \cdot \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{nq_n}{Q_n} \cdot \frac{Q_n}{Q_{n-1}} = \beta \cdot 0 \cdot \frac{1}{\beta} = 0 = \frac{0 \cdot \beta}{0+\beta}.$$

U ovom drugom slučaju može se i ovako postupiti. Iz

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Q_n}{nq_n} = \beta > 0 \quad \text{i} \quad q_n > 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

izlazi da postoji $\gamma > 0$ takvo da je $nq_n < \gamma Q_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Stoga,

$$0 < \frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{n^2 p_n q_n} < \gamma \frac{\sum_{k=1}^{n} p_k Q_k}{n^2 p_n q_n} \le \gamma \cdot \frac{Q_n \sum_{k=1}^{n} p_k}{n^2 p_n q_n} = \gamma \cdot \frac{P_n}{np_n} \cdot \frac{Q_n}{nq_n} \to \gamma \cdot 0 \cdot \beta = 0,$$

odakle je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} kp_k q_k}{n^2 p_n q_n} = 0.$$

5.53. Nizovi (u_n) i (v_n) definisani su sa

$$(1) \qquad u_{n+1} = 3\,u_n + v_n, \qquad v_{n+1} = 2\,u_n + 4\,v_n.$$

Izraziti u_n i v_n kao funkciju od u_0, v_0, n

1° upotrebom matrice $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$, i 2° posmatranjem redova

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!} = y, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \frac{x^n}{n!} = z$$

kao i $\dfrac{dy}{dx}$ i $\dfrac{dz}{dx}$.

Rešenje. 1° Ako se sistemu (1) da oblik

$$\begin{Vmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix},$$

dobija se

$$(3) \qquad \begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}^n \begin{Vmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Vmatrix} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ovim se problem rešavanja sistema (1) svodi na određivanje potencije $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}^n$.

Sopstvene vrednosti matrice $\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}$ su 5 i 2. Zbog ovoga je ova matrica slična matrici $\begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$, tj. postoji matrica $S = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ $(|S| \neq 0)$ takva da je

(4) $$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = S^{-1} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} S.$$

Odavde izlazi $S = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$

Jednakost (4) postaje

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix},$$

odakle dobijamo

$$\begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{Vmatrix}^n = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}^n \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{Vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & 2 \cdot 5^n + 2^n \end{Vmatrix}.$$

Koristeći dobijenu jednakost, (3) postaje

$$\begin{Vmatrix} u_n \\ v_n \end{Vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} & 2 \cdot 5^n + 2^n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Vmatrix},$$

odakle je

(5) $$u_n = \frac{1}{3} (5^n + 2^{n+1}) u_0 + \frac{1}{3} (5^n - 2^n) v_0,$$
$$v_n = \frac{1}{3} (2 \cdot 5^n - 2^{n+1}) u_0 + \frac{1}{3} (2 \cdot 5^n + 2^n) v_0.$$

2° Iz (2) sleduje

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (3 u_n + v_n) \frac{x^n}{n!} = 3y + z,$$

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2 u_n + 4 v_n) \frac{x^n}{n!} = 2y + 4z.$$

Dakle, funkcije y i z zadovoljavaju diferencijalne jednačine

(6) $$\frac{dy}{dx} = 3y + z, \quad \frac{dz}{dx} = 2y + 4z$$

i uslove $y(0) = u_0$, $z(0) = v_0$.

Opšte rešenje sistema (6) je

$$y = C_1 e^{5x} - C_2 e^{2x}, \quad z = 2 C_1 e^{5x} + C_2 e^{2x}.$$

Pomoću uslova $y(0) = u_0$, $z(0) = v_0$ nalazimo

$$C_1 = \frac{u_0 + v_0}{3}, \qquad C_2 = \frac{v_0 - 2u_0}{3},$$

pa su funkcije y i z date sa

$$y(x) = \frac{1}{3} (u_0 + v_0) e^{5x} + \frac{1}{3} (2u_0 - v_0) e^{2x},$$

$$z(x) = \frac{2}{3} (u_0 + v_0) e^{5x} + \frac{1}{3} (v_0 - 2u_0) e^{2x}.$$

Koristeći se razvojem $e^{ax} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} x^n$, dobijamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{5^n}{3} (u_0 + v_0) + \frac{2^n}{3} (2u_0 - v_0) \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!},$$

$$z(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2 \cdot 5^n}{3} (u_0 + v_0) + \frac{2^n}{3} (v_0 - 2u_0) \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \frac{x^n}{n!},$$

odakle za u_n i v_n nalazimo (5).

***Generalizacija* 1.** Tretirati opšti slučaj

$$u_{n+1} = a\,u_n + b\,v_n, \quad v_{n+1} = c\,u_n + d\,v_n \qquad (a, b, c, d \text{ konstante}).$$

***Generalizacija* 2.** Proučiti navedeni problem za nizove (u_{nr}) $(r = 1, \ldots, k)$ koji su definisani sa

$$u_{n+1,\, r} = a_{1r}\, u_{n1} + a_{2r}\, u_{n2} + \cdots + a_{\nu r}\, u_{n\nu} \qquad (r = 1, 2, \ldots, \nu).$$

5.54. Dokazati da postoji takva numeracija r_n $(n \in \mathbf{N})$ skupa svih racionalnih brojeva intervala $(0, 1)$ da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{\nu=1}^{n} r_\nu$ divergira.

Rešenje. Stavimo

$$a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

i neka je b_n $(n \in \mathbf{N})$ niz obrazovan od svih ostalih racionalnih brojeva iz $(0, 1)$. Beskrajni proizvod $\prod_{\nu=1}^{+\infty} a_\nu$ konvergira. Stoga postoji takvo a da je

(1) $$\prod_{\nu=1}^{n} a_\nu > a > 0 \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Niz r_n $(n \in \mathbf{N})$ može se obrazovati na sledeći način:

$r_1 = a_1$;

r_2 je prvi po redu član niza b_n $(n \in \mathbf{N})$ koji nije manji od $\frac{1}{2}$;

$r_3 = a_2$;

(2! − 1 članova)

r_4 je prvi po redu od preostalih članova niza b_n $(n \in \mathbf{N})$ koji nije manji od $\frac{1}{3}$,

$r_5 = a_3$, $r_6 = a_4$, $r_7 = a_5$, $r_8 = a_6$, $r_9 = a_7$;

(5 = 3! − 1 članova)

r_{10} je prvi po redu od preostalih članova niza b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ koji nije manji od $\frac{1}{4}$;

.

.

.

Ovako formirani niz r_n $(n \in \mathbf{N})$ iscrpljuje nizove a_n $(n \in \mathbf{N})$ i b_n $(n \in \mathbf{N})$, tj. sve racionalne brojeve intervala $(0, 1)$. Iz načina na koji je niz r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ obrazovan izlazi, s obzirom na (1), da opšti član reda

(2) $$\sum_{n=1}^{+\infty} \prod_{\nu=1}^{n} r_\nu$$

majorira opšti član divergentnog reda

$$a+\underbrace{\frac{a}{2!}+\frac{a}{2!}}_{(2!\ \text{članova})}+\underbrace{\frac{a}{3!}+\frac{a}{3!}+\frac{a}{3!}+\frac{a}{3!}+\frac{a}{3!}+\frac{a}{3!}}_{(3!\ \text{članova})}+\cdots,$$

što znači da red (2) divergira.

Primedba. Postoje numeracije s_n $(n\in\mathbf{N})$ skupa svih racionalnih brojeva iz $(0, 1)$ za koje red $\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{\nu=1}^{n} s_\nu$ konvergira. Neka je, na primer, c_n $(n\in\mathbf{N})$ niz obrazovan od svih racionalnih brojeva iz $(0, 1)$ koji ostaju kad se isključe brojevi $1/n$ $(n\in\mathbf{N})$. Niz s_n $(n\in\mathbf{N})$ definisan sa

$$s_{2k-1}=1/k,\qquad s_{2k}=c_k\qquad (k\in\mathbf{N})$$

predstavlja jednu takvu numeraciju.

5.55. Dokazati da nema najsporije konvergentnog ni najsporije divergentnog reda sa pozitivnim članovima. Preciznije, dokazati sledeće tvrđenje:

Neka je $a_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

1° Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, tada postoji takav niz b_n $(n\in\mathbf{N})$ koji je strogo rastući i teži ka $+\infty$ da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ takođe konvergira.

2° Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira, tada postoji takav niz c_n $(n\in\mathbf{N})$ koji je strogo opadajući i teži ka nuli da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n c_n$ takođe divergira.

Rešenje. 1° Stavimo, pod pretpostavkom da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan,

$$R_n=\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\qquad (n\in\mathbf{N}).$$

Tada se može, za bilo koje $\alpha\in(0, 1)$, uzeti da je $b_n=\dfrac{1}{R_n{}^\alpha}$. Zaista, kako R_n strogo opada i teži ka nuli, ovako definisano b_n strogo rastući teži ka $+\infty$; zatim, zbog $a_k=R_k-R_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots)$ i $\alpha<1$, imamo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{R_k{}^\alpha}=\sum_{k=1}^{n}\frac{R_k-R_{k+1}}{R_k{}^\alpha}$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\int_{R_{k+1}}^{R_k}\frac{dt}{t^\alpha}=\int_{R_{n+1}}^{R_1}\frac{dt}{t^\alpha}<\int_{0}^{R_1}\frac{dt}{t^\alpha}<+\infty\ (n=1, 2, \ldots),$$

tako da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergira.

2° Označimo, pod pretpostavkom da red (1) divergira, njegovu n-tu parcijalnu sumu sa S_n i stavimo $c_n=1/S_n$. Tada, očigledno, niz c_n strogo opadajući teži ka nuli. Zatim, za svako $n\in\mathbf{N}$ postoji prirodan broj p_n takav da je $p_n>n$ i $S_{p_n}>2S_n$.

Odatle izlazi

$$\sum_{k=n+1}^{p_n} a_k c_k = \sum_{k=n+1}^{p_n} \frac{a_k}{S_k} > \frac{1}{S_{p_n}} \sum_{k=n+1}^{p_n} a_k = \frac{1}{S_{p_n}} (S_{p_n} - S_n)$$

$$= 1 - \frac{S_n}{S_{p_n}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

što znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n c_n$ divergira.

Divergencija poslednjeg reda može se dokazati i na sledeći način: Kako

$$\prod_{k=2}^{n} (1 - a_k c_k) = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{a_k}{S_k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{S_k - a_k}{S_k} = \prod_{k=2}^{n} \frac{S_{k-1}}{S_k} = \frac{S_1}{S_n} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

tj. beskonačan proizvod sa negativnim članovima $\prod_{n=2}^{+\infty} (1 - a_n c_n)$ divergira ka nuli, red $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n c_n$ mora biti divergentan.

Primedba. Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira i ako je ispunjen uslov

$$a_n = o(S_{n-1}) \qquad (n \to +\infty)$$

(ovaj je uslov svakako ispunjen kad je $a_n = O(1)$ $(n \to +\infty)$), važi asimptotska relacija

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k} \sim \log S_n \qquad (n \to +\infty).$$

Zaista, tada je, prema Stolzovoj teoremi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k}}{\log S_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a_n}{S_n}}{\log \frac{S_n}{S_{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_{n-1}}{S_n} \cdot \frac{\frac{a_n}{S_{n-1}}}{\log\left(1 + \frac{a_n}{S_{n-1}}\right)} = 1,$$

jer

$$\frac{a_n}{S_{n-1}} \to 0, \quad \frac{S_n}{S_{n-1}} = 1 + \frac{a_n}{S_{n-1}} \to 1 \qquad (n \to +\infty).$$

5.56. Neka je niz realnih brojeva (a_n) takav da je niz

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_n) \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

ograničen. Dokazati da tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora konvergirati, ali sigurno konvergira ako je $a_1 \geq a_2 \geq \cdots$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Primedba. Ovaj problem može se dovesti u vezu sa problemom **5.42.**

5.57. Funkcija

$$f : \mathbf{C}' \to \mathbf{C} \left(\mathbf{C}' = \mathbf{C} \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}\right), \text{ odnosno } f : \mathbf{R}' \to \mathbf{R} \left(\mathbf{R}' = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\delta}{\gamma}\right\}\right),$$

data je sa

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \quad (x \in \mathbf{C}', \text{ odnosno } x \in \mathbf{R}'),$$

gde kompleksne, odnosno realne, konstante α, β, γ i δ ispunjavaju uslove

$$\alpha \delta - \beta \gamma \neq 0 \text{ i } \gamma \neq 0.$$

1° Rešiti diferencnu jednačinu

(1) $$x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2° Ispitati definisanost, konvergenciju, broj i raspored tačaka nagomilavanja niza (x_n) određenog rekurentnom formulom (1) i prvim članom x_1 ($\in \mathbf{C}'$, odnosno $\in \mathbf{R}'$), u zavisnosti od tog prvog člana i konstanti α, β, γ i δ.

3° Dokazati da, ako niz (x_n) konvergira i nije konstantan, tada on svojoj granici teži ili eksponencijalnom brzinom ili brzinom kojom $\frac{1}{n}$ teži ka nuli; preciznije, da tada, ukoliko je $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$, ili je

$$x_n - x_0 \sim A \lambda^n \quad (n \to +\infty;\ 0 \neq A \in \mathbf{C}, \text{ odnosno } \in \mathbf{R};\ |\lambda| < 1),$$

ili

$$x_n - x_0 \sim \frac{B}{n} \quad (n \to +\infty;\ 0 \neq B \in \mathbf{C}, \text{ odnosno } \in \mathbf{R}).$$

Precizirati uslove pod kojima se realizuje prva i one pod kojima nastupa druga mogućnost i odrediti brojeve A, λ i B.

Rešenje. Tretiraćemo najpre opšti slučaj kada su α, β, γ, δ i x_1 kompleksni brojevi. Data diferencna jednačina može se napisati u obliku

$$x_{n+1} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\gamma} \cdot \frac{1}{\gamma x_n + \delta} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

tj. u obliku

(2) $$\gamma x_{n+1} + \delta = \alpha + \delta - \frac{\Delta}{\gamma x_n + \delta} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde je stavljeno $\Delta = \alpha \delta - \beta \gamma \ (\neq 0)$. Posle smene

$$\gamma x_n + \delta = y_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

(2) postaje

(3) $$y_{n+1} = \alpha + \delta - \frac{\Delta}{y_n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nova smena

(4) $$y_n = \frac{z_{n+1}}{z_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

uz pretpostavku $z_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i uslov

(5) $$z_1 = 1,$$

pretvara (3) u

(6) $$z_{n+2} - a z_{n+1} + \Delta z_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde je stavljeno $a = \alpha + \delta$. Prema tome da li kvadratna jednačina

(7) $$t^2 - a t + \Delta = 0 \quad (a = \alpha + \delta,\ \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma)$$

ima dva različita korena t_1 i t_2 ili jedan dvostruki koren t_1, tj. prema tome da li je

(8) $$\omega \equiv a^2 - 4 \Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4 \beta \gamma \neq 0$$

ili

(9) $$\omega = 0,$$

rešenje diferencne jednačine (6) ima oblik

(10) $$z_n = P\, t_1^n + Q\, t_2^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ili

(11) $$z_n = (U + nV)\, t_1^n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde se konstante P, Q, U i V, s obzirom na (5) i (4), određuju iz jednačina

(12) $$\begin{cases} (z_1 =)\, P\, t_1 + Q\, t_2 = 1, \\ (z_2 =)\, P\, t_1^2 + Q\, t_2^2 = y_1; \end{cases} \quad \text{odnosno} \quad \begin{cases} (z_1 =)\, (U + V)\, t_1 = 1, \\ (z_2 =)\, (U + 2\, V)\, t_1^2 = y_1. \end{cases}$$

Kako su, zbog uslova $\Delta \neq 0$, koreni jednačine (7) u oba slučaja različiti od nule, rešavanjem jednačina (12) dobija se

(13) $$P = \frac{t_2 - y_1}{t_1\, (t_2 - t_1)}, \qquad Q = \frac{y_1 - t_1}{t_2 (t_2 - t_1)},$$

(14) $$U = \frac{2\, t_1 - y_1}{t_1^2}, \qquad V = \frac{y_1 - t_1}{t_1^2}.$$

Formule (10) i (11), s obzirom na (13) i (14), postaju redom

(15) $$z_n = \frac{(t_2 - y_1)\, t_1^{n-1} + (y_1 - t_1)\, t_2^{n-1}}{t_2 - t_1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

(16) $$z_n = [2\, t_1 - y_1 + (y_1 - t_1)\, n]\, t_1^{n-2} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Jasno je da data diferencna jednačina, tj. diferencna jednačina (3), definiše beskonačan niz ako i samo ako je $z_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$, tj. s obzirom na (15) i (16), ako i samo ako je, prema slučaju,

(17) $$(\gamma\, x_1 + \delta)(t_1^n - t_2^n) \; (= y_1(t_1^n - t_2^n)) \neq \Delta\, (t_1^{n-1} - t_2^{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

odnosno

(18) $$\gamma\, x_1 + \delta\, (= y_1) \neq \frac{n-1}{n}\, t_1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pod uslovom (17), odnosno (18), rešenje diferencne jednačine (3) je

(19) $$y_n = \frac{(t_2 - y_1)\, t_1^n + (y_1 - t_1)\, t_2^n}{(t_2 - y_1)\, t_1^{n-1} + (y_1 - t_1)\, t_2^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

odnosno

(20) $$y_n = \frac{t_1 + (y_1 - t_1)\, n}{2\, t_1 - y_1 + (y_1 - t_1)\, n}\, t_1 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

(19) se može pisati i u obliku

(21) $$y_n = \Delta\, \frac{(t_2 - y_1)\, \lambda^n + y_1 - t_1}{(t_2 - y_1)\, t_2\, \lambda^n + (y_1 - t_1)\, t_1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gde je

$$\lambda = \frac{t_1}{t_2} \; (\neq 1).$$

Iz (21) i (20) izvodi se da je u prvom slučaju niz (y_n), pa stoga i niz (x_n), konstantan ako i samo ako je

(22) $$\gamma\, x_1 + \delta\, (= y_1) = t_1 \text{ ili } \gamma\, x_1 + \delta\, (= y_1) = t_2,$$

a u drugom slučaju ako i samo ako je

(23) $$\gamma\, x_1 + \delta\, (= y_1) = t_1.$$

Pretpostavimo da uslov (22) nije ispunjen. Ako je

(24) $$|a|^2 + |a^2 - 4\Delta| > 4|\Delta| \text{ (tj. } |t_1| \neq |t_2|),$$

primenom jednakosti (21), ili jednakosti

$$y_n = \Delta \frac{t_2 - y_1 + (y_1 - t_1)\lambda^n}{(t_2 - y_1)t_2 + (y_1 - t_1)t_1\lambda^n} \quad \left(n = 1, 2, \ldots; \lambda = \frac{t_2}{t_1}\right),$$

prema tome da li je $|t_1| < |t_2|$ ili $|t_1| > |t_2|$, dolazi se do zaključka da tada niz (y_n) konvergira ka onom od brojeva t_1 i t_2 koji ima veći moduo. Pri tome je u prvom slučaju

$$y_n = t_2 + \frac{t_2 - y_1}{y_1 - t_1} \cdot t_2^2(t_1 - t_2)\lambda^n + o(\lambda^n) \qquad (n \to +\infty),$$

a u drugom

$$y_n = t_1 + \frac{t_1 - y_1}{y_1 - t_2} t_1^2(t_2 - t_1)\lambda^n + o(\lambda^n) \qquad (n \to +\infty).$$

Dakle, pod uslovom (24), niz (x_n) konvergira ka

(25) $$x_0 = \frac{1}{\gamma}(t_k - \delta)$$

i važi relacija

(26) $$x_n - x_0 \sim \frac{t_k^2}{\gamma} \cdot \frac{t_k - \gamma x_1 - \delta}{\gamma x_1 + \delta - t_l}(t_l - t_k)\lambda^n \qquad (n \to +\infty);$$

pri tome je

(27) $$\{k, l\} = \{1, 2\}, \quad |t_l| < |t_k| \text{ i } \lambda = \frac{t_l}{t_k}.$$

Neka je

(28) $$|a|^2 + |a^2 - 4\Delta| = 4|\Delta| \text{ i } \omega \neq 0 \text{ (tj. } |t_1| = |t_2| \text{ i } t_1 \neq t_2).$$

Tada je

$$t_1 = \varrho e^{\varphi_1 i}, \quad t_2 = \varrho e^{\varphi_2 i} \quad (\varrho > 0; \varphi_1, \varphi_2 \text{ realno}; \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \neq 2k\pi; \ k \text{ celo})$$

i stoga

(29) $$\frac{t_1}{t_2} = e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i} = e^{\varphi i},$$

pa (21) postaje

$$y_n = \Delta \frac{(t_2 - y_1)e^{n\varphi i} + y_1 - t_1}{(t_2 - y_1)t_2 e^{n\varphi i} + (y_1 - t_1)t_1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odavde se izvode sledeći zaključci: u ovom slučaju svi se članovi niza (y_n) nalaze na krugu ili pravoj — slici jediničnog kruga $|t| = 1$ u kompleksnoj ravni pri preslikavanju bilinearnom funkcijom

(30) $$u(t) = \Delta \frac{(t_2 - y_1)t + y_1 - t_1}{(t_2 - y_1)t_2 t + (y_1 - t_1)t_1} \qquad (t \in \mathbf{C});$$

ova slika je prava ako i samo ako je

$$|(t_2 - y_1)t_2| = |(y_1 - t_1)t_1|,$$

tj. zbog $|t_1| = |t_2|$, ako i samo ako je

$$|t_2 - y_1| = |y_1 - t_1|,$$

a inače je krug; dalje, ako je φ racionalan umnožak od 2π, niz (y_n) uzima konačno mnogo vrednosti — i pri tome svaku od njih beskonačno mnogo puta, tako da su to onda sve njegove tačke nagomilavanja; može se dodati da je, preciznije, u ovom slučaju niz (y_n) periodičan, sa periodom jednakom broju tih vrednosti; ako je φ iracionalan umnožak od 2π, sve tačke pomenutog kruga odnosno prave su tačke nagomilavanja niza (y_n).

U slučaju (9), kada je niz (y_n) dat jednakošću (20), ovaj niz konvergira, ka t_1 i pri tome, ukoliko nije po sredi slučaj (23),

$$y_n = t_1 + \frac{t_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

To znači da u ovom slučaju niz (x_n) konvergira ka broju

$$x_0 = \frac{1}{\gamma}(t_1 - \delta) \tag{31}$$

i da je

$$x_n - x_0 \sim \frac{t_1}{\gamma} \cdot \frac{1}{n} \qquad (n \to +\infty). \tag{32}$$

Na osnovu prethodnog, za posmatrani opšti slučaj došli smo do sledećih rezultata:

Data diferencna jednačina zajedno sa početnom vrednošću x_1 određuje beskonačan niz (x_n) ako i samo ako je ispunjen uslov (17), *odnosno uslov* (18), *prema tome da li je po sredi slučaj* (8), *kada kvadratna jednačina* (7) *ima dva različita korena t_1 i t_2, ili slučaj* (9), *kada ona ima jedan dvostruki koren t_1.*

Pod pretpostavkom (17), *odnosno* (18): *niz (x_n) je u prvom slučaju dat sa*

$$x_n = \frac{1}{\gamma}\left[\frac{(t_2 - \gamma x_1 - \delta)\, t_1{}^n + (\gamma x_1 + \delta - t_1)\, t_2{}^n}{(t_2 - \gamma x_1 - \delta)\, t_1{}^{n-1} + (\gamma x_1 + \delta - t_1)\, t_2{}^{n-1}} - \delta\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

a u drugom slučaju sa

$$x_n = \frac{1}{\gamma}\left[t_1 \cdot \frac{t_1 + (\gamma x_1 + \delta - t_1)\, n}{2\, t_1 - \gamma x_1 - \delta + (\gamma x_1 + \delta - t_1)\, n} - \delta\right] \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ovaj niz je konstantan ako i samo ako je ispunjen u prvom slučaju uslov (22), *a u drugom slučaju uslov* (23).

Pod dopunskom pretpostavkom da uslov (22), *odnosno uslov* (23), *nije ispunjen:*

I *Niz (x_n) konvergira ka broju x_0 u slučajevima* (24) *i* (9). *U prvom od njih x_0 je dato sa* (25) *i važi asimptotska procena* (26), *uz konvenciju* (27), *a u drugom je x_0 dato sa* (31) *i važi asimptotska procena* (32).

II *U slučaju* (28) *svi članovi niza (x_n) imaju vrednosti na krugu ili pravoj — slici jediničnog kruga sa centrom u početku kompleksne ravni pri preslikavanju funkcijom*

$$w = \frac{1}{\gamma}(u(t) - \delta),$$

gde je $u(t)$ dato sa (30); *ta slika je prava ako i samo ako se x_1 nalazi na simetrali duži koja spaja tačke $\frac{1}{\gamma}(t_1 - \delta)$ i $\frac{1}{\gamma}(t_2 - \delta)$. U ovom slučaju niz uvek divergira; on ima konačno mnogo tačaka nagomilavanja,koje su tada ujedno i sve vrednosti koje on, periodično, uzima, ili ima za tačke nagomilavanja sve tačke pomenutog kruga ili prave — prema tome da li je u jednakosti* (29) *broj φ racionalan ili iracionalan umnožak od 2π. —*

Ako su koeficijenti α, β, γ, δ i početna vrednost x_1 realni, prvi slučaj pod I nastupa kad je $\omega > 0$ i $a \neq 0$, a slučaj II kad je $\omega < 0$, ili $\omega > 0$ i $a = 0$. Pri tome, ako je, u slučaju II, φ iracionalan umnožak od 2π, svaki realan broj je tačka nagomilavanja niza (x_n).

Primedbe. 1° U (24) i (28) implicitno je iskorišćen sledeći rezultat (inspirisan delom rasuđivanja na str. 115 u *Zborniku matematičkih problema III* D. S. Mitrinovića):

Kompleksna kvadratna jednačina po t

$$t^2 - at + \Delta = 0$$

ima korene sa jednakim ili sa različitim modulima prema tome da li je

$$|a|^2 + |a^2 - 4\Delta| > 4|\Delta|,$$

ili

$$|a|^2 + |a^2 - 4\Delta| = 4|\Delta|.$$

Dokaz. Kako su ovi koreni

$$t_{1,2}=\frac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2-4\Delta}),$$

tako da je

$$|t_{1,2}|^2=\frac{1}{4}[|a|^2+|a^2-4\Delta|\pm 2\,\mathrm{Re}\,(\bar{a}\sqrt{a^2-4\Delta})],$$

to uvek važi nejednakost

$$|a|^2+|a^2-4\Delta|=2(|t_1|^2+|t_2|^2)\geq 4\,|t_1|\,|t_2|=4\,|\Delta|,$$

a jednakost u njoj ekvivalentna je sa jednakošću $|t_1|=|t_2|$.

2° Na osnovu dobijenog potrebnog i dovoljnog uslova za beskonačnost niza (x_n), tj. uslova (17) ili uslova (18), prema slučaju, lako se dolazi do sledećeg zaključka: *diferencna jednačina* (1) *definiše beskonačan niz ako i samo ako* x_1 *nema vrednost nijednog člana niza* (u_n) *određenog rekurentnom formulom*

$$u_{n+1}=g(u_n)\qquad (n=1,2,\ldots),$$

gde je

$$g(x)=\frac{\delta x-\beta}{-\gamma x+\alpha}$$

inverzna funkcija funkcije f, i početnom vrednošću $u_1=-\dfrac{\delta}{\gamma}$. Zaista, može se neposredno proveriti da su članovi ovog niza, koji može biti konačan ili beskonačan, dati sa

$$\gamma u_n+\delta=\Delta\,\frac{t_1^{\,n-1}-t_2^{\,n-1}}{t_1^{\,n}-t_2^{\,n}}\qquad (n=1,2,\ldots),$$

ako je $\omega\neq 0$, odnosno sa

$$\gamma u_n+\delta=\frac{n-1}{n}\,t_1\qquad (n=1,2,\ldots),$$

ako je $\omega=0$.

Do ovog rezultata može se, međutim, doći i jednostavnim direktnim rasuđivanjem, bez pozivanja na uslove (17) i (18).

5.58. Dokazati da

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\cos\frac{x}{n}\to 0\qquad (x\to+\infty),$$

bar eksponencijalnom brzinom.

Rešenje. Kako je, za $x>0$,

$$\cos\frac{x}{n}-1=-2\sin^2\frac{x}{2n}\sim-\frac{x^2}{2n^2}\qquad (n\to+\infty),$$

posmatrani beskonačni proizvod $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\cos\dfrac{x}{n}$ konvergira za svako $x>0$ (u stvari, za svako realno x).

Za $x\geq\pi$ je

$$\left(\frac{4x}{\pi}-1\right)-\frac{2x}{\pi}\geq 1;$$

stoga za $x \geq \pi$ imamo

$$\left|\prod_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{x}{n}\right| = \prod_{n=1}^{+\infty} \left|\cos\frac{x}{n}\right| \leq \prod_{\frac{2x}{\pi} \leq n \leq \frac{4x}{\pi} - 1} \left|\cos\frac{x}{n}\right| \leq \prod_{\frac{2x}{\pi} \leq n \leq \frac{4x}{\pi} - 1} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x/\pi} = (2^{-1/\pi})^x \to 0 \qquad (x \to +\infty),$$

jer dvostruka nejednakost $\frac{2x}{\pi} \leq n \leq \frac{4x}{\pi} - 1 \left(< \frac{4x}{\pi}\right)$ povlači $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{n} \leq \frac{\pi}{2}$, tj. $0 \leq \cos\frac{x}{n} < \frac{1}{\sqrt{2}}$, a interval $[a, b]$ $(a < b)$ može sadržati najviše $b - a + 1$ prirodnih brojeva.

5.59. Dokazati da ako niz (a_n) ispunjava uslov

(1) $$0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n \qquad (m, n = 1, 2, \ldots),$$

tada $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$ postoji i ima konačnu vrednost.

Rešenje. Iz (1) se izvodi da je $0 \leq a_n \leq na_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tj. $0 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$; dakle, niz $\frac{a_n}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ je ograničen.

Neka su m i n proizvoljno izabrani prirodni brojevi i neka je k jedan od brojeva $0, 1, \ldots, n-1$. Iz (1) izlazi $0 \leq a_{mn+k} \leq ma_n + a_k$; odatle,

$$0 \leq \frac{a_{mn+k}}{mn+k} \leq \frac{a_n}{n} \cdot \frac{mn}{mn+k} + \frac{a_k}{mn+k}.$$

Iz ove nejednakosti izvodi se, prema stavu 1.1.2.19 (ili problemu 2.19 pod 3°), da važe nejednakosti

$$0 \leq \overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{a_{mn+k}}{mn+k} \leq \frac{a_n}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

za svako $n = 1, 2, \ldots$ To znači, prema primedbi uz rešenje problema 2.22, da imamo

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}} \frac{a_p}{p} = \max\left\{\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{a_{mn+k}}{mn+k} : k = 0, 1, \ldots n-1\right\} \leq \frac{a_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

i odatle (stav 1.1.2.19), uz zamenu slova p slovom n,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{n} \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{n}.$$

Ova nejednakost zajedno sa suprotnom, koja uvek važi, daje jednakost $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{n} = \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_n}{n}$, pa na osnovu stava 1.1.2.16, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n}$ postoji. Najzad, zbog ustanovljene ograničenosti niza $\left(\frac{a_n}{n}\right)$, poslednji limes ima konačnu vrednost.

5.60. Ako je $x_1 = 1$ i $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} x_k}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, tada je

(1) $$x_n \sim \sqrt{2 \log n} \quad (n \to +\infty).$$

Dokaz. Niz (x_n) je očigledno rastući. Jednakost

(2) $$x_k = x_{k-1} + \frac{1}{\sum_{\nu=1}^{k-1} x_\nu} \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

povlači stoga

$$x_k > x_{k-1} + \frac{1}{(k-1)\, x_{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots);$$

odatle,

$$x_k^2 > x_{k-1}^2 + \frac{2}{k-1} + \frac{1}{(k-1)^2 x_{k-1}^2} > x_{k-1}^2 + \frac{2}{k-1} \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Sabiranje ovih nejednakosti za $k = 2, \ldots, n$ daje

$$x_n^2 > 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} > 2 \log n,$$

tj.

(3) $$x_n > (2 \log n)^{1/2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako se stavi $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, imamo dalje

(4) $$S_n > \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2 \log k} > \int_1^n \sqrt{2 \log t}\, dt \sim n \sqrt{2 \log n} \quad (n \to +\infty),$$

jer je

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_1^x \sqrt{2 \log t}\, dt}{x \sqrt{2 \log x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2 \log x}}{\sqrt{2 \log x} + \dfrac{(\sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{\log x}}} = 1.$$

Sumiranjem jednakosti (2) za $k = 2, \ldots, n$ dobijamo

(5) $$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{S_k} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

S obzirom na (5) i (4), primenom Stolzove teoreme u uopštenoj formi, nalazimo

(6) $$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{x_n}{\sqrt{2 \log n}} \leq \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\dfrac{1}{S_{n-1}}}{\sqrt{2 \log n} - \sqrt{2 \log (n-1)}}$$

$$\leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{(n-1)\sqrt{2\log(n-1)}}}{\sqrt{2\log n}-\sqrt{2\log(n-1)}} = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \frac{\big(\log(n-1)\big)^{-\frac{1}{2}}\big(\sqrt{\log n}+\sqrt{\log(n-1)}\big)}{n\big(\log n-\log(n-1)\big)}$$

$$= -\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = 1.$$

Prema (3) i (6), imamo

$$x_n \sim \sqrt{2\log n} \qquad (n\to+\infty).$$

Primedba. Može se pokazati da, preciznije, važi dvostruka nejednakost

$$\sqrt{1+2\log n+\log\log n} < x_n < \sqrt{5+2\log n+\log\log n} \qquad (n=2,3,\ldots).$$

Literatura

D. J. Newmann: *Problem E* 1955. Amer. Math. Monthly **74** (1967) i **75** (1968).

5.61. 1° Dokazati da je za $a>0$

$$S(a) = 1-\frac{1}{2^a}+\frac{1}{3^a}-\frac{1}{4^a}+\cdots > \frac{1}{2}.$$

2° Naći $S(0+)$ i $\lim\limits_{a\to+\infty} S(a)$.

3° Ako je stavljeno $S(0)=S(0+)$, naći $S_+'(0)$.

Rešenje. 1° Ako je $a>0$, funkcija $x\mapsto \dfrac{1}{x^{a+1}}$ je opadajuća za $x>0$. Stoga,

$$\int_{2k-1}^{2k} \frac{dx}{a^{a+1}} > \int_{2k}^{2k+1} \frac{dx}{x^{a+1}} \qquad (k\geq 1)$$

i odatle

$$2\int_{2k-1}^{2k} \frac{dx}{x^{a+1}} > \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{dx}{x^{a+1}} \quad (k\geq 1).$$

Prema tome, za $a>0$

$$S(a) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^a}-\frac{1}{(2k)^a}\right) = a\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{2k-1}^{2k}\frac{dx}{x^{a+1}} \tag{1}$$

$$> \frac{1}{2}a\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2k-1}^{2k+1}\frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{2}a\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{2},$$

što je trebalo dokazati.

2° Iz (1) izlazi

$$\varliminf_{a\to+\infty} S(a) \geq \frac{1}{2}. \tag{2}$$

S druge strane,

$$S(a) = 1 - \frac{1}{2^a} + a \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{2k-1}^{2k} \frac{dx}{x^{a+1}},$$

pa, kako je za $k \geq 2$

$$\int_{2k-1}^{2k} \frac{dx}{x^{a+1}} < \frac{1}{2} \int_{2k-2}^{2k} \frac{dx}{x^{a+1}},$$

imamo

$$S(a) < 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2} a \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^{a+1}} = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2} \frac{1}{2^a};$$

odavde se dobija, puštajući da $a \to 0+$,

(3) $$\overline{\lim_{a \to 0+}} S(a) \leq \frac{1}{2}.$$

Iz (2) i (3) izlazi

(4) $$S(0+) = \lim_{a \to 0+} S(a) = \frac{1}{2}.$$

Za $a < 0$ imamo (Leibnizov stav)

$$0 < 1 - S(a) = \frac{1}{2^a} - \frac{1}{3^a} + \cdots < \frac{1}{2^a},$$

odakle se dobija

$$\lim_{a \to +\infty} \{1 - S(a)\} = 0, \quad \text{tj.} \lim_{a \to +\infty} S(a) = 1.$$

3° Prema (4), $S(0) = \frac{1}{2}$, pa za $a > 0$ imamo

(5) $$g(a) = \frac{1}{a} \{S(a) - S(0)\} = \frac{1}{a} \left\{\frac{1}{2} - S_n(a) - R_n(a)\right\},$$

gde je

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(2k)^a} - \frac{1}{(2k+1)^a}\right) \quad \text{i} \quad R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(2k)^a} - \frac{1}{(2k+1)^a}\right).$$

Kako je

$$R_n(a) = a \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{2k}^{2k+1} \frac{dx}{x^{a+1}} < \frac{a}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{a}{2} \int_{2n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^a},$$

$$R_n(a) > \frac{a}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{2k}^{2k+2} \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{a}{2} \int_{2n+2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{a+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+2)^a},$$

iz (5) izlazi

$$-\frac{1}{a} S_n(a) + \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^a}\right) < g(a) < -\frac{1}{a} S_n(a) + \frac{1}{2a}\left(1 - \frac{1}{(2n+2)^a}\right).$$

Puštajući da $a \to 0+$, dobija se

$$(6) \qquad L_n = -K_n + \frac{1}{2}\log(2n+1) \le \varliminf_{a\to 0+} g(a) \le \varlimsup_{a\to 0+} g(a)$$

$$\le -K_n + \frac{1}{2}\log(2n+2) = D_n,$$

gde je

$$K_n = \lim_{a\to 0+} \frac{1}{a} S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{a\to 0+} \frac{1}{a}\left(\frac{1}{(2k)^a} - \frac{1}{(2k+1)^a}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \log \frac{2k+1}{2k} = \log \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}.$$

Na osnovu činjenice da

$$D_n - L_n = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) \to 0 \qquad (n \to +\infty)$$

i s obzirom na (6), koristeći Stirlingovu formulu

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,\{1 + o(1)\},$$

dobija se

$$\lim_{n\to+\infty} L_n = \lim_{n\to+\infty} D_n = \lim_{n\to+\infty} \log \frac{(2n)!!\sqrt{2n+2}}{(2n+1)!!} = \log \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}.$$

Prema poslednjem rezultatu, ako se u (6) pusti da $n \to +\infty$, dobija se

$$\frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2} \le \varliminf_{a\to 0+} g(a) \le \varlimsup_{a\to 0+} g(a) \le \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2},$$

tj.

$$S_+'(0) = \lim_{a\to 0+} g(a) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}.$$

5.62. Ako je $p_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i $q_n = \sum_{k=1}^{n} p_k^{-1}$ $(n \in \mathbf{N})$, dokazati da nejednakost

$$\varlimsup_{n\to+\infty} q_n \log(p_n a_n) < 0$$

povlači konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

5.63. U okolini tačke $x = 0$ aproksimirati funkciju $x \mapsto f(x) = e^{\sin x}$ Taylorovim polinomom $x \mapsto P_n(x)$ n-tog stepena tako da bude

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{1}{32} \qquad \left(|x| \le \frac{1}{6}\pi\right).$$

Rezultat. $n = 2$; $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

5.64. Dokazati da je red čiji je opšti član

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2|\sin x|)^3}}\,dx$$

konvergentan. Na osnovu ovog dokazati da $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2|\sin x|)^3}}\,dx$ postoji.

5.65. Dokazati da je, za svaki prirodan broj n, suma $S_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^n}{2^{k-1}}$ prirodan broj deljiv sa 4.

5.66. Neka je $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i neka je red $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ konvergentan za $|x| < 1$. Dokazati da tada:

1° $S_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ povlači $f(x) \to +\infty$ $(x \to 1-0)$;

2° obratna implikacija ne važi;

3° ona, međutim, važi kada je $a_n \geq 0$ za dovoljno veliko n.

5.67. Ispitati apsolutnu i neapsolutnu konvergenciju, za sve kompleksne vrednosti z, sledećih redova

$$1^\circ \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n; \quad 2^\circ \ \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha \cdot n^\beta \cdot z^n \ (\alpha, \beta \text{ realni brojevi}).$$

5.68. Dokazati da je, za svako $a > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{-n \leq k \leq an} \left(1 + \frac{x}{k}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} e^{x \log a}.$$

5.69. Neka je $x_1 = 0$, $x_n = a^{x_{n-1}}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, gde je $0 < a < e^{-e}$. Dokazati da tada $x_{2n-1} \to \xi$ $(n \to +\infty)$, $x_{2n} \to \eta$ $(n \to +\infty)$, pri čemu $\xi > \eta$, $a^\xi = \eta$ i $a^\eta = \xi$.

5.70. Dokazati da, ako je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan red sa pozitivnim članovima, tada red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{A_n A_{n-1}{}^\delta}$, gde je $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, konvergira za svako $\delta > 0$.

5.71. Neka niz realnih ili kompleksnih brojeva (a_n) ima najmanje $m \geq 2$, ali konačan broj, tačaka nagomilavanja. Dokazati da tada niz $b_n = \sum_{k=n}^{n+m-2} a_k$ $(n \in \mathbf{N})$ ne može konvergirati.

5.72. Dokazati sledeće generalizacije Dirichletovog i Abelovog kriterijuma (1.2.1.19 i 1.2.1.20):

1° Ako je

$$(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \tag{1}$$

nula niz ograničene varijacije i red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \tag{2}$$

ima ograničen niz parcijalnih suma, tada red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n \tag{3}$$

konvergira.

2° Ako je niz (1) ograničene varijacije i red (2) konvergentan, red (3) takođe konvergira.

5.73. Neka je $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x}$ $(x \in \mathbf{R})$.

1° Dokazati da se ovaj red za svako $x > 0$ može diferencirati član po član.

2° Dokazati da izvod $f'_+(0)$ postoji i uporediti njegovu vrednost sa $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(0)$.

5.74. Dokazati da važi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sim \frac{1}{p} \qquad (p \to +0)$$

i zatim da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} - \frac{1}{p} \to \gamma \qquad (p \to +0),$$

gde je γ Eulerova konstanta (videti 2.54).

5.75. 1° Neka su $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nizovi čiji su svi članovi različiti od nule, i neka su $(p_n) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ i $(q_n) = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ nizovi ograničene varijacije (videti problem 5.47) čije su granične vrednosti različite od nule. Dokazati da tada redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ istovremeno: konvergiraju, apsolutno konvergiraju, imaju ograničene nizove parcijalnih suma.

2° Neka je $|u_n| < 1$ $(n \in \mathbf{N})$ i neka beskonačni proizvod $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 + u_n)$ apsolutno konvergira. Dokazati da je tada njegov niz parcijalnih proizvoda ograničene varijacije.

3° Neka je $a_n > 0$, $b_n > 0$ $(n \in \mathbf{N})$ i neka je, za dovoljno veliko n,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + c_n, \quad \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + d_n,$$

gde je α neki realan broj i redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ su apsolutno konvergentni. Dokazati da tada nizovi (a_n) i (b_n) ispunjavaju uslove pod 1°.

5.76. Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ red sa kompleksnim članovima takav da je, za dovoljno veliko n,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a}{n} + c_n,$$

gde je $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| < +\infty$. Dokazati da tada:

1° red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, i ujedno apsolutno konvergira, ako i samo ako je $\operatorname{Re} a > 1$;

2° ako je $\operatorname{Re} a = 1$ i $a \neq 1$; red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ima ograničen niz parcijalnih suma;

3° ako je $a = 1$ ili $\operatorname{Re} a < 1$, red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ima neograničen niz parcijalnih suma;

4° a_n je nula niz, i ujedno red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergira, ako i samo ako je $\operatorname{Re} a > 0$.

Uputstvo. Iskoristiti prethodni problem, stavljajući $b_n = \frac{1}{n}$ u slučaju kada je $a = 1$, a $b_n = e^{(1-a)h_n} - e^{(1-a)h_{n+1}}$ ili $b_n = e^{-ah_n}$ sa $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, u slučaju kada je $a \neq 1$.

5.77. Neka je $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$; $p > 0$, $q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, i neka red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergira za svaki niz (b_n) sa osobinom da red $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n{}^q$ konvergira. Dokazati da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^p$ konvergentan.

5.78. Neka je $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbf{N})$, $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ $(n \in \mathbf{N})$ i $p > 1$. Dokazati da važi nejednakost

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq K_p \sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^p,$$

gde konačna i pozitivna konstanta K_p zavisi samo od p.

5.79. 1° Dokazati da za svaki niz nenegativnih brojeva (a_n) važi nejednakost

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq A \sum_{k=1}^{+\infty} a_n,$$

gde je A apsolutna pozitivna konstanta.

2° Dokazati da je e najbolja (najmanja) moguća vrednost konstante A.

5.80. Neka je $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i neka $\sum_{k=2}^{n} a_k \sim n^\alpha \, (n \to +\infty)$. Dokazati da, kada $n \to +\infty$, važi

$$\sum_{k=2}^{n} a_k (\log k)^\beta \sim \begin{cases} n^\alpha (\log n)^\beta, \text{ ako } \alpha > 0 \\ = C + O\left(n^\alpha (\log n)^\beta\right) \text{ ako } \alpha < 0, \end{cases}$$

gde je C konačan broj.

Ispitati slučaj kada je $\alpha = 0$, $\beta < 0$.

5.81. Neka je $\sum_{k=2}^{n} a_k = n + O(\sqrt{n}) \, (n \to +\infty)$. Dokazati da je tada

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{\log k} = \int_2^n \frac{\mathrm{d}x}{\log x} + O\left(\frac{\sqrt{n}}{\log n}\right) \qquad (n \to +\infty).$$

5.82. Ispitati konvergenciju redova

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha \cdot (\log n)^{-\beta} \quad \text{i} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^\alpha \cdot (\log n)^{-\beta},$$

gde su α, β realni brojevi.

5.83. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu(n)}{n^p}$, gde je $p \in \mathbf{R}$, a $\nu(n)$ označava broj cifara broja n.

5.84. Ispitati konvergenciju sledećih redova

$$1^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2}\right) (a, b, c > 0); \quad 2^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a \log n + b}{c \log n + d}} (a, b, c, d \in \mathbf{R});$$

$$3^\circ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \, (a, b > 0).$$

5.85. Dokazati sledeću generalizaciju Riemannove teoreme (1.2.1.21.6).

Ako $a_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ i ako divergiraju redovi obrazovani od pozitivnih i negativnih članova reda

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

sa realnim članovima, tada je skup svih tačaka nagomilavanja niza parcijalnih suma reda (1) oblika

$$(2) \qquad [a, b] \quad (-\infty \leq a \leq b \leq +\infty),$$

a za svaki skup oblika (2) postoji permutacija reda (1) čiji niz parcijalnih suma ima (2) kao skup svih tačaka nagomilavanja.

5.86. Funkcija $x \mapsto f(x)$ data je jednakošću $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$. Integracijom ovog reda član po član, izračunati integral $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx$.

Rezultat. $\log \frac{3}{2}$.

5.87. Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$ uniformno konvergira u svakom intervalu $[\delta, +\infty)$ a ne konvergira uniformno ni u jednom intervalu $[0, \delta]$ $(\delta > 0)$.

5.88. Neka su svi članovi funkcionalnog reda $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ monotone funkcije na konačnom intervalu $[a, b]$. Dokazati da tada apsolutna konvergencija ovog reda za $x = a$ i za $x = b$ povlači njegovu apsolutnu i uniformnu konvergenciju na intervalu $[a, b]$.

5.89. Dokazati da Riemannova ζ - funkcija

$$x \mapsto \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

ima za $x > 1$ sve izvode

5.90. Dokazati da funkcija

$$x \mapsto f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n + x}$$

ima za svako $x \notin \{-n : n \in \mathbf{N}\}$ sve izvode.

5.91. Dokazati da je funkcija $x \mapsto f(x)$ data jednakošću

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+n\,\omega)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+(x-n\,\omega)^2} \qquad (\omega > 0)$$

neprekidna za $x \in \mathbf{R}$ i da ima period ω.

5.92. 1° Dokazati sledeću teoremu:

Neka su sve funkcije $x \mapsto u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ nenegativne za $x \geq a > -\infty$ i u Riemannovom smislu integrabilne na svakom intervalu $[a, b]$ $(a < b < +\infty)$. Ako za svako $b \in (a, +\infty)$ važi jednakost

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

tada konačnost jednog od izraza

$$\int_a^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x \text{ i } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

povlači konačnost drugog i važenje jednakosti

(1)
$$\int_a^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jednakost (1) važi i kada se izostavi pretpostavka o nenegativnosti funkcija $x \mapsto u_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$, ukoliko je

$$\int_a^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n(x)|\right) \mathrm{d}x \text{ ili } \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^{+\infty} |u_n(x)|\,\mathrm{d}x \text{ konačno.}$$

2° Formulisati i dokazati analogne iskaze za ostale slučajeve nesvojstvenih integrala.

3° Koristeći prethodne rezultate, izračunati integrale:

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 + x^2}\right) \mathrm{d}x, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cdot \cos ax\,\mathrm{d}x \qquad (a \in \mathbf{R}),$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{e^{2x\pi} - 1}, \qquad \int_0^1 \log x \cdot \log(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

5.93. 1° Dokazati sledeće tvrđenje (Dini): Neka je (f_n) niz na intervalu $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ neprekidnih funkcija koji za svako $x \in [a, b]$ rastući teži ka vrednosti $f(x)$ i neka je funkcija f neprekidna na $[a, b]$. Tada je konvergencija ovog funkcionalnog niza na $[a, b]$ uniformna.

2° Dokazati da se u prethodnom iskazu zatvoren i ograničen interval $[a, b]$ ne može zameniti intervalom bilo kog drugog tipa.

1° U suprotnom slučaju, postoje broj $\varepsilon > 0$, niz (x_n) tačaka intervala $[a, b]$ i strogo rastući niz prirodnih brojeva (p_n) tako da je

$$f(x_n) - f_{p_n}(x_n) \geq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Postoji zatim podniz (x_{q_n}) niza (x_n) sa osobinom

$$\lim_{n\to+\infty} x_{q_n} = x_0 \in [a, b]. \tag{2}$$

Stavljajući $p_{q_n} = r_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, dobija se, s obzirom na (1),

$$f(x_{q_n}) - f_{r_n}(x_{q_n}) \geq \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Postoji, dalje, $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da važi

$$f(x_0) - f_{n_0}(x_0) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4}$$

pa potom i intervali (p, q) i (r, s), koji sadrže x_0 i takvi su da

$$x \in (p, q) \cap [a, b] \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in (r, s) \cap [a, b] \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3};$$

interval $(t, u) = (p, q) \cap (r, s)$ onda sadrži x_0 i ima osobinu

$$x \in (t, u) \cup [a, b] = I \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \wedge |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Zbog (2), postoji $m \in \mathbf{N}$ takvo da je $r_m \geq n_0$ i $x_{q_m} \in I$ pa se, prema (4) i (5) i s obzirom na monotono rašćenje niza $(f_n(x))$ za svako $x \in [a, b]$, dobija

$$\begin{aligned} f(x_{q_m}) - f_{r_m}(x_{q_m}) &\leq f(x_{q_m}) - f_{n_0}(x_{q_m}) \\ &\leq |f(x_{q_m}) - f(x_0)| + f(x_0) - f_{n_0}(x_0) + |f_{n_0}(x_0) - f_{n_0}(x_{q_m})| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

u suprotnosti sa (3). Dobijena protivrečnost dokazuje tvrđenje.

2° U iskazu o kome je reč zatvoren ograničen interval ne može se zameniti intervalom oblika $[a, +\infty)$, jer, ako je $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)(x - a)$ $(x \geq a;\ n \in \mathbf{N})$ i $f(x) = x - a$ $(x \geq a)$, tada, za svako $x \in [a, +\infty)$, $f_n(x) \uparrow f(x)$ $(n \to +\infty)$ i sve posmatrane funkcije su neprekidne na intervalu $[a, +\infty)$, a funkcionalni niz (f_n) ne konvergira uniformno na $[a, +\infty)$, stoga što

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{n}(x - a) = F_n(x) \quad (x \geq a;\ n \in \mathbf{N}) \ \text{ i } \ F_n(a + n) = 1 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Slučaj intervala oblika $[a, b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ tretiramo na primeru intervala $[0, 1)$. Neka je

$$g_k : \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}},\ 1 - \frac{1}{2^k}\right] \to R \quad (k \in \mathbf{N})$$

funkcija čiji grafik obrazuju kraci jednakokrakog trougla na slici, sa jednim temenom $(x_k, 1)$ i sa središtem osnovice $(x_k, 0)$ i temenima osnovice

$$A_k\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}},\ 0\right) \ \text{ i } \ B_k\left(1 - \frac{1}{2^k},\ 0\right),$$

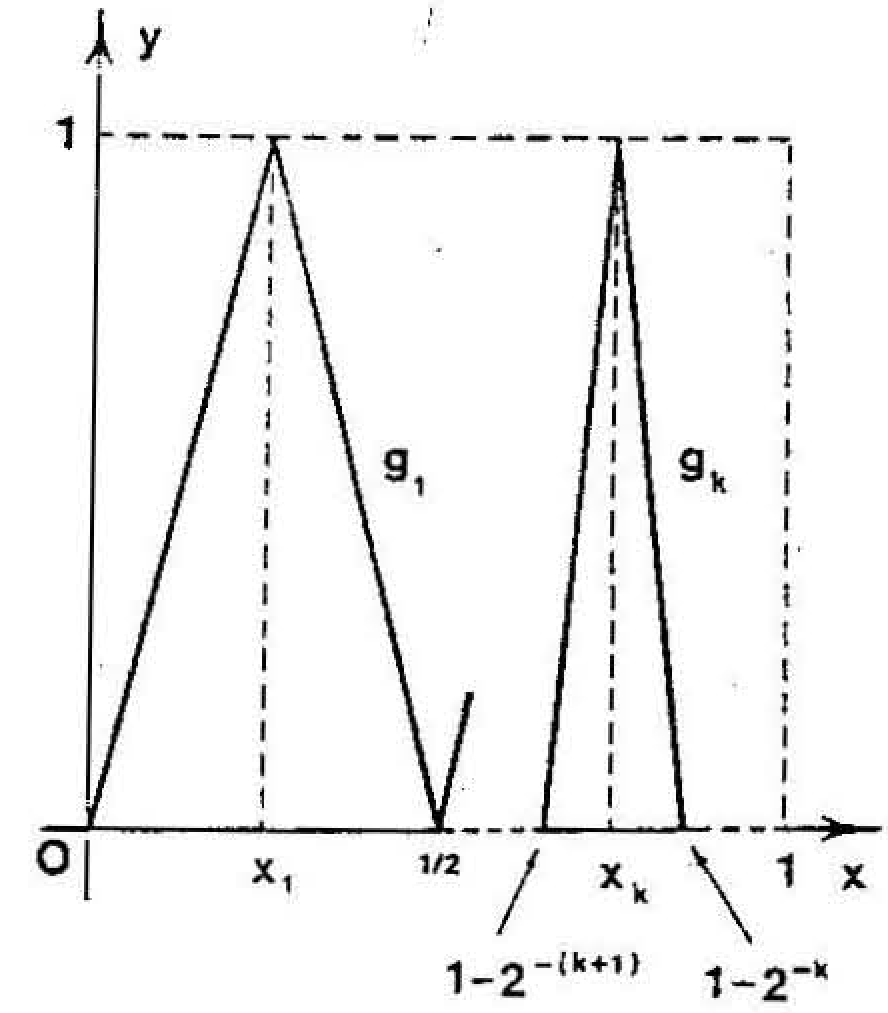
i neka je

$$f(x) = g_k(x) \quad \left(x \in I_k = \left[1 - \frac{1}{2^{k-1}},\ 1 - \frac{1}{2^k}\right];\ k \in \mathbf{N}\right).$$

Ovim je, očigledno, na $[0, 1)$ definisana neprekidna funkcija f. Neka je, dalje,

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}\right) g_k(x) \quad (x \in I_k;\ k \in \mathbf{N};\ n \in \mathbf{N}).$$

Sve ovako definisane funkcije f_n $(n \in \mathbf{N})$ neprekidne su na $[0, 1)$ i za svako fiksirano $x \in [0, 1)$ niz $(f_n(x))$ monotono rastući teži ka $f(x)$. Međutim,



$$F_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}}\, g_k(x) \quad (x \in I_k;\ k \in \mathbf{N};\ n \in \mathbf{N}),$$

te

$$F_n(x_n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\, g_n(x_n) = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \to 1 \quad (n \to +\infty),$$

što znači da niz (f_n) ne konvergira uniformno na intervalu $[0, 1)$.

Slični primeri mogu se konstruisati i za ostale slučajeve intervala koji nisu zatvoreni i ograničeni.

5.94. Za niz realnih brojeva a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ kaže se da je *konveksan* ako, sa oznakama

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1}, \quad \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1} = a_n - 2\, a_{n+1} + a_{n+2},$$

važi $\Delta^2 a_n \geq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Dokazati da konveksan i ograničen niz a_n $(n = 0, 1, \ldots)$ ima sledeće osobine:

1° niz je konvergentan; 2° $\lim\limits_{n \to +\infty} n\, \Delta a_n = 0$; 3° $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, \Delta^2 a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Delta a_n < +\infty$.

Dokaz. Neka je niz

$$(1) \qquad a_n \ (n \in \mathbf{N}_0)$$

konveksan i ograničen. Tada je, prvo, niz (Δa_n) ograničen, a zatim

$$(2) \qquad \Delta a_n \searrow \quad n \in \mathbf{N}_0,$$

pa postoji $\lim\limits_{n \to +\infty} \Delta a_n = \alpha \in \mathbf{R}$. Zbog

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{n} \Delta a_k = a_0 - a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}_0),$$

ne može biti $\alpha \neq 0$, jer bi u tom slučaju bilo

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta a_k = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \Delta a_k = -\infty,$$

pa niz (1) ne bi, s obzirom na (3), bio ograničen. Dakle, $\lim_{n\to+\infty} \Delta a_n = 0$, što zajedno sa (2) povlači $\Delta a_n \geq 0$ $(n \in N_0)$. Red $\sum_{k=0}^{+\infty} \Delta a_k$ ima dakle, nenegativne članove i, s obzirom na (3), ograničen niz parcijalnih suma, pa konvergira, a onda, prema (3), konvergira i niz (1). Iz prethodnih zaključaka izlazi, prema Pringsheimovom stavu **(1.2.1.17.)**, $\lim_{n\to+\infty} n\,\Delta a_n = 0$.

Najzad, iz

$$\sum_{k=0}^{n+1} \Delta a_k = \sum_{k=0}^{n} (k+1)\,\Delta^2 a_k + (n+1)\,\Delta a_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

i iz prethodnih rezultata sleduje konvergencija reda $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\Delta^2 a_n$ kao i jednakost

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\Delta^2 a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta a_n.$$

5.95. Dokazati sledeće: Neka je $0 \leq f(x) \searrow$ $(x \geq 1)$. Tada

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\,dx + \sigma_f + o(1) \quad (n \to +\infty),$$

gde je

$$0 \leq \sigma_f = \lim_{n\to+\infty} f(n) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) < +\infty.$$

Dokaz. Imamo

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \right) \to \sigma_f < +\infty \ (n \to +\infty),$$

jer opadajući niz nenegativnih brojeva $f(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ima konačan limes, a sem toga

$$0 \leq f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) - f(k+1) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

pa red čiji je k-ti član $f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\,dx$ konvergira. Time je dokaz završen.

Primedbe. 1° Iz ovog rezultata izlazi da, pod istim uslovima dopunjenim pretpostavkom da red $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ divergira, važi $\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^n f(x)\,dx$ $(n \to +\infty)$.

2° Slično tvrđenje važi za slučaj kad je

$$0 \leq f(x) \nearrow \quad (x \geq 1) \quad \text{i} \quad \sup_{x \geq 1} f(x) < +\infty.$$

5.96. 1° Odrediti realan broj x takav da red (R), dobijen množenjem sa x svakog člana reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ čiji je indeks deljiv fiksiranim prirodnim brojem m, bude konvergentan.

2° Izračunati sumu reda (R) sa tako određenim x.

3° Rešiti oba prethodna problema za slučaj reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ umesto reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Rešenje. 1° Ako su n-ti član i n-ta parcijalna suma reda (R) označeni redom sa u_n i S_n, imamo

$$(1) \qquad S_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{k} + \frac{x-1}{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log mn + \frac{x-1}{m} \log n + \left(1 + \frac{x-1}{m}\right) \gamma + o(1)$$

$$= \log m + \frac{x+m-1}{m} (\log n + \gamma) + o(1)$$

$$\to \begin{cases} \log m, \text{ ako } x = -m+1, \\ \operatorname{sgn}(x+m-1) \cdot \infty, \text{ ako } x \neq -m+1 \end{cases} \qquad (n \to +\infty),$$

gde je sa γ označena Eulerova konstanta. Prema tome, za konvergenciju reda (R) potrebno je da bude

$$(2) \qquad x = 1 - m.$$

Kako sa ovom vrednošću za x za $n \geq m$ imamo

$$0 \leq S_n - S_{\left[\frac{n}{m}\right]m} \leq \sum_{\nu=\left[\frac{n}{m}\right]m+1}^{\left[\frac{n}{m}\right]m+m} \frac{1}{\nu} \leq \frac{m}{\left[\frac{n}{m}\right]m+1} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

ovaj uslov je i dovoljan.

2° Iz (1) onda izlazi da je, pod uslovom (2),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \log m.$$

3° Označavajući ponovo n-tu parcijalnu sumu reda (R) sa S_n, a funkciju $x \mapsto x^{-\alpha}$ sa f, lobija se, s obzirom na prethodni problem i sa značenjem oznake σ_f iz njega,

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{mn} k^{-\alpha} + (x-1)\, m^{-\alpha} \sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}$$

$$= \int\limits_1^{mn} x^{-\alpha}\,dx + (x-1)\,m^{-\alpha}\int\limits_1^{n} x^{-\alpha}\,dx + [1+(x-1)\,m^{-\alpha}]\,\sigma_f + o(1)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}(m^{1-\alpha}n^{1-\alpha}-1) + (x-1)\,m^{-\alpha}\frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha}-1)$$
$$+ [1+(x-1)\,m^{-\alpha}]\,\sigma_f + o(1)$$

$$= \frac{m^{-\alpha}}{1-\alpha}(m+x-1)\,n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}[(x-1)\,m^{-\alpha}+1]+[1+(x-1)\,m^{-\alpha}]\,\sigma_f+o(1)\,(n\to+\infty).$$

Odavde izlazi da red (R) konvergira samo ako je $x=1-m$ i da je u tom slučaju

$$\lim_{n\to+\infty} S_{mn} = -\frac{1}{1-\alpha}(1-m^{1-\alpha}) + (1-m^{1-\alpha})\,\sigma_f$$
$$= \frac{1-m^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left\{-1+\sum_{k=1}^{+\infty}\left[(1-\alpha)\,k^{-\alpha}-k^{1-\alpha}+(k+1)^{1-\alpha}\right]\right\}.$$

Posle ovoga može se, na isti način kao u prethodnom slučaju, dokazati da je i sada suma $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ jednaka dobijenoj graničnoj vrednosti.

5.97. Dokazati da postoji niz realnih brojeva (a_n) takav da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} {a_n}^5$ konvergiraju, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} {a_n}^3$ divergira.

Dokaz. Takav jedan niz dat je sa

$$a_{3\nu-2} = \frac{2}{\sqrt[3]{\nu}}\,;\quad a_{3\nu-1} = a_{3\nu} = -\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}\quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Zaista, kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k = \sum_{\nu=1}^{n}(a_{3\nu-2}+a_{3\nu-1}+a_{3\nu}) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{\nu}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}-\frac{1}{\sqrt[3]{\nu}}\right) = 0\quad (n\in\mathbf{N}),$$

red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} {a_n}^5$ takođe konvergira, jer

$${a_{3\nu-2}}^5 = \frac{2^5}{\nu^{\frac{5}{3}}},\quad {a_{3\nu-1}}^5 = {a_{3\nu}}^5 = -\frac{1}{\nu^{\frac{5}{3}}}\quad (\nu\in\mathbf{N}),$$

dok red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} {a_n}^3$ divergira, stoga što

$$\sum_{k=1}^{3n} {a_k}^3 = \sum_{\nu=1}^{n}({a_{3\nu-2}}^3+{a_{3\nu-1}}^3+{a_{3\nu}}^3) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{2^3}{\nu}-\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu}\right) = 6\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\to+\infty\ (n\to+\infty).$$

5.98. Dokazati jednakost

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-3i-j-(i+j)^2} = \frac{4}{3}.$$

Dokaz. Budući da su svi članovi dvostrukog reda

$$\sum_{i,j=0}^{+\infty} 2^{-3i-j-(i+j)^2}$$

pozitivni, imamo

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} 2^{-3i-j-(i+j)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} 2^{-3i-j-(i+j)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} 2^{-n^2-3n}\, 2^{2j}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n^2-3n} \sum_{j=0}^{n} 2^{2j} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n^2-3n}\frac{2^{2n+2}-1}{2^2-1} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(2^{-n^2+2n-1-3n+3} - 2^{-n^2-3n})$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(2^{-(n-1)^2-3(n-1)} - 2^{-n^2-3n}) = \frac{1}{3}\, 2^{-1+3} = \frac{4}{3}.$$

5.99. Neka je

$$a_{n+1} = \int_0^1 \max\{x, b_n\}\, dx, \quad b_{n+1} = \int_0^1 \min\{x, a_n\}\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

i neka su a_1 i b_1 dati realni brojevi. Dokazati da je tada $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 2 - \sqrt{2}$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{2} - 1$.

5.100. Neka red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

1° Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_k = 0$.

2° Odrediti sve pozitivne vrednosti α za koje red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}\sum\limits_{k=1}^{n} k\, a_{n+k}$ konvergira.

5.101. Ispitati običnu i apsolutnu konvergenciju redova

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n [(2n+1)^{1/n} - 1] \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right].$$

5.102. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton niz realnih brojeva takav da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ konvergira. Dokazati da tada konvergiraju sledeći redovi:

$$1^\circ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n;\ 2^\circ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n a_{n+p} \overset{\text{def}}{=} S_p\ (p \in \mathbf{N});\ 3^\circ \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p S_p.$$

1° Zbog konvergencije reda $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa niz $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ ili monotono opada i ima nenegativne vrednosti, ili monotono raste i ima nepozitivne vrednosti. U daljem tekstu rešenja ograničićemo se na prvi od ta dva slučaja, jer se drugi od njih jednostavno svodi na prvi. Red $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ onda konvergira na osnovu Leibnizovog stava (1.2.1.18.2).

2° Konvergencija svih redova $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n a_{n+p}$ $(p \in \mathbf{N})$ izlazi iz nejednakosti

$$0 \le a_n a_{n+p} \le a_n^2 \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ \ p \in \mathbf{N}).$$

3° Niz nenegativnih brojeva S_p $(p \in \mathbf{N})$ je opadajući, jer

$$S_{p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n a_{n+p+1} \le \sum_{n=0}^{+\infty} a_n a_{n+p} = S_p \quad (p \in \mathbf{N}).$$

Za svako $m \in \mathbf{N}$ imamo

$$0 \le S_p = \sum_{n=0}^{m} a_n a_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n a_{n+p} \le \sum_{n=0}^{m} a_n a_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n^2,$$

i dalje

$$0 \le \lim_{p\to+\infty} S_p \le \sum_{p=0}^{m} a_n \lim_{p\to+\infty} a_{n+p} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n^2 = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n^2.$$

Ako $m \to +\infty$, dobija se $\lim_{p\to+\infty} S_p = 0$.

Iz napred ustanovljenog, na osnovu Leibnizovog stava, zaključujemo da i red $\sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p S_p$ konvergira.

5.103. Dokazati da, ako je b ($|b| > 1$) kompleksan broj i $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ niz kompleksnih brojeva koji konvergira ka kompleksnom broju a, tada

$$\lim_{n\to+\infty} b^{-n} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k = \frac{b}{b-1} a \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a_k = \frac{b}{b-1} a.$$

Dokaz. Imamo

$$\left| b^{-n} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k - \frac{b}{b-1} a \right| = \left| b^{-n} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k - b^{-n} \frac{b^{n+1}}{b-1} a \right|$$

$$= \left| b^{-n} \left(\sum_{k=0}^{n} b^k a_k - \frac{b^{n+1}-1}{b-1} a \right) - \frac{a}{b-1} b^{-n} \right|$$

$$\le |b|^{-n} \left| \sum_{k=0}^{n} b^k (a_k - a) \right| + \left| \frac{a}{b-1} b^{-n} \right| \le |b|^{-n} \sum_{k=0}^{n} |b|^k |a_k - a| + o(1) \quad (n \to +\infty),$$

i odatle, prema Stolzovoj teoremi,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| b^{-n} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k - \frac{b}{b-1} a \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} |b|^k |a_k - a|}{|b|^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|b|^n |a_n - a|}{|b|^n - |b|^{n-1}} = \frac{|b|}{|b|-1} \lim_{n\to+\infty} |a_n - a| = 0,$$

odakle izlazi

$$\lim_{n\to+\infty} \left| b^{-n} \sum_{k=0}^{n} b^k a_k - \frac{b}{b-1} a \right| = 0.$$

Zatim,

$$\left| b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a_k - \frac{b}{b-1} a \right| = \left| b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a_k - b^n \frac{b^{-n}}{1-b^{-1}} a \right| = \left| b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a_k - b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a \right|$$

$$= \left| b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} (a_k - a) \right| \leq \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} |b|^{-k} |a_k - a|}{|b|^{-n}},$$

i odatle, prema 5.4.9,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left| b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a_k - \frac{b}{b-1} a \right| \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} |b|^{-k} |a_k - a|}{|b|^{-n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{|b|^{-n} |a_n - a|}{|b|^{-n} - |b|^{-n-1}} = \frac{1}{1-|b|^{-1}} \lim_{n\to+\infty} |a_n - a| = 0,$$

tj.

$$\lim_{n\to+\infty} \left| b^n \sum_{k=n}^{+\infty} b^{-k} a_k - \frac{b}{b-1} a \right| = 0.$$

5.104. Neka je $|b| > 1$ i neka red $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ konvergira. Dokazati da tada red, čiji je n-ti član

$$A_n = \frac{1}{b^n} \sum_{\nu=0}^{n} b^\nu a_\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

takođe konvergira i odrediti njegovu sumu. Ovde brojevi a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ i b mogu biti realni ili kompleksni.

Dokaz. Pod navedenim pretpostavkama, primenom Abelove parcijalne sumacije i korišćenjem prethodnog problema pod 1° (ili, na odgovarajući način, Stolzove teoreme), za $n > 0$ dobija se

$$\sum_{k=0}^{n} A_k = \sum_{k=0}^{n} b^{-k} \sum_{\nu=0}^{k} b^\nu a_\nu = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{k} b^{-\nu} (-b^{k+1} a_{k+1}) + \sum_{\nu=0}^{n} b^{-\nu} \sum_{\nu=0}^{n} b^\nu a_\nu$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b^{-k-1}-1}{1-b^{-1}}\,b^{k+1}a_{k+1}+\frac{b^{-n-1}-1}{b^{-1}-1}\sum_{\nu=0}^{n}b^{\nu}a_{\nu}$$

$$=\frac{b}{b-1}\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}-\frac{b}{b-1}\sum_{k=0}^{n-1}b^{k+1}a_{k+1}+\frac{b}{b-1}\sum_{\nu=0}^{n}b^{\nu}a_{\nu}-\frac{1}{b-1}\,b^{-n}\sum_{k=0}^{n}b^{\nu}a_{\nu}$$

$$=\frac{b}{b-1}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{b}{b-1}a_0-o(1)\to\frac{b}{b-1}\sum_{k=0}^{+\infty}a_k\quad(n\to+\infty).$$

To znači da red $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n$ konvergira i da je $\sum_{n=0}^{+\infty}A_n=\frac{b}{b-1}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$

5.105. Ispitati konvergenciju sledećih redova:

$$1^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{(x-1)\cdots(x-n)};\qquad 2^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{x(x-1)\cdots(x-n)};$$

$$3^\circ\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{x^2(x-1)^2\cdots(x-n)^2}.$$

Rezultat. Prvi red konvergira za $x\notin\mathbf{N}$, a drugi i treći za $x\notin\mathbf{N}_0$.

5.106. Proveriti da li je red $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ jedno rešenje funkcionalne jednačine

$$g(x)+g(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

5.107. 1° Ispitati konvergenciju funkcionalnog niza

$$f_n(x)=\frac{\int_0^x(1-t^2)^n\,dt}{\int_0^1(1-t^2)^n\,dt}\qquad(n\in\mathbf{N})$$

i odrediti njegovu graničnu funkciju gdegod je ona definisana.

2° Odrediti skup na kome ovaj niz uniformno konvergira.

5.108. Funkcionalni niz $f_n(x)$ $(n\in\mathbf{N})$ dat je sa

$$f_n(x)=(n-1)\,x\quad\left(x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\right),\quad f_n(x)=1-x\quad\left(x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\right).$$

Ispitati da li ovaj niz uniformno konvergira na skupu na kome su njegovi članovi definisani.

5.109. Neka je $a_n>0$ i neka red $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ divergira. Dokazati da tada

$$\frac{a_1 \cos \pi + a_2 \cos \dfrac{\pi}{2} + \cdots + a_n \cos \dfrac{\pi}{n}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \to 1 \quad (n \to +\infty).$$

5.110. Odrediti vrednosti realnih parametara p i q za koje red

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(\sqrt{n^4 + 2n + p} - \sqrt{n^4 + qn}\right),$$

sa dovoljno velikim n_0, konvergira.

5.111. Neka potencijalni red $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ ima pozitivan poluprečnik konvergencije R. Ispitati konvergenciju reda

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n\, a_n}{n^2 + n - 2} x^n,$$

dokazati da je

$$\left(g'(x) + \frac{2}{x} g(x)\right)' = \frac{f'(x)}{x}$$

i izraziti $g(x)$ pomoću $f(x)$.

5.112. Ispitati običnu i uniformnu konvergenciju niza

$$u_n(x) = \frac{x\, e^{nx} - 1}{1 + e^{nx}} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

5.113. Nizu pozitivnih brojeva u_n $(n \in \mathbf{N})$ pridružen je novi niz:

$$v_1 \in \mathbf{R}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}\right) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Dokazati da su niz (v_n) i red $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ ekvikonvergentni.

5.114. Ispitati konvergenciju niza

$$u_n(x) = \frac{n^{\lambda}}{n^2 + 1} x\, e^{-nx} \quad (n \in \mathbf{N};\ x \in \mathbf{R};\ \lambda \in \mathbf{R}).$$

5.115. Neka je $A = (f_n)$ niz realnih ili kompleksnih funkcija definisanih na nepraznom skupu E. Dokazati sledeća tvrđenja o funkcionalnim redovima:

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \ \text{ i } \ C = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|.$$

1° Ako red C uniformno konvergira na skupu E, tada na istom skupu uniformno konvergira i svaka permutacija reda B, tj. svaki red oblika $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{p(n)}(x)$, gde je p izvesna permutacija skupa $\mathbf{N}$.

2° Red B može biti na skupu E uniformno konvergentan i ujedno imati permutaciju koja na E konvergira, ali ne uniformno. Pri tome:

2°.1 Red B može na E biti svuda apsolutno konvergentan, svuda neapsolutno konvergentan, ili negde na E apsolutno, a negde neapsolutno konvergirati.

2°.2 Ukoliko su svi članovi niza A na skupu E neprekidne funkcije, suma reda B može biti neprekidna, a suma izvesne permutacije ovog reda prekidna funkcija na skupu E.

2°.3 U svakom od tri slučaja koji se pominju pod 2°.1, skup E može biti realan interval bilo kog tipa.

Rešenje. 1° Neka red C uniformno konvergira na skupu E i neka je p bilo koja permutacija skupa $\mathbf{N}$. Red $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{p(n)}(x)$ tada apsolutno konvergira na E, a s druge strane, za unapred dato $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |f_k(x)| < \varepsilon \qquad (x \in E). \tag{1}$$

Ako se stavi $n_1 = \max\{p^{-1}(1), \ldots, p^{-1}(n_0)\}$, imamo $p(k) > n_0$ $(k > n_1)$. Stoga i s obzirom na (1),

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_{p(k)}(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_{p(k)}(x)| \leq \sum_{k=n_1+1}^{+\infty} |f_{p(k)}(x)|$$

$$\leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |f_k(x)| < \varepsilon \quad (n \geq n_1;\ x \in E).$$

To znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{p(n)}(x)$ uniformno konvergira na E.

2° Neka je

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}(-x)^n & (0 \leq x \leq 1) \\[2ex] \dfrac{1}{n}(x-2)^n & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}), \qquad v_n(x) = \begin{cases} u_n(x) & (x \in [0,2] \setminus \{1\}) \\ 0 & (x = 1) \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N})$$

i neka je sa $w_n(x)$ $(n \in \mathbf{N})$ označen n-ti član reda

$$u_1(x) - 1 + u_2(x) + \frac{1}{2} + u_3(x) - \frac{1}{3} + u_4(x) + \cdots$$

Kako potencijalni redovi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(-x) \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$$

apsolutno konvergiraju za $x \in [0, 1)$ odnosno za $x \in (1, 2]$, a sem toga su, prema Abelovoj teoremi (1.2.4.3.1), uniformno konvergentni na intervalu $[0, 1]$ odnosno na intervalu $[1, 2]$, red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \tag{2}$$

konvergira apsolutno za $x \in [0, 2] \setminus \{1\}$ i uniformno na intervalu $[0, 2]$. On onda ima na $[0, 2]$ neprekidnu sumu $u(x)$, jer su mu svi članovi na $[0, 2]$ neprekidne funkcije. Red

(3) $$\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$$

konvergira uniformno na intervalu $[0,2]$ i neapsolutno u svakoj tački tog intervala, sa sumom $u(x)+u(1)$. Kako red (2) neapsolutno konvergira za $x=1$, postoji permutacija p skupa $\mathbf{N}$ takva da je $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{p(n)}(1) \neq u(1)$. Zbog apsolutne konvergencije reda (2), za svako $x \in [0,2] \setminus \{1\}$ je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{p(n)}(x) = u(x).$$

Dakle, permutacija

(4) $$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{p(n)}(x)$$

reda (2) konvergira na $[0,2]$ ka prekidnoj sumi. Kako su svi članovi reda (4) na $[0,2]$ neprekidne funkcije na $[0,2]$, konvergencija ovog reda na $[0,2]$ nije uniformna. Jasno je i da permutacija

$$u_{p(1)}(x) - 1 + u_{p(2)}(x) + \frac{1}{2} + u_{p(3)}(x) - \frac{1}{3} + u_{p(4)}(x) + \cdots$$

reda (3) konvergira svuda na $[0,2]$, ali ne konvergira uniformno na ovom intervalu.

Prethodnim su dokazana tvrđenja 2° i 2°.2, kao i drugo i treće tvrđenje pod 2°.1. Prvo tvrđenje pod 2°.1 dokazuje red $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ na mestu reda (2), a tvrđenja pod 2°.3 dokazuju onda prethodna rasuđivanja i mogućnost da se u njima interval $[0,2]$ zameni svakim od intervala $[0,2)$, $(0,2]$ i $(0,2)$.

5.116. Neka su $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ divergentni redovi sa nenegativnim i opadajućim članovima. Da li tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{u_n v_n}$ mora divergirati? Uopštiti ovaj problem.

5.117. Za niz realnih brojeva a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ kaže se da je kvazi-konveksan ako je

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,|\Delta^2 a_n| < +\infty,$$

gde je $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}_0)$.

1° Ako je niz a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ kvazi-konveksan, dokazati da postoje konstante A i B takve da je, za $n \to +\infty$,

(1) $$a_n = An + B + o(1),$$

(2) $$\Delta a_n = -A + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2° Dokazati da ograničen kvazi-konveksan niz a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ ima osobinu

$$n\,\Delta a_n = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Dokaz. 1° Iz

$$P_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,\Delta^2 a_k = -\sum_{k=0}^{n-2} \sum_{\nu=0}^{k} \Delta^2 a_\nu + n \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta^2 a_\nu$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-2} (\Delta a_0 - \Delta a_{k+1}) + n(\Delta a_0 - \Delta a_n)$$

$$= -(n-1)\Delta a_0 + a_1 - a_n + n\Delta a_0 - n(a_n - a_{n+1})$$

$$= a_1 + \Delta a_0 + na_{n+1} - (n+1)a_n = a_0 + na_{n+1} - (n+1)a_n \qquad (n \geq 1)$$

izlazi, pošto se stavi $Q_n = a_0 - P_n$,

$$\frac{a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_0 - P_n}{n(n+1)} = \frac{Q_n}{n(n+1)} \quad (n \geq 1);$$

odatle,

(3) $$\frac{a_n}{n} - \frac{a_m}{m} = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{Q_k}{k(k+1)} \quad (m > n \geq 1).$$

Kako je

(4) $$\lim_{n\to+\infty} Q_n = B = a_0 - \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\Delta^2 a_k \in \mathbf{R},$$

red $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{Q_k}{k(k+1)}$ apsolutno konvergira, pa, prema (3), postoji i ima konačnu vrednost

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{a_m}{m} = A.$$

Ako u (3) $m \to +\infty$, dobija se, s obzirom na (4),

$$\frac{a_n}{n} - A = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{Q_k}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{B + \varepsilon_k}{k(k+1)} = \frac{B}{n} + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)} \quad (n \geq 1),$$

gde je $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Dakle,

(5) $$a_n = An + B + n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)} \quad (n \geq 1),$$

pri čemu je, prema **5.49**,

(6) $$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)}}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\varepsilon_n/(n(n+1))}{(1/n) - 1/(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Time je dokazana jednakost (1). Iz (5) izlazi, s obzirom na (6),

$$\Delta a_n = -A + n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)} - (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)}$$

$$= -A + n \cdot \frac{\varepsilon_n}{n(n+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_k}{k(k+1)}$$

$$= -A + o\left(\frac{1}{n}\right) - o\left(\frac{1}{n+1}\right) = -A + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to +\infty).$$

Važi, dakle, i jednakost (2).

2° Ako je niz a_n ($n \in \mathbf{N}_0$) kvazi-konveksan i ograničen, tada važi, očigledno, (1) sa $A = 0$, pa jednakost (2) postaje

$$\Delta a_n = o(n^{-1}) \quad (n \to +\infty), \quad \text{ili} \quad n \Delta a_n = o(1) \quad (n \to +\infty).$$

5.118. Dokazati sledeći stav: Neka je $u_n(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$) niz realnih funkcija, definisanih na nepraznom skupu A realnih brojeva, takav da je na skupu A uniformno ograničen niz

$$T_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

gde je $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ ($n = 0, 1, \ldots$).

Ako je λ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) kvazi-konveksan niz koji teži ka nuli i ako $\lambda_n S_n(x) \to 0$ ($n \to +\infty$) uniformno na A, tada je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n u_n(x)$ uniformno konvergentan na A.

Dokaz. Iz pretpostavki izlazi prvo, s obzirom na prethodni problem pod 2°, da je $n \Delta \lambda_n = o(1)$ ($n \to +\infty$). Tvrđenje stava onda izlazi iz jednakosti, dobijene dvostrukom primenom Abelove parcijalne sumacije,

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k u_k(x) \left(= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \lambda_k S_k(x) + \lambda_n S_n(x) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \Delta^2 \lambda_k (k+1) T_k(x) + \Delta \lambda_{n-1} n T_{n-1}(x) + \lambda_n S_n(x) \quad (x \in A; \quad n \geq 2).$$

Ovaj stav dokazao je M. Tomić. 7 α

5.119. 1° Dokazati da red $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\alpha} f(nx)$, gde je $0 \leq \alpha \leq 1$ i funkcija $t \mapsto f(t)$ je neprekidna i pozitivna za $t \geq 0$, ne može uniformno konvergirati na intervalu $[0, 1]$. Kako se u ovom iskazu može oslabiti pretpostavka o funkciji f?

2° Za nenegativne vrednosti parametra α i pozitivne vrednosti parametra β, ispitati uniformnu konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{(1+nx)^{\beta}}$ na intervalima $[0, 1]$ i $[1, +\infty)$.

Rešenje. 1° Pod pretpostavkama ove tačke, ukoliko se stavi

$$g_n(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} x^{\alpha} f(kx) \qquad (x \geq 0, \ n \in \mathbf{N}),$$

dobijamo

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} n^{-\alpha} f\left(\frac{k}{n}\right) = n^{1-\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) \to \lim_{n \to +\infty} n^{1-\alpha} \int_0^1 f(1+x)\, dx > 0$$

jer je $\int_0^1 f(1+x)\, dx > 0$. Odavde izlazi da posmatrani red pod pomenutim uslovima ne konvergira uniformno na $[0, 1]$.

Na osnovu izloženog dokaza lako je uvideti da se uslov koji se tiče funkcije f može zameniti sledećim slabijim uslovom: funkcija $t \mapsto f(t)$ je definisana za $t \geq 0$ i x u Riemannovom smislu integrabilna na nekom intervalu $[a, b]$, gde je $0 < a < b < +\infty$. $\to \lambda$ pozi

~~2°~~ a) *Interval* $[0, 1]$. Za konvergenciju posmatranog funkcionalnog reda na $[0, 1]$ potrebno je (i dovoljno) da bude $\beta > 1$. Prema 1°, ako je $0 \leq \alpha \leq 1$, red ne konvergira uniformno ni za jedno $\beta > 0$. Neka je $\alpha > 1$ i $\beta > 1$. Ako je $\alpha \geq \beta$, imamo

$$0 < \frac{x^\alpha}{(1+nx)^\beta} < \frac{x^\alpha}{(nx)^\beta} = \frac{x^{\alpha-\beta}}{n^\beta} \leq \frac{1}{n^\beta} \qquad (0 < x \leq 1,\ n \in \mathrm{N}).$$

Dakle, red na $[0, 1]$ uniformno konvergira ako i samo ako je $\alpha > 1$ i $\beta > 1$.

b) *Interval* $[1, +\infty)$. Za konvergenciju reda na $[0, +\infty)$ potrebno je (i dovoljno) da bude $\beta > 1$. Ako je uz to $\alpha > \beta$, za svako $n \in \mathrm{N}$ imamo

$$\frac{x^\alpha}{(1+nx)^\beta} \to +\infty \qquad (x \to +\infty),$$

pa niz $\dfrac{x^\alpha}{(1+nx)^\beta}$ $(n \in \mathrm{N})$ ne konvergira uniformno ka nuli na $[1, +\infty)$, odakle izlazi da red tada na $[1, +\infty)$ ne konvergira uniformno. Ako je $\alpha \leq \beta$, biće

$$0 < \frac{x^\alpha}{(1+nx)^\beta} < \frac{x^\alpha}{\mathrm{an\ r}} = \frac{1}{n^\beta} x^{\alpha-\beta} \leq \frac{1}{n^\beta} \qquad (1 \leq x < +\infty,\ n \in \mathrm{N}),$$

pa red na $[1, +\infty)$ uniformno konvergira. Dakle, posmatrani red na $[1, +\infty)$ uniformno konvergira ako i samo ako je $\beta > 1$ i $\beta \geq \alpha$.

5.120. Neka je $(r_n)\ n \in \mathrm{N}_0$ niz kompleksnih brojeva, a kompleksan broj sa osobinom $|a| > 1$ i

$$s_n = \left(\frac{a}{a-1} + \frac{1}{a^n}\right) r_n - \frac{1}{a-1} r_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dokazati da tada uslovi:

$$1^\circ \ r_n = o(a^n) \quad (n \to +\infty) \quad \text{i} \quad 2^\circ \ \text{niz } (s_n) \text{ konvergira}$$

povlače konvergenciju niza (r_n).

5.121. Dokazati da je

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \log \sin x \cdot \log \cos x \, dx = 2 - \log 2 - \frac{1}{8}\pi^2.$$

Dokaz. Redom imamo

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \log t \cdot \log(1 - t^2)\, dt = \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^2} + \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4 \cdot 5} - \frac{1}{5^2}\right) + \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \log 2 - \left(\frac{1}{8}\pi^2 - 1\right)$$

$$= 2 - \log 2 - \frac{1}{8}\pi^2.$$

Primedba. G. H. Hardy (1877—1947), J. O. Watts i drugi dali su, 1900. godine u časopisu *Educational Times*, ovo rešenje, koje objavljujemo bez ikakvih izmena. Ostaje da se obrazloži svaki korak u navedenom rešenju.

Ovom problemu unekoliko je sličan problem 5.1.

Literatura

Collected papers of G. H. Hardy, vol VII, p. 648. Oxford 1979.

5.122. Navesti primer potencijalnog reda koji je konvergentan samo u jednoj tački.

Takav je, na primer, red $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\, x^n$ koji je konvergentan samo u tački $x = 0$, a divergentan za $x \neq 0$.

Primedba. Funkcija f, čiji Maclaurinov red konvergira samo u jednoj tački, data je, na primer, sa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos (n^2 x).$$

Literatura

B. R. Gelbaum-J. M. H. Olmsted: *Conterexamples in Analysis.* San Francisco-London--Amsterdam 1965. — Posebno videti: str. 68—70.

5.123. Dokazati *Jametov kriterijum:*

Red sa pozitivnim članovima $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako je

$$\left(1 - \sqrt[n]{a^n}\right) \frac{n}{\log n} \geq p > 1 \text{ za } n > n_0,$$

a divergira ako je

$$\left(1 - \sqrt[n]{a_n}\right) \frac{n}{\log n} \leq 1 \text{ za } n > n_0.$$

5.124. Neka je razvoj funkcije $x \mapsto \sec x$ prikazan u vidu

$$\sec x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{(2\,n)!}\, x^{2n}.$$

Za brojeve E_n, koji se zovu Eulerovi brojevi, izvesti rekurentnu formulu.

Rešenje. U važnosti je identitet

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_n}{(2\,n)!} x^{2n} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2\,n)!} = 1, \tag{1}$$

jer je identično $\sec x \cdot \cos x = 1$.

Posle množenja redova u (1) imamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = 1$, gde je

$$a_0 = 1, \quad a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2n-2k)!\,(2k)!} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Odavde izlazi

$$E_0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2n-2k)!\,(2k)!} = (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako $n-k$ zamenimo sa k, poslednja rekurentna formula postaje

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{E_k}{(2n-2k)!\,(2k)!} = \frac{1}{(2n)!} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

5.125. Neka je $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ realan nenegativan niz i $A \geq 0$. Tada je, očigledno,

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \min(a_k, A) \leq A \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Uvedimo sledeće oznake:

$$S(A) = \limsup_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \min(a_k, A), \quad s(A) = \liminf_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \min(a_k, A).$$

1° Dokazati da je $0 \leq s(A) \leq S(A) \leq A$ i da su $s(A)$ i $S(A)$ monotono neopadajuće funkcije od A. Ako je $\lim_{A \to +\infty} s(A) = \lim_{A \to +\infty} S(A) = L$, po definiciji označavamo $L = \mathrm{tal}\,(a_n)$ (truncated average limit, tj. srednja granica odsecanja).

2° Ako je $a_n \geq 0$ za $n = 1, 2, \ldots$, $\mathrm{tal}\,(a_n) = a$ i $\lambda \geq 0$, dokazati da je $\mathrm{tal}\,(\lambda a_n) = \lambda a$.

3° Ako je $a_n \geq 0$ i $b_n \geq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ i ako $\mathrm{tal}\,(a_n)$ i $\mathrm{tal}\,(b_n)$ postoje, dokazati da je

$$\mathrm{tal}\,(a_n + b_n) = \mathrm{tal}\,(a_n) + \mathrm{tal}\,(b_n).$$

Rešenje. 3° Najpre dokazati da je, za $a, b, A \geq 0$,

$$\min\left(a, \frac{A}{2}\right) + \min\left(b, \frac{A}{2}\right) \leq \min(a+b, A) \leq \min(a, A) + \min(b, A),$$

i zatim

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\min\left(a_k, \frac{A}{2}\right) + \min\left(b_k, \frac{A}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \min(a_k + b_k, A)$$

$$\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\min(a_k, A) + \min(b_k, A)).$$

Literatura

J. van de Lune: *The truncated average limit and some of its applications in analytic number theory.* Math. Centre Report ZW 20, Amsterdam 1974, pp. 1—2.

5.126. Funkcija $x \mapsto f(x)$ definisana je na intervalu $[1, +\infty)$ i ima tu neprekidan prvi izvod, pri čemu je $\int\limits_1^{+\infty} |f'(x)|\,dx < +\infty$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konvergira ako i samo ako konvergira integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Rešenje. Primenom teoreme o srednjoj vrednosti integrala i Newton-Leibnizove formule, dobija se, za $a \geq 1$ i $0 \leq \theta \leq 1$,

$$\Big|\int_a^{a+\theta} f(x)\,dx - \theta f(a)\Big| = |\theta f(\xi) - \theta f(a)| = \theta\,|f(\xi) - f(a)| = \theta\Big|\int_a^{\xi} f'(x)\,dx\Big| \leq \int_a^{a+\theta} |f'(x)|\,dx,$$

gde je $a \leq \xi \leq a+\theta$. Primenom dobijene nejednakosti

$$\Big|\int_a^{a+\theta} f(x)\,dx - \theta f(a)\Big| \leq \int_a^{a+\theta} |f'(x)|\,dx \qquad (a \geq 1,\ 0 \leq \theta \leq 1),$$

dokaz se završava uz pomoć Cauchyevog kriterijuma za konvergenciju reda i istoimenog kriterijuma za nesvojstveni integral.

Primedba. Pretpostavka da je prvi izvod neprekidan na $[0, +\infty)$ može se zameniti pretpostavkom da je on konačan u svakoj tački ovog intervala.

Literatura

Успехи математических наук 30, выпуск 4 (184) (1975), 282—283. — Problem sa Prve svesavezne matematičke olimpijade 1974. godine u Moskvi.

5.127. Neka je E neograničen skup realnih ili kompleksnih brojeva. Dokazati da funkcionalni niz $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbf{N})$ ne konvergira uniformno na E.

Rešenje. Ova činjenica neposredno izlazi iz sledećeg opštijeg iskaza:

Niz realnih ili kompleksnih polinoma

$$P_n(x) \quad (n \in \mathbf{N}) \tag{1}$$

sa osobinom da su polinomi $x \mapsto P_{n+1}(x) - P_n(x)$ nekonstantni za beskonačno mnogo vrednosti n ne može uniformno konvergirati ni na jednom neograničenom skupu realnih ili kompleksnih brojeva.

Neka je (1) jedan takav niz polinoma i neka je E bilo koji neograničen skup realnih ili kompleksnih brojeva. Kad bi niz (1) uniformno konvergirao na E, postojao bi prirodan broj m takav da polinom $x \mapsto P_{m+1}(x) - P_m(x)$ nije konstantan i da je

$$|P_{m+1}(x) - P_m(x)| < 1 \quad (x \in E).$$

Ovo bi, međutim, bilo u suprotnosti sa činjenicama da je

$$\lim_{x \to \infty} |P_{m+1}(x) - P_m(x)| = +\infty$$

i da je skup E neograničen. Dokaz je time završen.

Primedba. Ovo tvrđenje može se drukčije na sledeći način formulisati: Red realnih ili kompleksnih polinoma sa beskonačno mnogo nekonstantnih članova ne može uniformno konvergirati na neograničenom skupu.

Specijalno: potencijalni red sa beskonačno mnogo koeficijenata različitih od nule ne može uniformno konvergirati na neograničenom skupu. (Ovo poslednje je, u stvari, tvrđenje 2° u formulaciji problema **5.8.**)

6. NEKOLIKO NOVIJIH REZULTATA U TEORIJI REDOVA

Ovde se daje pregled osnovnog dela jedne grupe pre nekoliko godina objavljenih rezultata koji pripadaju teoriji redova i imaju — i prema pitanjima na koja se prvenstveno odnose i po metodama kojima su dobijeni — relativno elementaran karakter. Njima je, međutim, grupa pitanja iz kojih su potekli u potpunosti, za opšti slučaj, rešena; ovo im, zajedno sa većim brojem posledica i dopunskih rezultata, kao i mogućnostima primena u više pravaca, daje izvesnu zanimljivost.

Reč je, na prvom mestu, o sledećem pitanju:

Neka je a_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ niz kompleksnih brojeva različitih od nule za dovoljno veliko n, i neka je stavljeno $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ i, pod pretpostavkom da red

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

konvergira, $S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ $(n \in \mathbf{N}_0)$*. Pod kojim je uslovom, za dati kompleksan broj w,

$$(I_w) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{a_n} = w,$$

odnosno

$$(II_w) \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{R_n}{a_n} = w?$$

Osnovni odgovor na ovo pitanje dat je teoremama 2 i 3. Navedimo prethodno sledeći rezultat, koji se odnosi na potencijalne redove a bitno se koristi u dokazu teoreme 2.

Teorema 1. *Neka:* α) $a_n, b_n \in \mathbf{C}$ $(n \in \mathbf{N}_0)$; β) $a_n \neq 0$ *za dovoljno veliko* n; γ) *red*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k$$

ima poluprečnik konvergencije $r > 0$. *Tada:*

$$1^\circ \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \zeta \wedge |\zeta| < r$$

* Ovde se, dakle, oznaka R_n i termin »n-ti ostatak« (naslov rada [1]) uzimaju sa nešto drukčijim značenjem nego što je inače uobičajeno (str. 23—24); to se čini da bi se odgovarajući rezultati formulisali u pogodnijem obliku.

povlači

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = f(\zeta);$$

2° $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \zeta \wedge |\zeta| < r$$

povlači

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_{k-n} = f(\zeta).$$

Primetimo da se tvrđenje 1° može naći u [5] (prvi deo, IV glava, problem 178) dok je tvrđenje 2° formulisano i dokazano u [1].

Dokaz. 1° Neka je $|\zeta| < \rho < r$. Bez teškoća se ustanovljava da postoje prirodan broj n_0 i nenegativan konačan broj M takvi da je

$$\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leq M \rho^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n-1;\ n \geq n_0).$$

Onda se, sa proizvoljno izabranim $m \geq n_0$, za $n > m$ dobija

$$P_n = \left|\frac{1}{a_n} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - f(\zeta)\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{a_n} b_k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \zeta^k\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n-k}}{a_n} - \zeta^k\right)\right| + \sum_{k=m+1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| |b_k| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k|\, |\zeta|^k$$

(2) $$\leq \left|\sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n-k}}{a_n} - \zeta^k\right)\right| + M \sum_{k=m+1}^{n} |b_k|\, \rho^k + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k|\, \rho^k.$$

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n-k}}{a_n} = \rho^k \quad (k = 0, \ldots, m),$$

puštajući u (2) da $n \to +\infty$, dobija se

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\, P_n \leq (M+1) \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k|\, \rho^k,$$

a potom, puštajući da $m \to +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, P_n \leq 0$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 0$, što je trebalo dokazati.

2° Neka je ponovo $|\zeta| < \rho < r$. Postoji prirodan broj n_0 takav da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \rho \quad (n \geq n_0)$$

i odatle

$$\left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| \leq \rho^k \quad (n \geq n_0;\ k \geq 0).$$

Stoga, za proizvoljno izabrano $m \in \mathbf{N}$, imamo

(3) $$Q_n = \left|\frac{1}{a_n} \sum_{k=n}^{+\infty} a_k b_{k-n} - f(\zeta)\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} b_k - \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \zeta^k\right|$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n+k}}{a_n} - \zeta^k\right)\right| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k| \left|\frac{a_{n+k}}{a_n}\right| + \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k|\,|\zeta|^k$$

$$\leq \left|\sum_{k=0}^{m} b_k \left(\frac{a_{n+k}}{a_n} - \zeta^k\right)\right| + 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k|\,\rho^k \quad (n \geq n_0).$$

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n} = \zeta^k \quad (k \geq 0),$$

puštajući da u (3) $n \to +\infty$ dobija se $\overline{\lim}_{n\to+\infty} Q_n \leq 2 \sum_{k=m+1}^{+\infty} |b_k|\,\rho^k$, a puštajući zatim da $m \to +\infty$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} Q_n \leq 0$, tj. $\lim_{n\to+\infty} Q_n = 0$, što je i trebalo ustanoviti.

Kao što je već rečeno, sledeće dve teoreme sadrže glavni deo grupe rezultata o kojoj je reč. U radu [1] dokazana je teorema 2 i tvrđenje 1° teoreme 3. Tvrđenje 2° teoreme 3 dokazano je u [2], ali bez specifikacija 2°.1 i 2°.2 Ova dva tvrđenja bila su u [1] i [2] zamenjena slabijim iskazima, a sama tvrđenja 2°.1 i 2°.2 formulisana su u [2] u obliku hipoteze, koju je kasnije u radu [4] dokazao diplomirani matematičar mr Slavko Simić.

Ovde ćemo izložiti dokaze teoreme 2 i tvrđenja pod 1° teoreme 3.

Teorema 2. *Za svako kompleksno* w *sa osobinom* $\mathrm{Re}\,(w) \neq \frac{1}{2}$:

1° *jednakost* (I_w) *zadovoljena je ako i samo ako je ispunjen uslov*

$$(I_w') \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1} \wedge S = 0 \textit{ ukoliko red } (1) \textit{ konvergira};$$

2° *jednakost* (II_w) *zadovoljena je ako i samo ako*

$$(II_w') \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w-1}{w} \wedge \textit{ red } (1) \textit{ konvergira}.$$

Pri tome prvu jednakost u (I_w') *treba shvatiti kao* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ *kad je* $w = 1$.

Dokaz. 1° Kako je, za dovoljno veliko n,

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{a_n + S_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{S_{n-1}}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n},$$

jednakost (I_w) sa $w \neq 1$ povlači

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{S_n}{a_n} - 1} = \frac{w}{w-1},$$

a sa $w = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}}}{\dfrac{S_n}{a_n} - 1}\right| = +\infty,$$

pri čemu u ovom drugom slučaju nije moguće da bude, za proizvoljno veliko n, $\dfrac{S_{n-1}}{a_{n-1}} = 1$, jer bi to povuklo $a_{n-1} = S_{n-1} = S_{n-2} + a_{n-1}$ za proizvoljno veliko n, tj. $S_n = 0$ za proizvoljno veliko n, što bi bilo nesaglasno sa $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{a_n} = 1 = w$. Prvi deo uslova (I_w') je, dakle, potreban. Očigledno je da je i njegov drugi deo potreban.

Pretpostavimo da je, sa $\operatorname{Re}(w) > \dfrac{1}{2}$ (slučaj kad je, s obzirom na D'Alembertov kriterijum i na $\operatorname{Re}(w) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow |w/(w-1)| > 1$, red (1) divergentan),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1}. \tag{4}$$

Tada je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{w-1}{w} \quad \text{i} \quad \left|\frac{w-1}{w}\right| < 1,$$

pa se, primenom teoreme 1 na slučaj kad je $b_n = 1$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, tj. kad je $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$, dobija

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = f\left(\frac{w-1}{w}\right) = f\left(1 - \frac{1}{w}\right) = \frac{1}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{w}\right)} = w.$$

Najzad, ako važi (3) sa $\operatorname{Re}(w) < \dfrac{1}{2}$ (slučaj konvergencije reda (1)) i pri tome je $S = 0$, tada, prema tvrđenju 2°, čiji dokaz sledi, imamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{S - S_n}{a_n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{R_{n+1}}{a_n} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = 1 - \frac{1}{1 - \dfrac{1}{w-1}} = w.$$

2° Drugi deo uslova (II_w') očigledno je neophodan za (II_w). Neophodnost njegovog prvog dela izlazi iz

$$\frac{R_n}{a_n} = 1 + \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Pretpostavimo da je uslov (II_w') ispunjen. Tada primena teoreme 1 na slučaj kad je $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ daje

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = f\left(\frac{w-1}{w}\right) = w.$$

Pri tome u slučaju kad je, specijalno, $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{R_n}{a_n} = w = 0$ ne može biti $\dfrac{R_{n+1}}{a_n} = 0$ za proizvoljno veliko n, jer bi to povuklo

$$\frac{R_n}{a_n} = \frac{a_n + R_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{R_{n+1}}{a_n} = 1$$

sa proizvoljno velikim n, što bi bilo nesaglasno sa pretpostavkom.

Teorema 3. *Za svako kompleksno w sa osobinom*

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}: \tag{5}$$

1° *uslov* (I_w') *je potreban a nije dovoljan za* (I_w); *takođe, uslov* (II_w') *je potreban a nije dovoljan za* (II_w);

2° *jednakosti* (I_w) *i* (II_w) *efektivno se realizuju; specijalno, za svako takvo* w:

2°.1 *ukoliko je* $\theta \in (0, 2\pi)$ *određeno sa*

$$\frac{w}{w-1} = e^{\theta i},$$

a niz α_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ *realnih brojeva ima osobine*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_n}{\alpha_{n+2}-\alpha_{n+1}} = 1,$$

tada (I_w) *važi za*

$$a_n = e^{n\theta i}\,\alpha_n \quad (n \in \mathbf{N}_0); \tag{6}$$

2°.2 *ukoliko je* $\theta \in (0, 2\pi)$ *određeno sa*

$$\frac{w-1}{w} = e^{\theta i},$$

a niz realnih brojeva α_n $(n \in \mathbf{N}_0)$ *ima osobine*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}} = 1,$$

tada (II_w) *važi za niz* (6).

Dokaz tvrđenja 1°. Potrebnost uslova (I_w') i (II_w') za važenje jednakosti (I_w) i (II_w), respektivno, izlazi iz odgovarajućih delova dokaza teoreme 2.

Budući da je

$$\mathrm{Re}\,(w) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{w}{w-1} = e^{\theta i} \text{ sa } \theta \in (0,2\pi),$$

primer niza

$$a_n = e^{n\theta i} \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ 0 < \theta < 2\pi)$$

dokazuje da ni za jedno w sa osobinom (5) uslov (I_w') nije dovoljan za (I_w). Zaista, u slučaju niza (6),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\theta i},$$

a niz

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{1}{e^{n\theta i}}(e^{\theta i} - e^{-n\theta i}) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

ne konvergira.

Da bismo ustanovili da ni za jedno w sa osobinom (5) uslov (II_w') nije dovoljan za (II_w), primetimo najpre da za svako $\theta \in (0, 2\pi)$ niz $e^{n\theta i}$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ ima 1 kao tačku nagomilavanja. Neka je $\theta \in (0,2\pi)$ dato; stavimo

$$a_k = \frac{1}{n+1} e^{k\theta i} \quad (p_n \le k < p_{n+1};\ n = 0, 1, \ldots),$$

pri čemu su brojevi $0 = p_0 < p_1 < p_2 < \ldots$ izabrani tako da bude

$$\left|\sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} e^{k\theta i}\right| = \left|\frac{1}{e^{\theta i}-1}\right| \cdot \left|e^{(p_{n+1}-p_n)\theta i} - 1\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad (n \in \mathbf{N}_0),$$

što je moguće učiniti, s obzirom na prethodnu primedbu. Red (1) je sada konvergentan, prema Dirichletovom kriterijumu, a očigledno

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{\theta i} \left(= \frac{w}{w-1}\right).$$

Međutim,

$$\left|\frac{R_{p_n}}{a_{p_n}}\right| = \frac{\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-1} \sum\limits_{\nu=p_k}^{p_{k+1}-1} e^{\nu\theta i}\right|}{(n+1)^{-1}} \leq \frac{\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{-1} \cdot (k+1)^{-2}}{(n+1)^{-1}} = \frac{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{(n+1)^{-1}} \to 0 \ (n \to +\infty),$$

a s druge strane,

$$\frac{R_{p_n-1}}{a_{p_n-1}} = \frac{a_{p_n-1} + R_{p_n}}{a_{p_n-1}} = 1 + \frac{R_{p_n}}{a_{p_n}} \cdot \frac{a_{p_n}}{a_{p_n-1}} \to 1 \quad (n \to +\infty),$$

tako da količnik $\dfrac{R_n}{a_n}$ u ovom slučaju ne konvergira.

U radovima [1], [2], [3] i [4] dobijen je niz raznovrsnih posledica navedenih rezultata, kao i njihovih dopuna, analogona i primena. Ovde ćemo navesti samo četiri posledice teoreme 2, od kojih prva daje uslove pod kojima se ostvaruju asimptotske jednakosti $S_n \sim a_n$ $(n \to +\infty)$ i $R_n \sim a_n$ $(n \to +\infty)$, a treća i četvrta se odnose na potencijalne redove, zatim, kao dopunski rezultat, teoremu 4, koja daje u slučajevima kada su ispunjeni uslovi (I_w) odnosno (II_w) asimptotsko ponašanje proizvoljan broj puta iteriranih suma odnosno ostataka, u uopštenom smislu, i najzad primenu teoreme 2 na ispitivanje ponašanja određene klase nizova. Napominjemo da su ovi i prethodno navedeni rezultati u radovima [1], [2] i [4] bili nešto drukčije grupisani u iskaze.

Posledica 1. U opštem slučaju:

$$1^\circ \ S_n \sim a_n \quad (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0;$$

$$2^\circ \ R_n \sim a_n \ (n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Posledica 2. U opštem slučaju:

$$1^\circ \ |S_n| = o(|a_n|)\,(n \to +\infty) \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 \wedge S = 0;$$

2° $|R_n| = o(|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, *kao i uopšte* (II_w) *sa* $\mathrm{Re}\,(w) < \dfrac{1}{2}$, *nije moguće.*

Posledica 3. 1° *Da bi bilo za bar jedno* $z \neq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \sim a_n z^n \quad (n \to +\infty) \tag{7}$$

potrebno je, a da (7) *važi za svako* $z \neq 0$ *dovoljno je, da bude*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0.$$

2° *Da bi bilo*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^k \sim a_n z^n \quad (n \to +\infty) \tag{8}$$

za bar jedno $z \neq 0$ *potrebno je, a da* (8) *važi za svako* $z \neq 0$ *dovoljno je, da bude*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Posledica 4. Neka je $\varphi(n)$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ *strogo rastući niz elemenata skupa* $\mathbf{N}_0$ *takav da* $\varphi(n+1) - \varphi(n) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. *Tada:*

1° $\underline{\lim}_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 0$ *povlači* $\sum_{k=0}^{n} a_k z^{\varphi(k)} \sim a_n{}^{\varphi(n)}$ $\quad (|z| > 1)$;

2° $\overline{\lim}_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ *povlači* $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k z^{\varphi(k)} \sim a_n z^{\varphi(n)}$ $\quad (|z| < 1)$.

Teorema 4. Neka su

$$(u_n{}^{(m)})_{n \in \mathbf{N}_0} \text{ i } (v_n{}^{(m)})_{n \in \mathbf{N}_0} \ (m \in \mathbf{N})$$

nizovi kompleksnih brojeva koji ispunjavaju sledeće uslove:

$$u_n{}^{(m)} \neq 0, \ v_n{}^{(m)} \neq 0 \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}),$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}{}^{(m)}}{u_n{}^{(m)}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{v_{n+1}{}^{(m)}}{v_n{}^{(m)}} = 1 \quad (m \in \mathbf{N}),$$

i neka su nizovi $(\sigma_n{}^{(m)})_{n \in \mathbf{N}_0}$ i $(\tau_n{}^{(m)})_{n \in \mathbf{N}_0}$ $(m \in \mathbf{N})$ *definisani na sledeći način:*

$$\sigma_n{}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} S_n \ (n \in \mathbf{N}_0), \ \sigma_n{}^{(m+1)} \stackrel{\text{def}}{=} u_n{}^{(m+1)} \sum_{k=0}^{n} v_k{}^{(m+1)} \sigma_k{}^{(m)} \ (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}_0) \text{ i}$$

$$\tau_n{}^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} R_n \ (n \in \mathbf{N}_0), \ \tau_n{}^{(m+1)} \stackrel{\text{def}}{=} u_n{}^{(m+1)} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k{}^{(m+1)} \tau_k{}^{(m)} \ (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}_0).$$

Tada, za svako w *kompleksno sa osobinom* $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

1° (I_w), *tj.* $S_n \sim w a_n$ $(n \to +\infty)$, *povlači*

$$\sigma_n{}^{(m)} \underset{n \to +\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n{}^{(\nu)} v_n{}^{(\nu)} \quad (m \in \mathbf{N});$$

2° (II_w), *tj.* $R_n \sim w a_n$ $(n \to +\infty)$, *povlači*

$$\tau_n{}^{(m)} \underset{n \to +\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n{}^{(\nu)} v_n{}^{(\nu)} \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Napomenimo na kraju da se direktnom primenom teoreme 2 može, na primer, odmah dobiti asimptotsko ponašanje niza o kome je reč u problemu **5.14**, i to za bilo koji kompeksan broj a sa osobinom $|a|>1$.

Literatura

1. D. D. Adamović: *Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste au terme général d'une série réelle ou complexe.* Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, **15** (29) (1973), 5—20.

2. D. D. Adamović: *Quelques compléments aux résultats du travail »Sur la covergence des rapports . . .«.* Publ. Inst. math. Belgr. **20** (34) (1976) 9—27.

3. D. D. Adamović: *An identity and asymptotic behaviour of some sequences.* Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univ. u Beogradu, Serija Matematika i fizika, No 544 — No 576 (1976), 149—154.

4. Slavko Simić: *On a hypothesis of D. Adamović concerning asymptotic behaviour of some complex sequences.* Publ. Inst. math. Belgr. **25** (39) (1979), 167—178.

5. Г. Полия и Г. Сеге: *Задачи и теореми из анализа*, Москва, 1956.

7. SPISAK KRITERIJUMA KONVERGENCIJE I OSTALIH VAŽNIJIH TEOREMA

36. Teorema o razvijanju složene funkcije u potencijalni red | **44**
37. Teorema o razvijanju recipročne vrednosti sume potencijalnog reda u potencialni red | **44**
38. Teorema o inverziji potencijalnog reda | **44—45**
39. Teorema o konvergenciji Fourierovog reda funkcije ograničene varijacije, u tački i u intervalu (Jordanov kriterijum) | **50**
40. Teorema o konvergenciji u tački Fourierovog reda funkcije koja ima konačne jednostrane limese i jednostrane izvode | **51**
41. Fejérova teorema | **51**
42. Teorema o najboljoj kvadratnoj aproksimaciji trigonometrijskim polinomom sa Fourierovim koeficijentima i o važenju Besselove nejednakosti | **52**
43. Teorema o dovoljnom uslovu za važenje Parsevalove formule | **52**
44. Teorema o integraciji član po član Fourierovog reda | **52**
45. Teorema o podudaranju koeficijenata trigonometrijskih redova sa jednakim sumama | **53**
46. Osnovna teorema o Fourierovom integralu | **54**
47. Kriterijum Jermakova | **122**
48. Teorema D. Blanuše o periodičnim funkcijama | **207**
49. Dinijeva teorema | **306**
50. Jametov kriterijum | **322**

8. INDEKS IMENA

SADRŽAJ