СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА XIV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 14

Уредник
академик РАДИВОЈЕ КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Д. ХИЛБЕРТ

ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

ПРЕВЕО СА ОСМОГ НЕМАЧКОГ ИЗДАЊА
Ж. ГАРАШАНИН

БЕОГРАД
1957

СРПСКА АКАДЕМИЈА НАУКА

КЛАСИЧНИ НАУЧНИ СПИСИ
КЊИГА XIV

МАТЕМАТИЧКИ ИНСТИТУТ
КЊИГА 14

Уредник
РАДИВОЈЕ КАШАНИН
Управник Математичког института САН

Д. ХИЛБЕРТ

ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

ПРЕВЕО СА ОСМОГ НЕМАЧКОГ ИЗДАЊА
Ж. ГАРАШАНИН

Примљено на XI скупу Одељења природно-математичких наука од 30 X 1953 г.

БЕОГРАД
1957

Редактор: Т. П. АНЂЕЛИЋ

Научно дело

Издавачка установа САН

Штампа Графичко предузеће „Академија", Београд, Космајска 28, тел. 24-701

Наслов оригинала:

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

von Dr. DAVID HILBERT †
ehem. o. Prof. an der Universität Göttingen

Achte Auflage, mit Revisionen und Ergänzungen
von Dr. PAUL BERNAYS
Prof. an der Eidg. Technischen Hochschule Zürich

Mit 124 Abbildungen

B. G. TEUBNER
VERLAGSGESELLSCHAFT STUTTGART
1956

Предговор

Овај нови отисак Хилбертових „Основа геометрије„ није нека права нова прерада. Управо учињене су само неке исправке и мање допуне[1].

У допуни I су скупљене неке зависности у систему аксиома реалних бројева, раније наведене у додатку VI. Допуна III је у суштини понављање једне допуне додатка II у петом издању, која се односи на изводљивост једне даље аксиоме подударности из уже аксиоме уз помоћ једне аксиоме смештања.

Као допуна II додата је нова упрошћена формулација науке о пропорцијама, чија је ранија формулација задржана у главном тексту §§ 14—16.

Од додатака I—X седмог издања унети су опет само они геометриског карактера, тј. I—V.

Ради оријентације о седмом издању навешћемо из Хилбертовог предговора том издању следеће: „Ово седмо издање моје књиге „Основе геометрије“ је, спрам ранијих издања, знатно поправљено и допуњено, и то делом према мојим каснијим предавањима о овом предмету, а делом како су то захтевали резултати које су у међувремену постигли други аутори. Сходно томе је прерађен текст главног дела књиге. Ретко драгоцену помоћ при томе пружио ми је један од мојих ученика Х. Арнолд Шмит (H. Arnold Schmidt). Он не само што је за мене вршио сав рад који је залазио у појединости, већ од њега потичу и многобројне самосталне примедбе и додаци; посебно, он је самостално дао нову

---

[1] Посебно одустало се од по себи могућег избацивања аксиома распореда из афиног заснивања рачуна дужима (нарочито у §§ 24—26).

стилизацију додатка II. За ову његову помоћ изражавам му најсрдачнију захвалност“.

Даље треба још указати и на историски преглед „О Хилбертовом заснивању геометрије“ (Zur Hilberts Grundlegung der Geometrie) који је дао А. Шмит у Хилбертовим „Скупљеним списима“ (Gesammelte Abhandlungen) св. II (Берлин 1933), стр. 404—414.

Цирих, марта 1956 П. Бернајс

Садржај

Целокупно људско сазнање почиње са опажајима, одатле иде ка појмовима и завршава се идејама.

Кант, Критика чистог ума
Учење о елементима, део 2, одељак 2.

Увод

За потпуно изграђивање геометрије — исто као и аритметике — потребан је само мали број простих основних ставова. Ови основни ставови називају се аксиомама геометрије. Постављање аксиома геометрије и испитивање њихових узајамних односа јесте задатак који је још од времена Еуклида био предмет многобројних изврсних расправа математичке литературе. Овај се задатак своди на логичку анализу нашег просторног опажаја.

Следеће истраживање претставља нов покушај да се у геометрији постави потпун и што простији систем аксиома и да се из ових аксиома изведу најважнији геометриски ставови тако да се јасно види како значај различитих група аксиома тако и домашај последица које следују из појединих аксиома.

Прва глава

Пет група аксиома

§ 1. Елементи геометрије и пет група аксиома

Дефиниција. Ми замишљамо три различита система ствари: ствари првог система називамо *тачкама* и означавамо их са A, B, $C, \ldots$; ствари другог система називамо *правима* и означавамо их са a, b, $c, \ldots$; ствари трећег система називамо *равнима* и означавамо их са α, β, $\gamma, \ldots$; тачке се називају и *елементима линеарне геометрије*, тачке и праве се називају *елементима равне геометрије*, а тачке, праве и равни називају се *елементима просторне геометрије* или *елементима простора*.

Ми замишљамо тачке, праве и равни у извесним међусобним односима и означавамо ове односе речима „лежати“, „између“, „подударно“, „паралелно“, „непрекидно“; тачан и за математичке сврхе потпун опис ових односа постиже се помоћу *аксиома геометрије*.

Аксиоме геометрије можемо поделити у пет група; свака појединачно од ових група изражава извесне повезане основне чињенице нашег опажаја. Ми ћемо ове групе аксиома називати на следећи начин:

I 1—8. аксиоме *везе*,
II 1—4. аксиоме *распореда*,
III 1—5. аксиоме *подударности*,
IV аксиома *паралелних*,
V 1—2. аксиоме *непрекидности*.

§ 2. Група аксиома I: Аксиоме везе

Аксиоме ове групе постављају везу између горе наведених ствари: тачака, правих и равни и гласе:

I_1. *За две тачке A, B, постоји увек права a која припада свакој од ових двеју тачака A, B.*

I_2. *За две тачке A, B не постоји више од једне праве која би припадала свакој од двеју тачака A, B.*

Овде, као и у даљим излагањима, под двема, трима,... тачкама одн. правима, равнима увек се подразумевају различите тачке, одн. праве, равни.

Место „припадати" употребљаваћемо и друге начине изражавања, напр. права *a* пролази кроз тачке *A* и *B*, права *a* везује *A* и *B* или везује *A* са *B*, *A* лежи на *a*, *A* је тачка праве *a*, постоји тачка *A* на *a* итд. Ако тачка *A* лежи на правој *a* и, осим тога, на другој правој *b*, употребићемо такође изразе: праве *a* и *b* се секу у тачки *A*, имају тачку *A* заједничку итд.

I_3. *На правој постоје увек најмање две тачке. Постоје најмање три тачке које не леже на једној правој.*

I_4. *Ма за које три тачке A, B, C, које не леже на истој правој, постоји увек раван α која припада свакој од ове три тачке A, B, C. За сваку раван увек постоји тачка која јој припада.*

Ми ћемо употребљавати и изразе: *A* лежи у *α*; *A* је тачка равни *α* итд.

I_5. *Ма за које три тачке A, B, C, које не леже на истој правој не постоји више од једне равни која припада свакој од ових трију тачака A, B, C.*

I_6. *Ако две тачке A, B праве a леже у равни α, онда свака тачка праве a леже у равни α.*

У овом случају кажемо: права *a* лежи у равни *α* итд.

I_7. *Ако две равни α, β имају заједничку тачку A, онда оне имају најмање још једну заједничку тачку B.*

I_8. *Постоје најмање четири тачке које не леже у једној равни.*

Аксиома I_7 изражава да простор нема више од три димензије; напротив, аксиома I_8 изражава да простор нема мање од три димензије.

Аксиоме I_{1-8} могу се назвати *аксиомама равни групе I* за разлику од аксиома I_{4-8} које називам *просторним аксиомама групе I.*

Од ставова који следују из аксиома I_{1-8}, поменућемо само ова два:

Став 1. Две праве које леже у истој равни имају или једну заједничку тачку, или немају ниједну заједничку тачку; две равни или немају ниједну заједничку тачку, или имају заједничку праву и осим тога ниједну другу заједничку тачку; раван и права која не лежи у овој равни или немају ниједну заједничку тачку или имају једну заједничку тачку.

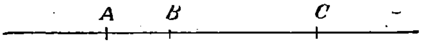
Став 2. Кроз праву и тачку која не лежи на овој правој, као и кроз две различите праве са заједничком тачком, пролази увек једна и само једна раван.

§ 3. Група аксиома II: Аксиоме распореда[1])

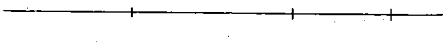
Аксиоме ове групе дефинишу појам „између" и омогућавају на основу овог појма *распоред* тачака на правој, у равни и у простору.

Дефиниција. Тачке неке праве стоје у извесним међусобним односима. За опис ових односа служимо се нарочито речју „између".

II_1. *Ако тачка B лежи између тачака A и C, онда су A, B, C три различите тачке праве и B лежи такође између C и A.*



II_2. *За две тачке A и C увек постоји најмање једна тачка B на правој AB, тако да C лежи између A и B.*



II_3. *Од ма којих трију тачака праве не постоји више од једне која лежи између оне друге две.*

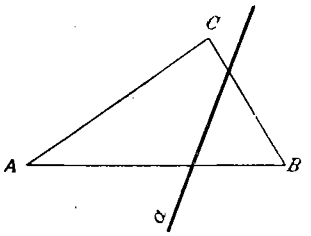
---

[1]) Ове аксиоме је прво исцрпно испитао M. Паш (M. Pasch) у својим Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882. Нарочито аксиома II_4 припада по садржини M. Пашу.

Осим ових *линеарних аксиома распореда* потребна је још једна *аксиома распореда за раван.*

Дефиниција. Посматрајмо на правој a две тачке A и B; систем двеју тачака A и B зваћемо *дуж* и означавати са AB или BA. Тачке између A и B зваћемо тачкама дужи AB или тачкама које леже у *унутрашњости* дужи AB; тачке A, B називају се *крајњим тачкама* дужи AB. Све остале тачке праве a називају се тачкама које леже *ван* дужи AB.

II$_4$. *Нека су A, B, C три тачке које не леже на једној правој и нека је a права у равни ABC која не пролази ни кроз једну од тих тачака A, B, C: ако тада права a пролази кроз једну од тачака дужи AB, она мора пролазити кроз једну од тачака дужи AC или кроз једну од тачака дужи BC.*

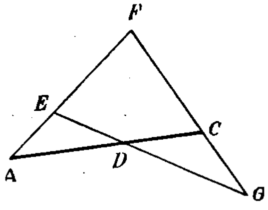


Изражавајући се очигледно можемо рећи: ако права улази у унутрашњост троугла, она и излази из њега. Да права a при томе не може пресецати обе дужи AC и BC, може се доказати.

§ 4. Последице из аксиома везе и распореда

Из аксиома група I и II следују ставови:

Став 3. За две тачке A и C постоји најмање једна тачка D на првој AC која лежи између A и C.



Доказ. Према аксиоми I$_3$ постоји ван праве AC једна тачка E, а према аксиоми II$_2$ постоји на правој AE тачка F тако да је E тачка дужи AF. Према истој аксиоми и према аксиоми II$_3$ постоји на правој FC тачка G која не лежи на дужи FC. Тако, према аксиоми II$_4$ права EG мора сећи дуж AC у некој тачки D.

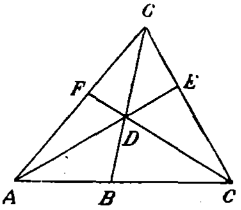
Став 4. Од ма којих трију тачака A, B, C једне праве увек постоји једна која лежи између других двеју.

Доказ.1) Нека A не лежи између A и B. Спојимо тачку D која не лежи на правој AC са тачком B и одаберимо,

---

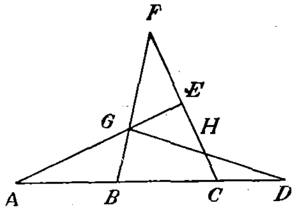
1) Овај доказ потиче од А. Валда (A. Wald).

према аксиоми II_2, на спојној правој тачку G тако да D лежи између B и G. Применом асиоме II_4 показује се да се праве AD и CG секу у некој тачки E која лежи између C и G; на исти начин се добива да се праве CD и AG секу у тачки F која лежи између A и G. Ако се сада примени аксиома II_4 на троугао AEG и на праву CF, показује се да D лежи између A и E, а применом исте аксиоме на троугао AEC и праву BG дознаје се да тачка B лежи између A и C.



Став 5. Ма које четири тачке једне праве могу се увек означити са A, B, C, D тако да тачка означена са B лежи између A и C и такође између A и D и, даље, да тачка означена са C лежи између A и D и такође између B и D.[1]

Доказ. Нека су A, B, C, D четири тачке праве g. Доказаћемо најпре ово:



1. Ако тачка B лежи на дужи AC, а тачка C на дужи BD, онда тачке B и C леже и на дужи AD. Изабраћемо, сходно аксиоми I_3 и II_2, тачку E која не лежи на правој g и тачку F тако да E лежи између C и F. Вишеструком применом аксиома II_3и II_4 показује се да се дужи AE и BF секу у некој тачки G и, даље, да права CF пресеца дуж GD у тачки H. Пошто на тај начин H лежи на дужи GD, а E, према аксиоми II_3, не лежи на дужи AG, то према аксиоми II_4 права EH пресеца дуж AD, тј. C лежи на дужи AD. Исто се тако доказује симетрично да и тачка B лежи на овој дужи.

---

[1] Овај став, означен у првом издању као аксиома, извео је Е. Х Мур (E. H. Moore), Trans. Math. Soc. 1902, као последицу аксиома везе и распореда постављених за раван. Уп. такође у вези са овим радове Веблена (Veblen), Trans. Math. Soc. 1904 и Швајцера (Schweizer), American Journ. 1909. Исцрпно истраживање независности система линеарних аксиома распореда, које утврђују распоред на правима, може се наћи код Е. Хантингтона (E. v. Huntington) „A new set of postulates for betweenness with proof of complete independance", Trans. Math. Soc. 1924, уп. такође Trans. Math. Soc. 1917.

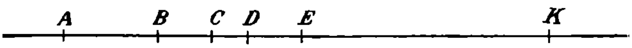
2. Ако тачка B лежи на дужи AC, а тачка C на дужи AD, онда и тачка C лежи на дужи BD, а и тачка B на дужи AD. Одаберимо неку тачку G ван праве g и једну другу тачку F тако да G лежи на дужи BF. Према аксиомама I_2 и II_3 права CF не пресеца ни дуж AB ни дуж BG, и зато, према аксиоми II_4 она такође не пресеца ни дуж AG. Али, пошто тачка C лежи на дужи AD, то права CF пресеца дуж GD у некој тачки H. Но права FH, опет према аксиомама II_3 и II_4, пресеца дуж BD. Дакле, C лежи на дужи BD. Остали део тврђења следује, према томе, из тврђења 1.

Нека су сад дате ма које четири тачке једне праве. Узмимо три од тих тачака и означимо са Q ону од њих која, према ставу 4 и аксиоми II_3, лежи између двеју других, а обе ове означимо са P и R и, најзад, последњу од четири дате тачке означимо са S. Тада опет из аксиоме II_3 и става 4, произилази да тачка S може имати један од ових пет положаја:

R лежи између P и S,
или P лежи између R и S,
или S лежи између P и R и у исто време Q између P и S,
или S лежи између P и Q,
или P лежи између Q и S.

Прве четири могућности пружају претпоставке под 2, а последњу претпоставке под 1. Тиме је став 5 доказан.

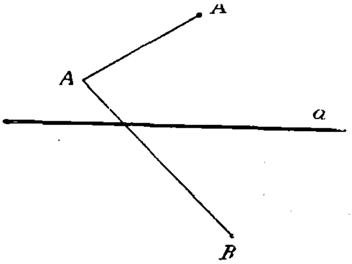
Став 6 (уопштење става 5). Ако је дат ма који коначан број тачака на правој, онда се оне могу увек означити са $A, B, C, D, E, \ldots, K$, тако да тачка означена са B лежи између A с једне стране и $C, D, E, \ldots, K$ с друге стране, даље C између A, B с једне стране и $D, E, \ldots, K$ с друге стране, затим D између A, B, C с једне стране и $E, \ldots, K$ с друге стране итд. Осим овог начина означавања постоји још само један обрнути начин означавања $K, \ldots, E, D, C, B, A$ који има исто својство.



Став 7. Између ма које две тачке једне праве постоји увек бескрајно много тачака.

Став 8. Свака права a која лежи у равни α раздваја тачке ове равни α које не леже на тој правој у две области следећег својства: свака тачка A једне области са сваком тачком B друге области одређује дуж AB у чијој унутрашњости лежи једна тачка праве a; напротив, ма које две тачке A и A' исте области одређују дуж AA' која не садржи ниједну од тачака праве a.

Дефиниција. Рећи ћемо да тачке A и A' леже *у равни α са исте стране од праве a и да тачке A и B леже у равни α са разних страна од праве a.*



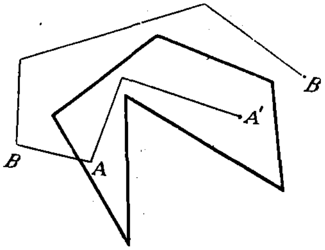
Дефиниција. Нека су A, A', O, B четири тачке на правој a тако да тачка O лежи између A и B, али не лежи између A и A'. Тада ћемо казати: тачке A, A' *леже на правој a са исте стране од тачке O, а тачке A, B леже на правој a са разних страна од тачке O.* Све тачке праве a које леже са исте стране од тачке O, називају се и *полуправом* која *полази од тачке O*; према томе, свака тачка праве дели ту праву на две полуправе.

Дефиниција. Систем дужи $AB, BC, CD, \ldots, KL$ који везује тачке A и L назива се *изломљеном линијом;* ова изломљена линија означава са кратко са $ABCD \ldots KL$. Тачке које леже у унутрашњости дужи AB, BC, $CD, \ldots, KL$, као и тачке $A, B, C, D, \ldots, K, L$ називају се све заједно *тачкама изломљене линије.* Ако се тачке $A, B, C, D, \ldots, K, L$ све налазе у једној равни, а осим тога ако се тачка L поклапа са тачком A, таква ће се изломљена линија назвати *полигоном* и означити као полигон $ABCD \ldots K$. Дужи AB, BC, $CD, \ldots, KA$ називају се *странама полигона,* а тачке A, B, C, $D, \ldots K$ *теменима полигона.* Полигон са 3, 4, ..., n темена назива се *троуглом, четвороуглом, ..., n-тоуглом.*

Дефиниција. Ако су сва темена полигона различита и ниједно теме полигона не лежи на једној његовој страни и ако ма које две стране полигона немају ниједну заједничку тачку, тај се полигон назива *простим*.

Помоћу става 8 доћи ћемо сада без знатних тешкоћа до следећих ставова:

Став 9. Сваки прости полигон који лежи у равни α раздваја оне тачке равни α које не припадају полигону на две области, *унутрашњу и спољашњу*, са овим својством: ако је A тачка унутрашње области (унутрашња тачка), а B тачка спољашње области (спољашња тачка), свака изломљена линија која лежи у равни α и везује тачке A и B има најмање једну заједничку тачку са полигоном; напротив, ако су A, A' две унутрашње тачке полигона, а B, B' две спољашње тачке, то у равни α постоје увек изломљене линије које спајају тачку A са A' и тачку B са B' и немају ниједну заједничку тачку са полигоном. При подесном избору назива за обе области постоје увек праве у равни α које целе леже у спољашњој области полигона, а напротив, не постоји ниједна права која би цела лежала у унутрашњој области полигона.



Став 10. Свака раван α раздваја остале тачке простора у две области које имају ово својство: свака тачка A једне области са сваком тачком B друге области одређује дуж AB која у себи садржи једну тачку равни α; напротив, ма које две тачке A и A' једне и исте области одређују дуж AA' која не садржи ниједну тачку равни α.

Дефиниција. Користећи се ознакама из става 10, рећи ћемо: тачке A и A' леже у простору *са исте стране од равни* α, а тачке A и B леже у простору *са различитих страна од равни* α.

Став 10 изражава најважније чињенице у односу на распоред елемената у простору; отуда су ове чињенице искључиво последица досад посматраних аксиома и није потребна ниједна нова просторна аксиома групе II.

§ 5. Група аксиома III: Аксиоме подударности

Аксиоме ове групе дефинишу појам подударности а тиме и појам кретања.

Дефиниција. Дужи стоје у извесним односима међу собом, за чија нам означавања служе речи *„подударно"* (конгруентно) или *„једнако"*.

III$_1$. *Ако су A, B две тачке на правој a и ако је, даље, A' тачка на истој или на другој правој a', онда се може увек наћи таква тачка B' праве a' на датој страни од тачке A', да дуж AB буде подударна или једнака дужи $A'B'$*, што ћемо означити на следећи начин:

$$AB \equiv A'B'.$$

Ова аксиома захтева могућност *преношења* дужи. Једнозначност таквог преношења биће доцније доказана.

Дуж је била дефинисана просто као систем двеју тачака и означена са AB или BA. Поредак ових тачака није у дефиницији узет у обзир; зато формуле

$$AB \equiv A'B', \quad AB \equiv B'A',$$

$$BA \equiv A'B', \quad BA \equiv B'A'$$

имају исто значење.

III$_2$. *Ако су дужи $A'B'$ и $A''B''$ подударне једној истој дужи AB, биће и дуж $A'B'$ подударна дужи $A''B''$, или кратко: ако су две дужи подударне трећој, подударне су и међу собом.*

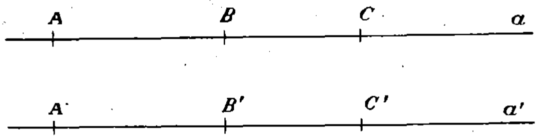
Пошто се подударност или једнакост уводи тек помоћу ових аксиома, то најпре није само по себи разумљиво да је свака дуж сама себи подударна; али ова чињеница следује из првих двеју аксиома подударности, кад пренесемо дуж AB ма на коју полуправу тако да је конструисана дуж $A'B'$ подударна дужи AB и тада применимо аксиому III$_2$ на подударности $AB \equiv A'B'$ и $AB \equiv A'B'$.

На основу тога добива се даље, применом аксиоме III_2, да подударност дужи има својство *симетрије* и *транзитивности*, тј. да важе ставови:

ако је $AB \equiv A'B'$,
онда је и $A'B' \equiv AB$,
ако је $AB \equiv A'B'$
и $A'B' \equiv A''B''$
онда је и $AB \equiv A''B''$.

На основу симетрије подударности дужи може се рећи: две дужи су *„међусобно подударне”*.

III_3. *Нека су AB и BC две дужи на правој a без заједничких тачака и нека су, даље, A'B' и B'C' две дужи на*



истој правој a или на некој другој правој a' које исто тако немају заједничких тачака; ако је тада

$$AB \equiv A'B' \text{ и } BC \equiv B'C',$$

биће увек и

$$AC \equiv A'C'.$$

Ова аксиома изражава захтев могућности сабирања дужи.

Преношење углова биће исто тако испитано као и преношење дужи. Осим могућности преношења углова свакако се мора аксиоматички захтевати још једнозначност; напротив, транзитивност и збирљивост могу се доказати.

Дефиниција. Нека је α произвољна раван, а h и k нека су две ма које различите полуправе која излазе из тачке O у равни α и припадају разним правима. Систем ове две полуправе h, k назваћемо *углом* и означићемо га са $\sphericalangle(h, k)$ или са $\sphericalangle(k, h)$.

Полуправе h, k називају се *крацима* угла, а тачка O назива се *теменом* угла.

Положени и испупчени углови искључени су овом дефиницијом.

Нека полуправа h припада правој $\bar{h}$, а полуправа k правој $\bar{k}$. Полуправе h и k узете заједно са тачком O, деле остале тачке равни у две области: за све тачке које са h леже на истој страни од $\bar{k}$ и са k на истој страни од $\bar{h}$, кажемо да леже у унутрашњости угла $\sphericalangle(h, k)$; за све друге тачке кажемо да леже у спољашности или ван овог угла.

На основи аксиома I и II лако се показује да обе области садрже тачке и да дуж која везује две тачке у унутрашњости угла, увек цела лежи у унутрашњости угла. Исто се тако лако могу доказати следеће чињенице: лежи ли тачка H на h и тачка K на k, то цела дуж HK лежи у унутрашњости. Полуправа која полази из тачке O или цела лежи у унутрашњости угла или цела лежи ван тога угла; полуправа која лежи у унутрашњости угла пресеца дуж HK. Ако је A тачка једне области, а B тачка друге области, то свака изломљена која везује A и B или пролази кроз тачку O или има са h или k најмање једну заједничку тачку; напротив, ако су A, A' тачке исте области, то увек постоји изломљена која везује тачку A са A' и нити пролази кроз тачку O нити кроз иједну од тачака полуправих h и k.

Дефиниција. Углови стоје у извесним међусобним односима за чије нам означавање такође служе речи *"подударно"* (конгруентно) или *„једнако"*.

III$_4$. *Нека је дат угао* $\sphericalangle(h, k)$ *у равни* α *и права* a' *у равни* α' *као и одређена страна равни* α' *према правој* a'. *Нека* h' *означава полуправу праве* a' *која полази из тачке* O'; *онда у равни* α' *постоји једна и само једна полуправа* k' *тако да је угао* $\sphericalangle(h, k)$ *подударан или једнак углу* $\sphericalangle(h', k')$ *и у исто време све унутрашње тачке угла* $\sphericalangle(h', k')$ *налазе се на датој страни од праве* a', *што ћемо означити на овај начин:*

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k').$$

Сваки је угао подударан самом себи, тј. увек је

$$\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k).$$

Укратко речено: сваки угао се може на једнозначан начин *пренети* у датој равни на дату полуправу са дате стране.

При дефинисању угла нисмо узимали у обзир смер обртања, као што нисмо узимали у обзир смер код дужи. Отуда и ознаке

$$\sphericalangle(h,k)\equiv\sphericalangle(h',k'),\quad \sphericalangle(h,k)\equiv\sphericalangle(k',h'),$$
$$\sphericalangle(k,h)\equiv\sphericalangle(h',k'),\quad \sphericalangle(k,h)\equiv\sphericalangle(k',h')$$

имају исти смисао.

Дефиниција. Угао са теменом у тачки B на чијем једном краку лежи тачка A, а на другом тачка C, означава се и са $\sphericalangle ABC$ или, кратко, са $\sphericalangle B$. Углови се означавају и малим грчким словима.

III$_5$. *Ако за два троугла ABC и $A'B'C'$ важе подударности*

$$AB\equiv A'B',\quad AC\equiv A'C',\quad \sphericalangle BAC\equiv\sphericalangle B'A'C',$$

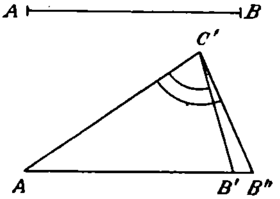
онда увек постоји и подударност

$$\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle A'B'C'.$$

Појам троугла је дефинисан на стр. 9. Променом ознака излази да под претпоставкама ове аксиоме увек постоје ове две подударности

$$\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle A'B'C' \text{ и } \sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle A'C'B'.$$

Аксиоме III$_{1-3}$ садрже само исказе о подударности дужи; зато се оне могу назвати *линеарним* аксиомама групе III. Аксиома III$_4$ садржи исказе о подударности углова. Аксиома III$_5$ везује међу собом појмове подударности дужи и углова. Аксиоме III$_4$ и III$_5$ садрже исказе о елементима равне геометрије и зато се могу назвати аксиомама *равни* групе III.



Једнозначност преношења дужи следује из једнозначности преношења углова уз помоћ аксиоме III$_5$. Претпоставимо да се дуж AB може пренети на полуправу која полази из тачке A' на два начина, наиме до тачке B' и до тачке B''. Узећемо тада тачку C' ван праве $A'B'$ и добићемо конгруенције

$$A'B' \equiv A'B'', \quad A'C' \equiv A'C', \quad \sphericalangle B'A'C' \equiv \sphericalangle B''A'C',$$

дакле, према аксиоми III_4

$$\sphericalangle A'C'B' \equiv \sphericalangle A'C'B'',$$

што противречи једнозначности преношења угла која се захтева у аксиоми III_4.

§ 6. Последице аксиома подударности

Дефиниција. Два угла која имају заједничко теме и један заједнички крак, а чији незаједнички краци образују праву називају се *упоредним угловима*. Два угла са заједничким теменом чији краци образују две праве називају се *унакрсним угловима*. Угао који је свом упоредном углу подударан назива се *правим углом*.

Доказаћемо сада редом ове ставове:

Став 11. У троуглу са две подударне стране углови који леже наспрам тих страна су подударни, или, краће: **у равнокраком троуглу углови на основици су једнаки.**

Ова став следује из аксиоме III_5 и последњег дела аксиоме III_4.

Дефиниција. За троугао ABC каже се да је подударан троуглу $A'B'C'$, ако су подударности

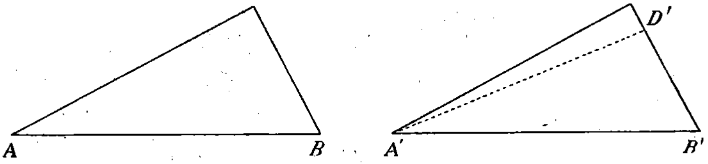
$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad BC \equiv B'C',$$

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$$

све задовољене.

Став 12 (први став о подударности троуглова). Троугао ABC је подударан троуглу $A'B'C'$, ако важе подударности

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'.$$



Доказ. Према аксиоми III_5, постоје подударности

$$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B', \quad \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C',$$

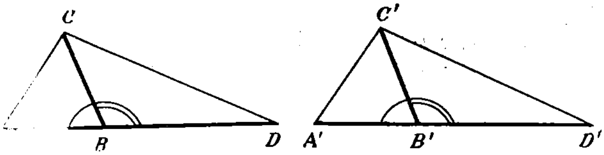
и зато остаје само још да се докаже да важи подударност $BC \equiv B'C'$. Претпоставимо супротно, наиме да BC није подударно са $B'C'$ и одредимо на $B'C'$ тачку D' тако да је $BC \equiv B'D'$. Тада се, применом аксиоме III_5 на троугле ABC и $A'B'C'$, добива да је $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'D'$. Био би, дакле, угао $\sphericalangle BAC$ конгруентан како углу $\sphericalangle B'A'D'$, тако и углу $\sphericalangle B'A'C'$; ово је немогуће, пошто се према аксиоми III_4 сваки угао може у равни пренети само на један начин на дату полуправу са дате стране у равни. — Тиме је доказано да је троугао ABC конгруентан троуглу $A'B'C'$.

Исто тако лако се доказује следећи став.

Став 13 (други став о подударности троуглова). Троугао ABC подударан је другом троуглу $A'B'C'$, ако важе подударности

$$AB \equiv A'B', \quad \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'.$$

Став 14. Ако је угао $\sphericalangle ABC$ подударан другом углу $\sphericalangle A'B'C'$ биће и његов упоредни угао $\sphericalangle CBD$ подударан упоредном углу $\sphericalangle C'B'D'$ оног другог угла.



Доказ. Изаберимо тачке A', C', D' на крацима који полазе из тачке B' тако да буде

$$AB \equiv A'B', \quad CB \equiv C'B', \quad DB \equiv D'B'.$$

Из става 12 тада следује да је троугао ABC подударан троуглу $A'B'C'$ тј. важе подударности

$$AC \equiv A'C' \text{ и } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'.$$

А осим тога, како је према аксиоми III_3 дуж AD подударна дужи $A'D'$, то из истог става 12 следује да је троугао CAD подударан троуглу $C'A'D'$, тј. важе подударности:

$$CD \equiv C'D' \text{ и } \sphericalangle ADC \equiv A'D'C',$$

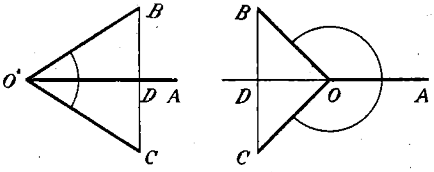
а одатле следује, посматрајући троуглове BCD и $B'C'D'$, према аксиоми III_5;

$$\sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle C'B'D'.$$

Непосредна последица става 14 јесте став о подударности унакрсних углова.

Даље, из истог става следује егзистенција правог угла (види стр. 15).

Ако се, наиме, пренесе произвољан угао на полуправу OA од тачке O на обе стране и на слободним крацима од тачке O узму конгруентне дужи $OB \equiv OC$, то ће дуж BC сећи праву OA у некој тачки D. Поклопи ли се при томе тачка D са тачком O, онда су углови $\sphericalangle BOA$ и $\sphericalangle COA$ једнаки упоредним угловима и зато прави. Лежи ли пак D на полуправој DA, биће према конструкцији, $\sphericalangle DOB \equiv \sphericalangle DOC$, а у случају да D лежи на другој полуправој, то из става 14 следује поменута подударност. Према аксиоми III_2 свака је дуж подударна самој себи: $OD \equiv OD$. Према томе, на основу аксиоме III_5 следује да је $\sphericalangle ODB \equiv \sphericalangle ODC$.



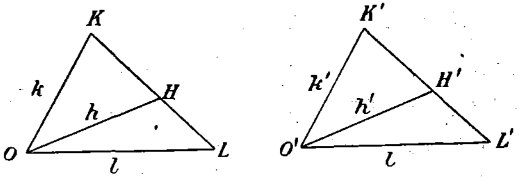
Став 15. Нека су h, k, l с једне стране и h', k', l' с друге стране по три полуправе које полазе из исте тачке O одн. O' и леже у равни α одн. α'. Нека при томе h, k, и h', k' леже или на истој страни или на разним странама од l одн. l'. Ако тада постоје подударности

$$\sphericalangle (h, l) \equiv \sphericalangle (h', l') \quad \text{и} \quad \sphericalangle (k, l) \equiv \sphericalangle (k', l'),$$

онда је увек и

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k').$$

Доказ ће бити изведен за случај кад h и k леже на истој страни од l, а према претпоставци такође h' и k' леже на истој страни од l'. Помоћу става 14 други се случај своди на први случај. – Из дефиниције на стр. 13 следује да или h лежи у углу $\sphericalangle (k, l)$ или k у углу $\sphericalangle (h, l)$. Узмимо означавања тако да h лежи у углу $\sphericalangle (k, l)$. Одаберимо на крацима k, k' l, l' тачке



K, K', L, L', тако да буде $OK \equiv O'K'$ и $OL \equiv O'L'$. Према једном ставу наведеном на стр. 13, полуправа h пресеца дуж KL у тачки H. Узмимо тачку H' на полуправој h' тако да буде $OH \equiv O'H'$. У троуглима OLH и $O'L'H'$, као и у троуглима OLK и $O'L'K'$, на основу става 12, добивају се подударности

$$\sphericalangle OLH \equiv \sphericalangle O'L'H', \quad \sphericalangle OLK \equiv O'L'K',$$

$$LH \equiv L'H', \quad LK \equiv L'K'$$

и најзад

$$\sphericalangle OKL \equiv \sphericalangle O'K'L'.$$

Како се, према аксиоми III_4, сваки угао може само на један начин пренети на дату полуправу са дате стране у некој равни и како H' и K', према претпоставци, леже на истој страни од l', то на основу двеју подударности поменутих у почетку, тачка H' лежи на правој $L'K'$. Отуда се, на основу двеју поменутих подударности дужи и на основу аксиоме III_3 лако показује да ја $HK \equiv H'K'$. Из подударности $OK \equiv O'K'$ и $HK \equiv H'K'$ и $\sphericalangle OKL \equiv \sphericalangle O'K'L'$ може се помоћу аксиоме III_5 извести тачност нашег тврђења.

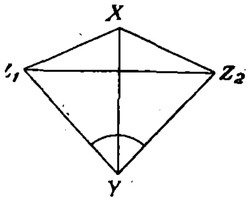
На сличан начин долазимо до ове чињенице:

Став 16. Нека је угао $\sphericalangle(h, k)$ који је у равни α подударан углу $\sphericalangle(h', k')$ који је у равни α' и нека је l полуправа у равни α која полази из темена угла $\sphericalangle(h, k)$ и простире се у унутрашњости овог угла: тада у равни α' постоји увек једна и само једна полуправа l' која полази из темена угла $\sphericalangle(h', k')$ и простире се у унутрашњости овог угла тако да је

$$\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l') \quad \text{и} \quad \sphericalangle(k, l) \equiv \sphericalangle(k', l').$$

Да бисмо добили трећи став подударности и особину симетрије подударности углова, извешћемо најпре из става 15 још овај став:

Став 17. Ако две тачке Z_1 и Z_2 леже са разних страна праве XY и ако при томе важе подударности $XZ_1 \equiv XZ_2$ и $YZ_1 \equiv YZ_3$, биће и угао $\sphericalangle XYZ_1$ подударан углу $\sphericalangle XYZ_2$.

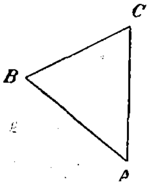


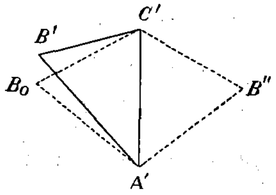
Доказ. Према ставу 11 је $\sphericalangle XZ_1 Z_2 \equiv \sphericalangle XZ_2 Z_1$ и $\sphericalangle YZ_1 Z_2 \equiv \sphericalangle YZ_2 Z_1$. Зато из става 15 следује подударност: $\sphericalangle XZ_1 Y \equiv \sphericalangle XZ_2 Y$. Нарочити случајеви кад X одн. Y леже на $Z_1 Z_2$ решавају се још простије. Из последње подударности и претпостављених подударности $XZ_1 \equiv XZ_2$ и $YZ_1 \equiv YZ_2$ следује према аксиоми III_5 тврђење:

$$\sphericalangle XYZ_1 \equiv \sphericalangle XYZ_2 .$$

Став 18 (трећи став о подударности троуглова). Ако су у два троугла ABC и $A'B'C'$ одговарајуће стране подударне, онда су троуглови подударни.

Доказ. Како је на стр. 12 доказана особина симетрије за подударност дужи, довољно је доказати да је троугао ABC подударан троуглу $A'B'C'$. Пренесимо угао $\sphericalangle BAC$ на полуправу $A'C'$ са обе стране код тачке A'. На краку који са тачком B' лежи са исте стране од $A'C'$ одаберимо тачку B_0 тако да је $A'B_0 \equiv AB$; и одаберимо на другом слободном краку тачку B'' тако да је $A'B'' \equiv AB$. Према ставу 12, биће $BC \equiv B_0C'$ и исто тако $BC \equiv B''C'$. Из досад поменутих подударности заједно са подударностима из претпоставке према аксиоми III_2 добивамо подударности





$$A'B'' \equiv A'B_0 , \qquad B''C' \equiv B_0C'$$

и

$$A'B'' \equiv A'B', \qquad B''C' \equiv B'C'.$$

Претпоставке става 17, дакле, важе како за оба троугла $A'B''C'$ и $A'B_0C'$ тако исто и за оба троугла $A'B''C'$ и $A'B'C'$, тј. угао $\sphericalangle B''A'C'$ подударан је како углу $\sphericalangle B_0A'C'$, тако и углу $\sphericalangle B'A'C'$. Но како се, према аксиоми III_4, сваки угао може само на један начин пренети на дату полуправу са дате стране у некој равни, то се полуправа $A'B_0$ мора поклопити са полуправом $A'B'$, тј. угао конгруентан углу $\sphericalangle BAC$ који је пренет са одређене стране на $A'C'$ јесте угао $\sphericalangle B'A'C'$. Из подударности $\sphericalangle BAC \equiv B'A'C'$ и из претпостављених подударности дужи следује, према ставу 12, тврђење наше теореме.

Став 19. Ако су два угла $\sphericalangle(h', k')$ и $\sphericalangle(h'', k'')$ подударна трећем углу $\sphericalangle(h, k)$, онда је и угао $\sphericalangle(h', k')$ подударан углу $\sphericalangle(h'', k'')$[1].

Овај став који одговара аксиоми III_2, може се овако формулисати: ако су два угла подударна трећем, они су међу собом подударни.

Доказ. Нека су тачке O', O'' и O темена три дата угла. Одаберимо на по једном краку сваког од ових углова тачке A', A'' и A тако да буде $O'A' \equiv OA$ и $O'A'' \equiv OA$. Исто тако одаберимо на другим крацима тачке B', B'' и B тако да буде $O'B' \equiv OB$ и $O''B'' \equiv OB$. Ове подударности заједно са обе претпоставке

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h, k) \quad \text{и} \quad \sphericalangle(h'', k'') \equiv (h, k),$$

према ставу 12, дају подударности

$$A'B' \equiv AB \quad \text{и} \quad A''B'' \equiv AB.$$

Према аксиоми III_2, дакле, све три одговарајуће стране троуглова $A'B'O'$ и $A''B''O''$ подударне су, а тиме, према ставу 18, важи

$$\sphericalangle(h', k') \equiv \sphericalangle(h'', k'').$$

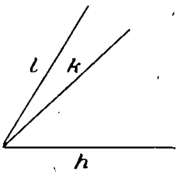
Из става 19, исто као за дужи из аксиоме III_2, следује особина симетрије подударности углова, тј.: ако је $\sphericalangle\alpha \equiv \sphericalangle\beta$, онда су углови $\sphericalangle\alpha$ и $\sphericalangle\beta$ међу собом подударни. Нарочито, ставови 12—14 могу се сад изразити у симетричној форми.

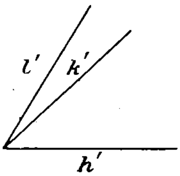
Сад можемо засновати упоређивање величина углова.

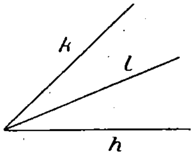
---

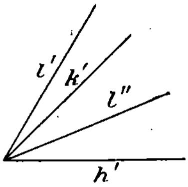
[1] Овај доказ става 19, који је у првом издању узет за аксиому, потиче од Розентала (A. Rosenthal), уп. Math. Ann. књ. *71*. А. Розенталу припада и упрошћена формулација аксиоме I_4, уп. Math. Ann. књ. *69*

Став 20. Нека су дата ма која два угла $\sphericalangle(h, k)$ и $\sphericalangle(h', l')$. Ако се тада при преношењу угла $\sphericalangle(h, k)$ на полуправу h' са стране на којој је полуправа l', добије унутрашња полуправа k', онда се преношењем угла $\sphericalangle(h', l')$ на полуправу h са стране на којој је k добива спољашња полуправа l и обрнуто.









Доказ. Претпоставимо да l лежи у унутрашњости угла $\sphericalangle(h, k)$. Пошто је $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k')$, то, према ставу 16, унутрашњој полуправој l одговара полуправа l'' у унутрашњости угла $\sphericalangle(h', k')$ тако да важи подударност $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l'')$. Према претпоставци и због симетрије конгруенције углова важи $\sphericalangle(h, l) \equiv \equiv \sphericalangle(h', l')$, при чему су l' и l'' нужно различити, а то противречи једнозначности преношења угла по аксиоми III_4. Обрнути став доказује се слично.

Дефиниција. Ако при преношењу угла $\sphericalangle(h, k)$ описаном у ставу 20, полуправа k' падне у унутрашњост угла $\sphericalangle(h', l')$, онда кажемо да је угао $\sphericalangle(h, k)$ *мањи од угла* $\sphericalangle(h', l')$, а пишемо: $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', l')$; ако ли се пак при томе добије спољашња полуправа, онда ћемо рећи: угао $\sphericalangle(h, k)$ је *већи од угла* $\sphericalangle(h', l')$, а писати: $\sphericalangle(h, k) > \sphericalangle(h' l')$.

Видимо да за два угла α и β увек постоји једна и само једна од ове три могућности:

$$\alpha < \beta \text{ и } \beta > \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \alpha > \beta \text{ и } \beta < \alpha.$$

Упоређивање величина углова је *транзитивно*, тј. из сваке од трију претпоставки

1. $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$; *2.* $\alpha > \beta$, $\beta \equiv \gamma$; *3.* $\alpha \equiv \beta$, $\beta > \gamma$

следује

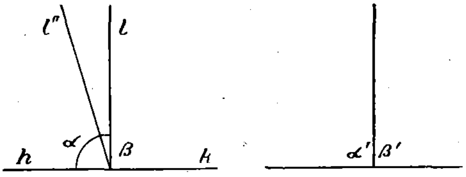
$$\alpha > \gamma.$$

Упоређивање величина дужи са аналогним својствима непосредно следује из аксиома II и III_1 и једнозначности преношења дужи, доказане на стр. 14.

На основу упоређивања величина углова постиже се доказ наредног простог става који је *Еуклид* — по моме мишљењу без права — ставио међу аксиоме.

Став 21. *Сви прави углови су подударни међу собом.*[1]

Доказ. Прав угао је, према дефиницији, такав угао који је подударан свом упоредном углу. Нека су углови α или $\sphericalangle(h, l)$ и β или $\sphericalangle(k, l)$ упоредни углови, исто тако и углови α' и β', и нека је $\alpha \equiv \beta$ и $\alpha' \equiv \beta'$. Претпоставимо, супротно тврђењу става 21, да угао α' није подударан углу α. Тада се, преношењем угла α' на полуправу h са стране на којој лежи l, добива полуправа l'', различита од l. На тај начин l'' лежи или у унутрашњости угла α или у унутрашњости угла β. У случају да l'' лежи у унутрашњости угла α, важило би:



$$\sphericalangle(h, l'') < \alpha, \quad \alpha \equiv \beta, \quad \beta < \sphericalangle(k, l'').$$

Одавде следује на основу транзитивности упоређивања величина $\sphericalangle(h, l'') < \sphericalangle(k, l'')$. С друге стране према претпоставци важи и став 14

$$\sphericalangle(h, l'') \equiv \alpha', \quad \alpha' \equiv \beta', \quad \beta' \equiv \sphericalangle(k, l''),$$

а из тога следује

$$\sphericalangle(h, l'') \equiv \sphericalangle(k, l''),$$

што противречи односу $\sphericalangle(h, l'') < \sphericalangle(k, l'')$. У случају да l'' лежи у унутрашњости угла β, долази се до потпуно аналогне противречности. Тиме је став 21 доказан.

Дефиниција. Угао који је већи од свог упоредног угла одн. већи од правог угла, назива се *тупим* углом; угао који је мањи од свог упоредног угла, одн. мањи од правог угла, назива се *оштрим* углом.

---

[1] Т. Вален (Th. Vahlen) у својој књизи „Abstrakte Geometrie", Leipzig 1905, стр. 242 примећује да је још Лежандр доказао овај став. Али је Лежандр претпоставио да углови образују непрекидни систем величина.

Основни став, који је још код Еуклида играо важну улогу, из кога следује низ важних чињеница, јесте став о спољашњем углу.

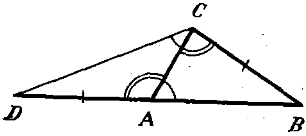
Дефиниција. Углови $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ и $\sphericalangle CAB$ који припадају троуглу ABC називају се угловима тога троугла; углови који су упоредни овим угловима називају се *спољашњим угловима* троугла.

Став 22 (став о спољашњем углу). Спољашњи угао троугла већи је од сваког од оба њему несуседна угла у троуглу.

Доказ. Нека је угао $\sphericalangle CAD$ спољашњи угао троугла ABC. Нека се тачка D одабере тако да је $AD \equiv CB$.

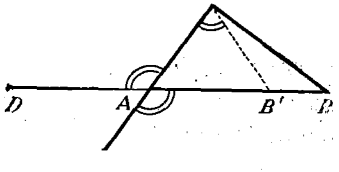
Докажимо најпре да је $\sphericalangle CAD \equiv\!|\!\equiv \sphericalangle ACB$. Ако би било, наиме, $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle ACB$, то би, услед подударности $AC \equiv CA$ и према аксиоми III_5, важило: $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle CAB$. Из ставова *14* и *19* следовало би сада да је угао $\sphericalangle ACD$ подударан углу који је упоредан углу $\sphericalangle ACB$. Тада би, према аксиоми III_4, тачка D лежала на правој CB, што противречи аксиоми I_2. Важи, дакле,

$$\sphericalangle CAD \equiv\!|\!\equiv \sphericalangle ACB.$$



Но такође не може бити $\sphericalangle CAD < \sphericalangle ACB$ јер тада бисмо, преношењем спољашњег угла $\sphericalangle CAD$ у тачку C на CA са оне стране на којој лежи B, добили крак који се простире у унутрашњост угла $\sphericalangle ACB$; тај крак би пресецао дуж AB у некој тачки B'. Тада би у троуглу $AB'C$ спољашњи угао $\sphericalangle CAD$ био подударан углу $\sphericalangle ACB'$. А то, као што је горе доказано, није могуће. Дакле, остаје још само могућност: $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ACB$.

Исто тако следује да је угао који је унакрсан углу $\sphericalangle CAD$ већи од угла $\sphericalangle ABC$, а из подударности унакрсних углова и транзитивности упоређивања величина углова сада следује $\sphericalangle CAD > \sphericalangle ABC$.

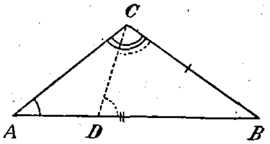


Тиме је тврђење потпуно доказано.

Важне последице из става о спољашњем углу јесу наредни ставови.

Став 23. У сваком троуглу према већој страни лежи већи угао.

Доказ. Пренесимо мању од двеју посматраних страна троугла од заједничког темена на већу страну. Тврђење тада следује услед транзитивности упоређивања величина углова из ставова *11* и *12*.



Став 24. Троугао са два једнака угла је равнокраки.

Ова инверзија става 11 јесте непосредна последица става *23*.

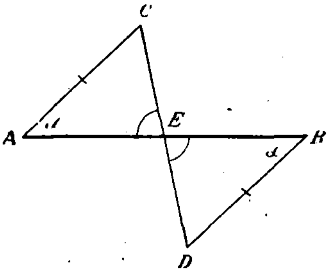
Из става *22* добива се даље на прост начин допуна другог става подударности троуглова:

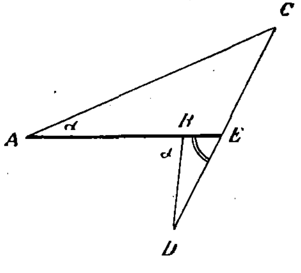
Став 25. Два троугла ABC и $A'B'C'$ подударна су један другом ако постоје подударности

$$AB \equiv A'B', \ \sphericalangle A \equiv \sphericalangle A' \text{ и } \sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'.$$

Став 26. Свака се дуж може преполовити.

Доказ. Пренесимо на дату дуж AB код њених крајњих тачака са разних страна исти угао α па на слободне краке пренесимо једнаке дужи: $AC \equiv BD$. Пошто тачке C и D леже на разним странама од AB, то дуж CD пресеца праву AB у некој тачки E.





Претпоставка да се тачка E поклапа са тачком A или B, непосредно противречи ставу 22. Узмемо ли да B лежи између A и E, онда би, према ставу 22, било:

$$\sphericalangle ABD > \sphericalangle BED > \sphericalangle BAC,$$

што противречи конструкцији. Иста се противречност добива из претпоставке да тачка A лежи између B и E.

Дакле, према ставу *4*, тачка E лежи на дужи AB. Према томе су углови $\sphericalangle AEC$ и $\sphericalangle BED$, као унакрсни углови, подударни. Зато се став *25* може применити на троугле AEC и BED, а тиме се добива

$$AE \equiv EB.$$

Као непосредна последица из ставова *11* и *26* следује чињеница: сваки се угао може преполовити.

Појам подударности може се сада проширити и на произвољне фигуре.

Дефиниција. Ако су тачке $A, B, C, D, \ldots, K, L$ на правој a и тачке $A', B', C', D', \ldots, K', L'$ на правој a' таква два низа тачака да су све одговарајуће дужи AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC и $B'C', \ldots$, KL и $K'L'$ по две и две међу собом подударне, онда се за оба низа тачака каже да су међусобно подударни; тачке A и A', B и $B', \ldots$, L и L' називају се одговарајућим тачкама *подударних низова тачака.*

Став 27. Ако је од двају подударних низова тачака $A, B, \ldots, K, L$ и $A', B', \ldots, K', L'$ први тако уређен да тачка B лежи између A с једне стране и $C, D, \ldots, K, L$ с друге стране, тачка C између A, B с једне стране и $D, \ldots, K, L$ с друге стране, итд. онда су тачке $A', B', \ldots, K', L'$ на исти начин уређене тј. B' лежи између A' с једне стране и $C', D', \ldots, K', L'$ с друге стране, C' између A', B' с једне и $D', \ldots, K', L'$ с друге стране итд.

Дефиниција. Ма који коначни број тачака назива се *фигуром*; ако све тачке те фигуре леже у једној равни, онда се она назива *равном фигуром.*

Две фигуре се називају *подударним* ако се њихове тачке могу по две и две доделити једна другој тако да су на овај начин једна другој додељене дужи и један другом додељени углови — подударни.

Подударне фигуре, као што се види из ставова *14* и *27*, имају ова својства: ако три тачке неке фигуре леже на једној правој, онда ће у свакој подударној фигури одговарајуће тачке лежати исто тако на једној правој. Распоред тачака у одговарајућим равнима у односу на одговарајуће праве исти је у подударним фигурама; то исто важи и за поредак одговарајућих тачака на одговарајућим правима.

Најопштији став о подударности за раван и за простор изражава се на овај начин:

Став 28. Ако су $(A, B, C, \ldots, L)$ и $(A', B', C', \ldots, L')$ две подударне равне фигуре и ако P означава тачку у равни прве фигуре, онда се у равни друге фигуре може увек наћи тачка P' тако да су $(A, B, C, \ldots, L, P)$ и $(A', B', C', \ldots, L', P')$ такође подударне фигуре. Ако фигура $(A, B, C, \ldots, L)$ садржи најмање три тачке које не леже на једној правој, конструкција тачке P' је само на један начин могућа.

Став 29. Ако су $(A, B, C, \ldots, L)$ и $(A', B', C', \ldots, L')$ подударне фигуре и ако P означава произвољну тачку може се увек наћи тачка P' тако да су и фигуре $(A, B, C, \ldots, L, P)$ и $(A', B', C', \ldots, L', P')$ подударне. Садржи ли фигура $(A, B, C, \ldots, L)$ најмање четири тачке које не леже у једној равни, онда је конструкција тачке P могућа само на један начин.

Став 29 изражава важан резултат да су све просторне чињенице подударности, а самим тим и својства кретања у простору — урачунавши ту и групе аксиома I и II — последица из пет горе постављених линеарних аксиома подударности и аксиома подударности у равни.

§ 7. Група аксиома IV: Аксиома паралелних

Нека је α произвољна раван, a произвољна права у равни α и A тачка у тој равни α која лежи ван праве a. Повуцимо у равни α праву c која иде кроз тачку A и пресеца праву a, а затим у равни α праву b кроз A тако да права c пресеца праве a, b под једнаким сагласним угловима. Тада се из става о спољашњем углу (став 22) лако закључује да праве a и b немају ниједну заједничку тачку, тј. у равни α кроз тачку A ван праве a може се увек повући права која не пресеца праву a.

Аксиома паралелних гласи:

IV (Еуклидова аксиома). *Нека је a произвољна права и A тачка ван a: тада постоји у равни, одређеној пра-*

вом a и тачком A, највише једна права која пролази кроз A и не пресеца a.

Дефиниција. Из претходног и на основу аксиоме паралелних дознајемо, да у равни, одређеној са a и A, постоји једна и само једна права која пролази кроз тачку A и не пресеца праву a; ту *праву* називамо *паралелном према a кроз A*.

Аксиома паралелних IV истог је значења са овим захтевом:

Ако две праве a, b које леже у једној равни, не секу трећу праву c исте равни, оне се онда не секу ни међу собом.

Уствари, ако би праве a, b имале заједничку тачку A, то би кроз тачку A у истој равни биле могуће две праве a, b, које не би секле праву c; ова околност противречи аксиоми паралелних IV. Исто се тако лако добива и обрнуто аксиома паралелних IV из поменутог захтева.

Аксиома паралелних IV јесте *аксиома равни.*

Увођење аксиоме паралелних знатно упрошћава основе и олакшава изграђивање геометрије.

Ако, наиме, додамо аксиомама подударности аксиому паралелних, онда лако долазимо до познатих чињеница:

Став 30. Ако су две паралелне праве пресечене трећом правом, онда су сагласни углови и наизменични углови подударни, и обрнуто: из подударности сагласних или наизменичних углова следује да су праве паралелне.

Став 31. Углови троугла чине заједно два права угла.[1]

Дефиниција. Ако је M нека произвољна тачка у равни α, онда се укупност свих оних тачака A у равни α, за које су дужи MA једна другој конгруентне, назива *кругом;* тачка M се назива *средиште круга.*

На основу ове дефиниције лако се изводе помоћу група аксиома III—IV познати ставови о кругу, нарочито могућност конструкције круга ма кроз које три тачке које не леже на једној правој, као и став о подударности свих периферисиких углова над истом тетивом и став о угловима у тетивном четвороуглу.

---

[1] У односу на питање уколико, обрнуто, овај став може заменити сиаиому паралелних, упоредити примедбе на крају друге главе § 12.

§ 8. Група аксиома V: Аксиоме непрекидности

V_1 (аксиома мерења или Архимедова аксиома). *Ако су AB и CD ма које две дужи, онда постоји неки такав број n, да кад се дуж CD пренесе n пута од A једно за другим по полуправој која пролази кроз тачку B прелази се преко тачке B.*

V_2 (аксиома линеарне потпуности). *Систем тачака неке праве са својим релацијама распореда и конгруенције не може се тако проширити, да остану очуване релације које постоје између претходних елемената као и основне особине линеарног распореда и конгруенције које проистичу из аксиома I-III, и аксиоме* V_1.

Под основним особинама се разумеју оне у аксиомама II_{1-3} и у ставу 5 формулисане особине распореда као и оне у аксиомама III_{1-3} формулисане особине подударности поред једнозначности преношења дужи.[1] Што се тиче оних особина система тачака нека праве које захтевају аксиома I_3 и став 3 (доказан уз помоћ аксиоме II_4), остаје прва, да на правој има бар две тачке, при сваком проширењу сама по себи очувана, а друга, да за две тачке праве увек постоји тачка која лежи између њих, последица је немогућности проширења система тачака неке праве.

Да аксиома потпуности буде испуњена, битно је условљено тиме што се у њој, међу аксиомама чије се одржање захтева, садржи Архимедова аксиома. Уствари може се показати: неком систему тачака на правој, који задовољава малочас набројане аксиоме и ставове распореда и конгруенције, може се увек додати још тачака на тај начин, да у овако проширеном систему поменуте аксиоме такође важе; то значи, аксиома потпуности, у којој би се захтевало само одржање поменутих аксиома и ставова, али не и Архимедова или њој одговарајућа аксиома, укључивала би противречност.

Обе аксиоме непрекидности су *линеарне* аксиоме.

Углавном из линеарне аксиоме потпуности добивају се ове општије чињенице:

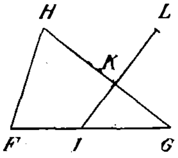
---

[1] Тачно издвајање услова које овде треба захтевати за линеарни распоред и конгруенцију извршио је Ф. Бахман (F. Bachmann) у вези са формулацијом аксиоме V_2 у седмом издању.

Став 32 (став о потпуности).[1] Елементи геометрије (тј. тачке, праве и равни) образују систем, који, кад се задрже аксиоме везе, распореда и конгруенције и Архимедова аксиома, а поготову кад се задрже све аксиоме, не допушта више никакво проширење помоћу тачака, правих и равни.[2]

Доказ. Елементе који постоје пре проширења назваћемо старим елементима, а оне елементе који се при проширењу додају назваћемо новим елементима. Претпоставка нових елемената непосредно води претпоставци нове тачке N.

Према аксиоми I_8 постоје четири старе тачке A, B, C, D које нису у једној равни. Ознаке се могу тако изабрати да тачке A, B, N не леже на једној правој. Обе равни ABN и ACD, различите једна од друге, имају, према аксиоми I_7, осим заједничке тачке A још и заједничку тачку E. Тачка E не лежи на правој AB, јер би иначе тачка B лежала у равни ACD. У случају да је E нова тачка, онда у старој равни ACD лежи нова тачка E; у случају пак да је E стара тачка, нова тачка N лежи у старој равни, наиме у равни ABE. У сваком случају, дакле, нова тачка лежи у старој равни.



У старој равни постоји стари троугао FGH, а на дужи FG стара тачка I. Ако спојимо нову тачку L са тачком I, тада ће се, према аксиоми II_4, праве IL и FH или праве IL и GH сећи у тачки K, ако нова тачка L не лежи на правој IH. У случају да је K нова тачка, то нова тачка K лежи на старој правој FH или GH; у случају пак да је K стара тачка, онда нова тачка L лежи на старој правој IK. Отуда све три претпоставке противрече аксиоми линеарне потпуности. Према томе, треба одбацити претпоставку нове тачке у старој равни и тиме уопште претпоставку нових елемената.

Став о потпуности може се још оштрије формулисати; задржавање неких у њему поменутих аксиома не мора се безусловно захтевати. Али битно за његово важење јесте да је међу аксиомама чије се одржање у њему захтева садржана

---

[1] Примедба да је линеарна аксиома потпуности довољна потиче од П. Бернајса (P. Bernays).

[2] Овај последњи исказ је био у ранијим издањима постављен као аксиома

аксиома I_7. Уствари, може се ово показати: систему елемената који задовољавају аксиоме I-V, може се увек додати још тачака, правих и равни тако да у проширеном систему важе исте аксиоме, изузимајући аксиому I_7; то значи, став потпуности у коме не би била садржана аксиома I_7 или њој еквивалентна аксиома, укључивао би у себе противречност,

Аксиома потпуности није последица Архимедове аксиоме. Уствари, само Архимедова аксиома уз помоћ аксиома I-IV није довољна да докаже да је наша геометрија идентична са обичном аналитичком Декартовом (R. Descartes) геометријом (уп. § 9 и § 12). Напротив, додавањем аксиоме потпуности — мада ова аксиома не садржи никакав исказ о појму конвергенције —, успева нам да докажемо егзистенцију границе које одговара Дедекиндовом (Dedekind) пресеку и Болцанов (B. Bolzano) став о постојању тачака згушњавања, чиме се тада наша геометрија показује као идентична Декартовој геометрији.

Помоћу претходног разматрања захтев непрекидности је разложен на два битно различита дела, наиме на Архимедову аксиому која има улогу да припреми захтев непрекидности, и на аксиому потпуности која је *завршни члан целог система аксиома.*[1]

У следећим испитивањима углавном ћемо се ослонити само на Архимедову аксиому и уопште нећемо претпостављати аксиому потпуности.

---

[1] Нека се упореде такође примедбе на крају § 17, као и моје предавање о појму броја, Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900. — При испитивању става о једнакости углова на основици равнокраког троугла доћи ћемо до две даље аксиоме непрекидности; уп. додатак II ове књиге, као и моју расправу „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck“, Proceedings of the London Mathematical Society књ, XXXV, 1903.

Као истраживања о аксиомама непрекидности која се на ово надовезују, поменућемо напр.: R. Baldus „Zur Axiomatik der Geometrie“ I-III, I у Math. Ann. 100. 321—333 (1928); II у Atti d. Congr. int. d. Mat. Bologna 1928, IV (1931); III у Sitzber. d. Heidelberger Akad. Wiss, 1930, 5та распр. A. Schmidt „Die Stetigkeit in der absoluten Geometrie“ Ibid. 1931, 5та распр. P. Bernays „Betrachtungen über das Vollständigkeitsaxiom und verwandte Axiome“ Math. Zeitschr. 63, 219—292 (1955).

Друга глава

Непротивречност и узајамна независност аксиома

§ 9. Непротивречност аксиома

Аксиоме оних пет група, постављених у првом одељку не противрече једна другој, тј. из њих се помоћу логичких закључака не може извести нека чињеница која би противречила једној од постављених аксиома. Да бисмо се уверили у то, образоваћемо од реалних бројева систем ствари у коме ће бити задовољене све аксиоме тих пет група.

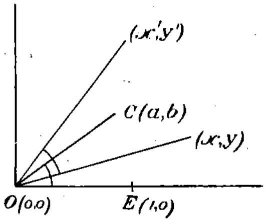
Посматрајмо најпре подручје Ω свих оних алгебарских бројева који се добивају ако се пође од броја 1 и коначан број пута примене четири рачунске операције: сабирање, одузимање, множење, дељење и пета операција $|\sqrt{1+\omega^2}|$, где ω треба увек да означава број који је раније постао помоћу поменутих пет операција.

Пар бројева (x, y) подручја Ω сматраћемо као тачку, а размере $(u:v:w)$ ма која три броја подручја Ω, у случају да u и v нису оба нула, као праву; даље, нека постојање једначине

$$ux+vy+w=0$$

изражава да тачка (x, y) лежи на правој $(u:v:w)$; тада су, што се лако види, аксиоме $I_{1\text{-}3}$ и IV задовољене. Бројеви подручја Ω су сви реални; узимајући у обзир да се ти бројеви могу распоредити према својим величинама, можемо лако установити такве поставке за наше тачке и праве да важе и све аксиоме II распореда. Уствари, ако су (x_1, y_1),

(x_2, y_2), $(x_3, y_3), \dots$ ма које тачке на правој, то ће ово бити њихоа поредак на правој, ако бројави $x_1, x_2, x_3, \dots$ или $y_1, y_2, y_3, \dots$ у овом поретку или стално опадају или стално расту; даље, да би захтев аксиоме II_4 био испуњен, потребно је само установити да све тачке (x, y), за које је $ux+vy+w$ мање или веће од 0, леже на једној одн. на другој страни праве $(u:v:w)$. Лако се можемо уверити да се ова поставка слаже са претходном поставком која одређује поредак тачака на правој.



Преношење дужи и углова изводи се према познатим методама аналитичке геометрије. Трансформација облика

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b$$

даје паралелно померање дужи и углова, а трансформација облика

$$x' = x$$
$$y' = -y$$

даје огледање на правој $y=0$. Даље, ако се тачка $(0,0)$ означи са 0, тачка $(1,0)$ са E и произвољна тачка (a, b) са C, тада из произвољне тачке (x, y) тачка (x', y') произилази обртањем за угао $\sphericalangle COE$, ако је O стална тачка обртања, при чему треба ставити

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}y.$$

Пошто број

$$\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

такође припада подручју Ω, онда при нашим поставкама важе и аксиоме конгруенције $III_{1\text{-}4}$ и очигледно је задовољена како аксиома подударности троуглова III_5, тако и Архимедова аксиома V_1. Аксиома потпуности V_2 није задовољена.

Свака противречност у последицама из линеарних аксиома и аксиома равни I-IV, V_1 морала би се самим тим појавити и у аритметици подручја Ω.[1]

Одаберемо ли у горњем излагању уместо подручја Ω подручје свих реалних бројева, добићемо обичну равну Декартову геометрију. Да је у овој последњој задовољена, осим аксиома $I_{1\text{-}3}$, II, III и V_1, и аксиома потпуности, дознаје се на овај начин:

У Декартовој геометрији се само на основи дефиниција распореда и подударности дужи може закључити: свака дуж се може поделити на произвољан број n подударних делова, и ако је дуж AB мања од дужи AC, онда је и n-ти део од AB мањи од n-тог дела од AC.

Претпоставимо сада да постоји права g, на коју се, насупрот аксиоми потпуности, може додати још тачака датој геометрији, а да се при томе на правој g не наруши важење аксиома $II_{1\text{-}3}$, $III_{1\text{-}3}$, V_1, става 5 или једнозначности преношења дужи (стр. 28). Нека једна од датих тачака буде N. Тачка N дели праву g у две полуправе, од којих свака, према Архимедовој аксиоми, садржи и такве тачке које постоје пре проширења; ове последње ћемо назвати старим тачкама. Дакле. тачка N раздељује старе тачке праве g на две полуправе. Узмемо ли праву g претстављену у параметарском облику

$$x = mt + n,$$

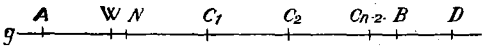
$$y = pt + q,$$

у којој параметар t још пре проширења помоћу N узима све реалне вредности, онда ће подела изведена тачком N пружити Дедекиндов пресек ових вредности. Као што је познато, за такав пресек важи: или прва класа одређена помоћу њега има последњи елеменат, или друга класа има први елеменат. Нека на правој g овом елементу одговара тачка A. Тада између A и N не лежи ниједна стара тачка.

---

[1] У односу на питање непротивречности аритметичких аксиома нека се упореди моје предавање о појму броја: Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900, као и моје предавање „Mathematische Probleme“, одржано на интернационалном конгресу математичара 1900, нарочито проблем бр. 2 (Göttinger Nachr. 1900).

Напротив, постоји таква стара тачка B, да N лежи између A и B. Даље, према Архимедовој аксиоми, постоји мноштво тачака, напр. $n—1$ различитих тачака $N, C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}, D$, тако да су n дужи $AN, NC_1, C_1C_2, \ldots, C_{n-2}D$ једна другој подударне и да тачка B лежи између A и D. Поделимо тада дуж AB на n подударних делова. Све деоне тачке су старе тачке; нека је W она од тих тачака која је најближа тачки A. Из напочетку овог доказа наведених линеарних захтева о распореду и конгруенцији проистиче да је дуж AW мања од AN, јер је AB мања од AD. Дакле, стара тачка W лежи између A и N. Према томе, претпоставка да се на правој g може додати тачка N, не нарушавајући при томе важење линеарних аксиома, довела је до противречности.



Дакле, у равној Декартовој геометрији важе све линеарне аксиоме и аксиоме равни I—V.

Аналогна разматрања у просторној геометрији не претстављају никакву тешкоћу.

Свака противречност у последицама из аксиома I—V морала би, према томе, да се појави и у аритметици система реалних бројева.

Као што се види, постоји бесконачно много геометрија у којима важе аксиоме I-IV, V_1, а само једна геометрија, наиме Декартова геометрија, у којој у исто време важи и аксиома потпуности V_2.

§ 10. Независност аксиоме паралелних (Не-еуклидска геометрија)[1]

Пошто смо утврдили непротивречност аксиома, од интереса је испитати да ли су све оне независне једна од друге. Уствари се показује да се ниједан битни саставни део поме-

---

[1] Уосталом да се лако показати: у геометрији, у којој су задовољене аксиоме I-III и Архимедова аксиома V_1, исказ о аксиоми паралелних или не важи ни за један систем који се састоји из праве a и тачке A која није на истој правој или пак важи за сваки такав систем; уп. Р. Балдус (R. Baldus), Nichteuklidische Geometrie, Berlin 1927.

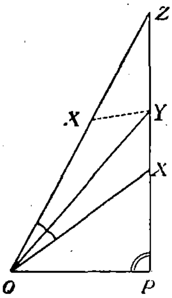
нутих група аксиома не може извести помоћу логичког закључивања из претходних група аксиома.

Најпре, што се тиче појединих аксиома група I, II и III лако је доказати да аксиоме једне и исте групе у битноме не зависе једна од друге.

Аксиоме група I и II при нашем излагању узете су за основу осталих аксиома, тако да се само ради о томе да се докаже независност сваке од група аксиома III, IV, V од осталих.

Аксиома паралелних IV независна је од осталих аксиома: то се на познати начин најпростије овако показује: као елементе просторне геометрије одаберимо тачке, праве и равни обичне (Декартове) геометрије конструисане у § 9 уколико леже у унутрашњости неке сталне лопте, а подударности ове геометрије дефинишимо таквим линеарним трансформацијама обичне геометрије које сталну лопту трансформишу саму у себе. Узимајући подесне поставке дознајемо да у овој *„не-еуклидској" геометрији* важе све аксиоме изузев Еуклидове аксиоме IV; а пошто је могућност обичне геометрије доказана у § 9, отуда следује и могућност не-еуклидске геометрије.

Од нарочитог интереса су ставови који важе независно од аксиоме паралелних, тј. који су задовољени како у Еуклидовој тако и у не-еуклидској геометрији. Као најважније примере за ове ставове навешћемо оба Лежандрова (Legendre) става, од којих први захтева за свој доказ, осим аксиома I до III, и Архимедову аксиому V_1. Размотримо претходно неколико помоћних ставова.



Став 33. Нека је дат правоугли троугао OPZ са правим углом код P. Нека се на дужи PZ налазе две тачке X, Y тако да је

$$\sphericalangle XOY \equiv \sphericalangle YOZ.$$

Тада је

$$XY < XZ.$$

Ради доказа пренесимо дуж OX од тачке O на праву OZ:

$$OX \equiv OX'.$$

Из ставова 22 и 23 следује да тачка X' лежи на дужи OZ, а помоћу става 22 и аксиоме III_5 добива се:

$$\sphericalangle X'ZY < \sphericalangle OYX \equiv \sphericalangle OYX' < \sphericalangle YX'Z.$$

Однос $\sphericalangle X'ZY < \sphericalangle YX'Z$, према ставовима 12 и 23, доводи сад до тврђења.

Став 34. Ма за која два угла α и ε може се увек наћи такав природни број r да буде

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

При томе $\frac{\alpha}{2^r}$ означава угао добивен помоћу половљења угла α поновљеног r пута.

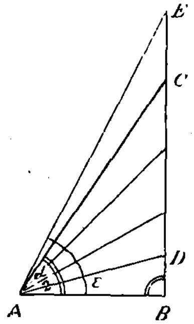
Доказ. Нека су дата два угла α и ε. Половљење угла може се извести на основи претпостављених аксиома (в. стр. 25). Посматрајмо оштар угао $\frac{\alpha}{2}$. У случају да је $\frac{\alpha}{2} \leqq \varepsilon$, тврђење става 34 показује се тачно за $r = 2$. У случају пак да је $\frac{\alpha}{2} > \varepsilon$ онда из неке тачке C једног крака угла $\frac{\alpha}{2}$ спустимо на други његов крак нормалу која пресеца овај крак у некој тачки B. Теме угла $\frac{\alpha}{2}$ означимо са A. Пренесимо угао ε на крак AB у унутрашњост угла $\sphericalangle BAC = \frac{\alpha}{2}$; тада ће слободни крак конструисаног угла, на основу претпостављене неједначине, пресецати дуж BC у некој тачки D (уп. стр. 13). Архимедова аксиома V_1 своди се на тврђење да постоји такав природни број n, да је

$$n \cdot BD > BC.$$

Пренећемо угао ε сад n-пута, и то сваки пут на слободни крак са спољашње стране.

Може наступити случај да слободни крак угла добивен најкасније при n-том преношењу, можда при m-том преношењу, као први не пресеца више полуправу BC. Пошто претходни слободни крак још пресеца ову полуправу, угао $(m-1)\,\varepsilon$ је оштар. Отуда се лако добива да унутрашњост угла $m\varepsilon$ конструисаног помоћу m-струког преношења, лежи у оној полуравни од AB, која садржи тачку C, и даље, да се полуправа AC простире у унутрашњости угла $m\varepsilon$, тј. важи

$$m \cdot \varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$



У другом случају сваки угао ε, добивен при n-тоструком преношењу, исеца на полуправој BC дуж, која је, према ставу 33, већа од дужи BD или њој једнака. Нека n-ти слободни крак пресеца BC у тачки E. Збир BE од n дужи, исечених на полуправој BC, већи је од $n \cdot BD$, дакле тим пре већи од BC. Отуда следује

$$n \cdot \varepsilon > \frac{\alpha}{2}.$$

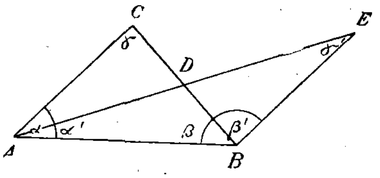
Нека је за m одн. n природни број r тако одређен да је $m < 2^{r-1}$ одн. $n < 2^{r-1}$. Означимо угао $m\varepsilon$ одн. $n\varepsilon$ са μ. Углови $\frac{\mu}{2^{r-1}}$ и $\frac{\alpha}{2^r}$ могу се конструисати. Из могућности упоређивања величина углова добива се лако, да с једне стране из неједначине $2^{r-1} > m$ следује неједначина $\frac{\mu}{2^{r-1}} < \frac{\mu}{m} = \varepsilon$, а с друге стране из неједначине $\mu > \frac{\alpha}{2}$ следује неједначина $\frac{\mu}{2^{r-1}} > \frac{\alpha}{2^r}$. Стога на основу транзитивности упоређивања величина (стр. 21) важи

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Помоћу става 34 може се доказати први Лежандров став.

Став 35 (први Лежандров став). Збир углова троугла је мањи од два права или једнак са два права угла.

Доказ. Означимо ма који од три угла датог троугла са $\sphericalangle A = \alpha$; друга два означимо са $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$ тако да важи $\beta \leqq \gamma$. Према ставу 26 дуж BC има тачку D која је полови. Продужимо дуж AD за њену сопствену дужину преко тачке D до тачке E. На основу подударности унакрсних углова (стр. 17), аксиома III_5 се може применити на троугле ADC и EDB и дефинишући на основу става 15 на очигледан начин збир углова, добивамо за углове α', β', γ' троугла ABE релације



$$\alpha' + \gamma' = \alpha, \quad \beta' = \beta + \gamma.$$

Према томе, троугао ABE има исти збир углова као и троугао ABC.

Из неједначине $\beta \leqq \gamma$ изводи се лако, према ставовима 23 и 12, да је

$$\alpha' \leqq \gamma', \text{ а одатле } \alpha' \leqq \frac{\alpha}{2}$$

За сваки троугао ABC и ма који његов угао α може се увек наћи троугао са истим збиром углова, у коме је један угао мањи од $\frac{\alpha}{2}$ или једнак са $\frac{\alpha}{2}$, и зато се може, ако је осим тога дат природни број r, наћи троугао са истим збиром углова, у коме је један од углова мањи од $\frac{\alpha}{2^r}$ или једнак са $\frac{\alpha}{2^r}$.

Претпоставимо сад да је, несупрот тврђењу првог Лежандровог става, збир углова датог троугла већи од два права.

Из става 22 следује да је збир два угла троугла мањи од два права. Збир углова датог троугла може се стога претставити у облику

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\rho + \varepsilon,$$

где ε означава ма који угао, а ρ прав угао. Према ставу 34, може се одредити природни број r тако, да буде

$$\frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

Конструишимо сад на показани начин троугао са угловима $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$ који задовољавају релације:

$$\alpha^*+\beta^*+\gamma^* = 2\rho+\varepsilon, \quad \alpha^* \leqq \frac{\alpha}{2^r} < \varepsilon.$$

У овом троуглу је

$$\beta^*+\gamma^* > 2\rho,$$

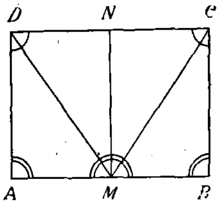
што противречи ставу 22. Тиме је доказан први Лежандров став.

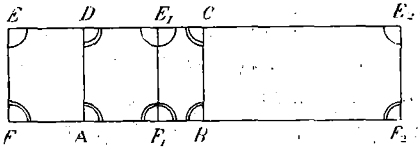
Став 36. Ако четвороугао $ABCD$ има код A и B праве углове и ако су у њему осим тога супротне страна AD и BC подударне, онда су углови $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$ један другом подударни. Даље, нормала, подигнута у средини M дужи AB, пресеца супротну страну CD у тачки N тако да су четвороугли $AMND$ и $BMNC$ подударни.

Доказ. Нормала, подигнута у тачки M на AB, лежи, како то следује из ставова 21 и 22, у унутрашњости угла $\sphericalangle DMC$ и стога, према једном од ставова поменутих на стр. 13, пресеца дуж CD у тачки N. Из ставова 12, 21 и 15 следује да су троугли MAD и MBC па стога и троугли MDN и MCN подударни. Из ових подударности се помоћу става 15 добива

$$\sphericalangle BCN \equiv \sphericalangle ADN.$$

Дакле, четвороугли $AMND$ и $BMNC$ су подударни.





Став 37. Ако су у четвороуглу $ABCD$ сва четири угла права, онда нормала EF спуштена из неке тачке E праве CD на супротну страну AB стоји нормално и на CD.

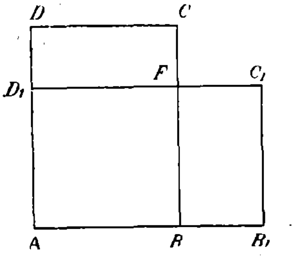
Доказ. Уведимо појам огледања на правој a на овај начин: ако ма из које тачке P спустимо нормалу ма на коју праву a и ако ту нормалу продужимо за њену сопствену дужину преко подножне тачке до P', онда се тачка P' назива огледалском сликом тачке P.

Огледнимо дуж EF на AD и BC. Огледалске слике E_1F_1 и E_2F_2 су, што проистиче из другог дела става 36, подударне дужи EF. Тачке F_1 и F_2, исто као и тачка F, леже на AB; тачке E_1 и E_2, исто као и тачка E, леже на CD. Претпоставке првог дела става 36 су тачне за четвороугле EFF_1E_1, EFF_2E_2 и $E_1F_1F_2E_2$, а одатле следује једнакост четири угла са теменима у тачкама E, E_1, E_2. Према томе код једне од ових тачака настају два једнака упоредна угла (у горњој фигури код тачке E_1); тј. та четири једнака угла су права.

Став 38. Ако су ма у ком четвороуглу сви углови прави, онда је у сваком чттвороуглу са три права угла и четврти угао прав.

Доказ. Нека је $A'B'C'D'$ четвороугао са четири права угла и нека је $ABCD$ ма који четвороугао са три права угла код A, B, D. Конструишимо четвороугао $AB_1C_1D_1$, подударан четвороуглу $A'B'C'D'$ чији прави угао код A поклапа са углом A четвороугла $ABCD$.

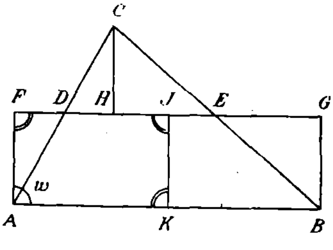
У случају да се тачка B поклапа са B_1 или тачка D са D_1, онда је тврђење у сагласности са ставом 37. У случају да тачка B лежи између A и B_1, а тачка D_1 између A и D, онда, слично као у доказу става 36, следује из става о спољашњем углу да се дужи BC и C_1D_1 секу у некој тачки F. Став 37 показује даље да је угао код F, а стога и угао код тачке C, прав угао.



На сличан начин се добива тврђење за остале могуће распореде тачка A, B, B_1 и A, D, D_1.

Помоћу става 38 може се доказати други Лежандров став.

Став 39 (други Лежандров став). Ако је ма у ком троуглу збир углова једнак двама правим, онда је збир углова сваког троугла једнак двама правим.



Доказ. Сваком троуглу ABC са збиром углова $2w$ можемо доделити четвороугао који има три права угла, а чији је четврти угао једнак w. Ради овог циља спојимо средине D и E страна AC и BC и спустимо из тачака A, B и C на спојну праву нормале AF, BG и CH. Из подударности троуглова AFD и CHD, као и подударности троуглова BGE и CHE, следује

$$AF \equiv BG, \quad \sphericalangle FAB + \sphericalangle GBA = 2w,$$

независно од тога да ли је један од углова $\sphericalangle A$ или $\sphericalangle B$ датог троугла туп или није туп.

Ако из средине дужи FG подигнемо нормалу JK, тада из другог дела става 36 следује да су четвороугли $AKJF$ и $BKJG$ подударни. Према томе, сваки од ова два четвороугла има три права угла, а четврти углови су једнаки, тј.

$$\sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle GBA .$$

Стога се добива

$$\sphericalangle FAB \equiv w,$$

и тако је, на захтевани начин, четвороугао $AKJF$ додељен датом троуглу.

Нека је ма у ком троуглу D_1 збир углова једнак двама правим и нека је осим тога дат један други троугао D_2. Доделимо им четвороугле V_1 и V_2. Четвороугао V_1 има четири права угла, а четвороугао V_2 има три права угла. Према ставу 38 у четвороуглу V_2 је и четврти угао прав. Тиме је други Лажандров став доказан.

§ 11. Независност аксиома подударности

Од чињеница које се тичу независности аксиома подударности, доказаћемо као нарочито важну ову: аксиома III_5 не може се извести помоћу логичких закључака из осталих аксиома I, II, $\mathrm{III}_{1\text{-}4}$, IV и V.

Изабраћемо тачке, праве и равни обичне геометрије за елементе нове просторне геометрије и дефинисаћемо преношење углова на исти начин као и у обичној геометрији, напр. онако како је то изложено у § 9; напротив, дефинисаћемо преношење дужи на други начин. Нека две тачке A_1 и A_2 у обичној геометрији имају координате x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2: тада ћемо позитивну вредност израза

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

назвати дужином дужи $A_1 A_2$ па онда две произвољне дужи $A_1 A_2$ и $A'_1 A'_2$ треба звати подударним ако оне у горе установљеном смислу имају једнаке дужине.

Непосредно је јасно да у тако изграђеној просторној геометрији важе аксиоме I, II, $\text{III}_{1-2,4}$, IV, V (као, уосталом, и ставови 14, 15, 16, 19 и 21 који су били доказани помоћу аксиоме III_5).

Да бисмо показали да је задовољена и аксиома III_3, узмимо произвољну праву a и одаберимо на њој три тачке A_1, A_2, A_3 тако да тачка A_2 лежи између тачака A_1 и A_3. Нека су тачке x, y, z праве a дате једначинама

$$x = \lambda t + \lambda',$$
$$y = \mu t + \mu',$$
$$z = \nu t + \nu',$$

у којима је t параметар, а $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ означавају извесне константе. Ако су $t_1, t_2 \, (< t_1), t_3 \, (< t_2)$ вредности параметра које одговарају тачкама A_1, A_2, A_3, онда ћемо имати за дужине трију дужи $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ и $A_1 A_3$ изразе:

$$(t_1 - t_2) \left| \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2} \right|,$$
$$(t_2 - t_3) \left| \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2} \right|,$$
$$(t_1 - t_3) \left| \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2} \right|,$$

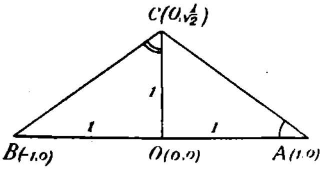
и зато је збир дужина дужи $A_1 A_2$ и $A_2 A_3$ једнак дужини дужи $A_1 A_3$. Одатле се добива важење аксиоме III_3.

Аксиома III_5 за троугле није увек задовољена у нашој геометрији. Као пример посматрајмо у равни $z = 0$ четири тачке

тачку	O	са координатама	$x = 0$,	$y = 0$,
„	A „	„	$x = 1$,	$y = 0$,
„	B „	„	$x = -1$,	$y = 0$,
„	C „	„	$x = 0$,	$y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Дужи OA, OB и OC имају дужину 1. За оба правоугла троугла AOC и COB важе стога подударности

$$\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle COB,$$
$$OA \equiv OC,$$
$$OC \equiv OB.$$



Али, насупрот аксиоми III_5 углови $\sphericalangle OAC$ и $\sphericalangle OCB$ нису подударни. — У исто време у овом примеру није задовољен први став подударности, пошто дуж AC има дужину $\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{2}}}$, а дуж BC напротив има дужину $\sqrt{2+\frac{2}{\sqrt{2}}}$. Такође не важи став 11 ни за један од оба равнокрака троугла AOC и COB.

Пример равне геометрије, у којој су све аксиоме, са изузетком аксиоме III_5, задовољене, јесте ово: у некој равни α сви појмови који се јављају у аксиомама, искључујући подударност дужи, нека буду дефинисани на обичан начин. Међутим за дужину дужи узмимо на обичан начин дефинисану дужину пројекције на раван β која је нагнута под оштрим углом према равни α.

§ 12. Независност аксиома непрекидности V (Не-архимедска геометрија)

Да бисмо доказали независност Архимедове аксиоме V_1, морамо конструисати геометрију у којој ће бити задовољене све аксиоме изузев аксиома V.[1]

У овом циљу конструишимо подручје $\Omega(t)$ свих оних алгебарских функција од t које се добивају из t применом пет рачунских операција: сабирања, одузимања, множења, дељења и операције $|\sqrt{1+\omega^2}|$; при томе ω означава ма коју

---

[1] Г. Веронезе (G. Veronese) је у своме дубокоумном делу: „Grundzüge der Geometrie", превео на немачки А. Шеп (A. Schepp), Leipzig 1894, такође покушао да изгради геометрију која је независна од Архимедове аксиоме.

функцију која је већ добивена применом тих пет операција. Множина елемената подручја $\Omega(t)$ је — исто као и множина елемената Ω у § 9 — пребројива. Свих пет операција су једнозначне и изводљиве у стварној области; зато подручје $\Omega(t)$ садржи само једнозначне и реалне функције од t.

Нека је c ма која функција подручја $\Omega(t)$; пошто је функција c алгебарска функција од t, то се она може анулирати, свакако, само за коначан број вредности од t и зато ће функција c бити, за довољно велике позитивне вредности од t, или увек позитивна или увек негативна.

Функције подручја $\Omega(t)$ сматраћемо сад као врсту комплексних бројева у смислу наредног параграфа, § 13; очигледно, у тако дефинисаном комплексном бројном систему важе сва обична рачунска правила. Даље, ако су a и b ма која два различита броја овог комплексног бројног система, рећи ћемо да је број a већи или мањи од b, и писати: $a > b$ или $a < b$, према томе да ли је разлика $c = a - b$, као функција од t увек позитивна или увек негативна за довољно велике позитивне вредности од t. Ако се овако узме, можемо распоредити бројеве нашег комплексног бројног система по њиховој величини, слично ономе како се то ради за реалне бројеве; лако се види да за наше комплексне бројеве такође важе ставови према којима неједначине остају тачне ако се обема странама дода исти број или обе стране помноже истим бројем > 0.

Ако n означава неки произвољан позитиван цео рационалан број, онда неједначина $n < t$ сигурно важи за оба броја n и t подручја $\Omega(t)$, пошто разлика $n - t$, посматрана као функција од t, излази очигледно увек негативна, за довољно велике позитивне вредности од t. Ову ћемо чињеницу изразити на овај начин: бројеви 1 и t подручја $\Omega(t)$, која су оба > 0, имају то својство да произвољна вишеструка вредност првога остаје увек мања од другог броја.

Сада ћемо од комплексних бројева подручја $\Omega(t)$ изградити геометрију потпуно на исти начин, као што је то учињено у § 9, где смо узели за основу подручје Ω алгебарских бројева: сматраћемо систем трију бројева (x, y, z) подручја $\Omega(t)$ као тачку, а размере ма која четири броја

$(u : v : w : r)$ подручја $\Omega(t)$, у случају да u, v, w нису сви нула, као раван; даље, нека постојање једначине

$$ux+vy+wz+r=0$$

изражава да тачка (x, y, z) лежи у равни $(u:v:w:r)$ и нека се као права назначи укупност свих тачака које леже у двема равнима са различитим $u:v:w$. Усвојимо ли сад сличне поставке о распореду елемената и о преношењу дужи и углова, као у § 9, онда добивамо *„не-архимедску” геомеШрију*, у којој су, као што показују раније изложена својства комплексног бројног система $\Omega(t)$, све аксиоме задовољене, са изузетком аксиома непрекидности. Уствари, можемо произвољно пута једно за другим пренети дуж 1 на дуж t, а да се при томе не прекорачи крајња тачка дужи t; то противречи захтеву Архимедове аксиоме.

Да је аксиома потпуности V_2 такође независна од свих претходних аксиома I-IV, V_1, показује прва геометрија постављена у § 9, пошто је у овој геометрији задовољена Архимедова аксиома.

Од принципског су значаја и не-архимедске геометрије које су истовремено и не-еуклидске геометрије, и нарочито је од великог интереса улога коју игра Архимедова аксиома при доказу Лежандровог става. Испитивање које је М. Ден[1] (M. Dehn) предузео под мојим утицајем о овом предмету довело је до потпуног објашњења овог питања. У Деновим испитивањима узете су за основу аксиоме I—III. Само на крају Деновог рада — да би и Риманова (B. Riemann) (елиптична) геометрија ушла у подручје испитивања — аксиоме распореда II схваћене су општије но у овој расправи, наиме отприлике овако:

Четири тачке A, B, C, D праве увек се распадају на два пара A, C и B, D, тако да су тачке A, C раздвојене тачкама B, D и обрнуто. Пет тачака на правој могу се увек означити са A, B, C, D, E, тако да су тачке A, C раздвојене тачкама B, D и B, E, даље, тачке A, D раздвојене тачкама B, E и C, E итд.

---

[1] „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck“, Math. Ann. књ. 53, 1900.

На основу ових аксиома I—III, дакле, не користећи се непрекидношћу, доказује М. Ден најпре општији облик другог Лежандровог става, став 39:

Ако је у једном ма ком троуглу збир углова већи од два права, једнак са два права или мањи од два права, онда то важи за сваки троугао.[1]

Даље се на наведеном месту доказује следећа допуна првог Лежандровог става, став 35:

Из претпоставке да се кроз једну тачку може повући бесконачно много паралелних према датој правој *не* следује, ако се искључи Архимедова аксиома, да је збир углова у троуглу мањи од два права. Управо, с једне стране, постоји геометрија (не-лежандровска геометрија), у којој се кроз једну тачку према једној правој може повући бесконачно много паралелних и у којој ипак важе ставови Риманове (елиптичне) геометрије. С друге стране постоји геометрија (полуеуклидиска геометрија), у којој постоји бесконачно много паралелних кроз једну тачку према једној правој и у којој ипак важе ставови еуклидске геометрије.

Из претпоставке да не постоји ниједна паралелна, увек следује да је збир углова у троуглу већи од два права.

Приметићу на крају да се, ако се дода Архимедова аксиома, може аксиома паралелних заменити захтевом да збир углова у троуглу треба да буде једнак двама правим угловима.

---

[1] Доказ овог става дао је доцније и Шур (F. Schur), Math. Ann. књ. 55, а затим Хјелмслев (Hjelmslev), Math. Ann. 64; код последњег треба истаћи веома кратки закључак који води доказу средњег дела овог става. Уп. такође F. Schur, Grundlagen der Geometrie, Leipzig und Berlin, 1909, § 6.

Трећа глава

Учење о пропорцијама

§ 13. Комплексни бројни системи

У почетку ове главе даћемо неколико претходних кратких разјашњења о комплексним бројним системима, која ће нам доцније бити корисна нарочито за олакшање излагања.

Реални бројеви образују у својој укупности систем ствари са овим својствима:

Ставови везе (1—6):

1. Од броја a и броја b добива се „сабирањем“ одређени број c; у знацима:

$$a+b=c \quad \text{или} \quad c=a+b.$$

2. Ако су дати бројеви a и b, онда постоји увек један и само један број x и такође један и само један број y тако да је

$$a+x=b \quad \text{одн.} \quad y+a=b.$$

3. Постоји један одређени број, — назваћемо га o — тако да је за свако a истовремено

$$a+o=a \quad \text{и} \quad o+a=a.$$

4. Од броја a и броја b добива се још на један други начин, „множењем“, један одређен број c; у знацима:

$$ab=c \quad \text{или} \quad c=ab.$$

5. Ако су a и b произвољно дати бројеви и a није o, онда увек постоји један и само један број x и такође један и само један број y, тако да је

$$ax=b \quad \text{одн.} \quad ya=b.$$

6. Постоји један одређени број — назваћемо га 1 — тако да је за свако a истовремено

$$a \cdot 1 = a \text{ и } 1 \cdot a = a.$$

Рачунска правила (7—12):

Ако су a, b, c произвољни бројеви, онда увек важе наредни закони рачуна:

7. $a + (b + c) = (a + b) + c$

8. $a + b = b + a$

9. $a\,(bc) = (ab)\,c$

10. $a\,(b + c) = ab + ac$

11. $(a + b)\,c = ac + bc$

12. $ab = ba.$

Ставови распореда (13—16):

13. Ако су a и b два ма која различита броја, онда је увек један и само један од њих (рецимо a) већи од другога; тада се овај последњи назива мањим бројем, што се означава:

$$a > b \quad \text{и} \quad b < a.$$

Ни за један број a не важи $a > a$,

14. Ако је $a > b$ и $b > c$, онда је и $a > c$.

15. Ако је $a > b$, онда је увек и

$$a + c > b + c.$$

16. Ако је $a > b$ и $c > o$, онда је увек и

$$ac > bc.$$

Ставови о непрекидности (17—18):

17 (Архимедов став). Ако су $a > o$ и $b > o$ два произвољна броја, онда је увек могуће a додати толико пута самом себи да добивена сума буде већа од b. Изражено знацима:

$$a + a + \;\ldots\; + a > b\,.$$

18 (став о потпуности). Немогуће је овом систему бројева додати као бројеве други систем ствари, тако да су и у систему овако проширеном сви ставови 1—17 задово-

љени при одржању односа између бројева; **или краће:** бројеви образују систем ствари, који, кад се задрже сви односи и сви наведени ставови, не дозвољава више никакво проширење.

Систем ствари који има само један део својстава 1—18, назваћемо *комплексни бројни систем.* Комплексни систем бројева назваћемо *архимедским* или *неархимедским,* према томе да ли он задовољава или не задовољава захтев 17.

Нека од изложених својстава 1—18 су последице осталих. Настаје задатак да се испита логичка зависност ових својстава.[1] У шестом одељку § 32 и § 33 одговорићемо на два одређена питања такве врсте због њиховог геометриског значаја, а овде ћемо само указати на то да свакако захтев 17 није никаква последица претходних својстава, пошто, например, комплексни бројни систем, посматран у § 12, задовољава сва својства 1—16, али не и својство 17.

Уосталом што се тиче ставова непрекидности (17—18) важе примедбе какве смо учинили у § 8 о геометриским аксиомама непрекидности.

§ 14. Доказ Паскаловог става

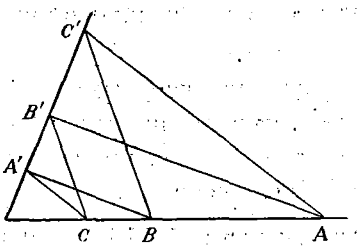
У овој и наредном одељку поћи ћемо у нашем испитивању од аксиома равни свих група, тј. аксиома I_{1-3} и II-IV, изузев аксиома непрекидности. У овој трећој глави имамо намеру да помоћу поменутих аксиома заснујемо Еуклидово учење о пропорцијама, тј. у равни и независно од Архимедове аксиоме.

У том циљу ћемо најпре доказати чињеницу која је специјалан случај познатог Паскаловог става из учења о конусним пресецима и тај ћемо став убудуће кратко назвати Паскаловим ставом. Тај став гласи:

---

[1] Упореди Допуну I.

Став 40[1] **(Паскалов став).** *Нека су на двема правима које се секу A, B, C и A', B', C' по три тачке које се разликују од тачке пресека правих; ако је тада CB' паралелно са BC' а CA' паралелно са AC', биће и BA' паралелно са AB'.*

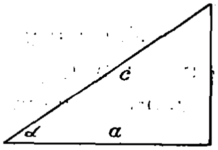


Да бисмо доказали овај став, увешћемо најпре наредно означавање: у правоуглом троуглу је, очигледно, катета a једнозначно одређена хипотенузом c и углом α између a и c; ставићемо кратко

$$a = \alpha c,$$

тако да симбол αc увек означава одређену дуж ако је c произвољно дата дуж, а α произвољно дати оштри угао. Исто је тако увек дуж c једнозначно одређена при произвољно датој дужи a и произвољно датом оштром углу α једначином

$$a = \alpha c.$$



Нека сада c буде произвољна дуж и нека су α, β два произвољна оштра угла; тврдимо да свагда постоји подударност дужи

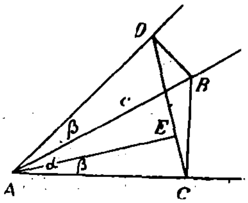
$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c$$

и да се, стога, симболи α и β увек могу међу собом разменити.

---

[1] Ф. Шур је објавио интересантан доказ Паскаловог става на основу равних и просторних аксиома I—III у Math. Ann. књ. 51; исто тако Ден Math. Ann. књ. 53. J. Хјемслеву је тада пошло за руком, ослањајући се на резултате Г. Хесенберга (G. Hessenberg) (Math. Ann. књ. 61), да докаже Паскалов став само на основу равних аксиома I—III („Neue Begründung der ebenen Geometrie"; Math. Ann. књ. 64). Уп. додатак III ове књиге.

Да бисмо доказали ово тврђење, узмимо дуж $c = AB$ и пренесимо на ову дуж код тачке A са обе стране углове α и β. Затим, спустимо из тачке B на друге краке ових углова нормале BC и BD, спојмо тачку C са D и спустимо, најзад, из тачке A нормалу AE на CD.



Пошто су углови $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ADB$ прави, четири тачке A, B, C, D леже на кругу и зато су оба угла $\sphericalangle ACD$ и $\sphericalangle ABD$, као периферијски над истом тетивом, подударни. Међутим, с једне стране, угао $\sphericalangle ACD$ заједно са $\sphericalangle CAE$ чини прави угао, а с друге стране, $\sphericalangle ABD$ заједно са $\sphericalangle BAD$ чини такође прави угао па су стога и углови $\sphericalangle CAE$ и $\sphericalangle BAD$ један другом подударни, тј.

$$\sphericalangle CAE \equiv \beta$$

и зато

$$\sphericalangle DAE \equiv \alpha .$$

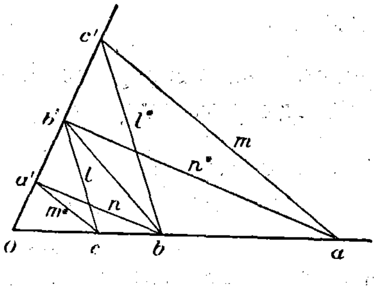
Сад непосредно добивамо подударности дужи:

$$\beta c \equiv AD, \qquad \alpha c \equiv AC,$$

$$\alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AE, \qquad \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE,$$

а одатле следује тачност подударности за коју смо малочас тврдили да постоји.

Вратимо се сада фигури Паскаловог става и означимо пресечну тачку обеју правих са O, а дужи са OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', AC', CA', BA' AB' односно са a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*. Затим, спустимо из тачке O нормале на l, m^*, n; нека нормала на l образује са правима OA, OA' оштре углове λ', λ, а нормала на m^* односно n са правима OA и OA' оштре углове μ', μ, односно ν', ν. Ако сад ове три нормале изразимо на малочас показан начин помоћу хипотенуза и углова на основици у дотичним правоуглим троугловима на двојаки начин,



добићемо ове три подударности дужи:

$$(1) \qquad \lambda b' \equiv \lambda c,$$

$$(2) \qquad \mu a' \equiv \mu' c,$$

$$(3) \qquad \nu a' \equiv \nu' b.$$

Пошто, према претпоставци, треба l да буде паралелно са l^* и m паралелно са m^*, онда ће се нормале, спуштене из тачке O на l^*, одн. m, поклопити са нормалама на l одн. m^*, према томе добићемо:

$$(4) \qquad \lambda c' \equiv \lambda' b,$$

$$(5) \qquad \mu c' \equiv \mu' a.$$

Ако применимо на подударност (3) лево и десно симбол $\lambda' \mu$ и узмемо у обзир да се, према раније доказаном, ти симболи могу разменити међу собом, добићемо:

$$\nu \lambda' \mu a' \equiv \nu' \mu \lambda' b.$$

Узмемо ли у овој подударности у обзир лево подударност (2), а десно подударност (4), добићемо

$$\nu \lambda' \mu' c \equiv \nu' \mu \lambda c'$$

или

$$\nu \mu' \lambda' c \equiv \nu' \lambda \mu c'.$$

Овде ћемо, узимајући лево у обзир подударност (1), а десно подударност (5), добити тада:

$$\nu \mu' \lambda b' \equiv \nu' \lambda \mu' a$$

или

$$\lambda \mu' \nu b' \equiv \lambda \mu' \nu' a.$$

Из ове последње подударности, на основу особине наших симбола наведене на стр. 50, одмах закључујемо:

$$\mu' \nu b' \equiv \mu' \nu' a, \quad \text{а одатле}$$

$$(6) \qquad \nu b' \equiv \nu' a.$$

Ако уочимо сад нормалу спуштену из тачке O на n и спустимо на њу нормале из тачака A и B', онда ће подударност (6) показати да се морају поклопити подножја тих двеју последњих нормала, тј. права $n^* = AB'$ стоји нормално на нормали, спуштеној на n и према томе је паралелна са n. Тиме је доказан Паскалов став.

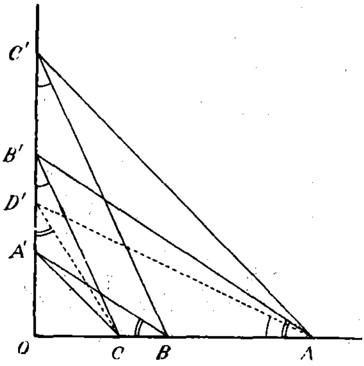
За заснивање учења о пропорцијама у даљем излагању користићемо се искључиво оним специјалним случајем Паскаловог става у коме важи подударност дужи

$$OC \equiv OA',$$

а отуда важи и подударност

$$OA \equiv OC'$$

и у коме тачке A, B, C леже на истој полуправој која излази из тачке O. У овом специјалном случају изводи се доказ нарочито просто, наиме на овај начин:



Пренесимо на OA' од тачке O дуж OB до тачке D'; тада је спојна права BD' паралелна према CA' и AC'. Услед подударности троуглова $OC'B$ и OAD' биће

$$(1+) \quad \sphericalangle OC'B \equiv \sphericalangle OAD'.$$

Пошто су, према претпоставци, праве CB' и BC' међу собом паралелне, онда је

$$(2+) \quad \sphericalangle OC'B \equiv \sphericalangle OB'C\,;$$

из (1+) и (2+) закључујемо да је

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OB'C\,;$$

али тада је, према учењу о кругу, $ACD'B'$ тетивни четвороугао, и зато, према познатом ставу о угловима тетивног четвороугла, важи подударност

$$(3+) \qquad \sphericalangle OD'C \equiv \sphericalangle OAB'.$$

С друге стране је због подударности троуглова $OD'C$ и OBA' такође

$$(4+) \qquad \sphericalangle OD'C \equiv \sphericalangle OBA'\,;$$

из (3+) и (4+) закључујемо

$$\sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OBA',$$

а ова подударност показује да су праве AB' и BA' паралелне, како то и захтева Паскалов став.

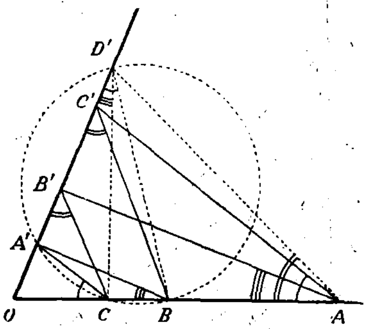
Ако је дата ма која права, тачка ван ње и ма који угао, може се, очигледно, преношењем овог угла и повлачењем паралелне наћи права која пролази кроз дату тачку и пресеца дату праву под датим углом. Имајући у виду ову околност, можемо, најзад, у доказу општијег Паскаловог става применити и прост поступак, за који имам да захвалим једном саопштењу с друге стране.

Повуцимо кроз тачку B праву која би пресецала OA' у некој тачки D' под углом $\sphericalangle OCA'$ тако да важи подударност

(1*) $$\sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OD'B;$$

тада је, према познатом ставу из учења о кругу, $CBD'A'$ тетивни четвороугао и зато, према ставу подударности периферисних углова над истом тетивом, важи подударност

(2*) $$\sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OD'C.$$



Пошто су праве CA' и AC', према претпоставци, међу собом паралелне, то је

(3*) $$\sphericalangle OCA' \equiv \sphericalangle OAC';$$

из (1*) и (3*) следује подударност:

$$\sphericalangle OD'B \equiv \sphericalangle OAC';$$

а тада је и $BAD'C'$ тетивни четвороугао. Отуда, према ставу о угловима тетивног четвороугла, важи подударност

(4*) $$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OC'B.$$

Даље, пошто је, према претпоставци, права CB' паралелна са BC', имаћемо такође

(5*) $$\sphericalangle OB'C \equiv \sphericalangle OC'B;$$

из (4*) и (5*) изводимо подударност

$$\sphericalangle OAD' \equiv \sphericalangle OB'C .$$

Најзад, ова последња подударност показује да је $CAD'B'$ тетивни четвороугао и зато важи и подударност

$$(6^*) \qquad \sphericalangle OAB' \equiv \sphericalangle OD'C .$$

Из (2*) и (6*) следује:

$$\sphericalangle OBA' \equiv \sphericalangle OAB',$$

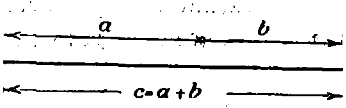
а ова подударност показује да су праве BA' и AB' паралелне, како то и захтева Паскалов став.

Ако се тачка D' поклапа са једном од тачака A', B', C' или ако је распоред тачака A, B, C други, онда је неопходна измена овог поступка, која се лако уочава.[1]

§ 15. Сегментни рачун на основу Паскаловог става

Паскалов став, доказан у претходном параграфу, омогућава нам да уведемо у геометрију сегментни рачун (рачун дужима), у коме важе без промене сва правила рачуна са реалним бројевима.

Уместо речи „подударно" и знака $\equiv$, служићемо се у овом рачуну са дужима речју „једнак" и знаком $=$.



Ако су A, B, C три тачке неке праве и ако B лежи између A и C, онда ћемо $c = AC$ означити као *збир* двеју дужи $a = AB$ и $b = BC$ и ставити

$$c = a + b .$$

Говорићемо да су дужи a и b мање од c и то ћемо означити са

$$a < c, \quad b < c ;$$

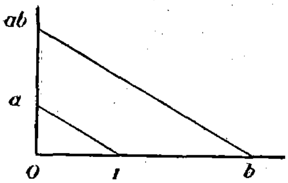
дуж c се назива већом од a и b, у знацима:

$$c > a, \quad c > b.$$

---

[1] Од интереса је и примена коју има став о заједничкој пресечној тачки висина троугла у заснивању Паскаловог става одн. учења о пропорцијама; нека се упореди о овоме Ф. Шур, Math. Ann. књ. 57, и J. Молеруп (J. Mollerup), „Studier over den plane geometris Aksiomer", Kopenhagen 1903.

Из линеарних аксиома подударности III_{1-3} увиђамо лако да за сабирање дужи које смо сад дефинисали важи асоцијативни закон



$$a+(b+c) = (a+b)+c$$

као и комутативни закон

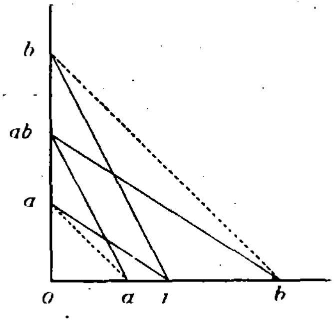
$$a+b = b+a.$$

Да бисмо геометриски дефинисали производ дужи a и дужи b, послужићемо се овом конструкцијом: изаберимо најпре произвољну дуж која ће остати иста при целом посматрању и означимо је са 1. Пренесимо сад на један крак правог угла од његовог темена O дуж 1, а затим исто тако од темена O дуж b; пренесимо, даље, на други крак угла дуж a. Спојимо крајње тачке дужи 1 и a правом и повуцимо према овој правој паралелну кроз крајњу тачку дужи b; нека она отсеца на другом краку дуж c; тада ћемо ову дуж c назвати *производом* дужи a са дужи b и означићемо је са

$$c = ab.$$

Доказаћемо пре свега да за множење дужи које смо сада дефинисали важи комутативни закон

$$ab = ba.$$



У том циљу конструишимо прво на горе установљени начин дуж ab. Даље, пренесимо на први крак правог угла дуж a, а на други његов крак дуж b, спојимо правом крајњу тачку дужи 1 са крајњом тачком дужи b на другом краку и повуцимо паралелну према овој правој кроз крајњу тачку дужи a на првом краку: ова отсеца на другом краку дуж ba; уствари, као што се види из слике, ова дуж ba поклапа се са малочас конструисаном дужи ab према Паскаловом ставу (став 40) због паралелности испрекиданих помоћних линија. И обрнуто следује, што се одмах види, из важења комутативног закона у нашем рачуну дужима, да сигурно важи специјалан случај Паскаловог става наведеног на стр. 53 за такве фигуре, у којима полуправе *OA* и *OA'* образују прав угао.

Да бисмо за наше множење дужи доказали асоцијативни закон

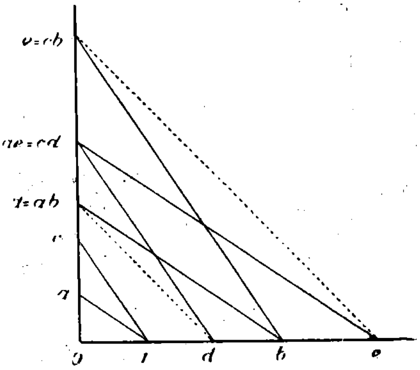
$$a\,(bc) = (ab)\,c,$$

пренесимо на један крак правог угла од његовог темена *O* дужи 1 и *b*, а на други крак, исто тако од темена *O*, пренесимо дужи *a* и *c*. Затим конструишимо дужи $d = ab$ и $e = cb$ и пренесимо ове дужи *d* и *e* на први крак од темена *O*. Ако сада конструишемо *ae* и *cd*, онда се види са слике која је ту са стране, опет на основу Паскаловог става, да се крајње тачке ових дужи поклапају, тј. да је

$$ae = cd \text{ или } a\,(cb) = c\,(ab),$$

а одатле, на основу комутативног закона, следује такође

$$a\,(bc) = (ab)\,c.^{1)}$$



Као што се види, ми смо у претходном доказу како комутативног тако и асоцијативног закона множења искористили искључиво онај специјални случај Паскаловог става чији смо доказ успели да добијемо на нарочито прост начин, примењујући само једанпут став о тетивном четвороуглу.

---

[1] Нека се са овим упореде такође методе заснивања учења о пропорцијама које је дао А. Кнезер (A. Kneser), Archiv für Math. und Phys., R. III, књ. 2 и J. Молеруп Math. Ann. књ. 56, као и „Studier over den plane geometris Aksiomer", Kopenhagen, 1903 код којих је напред стављена једначина са пропорцијама. Ф. Шур, Zur Proportionenlehre, Math. Ann. књ. 57, примећује да је већ Купфер (Kupffer) (Sitzungsber. der Naturforschergesellschaft zu Dorpat 1893) правилно доказао комутативни закон множења. Ипак треба сматрати Купферово даље заснивање учења о пропорцијама као недовољно.

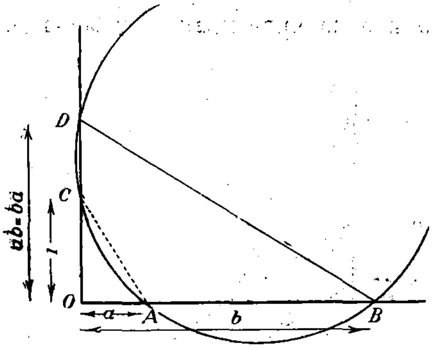
Резимирајући ова излагања, долазимо до наредног заснивања закона множења у рачуну дужима, које ми изгледа најпростије од свих досад познатих начина заснивања.

Нека се на један крак правог угла пренесу од темена O дужи $a = OA$ и $b = OB$, а на други крак јединична дуж $1 = OC$. Круг, постављен кроз тачке A, B, C, пресеца други крак још у тачки D. Тачка D добива се лако, без употребе шестара, само на основу аксиома подударности, кад се из средишта круга спусти нормала на OC и у односу на ову конструише огледалска слика тачке C. Услед једнакости углова $\sphericalangle OCA$ и $\sphericalangle OBD$, а према дефиницији производа двеју дужи (стр. 56), имамо

$$OD = ab;$$

а због једнакости углова $\sphericalangle ODA$ и $\sphericalangle OBC$ према истој дефиницији је

$$OD = ba.$$



Комутативни закон множења

$$ab = ba$$

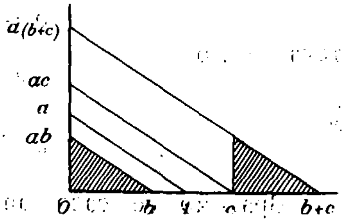
који одавде следује, *доказује* сад, према примедби на стр. 57, да на стр. 53 наведени специјални случај Паскаловог става важи за краке правог угла, а отуда опет (в. стр. 57) следује асоцијативни закон множења

$$a(bc) = (ab)c.$$

Најзад, у нашем рачуну дужима важи и **дистрибутивни** закон:

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Да бисмо њега доказали, конструишимо дужи ab, ac и $a(b+c)$ и повуцимо тада кроз крајњу тачку дужи c (видети слику са стране) праву паралелну другом краку правог угла. Подударност оба правоугла троугла, на слици осенчена, и примена става о једнакости супротних страна код паралелограма, пружају тада тражени доказ.



Ако су b и c две произвољне дужи, увек постоји дуж a тако да је $c = ab$; ова дуж a се означава са $\frac{c}{b}$ и назива се **количником** од c са b.

§ 16. Пропорције и ставови о сличности

Помоћу горе изложеног рачуна са дужима може се беспрекорно засновати **Еуклидово** учење о пропорцијама и без Архимедове аксиоме на наредни начин:

Дефиниција. Ако су a, b, a', b' ма које четири дужи, онда *пропорција*

$$a : b = a' : b'$$

не треба ништа друго да значи до сегментну једначину

$$ab' = ba'.$$

Дефиниција. Два се троугла називају *сличним* ако су им одговарајући углови подударни.

Став 41. Ако су a, b и a', b' одговарајуће стране у два слична троугла, онда важи пропорција:

$$a : b = a' : b'.$$

Доказ. Посматраћемо најпре нарочити случај, где су углови захваћени странама a, b и a', b' у оба троугла прави и претпоставићемо да су оба троугла уцрта у један и исти прави угао. Пренесимо сада од темена на један крак дуж 1 и повуцимо кроз крајњу тачку ове дужи 1 праву паралелну обема хипотенузама; ова права отсеца на другом краку дуж e; тада је према нашој дефиницији производа дужи

$$b = ea\,, \quad b' = ea'\,;$$

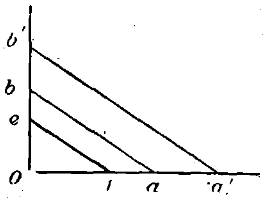
стога имамо

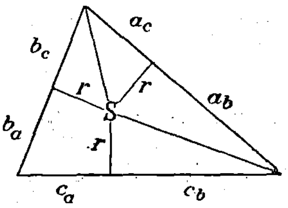
$$ab' = ba'\,,$$

тј.

$$a : b = a' : b'.$$

Вратимо се сада оптштем случају. У сваком од оба слична троугла конструишимо пресечну тачку S одн. S' трију његових бисектриса, чија се егзистенција лако изводи из





става 25, и спустимо из ових тачака три нормале r одн. r' на стране троугла; на овим странама добивене отсечке означимо са

$$a_b\,,\ a_c\,,\ b_c\,,\ b_a\,,\ c_a\,,\ c_b$$

одн. са

$$a_b',\ a_c',\ b_c',\ b_a'\ c_a',\ c_b'.$$

Малочас доказани специјални случај нашег става даје сад пропорције

$$a_b : r = a_b' : r', \quad a_c : r = a_c' : r', \qquad b_c : r = b_c' : r', \quad b_a : r = b_a' : r'\,;$$

из ових помоћу дистрибутивног закона закључујемо

$$a : r = a' : r', \quad b : r = b' : r'$$

а одатле

$$b'ar' = b'ra', \quad a'br' = a'rb'.$$

Из ових се једначина добива помоћу комутативног закона множења

$$a : b = a' : b'.$$

Из става 41 лако је извести основни став учења о пропорцијама, који гласи:

Став 42. *Ако две паралелне праве отсецају на крацима произвољног угла дужи a, b одн. a', b', онда важи пропорција:*

$$a : b = a' : b'.$$

Обрнуто, ако четири дужи a, b, a', b' задовољавају ову пропорцију и ако се дужи a, a' пренесу на један крак угла, а дужи b, b' на други крак, то су спојне праве крајњих тачака дужи a, b одн. a', b' међу собом паралелне.

§ 17. Једначине правих и равни

Досад посматраном систему дужи додаћемо други исти такав систем дужи. Наиме, на основу аксиома распореда може се лако на правој разликовати „*позитивни*“ и „*негативни*“ смер. Дуж AB, коју смо досад означавали са a, означаваћемо је са a још и тада кад тачка B лежи са позитивне стране од тачке A; у супротном случају пак ми ћемо је означавати са $-a$. Тачку ћемо означити као дуж 0. Дуж a ћемо назвати „*позитивном*“ одн. већом од 0, што ћемо означити: $a > 0$; дуж $-a$ ћемо назвати „*негативном*“ и то ћемо означити: $-a < 0$.

У овом проширеном рачуну са дужима важе тада сва правила рачуна 1—16 за стварне бројеве, која су изложена у § 13. Истаћи ћемо следеће чињенице:

Увек је

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{и} \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0\,.$$

Ако је $ab = 0$, онда је или $a = 0$ или $b = 0$. Ако је $a > b$ и $c > 0$, онда је увек $ac > bc$. Даље, ако су A_1, A_2, $A_3, \ldots$, A_{n-1}, A_n, n тачака на правој, онда је збир дужи A_1A_2, $A_2A_3, \ldots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 једнак 0.

Узмимо сада у равни α кроз тачку O две праве нормалне једна на другој као стални правоугли координатни систем и пренесимо тада на те праве произвољне дужи x, y од тачке O; затим, подигнимо нормале из крајњих тачака дужи x, y и одредимо пресечну тачку P ових нормала: дужи x, y називају се *координатама* тачке P. Свака тачка равни α једнозначно је одређена својим координатама x, y, које могу бити позитивне или негативне дужи или 0.

Нека је l ма која права у равни α, која пролази кроз тачку O и кроз неку тачку C са координатама a, b. Ако су тада x, y координате неке тачке P на l, онда лако налазимо из става 42

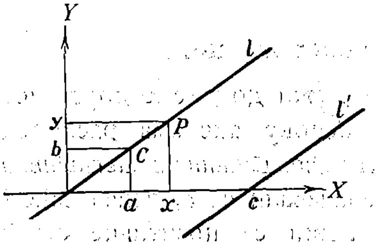
$$a : b = x : y$$

или

$$bx - ay = 0$$

као једначину праве l. Ако је права l' паралелна према l и отсеца на x-оси дуж c, онда добивамо једначину праве l' замењујући у једначини праве l дуж x са дужи $x-c$; тражена једначина, дакле, гласи

$$bx - ay - bc = 0.$$



Из ових излагања можемо лако закључити, независно од Архимедове аксиоме, да се свака права може претставити линеарном једначином по координатама x, y и, обрнуто, да свака таква линеарна једначина претставља праву, при чему су коефицијенти те једначине дужи које припадају датој геометрији.

Аналогни резултати у просторној геометрији добивају се веома лако.

Даље изграђивање геометрије може се отсад изводити методом, која се обично примењује у аналитичкој геометрији.

Досад у овом трећем одељку нисмо нигде искористили Архимедову аксиому; претпоставимо ли сад да важи та аксиома, можемо тачкама произвољне праве у простору доделити реалне бројеве и то на овај начин:

Одаберимо на правој две произвољне тачке и доделимо им бројеве 0 и 1; затим преполовимо дуж 01 одређену овим тачкама и означимо нађену средину дужи са $\frac{1}{2}$, даље, означимо средину дужи $0\,\frac{1}{2}$ са $\frac{1}{4}$ итд.; после n-тоструког извођења овог поступка, доћи ћемо до тачке којој треба доделити број $\frac{1}{2^n}$. Пренесимо сад дуж $0\,\frac{1}{2^n}$ од тачке 0 како на страну тачке 1, тако и на другу страну напр. m пута једно за другим и доделимо тако добивеним тачкама бројне вредности $\frac{m}{2^n}$ одн. $-\frac{m}{2^n}$. Из Архимедове аксиоме може се лако закључити да се на основу овог додељивања може свакој произвољној тачки праве доделити на једнозначан начин реалан број, и то тако да ово додељивање има наредно својство: ако су A, B, C ма које три тачке на правој и α, β, γ одговарајући реални бројеви и ако при томе B лежи између A и C, то ови бројеви увек задовољавају или неједначину $\alpha < \beta < \gamma$ или неједначину $\alpha > \beta > \gamma$.

Из излагања у § 9 друге главе јасно је да тамо за сваки број који припада алгебарском бројном телу Ω нужно мора на правој постојати тачка којој је он додељен. Да ли и сваком другом стварном броју одговара тачка, зависи од тога да ли у посматраној геометрији важи аксиома потпуности V_2 или не.

Напротив, ако се у некој геометрији претпостави да важи само Архимедова аксиома, увек је могуће систем тачака, правих и равни тако проширити *„ирационалним"* елементима, да на свакој правој тако конструисане геометрије сваком систему трију реалних бројева који задовољава једначину праве без изузетка одговара једна тачка. Одговарајућом поставком може се истовремено постићи да у проширеној геометрији важе све аксиоме I—V. Ова проширена геометрија (добивена додавањем ирационалних елемената) није ништа друго до обична аналитичка Декартова геометрија простора, у којој важи и аксиома потпуности V_2.¹)

---

¹) Уп. примедбе на крају § 8.

Четврта глава

Учење о површинама у равни

§ 18. Разложива једнакост и допунска једнакост полигона

За основу наших испитивања ове четврте главе узећемо исте аксиоме као и у трећој глави, наиме линеарне аксиоме и аксиоме равни свих група, изузев аксиома непрекидности, тј. аксиома I_{1-3} и II—IV.

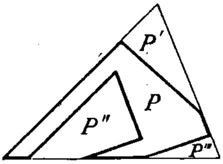
Учење о пропорцијама изложено у трећој глави и ту уведени рачун дужима дају нам могућност да заснујемо Еуклидово учење о површинама помоћу поменутих аксиома, тј. *у равни и независно од аксиома непрекидности.*

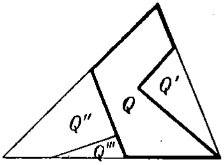
А пошто се, према излагањима у трећој глави, учење о пропорцијама углавном заснива на Паскаловом ставу (став 40), то исто важи и за учење о површинама; ово заснивање учења о површинама сматрам као једну од најзначајнијих примена Паскаловог става у елементарној геометрији.

Дефиниција. Ако се споје две тачке неког простог полигона P ма којом изломљеном линијом која цела лежи у унутрашњости тог полигона и која не садржи ниједну двоструку тачку, онда се добивају два нова проста полигона P_1 и P_2, чије све унутрашње тачке леже у унутрашњости полигона P; у том случају ћемо рећи: P се распада на P_1 и P_2, или P је разложено на P_1 и P_2, или P_1 и P_2 састављају P.

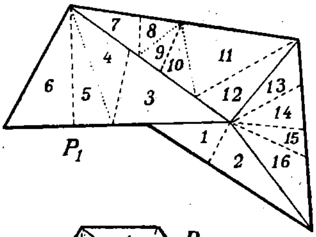
Дефиниција. Два проста полигона називају се *разложиво једнаким* ако се могу разложити у коначан број троуглова који су два и два међу собом подударна.

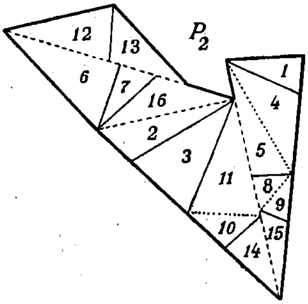
Дефиниција. Два проста полигона P и Q називају се *допунски једнаким* ако се њима може додати коначан број таквих по два и два разложиво једнаких полигона P', Q', P'', Q'', ..., P''', Q''', да оба на овај начин састављена полигона $P+P'+P''+\ldots+P'''$ и $Q+Q'+Q''+\ldots+Q'''$ буду разложиво једнака.

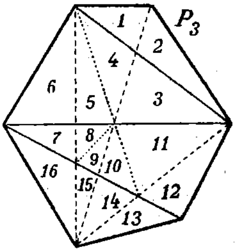




Из ових дефиниција непосредно следује: спајањем разложиво једнаких полигона добивају се опет разложиво једнаки полигони и ако се одузму разложиво једнаки полигони од разложиво једнаких полигона добивају се полигони допунски једнаки.







Даље важе ови ставови:

Став 43. Ако су два полигона P_1 и P_2 разложиво једнака неком трећем полигону P_3, они су и међусобно разложиво једнаки. Ако су два полигона допунски једнака неком трећем, они су међусобно допунски једнаки.

Доказ. Према претпоставци, може се навести како за полигон P_1 тако и за полигон P_2 једно разлагање у троугле, тако да сваком од ових разлагања одговара разлагање полигона P_3 у троугле подударне одговарајућим троуглима разлагања P_1 и P_2. Посматрајући истовремено оба ова разлагања полигона P_3, видимо, да се уопште сваки троугао једног разлагања разлаже у полигоне дужима, које припадају другом разлагању. Додајмо сада још толико дужи, да се сваки од ових полигона опет распада у троугле, и изведимо тада два одговарајућа разлагања у троугле у полигонима P_1 и P_2; тада се, очигледно, распадају оба ова полигона на исти број по два и два међу собом подударна троугла и зато су они, према дефиницији, међу собом разложиво једнаки.

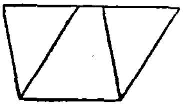
Доказ другог исказа става 43 добива се сад без тешкоћа.

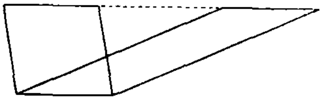
Дефинисаћемо на обичан начин појмове: *правоугаоник, основица и висина паралелограма, основица и висина троугла.*

§ 19. Паралелограми и троугли са једнаким основицама и висинама

Познати *Еуклидов* начин доказивања, илустрован на доњој слици, даје став:

Став 44. Два паралелограма са једнаким основицама и висинама допунски су једнака.

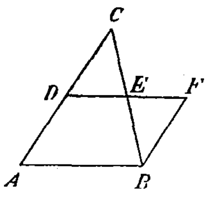




Даље важи позната чињеница:

Став 45. Сваки троугао ABC увек је допунски једнак извесном паралелограму који има исту основицу, а висина му је половина висине троугла.

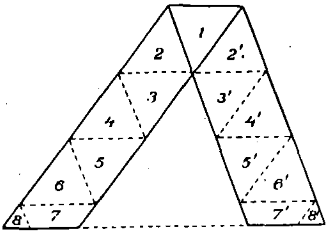
Доказ. Ако се страна AC преполови тачком D, а страна BC тачком E па се дуж DE продужи за своју сопствену дужину до тачке F, онда су троугли DCE и FBE један другом подударни и отуда су троугао ABC и паралелограм $ABFD$ разложиво једнаки.



Из ставова 44 и 45, узимајући у обзир став 43, непосредно следује:

Став 46. Два троугла са једнаким основицама и једнаким висинама међу собом су допунски једнака.

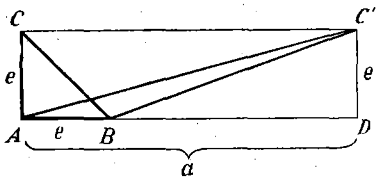
Као што је познато, лако се показује, што се види на приложеној слици, да су два паралелограма, а зато, према ставовима 43 и 45, и два троугла са једнаким основицама и висинама увек разложиво једнака. Приметимо ипак *да овај доказ није могућ без употребе Архимедове аксиоме;* уствари, у свакој не-архимедској геометрији (једна таква се може видети у другој глави § 12) могу се навести два троугла која имају једнаке основице и висине и отуда су, сходно ставу 46, допунски једнака, али ипак нису разложиво једнака.



Нека се, наиме, у некој неархимедској геометрији на полуправу пренесу две такве дужи $AB = e$ и $AD = a$, које ни за који цео број n не задовољавају однос

$$n \cdot e \geqq a.$$

Подигнимо на дужи AD у њеним крајњим тачкама нормале AC и DC' дужине e. Троугли ABC и ABC', према ставу 46, допунски су једнаки. Из става 23 следује да је збир двеју страна троугла већи од треће стране, где збир двеју страна треба разумети у смислу сегментног рачуна уведеног у трећој глави.



Тако је $BC < e + e = 2e$. Даље, може се доказати, не користећи се непрекидношћу, овај став: дуж, која цела лежи у унутрашњости троугла, мања је од његове највеће стране. Стога је свака дуж која лежи у унутрашњости троугла ABC мања од $2e$.

Претпоставимо сада да је дато разлагање троуглова ABC и ABC' на коначно много, напр. на k, по два и два међу собом подударна троугла. Свака страна делимичног троугла, који се користи за разлагање троугла ABC, лежи или у троуглу ABC или на једној његовој страни, тј. она је мања од $2e$. Обим сваког делимичног троугла је, дакле, мањи од $6e$; збир свих ових обима стога је мањи од $6k \cdot e$. Разлагање троуглова ABC и ABC' мора дати исти збир обима. Зато збир обима делимичних троуглова коришћених у разлагању троуглова ABC' мора бити мањи од $6k \cdot e$. Али, у овом збиру, сигурно, садржана је цела страна AC', тј. мора важити: $AC' < 6k \cdot e$, и стога, према ставу 23, тим пре важи: $a < 6k \cdot e$. Ово противречи нашој претпоставци у односу на дужи e и a. Према томе, претпоставка могућности разлагања троуглова ABC и ABC' у делимичне троугле подударне по два и два довела је до противречности.

Важни ставови елементарне геометрије о допунској једнакости полигона, нарочито Питагорина теорема, лако се изводе из малочас постављених ставова. Споменућемо још став:

Став 47. За произвољан троугао, а стога и за произвољан прост полигон, може се увек конструисати правоугли троугао који има једну катету 1 и који је са троуглом, одн. полигоном, допунски једнак.

Ово тврђење у односу на троугле лако се изводи на основу ставова 46, 42 и 43. Тврђење у односу на полигоне доказује се на овај начин. Разложимо дати прост полигон у троугле и одредимо за њих допунски једнаке правоугле троугле са по једном катетом 1. Ако катете дужине 1 схватимо као висине ових троуглова, онда, опет помоћу ставова 43 и 46, састављањем тих троуглова долазимо до тврђења (стр. 64).

Али, при даљем спровођењу теорије површина, наилазимо на једну битну тешкоћу. Управо, наша досадашња испитивања остављају нерешеним питање, да нису можда сви полигони допунски једнаки. У том случају сви досада постављени ставови не би казивали ништа и били би без икаквог значења. Са овим је у вези питање да ли два допунски једнака правоугаоника са једном заједничком страном морају имати и друге стране подударне.

Као што показује ближе разматрање, за одговор на ово постављено питање потребна је инверзија става 46, која овако гласи:

Став 48. *Ако два допунски једнака троугла имају једнаке основице, они имају и висине једнаке.*

Овај основни став 48 налази се у првој књизи *Еуклидових* Елемената као 39-ти став; али, при доказивању овог става, *Еуклид* се позива на општи став о величинама: „Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν“ (целина је већа од свог дела) — поступак који се своди на увођење нове геометриске аксиоме о допунској једнакости.[1]

Сада се став 48, а тиме и учење о површинама, може засновати и без такве нове аксиоме, на начин који смо овде усвојили, тј. помоћу аксиома равни и без употребе Архимедове аксиоме. Да бисмо ово увидели, неопходно је увести појам мере површине.

§ 20. Мера површине троуглова и полигона

Дефиниција. У равној геометрији права AB дели тачке које не леже на њој у две области тачака. За једну од ових области рећи ћемо да лежи *десно* од полуправе AB која полази из тачке A, одн. од *„усмерене дужи AB“*, и *лево* од полуправе која излази из тачке B одн. од „усмерене дужи BA“, за другу област каже се да лежи лево од полуправе AB и десно од полуправе BA. У односу на две усмерене дужи AB и AC иста област лежи десно, ако тачке B и C леже на истој полуправој која полази из тачке A (и обрнуто). — Ако је за неку полуправу g, која полази из тачке O, десна област већ дефинисана и ако полуправа h која из тачке O улази у ову област, онда ћемо казати за ону област у односу на h, која садржи g, да лежи лево од h. Увиђа се, да су на овај начин, полазећи од одређене полуправе AB, у равној геометрији једнозначно одређене лева и десна страна у односу на свaку полуправу одн. сваку усмерену дуж.

Тачке у унутрашњости (стр. 10) неког троугла ABC леже или лево од страна AB, BC, CA или лево од страна CB, BA, AC. У првом случају ћемо рећи: ABC (или BCA

---

[1] Уствари, у додатку II биће конструисана геометрија, у којој ће бити задовољене све аксиоме I—IV које су овде узете за основу, изузев аксиоме III_5, за коју је тамо одабрана ужа формулација и у којој не важи став 48 па према томе ни став „целина је већа од свог дела“.

или CAB) је *позитивни смер обилажења*, а CBA (или BAC или ACB) је *негативни смер обилажења* троугла; у другом случају ћемо рећи: CBA је позитиван, а ABC је негативан смер обилажења троугла.

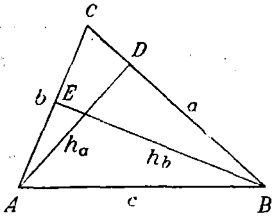
Дефиниција. Ако у троуглу ABC са странама a, b, c конструишемо две висине $h_a = AD$ и $h_b = BE$, онда из сличности троуглова BCE и ACD, по ставу 41, следује пропорција

$$a : h_b = b : h_a,$$

тј.

$$ah_a = bh_b;$$

према томе је у сваком троуглу производ основице и њој одговарајуће висине независан од тога која се страна троугла узме за основицу. Дакле, половина производа основице и висине јесте нека за троугао ABC карактеристична дуж a. Нека је, например, у троуглу ABC смер обилажења ABC позитиван. Позитивну дуж a (према дефиницији на стр. 61) назваћемо сад *мером површине троугла* ABC при позитивном обилажењу и означићемо је са $[ABC]$; негативну дуж $-a$ назваћемо *мером површине троугла* при негативном обилажењу и означићемо је са $[CBA]$.

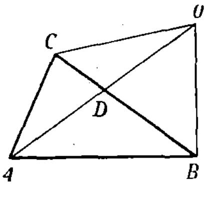


Став 49. Ако тачка O лежи ван троугла ABC, онда за меру површине троугла важи релација

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

Доказ. Претпоставимо најпре да се дужи OA и BC секу у некој тачки D. Тада, помоћу дистрибутивног закона у нашем рачуну дужима, из дефиниције мере површине следују релације:

$$[OAB] = [ODB] + [DAB],$$
$$[OBC] = -[OCB] = -[OCD] - [ODB],$$
$$[OCA] = [OCD] + [CAD].$$



Сабирањем дужи назначених у овим једначинама, ако се при томе искористи један од ставова наведених на стр. 61

добива се:

$$[OAB]+[OBC]+[OCA]=[DAB]+[CAD],$$

а одатле следује, опет на основи дистрибутивног закона,

$$[OAB]+[OBC]+[OCA]=[ABC].$$

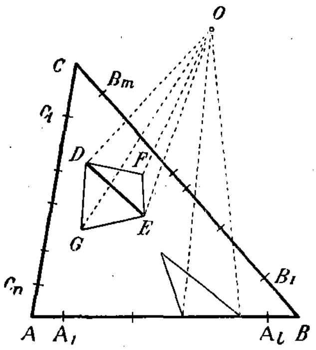
Остале могуће претпоставке у односу на положај тачке O, на сличан начин доводе до тврђења става 49.

Став 50. Ако се троугао ABC ма како разложи у коначан број троуглова Δ_k, онда је мера површине троугла ABC при његовом обилажењу у позитивном смеру једнака збиру мера површина свих троуглова Δ_k при позитивном смеру обилажења.

Доказ. Нека је напр. ABC позитивни смер обилажења код троугла ABC и нека је DE дуж у унутрашњости троугла ABC, којом се граниче два троугла DEF и DEG нашег разлагања. Нека је напр. DEF позитивни смер обилажења троугла DEF; тада је GED позитивни смер обилажења троугла DEG. Ако сад узмемо неку тачку O ван троугла ABC, онда према ставу 49, важе релације:

$$[DEF]=[ODE]+[OEF]+[OFD],$$

$$[GED]=[OGE]+[OED]+[ODG]=$$
$$=[OGE]-[ODE]+[ODG].$$



Сабирањем ових двеју сегментних једначина отпада на десној страни мера површине $[ODE]$.

Изразимо на овај начин, према ставу 49, мере површина свих троуглова Δ_k са позитивним смером обилажења и саберимо све тако добивене једначине. Тада за сваку дуж DE, која лежи у унутрашњости троугла ABC, са десне стране једначине отпада мера површине $[ODE]$. Ако означимо тачке, искоришћене при разлагању троугла ABC, које леже на његовим странама редом како следују са $A, A_1, \ldots, A_l, B, B_1, \ldots, B_m, C, C_1, \ldots, C_n$, и означимо збир мера површина свих троуглова Δ_k при позитивном смеру обилажења кратко са Σ, добива се, што се сада лако види, сабирањем свих сегментних једначина:

$$\begin{aligned}\Sigma = [OAA_1] + \cdots + [OA_l B] + \\ + [OBB_1] + \cdots + [OB_m C] + \\ + [OCC_1] + \cdots + [OC_n A] = \\ = [OAB] + [OBC] + [OCA],\end{aligned}$$

одакле, према ставу 49:

$$\Sigma = [ABC].$$

Дефиниција. Ако дефинишемо меру површине $[P]$ простог полигона при позитивном смеру обилажења као збир мера површина свих троуглова са позитивним смером обилажења на које се распада дати полигон при неком одређеном разлагању, онда, на основи става 50, дознајемо сличним начином закључивања који смо применили у § 18 при доказу става 43 да је мера површине $[P]$ независна од начина разлагања полигона у троугле и стога се једнозначно одређује само полигоном.

Из ове дефиниције закључујемо помоћу става 50 да разложиво једнаки полигони имају једнаке мере површине (овде, као и у наредним излагањима, под мером површине увек се разуме мера површине за позитивни смер обилажења).

Даље, ако су P и Q допунски једнаки полигони, то, према дефиницији, морају постојати таква по два и два разложиво једнака полигона $P', Q', \ldots, P'', Q''$, да полигон $P + P' + + \ldots + P''$ састављен од $P, P', \ldots, P''$ буде разложиво једнак полигону $Q + Q' + \ldots + Q''$ састављеном од $Q, Q', \ldots, Q''$. Из једначина

$$[P + P' + \ldots + P''] = [Q + Q' + \ldots + Q'']$$

$$[P'] = [Q']$$

$$\begin{gathered}\cdot\\\cdot\\\cdot\end{gathered}$$

$$[P''] = [Q'']$$

лако закључујемо да је

$$[P] = [Q],$$

тј. допунски једнаки полигони имају једнаке мере површине.

§ 21. Допунска једнакост и мера површине

Нашли смо у § 20 да допунски једнаки полигони увек имају једнаке мере површине. Из ове чињенице изводимо непосредно доказ става 48. Наиме, означимо ли једнаке основице оба троугла са g, одговарајуће висине са h и h' онда из претпостављене допунске једнакости оба троугла закључујемо да ти троугли такође морају имати једнаке мере површина, тј. следује

$$\frac{1}{2} gh = \frac{1}{2} gh'$$

и после деоба са $\frac{1}{2} g$

$$h = h';$$

ово је тврђење става 48.

Сада се може такође обрнути исказ учињен на крају § 20. Уствари, нека су P и Q два полигона са једнаким мерама површине. Конструишимо, према ставу 47, два правоугла троугла Δ и E која имају ово својство: нека сваки има једну катету 1 и нека је даље троугао Δ допунски једнак полигону P, а троугао E — полигону Q. Из става, доказаног на крају § 20, следује тада да Δ и P имају једнаке мере површина, а исто тако E и Q. Из тога следује, због једнакости мера површина полигона P и Q да и троуглови Δ и E имају једнаке мере површина. А пошто ова два троугла имају једнаке катете 1, они морају имати и друге катете једнаке тј. троугли Δ и E су међу собом подударни, а стога су, према ставу 43, полигони P и Q међу собом допунски једнаки.

Обе чињенице нађене у овом и претходном параграфу обухватићемо у следећем ставу:

Став 51. *Два допунски једнака полигона имају увек исту меру површине, а два полигона са истом мером површине увек су међу собом допунски једнака.*

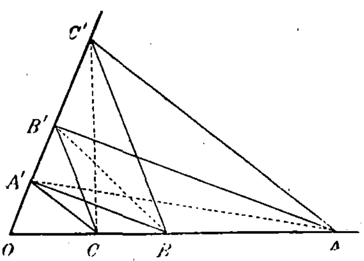
Нарочито два допунски једнака правоугаоника који имају једну заједничку страну морају имати и друге стране једнаке. Отуда следује став:

Став 52. Ако се правоугаоник разложи помоћу правих у више троуглова и ако се изостави само један од ових троуглова, онда се правоугаоник не може више испунити осталим троугловима.

Овај су став узели Дезолт[1] (De Zolt) и О. Штолц[2] (O. Stolz) као аксиому, а Ф. Шур[3] и В. Килинг[4] (W. Killing) су га доказали помоћу Архимедове аксиоме. У претходном излагању је показано да је ова теорема потпуно независна од Архимедове аксиоме.

За доказ ставова 48, 50, 51 битно смо искористили рачун дужима уведен у трећој глави § 15, а пошто се овај рачун дужима углавном заснива на Паскаловом ставу (став 40) или, тачније, на специјалном случају (стр. 53) овог става, то се показује да је Паскалов став најважнији елемент за изградњу учења о површинама.

Лако дознајемо да се и обрнуто Паскалов став може добити из ставова 46 и 48. Уствари, из паралелности правих CB' и $C'B$ следује, према ставу 46, допунска једнакост троуглова OBB' и OCC'; исто тако из паралелности правих CA' и AC' следује да су троугли OAA' и OCC' допунски једнаки. Пошто су, према томе, и троугли OAA' и OBB' допунски једнаки, то се из става 48 добива да праве BA' и AB'морају бити паралелне.



Даље, лако увиђамо да полигон који цео лежи у унутрашњости другог полигона увек има мању меру површине но овај други и зато, према ставу 51, не може бити њему допунски једнак. Ова чињеница садржи став 52 као специјалан случај.

---

[1] De Zolt, Principii della eguaglianza di poligoni preceduti da alcuni critici sulla teoria della equivalenza geometrica. Milano, Briola 1881. Уп. такође Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici. Milano, Briola 1883.

[2] O. Stolz, Monatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5, 1894.

[3] F. Schur, Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges. 1892.

[4] W. Killing, Grundlagen der Geometrie, књ. 2, Abschnitt 5, § 5, 1898

Са овим смо засновали битне ставове учења о површинама у равни.

Још је Гаус (K. F. Gauss) обратио пажњу математичара на слично питање за простор. Изразио сам претпоставку да је немогуће слично заснивање учења о запреминама и поставио одређени задатак[1] — наћи два тетраедра са једнаким основама и једнаким висинама који се не могу ни на који начин разложити на конгруентне тетраедре и који се такође не би могли допунити додавањем подударних тетраедара до таквих полиједара који би се могли са своје стране разложити на подударне тетраедре.

М. Ден[2] је успео да ово стварно докаже; тиме је он на строг начин доказао немогућност да се заснује учење о запреминама на начин како је то горе учињено за површине у равни.

Према томе за обраду сличних питања за простор требало би узети друга помоћна средства, напр. Каваљеријев принцип.[3]

У овом смислу је В. Зис[4] засновао учење о запреминама. В. Зис назива два тетраедра једнаких висина и допунски једнаких основица једнаким у Каваљеријевом смислу; осим тога он назива два полиједра, која се могу разложити у коначно много у Каваљеријевом смислу по два и два једнаких тетраедара, допунски једнаким у Каваљеријевом смислу; најзад, два полиједра, која се могу претставити као разлика у Каваљеријевом смислу разложиво једнаких полиједара, он назива

---

[1] Уп. моје предавање „Mathematische Probleme“ Nr. 3.

[2] M. Dehn, „Über raumgleiche Polyeder“, Göttinger Nachr. 1900, као и „Über den Rauminhalt“, Math. Ann. књ. 55, 1902; уп. даље Каган (V. F. Kagan), Math. Ann. књ. 57.

[3] Само први део става 51 као и став 48 и став 52 важе аналогно за простор; уп., например, Шатуновски (Schatunowsky), „Über den Rauminhalt der Polyeder“. Math. Ann. књ. 57. M. Dehn је у расправи „Über den Inhalt sphärischer Dreiecke“ Math. Ann. књ. 60, показао да се може засновати учење о величини површине у равни и без аксиоме паралелних, само помоћу ставова о подударности. Нека се погледа даље Финцел (Finzel), „Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie“, Math. Ann. књ. 72.

[4] В. Зис (W. Süss), „Begründung der Lehre vom Polyederinhalt“, Math. Ann. књ. 82.

разложиво једнаким у Кавальеријевом смислу. Може се доказати, без употребе аксиоме непрекидности да су једнакост запремина и допунска једнакост у Кавальеријевом смислу — еквивалентни појмови, док се разложива једнакост у Кавальеријевом смислу код полиједара једнаких запремина може доказати само помоћу Архимедове аксиоме.

Да поменемо као новији наредни резултат који је добио J. П. Сидлер (J. P. Sydler)[1]: Став, да су два и два допунски једнака полигона и разложиво једнака, који се добива за раван из става 51 и разматрања на стр. 67 (после става 46), може се, под претпоставком Архимедове аксиоме, проширити на полиједре у простору. Овом резултату се даље прикључује констатација да множина класа еквиваленције полиједара у односу на разложиву једнакост има моћ континуума.

---

[1] Sur la décomposition des polyèdres. Comm. Helv. 16, 266—273, 1943/44.

Пета глава

Дезаргов став

§ 22. Дезаргов став и његов доказ у равни помоћу аксиома подударности

Од аксиома постављених у првој глави, све аксиоме група II—V делом су линеарне, а делом аксиоме равни; аксиоме 4—8 групе I су једине просторне аксиоме. Да бисмо јасно увидели значај ових просторних аксиома, замислимо да је дата нека равна геометрија и испитајмо уопште услове за то да се та равна геометрија може схватити као део просторне геометрије, у којој су задовољене све аксиоме претпостављене у равној геометрији, а осим тога просторне аксиоме везе I_{4-8}.

У овој и наредној глави нећемо се уопште користити аксиомама подударности. Услед тога овде се мора за основу узети аксиома паралелних IV (стр. 27) у оштријој формулацији:

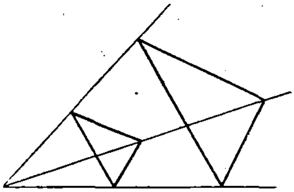
IV* (аксиома паралелних у оштријој формулацији). *Нека је a произвољна права и A тачка која лежи ван a: тада у равни која је одређена правом a и тачком A постоји једна и само једна права која пролази кроз тачку A и не пресеца праву a.*

Као што је познато, на основу аксиома група I—II, IV*, може се доказати такозвани Дезаргов (Desargues) став; Дезаргов став јесте став о пресечним тачкама у равни. Нарочито истичемо праву на којој треба да леже пресечне тачке одговарајућих страна оба троугла као такозвану „бесконачно далеку праву“ и тако добивени став заједно са његовом инверзијом назваћемо просто Дезарговим ставом; овај став гласи:

Став 53 (Дезаргов став). Ако два троугла леже у равни тако да су им по две и две одговарајуће стране међу собом паралелне, то праве које спајају одговарајућа темена или пролазе кроз исту тачку или су међу собом паралелне, и обрнуто:

Ако два троугла леже у равни тако да линије које спајају одговарајућа темена или пролазе кроз једну тачку или су међу собом паралелне и ако, даље, имају два пара одговарајућих страна међу собом паралелних, онда су и треће стране тих троуглова међу собом паралелне.

Како је већ речено, став 53 је последица аксиома I, II, IV*; према овој чињеници важење Дезарговог става у равној геометрији свакако је **нужан** услов да би се ова геометрија могла схватити као део просторне геометрије у којој су задовољене све аксиоме група I, II, IV*.



Узмимо сад, као и у трећој и четвртој глави, **равну** геометрију, у којој важе аксиоме I_{1-8} и II—IV, и замислимо према § 15, да је у ту геометрију уведен рачун дужима: тада се може, као што је то изложено у § 17, доделити свакој тачки те равни пар дужи (x, y) и свакој правој размера трију дужи $(u : v : w)$, при чему u, v нису оба нула, тако да линеарна једначина

$$ux+vy+w=0$$

претставља услов инциденције тачке и праве. Систем свих дужи у нашој геометрији образује, према § 17, бројно подручје, за које важе својства 1—16 набројана у § 13; и зато можемо помоћу овог бројног подручја конструисати просторну геометрију слично ономе што је урађено у § 9 или § 12 помоћу бројних система Ω и $\Omega(t)$; због тога узмимо да систем трију дужи (x, y, z) претставља тачку, а размера четири дужи $(u : v : w : r)$, у коме u, v, w нису истовремено једнаки нули, претставља раван, док би праве биле дефинисане као пресеци двеју равни; при томе линеарна једначина

$$ux+vy+wz+r=0$$

изражава да тачка (x, y, z) лежи у равни $(u : v : w : r)$. Најзад што се тиче распореда тачака на правој или распореда тачака равни у односу на праву у њој или, најзад, распореда тачака у односу на раван у простору, он се одређује помоћу неједначина међу дужима на сличан начин како је то урађено у § 9 за раван.

Пошто, уношењем вредности $z = 0$ опет добивамо првобитну равну геометрију, увиђамо да се наша равна геометрија може сматрати као део просторне геометрије. Но, према горњим излагањима, за то је нужан услов важење Дезарговог става, а отуда произлази да у усвојеној равној геометрији мора важити Дезаргов став. Овај став је, дакле, последица аксиома I_{1-3}, II—IV.

Приметимо да се ова сад нађена чињеница може без муке и директно извести из става 42 у учењу о пропорцијама или из става 61.

§ 23. Немогућност доказа Дезарговог става у равни без аксиома подударности

Сада ћемо размотрити питање да ли се Дезаргов став може доказати и без употребе аксиома подударности. При томе ћемо доспети до наредног резултата:

Став 54. *Постоји равна геометрија у којој су задовољене аксиоме* I_{1-3}, II, III_{1-4}, IV*, V, *тј. све линеарне аксиоме и аксиоме равни, изузев аксиоме подударности* III_5, *а Дезаргов став не важи (став 53). Дезаргов став се, према томе, не може извести само из поменутих аксиома; за његов доказ неопходне су или просторне аксиоме или аксиома* III_5 *о подударности троуглова.*

Доказ[1]. У обичној равној Декартовој геометрији, чију смо могућност већ доказали у другој глави § 9, применићемо дефиницију правих линија и углова на овај начин.

---

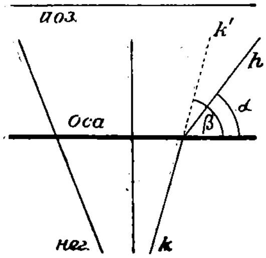
[1] Уместо прве „недезарговске геометрије“ наведене на овом месту у ранијим издањима ове књиге, биће у наредном излагању дата нешто простија недезарговска геометрија коју је конструисао Мултон (F. R. Moulton). Уп. F. R. Moulton, „A simple non-desarguesian plane geometry“, Trans. Math. Soc., 1902.

Узмимо ма коју праву Декартове геометрије као осу и разликујмо на овој оси позитивни и негативни смер, као и позитивну и негативну полураван у односу на ову осу.

Узмимо сада као праву наше нове геометрије осу и сваку према њој паралелну праву Декартове геометрије, затим сваку праву Декартове геометрије, чија полуправа која лежи у позитивној полуравни образује са позитивним смером осе прав или туп угао, и, најзад, сваки систем двеју полуправих h, k Декартове геометрије који има ово својство: заједничко теме од h и k лежи на оси; полуправа h, која лежи у позитивној полуравни, образује са позитивним смером осе оштар угао α, а продужење k' полуправе k, која лежи у негативној полуравни, образује са позитивним смером осе угао β тако да у Декартовој геометрији важи релација

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = 2.$$

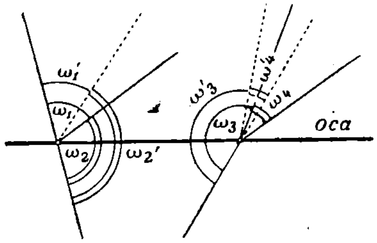
Распоред тачака и дужине дужи и на оним правима које се у Декартовој геометрији претстављају као систем две полуправе дефинишу се на очигледан начин, као и обично. У тако дефинисаној геометрији, што се лако увиђа, важе аксиоме I_{1-3}, II, III_{1-8}, IV*; напр. непосредно је јасно да праве које пролазе кроз једну тачку једноструко покривају раван. Осим тога у тој геометрији важе и аксиоме V.

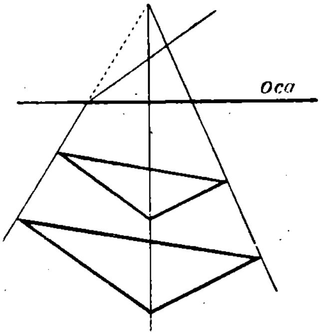


Сви углови који немају ниједан крак који иде од осе по позитивној полуравни и образује са позитивним смером осе оштар угао, мере се обично као и у Декартовој геометрији. Ако је пак бар један крак угла ω полуправа k са малочас наведеним својствима, онда ћемо као величину угла ω у новој геометрији дефинисати величину оног угла ω' Декартове геометрије, који има за крак полуправу k' место h (видети претходну слику). Овај поступак дефинисања за два пара упоредних углова показује фигура лево. На основу наше дефиниције углова важи и аксиома III_4;

нарочито за сваки угао $\sphericalangle(l, m)$ важи:

$$\sphericalangle(l, m) \equiv \sphericalangle(m, l).$$





Напротив, као што показује слика десно и што се лако рачуном потврђује, **Дезаргов став у новој равној геометрији не важи.** Осим тога, исто је тако лако нацртати фигуру која показује да ни Паскалов став не важи.

Овде изложена равна „недезарговска" геометрија служи истовремено као пример равне геометрије, у којој важе аксиоме I_{1-3}, II, III_{1-4}, IV*, V и која се ипак не може сматрати као део просторне геометрије[1].

§ 24. Увођење сегментног рачуна без употребе аксиома подударности на основу Дезарговог става[2]

Да бисмо потпуно увидели значај Дезарговог става (став 53), узмимо за основу равну геометрију, у којој важе аксиоме I_{1-3}, II, IV*[3], тј. све линеарне аксиоме и аксиоме

---

[1] Даље интересантне примере недезарговских система линија дао је Х. Морман (H. Mohrmann), Festschrift David Hilbert, Berlin, 1922, стр. 181.

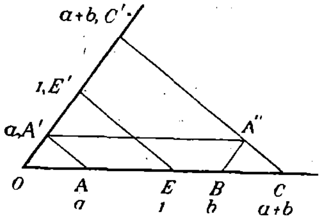
[2] Г. Хесенберг је у своме раду „Über einen geometrischen Kalkül", Acta math. књ. 29, 1904, дао извођење сегментног рачуна које се прикључује идејама геометрије положаја. Неки делови овог извођења добивају се лакше ако се најпре развије сабирање вектора у равни на основу Дезарговог става. Уп. Хелдер (Hölder), „Streckenrechnung und projektive Geometrie", Leipz. Ber. 1911.

[3] Може се увести нови сегментни рачун и без аксиоме паралелних IV* са пројективном формулацијом Дезарговог става.

равни, осим аксиома подударности и непрекидности, и уведимо у ову геометрију нови рачун дужима, независно од аксиома подударности, на овај начин:

Узмимо у равни две сталне праве, које се секу у тачки O, и у даљим излагањима рачунајмо само таквим дужима, чија је почетна тачка O и чије крајње тачке произвољно леже на једној од ових двеју сталних правих. И саму тачку O сматрајмо као дуж O, што ћемо означити овако:

$$OO = 0 \quad \text{или} \quad 0 = OO.$$



Нека су E и E' по једна одређена тачка на сталним правима које пролазе кроз тачку O; тада ћемо сматрати обе дужи OE и OE' као дужи 1; у знацима:

$$OE = OE' = 1$$

или

$$1 = OE = OE'.$$

Праву EE' кратко називамо јединичном правом. Даље, ако су A и A' тачке на правима OE одн. OE' иа ко је при томе права која спаја AA' паралелна према EE', онда ћемо дужи OA и OA' назвати једнаким и то ћемо означити овако:

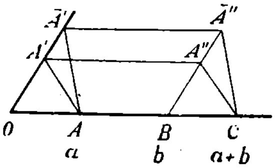
$$OA = OA' \quad \text{или} \quad OA' = OA.$$

Да бисмо најпре дефинисали збир дужи $a = OA$ и $b = OB$, које леже на OE, конструишимо AA' паралелно према јединичној правој EE' и повуцимо затим кроз A' праву паралелну према OE и кроз B праву паралелну према OE'. Ове ће се две паралелне сећи у некој тачки A''. Најзад, повуцимо кроз тачку A'' праву паралелну према јединичној правој EE'; она пресеца сталне праве OE и OE' у по једној тачки, C и C'; тада ћемо дуж $c = OC = OC'$ назвати збиром дужи $a = OA$ и $b = OB$, што ћемо означити овако:

$$c = a + b \quad \text{или} \quad a + b = c.$$

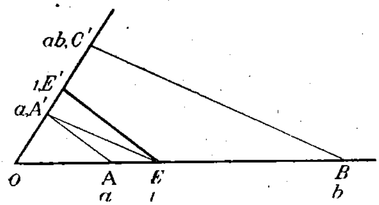
Пре него што пређемо даље, показаћемо да, кад се претпостави да важи Дезаргов став (став 53), збир двеју дужи се може добити и на општији начин: тачка C, која одређује збир $a + b$ на оној правој, на којој леже тачке A и B, не зависи од јединичне праве EE' од које смо пошли, тј. ми ћемо добити ову тачку C и помоћу наредне конструкције:

Одаберимо на правој OA' ма коју тачку $\bar{A}'$ и повуцимо кроз тачку B паралелну према $O\bar{A}'$ и кроз тачку $\bar{A}'$ паралелну према OB. Ове се две праве секу у некој тачки $\bar{A}''$. Права повучена после тога кроз тачку $\bar{A}''$ паралелно према $A\bar{A}'$ пресеца праву OA у тачки C, која одређује збир $a + b$.



Ради доказа претпоставимо да су како тачке A' и A'' тако и тачке $\bar{A}'$ и $\bar{A}''$ добивене на наведени начин и да је тачка C на правој OA тако одређена, да права CA'' буде паралелна према AA'. Троугли $AA'\bar{A}'$ и $CA''\bar{A}''$ леже тако да су линије које спајају одговарајућа темена тих троуглова паралелне, а пошто су, сем тога, одговарајуће стране двају парова, наиме $A'\bar{A}'$ и $A''\bar{A}''$ као и AA' и CA'', паралелне, то су, уствари, према другом исказу Дезарговог става, и треће стране $A\bar{A}'$ и $C\bar{A}''$ међу собом паралелне.

Да бисмо дефинисали производ дужи $a = OA$ и дужи $b = OB$, послужићемо се потпуно истом конструкцијом датом у § 15, само што ћемо овде узети уместо кракова правог угла обе сталне праве OE и OE'. Конструкција је према томе следећа: одреди се на правој OE тачка A', тако да је AA' паралелно јединичној правој EE'; тачка E се споји са тачком A' и повуче кроз тачку B паралелна према EA'; ова паралелна пресеца сталну праву OE' у некој тачки C'; дуж $c = OC$ назваћемо производом дужи $a = OA$ и дужи $b = OB$ и писати:



$$c = ab \quad \text{или} \quad ab = c.$$

§ 25. Комутативни и асоцијативни закон сабирања у новом сегментном рачуну

За наш нови рачун дужима, у што се лако уверавамо, важе сви ставови везе постављени у § 13; сада ћемо испитати која од рачунских правила постављених тамо важе у нашем новом рачуну дужима, ако се за основу узме равна геометрија, у којој су задовољене аксиоме I_{1-3}, II, IV* и осим тога важи Дезаргов став.

Показаћемо пре свега, да за сабирање дужи дефинисано у § 24, важи комутативни закон

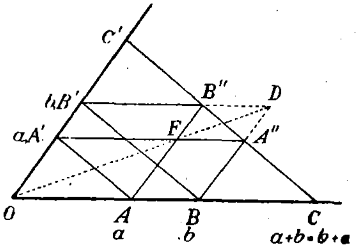
$$a + b = b + a.$$

Нека је

$$a = OA = OA',$$

$$b = OB = OB',$$

при чему су, сходно нашим поставкама, AA' и BB' паралелне јединичној правој. Конструишимо сад тачке A'' и B'', повлачећи $A'A''$ и $B'B''$ паралелно према OA' и даље AB'' и BA'' паралелно према OA'; као што се одмах види, тада наше тврђење исказује да је спојна права $A''B''$ паралелна према AA'. Тачност овог тврђења увиђамо на основу Дезарговог става (став 53) на овај начин: означимо пресечну тачку правих AB'' и $A'A''$ са F, а пресечну тачку правих BA' и $B'B''$ са D; тада ће у троуглима $AA'F$ и $BB'D$ одговарајуће стране бити међу собом паралелне. Помоћу Дезарговог става одатле закључујемо да три тачке O, F, D, леже на једној правој. Услед ове околности троугли OAA' и $DB''A''$ леже тако да праве које спајају одговарајућа темена пролазе кроз исту тачку F. Пошто су, осим тога, одговарајуће стране двају парова, наиме OA и DB'' као и OA' и DA'', паралелне, биће, према другом исказу Дезарговог става (став 53), и треће стране AA' и $B''A''$ паралелне.



Истовремено из овог доказа следује да је потпуно свеједно од које се од двеју сталних правих полази при конструкцији збира двеју дужи.

Даље важи асоцијативни закон сабирања:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

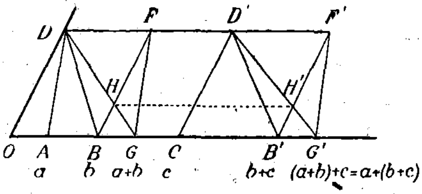
Нека су на правој OE дате дужи

$$a = OA, \quad b = OB, \quad c = OC.$$

На основу општег правила сабирања датог у претходном параграфу могу се збирови

$$a + b = OG, \quad b + c = OB', \quad (a + b) + c = OG$$

конструисати на овај начин: изаберимо произвољно на правој OE' тачку D и спојимо је са тачкама A и B. Праву повучену паралелно кроз тачку D према OE пресецају обе паралелне према OD, повучене кроз тачке B и C, у по једној тачки F одн. D'. Праве повучене паралелно кроз тачку F према AD одн. кроз тачку D' паралелно према BD пресецају сада праву OA у горе поменутим тачкама G одн. B'; даље, права повучена кроз тачку D' паралелно према GD пресеца праву OA у исто тако поменутој тачки G'. Најзад се збир $a + (b + c)$ добива кад најпре повучемо кроз тачку B' паралелну према OD, коју права DD' пресеца у некој тачки F', и кад повучемо кроз тачку F' паралелну према AD. Према томе треба доказати да је права $G'F'$ паралелна према правој AD. Означимо сада пресечну тачку правих BF и GD са H и пресечну тачку правих $B'F'$ и $G'D'$ са H'. Тада су у троуглима BDH и $B'D'H'$ одговарајуће стране паралелне; а пошто су, даље, праве BB' и DD' међу собом паралелне, то је, према Дезарговом ставу, и права HH' паралелна овим двема правима. Према томе можемо применити други исказ Дезарговог става на троугле GFH и $G'F'H'$ па из тога сазнати да је права $G'F'$ паралелна према GF, а зато, свакако, и према AD.



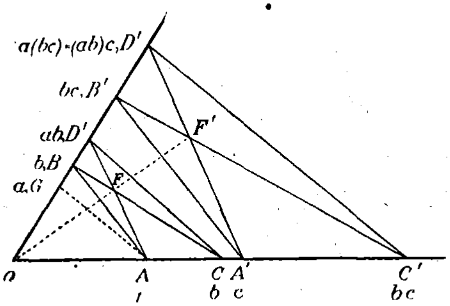
§ 26. Асоцијативни закон множења и два дистрибутивна закона у новом сегментном рачуну

При нашим претпоставкама и за множење дужи важи **асоцијативни** закон:

$$a\,(bc) = (ab)\,c.$$

Нека су на првој од двеју сталних правих кроз тачку O дате дужи

$$1 = OA, \quad b = OC, \quad c = OA',$$



а на другој правој дужи

$$a = OG \quad \text{и} \quad b = OB.$$

Да бисмо, према правилу у § 24, редом конструисали дужи

$$bc = OB' \quad \text{и} \quad bc = OC',$$

$$ab = OD,$$

$$(ab)\,c = OD',$$

повуцимо $A'B'$ паралелно са AB, $B'C'$ паралелно са BC, CD паралелно са AG, као и $A'D'$ паралелно са AD; како се одмах види, тада се наше тврђење своди на то да и CD мора бити паралелно са $C'D'$. Означимо ли сада пресечну тачку правих AD и BC са F, а пресечну тачку правих $A'D'$ и $B'C'$ са F', то ће у троуглима ABF и $A'B'F'$ одговарајуће стране бити међу собом паралелне; отуда, према Дезарговом ставу, три тачке O, F, F' леже на једној правој. Захваљујући овој околности, можемо применити други исказ Дезарговог става на троугле CDF и $C'D'F'$ и одатле увидети да је уствари CD паралелно са $C'D'$.

Најзад ћемо доказати у нашем рачуну дужима на основу Дезарговог става оба дистрибутивна закона

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

и

$$(b + c)\,a = ba + ca.$$

Ради доказа **првог дистрибутивног закона**

$$a\,(b + c) = ab + ac$$

претпоставимо да су на првој од двеју сталних правих дате дужи:

$$1 = OE, \quad b = OB, \quad c = OC,$$

а на другој:

$$a = OA.$$

Праве које су повучене паралелно према правој EA кроз тачке B и C пресецају праву OA у по једној тачки, D одн. F. Тада је на основу правила о множењу (§ 24),

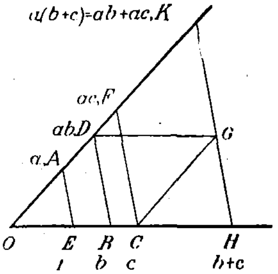
$$OD = ab, \quad OF = ac.$$

Према општијем правилу сабирања у § 24 збир

$$OH = b + c$$

добивамо ако повучемо кроз тачку C паралелну према OD и кроз D паралелну према OC, па затим кроз пресечну тачку G ових двеју правих паралелну према BD, која пресеца праву OC у већ поменутој тачки H и праву OD у некој тачки K. Пошто је $OH = b + c$, на основу правила о множењу важи

$$OK = a\,(b + c).$$



На основу општијег правила о сабирању и на основу онога што је доказано на стр. 84, да сталне праве OE и OE' могу разменити улоге при конструкцији збира, може се најзад конструисати збир $ac + ab$ на овај начин: повуцимо ма кроз коју тачку праве OE, напр. кроз C, праву CG, паралелну према OD, затим кроз тачку D паралелну DG према OC и, најзад, кроз тачку G паралелну GK према CF.

Дакле, важи

$$OK = ac + ab,$$

а отуда се помоћу комутативног закона сабирања изводи први дистрибутивни закон.

Најзад, да бисмо доказали **други дистрибутивни закон**, претпоставимо да су на првој од двеју сталних правих дате дужи:

$$1 = OE, \quad a = OA,$$

а на другој сталној правој дужи:

$$b = OB, \quad c = OC.$$

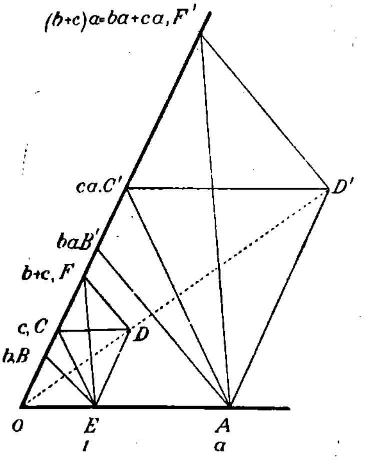
Права AB' паралелна према EB и права AC' паралелна према EC одређују дужи

$$OB' = ba, \quad OC' = ca.$$

Конструишимо дужи

$$OF = b + c, \quad OF' = ba + ca$$

опет на сталној правој OB према општијем правилу сабирања на овај начин: Повуцимо паралелне кроз тачку C према OE и кроз тачку E према OC. Оне се секу у некој тачки D, кроз коју повуцимо паралелну према EB, коју OA пресеца у горе поменутој тачки F. Исто тако повуцимо кроз тачку A паралелну према OC', а кроз C' паралелну према OA. Оне се секу у некој тачки D'; кроз ову тачку повуцимо паралелну према AB', коју OA пресеца у поменутој тачки F'.



Према правилу множења други дистрибутивни закон биће доказан ако се покаже да је права AF' паралелна према правој EF.

У троуглима ECD и $A'C'D'$ одговарајуће стране су међу собом паралелне; зато, према Дезарговом ставу, три тачке O, D, D' леже на једној правој. Стога можемо применити други исказ Дезарговог става на троугле EDF и $AD'F'$ и увидети да су праве AF' и EF заиста паралелне.

§ 27. Једначина праве на основу новог сегментног рачуна

Ми смо увели сегментни рачун од § 24 до § 26 помоћу аксиома наведених у § 24 и претпостављајући важење Дезарговог става за раван. У овом рачуну дужима важе, осим ставова везе постављених у § 13, асоцијативни закони сабирања и множења, као и оба дистрибутивна закона. Да комутативни закон није неопходан, видећемо у § 33. Показаћемо у овом параграфу на који начин је могуће аналитичко претстављање тачака и правих у равни на основу овог рачуна дужима.

Дефиниција. Две сталне праве узете у равни кроз тачку O назваћемо осама X и Y и замислићемо да је свака тачка P у равни одређена дужима x, y, које се добивају на осама X и Y, повлачећи кроз тачку P паралелне према овим осама. Ове дужи x, y назваћемо *координатама* тачке P.

На основу новог сегментног рачуна и помоћу Дезарговог става доспевамо до наредне чињенице:

Став 55. *Координате x, y тачке на произвољној правој увек задовољавају сегментну једначину наредног облика:*

$$ax+by+c=0;$$

у овој једначини морају стајати дужи a, b са леве стране од координата x, y; дужи a, b никад нису истовремено нула, и c је произвољна дуж.

Обрнуто: свака сегментна једначина описане врсте претставља увек праву у разматраној равној геометрији.

Доказ. Апсциса x ма које тачке P на оси Y или према њој паралелне праве не зависи од избора тачке P на тој правој, тј. таква се права може претставити у облику:

$$x=\bar{c}.$$

Дужи $\bar{c}$ одговара дуж c, тако да је

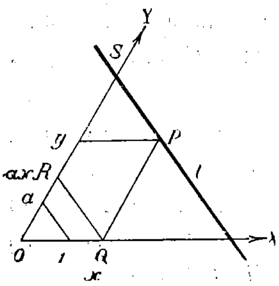
$$\bar{c}+c=0,$$

а стога важи и

$$x+c=0.$$

Ова једначина има облик тражене врсте.

Нека је сад l права која пресеца Y-осу у некој тачки S. Повуцимо кроз произвољну тачку P ове праве паралелну према Y-оси која пресеца X-осу у тачки Q. Дуж $OQ = x$ је апсциса тачке P. Паралелна према l кроз тачку Q отсеца на Y-оси дуж OR, а према дефиницији множења важи



$$OR = ax,$$

где је a дуж, која зависи само од положаја праве l, а не зависи од избора тачке P на l. Нека је y ордината од P. Према проширеној дефиницији збира датој на стр. 83—84 и услед већ на стр. 84 доказане могућности да се конструише збир полазећи од Y-осе, дуж OS сада претставља збир $ax + y$. Дуж $OS = \bar{c}$ је дуж која је одређена само положајем праве l. Из једначине

$$ax + y = \bar{c}$$

следује

$$ax + y + c = 0,$$

где је c опет дуж која је одређена једначином $\bar{c} + c = 0$. Последња једначина праве $ax + y + c = 0$ има захтевани облик.

Лако се види да координате оне тачке која не лежи на правој l не задовољавају ову једначину.

Исто тако је лако доказати други део става 55. Наиме, ако је дата сегментна једначина

$$a'x + b'y + c' = 0,$$

у којој дужи a' и b' нису обе нула, помножићемо, у случају да је $b' = 0$, слева чланове једначине са дужи a, која је одређена релацијом $aa' = 1$, у случају пак да буде $b' \neq 0$, — са дужи b, која је одређена релацијом $bb' = 1$. Тада ћемо, на основу правила рачуна, добити једну од малочас изведених једначина правих и можемо лако у посматраној равној геометрији конструисати праву која задовољава ову једначину.

Треба изричито приметити да при нашим претпоставкама сегментна једначина облика

$$xa + yb + c = 0,$$

у којој дужи a, b стоје десно од координата x, y, уопште не претставља праву.

У § 30 имаћемо важну примену става 53.

§ 28. Укупност дужи схваћена као комплексни бројни систем

Поменули смо већ да су у нашем новом рачуну дужима, заснованом у § 24, задовољени ставови 1—6 у § 13.

Даље, у § 25 и § 26 увидели смо помоћу Дезарговог става, да за овај рачун дужима важе закони рачуна 7—11 у § 13; према томе, постоје сви ставови везе и правила рачуна, изузев комутативног закона множења.

Најзад, да бисмо омогућили распоред дужи, установићемо ово: нека су A и B две ма које различите тачке праве OE; поређајмо сада четири тачке O, E, A, B, према ставу 5 тако, да тачка E стоји иза тачке O. Стоји ли у овом поретку и тачка B иза тачке A, рећи ћемо да је дуж $a = OA$ мања од дужи $b = OB$, што ћемо означити:

$$a < b;$$

напротив, стоји ли у поменутом поретку тачка A иза B, рећи ћемо да је дуж $a = OA$ већа од дужи $b = OB$; у знацима:

$$a > b.$$

Лако увиђамо да су сад у нашем сегментном рачуну, на основу аксиоме II, задовољени закони рачуна 13—16; према томе, укупност свих различитих дужи образује комплексни бројни систем, за који важе закони 1—11, 13—16 у § 13, тј. сва правила осим комутативног закона множења и ставова о непрекидности; у даљим излагањима такав бројни систем зваћемо кратко *Дезарговим бројним системом.*

§ 29. Изграђивање просторне геометрије помоћу Дезарговог бројног система

Нека је дат ма који Дезаргов бројни систем D; овај нам систем омогућава да изградимо просторну геометрију, у којој су задовољене све аксиоме I, II, IV*.

Да бисмо ово увидели, замислимо систем ма која три броја (x, y, z) Дезарговог бројног система D као тачку, а систем ма која четири броја $(u : v : w : r)$ система D, од којих прва три нису истовремено 0, као раван; али, нека системи $(u : v : w : r)$ и $(au : av : aw : ar)$, где a значи ма који број различит од 0 у систему D, претстављају исту раван. Нека постојање једначине

$$ux + vy + wz + r = 0$$

изражава да тачка (x, y, z) лежи у равни $(u : v : w : r)$. Најзад, дефинишимо праву помоћу система двеју равни $(u' : v' : w' : r')$ и $(u'' : v'' : w'' : r'')$, ако се у систему D не може наћи број a различит од 0, тако да истовремено буде

$$au' = u'', \quad av' = v'', \quad aw' = w''.$$

Рећи ће се да тачка (x, y, z) лежи на овој правој

$$[(u' : v' : w' : r'), \ (u'' : v'' : w'' : r'')],$$

ако је заједничка за обе равни $(u' : v' : w' : r')$ и $(u'' : v'' : w'' : r'')$. Сматра се да две праве које садрже исте тачке нису различите.

Примењујући законе рачуна 1—11 у § 13, који треба да важе према претпоставци за бројеве система D, доспећемо без тешкоћа до резултата: да су у малочас постављеној просторној геометрији све аксиоме I и IV* задовољене.

Да би и аксиоме II распореда биле задовољене, усвојимо наредне поставке. Нека су

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_2, y_2, z_2), \quad (x_3, y_3, z_3)$$

ма које три тачке на правој

$$[(u' : v' : w' : r'), \ (u'' : v'' : w'' : r'')];$$

рећи ћемо да тачка (x_2, y_2, z_2) лежи између оне друге две тачке ако је задовољен бар један од шест пари наредних неједначина:

$$(1) \qquad x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3,$$

$$(2) \qquad y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3,$$

$$(3) \qquad z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3.$$

Ако напр. важи једна од двеју двоструких неједначина (1), лако закључујемо да мора важити или $y_1 = y_2 = y_3$ или једна од двоструких неједначина (2), и да исто тако важи или $z_1 = z_2 = z_3$ или једна од двоструких неједначина (3). Уствари, множећи слева једначине

$$u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0,$$
$$u''x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

са подесно изабраним бројевима система D, који су $\neq 0$, и затим сабирајући добивене једначине, изводимо систем једначина облика

$$u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0 \quad (4)$$
$$(i = 1, 2, 3).$$

Овде сигурно коефицијент v''' није 0, пошто би се иначе добила једнакост трију бројева x_1, x_2, x_3. У случају да је $u''' = 0$, добива се

$$y_1 = y_2 = y_3.$$

Ако је пак $u''' \neq 0$, онда из

$$x_1 \lesseqgtr x_2 \lesseqgtr x_3$$

изводимо двоструку неједначину

$$u'''x_1 \lesseqgtr u'''x_2 \lesseqgtr u'''x_3,$$

па стога, на основу (4):

$$v'''y_1 + r''' \lesseqgtr v'''y_2 + r''' \lesseqgtr v'''y_3 + r'''$$

и отуда

$$v'''y_1 \lesseqgtr v'''y_2 \lesseqgtr v'''y_3,$$

па како v''' није 0, имамо

$$y_1 \lesseqgtr y_2 \lesseqgtr y_3;$$

у свакој од ових двоструких неједначина треба свуда да важи или горњи или доњи знак.

Претходна разматрања показују да у нашој геометрији важе аксиоме распореда II_{1-3}. Остаје још да се покаже да у нашој геометрији важи аксиома равни II_4.

У ту сврху нека нам је дата раван $(u:v:w:r)$ и у њој права $[(u:v:w:r), (u':v':w':r')]$. Узмимо да све тачке (x, y, z) које леже у равни $(u:v:w:r)$, за које је израз $u'x+v'y+w'z+r'$ већи или мањи од 0, леже на једној одн. другој страни од дате праве. Тада треба доказати да је ова поставка једнозначна и да је у сагласности са поставком на стр. 9. Овај се доказ може лако извести.

Тако смо дознали да су задовољене све аксиоме I, II, IV* у овој просторној геометрији, која на горе изложен начин произилази из Дезарговог бројног система D.

Како је Дезаргов став последица аксиома I_{1-8}, II, IV*, то дознајемо ово:

На једном Дезарговом бројном систему D може се на показани начин изградити равна геометрија, у којој бројеве система D образују елементи рачуна дужима, уведеног према § 24, и у којој су задовољене аксиоме I_{1-3}, II, IV; у таквој равној геометрији увек важи и Дезаргов став.*

Ова чињеница је инверзија резултата до кога смо дошли у § 28 и који можемо резимирати на овај начин:

У равној геометрији, у којој осим аксиома I_{1-3}, II, IV важи и Дезаргов став, може се, према § 24, увести рачун дужима; тада елементи овог рачуна дужима образују, при подесној поставци распореда, увек Дезаргов бројни систем.*

§ 30. Значај Дезарговог става

Кад су у некој равној геометрији задовољене аксиоме I_{1-3}, II, IV* и, осим тога, важи Дезаргов став, онда је, према последњем ставу, увек могуће у овој геометрији увести сегментни рачун, за који важе правила 1—11, 13—16 у § 13. Посматраћемо даље, укупност ових дужи као комплексни бројни систем и од њега ћемо изградити, према излагањима у § 29, просторну геометрију, у којој важе све аксиоме I, II, IV*.

Ако у овој просторној геометрији посматрамо искључиво тачке $(x, y, 0)$ и оне праве на којима леже само такве тачке, добићемо равну геометрију. Ако пак узмемо у обзир став 55, изведен у § 27, јасно је да се ова равна геометрија мора поклопити са равном геометријом, изложеном у почетку, тј. елементи двеју геометрија могу се узајамно једнозначно доделити, одржавајући при томе односе везе и распореда. Тиме добивамо наредни став, који треба сматрати као крајњи циљ излагања овог одељка:

Став 56. *Нека су у некој равној геометрији задовољене аксиоме* I_{1-3}, II, IV*; *тада је важење Дезарговог става потребан и довољан услов за то, да се ова равна геометрија може сматрати као део просторне гаометрије, у којој су задовољене све аксиоме* I, II, IV*.

Тако се Дезаргов став за равну геометрију може у извесном смислу карактерисати као резултат елиминације просторних аксиома.

Нађени резултати такође нам омогућавају да увидимо да се свака просторна геометрија, у којој су задовољене све аксиоме I, II, IV*, може увек схватити као део неке „геометрије од произвољно много димензија“; при томе треба да се под геометријом са произвољно много димензија разуме укупност тачака, правих и равни и још других елемената, за које су задовољене на одговарајући начин проширене аксиоме везе, распореда, као и аксиома паралелних.

Шеста глава

Паскалов став

§ 31. Два става о могућности доказа Паскаловог става

Као што је већ поменуто, Дезаргов став (став 53) се може доказати из аксиома I, II, IV*, тј. користећи битно просторне аксиоме, но без употребе аксиома подударности; показао сам у § 23, да се овај став не може доказати без просторних аксиома групе I и без аксиома подударности III, чак ако се и допусти употреба аксиома непрекидности.

У § 14 смо извели Паскалов став, а у § 22 и Дезаргов став, из аксиома I_{1-3}, II—IV, дакле без просторних аксиома, но користећи се битно аксиомама подударности. Настаје питање да ли се може доказати и Паскалов став, ослањајући се на просторне аксиоме везе, а не користећи се аксиомама подударности. Наше испитивање ће показати да се Паскалов став у овом погледу потпуно разликује од Дезарговог става, јер при доказу Паскаловог става је од одлучујућег значаја за његово важење усвајање или искључење Архимедове аксиоме. Пошто у овој глави уопште нису претпостављене аксиоме подударности, то се у њој мора узети за основу Архимедова аксиома у наредној формулацији:

V_1^* (*Архимедова аксиома за рачун дужима*). *Нека су дате на правој g дуж a и две тачке A и B. Тада се увек може наћи неки број тачака* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, *тако да тачка B лежи између тачака A и* A_n *и да су дужи* AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ *једнаке дужи a у смислу рачуна дужима, који се може увести на правој g према § 24, на основу аксиома* I, II, IV* *и Дезарговог става.*

Главне резултате овог испитивања обухватићемо у два наредна става:

Став 57. *Паскалов став (став* 40) *може се доказати на основу аксиома* I, II, IV*, V_1*, *тј. искључујући аксиоме подударности, а ослањајући се на Архимедову аксиому.*

Став 58. *Паскалов став (став* 40) *се не може доказати на основу аксиома* I, II, IV*, *тј. кад се искључе и аксиоме подударности и Архимедова аксиома.*

У формулацији ова два става, на основу општег става 56, могу се просторне аксиоме I_{4-8} заменити и захтевом равне геометрије да важи Дезаргов став (став 53).

§ 32. Комутативни закон множења у Архимедовом бројном систему

Докази ставова 57 и 58 заснивају се битно на извесним узајамним односима, који постоје за правила рачуна и основне чињенице аритметике и чије је упознавање и само по себи од интереса. Утврдићемо тачност ова два става:

Став 59. *У Архимедовом бројном систему је комутативни закон множења нужна последица осталих закона рачуна, то значи, ако бројни систем има особине* 1—11, 13—17, *набројане у* § 13, *онда нужно следује да у њему важи и формула* 12.

Доказ. Најпре приметимо: ако је a произвољан број нашег бројног система и ако је

$$n = 1+1+\ldots+1$$

позитиван цео рационални број, онда за a и n увек важи комутативни закон множења; наиме биће

$$an = a(1+1+\ldots+1) = a\cdot 1 + a\cdot 1 + \ldots + a\cdot 1$$

и исто тако

$$na = (1+1+\ldots+1)a = 1\cdot a + 1\cdot a + \ldots + 1\cdot a.$$

Нека међутим, насупрот нашем тврђењу, постоје два броја a, b у нашем бројном систему за које не важи комутативни закон множења. Тада смемо, што се лако види, да направимо ове претпоставке:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad ab - ba > 0.$$

На основу захтева 5 у § 13 постоји број $c\,(>0)$, тако да је

$$(a+b+1)\,c = ab - ba.$$

Најзад одаберимо број d који би истовремено задовољавао неједначине

$$d > 0, \quad d < 1, \quad d < c,$$

и означимо са m и n она два цела рационална броја $\geqq 0$ за која је

$$md < a \leqq (m+1)\,d$$

одн.

$$nd < b \leqq (n+1)\,d.$$

Постојање ових бројева m, n јесте непосредна последица Архимедовог става (став 17 у § 13). С обзиром на примедбу у почетку овог доказа, добићемо из последњих неједначина множењем:

$$ab \leqq mnd^2 + (m+n+1)\,d^2,$$

$$ba > mnd^2,$$

и одузимањем

$$ab - ba < (m+n+1)\,d^2.$$

Сад је

$$md < a, \quad nd < b, \quad d < 1$$

и зато

$$(m+n+1)\,d < a+b+1,$$

тј.

$$ab - ba < (a+b+1)\,d$$

или због $d < c$

$$ab - ba < (a+b+1)\,c.$$

Ова последња неједначина противречи одредби броја c, а тиме је став 59 доказан.

§ 33. Комутативни закон множења у не-архимедовом бројном систему

Став 60. *За не-архимедов бројни систем комутативни закон множења није нужна последица осталих закона рачуна; то значи, постоји бројни систем који има у § 13 набројане особине* 1—11, 13—16 — *Дезаргов бројни систем према* § 28 —, *у коме не важи комутативни закон множења* (12).

Доказ. Нека је t параметар, а T ма који израз са коначним или бесконачним бројем чланова облика:

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \dots;$$

нека у њему $r_0 (\neq 0), r_1, r_2, \dots$ значе произвољне рационалне бројеве и нека је n произвољан цео рационалан број $\gtrless 0$. Подручју ових израза T додајмо број 0. Два израза облика T називају се тада једнаким ако су у њима сви бројеви $n, r_0, r_1, r_2, \dots$ једнаки међу собом по два и два. Даље, нека је s други параметар, а S ма који израз са коначним или бесконачним бројем чланова облика:

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \dots;$$

нека у њему $T_0 (\neq 0), T_1, T_2, \dots$ означавају произвољне изразе облика T, а нека је m опет произвољан цео рационалан број $\gtrless 0$. Укупност свих израза облика S, коме је још додата 0, сматраћемо као комплексни бројни систем $\Omega(s, t)$, у коме ћемо поставити наредна правила рачуна.

Пре свега са самим параметрима s и t рачунаћемо по правилима 7—11 из § 13, док ћемо место правила 12 стално примењивати образац

$$(1) \qquad ts = 2\,st.$$

Лако се уверавамо да је ова поставка непротивречна.

Ако су сад S', S'' два ма која израза облика S:

$$S' = s^{m'} T_0' + s^{m'+1} T_1' + s^{m'+2} T_2' + \dots,$$

$$S'' = s^{m''} T_0'' + s^{m''+1} T_1'' + s^{m''+2} T_2'' + \dots,$$

може се, очигледно, сабирањем члан по члан образовати нови израз $S' + S''$, који је опет облика S и који је истовремено једнозначно одређен; овај се израз $S'+S''$ назива збиром бројева претстављених изразима S' и S''.

Обичним формалним множењем члан по члан оба израза S', S'', долазимо најпре до израза облика:

$$S' S'' = s^{m'} T_0' s^{m''} T_0'' + (s^{m'} T_0' s^{m''+1} T_1'' + s^{m'+1} T_1' s^{m''} T_0'') + \\ + (s^{m'} T_0' s^{m''+2} T_2'' + s^{m'+1} T_1' s^{m''+1} T_1'' + s^{m'+2} T_2' s^{m''} T_0'') + \\ + \cdots .$$

Овај израз, ако употребимо формулу (1), постаје, очигледно, једнозначно одређен израз облика S; последњи ће се назвати производом броја претстављеног са S' и броја претстављеног са S''.

При тако постављеном начину рачуна непосредно јасно је важење правила рачуна 1—4 и 6—11 у § 13. Такође није тешко увидети важење правила 5 у § 13. Ради тога претпоставимо да су напр.

$$S' = s^{m'} T_0' + s^{m'+1} T_1' + s^{m'+2} T_2' + \ldots$$

и

$$S'''' = s^{m''''} T_0'''' + s^{m''''+1} T_1'''' + s^{m''''+2} T_2'''' + \ldots$$

дати изрази облика S и приметимо да, сагласно нашим поставкама, први коефицијент r_0' из T_0' мора бити различит од 0. Упоређујући сада исте степене од S на обема странама једначине

$$(2) \qquad S' S'' = S''' ,$$

налазимо на једнозначно одређени начин најпре цео број m'' као изложилац, а затим редом такве изразе

$$T_0'', T_1'', T_2'', \ldots$$

тако да израз

$$S'' = s^{m''} T_0'' + s^{m''+1} T_1'' + s^{m''+2} T_2'' + \ldots .$$

задовољава једначину (2) при употреби обрасца (1). Слично важи за једначину

$$S''' S' = S'''' .$$

Овим је тражени доказ изведен.

Најзад, да бисмо омогућили распоред бројева нашег бројног система $\Omega(s, t)$, усвојимо ове поставке: за неки број овог система каже се да је $<$ или > 0, према томе да ли је у изразу S који га претставља први коефицијент r_0 од $T_0 <$ или > 0. Ако су дата ма која два броја a и b тог комплексног бројног система, онда се каже да је $a < b$ одн. $a > b$, према томе да ли је $a - b <$ или > 0. Непосредно је јасно да при овим поставкама такође важе правила 13 – 16 у § 13, тј. да је $\Omega(s, t)$ Дезаргов бројни систем (уп. § 28).

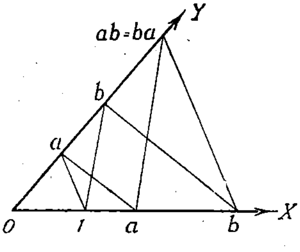
Правило 12 у § 13, што показује једначина (1), није задовољено у нашем комплексном бројном систему $\Omega(s, t)$, а тиме је потпуно доказана тачност става 60.

У сагласности са ставом 59, не важи Архимедов став (став 17 у § 13) за малочас постављени бројни систем $\Omega(s, t)$.

§ 34. Доказ оба става о Паскаловом ставу

(Непаскалска геометрија)

Ако су у просторној геометрији задовољене све аксиоме I, II, IV*, онда у тој геометрији важи и Дезаргов став (став 53) и стога је, према последњем ставу у § 28, у тој геометрији могуће на сваком пару правих које се секу увести рачун дужима, за који важе правила 1—11, 13 – 16 у § 13. Претпоставимо ли пак Архимедову аксиому V_1* у нашој геометрији, онда очигледно за сегментни рачун важи Архимедов став (став 17 у § 13), а стога, према ставу 59, важи и комутативни закон множења. Из фигуре која је са стране непосредно је јасно да комутативни закон множења не претставља ништа друго до Паскалов став за обе осе. Тиме је тачност става 57 доказана.



Да бисмо доказали став 58, уочимо Дезаргов бројни систем уведен у § 33, и конструишимо помоћу овог система просторну геометрију на начин описан у § 29, у којој су задовољене све аксиоме I, II, IV*. Па ипак Паскалов став не важи у овој геометрији, пошто комутативни закон множења не постоји у Дезарговом бројном систему $\Omega(s, t)$. Тако изграђена *„непаскалска" геометрија*, у сагласности са малопре доказаним ставом 57, нужно је у исто време и *„не-архимедска" геометрија*.

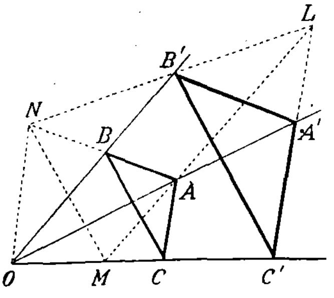
Очигледно да се Паскалов став не може доказати при нашим претпоставкама ни тада кад се просторна геометрија схвати као део геометрије од произвољно много димензија, у којој осим тачака, правих и равни постоје и други елементи који су засновани на одговарајућем систему аксиома везе и распореда, као и на аксиоми паралелних.

§ 35. Доказ произвољног става о тачкама пресека помоћу Паскаловог става

Докажимо најпре важну чињеницу:

Став 61. *Дезаргов став (став 53) се може доказати из Паскаловог става (став 40) само помоћу аксиома* I_{1-8}, II, IV*, *дакле, без помоћи аксиома подударности и аксиома непрекидности.*

Доказ.[1] Очигледно да оба делимична исказа из којих се састоји став 53 непосредно следују један из другог. Довољно је, дакле, доказати напр. други исказ става 53. Извешћемо доказ уз извесне споредне претпоставке.



Нека су два троугла ABC и $A'B'C'$ тако положена да линије које спајају одговарајућа темена пролазе кроз једну тачку O и нека је, даље, права AB паралелна са $A'B'$, а права AC паралелна са $A'C'$. Претпоставимо, даље, да ни праве OB' и $A'C'$ ни праве OC' и $A'B'$ нису међу собом паралелне. Повуцимо онда кроз тачку A паралелну према OB' коју пресеца права $A'C'$ у некој тачки L, а права OC' у некој тачки M. Нека, даље, права LB' није паралелна ни према OA, ни према OC.

---

[1] Овде наведени доказ става 61 извео је Г. Хесенберг („Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen", Math. Ann. књ. 61).

Праве AB и LB' сигурно нису паралелне, тј. оне се секу у некој тачки N, коју ћемо спојити са тачкама M и O.

Према конструкцији може се Паскалов став применити на конфигурацију $ONALA'B'$ и тако се може дознати да је ON паралелно према $A'L$, па зато паралелно и према CA. Сада се Паскалов став може применити и на конфигурације $ONMACB$ и $ONMLC'B'$ и добити да је MN паралелно како према CB, тако и према $C'B'$. Дакле, стране CB и $C'B'$ су заиста међу собом паралелне.

Споредне претпоставке учињене при доказу, даду се сада редом отстранити. Овде ћемо изоставити доказ овог свођења.

Нека је сад дата равна геометрија у којој, осим аксиома I_{1-3}, II, IV*, важи Паскалов став. Став 61 учи да у овој геометрији важи и Дезаргов став. Зато можемо, према § 24, у њу увести рачун дужима и у овом рачуну дужима важи, према § 34, заједно са Паскаловим ставом и комутативни закон множења, тј. важе у њему сви закони рачуна 1—12 у § 13.

Назовемо ли фигуру која одговара садржини Паскаловог одн. Дезарговог става, Паскаловом одн. Дезарговом конфигурацијом, онда можемо резултат §§ 24—26 и 34 овако резимирати: свака примена рачунских закона (став 1—12 у § 13) у нашем сегментном рачуну показује се као комбинација коначног броја Паскалових или Дезаргових конфигурација; а како се Дезаргова конфигурација, сходно доказу става 61, може претставити конструкцијом подесних помоћних тачака и помоћних правих као комбинација Паскалових конфигурација, то се свака примена поменутих закона рачуна показује у нашем рачуну дужима као комбинација коначно много Паскалових конфигурација.

Према § 27 и на основу комутативног закона множења у овом рачуну дужима тачку претставља пар реалних бројева (x, y), а праву однос трију реалних бројева $(u : v : w)$, од којих два прва не ишчезавају истовремено. Инциденција тачке и праве означава се једначином

$$ux + vy + w = 0,$$

а. паралелност правих $(u : v : w)$ и $(u' : v' : w')$ пропорцијом

$$u : v = u' : v'.$$

Нека у датој геометрији постоји сада чист став о пресечним тачкама. Под чистим ставом о пресечним тачкама разумемо овде став који садржи неки исказ о инциденцији тачака и правих и о паралелности правих, при чему се не искоришћавају други односи, као напр. подударност или управност. Сваки такав чист став о тачкама пресека равне геометрије може се свести на наредни облик:

Нека се најпре произвољно одабере систем од коначно много тачака и правих; затим нека се повуку, на раније прописани начин, према извесним од ових правих произвољне паралелне, нека се одаберу на извесним правима произвољне тачке и повуку кроз извесне тачке произвољне праве; ако се тада на прописани начин конструишу спојне праве, пресечне тачке као и паралелне кроз већ постојеће тачке, долази се најзад до одређеног система коначно много правих, о којима став исказује да оне пролазе кроз исту тачку одн. да су паралелне.

Координате тачака и правих, које смо најпре сасвим произвољно одабрали, посматраћемо као параметре $p_1, \ldots, p_n$; неке координате тачака и правих, одабраних затим са ограниченом произвољношћу, могу се посматрати као даљи параметри $p_{n+1}, \ldots, p_r$, а остале њихове координате ће бити изражене параметрима $p_1, \ldots, p_r$. Координате свих спојних правих, пресечних тачака и паралелних, које се сада даље конструишу, биће изрази $A(p_1, \ldots, p_r)$ рационално зависни од ових параметара. Исказ датог става о пресечним тачкама своди се на тврђење да извесни такви изрази за исте вредности параметара дају исте вредности; то значи, став о пресечним тачкама исказује да одређени изрази $R(p_1, \ldots, p_r)$, рационално зависни од извесних параметара $p_1, \ldots, p_r$, увек ишчезавају кад се место ових параметара унесу ма какви елементи сегментног рачуна, уведеног у дату геометрију. Пошто је подручје ових елемената бесконачно, то закључујемо, према познатом ставу алгебре да изрази $R(p_1, \ldots, p_r)$, на основу закона рачуна 1–12 у § 13, морају идентично ишчезнути. Али, да бисмо у нашем рачуну дужима доказали идентично ишчезавање израза $R(p_1, \dots, p_r)$ довољна је, према оном што је горе доказано за примену закона рачуна, примена Паскаловог става. Тако долазимо до наредног става:

Став 62. *Сваки чисти став о тачкама пресека који важи у равној геометрији, у којој важе аксиоме* I_{1-3}, II, IV* *и Паскалов став, показује се конструкцијом подесних помоћних тачака и помоћних правих као комбинација коначно много Паскалових конфигурација.*

За доказ тачности става о пресечним тачкама није потребно, дакле, кад се употреби Паскалов став, прибегавати аксиомама подударности и непрекидности.

Седма глава

Геометриске конструкције на основу аксиома I—IV

§ 36. Геометриске конструкције помоћу лењира и преносиоца дужи

Нека је дата просторна геометрија у којој важе све аксиоме I—IV; у овој глави, ради веће упрошћености, уочићемо само равну геометрију која је садржана у овој просторној геометрији и тада ћемо размотрити питање који се елементарни конструктивни задаци (претпостављајући подесна практична средства) могу извести.

На основу аксиома I, II, IV увек се може решити наредни задатак:

Задатак 1. Спојити две тачке правом и наћи пресечну тачку двеју правих, у случају да праве нису паралелне.

На основу аксиома подударности III могуће је преношење дужи и углова, тј. у датој геометрији могу се решити ови задаци:

Задатак 2. Пренети дату дуж на дату праву од неке тачке а са дате стране од те тачке.

Задатак 3. Пренети дати угао на дату праву у датој тачки са дате стране од те праве или конструисати праву која дату праву сече у датој тачки под датим углом.

Видимо да се, ако се узму за основу аксиоме I—IV, могу решити само они конструктивни задаци који се могу свести на горе поменуте задатке 1—3.

Основним задацима 1—3 додаћемо још ова два:

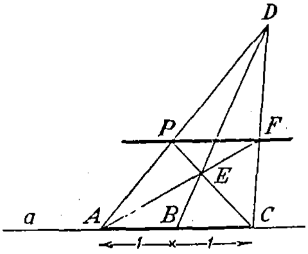
Задатак 4. Кроз дату тачку повући паралелну према датој правој.

Задатак 5. Повући нормалу на дату праву.

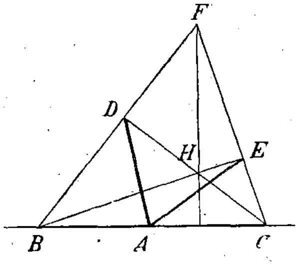
Непосредно видимо да се оба ова задатка могу решити на разне начине помоћу задатака 1 – 3.

За извођење задатка 1, потребан нам је **лењир**. Да бисмо извели задатке 2—5, довољно је, што ће у наредним излагањима бити показано, поред лењира применити **преносилац дужи** — инструмент који омогућава преношење једне једине[1] одређене дужи, напр. јединичне дужи. На тај начин долазимо до овог резултата:

Став 63. *Они геометриски конструктивни задаци који се могу решити на основу аксиома* I—IV *даду се решити помоћу лењира и преносиоца дужи.*



Доказ. Да бисмо извели задатак 4, спојимо дату тачку P ма са којом тачком A дате праве a и пренесимо јединичну дуж помоћу преносиоца дужи на праву a од тачке A два пута једно за другим, рецимо прво до тачке B, а затим од B до C. Нека је сад D ма која тачка на AP која је различита од A и P и да при томе BD није паралелно са PC. Тада се праве CP и BD пресецају у тачки E, а праве AE и CD у тачки F. PF је према Штајнеру (Steiner) тражена паралелна према правој a.



Задатак 5 ћемо решити на наредни начин. Нека је A произвољна тачка дате праве; тада преносимо помоћу преносиоца дужи на ову праву са обе стране од тачке A јединичне дужи AB и AC и затим одредимо на двема произвољним другим правима, које пролазе кроз тачку A, тачке E и D тако да и

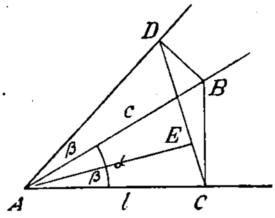
---

[1] Да је овде довољан захтев преношења за једну једину дуж, приметио је Киршак (J. Kürschak); уп. његову белешку „Das Streckenabtragen", Math. Ann. књ. 55, 1902.

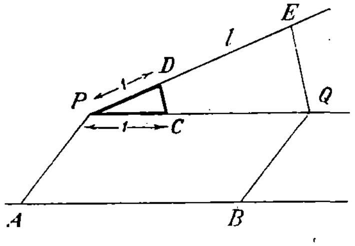
дужи AD и AE буду једнаке јединичној дужи. Праве BD и CE секу се у тачки F, праве BE и CD у тачки H, а права FH је тражена нормала. Уствари, углови $\sphericalangle BDC$ и $\sphericalangle BEC$ су, као углови у полукругу над BC, прави, и зато ће, према ставу о пресечној тачки висина код троугла, који примењујемо на троугао BCF, и права FH бити нормална на BC.

На основу задатака 4 и 5 увек је могуће спустити управну на дату праву a из тачке D која не лежи на њој или на њу подићи нормалу у тачки која лежи на њој.

Сад можемо и задатак 3 лако решити само помоћу лењира и преносиоца дужи; употребићемо, например наредни поступак који захтева само повлачење паралелних и спуштање нормала: нека β буде угао који се преноси и A теме овог угла. Повуцимо кроз тачку A праву l паралелно према датој правој, на коју треба пренети дати угао β. Из произвољне тачке B једног крака угла β спустимо нормале на други крак угла β и на праву l. Нека су подножја ових нормала D и C. Тачке C и D се разликују једна од друге, а тачка A не лежи на правој CD. Стога можемо из тачке A спустити нормалу на CD; нека је њено подножје E. Према доказу изведеном на стр. 51 биће $\sphericalangle CAE = \beta$. Ако тачку B изаберемо на другом краку датог угла, тачка E пада на другу страну праве l. Кроз дату тачку на датој правој повуцимо паралелну према AE; тиме је решен задатак 3.



Да бисмо, најзад, решили задатак 2, искористимо наредну просту конструкцију коју је дао **Киршак**. Нека је AB дуж коју треба пренети, а P дата тачка на датој правој l. Нека се повуче кроз тачку P паралелна према AB и пренесе помоћу преносиоца дужи на њу од тачке P, на ону страну од AP, на којој лежи тачка B, јединична дуж, рецимо до C; даље, пренети на праву l од



тачке P са дате стране јединичну дуж до тачке D. Нека права повучена кроз B паралелно према AP пресеца праву PC у тачки Q, а права повучена паралелно према CD кроз тачку Q пресеца праву l у тачки E. Тада је $PE = AB$. У случају да се права l поклапа са PQ, а тачка O не лежи на датој страни, треба конструкцију на прост начин проширити.

Тако је показано да се сви задаци 1—5 могу решити лењиром и преносиоцем дужи и, стога је, став 63 потпуно доказан.

§ 37. Критеријум за изводљивост геометриских конструкција помоћу лењира и преносиоца дужи

Осим елементарних геометриских задатака обрађених у § 36, постоји још велики број других задатака за чије је решење потребно само повлачење правих и преношење дужи. Да бисмо могли прегледати област свих задатака који се могу решити на овај начин, узмимо за основу даљих посматрања правоугли координатни систем и замислимо координате тачака на обичан начин — као реалне бројеве или функције извесних произвољних параметара. Да бисмо одговорили на питање о укупности свих тачака које се на овај начин могу конструисати, прибећи ћемо овом размишљању.

Нека је дат систем одређених тачака; образујмо од координата ових тачака подручје рационалности R; оно садржи извесне реалне бројеве и извесне произвољне параметре p. Замислимо сада укупност свих оних тачака које се могу конструисати од датог система тачака повлачењем правих и преношењем дужи. Подручје, образовано од координата ових тачака, назваћемо $\Omega(R)$; оно садржи извесне реалне бројеве и функције произвољних параметара p.

Наша посматрања у § 17 показују да се повлачење правих и паралелних своди аналитички на примену сабирања, множења, одузимања и дељења дужи; даље, позната формула за обртање, постављена у § 9, учи да преношење дужи на произвољну праву не захтева никакву другу аналитичку операцију осим извлачења квадратног корена из збира два квадрата чије су основе већ конструисане. Обрнуто, на основу

Питагорине теореме помоћу правоуглог троугла може се увек конструисати квадратни корен из збира двају сегментних квадрата преношењем дужи.

Из ових посматрања следује да подручје $\Omega(R)$ садржи све оне и само такве реалне бројеве и функције параметара p који произилазе из бројева и параметара у подручју R применом коначно пута пет рачунских операција, наиме четири елементарне операције рачуна и пете операције, која се сматра као извлачење квадратног корена из збира два квадрата. Овај резултат ћемо изразити овако:

Став 64. Један геометриски конструктивни задатак може се тада и само тада решити повлачењем правих и преношењем дужи, тј. помоћу лењира и преносиоца дужи, ако су при аналитичкој обради задатка координате тражених тачака такве функције координата датих тачака чије изражавање захтева само рационалне операције и операцију извлачења квадратног корена из збира два квадрата — и то само коначан број примена ових пет операција.

Из овог става одмах можемо увидети да се не може сваки задатак који се решава шестаром, решити само лењиром и преносиоцем дужи. Ради тога пођимо од оне геометрије која је изграђена у § 9 помоћу алгебарског бројног подручја Ω; у овој геометрији постоје искључиво такве дужи које се могу конструисати помоћу лењира и преносиоца дужи, наиме дужи одређене бројевима подручја Ω.

Ако је сад ω ма који број подручја Ω, то лако дознајемо из дефиниције подручја Ω да се и сваки алгебарски број, конјугован са ω, мора налазити у подручју Ω, а пошто су бројеви подручја Ω, очигледно, сви реални, одатле следује да подручје Ω може садржати само такве реалне алгебарске бројеве, чији су конјуговани бројеви исто тако реални, тј. бројеви подручја Ω су потпуно стварни.

Поставимо сада задатак да се конструише правоугли троугао чија је хипотенуза 1 и једна катета $|\sqrt{2}|-1$. Међутим, алгебарски број $\sqrt{2|\sqrt{2}|-2}$, који изражава бројну вредност друге катете, не налази се у бројној области Ω, пошто је њему конјуговани број $\sqrt{-2|\sqrt{2}|-2}$ имагинаран. Према томе, постављени се задатак не може решити у таквој геометрији и зато се не може уопште решити помоћу лењира и преносиоца дужи, ма да је конструкција помоћу шестара непосредно изводљива.

Наше посматрање се може такође обрнути, тј. важи став:

Сваки потпуно стварни број лежи у подручју Ω. Зато се свака дуж, одређена потпуно реалним бројем, може конструисати помоћу лењира и преносиоца дужи. Доказ овог става добивамо из општијег посматрања. Наиме, може се наћи критеријум који, за геометриске конструктивне задатке решљиве помоћу лењира и шестара, допушта да се процени из аналитичке природе задатка и њихових решења да ли је конструкција изводљива и само помоћу лењира и преносиоца дужи. Ово даје наредни став:

Став 65. *Нека је дат геометриски конструктивни задатак такве врсте да се при његовом аналитичком решењу координате тражених тачака могу добити из координата датих тачака једино помоћу рационалних операција и помоћу извлачења квадратног корена; нека је n најмањи број квадратних корена који су при томе довољни за израчунавање координата тачака; тада је, да би дати конструктивни задатак могао бити решен само повлачењем правих и преношењем дужи потребно и довољно да тај геометриски задатак при увођењу бесконачно удаљених елемената има тачно* 2^n *реалних решења, и то за* све *положаје датих тачака, тј. за* све *вредности произвољних параметара који се јављају у координатама датих тачака.*

На основу разматрања изведених у почетку овог параграфа, непосредно је јасно да је постављени критеријум потребан. Тврђење да је тај критеријум и довољан, своди се на овај аритметички став:

Став 66. *Нека је функција* $f(p_1, \ldots, p_n)$ *образована од параметара* $p_1, \ldots, p_n$ *помоћу рационалних операција и извлачења квадратног корена. Ако ова функција* за *свaки реални систем вредности параметара претставља потпуно стваран број, то она припада подручју* Ω, *које се добива полазећи од* $1, p_1, \ldots, p_n$ *помоћу елементарних операција рачуна и извлачења квадратног корена из збира два квадрата.*

Претходно ћемо приметити да се у дефиницији подручја $\Omega(R)$ може отстранити ограничење на двочлани збир квадрата. Уствари, формуле

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2})^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} = \sqrt{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2+d^2}$$

показују да се уопште извлачење квадратног корена из збира произвољно много квадрата увек може свести на поновљено извлачење квадратног корена из збира два квадрата.

Сходно томе, посматрајући подручја рационалности која се јављају при конструкцији функције $f(p_1, \ldots, p_n)$ једно за другим сукцесивним додавањем квадратних корена који улазе у ту функцију, довољно је доказати да радиканд сваког од ових корена претставља збир квадрата у претходном подручју рационалности. При овом доказу ослонићемо се на овај алгебарски став:

Став 67. *Свака рационална функција* $\rho(p_1, \ldots, p_n)$ *са рационалним коефицијентима која за реалне вредности параметара никада не постаје негативна, може се претставити као збир квадрата рационалних функција променљивих* $p_1, \ldots, p_n$ *са рационалним коефицијентима.*[1]

Овом ћемо ставу дати ову формулацију:

Став 68. *У подручју рационалности одређеном са* 1, $p_1, \ldots, p_n$ *свака функција која није никад негативна, тј. ни за један реални систем вредности променљивих, збир је квадрата.*

Нека је сад дата функција $f(p_1, \ldots, p_n)$ са особинама наведеним у ставу 66. Проширимо последње тврђење на она подручја која се добивају сукцесивним додавањем оних квадратних корена који су потребни за изграђивање функције f. За ова подручја важи да се свака функција која заједно са својом конјугованом функцијом није никад негативна може претставити као збир квадрата функција дотичног подручја.

---

[1] За једну променљиву проблем сам прво ја обрадио, а Е. Ландау (E. Landau) је употпунио доказ овог става за једну променљиву, користећи се при томе веома простим и елементарним помоћним средствима, Math. Ann. књ. 57, 1903. Недавно је успео Артин (Artin) да дâ потпун доказ овог става, Hamburger Abhandlungen, књ. 5, 1927.

Доказ ћемо извести потпуном индукцијом. Посматрајмо најпре област која произилази из R додавањем једнога квадратног корена који је најдубље у функцији. Поткорена количина овог квадратног корена је **рационална** функција $f_1(p_1, \ldots, p_n)$. Нека је $f_2(p_1, \ldots, p_n)$ функција из подручја $(R, \sqrt{f_1})$ добивеног додавањем, која са својом конјугованом функцијом никада не добива негативну вредност и такође не ишчезава идентично; ова функција има облик $a+b\sqrt{f_1}$, где су a и b, као и f_1, рационалне функције. Из претпоставки учињених у односу на f_2 следује, да збир φ и производ ψ функција $a+b\sqrt{f_1}$, $a-b\sqrt{f_1}$ никада не добивају негативну вредност. Функције

$$\varphi = 2\,a, \quad \psi = a^2 - b^2 f_1$$

су, поврх тога, рационалне, дакле могу се претставити, према ставу 68, као збир квадрата функција из подручја R. Осим тога φ се не може идентично анулирати.

Из једначине која важи за f_2

$$f_2^2 - \varphi f_2 + \psi = 0$$

добивамо

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi}{\varphi} = \left(\frac{f_2}{\varphi}\right)^2 \cdot \varphi + \frac{\varphi\psi}{\varphi^2}.$$

Дакле, према реченом о φ и ψ, може се функција f_2 претставити као збир квадрата функција из подручја $(R, \sqrt{f_1})$. Резултат овако добивен за подручје $(R, \sqrt{f_1})$ одговара ставу 68, који важи за подручје R. Понављајући малочас примењени поступак при даљим додавањима, доћи ћемо, најзад, до резултата да у сваком од подручја, до којих долазимо при конструкцији функције f, свака функција која заједно са својом конјугованом функцијом није никад негативна јесте збир квадрата функција дотичног подручја. Посматрајмо сад ма који квадратни корен који се јавља у f. Он је, са својом конјугованом функцијом, у сваком случају, реалан, а зато је његова поткорена количина у подручју у коме се приказује, са својом конјугованом функцијом, функција која није никад негативна и, према томе, претставља се у овом подручју као збир квадрата. Према томе став 66 је доказан; наведени критеријум у ставу 65 је, дакле, и довољан.

Као пример за примену става 65 могу служити правилни многоугли који се могу конструисати помоћу шестара; у овом случају се не јавља произвољни параметар p; сви изрази које треба конструисати претстављају алгебарске бројеве. Лако се види да је критеријум става 65 задовољен и, према томе, добива се да се ови правилни многоугли могу конструисати и само помоћу повлачења правих и преношења дужи — резултат који се може и директно извести из теорије деобе круга.

Што се тиче других познатих конструктивних задатака елементарне геометрије, нека је овде само поменуто да се Малфатијев (Malfatti) проблем може решити само помоћу лењира и преносиоца дужи, али не и Аполонијев задатак о додиру круга[1].

Закључак

Овај рад претставља критичко истраживање принципа геометрије; у овом истраживању руководили смо се начелом да свако питање које се појави расправимо тако да при томе испитамо да ли се на њега може добити одговор на претходно прописаном путу са извесним ограниченим помоћним средствима. Ово начело садржи, изгледа ми, опште и природно правило; уствари, када ми при нашим математичким испитивањима наиђемо на неки проблем или претпостављамо тачност неког става, наш нагон за сазнањем је тек тада задовољен кад нам успе или да потпуно решимо тај проблем и строго докажемо овај став, или тада ако јасно сазнамо разлог зашто се не може успети, а тиме истовремено увидимо и нужност неуспеха.

Тако у модерној математици питање о немогућности извесних решења или проблема игра видну улогу и тежња да се одговори на овакво питање често је била повод за откриће нових и плодних области испитивања. Сетимо се

---

[1] Што се тиче других геометриских конструкција помоћу лењира и преносиоца дужи, уп. М. Фелдблум (M. Feldblum), „Über elementargeometrische Konstruktionen", Inauguraldissertation, Göttingen 1899.

само Абеловог (N. H. Abel) доказа за немогућност решења једначина петог степена помоћу извлачења корена, даље, сазнања о немогућности доказа аксиоме паралелних, најзад Ермитових (Hermite) и Линдеманових (Lindemann) ставова о немогућности конструкције бројева *e* и *π* алгебарским путем.

Начело помоћу кога треба свуда расправити принципе могућности доказа тесно је везано и са захтевом „чистоте" методе доказа, захтевом који је од многих математичара јако истицан. Овај захтев у основи није ништа друго до субјективни израз начела кога смо се овде држали. Уствари, циљ претходног геометриског истраживања јесте уопште у томе да се објасни које су аксиоме, претпоставке или помоћна средства неопходни за доказ неке истине елементарне геометрије, и тада остаје да се у сваком датом случају процени која метода доказа са усвојеног становишта има предност.

Додатак I

О правој као најкраћем путу између двеју тачака[1]

[Прештампано из Math. Ann.; књ. 46]
(Из писма упућеног Ф. Клајну)

Ако се тачке, праве и равни узму за елементе, могу за заснивање геометрије служити ове аксиоме:

1. Аксиоме које се односе на међусобну везу ових елемената; кратко формулисане ове аксиоме гласе:

Ма које две тачке A и B одређују увек једну праву a. — Ма које три тачке A, B, C које не леже на једној правој одређују једну раван α. Ако две тачке A, B праве a леже у равни α, онда права a цела лежи у равни α. — Ако две равни α, β имају заједничку тачку A, онда оне имају најмање још једну другу заједничку тачку B. — На свакој правој постоје најмање две тачке; у свакој равни постоје најмање три тачке које не леже на једној правој, а у простору постоје најмање четири тачке које не леже у једној равни. —

2. Аксиоме помоћу којих се уводи појам дужи и појам распореда тачака на правој. Ове је аксиоме први поставио и систематски испитао М. Паш[2]; углавном то су:

Између двеју тачака A, B једне праве увек постоји најмање једна трећа тачка C те праве. — Од трију тачака

---

[1] Што се тиче општијег формулисања овог проблема види моје предавање одржано на Интернационалном конгресу математичара у Паризу 1900: Mathematische Probleme, Göttinger Nachr., 1900, Nr. 4, као и Хамел (G. Hamel), Inaugural-Dissertation, Göttingen 1901, и његову расправу: „Über die Geometrien, in denen die Geraden die Kürzesten sind“, Math. Ann. књ. 57, 1903.

[2] уп. Pasch, „Vorlesungen über neuere Geometrie“, Teubner, 1882.

једне праве увек постоји једна и само једна која лежи између других двеју. — Ако тачке A, B *леже на правој* a, *онда увек постоји тачка* C *на истој правој* a, *тако да тачка* B *лежи између тачака* A *и* C. — *Ма које четири тачке* A_1, A_2, A_3, A_4 *неке праве могу се увек распоредити на тај начин да тачка* A_i *лежи између тачака* A_h *и* A_k *сваки пут кад је индекс* h *мањи, а индекс* k *већи од индекса* i. — *Свака права* a *која лежи у равни* α, *раздваја тачке ове равни* α *у две области које имају наредно својство: ма која тачка* A *једне области заједно ма са којом тачком* A' *друге области одређују дуж* AA' *која у себи садржи једну тачку праве* a; *напротив, ма које две тачке* A *и* B *исте области одређују дуж* AB *која не садржи ниједну тачку праве* a.

3. Аксиома непрекидности, којој дајем ову формулацију:

Ако је $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *бесконачни низ тачака праве* a, *и* B *једна друга тачка на* a *такве врсте да уопште тачка* A_i, *лежи између* A_h *и* B, *сваки пут кад је индекс* h *мањи од индекса* i, *онда постоји тачка* C *која има својство: све тачке бесконачног низа* $A_2, A_3, A_4, \ldots$ *леже између* A_1 *и* C, *а свака друга тачка* C', *за коју ово исто тако важи, лежи између* C *и* B.

На овим аксиомама може се са пуном строгошћу засновати теорија хармониских тачака и ако се њом послужимо на сличан начин као што је то чинио Линдеман,¹) доћи ћемо до овог става:

Свакој се тачки могу доделити три коначна реална броја x, y, z, а свакој равни линеарна релација између ова три броја x, y, z тако да све тачке, за које три броја x, y, z задовољавају ту линеарну релацију, леже у дотичној равни, и обрнуто, свима тачкама које леже у овој равни одговарају бројеви x, y, z који задовољавају линеарну релацију. Ако се сада x, y, z протумаче као правоугле координате тачке у обичном Еуклидовом простору, тада ће тачкама првобитног простора одговарати тачке унутрашњости неког нигде кон-

---

¹) Уп. Clebsch-Lindemann, „Vorlesungen über Geometrie“, књ. II, део I, стр. 433 и даље.

кавног тела Еуклидовог простора, и обрнуто, свима унутрашњим тачкама овог тела које није нигде конкавно одговараће тачке нашег првобитног простора: *наш првобитни простор, према томе, пресликан је на унутрашњост нигде конкавног тела Еуклидовог простора.*

При томе се под телом које није нигде конкавно има схватити тело са таквом особином, да, ако се две тачке које леже у унутрашњости тога тела вежу међу собом правом, онда део праве који лежи између ових двеју тачака цео пада у унутрашњост тела. Дозвољавам себи да вам обратим пажњу да ова овде посматрана тела, која нису нигде конкавна, играју такође важну улогу и у истраживањима из теорије бројева Х. Минковског[1] и да је Х. Минковски нашао за њих просту аналитичку дефиницију.

Обрнуто, ако је у Еуклидовом простору дато произвољно тело које није нигде конкавно, оно дефинише одређену геометрију у којој важе све наведене аксиоме: свакој тачки у унутрашњости тела које није нигде конкавно одговара тачка у овој геометрији; свакој правој која пролази кроз унутрашњост тела и свакој равни Еуклидовог простора одговара права одн. раван опште геометрије; тачкама које леже на граници или ван тела које није нигде конкавно и правима и равнима Еуклидовог простора који се цели простиру ван тела не одговарају никакви елементи опште геометрије.

Према томе, горе поменути став о пресликавању тачака опште геометрије на унутрашњост тела које није нигде конкавно у Еуклидовом простору изражава оно својство елемената опште геометрије која је садржајно потпуно истог значења са аксиомама постављеним у почетку.

Дефинисаћемо сада појам дужине дужи AB у нашој општој геометрији и означићемо у том циљу оне две тачке Еуклидовог простора које одговарају тачкама A и B првобитног простора исто тако са A и B; продужимо тада праву AB у Еуклидовом простору ван тачака A и B дотле док та права не погоди границу тела које није нигде кон-

---

[1] Уп. H. Minkovski, „Geometrie der Zahlen“, Teubner 1896 и 1910.

кавно у тачкама X и Y и означимо Еуклидово растојање између ма које две тачке P и Q Еуклидовог простора уопште кратко са $\overline{PQ}$; тада ћемо реалну вредност

$$\widehat{AB} = \log\left\{\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{YA}}\right\}$$

назвати *дужином* дужи AB у нашој општој геометрији. Пошто је

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} > 1, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} > 1,$$

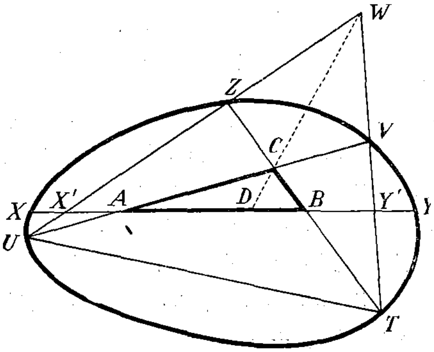
ова дужина је увек позитивна величина.

Лако се могу набројати својства овог појма дужине која нужно воде изразу наведене врсте за $\widehat{AB}$; ипак ово изостављам, да не бих сувише замарао вашу пажњу овим писмом.

Постављена формула за $\widehat{AB}$ показује у исто време на који начин ова величина зависи од облика тела које није нигде конкавно. Ако, наиме, фиксирамо тачке A и B у унутрашњости тела и ако мењамо само границу тела тако да се гранична тачка X креће према A, а тачка Y се приближава тачки B, онда је јасно да ће се оба количника

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

повећавати па, стога, и вредност $\widehat{AB}$.



Нека је сада у унутрашњости тела које није нигде конкавно дат троугао ABC. Раван α тога троугла исеца из тела овалу која није нигде конкавна. Замислимо даље сваку од трију страна AB, AC, BC троугла са обе стране продужену до пресека са границом овале у тачкама X и Y, U и V, T и Z; конструишимо тада спојне праве линије UZ и TV и продужимо их до њиховог пресека W; њихове пресечне тачке са правом XY означимо са X' одн. Y'. Узећемо сад у равни α за основу место првобитне овале која није нигде конкавна троугао UWT и лако ћемо увидети да су у равној геометрији одређеној овим троуглом, дужине $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BC}$ исте као и у првобитној геометрији, док се дужина стране AB повећава извршеном променом. Означићемо са $\overset{\frown}{\overset{\frown}{AB}}$ нову дужину стране AB за разлику од првобитне дужине $\overset{\frown}{AB}$; тада је $\overset{\frown}{\overset{\frown}{AB}} > \overset{\frown}{AB}$.

За дужине стране троугла ABC важи сада проста релација:

$$\overset{\frown}{\overset{\frown}{AB}} = \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC}.$$

Да бисмо то доказали, спојимо тачке W и C правом и продужимо ову праву до њеног пресека D са AB. Тада је због перспективног положаја два низа тачака X', A, D, Y' и U, A, C, V, на основу познатог става о анхармониском односу:

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}}\,\frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\,\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}},$$

а услед перспективног положаја два низа тачака Y, B, D, X' и T, B, C, Z биће

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}}\,\frac{\overline{Y'D}}{\overline{Y'B}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\,\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}.$$

Множењем ових двеју једначина добива се

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}}\,\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}}\,\frac{\overline{UC}}{\overline{UA}} : \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}}\,\frac{\overline{TC}}{\overline{TB}},$$

а ова последња једначина доказује моје тврђење.

Из горњег истраживања сазнајемо да, искључиво на основу набројаних аксиома у почетку мога писма и дефиниције дужине која нужно произлази из најпростијих својстава појма дужине, следује општи став:

У сваком троуглу је збир две стране већи или једнак трећој страни.

Истовремено је јасно да се случај једнакости јавља тада и само тада кад раван α исеца из границе тела које није нигде конкавно два праволиниска комада UZ и TV. Последњи се услов може изразити и без помоћи тела које није нигде конкавно. Наиме, ако су дате две ма које праве a и b првобитне геометрије које леже у равни α и које се секу у некој тачки C, онда ће уопште постојати у сваком од четири равна угаона простора која настају у α око C такве праве линије које не секу ниједну од двеју правих a и b; ако ипак такве праве линије не постоје, нарочито у два равна угаона простора која леже насупрот један другоме, онда је услов о коме је реч испуњен и *у том случају увек постоје троугли за које је збир две стране једнак трећој*. Дакле, у посматраном случају могућ је између извесних тачака A и B пут састављен од два праволиниска комада чија је укупна дужина једнака директном растојању двеју тачака A и B; може се без тешкоћа показати да се *сви путеви између тачака A и B који имају ту особину, могу саставити од тих конструисаних путева и да остали спојни путеви имају већу укупну дужину*. Лако је извести исцрпније истраживање овог питања о најкраћем путу, при чему је од нарочитог интереса случај када се за границу тела које није нигде конкавно узме тетраедар.

На крају дозвољавам себи да обратим пажњу на то да сам у претходном истраживању увек претпостављао да тело које није нигде конкавно цело лежи у коначном. Ако у геометрији дефинисаној помоћу првобитних аксиома ипак постоје права и тачка које имају то својство да је кроз ову тачку према правој могућа само једна паралелна, онда она претпоставка није оправдана. Лако се увиђа какве измене у овом случају треба да претрпи моје мишљење.

Клајнтајх код Раушена, 14 августа 1894.

Додатак II

Став о једнакости углова на основици равнокраког троугла

Овај додатак који претставља прераду моје расправе „Став о једнакости углова на основици равнокраког троугла“,[1] тиче се положаја овог става у равној Еуклидовој геометрији.

Сад ћемо узети за основу ове аксиоме:

I. Аксиоме везе у равни, тј. аксиоме I_{1-3} (стр. 3);
II. Аксиоме распореда (стр. 5—6);
III. Наредне аксиоме конгруенције:

Аксиоме III_{1-4} (стр. 11—13) у непромењеној формулацији и аксиому конгруенције троуглова у ужој формулацији, при чему ћемо најпре узети да исказ те аксиоме важи само за троугле истог смера обилажења. На стр. 69—70 био је смер обилажења троуглова у равној геометрији дефинисан на основу разликовања „десно“ и „лево“. Из дефиниције десне и леве стране праве непосредно се увиђа да се од два крака произвољног угла увек може на једнозначно одређен начин означити један као десни крак и други као леви, наиме тако, да десни крак лежи на десној страни оне праве која је одређена другим краком по положају и правцу, док леви крак лежи лево од оне праве која је одређена другим краком како по свом положају, тако и по правцу. За десне краке два угла рећи ћемо да *исто леже* у односу на ове углове, а то се исто односи и на оба лева крака.

Аксиома конгруенције у ужој формулацији гласиће овако:

III_5^*. *Ако за два троугла ABC и $A'B'C'$ важе конгруенције*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \text{ и } \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

---

[1] Proceedings of the London Math. Soc. Vol. XXXV.

онда је за те троуглове увек задовољена и конгруенција

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C',$$

под условом да краци AB *и* $A'B'$ *углова* $\sphericalangle BAC$ *и* $\sphericalangle B'A'C'$ *исто леже.*

Из шире формулације III$_5$ ове аксиоме и другог дела аксиоме III$_4$ непосредно следује став о угловима на основици равнокраког троугла, став 11 (стр. 15). Обрнуто, може се доказати шира формулација III$_5$ помоћу овде наведених аксиома I, II, III$_{1-4}$, III$_5$*, става о угловима на основици равнокраког троугла и двеју наредних аксиома:

III$_6$. *Ако су и угао* $\sphericalangle (h', k')$ *и угао* $\sphericalangle (h'', k'')$ *конгруентни углу* $\sphericalangle (h, k)$, *то су они и међусобно конгруентни.*

Исказ ове аксиоме доказан је на стр. 20 као став 19 помоћу шире формулације III$_5$ аксиоме о конгруенцији троуглова.

III$_7$. *Ако две полуправе* c *и* d *које излазе из темена угла* $\sphericalangle (a, b)$ *леже у унутрашњости овог угла, онда угао* $\sphericalangle (a, b)$ *није конгруентан углу* $\sphericalangle (c, d)$.

Доказ аксиоме III$_5$ помоћу наведених аксиома и става о угловима на основици равнокраког троугла овде ћемо изоставити.[1]

IV. Аксиома паралелних може се овде узети у њеној слабијој формулацији IV (стр. 27).

V. Следеће аксиоме непрекидности:

Архимедова аксиома V$_1$ (стр. 28).

(Аксиома потпуности V$_2$ са стр. 28, неће се овде употребљавати.)

V$_3$ (аксиома суседства). *Ако је дата ма која дуж* AB, *увек постоји један троугао у чијој се унутрашњости не може наћи ниједна дуж конгруентна са* AB.

Ова се аксиома може доказати помоћу шире формулације аксиоме III$_5$ о конгруенцији троуглова. Доказ се заснива на ставу који следује из ставова 11 и 23: збир две стране троугла већи је од његове треће стране.

---

[1] Примедба, да је у овом доказу место раније употребљене шире аксиоме В. Цабела (W. Zabel) довољна овде наведена аксиома III$_7$, потиче од П. Бернајса.

Сад имамо наредни став, чији доказ овде изостављамо:

Из свих $I-V$ наведених аксиома може се доказати став о базиским угловима (став 11), а тиме и шира формулација аксиома III_5 о конгруенцији троуглова.

Настаје питање *да ли се аксиома о конгруенцији троуглова може доказати у њеној широј формулацији из њене уже формулације без аксиома непрекидности $V_{1,2}$. Ово истраживање ће показати да нити се може изоставити Архимедова аксиома, чак ни тада ако се претпостави да важе ставови учења о пропорцијама, нити сме недостајати аксиома суседства.* Геометрије, које ћу у том циљу у наредним излагањима конструисати, бацају у исто време, како ми изгледа, нову светлост на логичку везу између ставова о равнокраком троуглу и других елементарних ставова равне геометрије који долазе у обзир, нарочито на везу са учењем о површинама.

Нека је t параметар, а α неки израз са коначним или бесконачним бројем чланова облика

$$\alpha = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \ldots,$$

у коме нека $a_0 (\neq 0)$, a_1, a_2 значе произвољне реалне бројеве, а n произвољан цео рационалан број $(\gtreqless 0)$. Укупност свих израза овог облика α, којој је додато још 0, сматраћемо као комплексни систем бројева T у смислу § 13, за који смо установили следеће: ма који бројеви система T сабирају се, одузимају се, множе се, деле се тако, као да су обични апсолутно конвергентни степени редови код којих су чланови поређани по растућим степенима променљиве t. Тако добивени збирови, разлике, производи и количници опет су изрази облика α и стога бројеви комплексног бројног система T. За број α у систему T рећи ћемо да је $<$ или >0, према томе да ли је у дотичном изразу за α први коефицијент $a_0 <$ или >0. Ако су дата два ма која броја α и β комплексног бројног система T, рећи ћемо да је $\alpha < \beta$ одн. $\alpha > \beta$, према томе да ли је $\alpha - \beta < 0$ или $\alpha - \beta > 0$. Јасно је да при овим поставкама важе правила 1—16 у § 13; напротив, за наш систем T не важи Архимедова аксиома, правило 17 у § 13, пошто, ма како велики био изабран позитивни реални број A, увек остаје $At < 1$; дакле, наш комплексни бројни систем T је не-архимедски систем.

Ако је τ израз облика

$$\tau = a_0 t^n + a_1 t^{n+1} + a_2 t^{n+2} + \ldots,$$

где $a_0 (\neq 0)$, a_1, $a_2, \ldots$ значе реалне бројеве, а изложилац n најнижег степена од t је позитиван, тада ћемо τ звати *бесконачно малим бројем комплексног система T*.

Ма који ред степена облика

$$S(\tau) = c_0 + c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \ldots,$$

у коме $c_0, c_1, c_2, \ldots$ значе произвољне реалне бројеве, а τ бесконачно мали број система T опет је број система T; овај се ред може уредити по растућим степенима параметра t, при чему се сваки коефицијент добива као реални број помоћу коначног рачуна.

Ако су, даље, α и β два ма која броја система T, онда ћемо

$$\alpha + i\beta$$

назвати *имагинарним бројем у односу на комплексни систем T*, где је i имагинарна јединица, тј. нека буде $i^2 = -1$ и нека једначина $\alpha + i\beta = \alpha' + i\beta'$ значи да је $\alpha = \alpha'$ и $\beta = \beta'$.

Ако се тада функције $\sin \tau$, $\cos \tau$, e^τ, $e^{i\tau}$ бескрајно малог броја τ дефинишу помоћу њихових степених редова, тада су вредности функција опет бројеви система T одн. имагинарни бројеви у односу на овај систем. Сад можемо, ако је ϑ произвољан реалан број, дефинисати функције $\sin(\vartheta + \tau)$, $\cos(\vartheta + \tau)$, $e^{i(\vartheta+\tau)}$, $e^{i\vartheta + (1+i)\tau}$ у систему T помоћу формула

$$\sin(\vartheta + \tau) = \sin\vartheta \cos\tau + \cos\vartheta \sin\tau,$$

$$\cos(\vartheta + \tau) = \cos\vartheta \cos\tau - \sin\vartheta \sin\tau,$$

$$e^{i(\vartheta+\tau)} = e^{i\vartheta}\; e^{i\tau},$$

$$e^{i\vartheta + (1+i)\tau} = e^{\tau}\; e^{i(\vartheta+\tau)}.$$

Из ових дефиниција добивају се познате релације:

$$\cos^2(\vartheta + \tau) + \sin^2(\vartheta + \tau) = 1,$$

$$\cos(\vartheta + \tau) \pm i \sin(\vartheta + \tau) = e^{\pm i(\vartheta+\tau)}.$$

Конструишимо сада помоћу система бројева T равну геометрију на овај начин:

Замислићемо пар бројева (x, y) система T као тачку, а однос ма која три броја $(u : v : w)$ из T, у случају да u и v нису оба нула, као праву; даље, нека постојање једначине

$$ux+vy+w=0$$

изражава да тачка (x, y) лежи на правој $(u : v : w)$.

Равна геометрија, изграђена на показани начин на бројном систему, у коме важе правила $1-16$ у § 13, као што је већ поменуто у § 9, увек задовољава аксиоме I_{1-3} и IV.

Лако се увиђа да је права дата и помоћу једне своје тачке (x_0, y_0) и односа двају бројева α, β који нису једновремено једнаки нули. Једначина

$$x+iy=x_0+iy_0+(\alpha+i\beta)s\,; \qquad (\alpha+i\beta \neq 0),$$

у којој s значи ма који број система T, означава да тачка (x, y) припада поменутој правој. Уредимо тачке праве према величини параметра s. Тада је полуправа дате праве која полази од тачке (x_0, y_0) одређена допунским условом $s>0$ одн. $s<0$. Ако двема тачкама A и B праве припадају вредности параметра s_a и $s_b\,(>s_a)$, биће дуж AB претстављена једначином праве и допунским условом $s_a \leqq s \leqq s_b$. Сад су и аксиоме II_{1-3} задовољене; да бисмо се, даље, уверили да је задовољена и аксиома распореда II_4, установимо следеће: тачка (x_3, y_3) лежаће на једној или другој страни праве одређене тачкама (x_1, y_1) и (x_2, y_2), према томе да ли је знак детерминанте

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

позитиван или негативан. Можемо се уверити да тако дата дефиниција стране у односу на праву не зависи од избора тачака (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на правој и слаже се са дефиницијом стране датом на стр. 9.

За основу дефиниција конгруенције узећемо трансформације облика

$$x'+iy'=e^{i\vartheta+(1+i)\tau}(x+iy)+\lambda+i\mu,$$

које ћемо кратко писати у облику

$$x'+iy' = [\vartheta, \tau; \lambda+i\mu]\,(x+iy),$$

где ϑ значи произвољни реални број, τ бесконачно мали број система T, а λ и μ два произвољна броја система T. Трансформацију овог облика означићемо као *конгруентно пресликавање*. Конгруентно пресликавање, при коме су λ и μ једнаки нули, назива се обртањем око тачке (0, 0).

Укупност ових конгруентних пресликавања образује групу; ова укупност има ова четири својства:

1. Постоји конгруентно пресликавање које ниједној тачки не мења положај:

$$[0, 0; 0]\,(x+iy) = x+iy.$$

2. Ако се изведу два конгруентна пресликавања једно за другим, резултат претставља опет конгруентно пресликавање.

$$[\vartheta_2, \tau_2;\ \lambda_2+i\mu_2]\,\{[\vartheta_1, \tau_1;\ \lambda_1+i\mu_1]\,(x+iy)\}$$
$$= [\vartheta_2+\vartheta_1,\ \tau_2+\tau_1;\ \lambda_2+i\mu_2+e^{i\vartheta_2+(1+i)\tau_2}(\lambda_1+i\mu_1)]\,(x+iy).$$

За свако конгруентно пресликавање постоји инверзно пресликавање:

$$[-\vartheta, -\tau;\ -(\lambda+i\mu)\,e^{-i\vartheta-(1+i)\tau}]\,\{[\vartheta, \tau;\ \lambda+i\mu]\,(x+iy)\}$$
$$= x+iy.$$

Ова особина је последица особина 1, 2, 4, 5.

Извођење конгруентног пресликавања је асоцијативно, тј. ако три конгруентна пресликавања означимо са K_1, K_2, K_3, а конгруентно пресликавање које се добива према 2. из K_1, K_2, са K_2, K_1, онда ће увек важити

$$K_3\,(K_2\,K_1) = (K_3\,K_2)\,K_1.$$

Осим ових особина, истакнимо и наредне особине конгруентног пресликавања:

3. Тачка се увек преводи опет у тачку наше геометрије.

Пар бројева x', y' који се добивају при конгруентном пресликавању из пара бројева x, y система T, увек опет припада систему T.

4. Права прелази опет у праву са потпуно очуваним распоредом тачака.

Лако се добива релација

$$[\vartheta, \tau;\ \lambda+i\mu]\{x_0+iy_0+(\alpha+i\beta)s\} = x_0'+iy_0'+(\alpha'+i\beta')s,$$

у којој, пошто експоненцијална функција не ишчезава, из неједначине $\alpha+i\beta \neq 0$ увек следује $\alpha'+i\beta' \neq 0$.

Као непосредна последица следује: две различите тачке увек опет прелазе у две различите тачке.

5. Постоји само једно конгруентно пресликавање које преводи дату полуправу h у дату полуправу h'.

Нека је полуправа h дата једначином:

$$x+iy = x_0+iy_0+(\alpha+i\beta)s, \quad \alpha+i\beta \neq 0, \quad s>0,$$

а h' једначином:

$$x'+iy' = x_0'+iy_0'+(\alpha+i\beta)s', \quad \alpha'+i\beta' \neq 0, \quad s'>0.$$

Конгруентно пресликавање $[\vartheta, \tau;\ \lambda+i\mu]$, које полуправу h преводи у h', мора пре свега тачку из које излази полуправа h, превести у тачку из које излази полуправа h':

$$(1) \qquad x_0'+iy_0' = e^{i\vartheta+(1+i)\tau}(x_0+iy_0)+\lambda+i\mu.$$

Даље, свакој позитивној вредности од s мора одговарати позитивна вредност од s' тако да важи

$$x_0'+iy_0'+(\alpha'+i\beta')s' = [\vartheta, \tau;\ \lambda+i\mu]\{x_0+iy_0+(\alpha+i\beta)s\}$$

и према томе

$$(2) \qquad (\alpha'+i\beta')s' = e^{i\vartheta+(1+i)\tau}(\alpha+i\beta)s.$$

Обрнуто, свако конгруентно пресликавање које задовољава једначине (1) и (2), преводи h у h'.

Поделимо последњу једначину конјуговано имагинарном једначином

$$(3) \qquad \frac{\alpha'+i\beta'}{\alpha'-i\beta'} = e^{2i(\vartheta+\tau)}\frac{\alpha+i\beta}{\alpha-i\beta}.$$

Ако ставимо

$$\frac{\alpha' + i\beta'}{\alpha' - i\beta'} \cdot \frac{\alpha - i\beta}{\alpha + i\beta} = \xi + i\eta ,$$

добива се

$$(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = \xi^2 + \eta^2 = 1 .$$

ξ и η су као бројеви из T степени редови са параметром t; упоређујући коефицијенте извешћемо из последње једначине да се у редовима ξ и η не могу јавити степени параметра t са негативним изложиоцем, већ се, напротив, они могу претставити у облику

$$\xi = a + \xi' ,$$

$$\eta = b + \eta' ,$$

где a и b значе обичне реалне бројеве, а ξ' и η' бесконачно мале бројеве из система T, и да важе релације

$$(4) \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 , \\ 2(a\xi' + b\eta') + \xi'^2 + \eta'^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Једначина (3)

$$e^{2i(\vartheta+\tau)} = \xi + i\eta ,$$

према нашим дефиницијама тригонометриских функција, сада се може свести на облик

$$(5) \qquad \begin{aligned} \cos 2(\vartheta+\tau) &= \cos 2\vartheta \cos 2\tau - \sin 2\vartheta \sin 2\tau = \xi \\ &= a + \xi' , \\ \sin 2(\vartheta+\tau) &= \sin 2\vartheta \cos 2\tau + \cos 2\vartheta \sin 2\tau = \eta \\ &= b + \eta' . \end{aligned}$$

Упоређујући коефицијенте ових једначина долазимо до

$$\cos 2\vartheta = a , \qquad \sin 2\vartheta = b ,$$

из којих се, на основу важења једначине $a^2 + b^2 = 1$, може реални број ϑ одредити једнозначно до вишеструке вредности од π. Уношењем пара вредности $\cos 2\vartheta = a$, $\sin 2\vartheta = b$ у једначине (5) могу се добити релације:

$$\cos 2\tau = 1 + a\xi' + b\eta' ,$$

$$\sin 2\tau = a\eta' - b\xi' ;$$

а пошто је на основу једначине (4) збир квадрата десних страна 1, то је бескрајно мали број τ једнозначно одређен. Он се може израчунати из једне од двеју последњих једначина упоређивањем коефицијената.

Пошто је ϑ одређено само до вишеструке вредности од π, фактор $e^{i\vartheta+(1+i)\tau}$ је одређен само до знака. Само један од два знака даје, што се лако види, за позитивно s у једначини (2) позитивно s'. Према томе, реални број ϑ одређен је до вишеструке вредности од 2π. Уношењем пара вредности ϑ и τ у једначину (1), добивају се на једнозначан начин λ и μ у систему T. Најзад увиђамо да једначине (1) и (3), а зато и нађене вредности ϑ, τ, λ, μ не зависе од начина претстављања полуправих h и h'.

6. За две тачке A, B увек постоји конгруентно пресликавање које преводи A у B и B у A.

Ако тачке A, B имају координате x_1, y_1 и x_2, y_2, онда конгруентно пресликавање

$$[\pi, 0;\ x_1+\lambda_2+i\,(y_1+y_2)]$$

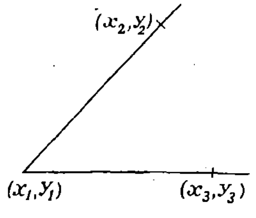
остварује оно што се тражи.

7. Ако конгруентно пресликавање преводи полуправу h у полуправу h' и тачку P у тачку P', онда P и P' исто леже у односу на полуправе h и h'.

Покажимо најпре да детерминанте

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} x_2'-x_1' & y_2'-y_1' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix}$$

имају исти знак онда и само онда када тачке (x_3, y_3) и (x_3', y_3') исто леже у односу на усмерене праве које су одређене тачкама (x_1, y_1) и (x_2, y_2), одн. (x_1', y_1') и (x_2', y_2') (уп. стр. 122—123). Најпре, из дате дефиниције на стр. 69 о „десном“ и „левом“ закључујемо, да тачке (x_3, y_3) и (x_2, y_2) нису тачке које исто леже у односу на усмерене праве које су одређене тачкама (x_1, y_1) и (x_2, y_2), одн. (x_1, y_1) и (x_3, y_3). Сад се одговарајуће детерминанте заиста разликују својим знацима. Наше тврђење следује уопште из околности што дефиниција



стране праве помоћу знака наведене детерминанте задовољава својства стране изложена на стр. 9.

Особина 7 биће према томе доказана ако се покаже да се знак детерминанте

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

не мења при конгруентном пресликавању. Али, ова детерминанта се разликује само позитивним фактором од имагинарног дела количника

$$\frac{(x_2+iy_3)-(x_1+iy_1)}{(x_2+iy_2)-(x_1+iy_1)},$$

при чему је непосредно јасно да је овај количник инваријантан у односу на конгруентно пресликавање.

Установимо сад ово: рећи ћемо да је нека дуж онда и само онда конгруентна другој дужи ако постоји конгруентно пресликавање које преводи прву дуж у другу; рећи ћемо да је угао онда и само онда конгруентан другом углу ако постоји пресликавање које преводи један угао у други.

Показаћемо да наведена дефиниција конгруенције дужи и конгруенције углова задовољава аксиоме III_{1-6} ако конгруентно пресликавање узето за основу има особине 1 до 7.

Важење аксиоме III_1 непосредна је последица особине 5.

Важење аксиоме III_2 доказује се на овај начин. Нека конгруентна пресликавања K_1 и K_2 преводе дужи $A'B'$ и $A''B''$ у дуж AB. Из особина 1, 2, 4, 5 следује да за једно конгруентно пресликавање K_2 постоји увек инверзно конгруентно пресликавање K_2^{-1}. Конгруентно пресликавање $K_2^{-1}K_1$ према особини 2 преводи дуж AB у $A''B''$.

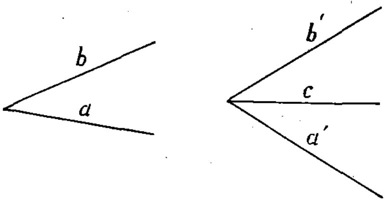
Аналогно се доказује важење аксиома III_6.

Показаћемо сад да ако је дуж AB конгруентна дужи $A'B'$, онда конгруентно пресликавање K које преводи полуправу AB у полуправу $A'B'$ преводи и тачку B у тачку B'. Нека је конгруенција дужи AB и $A'B'$ добивена помоћу конгруентног пресликавања K_1. Ако K_1 преводи тачку A у A', то на основу особине 4 конгруентно пресликавање KK_1^{-1}

преводи полуправу $A'B'$ саму у себе, дакле, према особинама 1 и 5, оно мора бити идентитет. А ако K_1 преводи тачку A у B', онда ћемо узети у помоћ конгруентно пресликавање K_2 — а то пресликавање K_2 постоји на основу особине 6 — које преводи тачку A у B и B у A. Сад конгруентно пресликавање $K(K_2 K_1^{-1})$ преводи полуправу $A'B'$ саму у себе, дакле, оно је идентитет.

Из доказаног и из особина 4 и 5 непосредно следује важење аксиоме III_3, а исто тако из доказаног и особина 4, 5 и 7 непосредно следује аксиома III_5*.

Најзад се доказује важење аксиоме III_4 на наредни начин: ако су дати угао $\sphericalangle(a, b)$ и полуправа c, то на основу особине 5 постоји једно и само једно конгруентно пресликавање K_1, које преводи a у c, а такође једно и само једно конгруентно пресликавање које преводи b у c. K_1 преводи b у полуправу b' различиту од c, што се сазнаје на основу особине 4 при посматрању конгруентног пресликавања K_1^{-1}; исто тако пресликавање K_2 преводи полуправу a у полуправу a' различиту од c. Конгруентно пресликавање $K_2 K_1^{-1}$ преводи полуправу c у a', а полуправу b' у c. Из особине 7 следује да полуправе a' и b' леже на разним странама полуправе c. Стога је први део аксиоме III_4 задовољен. Други део те аксиоме је непосредна последица особине 1.



Да важи аксиома III_7 увиђа се овим посматрањем. Полуправа која излази из тачке (0,0), коју ћемо означити са O, може се увек претставити једначином облика

$$x + iy = e^{i(\vartheta+\tau)} s\,; \qquad s > 0\,;$$

та полуправа произилази из позитивне полуосе x помоћу обртања $[\vartheta, \tau; 0]$. Лако се доказује да од две полуправе које излазе из тачке O и леже у полуравни позитивних y, она полуправа лежи између друге полуправе и позитивне полуосе x која modulo 2π има мањи збир $\vartheta + \tau$.

Нека се десни крак h неког угла поклапа сад са позитивном полуосом x; нека његов леви крак k буде претстављен једначином

$$x+iy = e^{i(\vartheta_1+\tau_1)}s\,; \quad s>0\,.$$

Излазећи из тачке O полуправа h' води у унутрашњост овог угла. Тада постоји једно и само једно конгруентно пресликавање које преводи полуправу h у h', наиме обртање $[\vartheta_2, \tau_2; 0]$; оно преводи полуправу k у полуправу k' чија је једначина

$$x+iy = e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2+\tau_1+\tau_2)}s\,; \quad s>0\,.$$

Важи

$$\vartheta_1+\vartheta_2+\tau_1+\tau_2 > \vartheta_1+\tau_1 \qquad \mod 2\pi\,;$$

према томе k' не лежи у углу $\sphericalangle(h, k)$.

Важење аксиоме суседства V_3 може се доказати на наредни начин. Помоћу другог става о конгруенцији и аксиоме IV лако се показује да се за једну дуж која лежи у унутрашњости троугла, увек може наћи конгруентна дуж, која, излазећи из темена троугла, лежи на страни тог троугла или у његовој унутрашњости.

На основу аксиоме III_1 постоји за једну дату дуж једна и само једна дуж OB' из тачке O која је усмерена на позитивну страну полуосе x и са којом је дуж AB конгруентна. Узећемо апсцису β тачке B' за *дужину* дужи AB:

$$\overline{AB} = \beta\,.$$

Посматрајмо сад троугао са теменима $O\,(0{,}0)$, $C\left(\frac{\beta}{2}, 0\right)$, $D\left(\frac{\beta}{4}, \frac{\beta}{4}\sqrt{3}\right)$. Овај троугао је равностран са једнаким угловима, што показује конгруентно пресликавање $\left[\frac{2\pi}{3}, 0; \frac{\beta}{2}\right]$ које преводи тачку O у C, тачку C у D, а тачку D у O. Слободна крајња тачка F дужи која је конгруентна дужи AB и иде из тачке O по једном краку угла $\sphericalangle COD$ или се простире у унутрашњости тога угла, може се претставити у облику:

$$[\vartheta, \tau; 0]\,\beta\,, \qquad 0 \leqq \vartheta+\tau \leqq \frac{\pi}{3}\,.$$

Али, све тачке, претстављене у овом облику, леже на оној страни праве CD на којој не лежи O, што се увиђа, према реченом на стр. 126, супституцијом координата тачке O и тачке F у детерминанти за CD

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ x_3 - \dfrac{\beta}{2} & y_3 \end{vmatrix}.$$

Овим је показано да у унутрашњости троугла OCD не постоји дуж која би била конгруентна са AB.

Резимираћемо:

У нашој геометрији важе све горе постављене аксиоме обичне равне геометрије, изузев Архимедове аксиоме V_1; при томе аксиому конгруенције троуглова треба узети у ужој формулацији III_5^*.

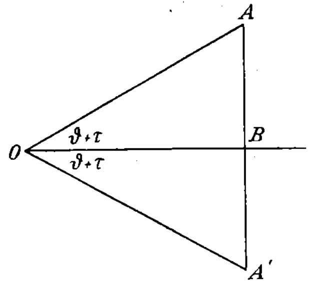
Даље, важи став:

Сваки се угао може преполовити и постоји прав угао.

Довољно је показати да се сваки угао који излази из тачке O може преполовити. Нека је $[\vartheta, 0; 0]$ обртање које преводи десни крак у леви; обртање $\left[\dfrac{\vartheta}{2}, \dfrac{\tau}{2}; 0\right]$ преводи десни крак угла у његову бисектрису.

Егзистенција правог угла се увиђа посматрањем обртања $\left[\dfrac{\pi}{2}, 0; 0\right]$.

Увешћемо сад појам *огледања* на правој a на овај начин: спустимо нормалу ма из које тачке A ма на коју праву a и продужимо ову нормалу за њену сопствену дужину преко подножне тачке B до A'; тачка A' се назива огледалска слика тачке A. Огледнимо најпре тачку A са координатама $\alpha > 0$, $\beta > 0$ на оси x. Нека је угао $\sphericalangle AOB$ између полуправе OA и позитивне полуосе x једнак $\vartheta+\tau$ и нека, например, тачка $x = \gamma$ на



оси x при обртању за угао $\vartheta+\tau$ прелази у тачку A тако да је

$$e^{i\vartheta+(1+i)\tau}\gamma=\alpha+i\beta.$$

Огледалска слика A' тачке A у односу на осу x има координате α, $-\beta$. Према томе, ако изведемо обртање за угао $\vartheta+\tau$, из тачке A' произилази тачка која се претставља имагинарним бројем

$$e^{i\vartheta+(1+i)\tau}(\alpha-i\beta)=\frac{\alpha+i\beta}{\gamma}(\alpha-i\beta)=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma},$$

тј. та тачка лежи на позитивној оси x; стога је угао $\sphericalangle A'OB$ такође једнак $\vartheta+\tau$ и, према томе, подудара се са углом $\sphericalangle AOB$. Овај резултат можемо изразити овако:

Ако се у два правоугла троугла који симетрично леже подударају обе катете, онда су и одговарајући углови на хипотенузи међу собом једнаки.

Из тога изводимо истовремено општији став:

Углови огледалске слике неке фигуре увек се подударају са одговарајућим угловима првобитне фигуре.

Из околности да су у нашој геометрији праве дефинисане помоћу линеарних једначина може се без тешкоћа извести како основни став учења о пропорцијама (став 42), тако и Паскалов став (став 40). Отуда увиђамо ово:

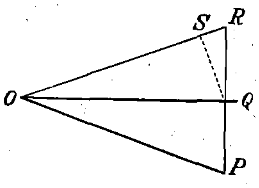
У нашој геометрији важи учење о пропорцијама и, даље, у њој важе сви ставови афине геометрије (уп. § 35).

На основу важења аксиоме III_7 може се показати да се углови у нашој геометрији могу на једнозначан начин упоредити по својој величини.

Помоћу ове чињенице може се доказати став о спољашњем углу (став 22), и то, пошто су у нашој геометрији унакрсни углови увек једнаки, може се у њу пренети доказ са стр. 23. Из чињенице да се у нашој геометрији може једнозначно дефинисати збир два угла, добива се, помоћу аксиоме IV, став о збиру углова у троуглу (став 31).

Дошли смо сад до основног питања, до питања да ли у нашој геометрији важи став о једнакости углова на основици равнокраког троугла (став 11).

Из овог става и става о спољашњем углу код троугла добива се сад с једне стране теорема обрнута теореми о базисним угловима равнокраког троугла (став 24) помоћу индиректног доказа, а с друге стране помоћу познатог Еуклидовог доказа став: збир две стране у сваком троуглу већи је од треће стране. Али, као што ћемо показати, ниједан од ова два става није задовољен у нашој геометрији; а тиме ће истовремено бити доказано да став о базисним угловима равнокраког троугла у њој не важи.



Посматрајмо троугао OQP, чија темена имају координате: $0{,}0$; $\cos t, 0$; $\cos t, -\sin t$. Дужина (в. стр. 133) дужи OP и QP налази се помоћу конгруентног пресликавања $[0, t; 0]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, 0; -\cos t \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right]$.

Добива се

$$\overline{OP} = e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \cdots,$$

$$\overline{QP} = \sin t = t - \frac{t^2}{6} + - \cdots,$$

$$\overline{OQ} = \cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + - \cdots.$$

На основу дефиниције распореда бројева система T увиђа се да је

$$\overline{OQ} + \overline{QP} < \overline{OP}.$$

Став по коме је збир двеју страна у сваком троуглу већи од треће стране не важи у нашој геометрији.

Отуда увиђамо битну зависност овог става од аксиоме о конгруенцији троуглова у ширем смислу.

Из овог резултата у исто доба следује:

У нашој геометрији не важи став о равнокраком троуглу и зато не важи ни аксиома о конгруенцији троуглова у ширем смислу.

Да у нашој геометрији не важи ни обрнути став о угловима на основици, непосредно увиђамо на примеру троугла OPR, где је R огледалска слика тачке P у односу на праву OQ, тј. теме R има координате $\cos t$, $\sin t$. Тада је према једном раније доказаном ставу (стр. 135),

$$\sphericalangle OPR \equiv \sphericalangle ORP .$$

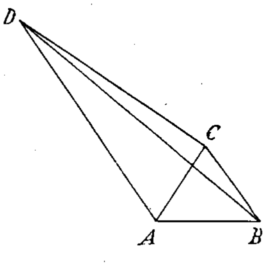
И поред тога стране OP и OR нису међу собом конгруентне. Дужина дужи која се добива помоћу обртања $[0, -t; 0]$ је наиме

$$\overline{OR} = e^{-t} \not\equiv \overline{OP} = e^{t} .$$

Одатле ћемо видети да су уопште у два симетрично положена правоугла троугла једнаких катета хипотенузе различите и зато при огледању на правој, дужи на огледалској слици нису нужно једнаке дужима првобитне фигуре.

У нашој геометрији такође не важи, како је показао Роземан[1], ни трећи став конгруенције (став 18) у ужој формулацији у односу на троугле који исто леже. Да бисмо ово увидели, приметимо најпре да тачке $A=0$, $B=t$, $C=te^{i\frac{\pi}{3}}$ образују равнострани троугао. Посматрамо ли, даље, тачку

$$D = \frac{t}{1-e^{(1+i)t}} ,$$



увидећемо да је $AB \equiv BD$, јер конгруентно пресликавање $[0, t; t]$ преводи тачку D саму у себе, а тачку A у B. Даље се још израчунава да тачке A и B леже на истој страни праве CD. Одатле прво проистиче да троугли

---

[1] В. Роземан (W. Rosemann), „Der Aufbau der ebenen Geometrie ohne das Symmetrieaxiom", Dissertation, Göttingen 1922, Math. Ann. књ. 90. Тамо је први пут показана зависност важења аксиома III_{1-6} од извесних својстава конгруентног пресликавања.

ACD и BCD, код којих су све одговарајуће стране једнаке, исто леже, и друго да они не могу имати све одговарајуће углове једнаке.

Размотрићемо у нашој геометрији још Еуклидово учење о површинама полигона. Ово је учење било изграђено у § 20 на појму *мере површине* троугла. Доказ да је ова мера површине, полупроизвод основице и висине, независна од тога која се страна троугла сматра основицом, био је изведен применом аксиоме конгруенције троуглова на троугле који леже симетрично. Да овај став не може бити доказан без шире формулације те аксиоме, може се увидети на примеру троугла OQR (стр. 136). QR је висина спуштене на OQ, помоћу конгруентног пресликавања $\left[-\frac{\pi}{2}, 0; -\cos t \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\right]$ добива се дужина

$$\overline{QR} = \sin t;$$

и пошто је $\overline{OQ} = \cos t$, то би мера површине, с једне стране, морала бити

$$J = \frac{\cos t \cdot \sin t}{2}.$$

Нађимо подножје S управне спуштене из тачке Q на OR:

$$S = \cos t + i\, e^{it} \sin t \cos t.$$

Даље, конгруентним пресликавањем

$$\left[-\frac{\pi}{2}, -t; -\cos t \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}-(1+i)t}\right]$$

добива се дужина

$$\overline{QS} = e^{-t} \sin t \cos t;$$

а пошто је $\overline{OR} = e^{-t}$, добили бисмо, с друге стране, за ту меру површине вредност

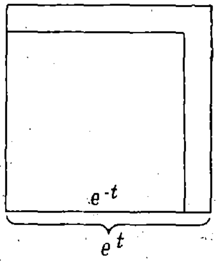
$$J = \frac{e^{-t} \cdot e^{-t} \cos t \sin t}{2},$$

која је сигурно мања од вредности

$$\frac{\cos t \sin t}{2}.$$

Док појам мере површине губи свој смисао без шире формулације аксиоме III_5 о конгруенцији троуглова, појмови *разложиве једнакости* и *допунске једнакости* полигона могу се дефинисати исто тако као у § 18. Тада се став 46 који изражава допунску једнакост два троугла са једнаким основицама и висинама добива исто онако као у § 19.

Даље се увиђа да се и на основу уже аксиоме III_5^*, може конструисати на свакој дужи квадрат, тј. четвороугао са једнаким угловима, од којих сваки износи $\frac{\pi}{2}$, и са једнаким странама. У нашој геометрији важи сада и Питагорина теорема, према којој су оба квадрата над катетама ма ког правоуглог троугла заједно допунски једнака квадрату над хипотенузом. Јер, ми увиђамо да се у Еуклидовом доказу Питагорине теореме искоришћава само конгруенција троуглова који исто леже и према томе само аксиома о конгруенцији троуглова у ужем смислу.



Применом Питагорине теореме на троуглове OQP и OQR на стр. 136, налазимо, уз помоћ става 43, да су на дужима OP и OR конструисани квадрати допунски једнаки, ма да ове дужи, како смо их горе израчунали, нису међу собом једнаке.

Веза ове околности са ставом 52 потпуно је јасна и одатле видимо да основни Еуклидов став, по коме два допунски једнака троугла истих основица увек имају исте висине, такође не важи у нашој геометрији.

Уствари, овај став 48 био је доказан у § 21, при чему је битно коришћен појам мере површине.

Према томе, наша нас геометрија доводи до сазнања:

Немогуће је засновати Еуклидово учење о површинама на аксиоми конгруенције троугла у ужем смислу, чак и ако се претпостави да важи учење о пропорцијама.

Пошто у нашој геометрији не важи познати однос између хипотенузе и катета правоуглог троугла, однос који се у обичној геометрији изводи из Питагориног става, то ћу нашу геометрију назвати *непитагорејском геометријом.*

Направимо преглед најважнијих резултата који проистичу из наше непитагорејске геометрије:

Ако узмемо аксиому конгруенције троуглова у ужем смислу и ако претпоставимо да од аксиома непрекидности важи само аксиома суседства, тада се не може доказати став о једнакости углова на основици у равнокраком троуглу, чак ни онда ако претпоставимо да важи учење о пропорцијама. Исто тако одатле не следује Еуклидово учење о површинама; такође став, по коме је збир две стране троугла већи од треће стране, и трећи став конгруенције за троуглове који исто леже, нису нужне последице из учињених претпоставки.

Ми ћемо конструисати још једну другу непитагорејску геометрију која се разликује од геометрије коју смо сад обрађивали тиме што у њој важи Архимедова аксиома V_1, али не важи аксиома суседства V_3.

Узећемо за основу ове геометрије ону делимичну област Ω реалних бројева која се састоји од свих бројева добивених из бројева 1 и $\mu = \operatorname{tg} 1$, ако коначно пута применимо операције рачуна: сабирање $\omega_1 + \omega_2$, одузимање $\omega_1 - \omega_2$, множење $\omega_1 \cdot \omega_2$, дељење $\omega_1 : \omega_2$ (у случају да је $\omega_2 \neq 0$) и степеновање $\omega_1^{\omega_2}$. При томе ω_1, ω_2 треба да означавају бројеве који су већ добивени помоћу пет поменутих операција од бројева 1 и μ. Да би се добио број ω полазећи од бројева 1 и μ, треба тих пет операција применити n_1 пута, одн. n_2 пута, ..., n_5 пута. Бројеви ω области Ω могу се тада пребројати према растућем збиру

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_5.$$

На овом бројном систему изградићемо равну геометрију помоћу истих конвенција помоћу којих смо изградили на стр. 126 прву непитагорејску геометрију на бројном систему T; из чињенице да при природној дефиницији распореда важе сви закони рачуна 1—16 § 13, сазнајемо, као и тамо, да важе аксиоме I_{1-3}, II, IV у нашој геометрији.

Сваком броју ω области Ω проширене за број ∞ одговара бесконачно много бројева ϑ који задовољавају једначину

$$\vartheta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \omega .$$

Укупност свих бројева ϑ добивених помоћу ове једначине из Ω образују неку област Θ која се не поклапа са Ω, али која је као и Ω пребројива. Поћи ћемо ма од ког пребројавања бројева области Θ. У овом пребројавању постоји први број који није производ рационалног броја и броја π; означићемо га са ϑ_{k_1}. Први број из области Θ који се не може претставити у облику

$$\vartheta = r\pi + r_1 \vartheta_{k_1},$$

где су r и r_1 ма који рационални бројеви, означићемо, ако он уопште постоји, са ϑ_{k_2}. Настављајући на овај начин, означићемо са $\vartheta_{k_{n+1}}$ први број ϑ области Θ који се не може претставити у облику

$$\vartheta = r\pi + r_1 \vartheta_{k_1} + r_2 \vartheta_{k_2} + \cdots + r_n \vartheta_{k_n},$$

ако уопште постоји такав број. Овим је дефинисан низ ϑ_{k_1}, ϑ_{k_2}, $\vartheta_{k_3}, \cdots$, који сигурно садржи један члан, а, можда, и бесконачно много. Сваки број ϑ из области Θ може се сада претставити на једнозначан начин у облику

$$\vartheta = r\pi + r_1 \vartheta_{k_1} + r_2 \vartheta_{k_2} + \cdots + r_n \vartheta_{k_n},$$

где су $\vartheta_{k_1}, \vartheta_{k_2}, \ldots, \vartheta_{k_n}$ првих n чланова сада дефинисаног низа, а r, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ма који рационални бројеви.

Исто тако као у првој непитагорејској геометрији на стр. 131 дефинисаћемо сада конгруенцију дужи и конгруенцију углова помоћу конгруентног пресликавања. Као конгруентно пресликавање сматраћемо овде сваку трансформацију облика:

$$x' + iy' = 2^{r_1} e^{i\vartheta} (x + iy) + \lambda + i\mu,$$

где је ϑ неки број из области Θ, r_1 рационални број који улази у горње претстављање броја ϑ, а где су λ и μ произвољни бројеви области Ω.

Конгруентна пресликавања образују групу, што се лако може проверити. Она, дакле, имају особине 1 и 2 наведене на стр. 127. Особина 3 следује из чињенице да бројеви

$$2^{r_1}, \quad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}}$$

припадају области Ω. Особина 5 добива се на овај начин:

Доказ се, слично као на стр. 128, своди на једнозначно одређивање до вишеструке вредности од 2π броја ϑ из области Θ који задовољава једначину

$$2^{r_1} e^{i\vartheta} = \frac{\alpha' + i\beta'}{\alpha + i\beta} \cdot \frac{s'}{s}.$$

Поделићемо имагинарни део реалним:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha\alpha' + \beta\beta'}.$$

Овом једначином је одређен број ϑ у бројном систему Θ до вишеструке вредности од π. Одређивање до вишеструке вредности од 2π изводи се исто тако као у првој непитагорејској геометрији (уп. стр. 130). Докази особина 4, 6 и 7 изводе се исто тако као и тамо.

Према томе, из доказаних седам особина конгруентног пресликавања следује, на основу датог општег доказа на стр. 131, да су у нашој геометрији аксиоме III_{1-6} задовољене. Важење аксиома III_7 може се показати слично као у првој непитагорејској геометрији.

Из дефиниција распореда и конгруенције следује важење Архимедове аксиоме V_1, пошто је подручје Ω делимично подручје подручја реалних бројева.

Напротив, да аксиома суседства V_3 није задовољена, показује се на наредни начин. За сваки троугао може се наћи њему конгруентан троугао OAB са теменима $O=(0,0)$, $A=(\alpha, 0)$, $B=(\beta,\gamma)$, где α и γ означавају позитивне бројеве. Зато је довољно показати да се у сваком таквом троуглу налази дуж напр. дужине 1. Полуправа OB може се претставити, независно од тога да ли је β нула или није нула, у облику

$$x+iy=e^{i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\gamma}{\beta}}\cdot s,$$

где са s означавамо позитивни параметар који припада области Ω. Пошто су бројеви $\alpha\gamma$ и $|\alpha-\beta|+\gamma$ позитивни, можемо сад наћи цео број r_1, који не мора бити позитиван, а који задовољава неједначину

$$(1) \qquad 2^{r_1}<\frac{\alpha\gamma}{|\beta-\alpha|+\gamma}.$$

За дате бројеве r_1, ϑ_{k_1}, $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\gamma}{2}>0$ постоје сигурно два цела броја a и b који задовољавају неједначину

$$(2) \qquad 0<\frac{a}{2^b}\pi+r_1\,\vartheta_{k_1}<\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\gamma}{\beta}.$$

Из формуле

$$\mathrm{tg}\,\frac{\vartheta}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\vartheta}}{\mathrm{tg}\,\vartheta}$$

увиђамо да су $\frac{\pi}{2^b}$, па стога, на основу теореме о тангенсу збира, и

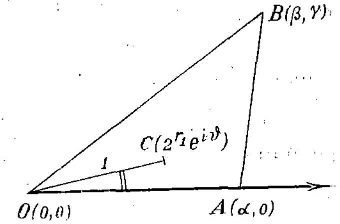
$$\vartheta=\alpha\frac{\pi}{2^b}+r_1\,\vartheta_{k_1}$$

бројеви из области Θ. Из неједначине (2) произлази да полуправа

$$x+iy=e^{i\vartheta}\cdot s, \quad s>0$$

лежи у унутрашњости угла $\sphericalangle AOB$. Слободна крајња тачка C дужи дужине 1 која лежи на овој полуправој и полази из тачке O, може се претставити у облику

$$x+iy=2^{r_1}\cdot e^{i\vartheta}.$$



Тачке O и C леже на истој страни праве AB, пошто су обе детерминанте

$$\begin{vmatrix}\beta-\alpha & \gamma\\ -\alpha & 0\end{vmatrix}=\alpha\gamma,$$

$$\begin{vmatrix} \beta-\alpha & \gamma \\ 2^{r_1}\cos\vartheta-\alpha & 2^{r_1}\sin\vartheta \end{vmatrix} > -2^{r_1}|\beta-\alpha|-2^{r_1}\gamma+\alpha\gamma$$

позитивне, последња на основу неједначине (1). Према томе, тачка C лежи у унутрашњости троугла OAB, тј. у унутрашњости овог троугла постоји дуж чија је дужина 1.

Исто тако, као и у првој непитагорејској геометрији, показује се да се сваки угао може преполовити и да постоји прави угао; на исти начин се доказује да важе ставови наведени на стр. 135 и стр. 137 о огледалским сликама, као и сви ставови учења о пропорцијама и ставови афине геометрије. Сви углови наше геометрије налазе се такође и у Еуклидовој геометрији и упоређивање углова по величини у нашој геометрији исто је као и у Еуклидовој геометрији. Отуда следује, даље, да важи став о спољашњем углу (став 22) и став о збиру углова у троуглу (став 31). Напротив, не важи став о једнакости базисних углова у равнокраком троуглу. Наиме, из овог се става може, помоћу става о спољашњем углу, као што је то већ поменуто на стр. 135, непосредно добити њему обрнути став. Али, да ова обрнута теорема није задовољена у нашој геометрији, увиђа се напр. посматрањем троугла OPQ са теменима $O=(0,0)$, $P=(\cos\vartheta_{k_1}, -\sin\vartheta_{k_1})$, $Q=(\cos\vartheta_{k_1}, +\sin\vartheta_{k_1})$. Овај троугао има једнаке углове код P и Q, а међутим дужине његових страна $\overline{OP}=2$ и $\overline{OQ}=2^{-1}$ нису једнаке.

Ни Еуклидово учење о површинама у тој геометрији не важи. Исто тако не важи став да је збир двеју страна троугла већи од треће стране, јер из овог става непосредно следује да је свака дуж која лежи у унутрашњости троугла, мања од његовог обима, и према томе важила би аксиома V_3.

Посматране непитагорејске геометрије доводе нас до сазнања:

За доказ важења става о једнакости углова на основици равнокраког троугла неопходна је како Архимедова аксиома V_1, тако и аксиома суседства V_3.

Овај Додатак је употпуњен у Допуни III.

Додатак III

Ново заснивање геометрије Бољаи-Лобачевскога

(Прештампано из Math. Ann. књ. 57.)

У своме раду „Основе геометрије", гл. I (стр. 3—30)[1] поставио сам систем аксиома за Еуклидову геометрију и тада сам показао да је могуће изградити Еуклидову геометрију равни искључиво на основу оних аксиома које се односе на раван, чак и без примене аксиома непрекидности. У овом испитивању замeнићу аксиому паралелних одговарајућим захтевом геометрије Бољаи-Лобачевскога и тада ћу показати исто тако *да је немогуће засновати геометрију Бољаи-Лобачевскога у равни искључиво на основу аксиома равни без примене аксиоме непрекидности.*[2]

Ово ново заснивање геометрије Бољаи-Лобачевскога у погледу једноставности не заостаје, како ми изгледа, иза досад познатих начина заснивања, наиме ни иза заснивања

---

[1] Упореди такође моју расправу „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck". Proceedings of the London Mathematical Society, књ. 35, 1903 (Додатак II ове књиге).

[2] Отада је тај проблем био испитиван и независно од аксиоме IV, која је карактеристична за геометрију Бољаи-Лобачевскога. Најпре је М. Ден у расправи „Über den Inhalt sphärischer Dreiecke", Math. Ann. књ. 60, засновао учење о површинама у равној елиптичној геометрији без примене аксиома непрекидности; затим је Г. Хесенбергу, у расправи „Begründung der elliptischen Geometrie", при истим претпоставкама пошло за руком да докаже ставове о тачкама пресека у равној елиптичној геометрији; најзад је Хјелмслев показао у расправи „Neue Begründung der ebenen Geometrie", Math. Ann., књ. 64, да се може изградити равна геометрија без аксиома непрекидности, чак и без ма какве претпоставке о правима које се секу или не секу.

Бољаија и Лобачевског који су се служили граничном сфером, ни према заснивању Клајновом (F. Klein) помоћу пројективне методе. Поменута заснивања користила су у битноме како простор, тако и непрекидност.

Да би се олакшало разумевање, направићу, према моме раду „Основе геометрије“, преглед аксиома равне геометрије којима ћемо се у наведним излагањима користити, наиме:¹⁾

I. Аксиоме везе

I_1. *За две тачке А, В постоји увек права а која припада свакој од ових двеју тачака А, В.*

I_2. *За две тачке А, В не постоји више од једне праве која припада свакој од ових двеју тачака А, В.*

I_3. *На свакој правој постоје најмање две тачке. Постоје најмање три тачке које не леже на једној правој.*

II. Аксиоме распореда

II_1. *Ако тачка В лежи између тачке А и тачке С, онда су А, В, С три различите тачке праве и В лежи такође између С и А.*

II_2. *За две тачке А и С на правој АС постоји најмање једна тачка В тако да С лежи између А и В.*

II_3. *Ма од које три тачке праве не постоји више од једне која лежи између друге две.*

Дефиниција. Тачке које леже између две тачке *А* и *В* називају се такође тачкама дужи *АВ* или *ВА*.

II_4. *Нека су А, В, С три тачке које не леже на правој линији и а права у равни А, В, С која не пролази ни кроз једну од тачака А, В, С; ако тада права а пролази кроз једну од тачака дужи АВ, она извесно такође пролази или кроз једну од тачака дужи ВС или кроз једну од тачака дужи АС.*

---

¹⁾ Формулација аксиома I—III узета је из овог издања.

III. Аксиоме подударности

Дефиниција. Свака се права дели ма којом својом тачком у две *полуправе* (полузрака) или *половине.*

III$_1$. *Ако су A и B две тачке на правој a и, даље, ако је A′ тачка праве a′, онда се на једној датој половини праве a′, одређеној тачком A′, увек може наћи тачка B′ тако да је дуж AB подударна или једнака дужи A′B′, што се може означити:*

$$AB \equiv A'B'.$$

III$_2$. *Ако је дуж A′B′ подударна дужи AB и дуж A″B″ подударна истој дужи AB, онда је и дуж A′B′ подударна дужи A″B″.*

III$_3$. *Нека су AB и BC две дужи на правој a без заједничких тачака и нека су, даље, A′B′ и B′C′ две дужи без заједничких тачака на истој или другој правој a′; ако је тада $AB \equiv A'B'$ и $BC \equiv B'C'$ биће и*

$$AC \equiv A'C'.$$

Дефиниција. Пар полуправих h и k које излазе из тачке A и заједно не чине праву, назваћемо *углом* и означићемо га или са

$$\sphericalangle (h, k) \text{ или са } \sphericalangle (k, h).$$

Даље, може се дефинисати појам *стране* равни у односу на неку праву на основу аксиоме II; тачке равни које у односу на h леже на истој страни као и k, а у исто време у односу на k на истој страни као и h, називају се *унутрашњим* тачкама угла $\sphericalangle (h, k)$; оне образују *угаони простор* (унутрашњост) овог угла.

III$_4$. *Нека је дат угао $\sphericalangle (h, k)$, права a′ и одређена страна од a′. Нека h′ означава полуправу праве a′ која излази из тачке O′: тада постоји једна и само једна полуправа k′, тако да је угао $\sphericalangle (h, k)$ конгруентан или једнак углу $\sphericalangle (h', k')$, што ћемо изразити знацима:*

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k'),$$

и да у исто време све унутрашње тачке угла $\sphericalangle (h', k')$ леже на датој страни од праве a′.

Сваки је угао подударан самом себи, тј. увек је

$$\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h, k).$$

III$_5$. *Ако за два троугла ABC и $A'B'C'$ важе подударности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \text{и} \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

онда увек важи и подударност

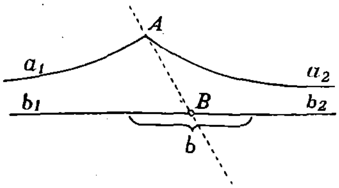
$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'.$$

Из аксиома I – III лако се изводе ставови о конгруенцији троуглова и о равнокраком троуглу, а у исто време се увиђа могућност да се спусти или подигне нормала као и да се преполови дата дуж или дати угао. Нарочито, исто као и и код Еуклида, из тих аксиома следује став да је у сваком троуглу збир две стране већи од треће стране.

IV. Аксиома о правима које се секу и које се не секу

Сада ћемо формулисати аксиому која у геометрији Бољаи-Лобачевскога одговара аксиоми паралелних у еуклидској геометрији:

IV. *Ако је b произвољна права, а A тачка која не лежи на њој, увек постоје две полуправе a_1 и a_2 које пролазе кроз тачку A и које не чине једну и исту праву и не секу праву b, док свака полуправа која лежи у унутрашњости угла образованог са a_1 и a_2 и излази из тачке A, пресеца праву b.*



Дефиниција. Нека је права b раздељена ма којом својом тачком B у две полуправе b_1 и b_2 и нека полуправе a_1, b_1 леже на једној страни, а a_2, b_2 на другој страни праве AB; тада ћемо полуправу a_1 назвати *паралелном* према полуправој b_1, а исто тако полуправу a_2 назваћемо *паралелном* према b_2; исто ћемо тако рећи да су обе полуправе a_1 и a_2 *паралелне* према правој b и да су обе праве, чије су полуправе a_1 и a_2, *паралелне* према b.

Отуда непосредно следује тачност наредних чињеница:

Ако је нека права или полуправа паралелна према другој правој или полуправој, онда је увек и ова друга паралелна према првој.[1]

Ако су две полуправе паралелне трећој полуправој, онда су оне међу собом паралелне.

Дефиниција. Свака полуправа одређује *крај;* о свим полуправима, које су једна другој паралелне, рећи ћемо да одређују један и исти крај. Полуправу која излази из тачке A и има крај α, означићемо уопште (A, α). Права има увек два краја. Праву чији су крајеви α и β, означићемо уопште са (α, β).

Ако су A, B и A', B' два пара тачака и α и α' два краја таква да су дужи AB и $A'B'$ међу собом једнаке, и ако је, осим тога, угао који образују дуж AB и полуправа (A, α) једнак углу који образују дуж $A'B'$ и полуправа (A', α'), онда је, што се лако види, увек и угао образован од BA и (B, α) једнак углу образованом од $B'A'$ и (B', α'); ове две фигуре $AB\alpha$ и $A'B'\alpha'$ називају се конгруентним.

Најзад дефинишимо на познати начин појам огледалске слике:

Дефиниција. Ако из једне тачке спустимо нормалу на праву и ову нормалу продужимо преко њеног подножја за дуж њој конгруентну, онда ћемо добивену крајњу тачку назвати *огледалском сликом првобитне тачке* у односу на ту праву.

Огледалске слике тачака неке праве леже опет на правој; ову последњу праву назваћемо *огледалском сликом првобитне праве.*

§ 1. Помоћни ставови

Доказаћемо најпре редом наредне помоћне ставове:

Став 1. Ако две праве пресецају трећу праву под једнаким сагласним угловима, онда оне, сигурно, нису паралелне.

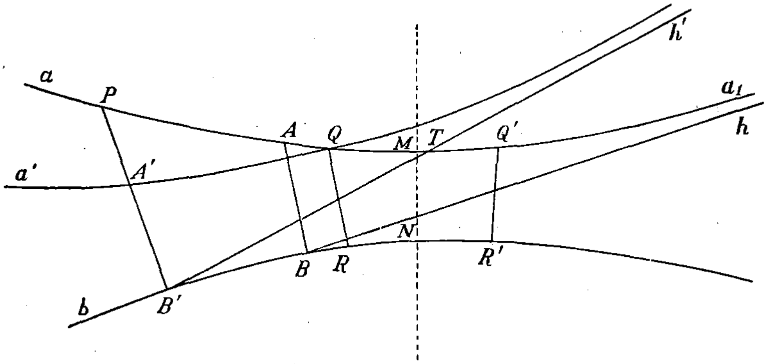
---

[1] Доказ се изводи по Гаусовом поступку; уп., например, Bonola-Liebmann, Die nichteuklidische Geometrie, Leipzig, 1908 и 1921, § 32.

Доказ. Претпоставимо супротно, наиме, да су те две праве у једном смеру међу собом паралелне. Ако тада изведемо полуобрт око средине дужи исечене на трећој правој, тј. конструишемо на другој страни те дужи одговарајући конгруентни троугао, следовало би да су две прве праве паралелне једна другој и у другом смеру, а ово противречи аксиоми IV.

Став 2. Ако су дате ма које две праве a и b које се не секу, нити су паралелне, постоји увек трећа права која на обема истовремено стоји нормално.

Доказ. Ма из које две тачке A и P праве a спустимо управне AB и PB' на праву b. Нека је нормала PB' већа од нормале AB; пренесимо тада AB на $B'P$ од тачке B' до A' тако да тачка A' лежи између P и B'. Конструишимо сад кроз тачку A' праву a' која пресеца $B'A'$ у тачки A' под истим углом и у истом смислу као што нормала BA пресеца праву a у тачки A. Доказаћемо да ова права a' нужно мора пресецати праву a.



Ради тога од две полуправе, на које тачка P дели праву a, означимо са a_1 ону на којој лежи тачка A и повуцимо тада из B полуправу h паралелну према a_1. Даље, нека је h' она полуправа која излази из тачке B' под истим углом према b и у истом смеру као и полуправа h из B. Пошто, према ставу 1, полуправа h' није паралелна са полуправом h, а зато није паралелна ни са полуправом a' и, сигурно, не пресеца

h, онда она, што се лако увиђа на основу аксиоме IV, нужно пресеца a_1; нека је T пресечна тачка полуправе h' и a_1. Пошто је, према нашој конструкцији, a' паралелно са h', онда, према аксиоми II_4, права a' мора излазити из троугла $PB'T$ кроз страну PT, а тиме је дат тражени доказ. Означићемо тачку пресека правих a и a' са Q.

Из тачке Q спустимо нормалу QR на b; затим, пренесимо дуж $B'R$ на праву b од тачке B до тачке R' тако да је смер од B ка R' исти као и смер од B' ка R. Исто тако пренесимо дуж $A'Q$ од тачке A на праву a у истом смеру до Q'. Нађемо ли тада средине M и N дужи QQ' и RR', биће права MN која спаја те тачке тражена заједничка нормала на a и b.

Уствари, из конгруенције четвороуглова $A'B'QR$ и $ABQ'R'$ следује једнакост дужи QR и $Q'R'$ као и чињеница да $Q'R'$ стоји управно на b. Одатле, даље, закључујемо да су четвороугли $QRMN$ и $Q'R'MN$ конгруентни; тиме су постављено тврђење као и став 2 потпуно доказани.

Став 3. Ако су дате ма које две међу собом непаралелне полуправе, постоји увек права паралелна овим двема полуправима, тј. постоји увек права која има два унапред дата краја α и β.

Доказ. Повуцимо ма кроз коју тачку O паралелне према датим полуправима и пренесимо на ове паралеле од тачке O једнаке дужи, напр. до A и B, тако да буде

$$OA = OB$$

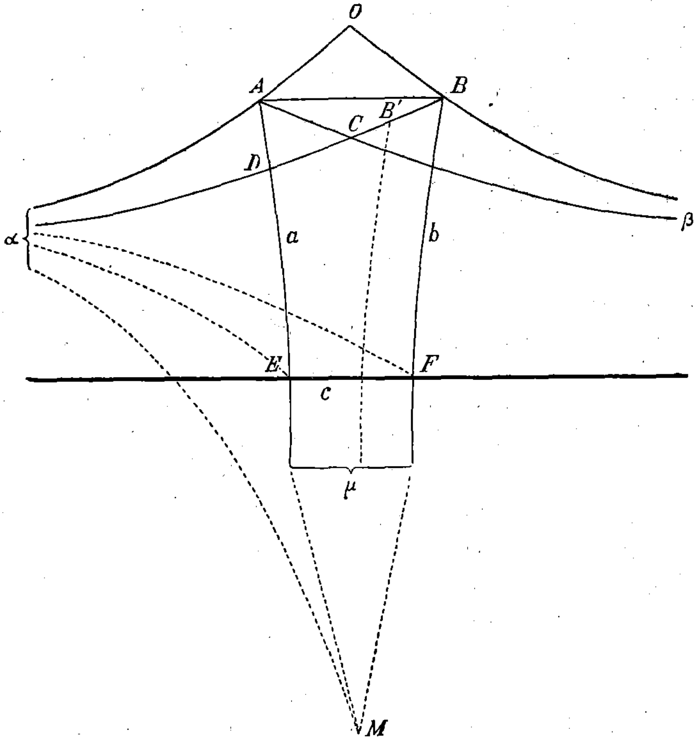
и да полуправа која иде из тачке O кроз A има крај α, а полуправа која иде из тачке O кроз B има крај β. Затим, спојмо тачку A са крајем β и преполовимо угао између двеју полуправих које излазе из тачке A; исто тако спојмо тачку B са крајем α и преполовимо угао између двеју полуправих које излазе из тачке B. Прву бисектрису означимо са a, другу са b. Из конгруенције фигура $OA\beta$ и $OB\alpha$ следује једнакост углова:

$$\sphericalangle(OA\beta) = \sphericalangle(OB\alpha),$$

$$\sphericalangle(\alpha A\beta) = \sphericalangle(\alpha B\beta),$$

а из последње једначине добива се и једнакост углова који су постали половљењем, наиме:

$$\sphericalangle(\alpha A a) = \sphericalangle(a A \beta) = \sphericalangle(\alpha B b) = \sphericalangle(b B \beta).$$



Најпре треба доказати да се бисектрисе a и b нити секу, нити су међу собом паралелне.

Протпоставимо да се праве a и b секу у тачки M. Пошто је троугао OAB, према конструкцији, равнокрак, то се добива

$$\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO,$$

а одатле, према претходним једначинама, следује

$$\sphericalangle BAM = \sphericalangle ABM;$$

према томе је

$$AM = BM.$$

Спојимо ли сад тачку M полуправом са крајем α, то ће из последње сегментне јадначине и услед једнакости углова

$\sphericalangle(\alpha AM)$ и $\sphericalangle(\alpha BM)$ следовати конгруенција фигура αAM и αBM, а ова би конгруенција имала за последицу једнакост углова $\sphericalangle(\alpha MA)$ и $\sphericalangle(\alpha MB)$. Пошто је овај закључак, очигледно, нетачан, треба одбацити претпоставку да се бисектрисе a и b секу.

Претпоставимо, даље, да су праве a и b паралелне; нека се крај одређен помоћу њих означи тада са μ. Нека полуправа која иде од B ка α пресеца у тачки C полуправу која иде од A ка β, а праву a у тачки D; докажимо тада једнакост дужи DA и DB. Уствари, у противном случају пренесимо дуж DA на DB од тачке D, рецимо, до тачке B' и спојмо B' полуправом са μ. Из конгруенције фигура $DA\alpha$ и $DB'\mu$ следовала би тада једнакост углова $\sphericalangle(DA\,\alpha)$ и $\sphericalangle(DB'\mu)$, а стога би били једнаки и углови $\sphericalangle(DB'\mu)$ и $\sphericalangle(DB\mu)$, што је немогуће према ставу 1.

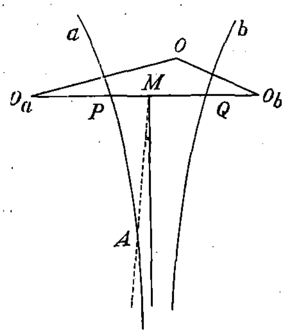
Једнакост дужи DA и DB има сада за последицу једнакост углова $\sphericalangle(DAB)$ и $\sphericalangle(DBA)$, а пошто су, према ранијем, и углови $\sphericalangle(CAB)$ и $\sphericalangle(CBA)$ једнаки, произлазило би да су једнаки и углови $\sphericalangle(DAB)$ и $\sphericalangle(CAB)$. Овај закључак, очигледно, није тачан па стога треба одбацити и претпоставку да су праве a и b паралелне.

Пошто се, према овим излагањима, праве a и b не секу нити су паралелне, онда, према ставу 2, постоји права c која стоји управно на обема правима a, b, рецимо у тачкама E и F. Тврдим да је ова права c тражена права која везује међу собом оба дата краја α и β.

Ради доказа овог тврђења претпоставимо супротно да c нема крај α. Спојмо тада сваку од подножних тачака E и F полуправом са крајем α. Везујући међу собом средине дужи AB и EF, лако увиђамо да је $EA=FB$. Из тога следује конгруенција фигура αEA и αFB, а из ове једнакост углова $\sphericalangle(AE\alpha)$ и $\sphericalangle(BF\alpha)$ и отуда су и они углови једнаки које образују са правом c полуправе које излазе из тачака E и F. Овај закључак противречи ставу 1. Слично проистиче да c има и крај β. Тиме је наше тврђење потпуно доказано.

Став 4. Нека су a и b две паралелне праве, а O тачка у унутрашњости области равни обухваћене између a и b.

Даље, нека је O_a огледалска слика тачке O у односу на праву a, а O_b огледалска слика тачке O у односу на праву b и нека је M средина дужи $O_a O_b$: тада она полуправа, која је полазећи од тачке M истовремено паралелна са a и b, стоји управно на правој $O_a O_b$ у тачки M.



Доказ. Претпоставимо супротно и подигнимо нормалу са исте стране у тачки M на $O_a O_b$. Нека права $O_a O_b$ пресеца a и b у тачкама P и Q. Пошто је $PO < PQ + QO$, па је зато $PO_a < PO_b$ и исто тако је $QO_b < QO_a$, мора тачка M нужно падати у унутрашњост области равни обухваћене између a и b. Стога би она управна у M морала пресецати једну од правих a или b; ако би пресецала напр. праву a у тачки A, следовало би да је $AO_a = AO$ и $AO_a = AO_b$, и према томе би било такође $AO = AO_b$, тј. тачка A морала би такође бити једна од тачака на b, што противречи претпоставци става.[1]

Став 5. Ако су a, b, c три праве које имају исти крај ω и ако се огледања на овим правима означе по реду са S_a, S_b, S_c, онда увек постоји права d са истим крајем ω тако да узастопна примена огледања на правима a, b, c буде истоветна са огледањем на правој d, што се изражава формулом:

$$S_c S_b S_a = S_d .$$

Доказ. Претпоставимо, најпре, да права b пада у унутрашњост области равни обухваћене између a и c. Нека је тада O једна тачка на правој b, а огледалске слике на a и c тачке O нека се означе са O_a и O_c. Означимо ли сада са d ону праву која спаја средину дужи $O_a O_c$ са крајем ω, онда су, због става 4, тачке O_a и O_c огледалске слике на d,

---

[1] Овај закључак се у битноме слаже са начином закључивања Лобачевскога; уп. „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien" (1835), § 111.

а отуда је операција $S_d S_c S_b S_a$ таква да не мења положај тачке O_a као ни оне праве која спаја O_a са крајем ω. Пошто је ова операција, сем тога, састављена од четири огледања, онда из ставова о конгруенцији произлази да је ова операција идентитет; отуда следује наше тврђење.

Друго, лако увиђамо тачност става 5 у случају кад се поклапају праве c и a. Ако је, наиме, b' она права која произилази из b огледањем на правој a и ако означимо са $S_{b'}$ огледање на b', одмах увиђамо тачност формуле

$$S_a S_b S_a = S_{b'}.$$

Треће, претпоставимо сад да права c пада у унутрашњост области равни обухваћене између a и b. Тада, према првом делу овог доказа, постоји, извесно, права d' тако да важи формула:

$$S_a S_c S_b = S_{d'}.$$

Означимо ли са d огледалску слику праве d' у односу на a, биће према другом делу овог доказа

$$S_c S_b S_a = S_a S_a S_c S_b S_a = S_a S_{d'} S_a = S_d.$$

Тиме је став 5 потпуно доказан.

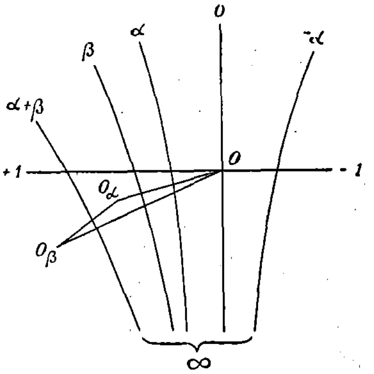
§ 2. Сабирање крајева

Узмимо неку одређену праву и означимо њене крајеве са 0 и ∞. На овој правој $(0, \infty)$ одаберимо неку тачку O и подигнимо тада у O нормалу; нека се означе крајеви ове нормале са $+1$ и -1.

Дефинисаћемо сада збир два краја на овај начин:

Дефиниција. Нека су α и β ма која два краја различита од ∞; нека је, даље, O_α огледалска слика тачке O на правој (α, ∞), а O_β огледалска слика тачке O на правој (β, ∞); спојмо средину дужи $O_\alpha O_\beta$ са крајем ∞; други крај тако конструисане праве назваћемо *збиром крајева* α *и* β и означићемо са $\alpha+\beta$.

Ако огледнемо полуправу са крајем α на правој $(0, \infty)$, крај тако настале полуправе означићемо са $-\alpha$.



Лако се уверавамо у тачност једначина

$$\alpha+0=\alpha,$$

$$1+(-1)=0,$$

$$\alpha+(-\alpha)=0,$$

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

Последња једначина изражава комутативни закон за сабирање крајева.

Да би се доказао асоцијативни закон сабирања крајева, означимо по реду са S_0, S_α, S_β огледања на правима $(0, \infty)$, (α, ∞), (β, ∞); према ставу 5 у § 1, сигурно тада постоји права (σ, ∞) тако да за огледање S_σ на овој правој важи формула:

$$S_\sigma = S_\beta S_0 S_\alpha .$$

Пошто при операцији $S_\beta S_0 S_\alpha$ тачка O_α прелази у тачку O_β, онда је тачка O_β нужно огледалска слика тачке O_α на правој (σ, ∞) и отуда је $\sigma=\alpha+\beta$, тј. важи формула

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha .$$

Нека γ исто тако означава неки крај; поновљена примена малочас нађених формула даје:

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{\beta+\gamma} S_0 S_\alpha = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha ,$$

$$S_{(\alpha+\beta)+\gamma} = S_\gamma S_0 S_{\alpha+\beta} = S_\gamma S_0 S_\beta S_0 S_\alpha ,$$

а отуда је

$$S_{\alpha+(\beta+\gamma)} = S_{(\alpha+\beta)+\gamma}$$

и стога такође

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma .$$

Ту скоро изведена формула

$$S_{\alpha+\beta} = S_\beta S_0 S_\alpha$$

показује, у исто време, да наведена конструкција збира два краја не зависи од избора тачке O на правој $(0, \infty)$. Ако са O' означимо ма коју тачку праве $(0, \infty)$ различиту од O и ако су O_α', O_β' огледалске слике тачке O' на правима (α, ∞) и (β, ∞), онда је управна на дужи $O_\alpha' O_\beta'$ у њеној средини опет права $(\alpha+\beta, \infty)$.

Навешћемо овде још једну чињеницу чије је познавање потребно за наша излагања у § 4.

Ако праву (α, ∞) огледнемо на правој (β, ∞), добива се права $(2\beta - \alpha, \infty)$.

Уствари, ако је P ма која тачка оне праве која се добива из праве (α, ∞) огледањем на правој (β, ∞), онда та тачка, очигледно, остаје непромењена ако на њу применимо редом огледања

$$S_\beta, S_0, S_{-\alpha}, S_0, S_\beta.$$

А на основу горњих формула је:

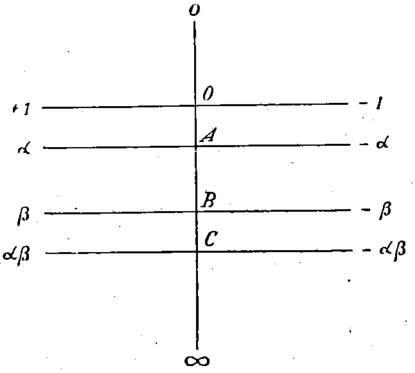
$$S_\beta S_0 S_{-\alpha} S_0 S_\beta = S_{2\beta-\alpha},$$

тј. онај сложени процес истоветан је са огледањем на правој $(2\beta - \alpha, \infty)$; стога, тачка P мора лежати на тој последњој правој.

§ 3. Множење крајева

Дефинисаћемо сад производ два краја на наредни начин:

Дефиниција. Ако неки крај лежи на истој страни праве $(0, \infty)$ као и крај $+1$, назваћемо тај крај *позитивним*, а ако неки крај лежи на истој страни праве $(0, \infty)$ као и крај -1, онда ћемо тај крај назвати *негативним*.



Нека су сад α и β ма која два краја различита од 0 и ∞. Обе праве $(\alpha, -\alpha)$ и $(\beta, -\beta)$ стоје управно на правој $(0, \infty)$; нека оне секу ову праву у тачкама A и B. Пренесимо, даље, дуж OA на праву $(0, \infty)$

од тачке B до тачке C на тај начин да на правој $(0, \infty)$ смер од O према A буде исти као и смер од B према C; конструишимо тада у тачки C нормалу на праву $(0, \infty)$ и назовимо позитивни или негативни крај ове нормале *производом* $\alpha\beta$ *оба краја* α, β, према томе да ли су оба краја позитивна или негативна или је један позитиван, а други негативан.

Узмимо најзад формулу

$$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0.$$

На основу аксиома III_{1-3} о конгруенцији дужи непосредно увиђамо важење формула

$$\alpha\beta = \beta\alpha,$$

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma,$$

тј. за множење крајева важи како комутативни тако и асоцијативни закон.

Исто тако лако налазимо да формуле

$$1 \cdot \alpha = \alpha, \quad (-1)\alpha = -\alpha$$

важе и да ако крајеви α, β неке праве задовољавају једначину

$$\alpha\beta = -1,$$

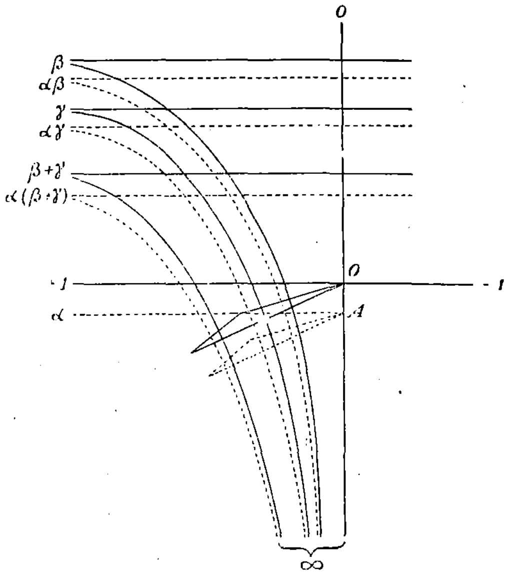
ова права мора пролазити кроз тачку O.

Могућност дељења непосредно се увиђа; такође за сваки позитивни крај π увек постоји позитивни крај (исто тако и негативни) чији је квадрат једнак крају π и који се зато може означити са $\sqrt{\pi}$.

Да бисмо доказали дистрибутивни закон за рачун са крајевима, конструисаћемо најпре од крајева β и γ крај $\beta+\gamma$ на показани начин у § 2. Потражимо ли затим на раније показани начин крајеве $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha(\beta+\gamma)$, увидећемо да се ова конструкција своди на конгруентно пресликавање равни у саму себе које на правој $(0, \infty)$ изазива померање за дуж OA. Ако према томе пронађемо конструкцијом збир крајева $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$ полазећи из тачке A место из

O, — што је дозвољено према једној од примедаба у § 2 — онда се уствари за овај збир добива крај $\alpha(\beta+\gamma)$, тј. важи формула

$$\alpha\beta+\alpha\gamma=\alpha(\beta+\gamma).$$



§ 4. Једначина тачке

Пошто смо у § 2 — § 3 увидели да за рачун са крајевима важе иста правила као и за рачун са обичним бројевима, изграђивање геометрије не пружа више никаквих тешкоћа; оно се изводи у општим цртама на наредни начин:

Ако су ξ, η крајеви ма које праве, онда ћемо крајеве

$$u=\xi\eta,$$

$$v=\frac{\xi+\eta}{2}$$

назвати *координатама* те праве. Важи основна чињеница:

Ако су α, β, γ *три краја која имају такву особину да је крај* $4\alpha\gamma-\beta^2$ *позитиван, онда све праве чије координате* u, v *задовољавају једначину*

$$\alpha u+\beta v+\gamma=0$$

пролазе кроз исту тачку.

Доказ. Ако, према § 2 — § 3, конструишемо крајеве

$$\varkappa = \frac{2\alpha}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}, \quad \lambda = \frac{\beta}{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}},$$

онда, с обзиром на значење координата u, v и пошто је свакако $\alpha \neq 0$, постављена линеарна једначина добива облик:

$$(\varkappa\xi+\lambda)(\varkappa\eta+\lambda) = -1.$$

Испитаћемо сада трансформацију произвољно променљивог краја ω која је дата формулом

$$\omega' = \varkappa\omega+\lambda.$$

Ради тога посматрајмо најпре трансформације

$$\omega' = \varkappa\omega \quad \text{и} \quad \omega' = \omega+\lambda.$$

Што се тиче прве трансформације, то ће, очигледно, множење произвољног краја ω константом $\varkappa$ бити, према § 3, једнако померању равни дуж праве $(0, \infty)$ за неку дуж зависну од $\varkappa$.

А и последњој трансформацији, тј. додавању краја λ произвољно променљивом крају ω, одговара неко, само од λ зависно, кретање равни у самој себи, наиме кретање које се може схватити као обртање равни око краја ∞.

Да би се ово увидело, приметимо да, према излагању на крају § 2, права (ω, ∞) помоћу огледања на правој $(0, \infty)$ прелази у праву $(-\omega, \infty)$, а ова опет помоћу огледања на правој $\left(\frac{\lambda}{2}, \infty\right)$ прелази у праву $(\omega+\lambda, \infty)$, тј. додавање краја λ произвољно променљивом крају ω једнако је огледањима узастопно изведеним на правима $(0, \infty)$ и $\left(\frac{\lambda}{2}, \infty\right)$.

Из раније доказаног следује да се, ако су ξ и η крајеви праве, помоћу формула

$$\xi' = \varkappa\xi+\lambda,$$

$$\eta' = \varkappa\eta+\lambda,$$

одређују крајеви такве праве која произилази из праве са крајевима ξ, η помоћу извесног кретања равни зависног само од $\varkappa$, λ. Но пошто горња једначина

$$(\varkappa\xi+\lambda)(\varkappa\eta+\lambda) = -1$$

за крајеве ξ', η' има за последицу релацију

$$\xi'\eta' = -1$$

и како је према примедби у § 3 ова релација услов да дотичне праве пролазе кроз тачку *O*, видимо да и све праве (ξ, η) које задовољавају првобитну једначину

$$(\varkappa\xi+\lambda)(\varkappa'\eta+\lambda') = -1$$

пролазе кроз једну тачку; тиме је потпуно доказан постављени став.

Пошто смо сазнали да је једначина тачке у линиским координатама линеарна, лако је извести специјални Паскалов став за пар правих и Дезаргов став за перспективно положене троуглове, као и друге ставове пројективне геометрије. Исто тако се тада могу без тешкоћа извести познате формуле геометрије Бољаи-Лобачевскога, а тиме се завршава изграђивање ове геометрије помоћу аксиома I–IV.

Додатак IV

О основама геометрије[1]

(Из Mathematische Annalen, књ. 56, 1902.)

Риманова (Riemann) и Хелмхолцова (Helmholtz) испитивања основа геометрије потстакла су Ли-а (S. Lie) да се прихвати проблема аксиоматичке обраде геометрије полазећи од појма групе и довела су овог оштроумног математичара до система аксиома за које је, помоћу своје теорије трансформационих група, доказао да су довољне за изграђивање геометрије.[2]

При заснивању своје теорије трамсформационих група Ли је увек претпостављао да се функције које дефинишу групу могу диференцирати и зато у Ли-овим излагањима остаје нерасправљено да ли је претпоставка диференцијабилности код питања о аксиомама геометрије стварно неизбежна или је пак диференцијабилност дотичних функција само последица појма групе и осталих геометриских аксиома. Услед свога поступка Ли је био принуђен и да изричито постави аксиому да је група кретања произведена инфинитезималним трансформацијама. Ови захтеви као и битни саставни делови осталих Ли-ових аксиома који се односе на природу једначине која дефинише тачке истог растојања, могу се изразити чисто геометриски само на веома усиљен и компликован начин и, осим тога, изгледају условљени само аналитичком методом којом се користио Ли, а не самим проблемом.

---

[1] Ради карактеристике следећег начина заснивања геометрије у поређењу са поступком примењеним у главном делу ове књиге, нека се погледа примедба учињена на крају ове расправе (стр. 209).

[2] Lie — Engel, Theorie der Transformationsgruppen, књ. 3, од. 5.

Зато сам у овом излагању тежио да поставим за геометрију равни такав систем аксиома који би, исто тако заснивајући се на појму групе, садржао само просте и геометриски прегледне захтеве и, нарочито, не би претпостављао диференцијабилност функција које посредују кретање. Аксиоме система који сам ја поставио садржане су као специјални саставни делови у Ли-овим аксиомама или се, како ја мислим, могу из њих непосредно извести.

Моје доказивање потпуно је различито од Ли-ове методе: ја оперишем поглавито појмовима теорије множина тачака, које је изградио Г. Кантор (G. Cantor) и користим став К. Жордана (C. Jordan), по коме свака равна непрекидно затворена крива без двојних тачака дели раван на унутрашњу и спољашњу област.

И у систему који сам ја поставио поједини су саставни делови, сигурно, излишни; ипак сам одустао од ширег истраживања ове околности с обзиром да су ове формулације аксиома просте и пре свега зато што сам хтео да избегнем одвећ компликовано и геометриски непрегледно доказивање.

У наредним излагањима обрадићу аксиоме само за раван, мада мислим да се може поставити и за простор аналоган систем аксиома који омогућује изграђивање просторне геометрије на сличан начин.[1]

Даћемо унапред неке дефиниције.

Дефиниција. Под *бројном равни* подразумевамо обичну раван са правоуглим координатним системом *x*, *y*.

Крива у овој бројној равни која нема двојних тачака и која је непрекидна укључујући и крајеве, назива се *Жордановом кривом*. Ако је Жорданова крива затворена, онда се унутрашњост области бројне равни ограничене том кривом назива *Жордановом облашћу*.

Да бих излагање учинио лакшим и схватљивијим узећу у овом истраживању ужу дефиницију равни но што моје

---

[1] Следеће истраживање даје истовремено одговор, како ми изгледа, на оно опште питање теорије група, које сам поставио у моме предавању „Mathematische Probleme“, Göttinger Nachrichten 1900, проблем 5, за специјалан случај групе кретања у равни.

доказивање захтева,[1] наиме претпоставићу, да се све тачке наше геометрије могу истовремено узајамно једнозначно пресликати на тачке бројне равни које леже у коначном или на одређеном њеном делу, тако да је свака тачка наше геометрије карактерисана паром бројева x, y. Ово значење појма равни формулисаћу на овај начин:

Дефиниција равни. *Раван је систем ствари које се називају тачкама и које се могу узајамно једнозначно пресликати на тачке бројне равни које леже у коначном или на неки делимични систем тих тачака; овим тачкама бројне равни (тј. сликама тачака) користићемо се истовремено и за означавање тачака наше равни.*

---

[1] Што се тиче шире формулације појма равни погледати мој чланак о основама геометрије у Göttinger Nachrichten, 1902. Тамо сам поставио ову општију дефиницију равни:

Раван је систем ствари које се називају тачкама. Свака тачка А одређује неке делимичне системе тачака којима она сама припада и који се називају околинама тачке А.

Тачке околине могу се увек узајамно једнозначно пресликати на тачке извесне Жорданове области у бројној равни. Таква Жорданова област назива се сликом ове околине.

Свака у слици садржана Жорданова област, у чијој унутрашњости лежи тачка А, опет је слика околине А. Ако су дате различите слике једне околине, то отуда добивена узајамно једнозначна трансформација посматраних Жорданових области једне у другу мора бити непрекидна.

Ако је В ма која тачка неке околине тачке А, ова је околина у исто време и околина тачке В.

Ма за које две околине тачке А постоји увек таква околина тачке А која је заједничка овим двема околинама.

Ако су А и В ма које две тачке наше равни, постоји увек таква околина тачке А која истовремено садржи тачку В.

Ови захтеви садрже, како ми изгледа, строгу дефиницију — за случај двеју димензија — оног појма који су Риман и Хелмхолц назвали „вишеструко распростртом многострукошћу", а Ли „бројном многострукошћу" и узели за основу целокупних својих истраживања. Ови захтеви пружају основе и за строгу аксиоматичку обраду Analysis situs-a.

Усвајајући горњу ужу дефиницију равни, очигледно, унапред искључујемо елиптичку геометрију, пошто се њене тачке не могу пресликати на тачке бројне области које леже у коначном на неки начин сагласан нашим аксиомама. Ипак није тешко увидети које измене треба унети у наше доказивање ако се за основу узме шира формулација појма равни.

За сваку тачку А наше равни постоје у бројној равни Жорданове области у којима лежи слика тачке А и чије све тачке исто тако претстављају тачке наше равни. Ове Жорданове области називају се околинама тачке А.

Свака у околини тачке А садржана Жорданова област, у чијој унутрашњости лежи тачка А (слика тачке А), опет је околина тачке А.

Ако је В ма која тачка у околини тачке А, онда је ова околина у исто време и околина тачке В.

Ако су А и В ма које две тачке наше равни, то увек постоји околина тачке А, која истовремено садржи тачку В.

Дефинисаћемо кретање као узајамно једнозначну трансформацију наше равни у саму себе. Очигледно је у самом почетку да се могу разликовати две врсте узајамно једнозначних непрекидних трансформација бројне равни у саму себе. Наиме, ако претпоставимо у бројној равни неку затворену Жорданову криву и замислимо да се она обилази у одређеном смеру, то она, при таквој трансформацији, прелази опет у затворену Жорданову криву која има извесан смер обилажења. Претпоставићемо у садашњем истраживању да је, ако применимо трансформацију бројне равни у саму себе која дефинише кретање, овај смер обилажења исти као и код првобитне Жорданове криве. Ова претпоставка[1] условљава ову формулацију појма кретања:

Дефиниција кретања. *Кретање је таква узајамно једнозначна непрекидна трансформација тачака бројне равни у себе при којој смер обилажења затворене Жорданове криве остаје увек исти. Трансформација обрнута трансформацији кретања опет је кретање.*

Кретање при коме једна тачка М остаје непромењена назива се обртањем око тачке М.

---

[1] Код Ли-а се ова претпоставка садржи у захтеву да група кретања буде створена помоћу инфинитезималних трансформација. Супротна претпоставка (тј. претпоставка да се може изменити смер обилажења) битно би олакшала извођење доказа, утолико што се тада „истинска права“ може непосредно дефинисати, као место оних тачака које остају непокретне при трансформацији која мења смер обилажења а оставља непромењеним две тачке.

После увођења појма „равни“ и „кретања“, поставићемо ове три аксиоме:

Аксиома I. *Ако се узастопно изведу два кретања, добивена трансформација равни у саму себе опет је кретање.*

То ћемо кратко рећи:

Аксиома I. **Кретања образују групу.**

Аксиома II. *Ако су A и M две произвољне, међу собом различите тачке равни, онда се тачка A увек може довести обртањем око M у бесконачно много различитих положаја.*

Назовемо ли укупност ових тачака које произилазе из једне тачке различите од M помоћу свих обртања око M *истинским*[1] кругом у нашој равној геометрији, можемо исказ аксиоме II овако формулисати:

Аксиома II. **Сваки истински круг састоји се из бесконачно много тачака.**

Пре последње, још потребне аксиоме поставићемо наредну дефиницију:

Дефиниција. Нека је AB неки одређени пар тачака у нашој геометрији; означићемо истим словима и слике овог пара тачака у бројној равни. Ограничимо око тачака A и B у бројној равни по једну околину α и β. Ако нека тачка A^* пада у околину α, а истовремено тачка B^* пада у околину β, рећи ћемо: пар тачака $A^* B^*$ лежи у околини $\alpha\beta$ пара AB. Исказ да је ова околина $\alpha\beta$ произвољно мала треба да значи да је α произвољно мала околина тачке A, а истовремено β произвољно мала околина тачке B.

Нека је ABC одређена тројка тачака у нашој геометрији; истим словима ћемо означити и слике ове тројке тачака у бројној равни. Ограничимо око тачака A, B, C у бројној равни по једну околину α, β, γ. Ако тачка A^* пада у околину α, а у исто време тачка B^* пада у околину β, а тачка C^* у околину γ, рећи ћемо: тројка тачака $A^* B^* C^*$ лежи у околини $\alpha\beta\gamma$ тројке ABC. Исказ да је ова околина $\alpha\beta\gamma$ произвољно

---

[1] Израз „истински круг“ треба да означава да ће се тако дефинисани облик у току истраживања показати изоморфан са бројним кругом. Слично важи и за изразе „истинска права“ (стр. 169) и „истинска дуж“ (стр. 195).

мала треба да значи да је α произвољно мала околина тачке *A* и истовремено β произвољно мала околина тачке *B*, а γ произвољно мала околина тачке *C*.

При употреби речи „пар тачака“ и „тројка тачака“ не претпоставља се да су тачке пара тачака или тројке тачака једна од друге различите.

Аксиома III. *Ако постоји кретање којим се може превести тројка тачака која се налази у произвољној близини тројке тачака ABC, у произвољну близину тројке такака A'B'C', онда увек постоји и такво кретање којим тројка тачака ABC прелази тачно у тројку тачака A'B'C'.*[1]

Исказ ове аксиоме укратко ћемо овако изразити:

Аксиома III. **Кретања образују затворени систем.**

Ако у аксиоми III допустимо да се извесне тачке тројке тачака поклапају, лако се добивају неки специјални случајеви аксиоме III које ћемо посебно истаћи на овај начин:

Ако постоје обртања око тачке *M* којима се могу превести парови тачака који леже у произвољној близини пара тачака *AB* у произвољну близину пара тачака *A'B'*, онда увек постоји и такво обртање око тачке *M* којим пар тачака *AB* прелази тачно у пар тачака *A'B'*.

Ако постоје кретања којима се парови тачака који леже у произвољној близини пара тачака *AB* могу превести у произвољну близину пара тачака *A'B'*, то увек постоји и такво кретање којим пар тачака *AB* прелази тачно у пар тачака *A'B'*.

Ако постоје обртања око тачке *M* којим се тачке које леже у произвољној близини тачке *A* могу превести у произвољну близину тачке *A'*, то постоји увек и такво обртање око тачке *M* којим тачка *A* прелази тачно у тачку *A'*.

Овај последњи специјални случај аксиоме III примењиваћу често у наредном доказивању, означавајући при томе обртну тачку словом *M*, а не *A*.[2]

---

[1] Довољно је претпоставити да је аксиома III испуњена за довољно мале околине, слично као и код Ли-а; ток мога доказивања може се тако изменити да се у њему искористи само ова ужа претпоставка.

[2] Једна последица, коју сам навео у предавању на свечаном заседању поводом јубиларне прославе Гетингенског научног друштва 1901 г. као посебну аксиому, јесте: „Никада не могу ма које две тачке доспети помоћу кретања у произвољну близину једна друге“. Требало би испитати уколико одн. са којим захтевима заједно, овај захтев може заменити горе постављену аксиому III.

Доказаћу сад ово тврђење:

Равна геометрија у којој су аксиоме I—III задовољене или је Еуклидова или Бољаи-Лобачевскога равна геометрија.

Ако хоћемо да добијемо једино Еуклидову геометрију, треба само аксиому I допунити захтевом да група кретања има инваријантну подгрупу. Ова допуна замењује аксиому паралелних.

Хтео бих сад укратко да скицирам ток мисли мог даљег доказивања.

У околини ма које тачке *M* конструише се помоћу нарочитог поступка неки одређени облик *kk* од тачака и на њему нека тачка *K* (§ 1—§ 2), а затим се подвргава испитивању истински круг ϰ описан око тачке *M*, који пролази кроз тачку *K* (§ 3). Добива се да је истински круг ϰ затворена и у себи густа, тј. перфектна множина тачака.

Најближи циљ наших излагања састоји се у томе да се покаже да је истински круг ϰ затворена Жорданова крива.[1] Ово се постиже на тај начин, што најпре увидимо могућност распореда тачака истинског круга (§ 4—§ 5), затим отуда закључујемо на могућност узајамног једнозначног пресликавања тачака ϰ на тачке обичног круга (§ 6 — § 7) и, најзад, доказујемо да ово пресликавање нужно мора бити непрекидно (§ 8). После тога се добива и да је првобитно конструисани облик *kk* од тачака идентичан са инстинским кругом (§ 9). Даље, важи став да је сваки истински круг који лежи у унутрашњости круга ϰ такође затворена Жорданова крива.

Прећи ћемо сада на испитивање групе трансформација које претрпи истински круг у себи (§ 13) при обртањима равни око тачке *M*. Ова група има ова својства: 1) Свако обртање око тачке *M* које не мења положај једној тачки

---

[1] У вези са тим упоредити интересантни чланак са сличним циљем од А. Шенфлиса: A. Schönflies, „Über einen grundlegenden Satz der Analysis Situs", Göttinger Nachrichten, 1902, а исто тако даља извођења и податке о литератури: Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, додатак књизи II (1908), стр. 158 и стр. 178.

истинског круга, не мења положај ниједној тачки тог круга (§ 14). 2) Постоји увек једно обртање око тачке *М* које ма коју дату тачку круга *x* преводи у ма коју другу тачку тога круга (§ 15). 3) Група обртања око тачке *М* је непрекидна (§ 16). Ова три својства потпуно одређују структуру групе трансформација које одговарају свима обртањима истинског круга у себи. Наиме, поставићемо овај став: група свих трансформација истинског круга *x* у себе које су обртања око *М* јесте холоедарски-изоморфна са групом обичних обртања обичног круга у себи (§ 17—§ 18).

Испитајмо сада групу трансформација свих тачака наше равни при обртању око тачке *М*. При томе важи став да осим идентитета не постоји ниједно обртање равни око тачке *М* при коме би остале непокретне све тачке неког истинског круга μ (§ 19). Сада увиђамо да је сваки истински круг затворена Жорданова крива и добивамо формуле за трансформације групе свих обртања око тачке *М* (§ 20—§ 21). Најзад се лако добивају ставови: ако ма које две тачке при неком кретању равни остају непокретне, онда све тачке остају непокретне, тј. кретање је идентитет. Свака тачка равни може се подесним кретањем превести у сваку другу тачку равни (§ 22).

Наш најважнији даљи циљ састоји се у томе да се у нашој геометрији дефинише појам истинске праве и да се развију нужне особине овог појма за изграђивање геометрије. Најпре се дефинишу појмови полуобртања и средине дужи (§ 23). Дуж има највише једну средину и ако се за неку дуж зна да има средину, отуда следује да и свака мања дуж има средину (§ 25 — § 26).

Да би се проценио положај средине дужи, потребни су нам неки ставови о истинским круговима који се додирују; пре свега, ствар се своди на то да се конструишу два међу собом конгруентна круга који један другог додирују споља у једној и само једној тачки (§ 27). Извешћемо, даље, један општи став о круговима који се додирују изнутра (§ 28), а затим став о специјалном случају када круг који изнутра додирује други пролази кроз центар додирнутог круга (§ 29).

Узмимо сада за основу као јединичну дуж неку одређену довољно малу дуж; конструишимо половљењем и полуобртањем систем тачака такве врсте, да свакој тачки овог система одговара одређени број *a* који је рационалан и има као именилац само неки степен од 2 (§ 30). Пошто се постави закон ове кореспонденције (§ 31), тачке добивеног система тачака се међу собом распоређују, при чему важе ранији ставови о круговима који се додирују (§ 32). Сад полази за руком да се докаже да тачке које одговарају бројевима $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ конвергирају према тачки *O* (§ 33). Овај се став поступно уопштава док најзад не увидимо да сваки низ тачака нашег система конвергира ако конвергира одговарајући низ бројева (§ 34 – § 35).

После ових припрема може се дефинисати истинска права као систем тачака који се добива од две тачке узете за основу, ако се стално узимају средине, изводе полуобртања и додаду места нагомилавања свих добивених тачака (§ 36). Затим можемо доказати да је истинска права непрекидна крива (§ 37), да нема двојних тачака (§ 38) и да ма са којом другом истинском правом има највише једну заједничку тачку (§ 39). Показује се, даље, да истинска права пресеца сваки круг који је описан око неке њене тачке, а отуда следује да се две произвољне тачке равни могу увек спојити истинском правом (§ 40). Такође увиђамо да у нашој геометрији важе ставови о конгруенцији, при чему се два троугла показују само тада конгруентним, ако имају и исти смер обилажења (§ 41).

Што се тиче узајамног положаја система свих истинских правих, треба разликовати два случаја, према томе да ли важи аксиома паралелних или кроз сваку тачку према датој правој постоје две праве које раздвајају праве које секу од правих које не секу. У првом случају долазимо до еуклидске геометрије, а у другом до геометрије Бољаи-Лобачевскога (§ 42).

---

§ 1. Нека је *M* ма која тачка у нашој геометрији и у исто време њена слика у бројној равни *x, y*. Наш најближи циљ је тада да конструишемо око *M* неке облике од тачака који ће се најзад показати као истински кругови око тачке *M*.

Опишимо у бројној равни око тачке M „бројни круг“, тј. круг $\mathfrak{K}$ тако мали, у смислу обичне одредбе мере, да су све тачке на том кругу $\mathfrak{K}$ и у унутрашњости њега такође слике тачака и да постоје тачке и ван круга $\mathfrak{K}$. Тада у унутрашњости круга $\mathfrak{K}$ сигурно постоји такав концентрични круг $\mathfrak{k}$ у односу на $\mathfrak{K}$, да све тачке слике у унутрашњости овог круга $\mathfrak{k}$ остају у унутрашњости круга $\mathfrak{K}$ при произвољним обртањима око M.

Да би се ово доказало, посматрајмо у бројној равни бесконачни низ концентричних кругова $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots$ чији полупречници опадају и конвергирају према O и претпоставимо тада, насупрот тврђењу, да у сваком од тих кругова постоји таква тачка слика која при неком обртању око M долази на место које лежи ван круга $\mathfrak{K}$ или се помера на периферију круга $\mathfrak{K}$: нека је A_i таква слика тачке у кругу $\mathfrak{k}_i$, која при обртању Δ_i прелази на место које лежи ван круга $\mathfrak{K}$ или на његову периферију. Замислимо тада да је из тачке у M у сваку тачку A_i повучен полупречник r_i дотичног бројног круга $\mathfrak{k}_i$ и уочимо криву γ_i у коју прелази полупречник r_i при обртању Δ_i. Пошто ова крива γ_i иде из тачке M до неке одређене тачке ван круга $\mathfrak{K}$ или до неке тачке на његовој периферији, то она нужно мора погађати периферију круга $\mathfrak{K}$; нека је B_i једна од ових пресечних тачака и нека је B место згушњавања[1] тачака пресека $B_1, B_2, B_3, \ldots$ Даље, нека је уопште C_i она тачка на полупречнику r_i која при обртању Δ_i прелази у B_i. Пошто тачке $C_1, C_2, C_3, \ldots$ конвергирају према тачки M, то, према аксиоми III, постоји обртање око тачке M, при коме тачка B, која лежи на периферији круга $\mathfrak{K}$, прелази у тачку M. Ово противречи раније дефинисаном појму кретања.

§ 2. Нека је, као што је већ у § 1 установљено, $\mathfrak{k}$ бројни круг у унутрашњости круга $\mathfrak{K}$ који испуњава услове тамо доказаног става тако да све тачке слике у унутрашњости $\mathfrak{k}$ при обртањима око тачке M остају у унутрашњости круга $\mathfrak{K}$, нека је, даље, k бројни круг у унутрашњости $\mathfrak{k}$ чије све тачке при обртањима око тачке M остају у унутрашњости $\mathfrak{k}$.

---

[1] Под тачком згушњавања у овом додатку треба схватити оно што се данас обично назива тачком нагомилавања.

Тада ћемо оне тачке бројне равни, које при ма каквом обртању око тачке M произилазе из тачака у унутрашњости круга k или из тачака његове периферије, укратко означити *покривеним.* Из аксиоме III непосредно следује да покривене тачке образују затворену множину тачака. Даље, нека је A нека одређена тачка ван $\mathfrak{K}$ која је слика неке тачке наше геометрије. Ако се сада непокривена тачка A' може спојити са A Жордановом кривом, која се састоји искључиво из непокривених тачака, онда ћемо рећи да тачка A' лежи *ван* kk. Нарочито све тачке које леже ван бројног круга $\mathfrak{k}$, сигурно леже ван kk. Рећи ћемо за сваку покривену тачку, у чијој се произвољно малој околини налазе тачке ван kk, да лежи *на* kk. Тачке на kk образују затворену множину тачака. За оне тачке J, које нити су ван kk, нити су на kk, рећи ћемо да су *у унутрашњости* kk. Нарочито све покривене тачке, у чијој произвољној близини не леже непокривене тачке, као напр. тачка M и тачке у унутрашњости круга k, сигурно леже у унутрашњости kk.

§ 3. Кад се узме у обзир да, према дефиницији круга $\mathfrak{k}$, тачка A при обртањима око тачке M никад не доспева у унутрашњост круга $\mathfrak{k}$, увиђамо да, при сваком обртању око тачке M, тачке које леже ван kk опет прелазе у тачке ван kk, даље, тачке на kk опет прелазе у тачке на kk и тачке које леже у унутрашњости kk опет прелазе у тачке унутрашњости kk.

Свака тачка на kk, према нашој поставци, јесте покривена тачка, а пошто знамо да тачке у унутрашњости круга k леже такође у унутрашњости kk, то отуда закључујемо ово:

За сваку тачку K на kk сигурно постоји обртање Δ око тачке M, помоћу кога тачка K', која лежи на периферији круга k, доспева у тачку K. Полупречник MK' бројног круга k прелази обртањем Δ око тачке M у Жорданову криву која спаја тачку M са тачком K на kk и која се иначе цела простире у унутрашњости kk.

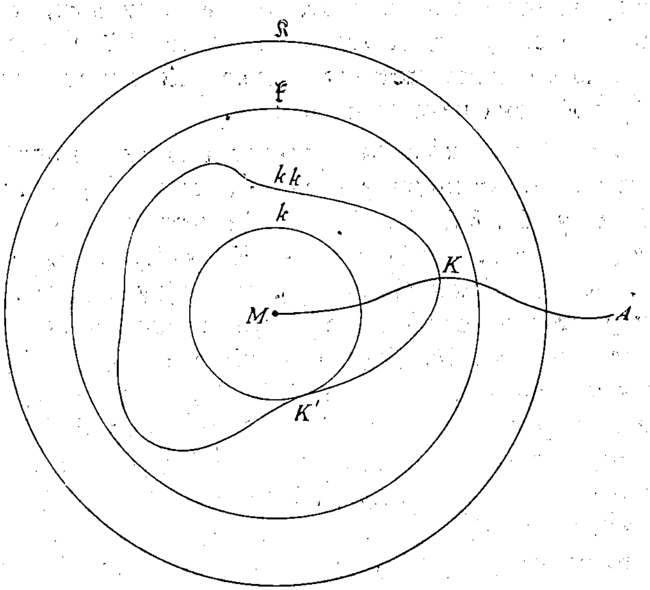
У исто време видимо да најмање једна тачка периферије бројног круга k, наиме тачка K', лежи на kk.

Спојимо тачку A која лежи ван kk ма којом Жордановом кривом са тачком M и означимо сад са K ону тачку ове

Жорданове криве која лежи на kk и има такву особину да све тачке које леже на тој Жордановој кривој између тачака K и A леже ван kk. Затим, размотримо систем свих тачака које произилазе из тачке K обртањем око тачке M, тј. размотримо истински круг $\varkappa$ који је описан око M и који пролази кроз тачку K. Све тачке овог истинског круга су на kk.

Истински круг, према аксиоми II, садржи бесконачно много тачака. Ако је K^* тачка згушњавања тачака истинског круга $\varkappa$, то ова тачка, према аксиоми III, припада такође истинском кругу $\varkappa$. Означава ли K_1 ма коју тачку истинског круга $\varkappa$, онда, ако изведемо оно обртање око тачке M које преводи тачку K^* у тачку K_1, следује да је и тачка K_1 тачка згушњавања истинског круга $\varkappa$. На тај начин добивамо став:

Истински круг $\varkappa$ је затворена и у себи густа, тј. перфектна множина тачака.



§. 4 Најважнији циљ наредних излагања састоји се у томе да се покаже да је истински круг затворена Жорданова крива. Осим тога ће се показати да се истински круг $\varkappa$ поклапа са тачкама на kk.

Докажимо најпре, *да се ма које две тачке* K_1, K_2 *истинског круга* $\varkappa$ *могу увек међусобно спојити како Жордановом кривом, која, изузев крајњих тачака, цела лежи у унутрашњости* kk, *тако и оном Жордановом кривом која се, изузев крајњих тачака, цела простире ван* kk.

Уствари, ако, сходно горњим излагањима, повучемо Жордanove криве MK_1 и MK_2, које у унутрашњости kk везују средишну тачку M са тачкама K_1 и K_2, и ако, полазећи од M, одредимо на кривој MK_1 последњу тачку P која лежи на MK_2, онда комад PK_1 прве Жорданове криве и комад PK_2 друге Жорданове криве образују прву од тражених спојних кривих.

Посматрајмо, с друге стране, обртања око тачке M, при којим тачка K прелази у тачку K_1, одн. у тачку K_2; тачке A_1 и A_2, које се при томе добивају из тачке A, леже, према § 3, ван kk и зато се могу спојити ван kk са тачком A. Од ових спојних кривих и оних Жорданових кривих, које при обртањима настају од Жорданове криве AK конструисане у § 3, лако се може саставити једна Жорданова крива између K_1 и K_2 која цела лежи ван kk.

§ 5. Овај став који смо малочас доказали омогућава нам да тачке истинског круга $\varkappa$ распоредимо на одређени начин.

Нека су K_1, K_2, K_3, K_4 ма које четири различите тачке истинског круга $\varkappa$. Спојимо тачке K_1 и K_2 с једне стране Жордановом кривом која цела (тј. између тачака K_1 и K_2) лежи у унутрашњости kk, а с друге стране таквом кривом која цела лежи ван kk. Пошто су обе ове спојне криве, рачунајући и њихове крајње тачке K_1 и K_2, непрекидне, то оне заједно образују затворену Жорданову криву. Једну од кривих, добивених на тај начин, полазећи од тачака K_1 и K_2, увек ћемо означавати са $\overline{K_1K_2}$. Цела бројна раван, из које је искључена крива $\overline{K_1K_2}$, распада се, према познатом Жордановом ставу, на два подручја, наиме распада се на унутрашњост и спољашњост ове криве $\overline{K_1K_2}$. Што се тиче положаја тачака K_3 и K_4, могућа су сад два случаја: прво, тачке K_3 и K_4 нису раздвојене кривом $\overline{K_1K_2}$, тј. оне или обе леже у унутрашњости те криве или обе ван ње; друго, тачке K_3 и K_4 раздвојене су кривом $\overline{K_1K_2}$, тј. K_3 лежи у унутрашњости криве $\overline{K_1K_2}$, а K_4 ван ње, или обрнуто.

Ако спојимо тачке K_1 и K_2 ма како друкчије једним путем који се простире у унутрашњости *kk* и једним који се простире ван *kk*, лако увиђамо да, што се тиче положаја тачака K_3 и K_4 према новодобивеној затвореној Жордановој кривој $\overline{\overline{K_1K_2}}$, сигурно наступа исти случај као малочас. Уствари, ако се узме први случај и ако се обе тачке K_3 и K_4 налазе у унутрашњости криве $\overline{K_1K_2}$, спојимо тачке K_3 и K_4 путем W који лежи у унутрашњости *kk*. Ако би овај пут излазио из унутрашњости затворене криве $\overline{K_1K_2}$, морао би се најзад у даљем свом току вратити у ову унутрашњост; зато се, сигурно, може део овог пута W, који лежи ван криве $\overline{K_1K_2}$, заменити путем који лежи близу дотичног комада криве $\overline{K_1K_2}$ и који се цео простире како у унутрашњости *kk*, тако и у унутрашњости $\overline{K_1K_2}$: на тај начин се добива спојни пут W^* између тачака K_3 и K_4, који се исто тако цео простире и у унутрашњости *kk* и у унутрашњости $\overline{K_1K_2}$. Образујемо ли из дела криве $\overline{K_1K_2}$ који лежи у унутрашњости *kk* и дела криве $\overline{\overline{K_1K_2}}$ који лежи ван *kk* нову затворену Жорданову криву $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$, онда је W^* очигледно пут који везује тачке K_3 и K_4 у унутрашњости ове нове криве $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$, не пресецајући је, тј. тачке K_3 и K_4 неће бити раздвојене кривом $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$. Из тога, према одговарајућој конструкцији изведеној ван *kk*, следује да тачке K_3 и K_4 нису раздвојене кривом $\overline{\overline{K_1K_2}}$. Могли бисмо зато у првом случају просто рећи: пар тачака K_3 и K_4 није раздвојен паром тачака K_1, K_2. Отуда следује да се и у другом случају може просто рећи: пар тачака K_3, K_4 раздвојен је паром тачака K_1, K_2.

Изведимо сад ма које обртање око тачке M при коме тачке K_1, K_2, K_3, K_4 прелазе у тачке K_1', K_2', K_3', K_4'. Узмимо у обзир да је обртање, по дефиницији, непрекидна и узајамно једнозначна трансформација бројне равни која преводи тачке које су у унутрашњости *kk* у тачке које су у унутрашњости *kk*, а тачке ван *kk* у тачке ван *kk*. Отуда следује да су парови тачака K_1', K_2', K_3', K_4' раздвојени један другим или не, према томе да ли парови тачака K_1, K_2, K_3, K_4 раздвајају један други или не, тј. *узајамни положај парова тачака* K_1, K_2, K_3, K_4 *остаје непромењен при произвољном обртању око тачке* M.

На сличан начин изводимо и друге ставове који одговарају осталим познатим чињеницама у погледу узајамног положаја парова тачака на периферији обичног бројног круга. Ти ставови су:

Ако су тачке K_1, K_2 *раздвојене тачкама* K_3, K_4, *биће и тачке* K_3, K_4 *раздвојене тачкама* K_1, K_2. *Ако су тачке* K_1, K_4 *раздвојене тачкама* K_2, K_5, *а тачке* K_2, K_4 *тачкама* K_3, K_5, *биће и тачке* K_1, K_4 *раздвојене тачкама* K_3, K_5.

Тиме смо дошли до овог резултата:

Тачке истинског круга $\varkappa$ *распоређене су циклично, тј. с обзиром на узајамно раздвајање парова тачака, оне су распоређене исто као и тачке обичног бројног круга. Овај распоред је инваријантан у односу на обртања истинског круга* $\varkappa$ *око центра* M.

§ 6. Једну даљу важну особину истинског круга $\varkappa$ изразићемо овако:

Ма за који пар тачака истинског круга $\varkappa$ *постоји увек пар тачака тог истог круга* $\varkappa$ *који раздваја дати пар тачака.*

Означимо са K_∞ неку сталну тачку истинског круга $\varkappa$; ма о којим другим трима тачкама K_1, K_2, K_3 истинског круга $\varkappa$ рећи ћемо тада да је једна од њих, K_2, лежи између других двеју, K_1 и K_3 или пак не лежи између њих, према томе да ли је пар K_1, K_3 раздвојен паром тачака K_2, K_∞ или није раздвојен.

Претпоставимо, насупрот горњем тврђењу, да су тачке K и K' две тачке истинског круга које нису раздвојене ниједним паром тачака; тада из наше поставке сигурно следује и да између тих тачака не лежи ниједна тачка круга $\varkappa$. Даље, можемо претпоставити да постоји таква тачка K_2 да пар тачака K_1, K' буде раздвојен паром тачака K, K_∞; наиме, у супротном случају, замислићемо у току даљег излагања да су улоге тачака K и K' размењене. Затим, изаберимо на истинском кругу $\varkappa$ бесконачан низ тачака R које конвергирају према тачки K и спојмо тачку K_1 са K' неком кривом која се простире у унутрашњости kk и другом кривом која се простире ван kk. Састављањем ових двеју кривих добивамо затворену Жорданову криву $\overline{K_1K'}$, која K_∞ раздваја од K, па стога мора раздвајати и од бесконачно много тачака низа R конвергентног према K. Нека је K_2 једна од ових тачака низа R. Пошто тачка K_2 лежи између K_1 и K', а не може лежати између K и K', онда тачка K_2 мора лежати између K_1 и K. Спојимо ли сад, аналогно претходном, K_2 са K' затвореном Жордановом кривом $\overline{K_2K'}$, доћи ћемо исто тако до неке тачке K_3 низа R која лежи између K_2 и K итд. На овај начин ћемо добити *бесконачни низ тачака* $K_1, K_2, K_3, \ldots$, *од којих свака лежи између претходне тачке и* K *и које конвергирају према тачки* K.

Изведимо сада једно обртање око тачке M при коме тачка K прелази у једну од тачака $K_1, K_2, K_3, \ldots$, рецимо у тачку K_i. При овом обртању тачка K' прелази у тачку K_i'. Пошто, према нашој претпоставци, тачке K и K' нису раздвојене ниједним паром тачака, биће исти случај и са паром тачака K_i, K_i'. Услед тога се тачка K_i' мора или поклопити са K_{i-1} или са K_{i+1} или лежати између тачака K_{i-1} и K_{i+1}; у сваком случају тачка K_i' лежи између K_{i-2} и K_{i+2}, а зато и бесконачни низ тачака $K_1, K_3', K_5, K_7', K_9, K_{11}', \ldots$ има сигурно особину да свака тачка овог низа лежи између претходне тачке и тачке K.

Сад ћемо показати да и тачке $K_3', K_7', K_{11}', \ldots$ морају конвергирати према тачки K. Уствари, ако би тачке $K_3', K_7', K'_{11}, \ldots$ имале као место згушњавања неку тачку Q, различиту од K, онда одаберимо од њих неку тачку K_i'. Пошто све тачке $K'_{i+4}, K'_{i+8}, K'_{i+12}, \ldots$ леже између K_i' и K, постоји увек затворена Жорданова крива $K_i'K$ која раздваја тачку K_∞ од тачака $K'_{i+4}, K'_{i+8}, K'_{i+12}, \ldots$, а отуда и од тачке Q, тј. тачка Q мора лежати између K_i' и K. Због распореда који тачке K_i имају према тачкама K_i' одатле следује да тачка Q лежи и између свих тачака $K_1, K_5, K_9, \ldots$ с једне стране и тачке K с друге стране. Према томе, затворена Жорданова крива $\overline{QK_\infty}$ морала би раздвајати све тачке $K_1, K_5, K_9, \ldots$ од тачке K; али тада тачке $K_1, K_5, K_9, \ldots$ не би могле конвергирати према K, како би то требало да буде.

Посматрајмо сад тачке $K_3, K_7, K_{11}, \ldots$ које конвергирају према K и тачке K_3', K_7', K'_{11} које исто тако, према већ доказаном, конвергирају према K. Пошто неким обртањем око M тачка K прелази у K_i и у исто време тачка K' прелази у K_i', то би према аксиоми III, морало постојати и тако обртање које би преводило K и у исто време K' у заједничку тачку конвергенције K. А ово противречи дефиницији обртања. На тај начин, оповргавањем наше претпоставке потпуно је доказан став постављен у почетку овог § 6.

§ 7. С обзиром на поставке усвојене у § 6, схватићемо истински круг $\varkappa$, искључујући тачку K_∞, као уређену множину тачака у *Канторовом* смислу: *тада ова множина тачака има редни тип линеарног континуума.*

Да бисмо то доказали, одредимо најпре пребројиву множину S тачака истинског круга $\varkappa$ чије тачке згушњавања чине сам истински круг $\varkappa$. Таква множина S, по *Кантору*[1], има редни тип система свих рационалних бројева у њиховом природном реду, тј. могуће је тачкама система S доделити рационалне бројеве тако да од три рационална броја a, b, c додељена ма којим трима тачкама A, B, C множине S, од којих тачка B лежи између A и C, увек број b по својој вредности лежи између a и c.

Нека је сад K ма која тачка истинског круга $\varkappa$ која не припада систему S. Ако су тада A, B тачке система S, онда ћемо рећи да A, B леже на разним странама или на истој страни од K, према томе да ли тачка K лежи између тачака A и B или не лежи између њих. Ако пренесемо сада ову поставку о тачкама система S на рационалне бројеве који су тим тачкама додељени, добићемо помоћу тачке K одређени Дедекиндов пресек у систему рационалних бројева: тачки K доделићемо ирационални број дефинисан овим пресеком.

На истинском кругу $\varkappa$ не могу постојати две различите тачке K и K' којима би био додељен исти ирационални број. Уствари, ако конструишемо затворену Жорданову криву $\overline{KK'}$ и ако је H ма која тачка истинског круга $\varkappa$ која лежи између K и K' и, стога, у унутрашњости криве $\overline{KK'}$, онда, пошто је H место згушњавања тачака система S, мора у

---

[1] G. Cantor, „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre", Math. Ann. књ. 46, § 9; даље закључке текста упоредити нарочито са § 11.

систему S сигурно постојати таква тачка која лежи у унутрашњости криве $\overline{KK'}$ и, стога, између тачака K и K'. Рационални број a који припада тачки A, условљава, на тај начин, различитост пресека добивених помоћу тачака K и K'.

Најзад ћемо показати да, и обрнуто, за сваки ирационални број α постоји тачка K на истинском кругу $\varkappa$ којој је овај број додељен. Ради тога узмимо два низа: низ растућих бројева $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и низ опадајућих бројева $b_1, b_2, b_3, \ldots$ од којих сваки конвергира према α. Конструишимо тачке $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ које одговарају овим бројевима и означимо са K ма коју тачку згушњавања ових тачака $A_1, A_2, A_3, \ldots$, одн. $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Тада тачка K нужно припада броју α, јер кад ми конструишемо затворену Жорданову криву $\overline{A_i B_i}$ уопште, онда тачке $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \ldots$ и $B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \ldots$, па стога и тачка згушњавања, леже у унутрашњости $\overline{A_i B_i}$, тј. између тачака A_i и B_i. Према томе пресек произведен тачком K није никакав други до баш онај пресек који одређује број α.

Посматрамо ли тачке на периферији обичног бројног круга полупречника 1 и ако доделимо једној од ових тачака знак $\pm\infty$ и тачку K_∞, осталим тачкама све реалне бројеве у непрекидном низу, а овим опет одговарајуће тачке истинског круга $\varkappa$, доћи ћемо до овог резултата: *тачке истинског круга могу се узајамно једнозначно пресликати са задржаним својим распоредом на тачке периферије обичног бројног круга полупречника 1.*

§ 8. Да бисмо постигли циљ назначен у § 4, остаје нам још да покажемо непрекидност добивеног пресликавања, тј. да покажемо непрекидност истинског круга $\varkappa$. Ради тога замислимо тачке истинског круга $\varkappa$ одређене координатама x, y бројне равни, а, с друге стране, тачке бројног круга полупречника 1 луком t који полази од неке сталне тачке: у том случају треба доказати да су x, y непрекидне функције од t.

Нека је $t_1, t_2, t_3, \ldots$ један стално растући или стално опадајући низ који конвергира према t^*, а $K_1, K_2, K_3, \ldots$ нека су тачке истинског круга $\varkappa$ додељене овим вредностима параметра, и нека вредност t^* одговара некој тачки K^* на $\varkappa$. Нека је, даље, Q тачка згушњавања тачака $K_1, K_2, K_3, \ldots$ Ако конструишемо уопште неку затворену Жорданову криву $K_i K^*$, тачке K_{i+1}, K_{i+2}, $K_{i+3}, \ldots$, а отуда и њихова тачка згушњавања Q, морају лежати у унутрашњости $\overline{K_i K^*}$, тј. и тачка Q лежи између K_i и K^*; према томе вредност параметра t, која одговара тачки Q, такође се мора налазити између t_1 и t^*. Ова последња противречност отпада само кад се тачке Q и K^* поклапају; тиме је непрекидност функције x, y зависне од параметра t потпуно доказана, а отуда следује чињеница коју смо у § 4 поставили као први важни циљ нашег истраживања, наиме став:

Истински круг у бројној равни је затворена Жорданова крива.

§ 9. Ми знамо да све тачке истинског круга $\varkappa$ припадају тачкама које леже на kk; показаћемо такође да ове последње тачке све леже на истинском кругу $\varkappa$, тако да важи овај шири став:

Истински круг је идентичан са тачкама на kk; тачке које леже у унутрашњости $\varkappa$, у исто време су тачке које леже у унутрашњости kk, а тачке које леже ван $\varkappa$, у исто време су тачке које леже ван kk.

Да бисмо увидели тачност овог става, показаћемо најпре да се тачка M, „средиште" истинског круга $\varkappa$, може спојити са сваком тачком J у унутрашњости $\varkappa$ непрекидном кривом, а да се при томе не пресече истински круг $\varkappa$.

Уствари, повуцимо кроз тачку J ма коју обичну праву у бројној равни, такозвану „бројну праву", и нека су K_1 и K_2 прве тачке те бројне праве које леже на $\varkappa$, рачунато на обе стране од J. Пошто су K_1 и K_2 такође тачке на kk, то оне могу бити везане са M са по једном Жордановом кривом MK_1 одн. MK_2, које се целе простиру у унутрашњости kk и зато, сигурно, не пресецају истински круг $\varkappa$. Ако једна од ових Жорданових кривих пресеца комад K_1K_2 праве, рецимо, у тачки B, то комад MB криве и комад JB праве образују заједно тражени спојни пут. У супротном случају MK_1 и MK_2 образују заједно са комадом K_1K_2 праве затворену Жорданову криву γ. Пошто ова крива γ цела лежи у унутрашњости бројног круга $\mathfrak{k}$ (§ 1), то се тачка A, која лежи ван бројног круга $\mathfrak{K}$, сигурно не може спојити са једном тачком у унутрашњости γ а да при томе не буде пресечена ни у једној тачки крива γ. Крива γ састоји се само из тачака у унутрашњости kk, из тачака на kk и из тачака у унутрашњости $\varkappa$. Пошто се, полазећи из A, ове последње тачке могу достићи само пресецајући истински круг $\varkappa$ у некој тачки која је у исто време тачка која лежи на kk, онда цела област која лежи у унутрашњости γ мора лежати такође у унутрашњости kk. Зато, ако спојимо тачку M са J непрекидним путем који се простире у унутрашњости γ, то овај пут сигурно не пресеца истински круг $\varkappa$ и зато има захтевану особину.

Из тога прво закључујемо да тачка M лежи у унутрашњости $\varkappa$, тј. да *средиште истинског круга лежи у унутрашњости њега.*

Даље, пошто се свака тачка на kk може спојити са тачком M Жордановом кривом, која, изузев крајњих тачака, цела лежи у унутрашњости kk па, дакле, сигурно не пресеца $\varkappa$, то свака тачка која лежи на kk мора лежати или на $\varkappa$ или у унутрашњости $\varkappa$. Ако би постојала тачка P на kk која лежи у унутрашњости $\varkappa$, онда се тачка A која лежи ван $\mathfrak{K}$ не би могла спојити са тачкама које се налазе у произвољној близини тачке P, а да при томе не буде пресечен истински круг $\varkappa$; но, пошто свака тачка истинског круга припада покривеним тачкама, то тачка P не би могла бити на kk; ово је противречност. Дакле, све тачке на kk у исто време леже на $\varkappa$, а тиме је горње тврђење потпуно доказано.

§ 10. Облик kk од тачака добивен је у § 2 из бројног круга k помоћу одређене конструкције. Пошто бројни круг, како је показано у § 3, садржи најмање једну тачку на kk, а све остале његове тачке леже или на kk или у унутрашњости kk, а тачке на kk, према § 9, нису ништа друго до истински круг $\varkappa$, то у горњој конструкцији у исто време имамо средство да конструишемо из бројног круга k истински круг $\varkappa$ који је затворена Жорданова крива и који обухвата бројни круг k, додирујући га споља; овде, као и у наредним излагањима, рећи ћемо да Жорданова крива, која садржи у унутрашњости другу Жорданову криву и има са њом најмање једну заједничку тачку, додирује ту другу споља, а друга прву изнутра.

Помоћу незнатне измене ранијег поступка, наиме помоћу размене улога које су биле приписане тачкама које леже у унутрашњости круга k и ван њега, можемо из бројног круга k конструисати још један други истински круг; сад ћемо оне тачке бројне равни које се добивају при ма каквом обртању око M од тачака које леже на кругу k или ван њега, назвати *покривеним*; напротив, све остале тачке назваћемо *непокривеним*. Ако се пак нека непокривена тачка може спојити са тачком M Жордановом кривом која се састоји из све самих непокривених тачака, рећи ћемо за ову тачку да је у *унутрашњости* kkk. О тачкама које су граничне у односу на те тачке, рећи ћемо да леже на kkk, а за све остале тачке рећи ћемо да леже ван kkk. Показаћемо, затим, слично као у § 3 до § 9, *да тачке на* kkk *образују истински круг око* M *који је затворена Жорданова крива, који обухвата средиште* M *и простире се у унутрашњости бројног круга* k, *додирујући га изнутра.*

§ 11. Сада се може изабрати место бројног круга k произвољна затворена Жорданова крива z која лежи у унутрашњости k и која у својој унутрашњости садржи тачку M: *примењујући исту конструкцију као и раније, добићемо тада за ову криву* z *један одређени истински круг око* M *који њу обухвата, који је затворена Жорданова крива и који додирује споља* z, *као и један одређени истински круг око* M *који лежи у унутрашњости* z, *који је такође Жорданова затворена крива и који додирује* z *изнутра.*

Приметимо још да се сваки такав истински круг, конструисан из Жорданове криве z, може произвести и из бројног круга: треба одабрати онај бројни круг који лежи у унутрашњости датог истинског круга, додирујући га изнутра, одн. који обухвата тај круг, додирујући га споља; јер, два истинска круга, који су затворене Жорданове криве и који додирују исти бројни круг, било обухватајући га, било да у њему цели леже, сигурно би морали имати једну заједничку тачку и зато би били уопште међусобно идентични.

§ 12. Сад можемо без знатних тешкоћа доказати важну чињеницу, наиме *да је сваки истински круг са центром у М који пролази кроз ма коју тачку Р што лежи у унутрашњости κ, исто као и у § 11 конструисани истински кругови, затворена Жорданова крива која у унутрашњости садржи тачку М.*

Да бисмо ово доказали, узмимо, с једне стране, све истинске кругове са центром у тачки *М* који су затворене Жорданове криве и који искључују *Р*: назовимо их круговима *прве* врсте; а с друге стране, узмимо све оне истинске кругове који су затворене Жорданове криве и који *Р* укључују: њих назовимо истинским круговима *друге* врсте.

Замислимо сад да је из сваког бројног круга са средиштем *М* произведен истински круг који *обухвата* бројни круг и уочимо тада оне бројне кругове из којих произилазе истински кругови прве врсте. Онда потражимо за ове бројне кругове гранични круг *g*, тј. најмањи бројни круг који све њих садржи. Сви бројни кругови који су мањи од *g*, дају тада истинске кругове прве врсте. Истински круг γ који произилази из бројног круга *g*, морао би, ако не иде кроз *Р*, ову тачку исто тако искључивати. Јер ако би тачка *Р* лежала у унутрашњости γ, може се повући затворена Жорданова крива која би цела лежала у унутрашњости γ и која би обухватала у себи тачке *М* и *Р*, и од ове криве произвести истински круг који њу обухвата. Овај истински круг, пошто он сигурно улази у унутрашњост бројног круга *g*, могао би се добити помоћу бројног круга који је мањи од *g*; он би морао, даље, обухватати тачку *Р*, што није могуће. Пошто, како је поменуто, сви истински кругови са центром у тачки *М*, који су заторене Жорданове криве, произилазе и из бројних кругова са центром у *М*, то је очигледно да је истински круг који произилази из *g* такав круг прве врсте који обухвата све друге истинске кругове прве врсте.

Замишљајући, с друге стране, да из сваког бројног круга са средиштем у *М* произилази онај истински круг који тај бројни круг искључује, можемо на сличан начин доказати егзистенцију истинског круга друге врсте који је обухваћен свим другим истинским круговими друге врсте.

Ако пак ниједан од нађених граничних кругова не би пролазио кроз тачку P, онда би се могла повући Жорданова крива у прстенастој области која лежи између њих; помоћу нашег поступка сигурно бисмо могли добити истински круг који би био затворена Жорданова крива, али који не би био нити круг прве врсте, нити круг друге врсте; ово је противречност, а тиме смо доказали тврђење постављено у почетку § 12.

§ 13. Пошто смо у претходном излагању нашли најважније особине истинских кругова са средиштем у M који пролазе кроз тачке у унутрашњости $\varkappa$, пређимо сада *на испраживање групе свих кретања која претрпи истински круг $\varkappa$ у себи при обртањима равни око тачке M.*

Нека су, према излагањима у § 8, тачке истинског круга $\varkappa$ пресликане са очуваним својим распоредом на тачке t периферије бројног круга полупречника 1; тада сваком обртању Δ наше равни око тачке M одговара одређена узајамно једнозначна и непрекидна трансформација тачака t јединичног круга у себе, пошто при обртању, према § 5, распоред тачака на истинском кругу остаје непромењен, а отуда, с обзиром на § 7, остаје непромењен и распоред вредности параметра t. Ова се трансформација може претставити формулом облика

$$t' = \Delta(t),$$

где је $\Delta(t)$ непрекидна функција која при растућем t или увек расте или увек опада и која се при повећању агрумента за 2π исто тако промени за износ 2π.

Оним функцијама $\Delta(t)$, које опадају при растућем аргументу t, одговарају трансформације које мењају смер обилажења по истинском кругу, а пошто, према нашој формулацији појма кретања, при кретању треба смер обилажења да остане увек исти, то следује да функција $\Delta(t)$ мора увек расти при растућем аргументу t.

§ 14. Питајмо се најпре може ли у овој групи свих обртања око тачке M постојати такво обртање при коме тачка A истинског круга остаје непромењена. Нека је $t = a$ вредност параметра за такву тачку A и нека ова тачка остаје непокретна при неком обртању Δ које је претстављено формулом

$$t' = \Delta(t).$$

Даље, нека је B ма која тачка истинског круга са параметром $t = b$ која при обртању Δ мења свој положај; претпоставимо, например, да је $b < a$ у чему није никакво ограничење.

Како функција $\Delta(t)$, тако и обрнута функција $\Delta^{-1}(t)$, такве су врсте да при растућем аргументу расту. Пошто је $\Delta(a) = a$, одатле редом закључујемо да су све величине које се могу претставити симболичким степенима

$$\Delta(b),\ \Delta\Delta(b) = \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \ldots, \Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \ldots$$

мање од a. Но у случају да је $\Delta(b) > b$, величине

$$\Delta(b),\ \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \ldots$$

образују низ стално растућих вредности; ако је $\Delta(b) < b$, то исто важи за низ величина

$$\Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \ldots .$$

Из ових чињеница закључујемо да се у првом случају непосредна понављања обртања Δ, примењена на b, а у другом случају симболички степени од $\Delta(b)$ са негативним експонентима, морају приближавати граничној вредности g која лежи или између a и b или се поклапа са a. Одговара ли гранични број g, рецимо, тачки G на истинском кругу $\varkappa$, то потенције од Δ са позитивним одн. негативним експонентима образују кретања при којим тачка B прелази најзад у произвољну близину тачке G, и у исто време тачке које се налазе у произвољно малој околини тачке G остају у произвољно малој околини тачке G. Према аксиоми III, морало би, дакле, постојати кретање које преводи тачку B у G и у исто време тачку G оставља непромењеном; ово противречи појму кретања. *Према томе је обртање Δ, које оставља тачку A непокретном, нужно такво обртање које све тачке круга $\varkappa$ оставља непокретним, тј. за овај круг је идентитет.*

§ 15. Из дефиниције истинског круга непосредно је јасна ова чињеница:

Постоји такво обртање око тачке M које преводи неку произвољно дату тачку O истинског круга ϰ у другу произвољно дату тачку S тог истог круга.

§ 16. Извешћемо сада још једно својство групе кретања истинског круга у себи.

Нека су O, S, T, Z такве четири тачке на истинском кругу ϰ да оно обртање око тачке M, помоћу кога тачка A прелази у S, тачку T креће у Z тако да је положај тачке Z једнозначно одређен тачкама O, S, T. Ако *не мењамо положај* тачки O, а крећемо тачке S и T по истинском кругу, *то ће се при непрекидној промени положаја тачака S и T мењати и положај тачке Z непрекидно.*

Да бисмо ово доказали, одаберимо један бесконачни низ тачака $S_1, S_2, S_3, \cdots$ које конвергирају према тачки S и један бесконачни низ тачака $T_1, T_2, T_3, \cdots$ које конвергирају према T. Обртања око тачке M, помоћу којих тачка O прелази у $S_1, S_2, S_3, \cdots$, означићемо са $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots$, а тачке које произилазе при овим обртањима $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots$, из T_1 одн. $T_2, T_3, \cdots$ означимо са Z_1 одн. $Z_2, Z_3, \cdots$; тада треба да докажемо да тачке $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ конвергирају према тачки Z. Нека је тачка Z^* тачка згушњавања тачака $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$. Према аксиоми III, постоји тада обртање око тачке M, помоћу кога тачка O прелази у S и у исто време тачка T у Z^*. А тиме се показује да је тачка Z^* једнозначно одређена и са тачком Z идентична.

§ 17. У §§ 14–16 сазнали смо да група свих обртања истинског круга у себи има ова својства:

1. Не постоји никакво обртање око тачке M, осим идентитета, при коме би нека тачка истинског круга ϰ остала непокретна.

2. Ако су O и S ма које две произвољне тачке истинског круга ϰ, сигурно постоји обртање око тачке M које преводи тачку O у S.

3. Нека при неком обртању око M, које креће тачку O у S, истовремено тачка T прелази у Z; тиме тачка Z једнозначно одређена помоћу O, S, T непрекидно мења свој положај на ϰ, кад тачке S и T непрекидно мењају свој положај на ϰ.

Ове три особине потпуно одређују структуру групе трансформација $\Delta(t)$ које одговарају кретањима истинског круга у себи. Наиме, поставићемо овај став:

Група свих кретања истинског круга $\varkappa$ *у себи, која су обртања око тачке M, јесте холоедарски изоморфна са групом обичних обртања јединичног бројног круга у самом себи око тачке M.*

§ 18. Ако замислимо оно обртање око тачке M које преводи тачку O истинског круга $\varkappa$ са параметром 0 у тачку S са вредношћу параметра s, претстављено помоћу трансформационе формуле

$$t' = \Delta(t, s),$$

при чему узимамо вредност функције $\Delta(t, 0) = t$, увидећемо на основу нађених особина групе обртања да је функција $\Delta(t, s)$ једнозначна и непрекидна за све вредности обеју променљивих t и s. Такође следује, пошто је s одређено до вишеструке вредности од 2π помоћу две одговарајуће вредности t и t', да функција $\Delta(t, s)$, при константном t и растућем s, стално или расте или опада, и пошто она за $t=0$ прелази у s, то наступа нужно први случај. Према томе је

$$\Delta(t, t) > \Delta(0, t), \quad \Delta(0, t) = t; \quad (t > 0),$$

а пошто је

$$\Delta(2\pi, s) = 2\pi + \Delta(0, s) = 2\pi + s$$

то следује

$$\Delta(2\pi, 2\pi) = 4\pi.$$

Према томе функција $\Delta(t, t)\,(> t)$ једне променљиве t има особину да стално расте од 0 до 4π, кад агрумент t расте од 0 до 2π. Из ове околности одмах закључујемо:

Ако је дат ма који позитивни број $t' \leqq 2\pi$, онда увек постоји један и само један позитивни број t, тако да је

$$\Delta(t, t) = t';$$

при томе је $t < t'$. Вредност параметра t даје нам једну такву тачку истинског круга, да се, при извесном обртању око тачке M, тачка $t = 0$ помера у тачку t, а истовремено тачка t у тачку t'.

Означимо сад ону вредност t за коју је

$$\Delta(t, t) = 2\pi,$$

са $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, вредност t за коју је

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right),$$

са $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, а вредност t за коју је

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right),$$

са $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right), \ldots$; даље, узмимо уопште

$$\Delta\left[\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right), \quad \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right] = \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right),$$

где a значи цео број и n цео број $\geqq 1$, и даље узмимо

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi.$$

Тиме је функција φ непротивречно дефинисана за све рационалне вредности агрумента чији је именилац неки степен од 2.

Ако је тачка σ произвољни позитивни агрумент < 1, развијмо σ у дијадски разломак облика

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots,$$

где су $z_1, z_2, z_3, \ldots$ цифре од којих је свака 0 или 1. Пошто бројеви низа

$$\varphi\left(\frac{z_1}{2}\right), \quad \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2}\right), \quad \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3}\right), \ldots$$

сигурно никад не опадају и сви остају $\leqq \varphi(1)$, то се они приближавају некој граничној вредности; ову ћемо означити са $\varphi(\sigma)$. Функција $\varphi(\sigma)$ биће функција која са растућим аргументом стално расте; доказаћемо да је она и непрекидна. Уствари, ако она на неком месту

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n}{2^n} = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n + 1}{2^n},$$

$$\left(\frac{a_n}{2^n} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \cdots + \frac{z_n}{2^n}\right)$$

не би била непрекидна, то би обе граничне вредности

$$\underset{n=\infty}{L}\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right) \quad \text{и} \quad \underset{n=\infty}{L}\varphi\left(\frac{a_n+1}{2^n}\right)$$

морале бити различите једна од друге и, према томе би бесконачни низ тачака које одговарају параметрима

$$t=\varphi\left(\frac{a_1}{2}\right), \quad t=\varphi\left(\frac{a_2}{2^2}\right), \quad t=\varphi\left(\frac{a_3}{2^3}\right), \ldots,$$

морао конвергирати према једној другој тачки, различитој од тачке којој конвергира бескрајни низ тачака које одговарају параметрима

$$t=\varphi\left(\frac{a_1+1}{2}\right), \quad t=\varphi\left(\frac{a_2+1}{2^2}\right), \quad t=\varphi\left(\frac{a_3+1}{2^3}\right), \ldots.$$

Исто обртање, при коме тачка $t=\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ прелази у тачку $t=\varphi\left(\frac{a_n+1}{2^n}\right)$, преводи истовремено и тачку $t=\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ у тачку $t=\varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$; а пошто бројеви $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right)$ стално опадају и зато тачке које одговарају овим параметрима морају конвергирати према некој тачки A, онда ће, с обзиром на аксиому III на основу једног често примењиваног начина закључивања и оба горе поменута бесконачна низа тачака конвергирати према истој тачки.

Пошто функција $\varphi(\sigma)$ стално расте и непрекидна је, она допушта такође једнозначну и непрекидну инверзију.

Обртање око тачке M, при коме тачка $t=0$ прелази у тачку $t=\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$, преводи истовремено тачку $t=\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ у тачку $t=\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}+\frac{a_n}{2^n}\right)$, где се под b_m подразумева ма који цео број. Пошто за $n=\infty$ вредности $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ конвергирају према $\varphi(\sigma)$, а бројеви $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}+\frac{a_n}{2^n}\right)$ истовремено конвергирају према

$\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}+\sigma\right)$, то, према аксиоми III, постоји обртање које помера тачку $t=0$ у $t=\varphi(\sigma)$ и истовремено тачку $t=\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ у $t=\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}+\sigma\right)$, тј.

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right),\ \varphi(\sigma)\right)=\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}+\sigma\right),$$

а пошто је φ непрекидна функција, из тога уопште за произвољне параметре τ и σ следује

$$\Delta(\varphi(\tau),\ \varphi(\sigma))=\varphi(\tau+\sigma).$$

Тиме је доказано да, ако у трансформациону формулу

$$t'=\Delta(t,\ s)$$

уведемо помоћу извесне узајамно једнозначне функције φ место параметара t, t', s нове параметре τ, τ', σ за које је

$$t=\varphi(\tau),\quad t'=\varphi(\tau'),\quad s=\varphi(\sigma),$$

онда се обртање у новим параметрима изражава формулом

$$\tau'=\tau+\sigma.$$

Овај став показује да је тврђење постављено у § 17 тачно.

Ставићемо још место параметра σ параметар $\omega=2\pi\sigma$ и тај параметар ω назвати *углом* или *дужином лука* између тачака $O\,(\sigma=0)$ и S (тј. σ) на истинском кругу $\varkappa$; обртање при коме тачка $O\,(\sigma=0)$ прелази у тачку S (тј. σ), назваћемо *обртањем* $\Delta[\omega]$ *истинског круга* $\varkappa$ *у себи за угао* ω.

§ 19. Овим доказом става у § 17 завршили смо истраживање обртања истинског круга $\varkappa$ у себи. На основу § 11 и § 12 увиђамо да у § 13 до § 18 примењени поступци и доказане чињенице за истински круг $\varkappa$ важе такође за све истинске кругове око M који леже у унутрашњости $\varkappa$.

Приђимо сада истраживању групе трансформација *свих* тачака при обртањима равни око сталне тачке M и докажимо редом наредне ставове:

Нека се зна о неком истинском кругу μ *око* M *да је он затворена Жорданова крива у чијој унутрашњости лежи тачка*

М; тада не постоји, осим идентитета, никакво обртање равни око М које би сваку тачку истинског круга μ оставило непокретном.

Да бисмо ово доказали, означимо обртање око *М*, при коме свака тачка на μ остаје непокретна, са М и претпоставимо, *прво*, насупрот тврђењу, да постоји на μ нека тачка *А* у чијој произвољној близини леже тачке које мењају свој положај при неком обртању М. Опишимо око *А*, што је према § 12 свакако могуће, истински круг α који би пролазио кроз једну према М промењљиву тачку и који би био довољно мали, тако да би, на основу горње примедбе, за њега важио став у § 14. Нека је *В* пресечна тачка овог круга са μ; тада се кретање М истодобно карактерише као обртање круга α у себи при коме тачка *В* остаје непокретна. Али, при једном таквом обртању, остају, према § 14, све тачке на α непокретне, што није могуће; према томе, наша се прва претпоставка показује као недопуштена.

Конструишимо сад око *М* систем затворених кривих коме би припадао круг μ и при чему би свака од ових или садржала целу другу криву, или би била потпуно садржана у тој кривој, тако да би кроз сваку тачку бројне равни пролазила једна и само једна крива тог система. Претпоставимо тада, *друго*, насупрот горњем тврђењу, да је λ једна крива овог система у унутрашњости или ван μ, тако да све тачке у прстенастој области између μ и λ, при сваком обртању М, остају непокретне, док у произвољној близини криве λ постоје такве тачке које не остају непокретне при сваком обртању М.

Нека је *А* тачка на λ, у чијој се близини, при обртањима М, налазе покретне тачке; опишимо тада око *А* истински круг α који пролази кроз једну од ових покретних тачака и који је довољно мали тако да за њега важи став у § 14. Пошто овај круг при довољној малености, свакако пролази кроз један део прстенасте области која се не креће при кретањима М, онда се кретање М у исто време може карактерисати као кретање круга α у себи, при коме бескрајно многе тачке круга α остају непокретне. Зато би, према § 14, при обртањима М морале све тачке круга α остати напокретне, што противречи нашој претпоставци. Тиме је показано да при обртањима М све тачке равни остају непокретне.

§ 20. Поставићемо сад ово важно тврђење:

Сваки истински круг је затворена Жорданова крива; систем свих истинских кругова описаних око ма које тачке M испуњава без празнина нашу раван тако да сваки истински круг описан око тачке M обухвата сваки други такав круг или је њиме обухваћен. Сва обртања $\Delta[\omega]$ *наше равни око тачке M изражавају се трансформационим формулама облика*

$$x' = f(x, y; \omega), \quad y' = g(x, y; \omega);$$

ту x, y и x', y' *означавају координате тачака у бројној равни, а* f, g *једнозначне непрекидне функције трију променљивих* x, y, ω. *Даље, за сваку тачку* x, y *функције* f, g, *у погледу агрумента* ω, *имају број* 2π *за најмању симултану периоду, тј. свака тачка истинског круга кроз тачку* (x, y) *добива се по једанпут и само по једанпут, ако се пусти да* ω *прелази све вредности од* 0 *до* 2π. *Најзад, за слагање два обртања за углове* ω, ω' *важи формула*

$$\Delta[\omega]\Delta[\omega'] = \Delta[\omega + \omega'].$$

§ 21. Ради доказа постављених тврђења узмимо опет истински круг $\varkappa$ око M, испитиван прво у § 3 до § 18, који је затворена Жорданова крива и посматрајмо обртање овог истинског круга $\varkappa$ у себи. Према § 18, увешћемо угао ω тако да, кад је дата нека вредност од ω између 0 и 2π, буде једнозначно одређено једно кретање истинског круга $\varkappa$ у себи. Дакле, сваком обртању истинског круга $\varkappa$ у себи одговара само једно одређено обртање равни око тачке M, пошто, према § 19, кад су све тачке на $\varkappa$ непокретне, уопште све тачке равни остају непокретне. Отуда следује да су функције f и g, које улазе у постављене формуле у § 20 за обртање равни око тачке M, за све вредности x, y, ω *једнозначне* функције, које, у погледу ω, имају период 2π.

Докажимо сад да су функције f и g *непрекидне* у односу на x, y, ω. Ради тога нека је O ма која тачка на $\varkappa$; нека је, даље, $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ бесконачни низ вредности које конвергирају према некој одређеној вредности ω, а $T_1, T_2, T_3, \ldots$ бесконачни низ тачака наше равни које конвергирају према ма којој тачки T. Оне тачке које при извођењу обртања за угао $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ произилазе из O означићемо са $S_1, S_2, S_3, \ldots$

а тачке које произилазе из тачака T_1, T_2, $T_3, \ldots$ при обртањима ω_1, ω_2, $\omega_3, \ldots$ означићемо са Z_1, Z_2, $Z_3, \cdots$. Најзад, нека тачке које произилазе из O и T обртањем за угао ω, буду означене са S и Z. Треба доказати да тачке Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots$ конвергирају према Z.

Пошто тачке T_1, T_2, $T_3, \ldots$ конвергирају према тачки T, то се може одредити Жорданова област G у чијој унутрашњости леже све тачке M, T, T_1, T_2, $T_3, \ldots$. Применимо тада на ову Жорданову област оно обртање око тачке M које тачку O помера у S. Тако из области G добивену Жорданову област означићемо са H; она, свакако, садржи тачке M и Z. Најзад, конструишимо затворену Жорданову криву α која садржи целу област H у унутрашњости, тј. ову област обухвата тако, да ниједна њена тачка не лежи на H.

Доказаћемо сад да од тачака Z_1, Z_2, $Z_3, \ldots$ свакако само један коначан број лежи ван криве α. Уствари, ако би бесконачно много од тих тачака, напр. тачке Z_{l_1}, Z_{l_2}, $Z_{l_3}, \ldots$ лежало ван α, уопште могли бисмо замислити да су тачке M и T_{l_h} везане неком Жордановом кривом γ_h која се простире у унутрашњости области G, и тада извести са γ_h обртање за угао ω_{l_h}. Тако постала крива спаја тачку M са тачком Z_{l_h} и зато би, свакако, морала пресецати криву α у некој тачки, например у тачки B_h; нека је A_h та тачка на γ_h која при обртању за угао ω_{l_h} прелази у B_h. Пошто тачке A_1, A_2, $A_3, \ldots$ остају све у унутрашњости области G, а све тачке B_1, B_2, $B_3, \ldots$ на кривој α, то сигурно постоји такав бесконачни низ индекса h_1, h_2, $h_3, \ldots$ при којим би тачке A_{h_1}, A_{h_2}, $A_{h_3}, \ldots$ конвергирале према тачки A која лежи у унутрашњости области G или на њеној граници и у исто време би тачке B_{h_1}, B_{h_2}, $B_{h_3}, \ldots$ конвергирале према тачки B која лежи на кривој α. Но ми знамо да тачке S_1, S_2, $S_3, \ldots$ конвергирају према тачки S; према томе, с обзиром на аксиому III, морало би постојати обртање око тачке M које креће тачку O у S и истовремено A у B; а то није могуће, јер би при овим обртањима морала тачка A прећи у тачку у унутрашњости области H или на њену границу; напротив, тачка B је на кривој α која целу област H садржи у својој унутрашњости.

На тај начин смо увидели да систем тачака $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ мора цео лежати у унутрашњости неке Жорданове области.

Нека је Z^* тачка згушњавања тачака $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$. Пошто тачке $S_1, S_2, S_3, \cdots$ конвергирају према тачки S, то, према аксиоми III, постоји обртање око тачке M при коме тачка O прелази у тачку S и истовремено тачка T у тачку Z^*. Али пошто би, при оном обртању око тачке M које преводи O у S, морала тачка T прећи у тачку Z, то, због претходно доказане једнозначности функција f и g, нужно следује да је $Z^* = Z$, тј. тачке $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ згушњавају се само на једном месту, наиме на месту Z. Тиме је доказана непрекидност функција f и g у односу на променљиве x, y, ω.

Ставимо сад у функције f и g место x, y координате ма које тачке P наше равни која лежи у унутрашњости круга $\varkappa$ или ван њега. Тако добивене функције $f(\omega)$, $g(\omega)$ само по једној променљивој ω, не могу имати произвољно мале симултане периоде. Јер пошто су оне непрекидне функције од ω, биле би у овом случају константе; но тада би, при свим обртањима равни око тачке M, тачка P остала непокретна, што противречи аксиоми II. Најмањи симултани период ових двеју функција $f(\omega)$, $g(\omega)$ морао би зато бити облика $\frac{2\pi}{n}$, где је n неки цео позитивни број. Из овога следује да се добива истински круг који пролази кроз тачку P ако се у формулама

$$x = f(\omega), \quad y = g(\omega)$$

пусти да променљива ω пређе вредности од 0 до $\frac{2\pi}{n}$. Ова крива је затворена и без двојних тачака; она зато претставља истински круг који пролази кроз P са центром у тачки M. Ако сад раван обрнемо за угао $\frac{2\pi}{n}$, онда при томе све тачке овог истинског круга, који пролази кроз тачку P, остају непокретне и стога би, према § 19, све тачке равни морале остати непокретне; но тачке на истинском кругу $\varkappa$ остају непокретне само при оном обртању кад је $n = 1$. Тиме смо потпуно доказали сва тврђења става постављеног у § 20.

§ 22. Сада лако увиђамо и тачност ових чињеница:

Ако ма које две тачке при кретању равни остају непокретне, онда све тачке равни остају непокретне, тј. кретање је идентитет.

Свака се тачка равни увек може превести кретањем (тј. помоћу два обртања) у сваку другу тачку равни.

Прва чињеница непосредно следује из става у § 20; друга чињеница се добива ако се око сваке тачке опише истински круг који пролази кроз другу тачку; при томе се ови кругови нужно морају сећи.

§ 23. Наш најважнији даљи циљ састоји се у томе да се *уведе појам истинске праве у нашу геометрију и развију особине овог појма неопходне за изграђивање геометрије.*

Ради тога установимо најпре наредне називе. Ако су A, B и A', B' два таква пара слика тачака да се при неком кретању може превести тачка A у A' и истовремено B у B', онда ћемо рећи: *(истинска) дуж* AB *је конгруентна (у знацима* $\equiv$ *) (истинској) дужи* $A'B'$. Даље, *два истинска круга* назваћемо *конгруентним* ако постоји кретање које преводи средиште једног круга у средиште другога и истовремено њих саме преводи један у други.

Под *полуобртом* H око тачке M разумећемо обртање за угао π, тј. обртање које још једном изведено даје идентитет. Ако су A, B, C такве три тачке да A при једном полуобрту око B прелази у C и истовремено такође при овом полуобрту прелази C у A, онда ћемо назвати тачку B *средином дужи* AC.

Дуж AC назваћемо *већом* или *мањом* од дужи AB, према томе да ли тачка C лежи у унутрашњости или ван истинског круга који је описан око тачке A, а пролази кроз тачку B. Да бисмо на сличан начин дефинисали појмове „мање“ и „веће“ за произвољне дужи и произвољне кругове, треба извести кретања помоћу којих почетне тачке дужи одн. средишта кругова падају у исту тачку.

§ 24. Истинска дуж AC има највише *једну* средину; ако би, наиме, за дуж AC постојале две средине и ако означимо полуобртања око ових средина са H_1 и H_2, онда би сложена супституција $H_1 H_2^{-1}$ претстављала кретање које би сваку од тачака A и C остављало непокретном; према томе на основи § 22 добивамо, означавајући идентитет симболички са 1, да је

$$H_1 H_2^{-1} = 1\,, \text{ тј. } H_1 = H_2\,;$$

на тај начин се и саме средине поклапају. Посебно, одавде проистиче даљи став:

Ако су две дужи међу собом конгруентне, онда су и њихове половине конгруентне.

§ 25. За даље извођење потребан нам је овај помоћни став:

Нека тачке $A_1, A_2, A_3, \ldots$ конвергирају према тачки A, а тачке $M_1, M_2, M_3, \ldots$ према тачки M; ако тада уопште при извођењу полуобрта око тачке M_i, тачка A_i прелази у B_i, онда ће исто тако конвергирати тачке $B_1, B_2, B_3, \ldots$ и то према оној тачки B која произилази из тачке A полуобртом око тачке M.

Пре свега увек се може наћи Жорданова област у чијој се унутрашњости налази систем тачака $B_1, B_2, B_3, \ldots$. У то се можемо уверити истим поступком који смо у § 21 применили на систем тачака $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$.

Означимо сад са B^* тачку згушњавања тачака $B_1, B_2, B_3, \ldots$. Тада, на основу аксиоме III, мора постојати такво кретање које преводи тачке A, M, B^* у тачке B^*, M, A, тј. тачка B^* произилази из A полуобртом око тачке M. А пошто и B произилази из A полуобртом око тачке M, то следује да је $B^* = B$, што је и требало доказати.

§ 26. *Нека је* M *средина неке дужи* AB; *шада ћемо доказаши да свака дуж* AC *која је мања од* AB *шакође има средину* N.

Да бисмо то доказали повуцимо ма коју непрекидну Жорданову криву γ од тачке A до M и потражимо за сваку тачку M' ове криве тачку B' тако да M' буде средина дужи AB'; тада је место тачака B', што се може закључити из помоћног става доказаног у § 25, непрекидна крива γ'. Ова крива γ' сигурно долази у тачку A кад тачка M' на кривој γ долази у тачку A. У другом пак случају претпоставимо да је $M_1, M_2, M_3, \ldots$ бесконачан низ тачака на кривој γ које конвергирају према A и да су B_1, B_2, $B_3, \dots$ одговарајуће тачке на кривој γ'. Ако би сада низ тачака B_1, B_2, $B_3, \dots$ имао тачку згушњавања A^* различиту од A, из тога бисмо закључили да постоји кретање које извесне тачке које се налазе у произвољној близини тачке A оставља у произвољној близини те тачке A и у исто време доводи тачку A у произвољну близину тачке A^*. Тада би, дакле, на основу аксиоме III, тачка A при извесном кретању морала остати непокретном и у исто време прећи у тачку A^*, што је немогуће.

Пошто је, према нашој претпоставци, дуж AC мања од AB, то истински круг који је описан око тачке A и који пролази кроз тачку C мора пресецати у некој тачки B' непрекидну криву γ' која везује тачку A са B. Тачка M' која одговара тој тачки на кривој γ јесте средина истинске дужи AB', а пошто је $AC \equiv AB'$, то се подесним обртањем око тачке A може из тачке M' добити тражена средина N дужи AC.

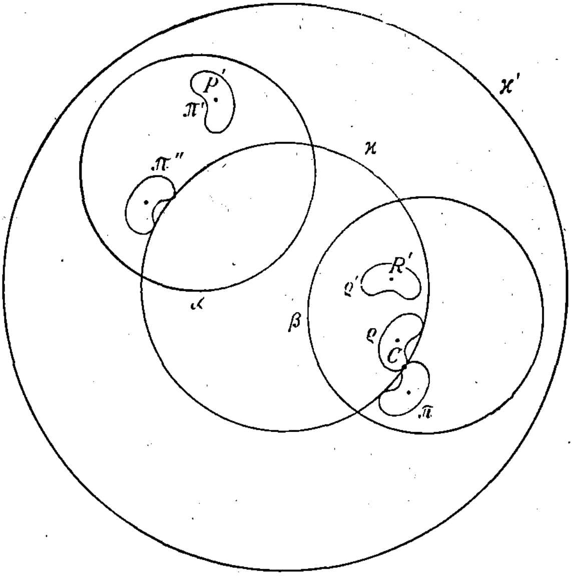
Пошто дуж AC полуобртом око своје средине N прелази у дуж CA, то из горе доказаног става следује:

Дуж AC увек је конгруентна дужи CA — под претпоставком да је дуж AC мања од одређене дужи AB од које смо пошли у почетку овог § 26.

Истовремено увиђамо да, ако тачке C_1, C_2, $C_3, \dots$ конвергирају према тачки A, увек и средине N_1, N_2 $N_3, \dots$ дужи AC_1, AC_2, $AC_3, \dots$ конвергирају према истој тачки A.

§ 27. За наша даља развијања потребни су нам неки ставови о истинским круговима који се додирују, и то пре свега је неопходно *да се конструишу два међу собом конгруентна круга који се додирују споља у једној и само једној тачки.*

Ради тога одаберимо тако мали круг $\varkappa'$ да у његовој унутрашњости не лежи ниједна дуж која би била конгруентна одређеној дужи AB узетој за основу у § 26; став у § 11 показује да је ово сигурно могуће, пошто се иначе тачке A и B могу истовремено произвољно приближавати тачки M. Затим, нека је $\varkappa$ круг који лежи у унутрашњости $\varkappa'$, а око истог средишта као $\varkappa'$. Узмимо сад ма које две тачке на кругу и опишимо око њих међу собом конгруентне кругове α и β тако мале да ма које две тачке на κ које леже у унутрашњости α, никад не могу бити раздвојене ма од којих двеју тачака на κ које леже у унутрашњости β, у смислу распореда тачака на κ. Осим тога ови кругови α и β морају бити тако мали да цели леже у унутрашњости κ′. Тада узмимо тачку P' која лежи у унутрашњости α и ван κ, и тачку R



која лежи у унутрашњости β и у унутрашњости κ, и опишимо око P' и R' међу собом конгруентне кругове π′ и ρ′ који би морали бити тако мали да круг π′ цео лежи у унутрашњости α и ван κ, а да, даље, круг ρ′ цео лежи у унутрашњости β и у унутрашњости κ. Изведимо сад обртање око средишта круга α при коме би круг π′ прешао у круг π″ који споља додирује круг κ: додирне тачке образују систем тачака који ћемо означити са S. Даље, изведимо такво обртање око средишта круга β, при коме би круг ρ′ прешао у круг ρ који круг κ додирује изнутра. Ове тачке додира образују систем тачака који ћемо означити са T.

Пошто услед нашег избора кругова α, β, ниједан пар тачака система S није раздвојен паром тачака система T, то је сигурно могуће обртањем равни око средишта круга $\varkappa$ тако довести до поклапања једну од крајњих тачака система S који лежи на $\varkappa$ са једном крајњом тачком система T који лежи на $\varkappa$ а да остале тачке S прелазе у тачке које су потпуно различите од тачака система T. При овом обртању доспева круг π'' у додир са кругом ρ на тај начин што је тачка C, у којој је поклапање, једина тачка додира. Означимо круг π'' у његовом новом положају са π, а средишта кругова π и ρ са P и R.

Сад ћемо доказати да је додирна тачка C нужно средина између оба средишта P и R. Уствари, с обзиром на избор круга $\varkappa'$, дуж PR мора бити мања од одређене дужи AB и зато, према § 26, сигурно има средину; нека та средина буде тачка C^*. Тада сваки од оба круга π, ρ полуобртом око тачке C^* прелази у други, а зато из сваке тачке једног круга постаје тачка другог круга. Пошто је тачка C заједничка тачка за оба круга π и ρ, то она мора, при једном таквом полуобрту, такође прећи у једну заједничку тачку кругова π и ρ; она мора, зато, остати непокретна при овом полуобрту и самим тим поклопити се са тачком C^* око које је изведено обртање.

Из малочас доказаног става истовремено сазнајемо ове чињенице:

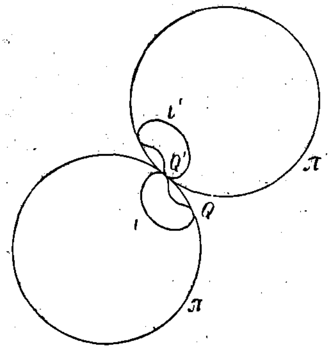
Из круга π, полуобртом око тачке C на π, произилази круг ρ који споља додирује π у тачки C; осим ρ не постоји ниједан други круг који је са π конгруентан и који га споља додирује у тачки C и само у овој тачки.

§ 28. Даље важи став:

Ако круг π обухвата ма који круг ι и додирује га, онда се овај додир дешава само у једној тачки.

Да бисмо то доказали претпоставимо да су Q и Q' две различите додирне тачке кругова ι и π. Изведимо тада полуобрт око тачке Q'; при овом полуобрту круг π прелази у круг π' који додирује π само у тачки Q', а круг ι прелази у кру ι' који лежи у унутрашњости π' и зато, сигурно, цео лежи ван π, додирујући оба круга π и π' само у тачки Q'.

Ако изведемо сад оно обртање око средишта круга π, при коме тачка Q прелази у Q', то ће из круга ι произићи круг ι'' који ће цео лежати у унутрашњости π, а зато, свакако, ван ι', додирујући овај само у тачки Q'. На тај начин добивамо два круга ι и ι'' од којих сваки додирује споља њима конгруентни круг ι' у тачки Q' и то само у овој тачки, што противречи ставу у § 27.



Чињенице, нађене у § 27 и § 28, важе и тада када место кругова π и ρ узмемо мање кругове.

§ 29. Нека је P средиште круга π конструисаног у § 27, Q тачка на π, и, најзад, нека је O произвољна тачка. У том случају можемо, користећи се примедбом на крају § 26 и ослањајући се, као у § 27, на став у § 20, замислити тачку E у таквој близини према O да у унутрашњости круга ι који је описан око средине M дужи OE и који пролази кроз тачке O и E, не постоји ниједна дуж конгруентна са PQ и да исто важи за сваку тачку E' и одговарајући круг ι', ако E' лежи још ближе тачки O него E.[1]

Тада важи став:

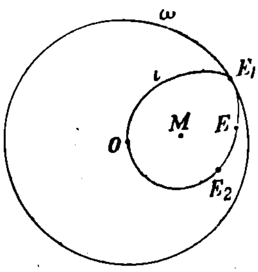
Круг ι (одн. ι') описан око средине M (одн. M') дужи OE (одн. OE'), који пролази кроз тачку O, потпуно је обухваћен кругом са средиштем у тачки O који пролази кроз тачку E (одн. E') и додирнут је њиме само у тачки E (одн. E').

Ради доказа конструишимо најпре око тачке O такав круг ω који круг ι обухвата и истовремено додирује. Овај круг ω мора бити мањи од круга π, јер би у супротном случају круг, описан око тачке O и конгруентан са π, улазио у унутрашњост круга ι, а тада би морала постојати у

---

[1] Одаберимо круг α с центром у O у коме не лежи ниједна дуж конгруентна са PQ; и означимо са E једну тачку на рубу таквог круга око O чије унутрашње и граничне тачке одређују са O дуж чија средина M' лежи у α; круг око M' кроз O конгруентан је ономе око O кроз M'; он зато не садржи ниједну дуж конгруентну са PQ.

унутрашњости круга ι дуж конгруентна са PQ, што је немогуће. Према доказаном ставу у § 28, овај круг ω може имати са ι само једну додирну тачку; нека је та тачка E_1. Ако би тачка E_1 била различита од тачке E, могло би се извести такво обртање око тачке M при коме би тачка E_1 доспела у O; при овом обртању доспела би тада тачка O у неку тачку E_2 круга ι која би морала бити различита од тачке E_1. Пошто је дуж OE_1 конгруентна дужи E_2O, па стога и дужи OE_2, тачка E_2 би морала бити исто тако тачка круга ω; ово противречи околности да би требало да тачка E_1 буде једина заједничка тачка кругова ω и ι; дакле, круг ω пролази кроз тачку E, а тиме је наше тврђење доказано.



§ 30. Узмимо за основу наредних излагања дуж OE конструисану у § 29 и доделимо тачкама O и E бројне вредности 0 и 1; тада конструишимо средину дужи OE и доделимо овој средини бројну вредност $^1/_2$, даље доделимо срединама дужи $(0, ^1/_2)$ и $(^1/_2, 1)$ вредности $^1/_4$ и $^3/_4$ и затим срединама дужи $(0, ^1/_4)$, $(^1/_4, ^1/_2)$, $(^1/_2, ^3/_4)$, $(^3/_4, 1)$ вредности $^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_8$, $^7/_8$; и тако даље. Даље, изведимо са целом дужи $(0, 1)$ полуобрт око тачке O и доделимо уопште оној тачки, која произилази из тачке која одговара броју a, бројну вредност $-a$; затим, изведимо полуобрт око тачке 1 и доделимо уопште оној тачки, која произилази из тачке која одговара броју a, бројну вредност $2-a$ и тако даље; замислимо да се полуобрти наизменично изводе час око тачке O, час око тачке E и да су новопостале тачке одговарајући именоване, док се, најзад, сваки број a не појави додељен одређеној тачки, кад a значи рационалан број чији је именилац степен од 2.

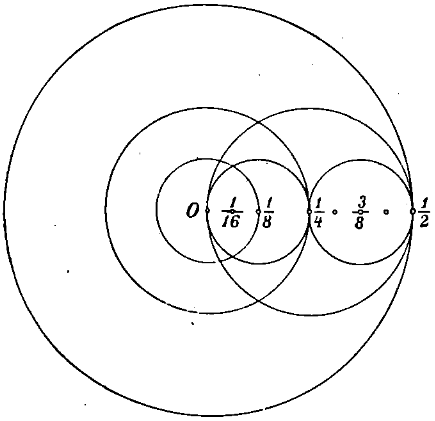
§ 31. Лако ћемо се уверити помоћу овог додељивања у тачност овог закона:

Полуобртом око тачке која припада броју a, свака тачка x прелази у тачку $2a-x$. Према томе, ако прво изведемо полуобрт око тачке $O = 0$, а затим полуобрт око тачке a, то се свака тачка x преображава у тачку $x+2a$.

§ 32. Да бисмо распоредили тачке којима припадају бројеви и да бисмо упоредили дужи њима ограничене, користићемо се ставом постављеним у § 29 о круговима који се додирују на овај начин:

Круг који је описан око тачке 0 и који пролази кроз тачку $^1/_2$ потпуно обухвата круг који је описан око тачке $^1/_4$ и који пролази кроз тачку $^1/_2$; а пошто овај последњи обухвата круг описан око тачке $^1/_8$ који пролази кроз тачку $^2/_8 = {^1/_4}$ и круг описан око тачке $^3/_8$ који пролази кроз тачку $^4/_8 = {^1/_2}$, а овај последњи опет кругове: око $^1/_{16}$ који пролази кроз $^2/_{16} = {^1/_8}$, око $^3/_{16}$ који пролази кроз $^4/_{16} = {^1/_4}$, око $^5/_{16}$ који пролази кроз $^6/_{16} = {^3/_8}$, око $^7/_{16}$ који пролази кроз $^8/_{16} = {^1/_2}$ итд., увиђамо да је дуж $(0, {^1/_2})$ већа од свих дужи $(0, a)$ кад a значи позитивни рационални број чији је именилац степен од 2 и чија је вредност мања од $^1/_2$.

Даље, круг са средиштем у тачки 0 који пролази кроз $^1/_4$, обухвата круг са средиштем у тачки $^1/_8$ који пролази кроз $^2/_8 = {^1/_4}$. Овај други обухваћени круг обухвата, са своје стране, круг описан око тачке $^1/_{16}$, који пролази кроз $^2/_{16}$ и круг описан око $^3/_{16}$, који пролази кроз $^4/_{16}$; ови опет обухватају мање кругове описане око $^1/_{32}$, $^3/_{32}$, $^5/_{32}$, $^7/_{32}$ итд.; из тога дознајемо да је дуж $(0, {^1/_4})$ већа од свих дужи $(0, a)$, кад a значи позитивни рационални број чији је именилац степен од 2 и чија је вредност мања од $^1/_4$.



Затим посматрајмо круг са средиштем у тачки 0, који пролази кроз $^1/_8$; он обухвата круг описан око $^1/_{16}$ који пролази кроз $^2/_{16} = {^1/_8}$, а овај опет обухвата мањи круг описан око $^1/_{32}$ који пролази кроз $^2/_{32} = {^1/_{16}}$ итд.; отуда закључујемо да је дуж $(0, {}^1/_8)$ већа од свих дужи $(0, a)$ кад је a позитивни рационални број чији је именилац степен од 2 и чија је вредност мања од ${}^1/_8$. Продужујући овај поступак закључивања добивамо овај општи резултат:

Ако је a позитивни рационални број чији је именилац неки степен од 2 и чија је вредност мања од $\frac{1}{2^m}$, биће дуж $(0, a)$ увек мања од дужи $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$.

§ 33. Сада можемо редом доказати наредне помоћне ставове:

Тачке које одговарају бројевима ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_8$, ${}^1/_{16}, \ldots$ конвергирају према тачки 0.

Ако узмемо супротан случај, пошто се дужи $(0, {}^1/_2)$, $(0, {}^1/_4)$, $(0, {}^1/_8)$, $(0, {}^1/_{16}), \ldots$ стално смањују, морале би тачке ${}^1/_2$, ${}^1/_4$, ${}^1/_8$, ${}^1/_{16}, \ldots$ имати своје место згушњавања на неком одређеном истинском кругу $\varkappa$ са средиштем у тачки 0. Нека је, например, $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \ldots$ низ тачака које конвергирају према тачки K на $\varkappa$; нека тада тачке

$$\frac{1}{2^{n_1+1}}, \quad \frac{1}{2^{n_2+1}}, \quad \frac{1}{2^{n_3+1}}, \ldots$$

имају место згушњавања у тачки K^*. Из става у § 25 следује да тада K^* мора бити средина дужи OK; а овај закључак, на основи става доказаног на крају § 27, противречи околности да тачка K^* мора лежати и на кругу $\varkappa$.

§ 34. *Нека су $a_1, a_2, a_3, \ldots$ позитивни рационални бројеви чији су имениоци степени од 2. Ако тада бескрајни бројни низ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ конвергира према 0, то ће и низ тачака које одговарају овим бројевима, такође конвергирати према тачки 0.*

Да бисмо ово доказали, одаберимо целе експоненте n_1, n_2, $n_3, \ldots$ тако да буде

$$a_1 < \frac{1}{2^{n_1}}, \quad a_2 < \frac{1}{2^{n_2}}, \quad a_3 < \frac{1}{2^{n_3}}, \ldots$$

и да низ бројева $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \dots$ исто тако конвергира према 0. Како према ставу у § 32, свака тачка a_i лежи у унутрашњости круга описаног око тачке 0 који пролази кроз тачку $\frac{1}{2^{n_i}}$, а пошто, према помоћном ставу доказаном у § 33, кругови описани око тачке 0 који пролазе кроз тачке $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \dots$ конвергирају према 0, то отуда непосредно следује тврђење које је требало доказати.

§ 35. Најзад важи наредни став:

Нека $a_1, a_2, a_3, \dots$ буде бескрајни низ рационалних бројева чији су имениоци степени од 2 и нека ти бројеви конвергирају према неком реалном броју a: тада одговарајуће им тачке $a_1, a_2, a_3, \dots$ исто тако конвергирају према некој одређеној тачки.

Ради доказа претпоставимо супротно. Нека су, например, V' и V'' две међу собом различите тачке згушњавања $a_1, a_2, a_3, \dots$, и то нека тачке $a_{1'}, a_{2'}, a_{3'}, \dots$ конвергирају према V', а тачке $a_{1''}, a_{2''}, a_{3''}, \dots$ према тачки V''. Према примедби у § 31, за сваку тачку a_k постоји кретање сложено од два полуобрта, које уопште преводи тачку $a_{i'}$ у тачку $a_{i'} - a_k$ и истовремено тачку $a_{i''}$ у тачку $a_{i''} - a_k$, а пошто бројне вредности $a_{i'} - a_k$ и $a_{i''} - a_k$ са растућим индексима долазе произвољно близу 0, то увиђамо, с обзиром на став у § 34, да постоје кретања која тачку произвољно блиску тачки V и истовремено тачку произвољно блиску тачки V'' доводе у произвољну близину тачке 0. А то је немогуће с обзиром на аксиому III, што се лако показује помоћу једног често примењиваног поступка закључивања.

§ 36. Ако сада тачки према којој конвергирају тачке $a_1, a_2, a_3, \dots$, доделимо бројну вредност a, тиме ће уопште свакој реалној бројној вредности бити додељена одређена тачка наше равни; систем свих ових тачака назваћемо *истинском правом, тако да се под овом истинском правом разуме онај систем тачака који произилази из тачака O, E ако се непрестано узимају средине, изводе полуобрти и додаду тачке* *нагомилавања свих добивених тачака. Све системе тачака добивене кретањем из ове истинске праве, назваћемо исто тако истинским правима. Истинска права се раздељује сваком својом тачком у две полуправе.*

§ 37. Користећи се помоћним ставом у § 25, лако ћемо увидети да полуобртом наше истинске праве око произвољне тачке a, тачка x прелази у тачку $2a-x$; при извођењу два полуобрта око тачке 0 и око тачке a, тачка x прелази у $x+2a$.

На основу става у § 35 лако закључујемо да и тада, кад су $a_1, a_2, a_3, \ldots$ произвољни конвергентни бројеви према a, одговарајуће тачке $a_1, a_2, a_3, \ldots$ увек конвергирају према одговарајућој тачки a, тј. *истинска права је непрекидна крива.*

§ 38. Размотримо претпоставку да постоје две бројне вредности a и b које на истинској правој претстављају исту тачку P. Тачка $\frac{a+b}{2}$ је средина дужи (a, b); она би се зато морала поклопити са тачком P. Исто би тада морало важити за средине дужи $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, тј. за тачке $\frac{3a+b}{4}$ и $\frac{a+3b}{4}$. Узимајући непрестано средине, увиђамо да би све тачке $\frac{A_n a + B_n b}{2^n}$, где A_n, B_n значе позитивне целе бројеве са збиром 2^n, морале бити идентичне са P; а из овог, према § 37, следује да уопште сви реални бројеви који леже између a и b морају одговарати истој тачки P праве. Ова противречност показује да *истинска права нема ниједну двојну тачку.* Исто тако увиђамо и то да се *истинска права не може сама у себе повратити.*

§ 39. *Две праве имају највише једну заједничку тачку.*

Уствари, ако би оне имале две заједничке тачке A и B и ако би на једној правој овим тачкама одговарале бројне вредности a, b, а на другој правој бројне вредности a', b', то би се, према § 24, и средине $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a'+b'}{2}$ морале међу собом поклопити. Продужујући да узимамо средине, као у § 38, на сличан начин долазимо до закључка да су све тачке које леже на обе праве између a и b одн. a' и b' међу собом идентичне, а тиме саме ове праве међу собом идентичне.

§ 40. *Наша истинска права сече сваки круг описан око њене једне тачке, рецимо, око тачке* 0.

Уствари, ако претпоставимо супротно, могућа су само два случаја: или постоји одређени круг $\varkappa$ који има центар у тачки 0 и који још погађа истинска права g, док кругове око 0 који обухватају круг $\varkappa$ права g више не погађа; или постоји одређени круг $\varkappa$ који права g не погађа, док све кругове који леже у унутрашњости $\varkappa$ са центром у тачки 0 права g погађа.

Пошто права g, према својој конструкцији, може увек преко сваке своје тачке бити продужена и, како је то било показано у § 38, не може имати ниједну двојну тачку, то би у првом случају сигурно морао постојати у унутрашњости $\varkappa$ круг са центром у 0, који права g пресеца у двема тачкама A и B на истој страни од 0, при чему се тачка B узима на продужењу праве g иза A и довољно блиско према A у унутрашњости $\varkappa$. Изведемо ли сад обртање око тачке 0, при чему би тачка A прешла у B, наша права g би при томе прешла у другу праву која пресеца праву g осим у тачки 0 још и у тачки B; према доказаном ставу у § 39, ово је немогуће.

У другом пак случају означимо на кругу $\varkappa$ ону тачку са K у чију произвољну близину доспева истинска права g. Опишимо тада око тачке K истински круг π^* који је мањи од $\varkappa$ и који пресеца праву g, рецимо, у тачки M. Затим, опишимо око тачке M круг π који би био већи од π^*, а мањи од $\varkappa$. Овај круг π, пошто је већи од π^*, садржи у унутрашњости тачку K, то из наше претпоставке, у вези са претходно доказаним, следује да се права g која пролази кроз тачку M, непрекидно простире у унутрашњости π, и продужена на једну или другу страну излази кроз неку тачку на π ван круга π и затим се више не враћа у круг π. Пошто, с друге стране, права g треба да се произвољно приближи тачки K која лежи у унутрашњости π, то би она морала садржати и саму тачку K; а то противречи претпоставци од које смо пошли.

Пошто систем свих кругова, описаних око неке произвољне тачке, покрива без празнина целу раван, то из претходног истовремено следује да се *ма које две тачке наше равне геометрије могу спојити истинском правом.*

§ 41. Сад имамо да покажемо да *аксиоме подударности важе у нашој равној геометрији.*

Изаберимо ради тога неки одређени истински круг $\varkappa$ и уведимо, према § 18, за његове тачке параметарско претстављање помоћу угла ω; тада се, кад ω добива вредности од 0 до 2π, истински круг обилази у одређеном смеру. Из овога увођења следује за сваки други круг, конгруентан са $\varkappa$, исто тако одређени смер обилажења, наиме онај смер који се добива, ако, помоћу два узастопна изведена обртања, према § 22, поклопимо средиште круга $\varkappa$ са средиштем датог круга. Пошто, с обзиром на дефинисани појам кретања у почетку ове расправе, није могуће поклопити круг $\varkappa$ са самим собом у обрнутом смеру обилажења, то стварно постоји за сваки круг један одређени смер обилажења.

Узмимо сад две полуправе које излазе из једне тачке M, а које заједно не чине истинску праву; опишимо око тачке M круг, конгруентан са $\varkappa$ и фиксирајмо онај комад тог круга исечен тим полуправима који одговара параметарском интервалу мањем од броја π. Установљени смер обилажења води тада у унутрашњост фиксираног лука круга од једне полуправе ка другој полуправој; прву полуправу назваћемо десним, а другу полуправу левим краком угла између обе полуправе, док ће нам сам интервал ($<\pi$) служити као мера за овај угао. Тада из нашег појма кретања следује први став о подударности двају троуглова у оваквом облику:

Ако за два троугла ABC и $A'B'C'$ важе подударности

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C',$$

и ако су, даље, AB и $A'B'$ десни, AC и $A'C'$ леви краци углова $\sphericalangle BAC$, одн. $\sphericalangle B'A'C'$, то увек важе подударности

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad и \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B',$$

$$BC \equiv B'C'.$$

§ 42. Пошто смо у §§ 30—40 дефинисали истинску праву и извели њене особине, треба да разликујемо два случаја:

Претпоставимо, прво, да постоји само *једна* права која пролази кроз дату тачку и не пресеца дату праву (аксиома паралелних). У том случају за нашу раван важе све аксиоме равни које сам поставио у главноме делу ове књиге (гл. I), само што треба узети аксиому III_5 у ужем значењу како је формулисана у § 41. Но и при овој ужој формулацији последње аксиоме подударности нужно се добива Еуклидова равна геометрија (упореди додатак II, стр. 124 као и гл. I, стр. 29—30).

Друго, претпоставимо да кроз сваку тачку A постоје две полуправе које заједно не сачињавају исту праву и које не секу дату праву g, док свака полуправа која лежи у унутрашњости угла који образују дате полуправе и која полази из тачке A, пресеца праву g; нека при томе тачка A лежи ван g.

Ако се тада искористи непрекидност, добива се да, и обрнуто, ма којим двема полуправима које полазе из тачке A и не сачињавају заједно исту праву, увек одговара одређена права g која ове две полуправе не пресеца, а сече сваку полуправу која полази из тачке A и простире се у унутрашњости угла између двеју датих полуправих. При овим условима добива се тада равна геометрија Бољаи-Лобачевскога, чак и кад узмемо за основу аксиому конгруенције III_5 у њеној ужој формулацији, што се може показати помоћу мог рачуна „крајевима“.[1]

У закључку бих хтео да укажем на карактеристичну разлику између овог заснивања геометрије и оног заснивања које сам покушао да дам у главном делу ове књиге. Тамо сам се придржавао таквог распореда аксиома при коме је

---

[1] Уп. моју расправу: „Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskyschen Geometrie“, додатак III ове књиге. Тамо наведени поступак доказивања треба, с обзиром на садашњи циљ, на подесан начин изменити, наиме, треба увести непрекидност, а изоставити коришћење става о једнакости углова на основици равнокраког троугла. Да бисмо добили ставове о сабирању крајева (стр. 155—157), треба сабирање посматрати као гранични случај обртања равни, када се тачка обртања помера на правој у бесконачно ст

непрекидност захтевана на последњем месту, иза свих осталих аксиома, тако да се при томе природно у првом реду јавља питање уколико су познати ставови и докази елементарне геометрије независни од захтева непрекидности. Напротив, у претходном истраживању захтева се непрекидност на првом месту, пре свих осталих аксиома, помоћу дефиниције равни и кретања тако да би се овде најважнији задатак састојао у томе да се нађе најмањи број захтева, из којих би се могли, при најширем коришћењу непрекидности, добити елементарни геометриски облици (круг и права) и њихове нужне особине за изграђивање геометрије. И стварно, претходно истраживање је показало да су за ово довољни захтеви исказани у горњим аксиомама I–III.

Гетинген, 10 мај 1902.

Додатак V

О површинама константне Гаусове кривине

О површинама негативне константне кривине

По Белтрами-у[1] (Beltrami) површина негативне константне кривине остварује део равни Лобачевскога (нееуклидске равни) ако се као праве у равни Лобачевскога узму геодезиске линије те површине константне кривине, а као дужине и углови у равни Лобачевскога — стварне дужине и углови на тој површини. Међу досад испитиваним површинама негативне константне кривине не налазимо ниједну која би се простирала непрекидно и непрекидно мењала своју тангентну раван у околини сваке своје тачке; напротив, све досад познате површине константне негативне кривине имају сингуларне линије, преко којих није могуће непрекидно продужавати те површине са непрекидном променом тангентне равни. Из овог разлога не успева да се оствари, ниједном досад познатом површином негативне константне кривине, цела раван Лобачевског, и изгледа нам да је од принципског интереса питање *да ли се може уопште претставити цела раван Лобачевскога на Белтрамијев начин помоћу аналитичке*[2] *површине негативне константне кривине.*

---

[1] Giornale di Mathematiche, књ. 6, 1868.

[2] Ради простијег излагања претпостављам овде да посматрана површина има аналитички карактер, мада и извођење доказа и добивени резултат (уп. стр 216) остају да важе и тада, ако у једначини (1) $\mathfrak{P}(x, y)$ означава довољно пута диференцијабилну неаналитичку функцију од x, y. Да стварно постоје, у смислу теорије површина, неаналитичке регуларне површине константне негативне кривине (које се, према ставу који ће бити доцније доказан, не простиру свуда непрекидно са непрекидном променом тангентне

Да бисмо одговорили на ово питање, поћи ћемо од претпоставке аналитичке површине негативне константне кривине -1, која се у коначном свуда регуларно понаша и нема сингуларних места; тада ћемо показати да ова претпоставка води противречности. Таква површина какву претпостављамо, потпуно је карактерисана овим исказом:

Свако место нагомилавања тачака површине које лежи у коначном, такође је тачка те површине.

Ако је O ма која тачка те површине, увек је могуће правоугле координатне осе x, y, z поставити тако да тачка O буде почетна тачка координатног система и да једначина површине у околини ове тачке O гласи

$$z = ax^2 + by^2 + \mathfrak{P}(x, y), \tag{1}$$

где константе a и b задовољавају релацију:

$$4\,ab = -1,$$

а степени ред $\mathfrak{P}(x, y)$ садржи само чланове треће или виших димензија у односу на x и y. Очигледно је тада z-оса нормала површине, а осе x и y дају правце који су одређени главним кривинама површине.

Једначина

$$ax^2 + by^2 = 0$$

одређује обе главне тангенте површине кроз тачку O која лежи у xy-равни; зато су те тангенте увек одвојене једна од друге и показују правце у којима се простиру обе асимптотске линије површине кроз произвољну тачку O. Свака од ових асимптотских линија припада некој породици асимптотских линија које покривају регуларно и без празнина целу околину тачке O на површини. Зато, ако схватимо под u и v довољно мале вредности, можемо, свакако, извести наредну конструкцију. Пренесимо на једну од двеју асимптотских линија, које пролазе кроз тачку O, параметарску вредност u као дужину, кроз добивену крајњу тачку повуцимо другу

равни), доказао је на мој потстицај Г. Литкемајер (G. Lütkemeyer) у својој дисертацији: Über den analytischen Charakter der Integrale von partiellen Differentialgleichungen, Göttingen 1902.

могућу асимптотску линију и пренесимо на њу параметарску вредност v као дужину: тако добивена крајња тачка је тачка површине која је једнозначно одређена вредностима параметара u и v. Схватимо ли, сходно томе, правоугле координате x, y, z површине као функције од u и v, стављајући

$$x = x\,(u, v), \quad y = y\,(u, v), \quad z = z\,(u, v),$$

онда су ове, свакако, за довољно мале вредности од u и v регуларне аналитичке функције од u и v.

Позната теорија површина константне кривине -1 пружа нам, даље, ове чињенице:

Ако φ означава угао између двеју асимптотских линија које пролазе кроз тачку u, v, онда три основне величине површине добивају вредности:

$$e \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$f \equiv \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \cos\varphi,$$

$$g \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

и, зато, квадрат извода дужине лука произвољне криве на тој површини по неком параметру t добива облик:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\cos\varphi\,\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \tag{2}$$

Угао φ као функција од u и v задовољава парцијалну диференцијалну једначину

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = \cos\varphi.^{1)} \tag{3}$$

---

¹) Најпре сам ја доказао, на основу ове формуле, немогућност површине константне негативне кривине без сингуларитета (Transactions of the Americain Math. Society, Vol. 2, 1901); затим је Е. Холмгрен (E. Holmgren) дао више аналитички доказ за овај став исто тако ослањајући се на формулу (3) Comptes rendus, Paris, 1902). Овде изложена прерада Холмгреновог доказа, надовезује се на излагања које је дао В. Блашке (W. Blaschke) у својој књизи Диференцијална геометрија I, § 80 (1921). У вези са мојим првобитним доказом треба погледати излагања Л. Бибербаха (L. Bieberbach) (Acta mathematica, књ. 48).

Ако се одрекнемо једнозначне кореспонденције између пара вредности u, v и тачака површине, изведена конструкција може се проширити на произвољне вредности од u, v. Свакако, u-линија која пролази кроз тачку O може евентуално бити затворена; но ипак, на основу учињене претпоставке о површини (стр. 211), може се на ову линију, од тачке O на обе стране, пренети произвољно велика дужина. Дакле, свакој вредности од u одговара тачка на асимптотској линији.

Посматрајмо сад у свакој таквој тачки P другу асимптотску линију која пролази кроз њу. Узећемо на овој линији као параметар v дужину лука рачунату од тачке P (у једном смеру); опет се могу пренети на обе стране од P произвољно велике дужине на асимптотску линију.

Сваком пару вредности u, v одговара, на тај начин, једнозначно — али у општем случају нипошто узајамно једнозначно — нека тачка наше равни. Тако добивамо, геометриски казано, пресликавање целе Еуклидове равни (u, v) на неку површину суперпозиције наше дате површине или на њен део.

Сад, пре свега, треба показати да је свака u-линија на нашој површини асимптотска линија и да параметар u на овој линији претставља дужину лука.

За линију $v = 0$ то већ знамо. Даље, на основу формуле (2) за линиски елемент, то важи за комаде v-линија које припадају околини тачке $(u, 0)$.

За општи доказ довољно је показати ово:

Ако је a позитиван број, а b произвољан реалан број, онда је слика сваке дужи

$$-a \leqq u \leqq +a, \quad v = b$$

на нашој површини комад асимптотске линије или низ комада на њој, а u претставља на овој линији дужину лука.

Овај став је пре свега тачан за $b = 0$. Даље се доказује:

1. Ако став важи за $b = b_0$, онда он важи и за свако b које се довољно мало разликује од b_0.

2. Ако став важи за $b_1 < b < b_2$, онда он важи и за $b = b_1$ и за $b = b_2$.

Доказ тога се изводи помоћу искоришћавања непрекидности и примене Хајне-Бореловог (Heine, Borel) става о покривању.

Тиме је тада изведен доказ за свако b.

Означава ли сад $\varphi = \varphi(u, v)$ (као и на стр. 212) угао између двеју асимптотских линија које пролазе кроз тачку (u, v) површине, при чему је угао рачунат од позитивног u-смера до позитивног v-смера, онда је $\varphi(u, v)$ за све вредности u, v дефинисана непрекидна функција и има непрекидне парцијалне изводе који задовољавају диференцијалну једначину (3).

Помоћу подесног избора позитивног u- и v- смера можемо, свакако, постићи да у тачки $u = v = 0$ важе једначине:

$$0 < \varphi < \pi \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \geqq 0 .$$

Пошто φ нигде није ни 0, ни π, мора бити, због непрекидности функције $\varphi(u, v)$, за све вредности u, v:

$$0 < \varphi(u, v) < \pi ,$$

дакле

$$\sin \varphi > 0 .$$

Али функција $\varphi(u, v)$ са оваквим особинама не може постојати.

Јер из диференцијалне једначине

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \sin \varphi$$

следује најпре да је

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} > 0 ,$$

и, зато, $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ при растућем v расте.

Нарочито мора бити

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,1) > \frac{\partial \varphi}{\partial u}(0,0) \geqq 0 ,$$

а зато се може одредити позитивна величина a тако да за $0 \leqq u \leqq 3a$ буде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, 1) > 0 .$$

Нека m означава позитивни минимум од

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, 1) \quad \text{за} \quad 0 \leqq u \leqq 3a.$$

Тада је за $v \geqq 1$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(a, v) - \varphi(0, v) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\vartheta a, v) \cdot a \geqq \\ &\geqq \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\vartheta a, 1) \cdot a \geqq m \cdot a \end{aligned}\right\} (0 < \vartheta < 1)$$

и, исто тако

$$\varphi(3a, v) - \varphi(2a, v) \geqq m \cdot a,$$

дакле

$$\varphi(a, v) \geqq \varphi(0, v) + m \cdot a > m \cdot a$$

и

$$\varphi(2a, v) \leqq \varphi(3a, v) - m \cdot a < \pi - m \cdot a.$$

Даље је за

$$0 \leqq u \leqq 3a, \quad v \geqq 1:$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \geqq \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, 1) > 0;$$

дакле, $\varphi(u, v)$ монотоно расте заједно са u. Зато за

$$a \leqq u \leqq 2a, \quad v \geqq 1$$

важи:

$$0 < m \cdot a < \varphi(a, v) \leqq \varphi(u, v) \leqq \varphi(2a, v) < \pi - m \cdot a,$$

дакле

$$\sin \varphi(u, v) > \sin(m \cdot a) = M,$$

при чему је $M > 0$ и независно од u, v.

Према томе је вредност двоструког интеграла

$$\iint \sin \varphi(u, v)\, du\, dv,$$

примењеног на правоугаоник са теменима

$$(a, 1), \quad (2a, 1), \quad (2a, V), \quad (a, V) \qquad (V > 1)$$

већа од

$$M \cdot a(V - 1),$$

дакле, при подесном избору V већа од π.

С друге стране, из диференцијалне једначине (3) добива се

$$\iint \sin \varphi \, du \, dv = \int_{a}^{2a} \int_{1}^{V} \frac{\partial^2 \varphi}{du \, dv} \, du \, dv =$$

$$= [\varphi(2a, V) - \varphi(a, V)] - [\varphi(2a, 1) - \varphi(a, 1)] < \pi,$$

пошто је

$$\varphi(2a, V) - \varphi(a, V) < \varphi(2a, V) < \pi$$

и

$$\varphi(2a, 1) - \varphi(a, 1) > 0.$$

Дошли смо, дакле, до противречности и зато смо принуђени да одбацимо нашу у почетку усвојену претпоставку, тј. увиђамо *да не постоји аналитичка површина константне негативне кривине која би била без сингуларитета и свуда регуларна. Зато, посебно, треба одговорити негативно на постављено питање у почетку да ли се може на Белтрамијев начин остварити цела раван Лобачевског помоћу регуларне аналитичке површине у простору.*

О површинама позитивне константне кривине[1].

У почетку овог истраживања пошли смо од питања о површини негативне константне кривине која би се свуда у коначном простирала регуларно аналитички и дошли смо до резултата да таква површина не постоји. Сад ћемо обрадити помоћу аналогне методе исто питање за позитивну константну кривину. Очигледно, сфера је затворена површина позитивне константне кривине без сингуларитета и према доказу који је извео Х. Либман[2] (H. Liebmann), на мој потстицај, не

---

[1] Питање о могућности остварења не-еуклидске елиптичне равне геометрије помоћу тачака свуда непрекидно искривљене површине, истраживао је на мој предлог В. Бој (W. Boy), „Über die Curvatura integra und Topologie geschlossener Flächen", Inauguraldissertation, Göttingen 1901 и Math. Ann. књ. 57, 1903. В. Бој је дао у овом раду тополошки врло интересантну једнострану затворену површину која цела лежи у коначном, која, изузев затворене двоструке криве са троструком тачком, у којој се омотачи површине продиру, не показује никакав сингуларитет и има повезаност не-еуклидске елиптичке равни.

[2] Göttinger Nachrichten 1899, стр. 44. Упореди такође интересантне радове истог писца у Math. Ann., књ. 53 и 54.

постоји никаква друга затворена површина истог својства. Ову ћемо чињеницу сада извести из једног става који важи за произвољни комад површине позитивне константне кривине[1] без сингуларитета и овако гласи:

Нека је на површини позитивне константне кривине $+1$ *ограничено у коначноме неко једноструко или вишеструко повезано подручје без сингуларитета; замислимо тада да су у свакој тачки овог подручја, као и у тачкама његове границе, конструисани главни полупречници кривине површине, онда већи од главних полупречника кривине сигурно не достиже свој максимум и, зато, мањи не достиже свој минимум ни у једној тачки која лежи у унутрашњости подручја — осим ако је наша површина део сфере полупречника 1.*

Ради доказа приметимо најпре да је, услед наше претпоставке, производ оба главна полупречника кривине свуда $=1$, а зато већи од главних полупречника кривине увек мора бити $\geqq 1$. Из овог разлога максимум већих главних полупречника кривине очигледно је само тада $=1$, ако су оба главна полупречника кривине у свакој тачки нашег комада површине $=1$. У овом нарочитом случају свака тачка тога комада површине је пупчаста тачка и отуда се на познати начин лако закључује да посматрани комад површине мора бити комад сфере полупречника 1.

Нека је сад максимум већег од оба главна полупречника кривине наше површине >1; тада ћемо претпоставити, насупрот нашем тврђењу, да постоји тачка O у унутрашњости тога комада површине, у којој се тај максимум постиже. Пошто ова тачка O сигурно не може бити пупчаста а, поврх тога, регуларна је тачка наше површине, то ће околина ове тачке бити покривена сваком од породица линија кривине површине једноструко и без празнина. Узмемо ли ове линије кривине за координатне линије, а саму тачку O за почетак тог криволиниског координатног система, то ће,

---

[1] Г. Литкемајер у својој дисертацији, цитираној на стр. 211 , и Е. Холмгрен у Math. Ann. књ. 57 успели су да докажу аналитички карактер површина константне позитивне кривине.

према познатој теорији површина позитивне константне кривине, важити ове чињенице[1]:

Нека r_1 означава већи од оба главна полупречника кривине за тачку (u, v) која лежи у околини почетне тачке $O=(0,0)$; у овој околини је $r_1>1$. Ставимо

$$\rho=\frac{1}{2}\log\frac{r_1+1}{r_1-1};$$

тада позитивна реална величина ρ као функција од u и v задовољава наредну парцијалну диференцијалну једначину

$$(4) \qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}=\frac{e^{-2\rho}-e^{2\rho}}{4}.$$

Пошто кад r_1 опада функција ρ нужно расте, то ρ, као функција од u и v, мора на месту $u=0$, $v=0$, имати минималну вредност, па према томе ρ развијено по степенима променљивих u и v има нужно облик:

$$\rho=a+\alpha u^2+2\beta uv+\gamma v^2+\cdots,$$

где a, α, β, γ означавају константе, при чему квадратна форма

$$\alpha u^2+2\beta uv+\gamma v^2$$

за реално u и v никад не сме имати негативну вредност. Из ове последње околности за константе α и γ нужно следују неједначине:

$$(5) \qquad \alpha\geqq 0 \quad \text{и} \quad \gamma\geqq 0.$$

Унесимо, с друге стране ρ развијено у ред у диференцијалну једначину (4); за $u=0$ и $v=0$ добићемо тада:

$$2(\alpha+\gamma)=\frac{e^{-2\alpha}-e^{2\alpha}}{4}.$$

Пошто константа a претставља вредност од ρ у тачки $O=(0,0)$ и, према томе, испада позитивна, биће израз са десне стране свакако <0; зато последња једначина води неједначини

$$\alpha+\gamma<0,$$

---

[1] Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, књ. 3, Nr. 776; Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, § 264.

која стоји у противречности са неједначинама (5). Тиме смо сазнали да је наша првобитна претпоставка, по којој би место максимума лежало у унутрашњости комада површине, незаснована; самим тим је доказана тачност горе постављеног става.

Отуда, као што је већ горе поменуто, непосредно следује став *да затворена површина са позитивном константном кривином* 1 *без сингуларитета увек мора бити сфера полупречника* 1. Овај резултат истовремено показује да се сфера као целина не може извити, а да се на површини нигде не појави сингуларитет.

Најзад, ово истраживање доводи за незатворену површину до резултата: ако замислимо из површине лопте исечен произвољни комад, па тај комад произвољно извијемо, онда се максимум свих већих главних полупречника кривина, добивених на тај начин, увек налази на граници тога комада површине.

Гетинген, 1900.

Допуна I[1]

Систем аксиома за реалне бројеве, наведен у § 13, узет је углавном из Хилбертовог предавања „О појму броја“ Jahrb. d. Deutsch. Math. Ver. 8 (1900), у коме су они, у § 13 као ставови набројани, захтеви исказани као аксиоме. Из тог предавања навешћемо овде наредне примедбе:

1. Егзистенција броја 0 (став 3, стр. 47) је последица ставова 1 и 2 и асоцијативног закона сабирања.

2. Егзистенција броја 1 (став 6, стр. 48) је последица ставова 4 и 5 и асоцијативног закона множења.

3. Комутативни закон сабирања (став 8, стр. 48) последица је ставова 1 – 6 и асоцијативног закона сабирања и оба дистрибутивна закона: Наиме биће

$$\begin{aligned}(a+b)(1+1) &= (a+b)1+(a+b)1 = a+b+a+b,\\ &= a(1+1)+b(1+1) = a+a+b+b;\end{aligned}$$

према томе

$$a+b+a+b = a+a+b+b,$$

и стога према ставу 2

$$b+a = a+b.$$

Да се комутативни закон множења (став 12, стр. 48) може извести из ставова 1—11, 13 – 16 и 17 (Архимедов став), али не може без коришћења става 17, показано је у §§ 32, 33.

П. Бернајс

Допуна II

Упрошћено заснивање науке о пропорцијама

Оно заснивање науке о пропорцијама без коришћења Архимедове аксиоме, тј. на основу аксиома I—IV, које је дато у трећој глави §§ 14 – 16, може се упростити.

---

[1] Све три допуне је превео Т. Анђелић.

Користимо оне на почетку § 15 стр. 55—56 уведене ознаке за дужи, једнакост дужи, збир дужи као и тамо забележену чињеницу да за збир дужи важи асоцијативни и комутативни закон.

Као размеру $a : b$ дужи a, b дефинишемо сад угао (једнозначно одређен у смислу конгруенције), који у правоуглом троуглу коме су катете a, b лежи наспрам катете a. Кажемо, да су размере једнаке, ако су подударни углови који их дефинишу, и у овом смислу пишемо „пропорцију (сразмеру)“ $a : b = c : d$. Према томе, одмах важи да је свака размера дужи сама себи једнака и да су две размере дужи, једнаке некој трећој, и међу собом једнаке, као и:

ако је $a = c$ и $b = d$, онда је $a : b = c : d$.

На основу става о збиру углова у троуглу важи осим тога:

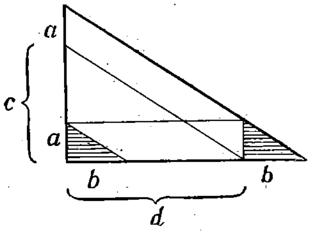
ако је $a : b = c : d$, онда је $b : a = d : c$.

Даље се помоћу аксиома III_5 и IV (види слику) добива став:

ако је $a : b = c : d$, онда је $a : b = (a+c) : (b+d)$,

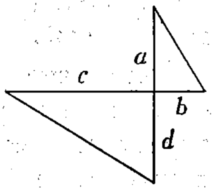
и на основу става о спољашњем углу:

ако је $a : b = a : c$, онда је $b = c$.



Из последњег става посебно произлази, да за три дужи a, b, c може постојати само једна четврта пропорционала, тј. само једно решење x пропорције $a : b = c : x$. Егзистенција четврте пропорционале проистиче из могућности преношења углова у вези са аксиомом паралелних.

Став о међусобној разменљивости унутрашњих чланова у некој пропорцији, тј. исказ: ако је $a : b = c : d$, онда је $a : c = b : d$, добива се посматрањем два правоугла троугла, који имају катете a, b одн. c, d а тако су постављени, да катета c другог троугла лежи у продужењу катете b првог троугла преко темена правог угла, а исто тако d у продужењу a (види слику). Овде на основу претпостављене пропорције крајеви обе хипотенузе леже на кругу, што се закључује из става о једнакости перифериских углова над истим луком, одн. из њему обрнутог става. Из овог става онда произлази и пропорција: $a : c = b : d$ посматрањем троуглова са катетама a, c и b, d[1].



Као последица међусобне разменљивости унутрашњих чланова пропорције посебно добива се састављивост пропорција:

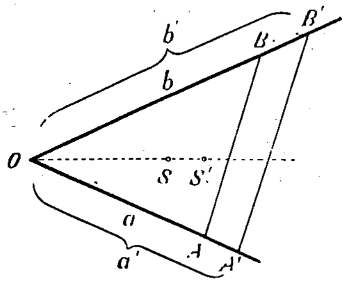
ако је $a : b = a' : b'$ и $b : c = b' : c'$, онда је и $a : c = a' : c'$.

Наиме из датих пропорција добива се разменом унутрашњих чланова $a : a' = b : b' = c : c'$ па тиме $a : c = a' : c'$,

Узимањем у обзир егзистенције четврте пропорционале добива се наредно друго правило о састављању пропорција:

ако је $a : b = b' : a'$ и $b : c = c' : b'$, онда је и $a : c = c' : a'$.

Наиме, ако је u четврта пропорционала за a, b, c', тако да буде $a : b = c' : u$ важиће на основу ове претпоставке $c' : u = b' : a'$, дакле $c' : b' = u : a'$ и даље $u : a' = b : c$, а онда се састављањем пропорција $c' : u = a : b$ и $u : a' = b : c$ (према претходном правилу) добива: $c' : a' = a : c$.



Сад треба доказати основни став науке о пропорцијама који гласи: Ако две праве отсецају дужи a, a' одн. b, b' на крацима произвољног угла, онда важи пропорција $a : a' = b : b'$. Доказ се изводи (на одговарајући начин као доказ става 41 у § 16) помоћу става, да се симетрале углова троугла секу у једној тачки. Овај став се примењује на троугле OAB и $OA'B'$, где је O теме уоченог угла а A, B

---

[1] Овај ток доказа узет је из уџбеника „Питања која се односе на елементарну геометрију“ од Ф. Енриквеса (F. Enriques).

одн. A', B' су тачке у којима једна и друга од две паралелне сече краке угла, и где је даље $OA = a$, $OB = b$, $OA' = a'$, $OB' = b'$ (види слику). Нека S буде пресек симетрала углова у троуглу OAB, а S' у троуглу $OA'B'$; тада S има исто растојање r од правих OA и OB, а исто тако има S' исто растојања r' од ових правих. Показаћемо да је $a : a' = r : r'$. На исти начин се онда добива $b : b' = r : r'$, а тиме и само тврђење.

Пропорцију $a : a' = r : r'$ добивамо посматрањем троуглова OAS и $OA'S'$, за које је $\sphericalangle SOA = \sphericalangle S'OA'$ и $\sphericalangle SAO = \sphericalangle S'A'O$. Ова два угла су уосталом (као половине угла у троуглу) оштри углови; стога подножја D и D' нормала из S и S' на праву OA падају у унутрашњост дужи OA и OA'. Разложимо OA у отсечке u, v, а OA' у отсечке u', v'; тада је

$$r : u = \sphericalangle SOA = \sphericalangle S'OA' = r' : u',$$

$$r : v = \sphericalangle SAO = \sphericalangle S'A'O = r' : v';$$

према томе

$$r : r' = u : u' = v : v' = (u+v) : (u'+v') = a : a',$$

тако да је у ствари

$$a : a' = r : r'.$$

Применом основног става науке о пропорцијама, може се посебно став, који је Хилберт назвао Паскаловим, свести на малочас поменуто друго правило о састављању пропорција. Тај став (став 40 у § 14) тврди: Ако су A, B, C одн. A', B', C' по три тачке на двема правима које се секу и све су различите од пресечне тачке те две праве, онда, ако је BC' према CB' и CA' према AC' паралелно, биће и AB' према BA' паралелно. Обележимо ли дужи OA, OB, OC са a, b, c а дужи OA', OB', OC' са a', b', c', биће према основном ставу науке о пропорцијама наша претпоставка еквивалентна овим двема пропорцијама

$$b : c = c' : b' \quad (1) \qquad c : a = a' : c' \quad (2)$$

а тврђење еквивалентно пропорцији

$$a : b = b' : a.$$

Међутим ова (пропорција) се добива из две претходне према другом правилу о састављању пропорција.

Пошто је на тај начин наука о пропорцијама добивена без употребе множења дужи, може се ово накнадно увести, за што је потребно утврдити неку јединичну дужину e. Наиме, као производ дужи a, b (у односу на јединицу e) дефинише се четврта пропорционала за e, a, b.

Што се тиче закона рачунања за тако дефинисано множење дужи, то се комутативни закон добива из међусобне разменљивости унутрашњих чланова пропорције. Асоцијативни закон каже: ако је $e : a = b : u$; $e : b = c : v$ и $e : u = c : w$, тада је $e : a = v : w$. Ово се добива на овај начин: из друге дате пропорције добивамо $b : e = v : c$; ова заједно са трећом датом пропорцијом даје састављањем $b : u = v : w$, а тиме на основу прве дате пропорције $e : a = v : w$. Дистрибутивни закон каже: ако је $e : a = b : u$; $e : a = c : v$ онда је $e : a = (b+c) : (u+v)$. За доказ је довољно показати: ако је $b : u = c : v$, онда је $b : u = (b+c) : (u+v)$; ово међутим важи према једном ставу који смо у почетку поменули.

На овако уведени сегментни рачун може се сад, као што је то показано у § 17, надовезати заснивање једне аналитичке геометрије равни.

П. Бернајс

Допуна III

У додатку II показано је између осталог (уп. стр. 139), да се на аксиоми конгруенције троуглова у ужем смислу не може засновати еуклидска наука о површини, пошто се на овој основи (без коришћења Архимедове аксиоме) не може доказати Еуклидов став, да допунски једнаки троугли једнаких основица имају увек једнаке висине, па стога ни став 52.

У ранијим издањима је додатак II садржавао и једну инверзију овог разматрања, наиме доказ, да узимање једне ставу 52 еквивалентне аксиоме смештања (Einlagerung) омогућава, да се из уже аксиоме конвергенције III_5^* добије првобитна шира аксиома конвергенције III_6. Ово расуђивање навешћемо овде у наредним излагањима са само небитним променама које су прилагођене овом новом издању.

„Поменули смо раније (уп. стр. 123) да из аксиоме о подударности троуглова у ужој формулацији III_6^* и претходних аксиома поред аксиома III_6 и III_7 нужно следује аксиома конвергенције III_5 а тиме уопште конгруенција фигура у широј формулацији, чим узмемо да важи став о једнакости углова на основици у равнокраком троуглу.[1] Изгледа ми од значаја да се ово употпуњавање аксиоме конгруенције у ужој формулацији III_5^* може извести још на један сасвим други начин, наиме помоћу једног сасвим интуитивног захтева, чији се садржај поклапа са ставом 52 који сам у Основама ја доказао (стр. 74), а који захтев са друге стране, како смо то показали у додатку II (уп. стр. 139), није последица ставова конгруенције у ужем смислу.

Нека су појмови „разложиво једнако“ и „допунски једнако“ дефинисани као у § 18 „Основа геометрије“ — али ипак тако, да се при томе разуме појам конгруенције у ужем смислу. У том смислу ће се у наредним излагањима примењивати увек само аксиома конгруенције у ужој формулацији III_5^* и њој претходне аксиоме I, II, III_{1-4} као и аксиома паралелних IV.

Тај захтев у питању, који овде треба да служи као допуна, гласи:

Аксиома смештања. Полигон није никад разложиво једнак другом полигону чије ограничење садржи унутрашње тачке, али не садржи ниједну спољашњу тачку првог полигона, тј. који је у првом смештен.

Из ове аксиоме се прво лако изводи став:

Полигон није никад допунски једнак другом полигону који је у првом полигону смештен.

---

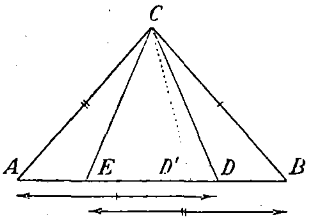
[1] За тачно извођење види расправу П. Бернајса: „Bemerkungen zu den Grundlagen der Geometrie“ Courant Anniversary Volume 1948, стр. 29 - 44 — Како се постулисање става о угловима на основици — уз укључење Архимедове аксиоме и аксиоме паралелних — може на разне начине заменити захтевима, који немају карактер аксиоме симетрије, напр. захтевом трећег става о конгруенцији за истосмерно координиране троугле, показао је у дисертацији А. Шмит „Die Herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung“, Math. Ann. 109, 538—571 (1934).

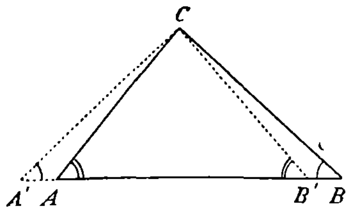
И заиста, кад би неки полигон P био допунски једнак полигону Q који се налази у унутрашњости P, тада би морала постојати два једна другом разложиво једнака полигона P' и Q' тако, да полигон $P+P'$ буде разложиво једнак полигону $Q+Q'$. Како би онда и $P+P'$ са $P+Q'$ било разложиво једнако, морали би и полигони $P+Q'$ и $Q+Q'$ бити разложиво једнаки, што противречи усвојеној аксиоми смештања.

Сад ћемо редом доказати наредне ставове:

Ако су у неком троуглу ABC оба угла код A и B један другом једнака, биће онда увек и овим угловима наспрамне стране једнаке.

Ради доказа одредимо на AB тачке E и D, тако да буде $AD=BC$ и $BE=AC$. Из првог става конгруенције у ужој формулацији следује конгруенција троуглова DAC и CBE; оба ова троугла су стога и допунски једнака. Одавде закључујемо да се и њихове основице AD и BE једна са другом поклапају. Ако ово не би био случај, па узмемо, рецимо, $AD'=BE$, онда би из познатог Еуклидовог поступка (уп. стр. 66) произлазило да су оба троугла $AD'C$ и BEC један другом допунски једнака. Међутим, тада би и троугли ADC и $AD'C$ морали један другом бити допунски једнаки, што противречи претходном ставу који смо добили из аксиоме смештања. Једнакост дужи AD и BE води непосредно тврђењу које смо поставили.





Ако су у неком троуглу ABC две стране AC и BC једна другој једнаке, биће увек и овим странама наспрамни углови један другом једнаки.

Ради доказа узмимо насупрот да је угао $\sphericalangle CAB$ већи од $\sphericalangle CBA$. Затим одредимо на правој AB тачке A' и B' на тај начин да буде

$$\sphericalangle CA'B = \sphericalangle CBA \quad \text{и} \quad \sphericalangle CB'A = \sphericalangle CAB.$$

Према претходно доказаном ставу је стога

$$CA' = CB \quad \text{и} \quad CB' = CA,$$

а одавде се коришћењем претпоставке добива

$$(1^*) \qquad CA' = CB'.$$

Ако на троугле ACA' и BCB' применимо став о спољашњем углу, добићемо једначине

$$\sphericalangle ACA' = \sphericalangle CAB - \sphericalangle CA'B$$

$$\sphericalangle BCB' = \sphericalangle CB'A - \sphericalangle CBA;$$

стога је

$$(2^*) \qquad \sphericalangle ACA' = \sphericalangle BCB'.$$

Обрасци (1*) и (2*) у вези са претпоставком казују, да су троугли ACA' и BCB' један другом конгруентни у ужем смислу; међутим у том случају посебно би било

$$\sphericalangle AA'C = \sphericalangle BB'C.$$

Овај закључак је бесмислица, пошто су ова два угла унутрашњи одн. несуседни спољашњи угао у троуглу $A'B'C$.

Тиме је постављени став доказан, и ми одмах увиђамо да су ставови о подударности троуглова у ширем смислу нужна последица аксиоме конгруенције у ужем облику $\text{III}_5{}^*$, ако се још узме у помоћ горња интуитивна аксиома смештања која се односи на појам разложиве једнакости.“

Из овог доказа је одмах јасно, да се аксиома смештања за ову примену може заменити следећом простијом аксиомом:

Ако у троуглу ABC тачка D лежи на страни AB између A и B, тада троугли ABC и ADC нису допунски једнаки.¹⁾

П. Бернајс

---

¹) Једно моје разматрање по резултату паралелно овом расуђивању извршено је у расправи „Über die Verwendung der Polygoninhalte an Stelle eines Spiegelungsaxioms in der Axiomatik der Planimetrie“ Elem. d. Math. 8, 102—107 (1953). Приликом писања тога рада нисам имао при руци ранији текст додатка II. Стога је у поменутој расправи изостало одговарајуће указивање.

Списак појмова

Бројеви уз називе појмова означују оне стране у књизи на којима је појам објашњен.

ИСПРАВКЕ

На страни	ред		стоји	а треба да стоји
15	8	одоздо	$\sphericalangle B \equiv \sphericalangle A'$	$\sphericalangle A \equiv A'$
35	4	„	$XY < XZ$	$XY < YZ$
83	15	одозго	изостављена је после тачке реченица: Треба доказати да је и $C\overline{A}''$ паралелно са $A\overline{A}'$.	
83	3	одоздо	$c = OC$	$c = OC'$
84	19	„	OA'	OA
85	10	одозго	$(a+b)+c = OG$	$(a+b)+c = OG'$
85	13	„	OE	OA
91	3	„	53	55
100	12	одоздо	S	s
101	4	„	систем	систем $\Omega(s, t)$
120	12	„	Y, B, D, X'	Y', B, D, X'
125	9	одозго	$S(\tau)$	$\varphi(\tau)$
127	6	одоздо	K_2, K_1	$K_2 K_1$
128	15	„	$+ (\alpha + i\beta) s'$	$+ (\alpha' + i\beta') s'$
131	9	одозго	$(x_2 + i y_3)$	$(x_3 + i y_3)$
131	8	одоздо	AB	$A'B'$
132	10	одозго	III_5^*	III_5
132	16	„	пресликавање	пресликавање K_2
133	14	одоздо	дату дуж једна	дату дуж AB једна
136	10	„	$= t - \frac{t^2}{6} + - \cdots$	$= t - \frac{t^3}{6} + - \cdots$
137	12	одозго	Дужина дужи	Дужина дужи OR
140	3	одоздо	из чињенице да	из чињенице да у Ω
143	9	одозго	$arc\,\mathrm{tg}\,\frac{\Upsilon}{2}$	$arc\,\mathrm{tg}\,\frac{\Upsilon}{\beta}$
143	13	одоздо	$\alpha \frac{\pi}{2^b}$	$a \frac{\pi}{2^b}$
145	6	„	(у напомени) . . . Geometrie“	. . . Geometrie“, Math. Ann. књ. 61
150	1	„	a'	a_1
169	12	„	средину	средину (§ 24)
175	17	„	$\overline{\overline{K_1 K_2}}$	$\overline{\overline{\overline{K_1 K_2}}}$

На страни	ред		стоји	а треба да стоји
179	1	одозго	тачка	тачка A
180	9	„	после тачке и запете треба уметнути: према томе, тачке K_1, K_2, K_3,... конвергирају према тачки K^*.	
186	7	„	тачка A	тачка O
211	1	одоздо	као дужину	од O као дужину
212	1	„	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
223	1	„	$=b' : a$	$=b' : a'$
224	1	„	конвергенције	конгруенције

На страни 20 изостављена је наредна слика