МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ, БЕОГРАД

МАСТЕР РАД

Тема: Коришћење језика и појмова Теорије скупова у основној школи

Ментор:

Проф. Александар Липковски

Студент:

Мирјана Николић 1108/14

Садржај:

1. ИСТОРИЈСКИ ПРЕГЛЕД

Чврсте теоријске основе скупова утврђене су тек у XIX веку. Сматра се да је интуитивна идеја појма скупа старија од појма броја. То се објашњава чињеницом да су примитивни народи проверавали стање свог стада тако што су за сваку животињу имали један камен, односно они су образовали скуп који по броју одговара стаду. Када су проверавали да ли је стадо на броју, за свако грло би одвојили један камен (елемент из скупа) који је служио као узорак за бројност стада. Можемо рећи да је примитиван човек вршио придруживање, односно обострано једнозначно пресликавање, што значи да они нису вршили пребројавање истог у циљу контролисања стада, већ су образовали скуп који је по броју одговарао стаду. (Курепа, 1971:40)

Овај период представљао је прекретницу у развоју математике. Основна идеја била је стварање формалног система у ком би било могуће изразити све математичке теореме.

Канторова теорема о бесконачности скупова била је добар материјал за сва математичка сазнања тог времена и велики покретач парадокса. Његови савремении су говорили: Нико нас неће избацити из раја који је за нас створио Кантор. Испоставило се да из *Теорије скупова* [1]могу да се изведу закључци који нису тачни. Најпознатији парадокс открио је енглески филозоф Бертранд Расел.

Пошто је Кантор показао да је скуп свих подскупова датог скупа увек већи од самог себе, Расел се запитао шта је са скупом свих подскупова, неки универзални скуп који садржи све. Скуп свих подскупова универзалног скупа не може бити већи од универзалног скупа јер он садржи све. Ово је слично парадоксу о берберину који брије све мушкарце у селу али не брије себе. Постојало је још доста парадокса нпр. Парадокс лажљивца, све до Геделових резултата који затварају овај зачарани круг. Он је показао да је било који формалан аксиоматски систем или непотпун или противуречан. Његова сазнања уздрмала су и достигнућа у другим наукама јер се истина не може извести унутар неког затвореног круга.

У савременој математици *Теорија скупова* заузима значајно место. Уз њену помоћ изграђују се многи математички појмови и теорије, из чега и закључујемо да је језик *Теорије скупова* фундаменталан у математици.

[1] *Теорија скупова – грана математике која се бави скуповима. Она је уз логику и предикатски рачун једна од аксиоматских темеља математике.*

2. УВОД

Садржаји о скуповима и скуповним операцијама налазе се у готово свим савременим програмима наставе математике. Њихово увођење у наставне програме изазвало је доста дискусије о њиховој методичкој, образовној и васпитној вредности. Једно од основних несугласица била је шта прво увести: скуп или број.

Поред свих тих дилема нема сумње да скупови играју изузетно значајну улогу у настави математике и заузимају важно место у том процесу. Зато сматрам да је ова тема важна за наставну праксу и да ћу овим радом успети да расветлим сазнања о скуповима и њиховој улози у настави математике.

Овај рад је структурисан у три целине које чине теоријски, методолошки и истраживачки део. У теоријском делу представићу скуп у математичком и методичком смислу. Методолошки део упознаће нас са проблематиком овог рада, а истраживачки део чине резултати и закључци до којих сам дошла.

Циљ овог рада је да сагледамо улогу Теорије скупова у формирању појмова у настави математике, као и да испитамо заступљеност скупова у уџбеницима издавачке куће Клет.

3. ТЕОРИЈСКИ ПРИСТУП ПРОБЛЕМУ

3.1 Појам скупа

Материјално окружење и односи између објеката и бића увек су били инспирације за научна уопштавања и формирање различитих теорија. Иако смо окружени различитим материјалним објектима, односно бићима који су природно груписани у одређене целине, које се у природном језику називају скуповима, ипак се појам скупа у математици обликовао релативно касно у поређењу с неким другим појмовима (Пикула, Марковић, 2014: 24).

Скупови представљају један од најважнијих елемената у модерној математии. Појам скупа је најопштија у односу на све друге појмове класичне математике. Самим тим, тај појам се не дефинише и нема званичну дефиницију, већ се узима као основни појам.

До појма скупа може се врло лако доћи емпиријским путем, посматрајући разне групе, скупине, мноштва неке врсте објеката, ствари, живих бића и др.

За неке скупове постоје посебни термини као: сазвежђе или галаксија (скуп звезда), архипелаг (скуп острва). (Курепа, 1971:56).

Као што смо напоменули појам скупа се не дефинише, него се објашњава конкретним примерима и указује на то да се изрази као што су: *мноштво, фамилија, колекција, гомила...* јављају као синоними за исти појам и означавају више објеката који по некој особини чине предмет нашег разматрања.

Математичка дисциплина која проучава скупове назива се *Теорија скупова.* Скуп се уоштено описује као мноштво апстрактних објеката.

Теорија скупова је развијена ради појашњавања и изучавања основа математике. У процесу модернизације наставе математике, теорија скупова има значајну улогу.

Прве покушаје аксиоматског дефинисања теорије скупова учинио је Ђузепе Пеано, али је чврсте теоријске основе ове теорије поставио немачки математичар Георг Кантор (1848-1918), касније је теорију допунио и систематизовао Ернест Зермело (1871 - 1956).

Кантор је имплицитно користио следеће аксиоме:

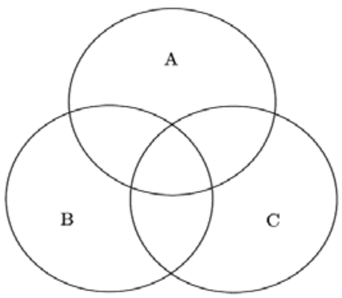
К1. Два скупа су једнака ако и само ако имају исте елемента (аксиома идентификације).

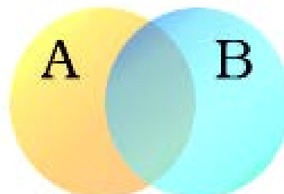
К2. За произвољно, унапред дато својство $P(x)$ постоји скуп $\{x: P(x)\}$чији елементи поседују то и само то својство (аксиома егзистенције).

К3. За сваки непразан скуп S постоји функција f чији су оригинали непразни подскупови скупа S, а слике су елементи оригинала (аксиома апстракције), (Пикула, Марковић, 2014: 25).

Поштујући принцип очигледности, скупови се могу представити графички, на сликовит начин и такав начин представљања називамо Венов дијаграм, по Џону Вену, британском логичару и филозофу, који је овакав приказ скупова увео 1881. Године.

Венови дијаграми:





Да би скуп био задан морају бити тачно наведени елементи који чине тај скуп. Постоје скупови са коначно много елементата, које називамо коначним скуповима, и скупови са бесконачно много елемената – бесконачни скупови. Тако, на пример, скуп становника на земљи представља један коначан скуп, док скуп свих природних бројева садржи бесконачно много елемената.

Скупове најчешће обележавамо великим латиничним словима A, B, C, D....., а њихове елементе малим словима a, b, c, d, e….

Ако је a елемент скупа A, то ћемо означити $a \in A$, а ако a не припада скупу A означићемо $a \notin A$. Ознаке ћемо читати „a припада скупу A“ или „a је елемент скупа A“, што значи да је уз појмове „скуп“ и „елемент скупа“, појам „припадати“ такође један од основних појмова теорије скупова.

Скупове можемо приказивати на више различитих начина:

а) Навођењем елемената скупа између витичастих заграда

$\underline{A=\{1, 2, 3\}}$

Овакав начин задавања скупова користи се за скупове са мањим бројем елемената тј. коначне скупове.

$\underline{B=\{1, 2, \ldots, n\}}$

Бесконачан скуп, са већим бројем елемената које није могуће све набројати.

б) Задавањем заједничког својства за све елементе

Овакав начин задавања скупова погодан је за скупове са пуно елемената, јер није потребно записати све елементе, довољно је навести неку њихову заједничку особину.

A = {x | x има особину P(x)} или A = {x | P(x)}, где је са P(x) означено својство које има елемент x. На овај начин је задат скуп свих објеката x за које важи P(x), односно скуп свих објеката x који имају својство P(x). На пример, скуп свих парних бројева прве стотине може се задати као

{x | ∃ y ∈N , x = 2y и x≤100}.

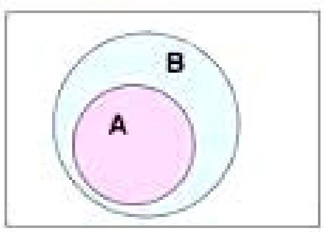
3.2 Подскуп

Ако је сваки елемент скупа *A* истовремено и елемент скупа *B*, тада се за скуп *A* каже да је подскуп скупа *B*, пише се $A \subseteq B$, а изговара *„A је садржан у B"*.

Ако је *A* подскуп и није једнак *B*, тада се за *A* каже да је прави подскуп скупа *B*, записује се $A \subset B$ (*A* је прави скупа *B*).

$$A \subset B = \{x | x \in A \Rightarrow x \in B\}$$

Ако је скуп A подскуп скупа B, графички приказ би био:



$A \subset B$

Празан скуп је подскуп сваког скупа и сваки скуп је подскуп самог себе:

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$

3.3 Једнакост и једнакобројност скупова

За нека два скупа кажемо да су једнаки ако су сви елементи једног скупа уједно елементи другог скупа, и обрнуто, сви елементи другог скупа су елементи првог скупа. Другим речима скуп је једнак самом себи.

Једнакост два скупа се односи на идентичност елемената, а не на једнакост својстава елемената.

A=B ако и само ако је: $A = B = \{x | x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$,

По дефиницији биће {a, a, b, b, c}={a, b, b, c, c}={a, b, c}.

Закључујемо:

– Није битан редослед по ком се елементи наводе

– Сваки елемент се наводи само једном

Кардинални број је број различитих елемената скупа. Обележава се малим латиничним словом к, или n, што је случај и са уџбеницима издавача Клет.

На пример:
A={а, е, и, о, у }, односно k(A) = 5

3.4 Операције са скуповима

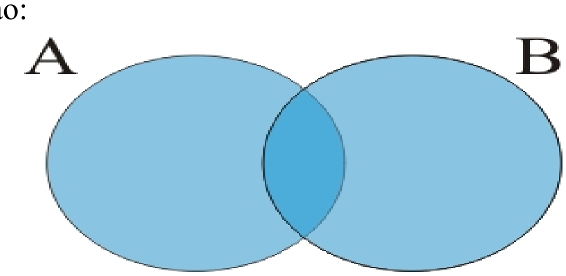
Један од начина како од познатих скупова можемо добити нове скупове јесте применом разних операција на скуповима. Дакле, говорићемо о скуповним операцијама: унија, пресек, разлика, комплемент скупа и Декартов производ.

3.4.1 Унија скупова

Унија скупова A и B је скуп $A \cup B$ који чине они само они елементи који припадају или скупу A или скупу B или и скупу A и скупу B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Графички приказ би изгледао:



A ∪ B

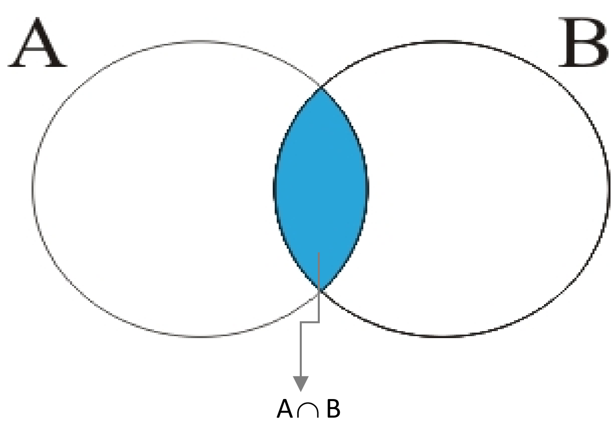
3.4.2 Пресек скупова

Пресек два скупа A и B је скуп чији су елементи они и само они елементи који припадају и скупу A и скупу B.

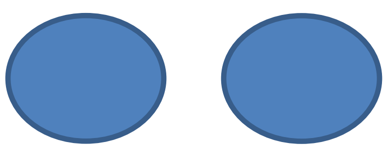
Пресек скупова A и B обележавамо са A ∩ B.

$$A \cap B = \{x | x \in A \Lambda\, x \in B\}$$

Графички приказ би изгледао:



Скупови A и B су дисјунктни ако и само ако је њихов пресек празан, тј. A∩ B = ∅



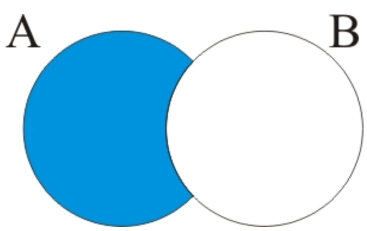
3.4.3 Разлика скупова, комплемент скупа

Разлика скупова A и B је нови скуп који чине они и само они елементи који су у скупу A а нису у скупу B:

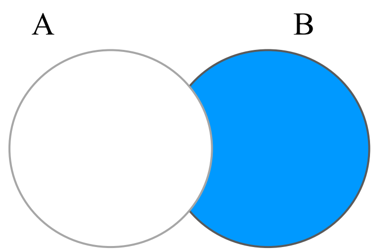
$$A/B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}$$

Односно разлика скупова B и A је скуп ком припадају они и само они елементи који припадају скупу B а не припадају скупу A:

$$B/A = \{ x \mid x \in B \wedge x \notin A \}$$



A/B

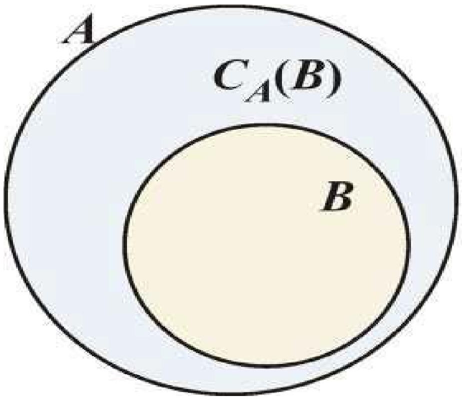


B/A

Унија и пресек су бинарне скуповне операције, односно то су операције у којима учествују два скупа, а резултат операције је нови скуп. Поред ове две операције, имамо и унарну операцију комплемент. У овој операцији учествује само један скуп, а резултат је скуп свих елемената који нису садржани у посматраном скупу.

Ако је $B \subseteq A$, онда се разлика $A \setminus B$ означава $C_A B$ и зове се комплемент скупа B у односу на скуп A:

$C_A B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.



3.4.4 Декартов производ скупова

У математици, Декартов производ је директан производ скупова. Име је добио по француском математичару Декарту.

Да бисмо дефинисали производ два скупа, прво је потребно одредити појам „уређеног пара" – за разлику од пара (двочланог скупа), код којег редослед елемената није битан, код уређеног пара увиек је битно који је елемент први, а који други, тј. битан је редослед елемената.

Док се двочлани скуп обележава са {a, b}, уређени пар се обележава са

(a, b). За двочлани скуп важи знак једнакости $\{a, b\} = \{b, a\}$, док за уређени пар он не важи: $(a, b) \neq (b, a)$.

Елемент који се у уређеном пару појављује први назива се прва компонента или прва координата, а елемент који се јавља иза њега назива се други елемент или друга координата уређеног пара.

Према томе, може се рећи да су два уређена пара једнака ако и само ако су им једнаке прве и друге компоненте.

$(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (a = x) \wedge (b = y)$

Декартов производ два скупа *A* и *B,* у ознаци *A* x *B*, јесте скуп свих могућих уређених парова код којих је прва компонента елемент скупа *A,* а друга компонента елемент скупа *B*:

$$A\times B=\{(a,b);\ a\in A\wedge\ b\in B\}$$

Декартов производ повезујемо са рачунском операцијом множење, иако за ту рачунску операцију важи својство комутативности, на следећем примеру видећемо да за Декартов производ то својство не важи.

Дати су скупови $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{x,y\}$

$A\times B=\{(1,x),(2,x),(3,x),(1,y),(2,y),(3,y)\}$ $B\times A=\{(x,\ 1),(x,\ 2),(x,\ 3),(y,\ 1),(y,\ 2),(y,\ 3)\}$

Јасно је да $A\times B\neq B\times A$, што значи да за Декартов производ скупова не важи својство комутативности.

Ако су скупови A и B једнаки, онда се то пише A x B = A^2

A = {a,b}

A^2 = A x A = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)}

4. МЕТОДОЛОГИЈА ИСТРАЖИВАЊА

4.1 Проблем истраживања

Заступњеност скупова у уџбеницима за основну школу се разликује од аутора до аутора. Због подељених мишљења о њиховој методичкој, образовној и васпитној улози пред нама се нашао задатак да испитамо њихову улогу, заступљеност и начин излагања у уџбеницима издавачке куће Клет.

4.2 Предмет истраживања

На основу постављеног проблема истраживања за предмет нашег истраживања издвојили смо коришћење појмова и језика Теорије скупова у формирању математичких појмова у настави математике од петог до осмог разреда основне школе.

4.3 Циљ и задаци истраживања

Циљ истраживања је да се сагледа коришћење Теорије скупова у уџбениима и да се уоче добре и лоше стране оваквог приступа.

Из постављеног циља произилазе следећи задаци:

- Анализирати начин на који су скупови обрађени у уџбеницима
- Коришћење Теорије скупова у аритметици
- Коришћење Теорије скупова у геометрији

4.4 Хипотезе истраживања

На основу циља и задатака истраживања могу се поставити следеће хипотезе:

- Због великог значаја и примене скупова у настави математике јако је битно добро их објаснити, користити примере сродне деци што је аутор у већој мери и постигао.
- Теорија скупова је мање заступљена у аритметици за више разреде основне школе
- Појмови и језик Теорије скупова играју значајну улогу у формирању појмова из геометрије као и дефинисању односа између геометријских објеката.

4.5 Методе, технике и иструменти

Методу теоријске анализе користићемо у процесу сагледавања методичког приступа формирања појмова у настави математике и улоге Теорије скупова у том процесу.

За анализу уџбеника користићемо анализу садржаја како би видели у којој мери се методички приступ заснива на Теорији скупова. Садржај уџбеника чини категорију за анализу, ау оквиру тога смо анализирали поједине задатке из уџбеника.

Ово истраживање карактерише склоп квалитативне и квантитативне анализе садржаја.

4.6 Популација и узорак истраживања

Популацију истраживања чине уџбеници из наставе математике који су одобрени од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја. Истраживање је извршено на намерно одабраном узорку који чине уџбеници из математике издавачке куће Клет.

Уџбеник из математике за 5. разред основне школе
Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Уџбеник из математике за 6. разред основне школе
Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Уџбеник из математике за 7. разред основне школе
Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Уџбеник из математике за 8. разред основне школе
Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

4.7 Организација и ток истраживања

Први корак истраживања односио се на упознавање литературе да би се изнеле теоријске поставке које су неопходне за реализацију истраживања.

Други корак је прикупљање уџбеника.

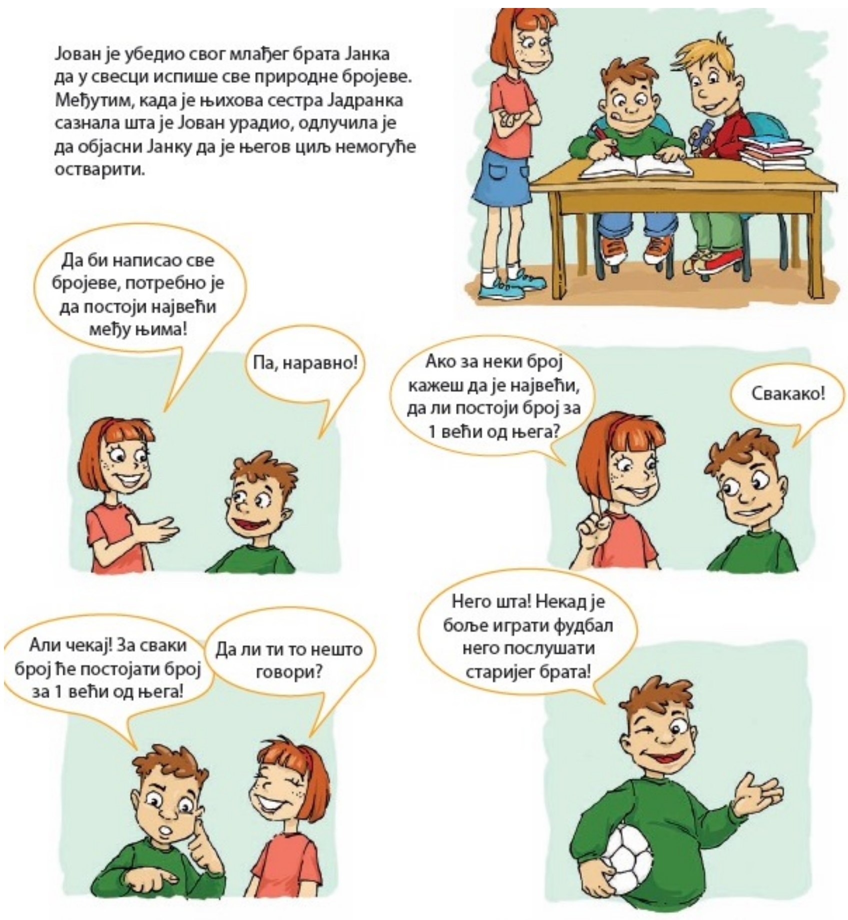
Трећи корак је анализирање садржаја уџбеника (присутност-одсутност Теорије скупова приликом формирања различитих математичких појмова и њихова улога) .

Четврти корак је извођење закључака на основу тих анализа.

5. РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

5.1 Заступљеност Теорије скупова у уџбенику за 5. Разред

Прва област која се изучава у 5. Разреду је Скуп (појам, елементи, операције са скуповима итд.) . Пошто су се ученици тог узраста једино срели са скупом природних бројева, аутор је сматрао да је погодно на почетку обновити скуп природних бројева и то ради на занимљив и сликовит начин.



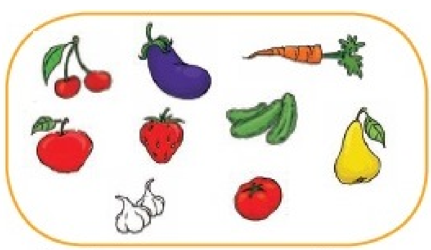
Из овог разговора следе јако битне особине скупа природних бројева које деца треба да знају, а најбољи пут до знања је пут близак деци, шаљив и разуман.

Појам скупа који су ученици делимично усвојили у нижим разредима треба даље развијати кроз разноврсне примере, блиске ученицима у којима се објекти окупљају у целину.

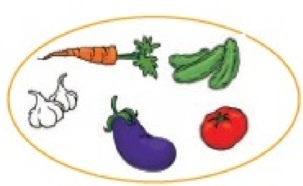
Како би излагање било што интересантније при објашњавању појма скуп а треба користити различите природне, вештачке и дидактичке материјале којима је дете окружено (клупе, столице, свеске...) јер деца не треба да буду пасивни посматрачи већ активни учесници, да откривају, посматрају и закључују.

Увођење деце у појам скупа преко скупа природних бројева показао се лошим примером у пракси јер не знамо колико свако дете понаособ има знања из претходних разреда, што може да утиче на интересовање детета да настави са изучавањем дате теме. Требало би прво обрадити тему скупова па тек онда обнављати и допуњавати скуп природних бројева. Нпр. Како објаснити да је 1 елемент или да припада скупу природних бројева ако се пре тога не објасни шта значи „припадати“.

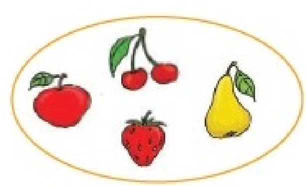
Најбољи начин да се уведу скупови је опет преко примера који је деци познат, аутор је то и урадио што ћемо видети на следећој слици:



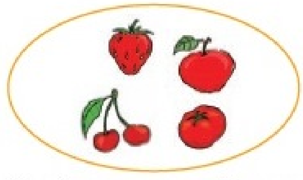
Скуп јестивих делова неких биљака.



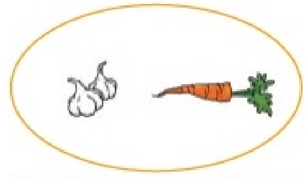
Скуп јестивих делова биљака које убрајамо у поврће.



Скуп јестивих делова биљака које убрајамо у воће.



Скуп јестивих делова биљака црвене боје.



Скуп јестивих делова биљака који расту у земљи.

Дат је скуп јестивих делова неких биљака из ког су издвојени скупови јестивих делова биљака које убрајамо у поврће и скуп јестивих делова биљака које убрајамо у воће. Затим се из почетног скупа издваја скуп биљака чији су плодови црвене боје и скуп чији плодови расту у земљи. Једина замерка у овом примеру односи се на превише опширан назив скупова, нпр. Једноставније би било почетни скуп назвати скуп воћа и поврћа па из њега у засебне скупове издвојити скуп поврћа и скуп воћа.

Лако се из овог примера уочи да шаргарепа припада скупу поврће, а да јабука није у том скупу.

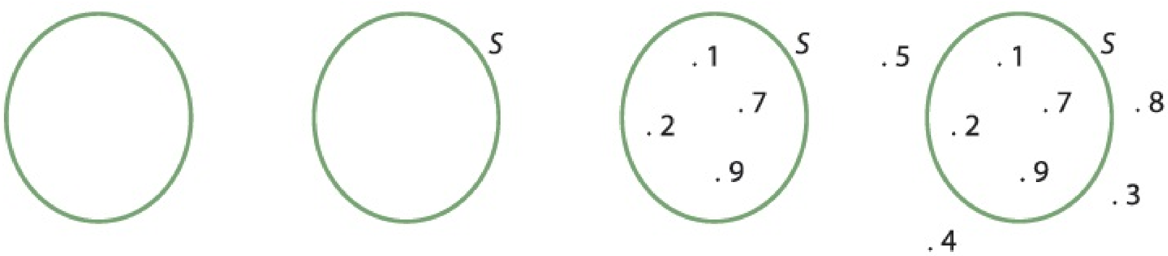
Следећим бројним примером дефинише се припадање(у ознаци)односно неприпадање објекта скупу.

B = { 2, 4 6, 8, 10}

4 ∈ B, 9 ∉ B

Формирање појма скупа доприноси и графичко приказивање скупа што је у уџбенику и постигнуто илустрацијама.

Скуп представљамо затвореном линијом. Елементе који припадају скупу записујемо унутар затворене линије, а елементе који не припадају скупу записујемо изван затворене линије.



(Клет, 2012)

Скупови са много елемената и скуп без елемената

Скупови који имају велики број елемената записујемо описивањем особина њихових елемената. На овај начин лако записујемо скуп A чији су елементи природни бројеви мањи од 500.

A={x| x E N x<500}

E={n | n је паран број и n< 5001} јесу сви парни бројеви мањи од 5001.

(Клет,2012)

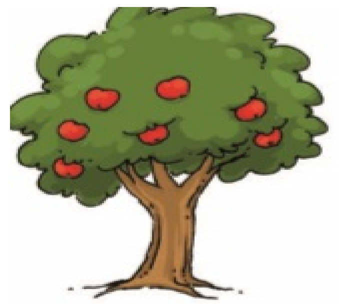
Кроз праксу коју сам стекла радом са ученицима како у школи тако и ван ње, описно задавање скупова представља деци проблем. Сами примери у уџбеницима су за децу компликовани. Бољи приступ овој наставној јединици би био да они сами опишу дате скупове, на тај начин би сами дошли до описног записа, а затим кроз све сложеније примере доћи до примера датих у уџбенику. Ова наставна јединица се не сме занемарити и олако прећи, јер описан начин задавања скупова се појављује у задацима за завршни испит после основне школе као и на такмичењима.

Пр.

A = {1, 3, 5, 7, 9} A = {x| x је непаран број прве десетице}

Празан скуп

Скуп без елемената аутор је представио сликовито и јако домишљато.



Празан скуп Непразан скуп

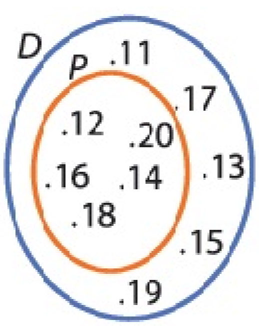
Овој илустрацији на основу које деца лако дођу до закључка шта је празан скуп, добро би било допунити примерима попут:

Од присутних ученика састави скуп ученика старијих од 20 година, скуп ученика који имају две мајке, скуп ученика који имају унуке.

Кроз занимљив начин ученици ће дођи до закључка да су ти скупови празни.

Подскуп скупа

Нека је D скуп бројеба друге дестице тј. D={ 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20} и нека је P скуп чији су елементи сви парни бројеви из скупа D тј. P={12, 14, 16, 18, 20}.



За скуп P кажемо да је поскуп скупа D.

Ако су сви елементи скупа А истовремено и елементи скупа В онда кажемо да је скуп А подскуп скупа В . То краће пишемо $A \subset B$ *. Ознаку читамо „је подскуп“.*

(Клет, 2012)

Овај начин приступа где деца кроз пример долазе до дефинисања појма је методички јако добар, при том су у примеру коришћени скупови који су деци познати из нижих разреда. Први корак упознавања подскупа може бити посматрање скупова у околини којима се визуелном перцепцијом могу уочити подскупови, нпр. У скупу ученика одређеног разреда могу уочити девојчице (као део тј. подскуп скупа ученика).

Једнакост скупова

Посматрајмо скупове А={3, 1, 5, 9, 7} и В={1, 3, 5, 7, 9} . Сваки елемент скупа А јесте елемент и скупа В тј. $A \subset B$, и сваки елемент скупа В јесте елемент скупа А, тј . За скупове А и В кажемо да су једнаки и краће пишемо А = В.

Два скупа су једнака ако имају исте елементе, тј ако је сваки елемент првог скупа елемент и другог скупа, и сваки елемент другого скупа јесте елемент првог скупа.

Пр. Посматрајмо скупове S = { 2, 4, 6} и P = {2, 2, 4, 6, 6, 6} . Видимо да је сваки елемент скупа S елемент и скупа P , и сваки елемент скупа P јесте елемент скупа S. Закључујемо да је S = P . Само на први поглед може изгледати да скуп има шест елемената.

За скуп није битно којим редоследом су записани његови елементи ({a, b} = {b, a}) нити да ли је исти елемнт записан више пута.({a, a} = {a}).

(Клет, 2012)

Формирање појма једнакости скупова најбоље је почети са примерима скупова састављених од истих елемената али различито распоређених што је у уџбенику и урађено. Такође је на јако лаган (логички) начин из примера закључено битно својство скупова да за скуп није битан редослед којим су елементи записани као и да ли је исти елемент записан више пута.

Операције са скуповима

Пресек,унија, разлика и изрази са више скуповних операција у уџбенику објашњени су преко истог примера који ћу у даљем тексту навести:

Посматрај карту Европе и одреди које државе се граниче са Швајцарском, а које са Чешком.

Означимо са S скуп свих држава које се граниче са Швајцарском а са C скуп свих држава које се граниче са Чешком. Запишимо ова два скупа набрајањем њихових елемената:

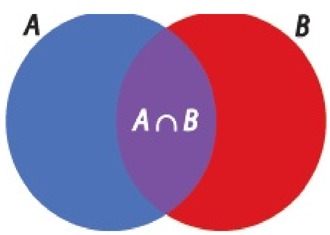
S = {Немачка, Аустрија, Италија, Француска}

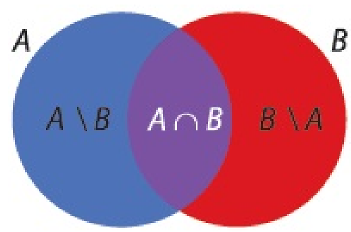
C = {Немачка, Пољска, Словачка, Аустрија}

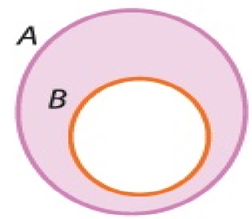
Видиш да се неке од земаља граниче и са Швајцарском и са Чешком. То су Немашка и Аустрија. За ове земље кажемо да припадају пресеку скупова земаља које се граниче и са Швајцарском и Чешком тј да су пресек скупова S и C. (Клет,2012)

Као што видимо дата је географска карта Европе, од ученика се зависно од операције која се објашњава захтева да уоче са којим се држава граничи дата држава. Корелација са предметом Географија је одлично успостављена али деца тог узраста уче да читају карту такође у петом разреду, стога пример није адекватан, с обзиром да не знамо колики је ниво знања деце из те области. Довољно је да троје деце из једног разреда не знају да одреде граничне државе онда не могу да разумеју ниједну операцију са скуповима јер напомињем све набројане операције су објашњене овим примером. Замерка се односи још и на карту која се налази у првој јединици (Пресек скупова, стр 12) а у осталим се ученик позива да погледа гарту на страни 12 што методички није исправно. Дете док чита пример у ком се читају подаци са слике треба да има слику испред себе поготово деца тог узраста.

Са друге стране за сваку операцију у уџбенику дата је графичка илустрација операције.







Посебно бих истакла, уз све похвале, начин на који је у уџбенику објашњено како се попуњава Венов дијаграм за три скупа.

I Елементи који се налазе у сва три скупа

II Елементи који се налазе само у А и В

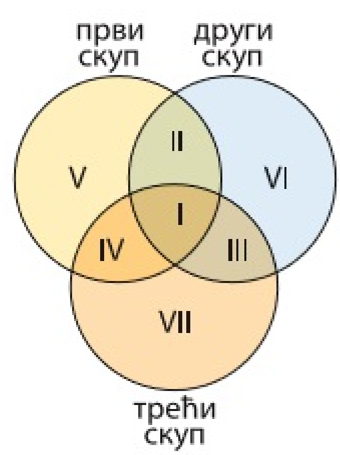
III Елементи који се налазе само у В и С

IV Елементи који се налазе само у А и С

V Елементи који се налазе само у А

VI Елементи који се налазе само у В

VII Елементи који се налазе само у С



Скупови могу бити елементи других скупова

Пр. B = {{3}, {1}, {5, 8}}, n (B) = 3

О овој теми ћу у наставку рада дати анализу.

У склопу области скупова наведено је само да скупови могу бити елементи другог скупа и да у том случају дати скуп треба посматрати као један елемент скупа. Ово ће се у области геометрије испоставити као проблем у решавању задатака о чему ће бити више речи у даљем раду.

Број елемената уније два скупа

Број елемената скупа једнак је броју различитих елемената датог скупа. Чему је једнак број елемената уније два скупа? Унију чине сви елементи и једног и другог скупа. Ако сабереш бројеве елемената та два скупа, оне елементе који се јављају и у једном и у другом скупу рачунаш два пута. Због тога, укупан број елемената уније два скупа рачунаш тако што од збира броја елемената два посматрана скупа одузмеш број елемената њиховог пресека, јер су то елементи који се јављају у оба скупа.

n (AUB) = n (A) + n (B) – n (A∩B) (Клет,2012)

Опис дате формуле је добар, лако разумљив, тако да ученици са лакоћом запамте ову формулу и знају да је примењују.

У даљем тексту наведена је и формула

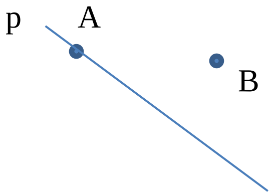
n (D) = n (D\E) + n (E∩D)

Сматрам да није неопходно наводити дату формулу већ треба препустити деци да кроз серију задатака сами дођу до ње.

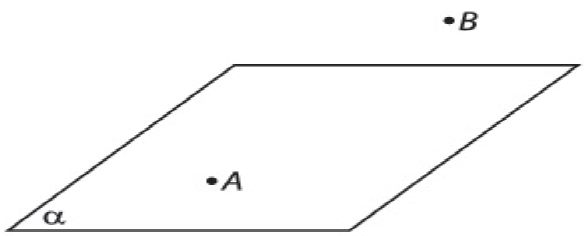
Основни геометријски појмови

Права садржи бесконачно много тачака

У геометрији се доста користи сам језик *теорије скупова* , означава се припадност ($A \in a$, $B \notin b$), дефинишу појмови (колинеарне тачке итд.)

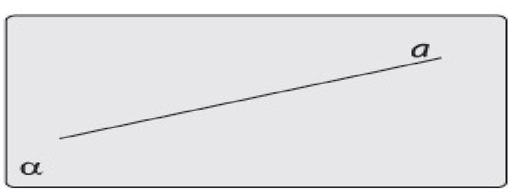


Раван садржи бесконачно много тачака



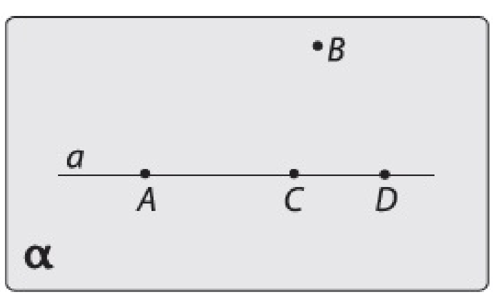
$A \in \alpha$

$B \notin \alpha$



$a \subset \alpha$

Издвојила бих пример:

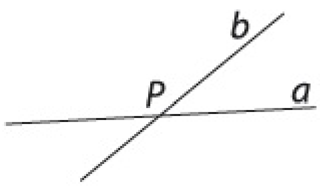


1) $A \in \alpha$; 2) $A \in a$; 3) $a \subset \alpha$;
4) $p(B, C)$____α; 5) $\{A, B, C\}$____α;
6) $\{A, B, C\}$___a; 7) $\{A, C, D\}$____a;
8) A____$p(B,C)$; 9) $\{A, B, C, D\}$____α.

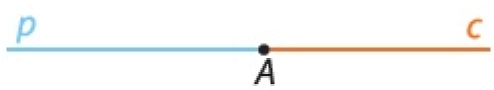
У примеру 5) скуп тачака {A, B, C} је подскуп ове равни, али раније смо рекли да скуп може бити и елемент другог скупа па би било тачно и да ставимо елемент. На исти начин се могу размотрити и пример 6), 7), 9).

Овакви примери су лоши јер збуњују децу, остају недоречени и нејасни.

Узајамни положај две праве



$a \cap b = \{A\}$



$Ap \subset a$

$Ac \subset a$

$Ac \cup Ap = a$

Примећујемо да је готово немогуће записати односе између тачке и праве, тачке и равни, праве и равни, две равни без коришћења језика, симбола и операција *Теорије скупова.* Језик *Теорије скупова* се користи и у дефинисању нпр. Изломљене линије (унија дужи ....), многоугла (унија многоугаоне линије и њене унутрашње области), конвексност итд. Такође језик *Теорије скупова* и њени симболи користе се и у дефинисању круга и кружнице, представљању узајамног положаја круга и кружнице и праве и кружнице.

Појам дељивости

Мајка је купила 12 балона за своје 4 ћерке. Да ли може поделити балоне тако да свака од ћерки добије једнак број балона? (Клетт, 2012)

Приметимо да је из скупа од 12 балона издвојено 4 скупа (подскупа) од по 3 балона, дакле коришћен је скуповни прилаз проблему, као што можемо видети на слици.

Скуп свих делилаца броја *n* означавамо са *Dn*. Скуп свих делилаца броја 12 записујемо:

Dn = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

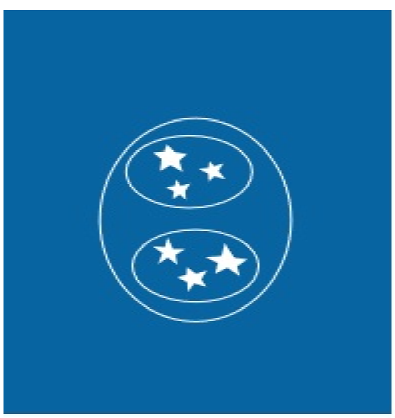
Скуп свих садржалаца броја *n* означавамо са *Sn*. Све садржаое броја 4 краће записујемо:

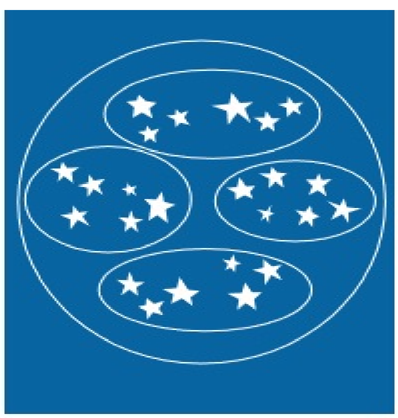
Sn = {4, 8, 12, 16,…}

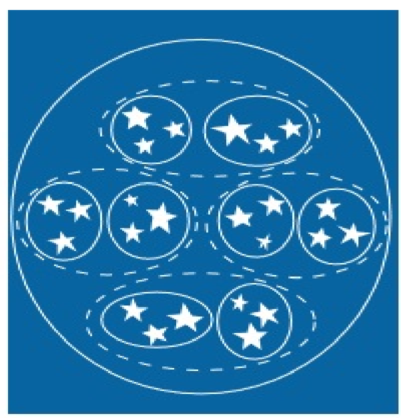
И у овој области аутор користи скуповни приступ како би деци приближио делилац и садржалац, такође је у већој мери заступљен и језик теорије скупова.

Пример који бих издвојила из уџбеника је следећи:

Ако 3 | 6 и 6 | 24 да ли 3 | 24?







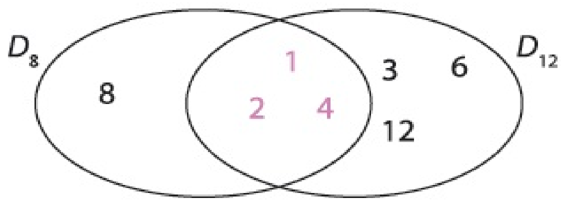
3 се садржи у 6 6 се садржи у 24 3 се садржи у 24

Аутор користи графички приказ скупова који су деца већ усвојила и на основу тога објашњава ново градиво. На овај начин ученици сама долазе до закључка *ако* $a \mid b$ *и* $b \mid c$ *онда* $a \mid c$, што је и био циљ.

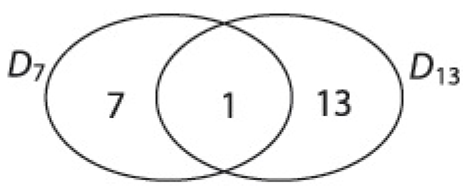
Прости и сложени бројеви

Да би дошао до дефиниције простог и сложеног броја, аутор користи број елемената скупа, што указује опет на скуповни приступ новом градиву.

Највећи заједнички делилац

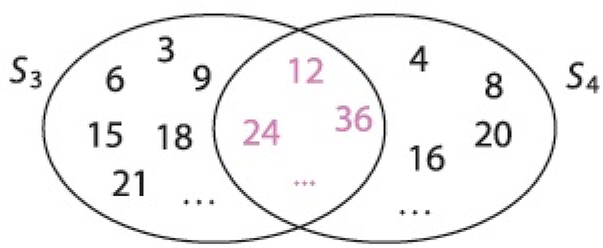


$D_8 \cap D_{12} = D_{8,12} = \{1, 2, 4\}$



$D_7 \cap D_{13} = \{ 1 \}$

Најмањи заједнички садржалац



$S_3 \cap S_4 = S_{3,4}$
$S_{3,4} = \{ 12, 24, 36, \ldots\}$

Уџбеник за V разред је добро урађен ако се сагледа као целина, има пропуста и мана а као највећу бих издвојила приступ области разломака Деца су у млађим разредима уочавали део неке целине (разломак) као елемент (део) скупа па сматрам да је и у овом уџбенику требало да се ради преко скуповног прилаза бар сам почетак тј увод у област јер је то већ деци познато.Прелазак деце у пети разред је нови почетак па би било добро да се свака област која је почета у разредној настави настави настави објашњавати и допуњавати истим начином јер би то доста олакшало деци у разумевању сложенијих проблема.

5.2 Заступљеност Теорије скупова у уџбенику за 6. Разред

Област која обележава VI разред је скуп целих бројева Z и скуп рационалних бројева Q , где се деца упознају са бројевима мањим од нуле. Ова област је деци занимљива, није толико непозната, јер у свакодневном животу се сусрећу са њима.

Осим коришћења језика теорије скупова , аутор у овом уџбенику слабо или готово никако не користи скуповни прилаз увођења деце у нове области.

У дефинисању скупа целих бројева, користи се скуповни начин дефинисања тј. особине скуповних операција:

Сви природни бројеви заједно са нулом и свим негативним целим бројевима образују скуп целих бројева који обележавамо Z . Скуп негативних целих бројева обележавамо са Z^{-}.

$Z^{-} = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots\}$

$Z = Z^{-} \cup \{0\} \cup N = Z^{-} \cup N_0 = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

(Клетт, 2016)

На основу ове дефиниције лако се закључује да је скуп N подскуп скупа Z.

У V разреду деца деца су се упознала са разломцима али као што се јавила потреба за целим бројевима мањим од нуле тако је и појава разломака мањих од нуле последица развоја друштва.

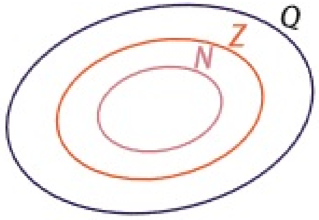
Скуп рационалних бројева такође је дефинисан помоћу скуповних операција:

Унија скупова позитивних, нуле и негативних рационалних бројева називамо скупом рационалних бројева и означавамо са Q.

$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \in Z, q \neq 0\}$

(Клетт, 2016)

Аутор, такође, наводи и да су скупови природних и целих бројева подскупови скупа рационалних бројева и за то користи Венов дијаграм:



Ова слика се често може видети и у учионицама тако да деца помоћу овог графичког приказа визуелно памте и битну особину скупова бројева.

У овом уџбенику деца се сусрећу са решавањем неједначина са сабирањем, одузимањем, множењем и дељењем како у скупу Z тако и у скупу Q.

Скуп решења неједначине са сабирањем и одузимањем у скупу целих бројева увек постоји и има бесконачно чланова.

Скуп решења неједначина у којима је непознат сабирак, умањеник или умањилац у скупу рационалних бројева је непразан и има бесконачно много решења.

(Клетт, 2012)

Иако аутор даје дефиницију решења неједначине као скуп, при запису решења неједначине кроз задатке решење представља на бројевној правој уместо да, и поред графичког, децу наведе да решење запишу и преко скупа. Ученици су упознати са записивањем скупа који има бесконачно елемената (V разред) а уједно се и подсећају описног задавања скупа и увежбавају га, јер овај начин задавања скупова је јако битан због његове заступљености у математичкој литератури, као и у областима које тек предстоје.

Нпр.

$2x + 6 < 0$

$x < -3$

$x \in \{x | x \in Z \text{ и } x < -3\}$

Помоћу Веновог дијаграма у уџбенику је представљена и подела четвороуглова:

Слика је јако добро урађена јер на основу особина скупова и операција са њима може се лако доћи и до битних карактеристика четвороуглова.

5.3 Заступљеност Теорије скупова у уџбенику за 7. разред

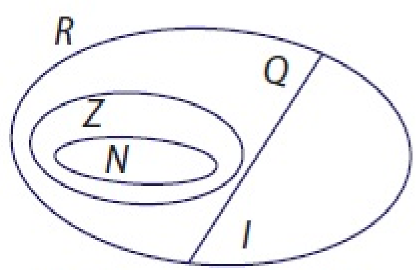
Анализом уџбеника за VII разред увидела сам да се појмови теорије скупова све ређе користе, заступљене су теже методе за разматрање и решавање проблема, што је у складу са узрастом и зрелости деце којој је уџбеник намњен.

Аутор користи појам скупа у дефинисању скупа ирационалних и скупа реалних бројева:

Унију скупа рационалних и скупа ирационалних бројева називамо скупом реалних бројева и означавамо са R. При том скуп Q и I немају заједничких елеменат (дисјунктни су).

(Клетт, 2012)

Видимо да аутор користи појам скупа, као и особине скупова (дисјунктни скупови)



$Q \cup I = R \quad Q \cap I = \varnothing$

Оно што бих истакла то је графички приказ скупова из уџбеника за VI разред сада само допуњен скупом R и I.

На овај начин постигнута је корелација са предходним градивом, које је само допуњено и заокружено у целину. Као што сам напоменула у анализи уџбеника за VI разред ова слика се често налази на паноима у кабинетима где се држи настава математике, па би могао да буде задатак за ученике да допуне слику новим скупом и на тај начин добију комплетан преглед скупова бројева које изучавају у основној школи.

У осталим областима из овог уџбеника не користе се појмови теорије скупова осим у записима како би се дефиниције скратиле и биле разумније за читање.

5.4 Заступљеност Теорије скупова у уџбенику за 8. разред

У уџбенику за VIII разред користи се доста сам језик *Теорије скупова*, као и операције над скуповима. Тако на пример у области Сличности троуглова, тачније Талесовој теореми аутор користи пресек правих да би дошао до тврђења или у области Тачка, права и раван где помоћу пресека правих, правих и равни долази до најбитнијих аксиома и теорема везаних за ову област. Управо овде, можемо приметити да је језик и сами појмови Теорије скупова фундаменталан у математици. Користи се у геометрији, у алгебри и многим другим гранама математике.

Линеарне неједначине

Скуп решења неједначине често исказујемо користећи интервале реалних бројева:

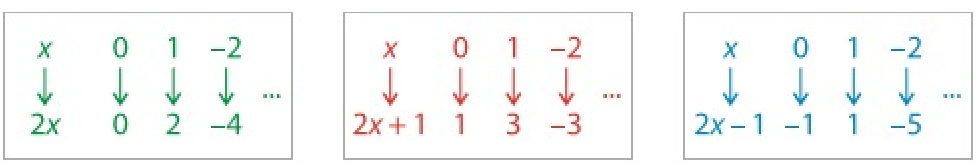
Интервал (a, b) *где је* $a<b$ *је скуп реалних бројева x са особином да је* $a<x<b$

Интервал $[a, b)$ *где је* $a<b$ *је скуп реалних бројева x са особином да је* $a \leq x<b$

(Клетт, 2012)

Приметимо да аутор скуп решења неједначине први пут записује тек у уџбенику за VIII разред а ово је ништа друго него описно задавање скупова. Раније сам навела, у анализи уџбеника за VI разред, да записивање решења неједначине треба увести раније јер су деца учила овај начин задавања скупова, а самим тим би утврђивали из разреда у разред исто градиво само примењено у различитим областима.

Линеарне функције



У случају да је израз који дефинише придруживање линеаран (као у овим примерима) то придруживање називамо линеарна функција.

(Клетт, 2012)

Ако боље погледамо пример приметићемо да није ништа друго него пресликавање скупова $x \to 2x,\ x \to 2x+1, x \to 2x-1$

Овде се са разлогом може поставити питање „А шта је функција? ". У уџбенику нема објашњења, што је велика грешка, не може се кренути са врстама неког појма ако сам тај појам није раније разјашњен.

График линеарне функције

Координатни систем у некој равни нам омогућава да тачно одредимо позицију сваке тачке, и то помоћу уређеног пара реалних бројева . Број a се назива прва координата или апсциса, а број b друга координата или ордината уређеног пара (a, b)

График линеарне функције $y = kx + n, x \in R,$ је скуп свих тачака (x, y) чије су координате повезане једнакошћу $y = kx + n.$

(Клетт, 2010)

Као и у уџбенику за VIII разред ни у овом није довољно разјашњен појам уређеног пара. Ни у једном од ова два уџбеника аутор не дефинише појам Декартовог производа који је као још једна операција над скуповима јако битан, предпостављам да из тог разлога изостаје и дефиниија функције коју би деца разумела да је нпр Декартов производ скупова урађен у VII разреду. Такође, уређени пар представља и решење система линеарних једначина са две непознате.

По свему наведеном закључујемо да је уређени пар бројева јако битан у савладавању појединих области у уџбеницима за VII и VIII разред а опет и недовољно обрађен што је велика замерка на уџбеник.

6. ЗАКЉУЧАК

Да би дошла до сазнања о скуповима и њиховој примени у настави математике било је потребно кретати се кроз бројну литературу и спровести свеобухватну и комплексну анализу уџбеника издавачке куће Клет.На основу свих анализираних података дошла сам до следећег закључка.

Теорија скупова, тј њени појмови и сам језик су веома заступљени у уџбеницима за основну школу, очекивано, више у млађим разредима (пети и шести разред основне школе). Цела једна област посвећена је *Теорији скупова*, на самом почетку петог разреда, врло детаљно, сликовито и занимљиво. Кроз анализу уџбеника увидела сам да је скуп заступљен у садржајима наставних јединица које се односе на дељивост бројева, скупове бројева, геометрију, једначине и неједначине, функције...Приметила сам да је сам појам скупа заступљен у великом броју дефиниција. Геометријски односи предствађени су преко операција скупова у свим разредима, што само сведочи да су појмови и језик теорије скупова фундаментални у математици.

Оно што у раду није анализирано су решавања задатака, у којима се језик *Теорије скупова* користи. Ја, као наставник математике са четворогодишњим радним искуством, могу да кажем да доста користим језик *Теорије скупова*. Трудим се да избацујем из решења задатака саме текстуалне елементе и кад год је то могуће заменим одговарајућим појмом Теорије скупова. Реакције деце су позитивне, јер „Учимо језик који цео свет разуме“.

Овим закључком бих свој рад привела крају. Захваљујем се свом ментору проф. Александру Липковском на дивној сарадњи и разумевању. Искористила бих прилику и да се захвалим својој породици на подршци и великој помоћи, посебно свом оцу који овај рад прижељкује годинама.

„ Најбољи начин да се нешто научи јесте да се самостално открије“.

Д. Пољa

7. ЛИТЕРАТУРА

1. *Уџбеник из математике за 5. разред основне школе*

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд, издање: 2010,2012 и 2016

2. *Уџбеник из математике за 6. разред основне школе*

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд, издање: 2010,2012 и 2016

3. *Уџбеник из математике за 7. разред основне школе*

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд, издање: 2010,2012 и 2016

4.Уџбеник из математике за 8. разред основне школе

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд, издање: 2010,2012 и 2016

5. Приручник за наставнике из математике за пети разред

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд 2013.

6. Приручник за наставнике из математике за шести разред

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд 2013.

7. Приручник за наставнике из математике за седми разред

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд 2013.

8. Приручник за наставнике из математике за осми разред

Др Небојша Икодиновић, Др Слађана Димитријевић

Издавачка кућа Клет, Београд 2013.

9. Историја и филозофија математике

Милан Божић

Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2002.

10. Методика наставе математике

М.Егерић, М. Дејић

Учитељски факултет, Јагодина

11. Скупови-што су и каква им је улога

Курепа, Школска књига, Загреб

12. Увод у математику - скупови, структуре, бројеви.

Техничка књига, Загреб

13. Основе алгебре и геометрије

Пикула,Марковић

Учитељски факултет, Ужице

14. Настава математике

Друштво математичара Србије, Београд

www.elib.mi.sanu.ac.rs