МИЛАН С. НЕДИЋ

ИНФИНИТЕЗИМАЛНИ РАЧУН

ЗА VIII РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГО ИЗДАЊЕ

— СА ЗНАТНО ПОВЕЋАНОМ ЗБИРКОМ ЗАДАТАКА —

Овај уџбеник, по саслушању Главног просветног савета С. бр. 654 од 6 јула 1939 године, одобрен је одлуком Господина Министра просвете IV бр. 9913 од 31 јула 1939 године. Ово одобрење важи до краја 1942/43 школске године.

БЕОГРАД
ИЗДАЊЕ КРЕДИТНЕ И ПРИПОМОЋНЕ ЗАДРУГЕ
ПРОФЕСОРСКОГ ДРУШТВА
1939

БЕОГРАД 1939
За штампарију „Зора", Космајска 24 | Телефон 29-920 |
Богомир М. Јовановић, штампар, Поп Лукина ул. број 4.

ИНФИНИТЕЗИМАЛНИ РАЧУН

од професора М. С. НЕДИЋА

I. — ИЗВОДИ

1. — ФУНКЦИЈА

Ми смо досад видели функцију много пута. Знамо да је функција једна количина (рецимо y) која зависи од вредности једне или више промењљивих количина (x, z и др.).

Површина p једнога квадрата јесте функција његове стране a:

$$p = a^2 \qquad p = f(a).$$

Површина ваљка P је функција његове висине и полупречника његове основице:

$$P = 2r\pi\ (r + h), \qquad P = f\ (r,\ h).$$

Запремина коцке је функција њене ивице a:

$$V = a^3, \qquad V = f\ (a).$$

Видели смо и многе друге. Знамо да ордината једне тачке на правој линији зависи од њене апсцисе. Рецимо:

$$y = 3x + 1, \qquad y = f\ (x).$$

Знамо да ордината сваке тачке на параболи зависи од њене апсцисе. Рецимо:

$$y = x^2 - 5x + 5 \qquad y = f\ (x).$$

Ако алгебарским изразима изразимо да једна количина зависи од друге, добијамо једну једначину. На пр.:

$$y = 4x - 1, \qquad y = x^2 + 2 \text{ итд.}$$

Узмимо један суд у облику ваљка. Сипамо у њега воде до врха. Колика ће бити запремина воде у њему?

$$V = \pi r^2 h.$$

Може ли се мењати та запремина? Може. Од чега зависи? Од тога докле сипамо воде, тј. од висине воденог стуба у суду. Ако се мења висина воденог стуба у суду, мењаће се и запремина воде. Да напишемо то сад овако:

$$V = \pi r^2 x.$$

Независно промењљива. — Ми можемо мењати висину воденог стуба како ми хоћемо. Значи, x можемо мењати по својој вољи. Таква промењљива коју ми можемо мењати по својој вољи зове се независно промењљива. Овде је висина x воденог стуба та независно промењљива.

Зависно промењљива. — А колика ће бити запремина кад се мења x? Она ће бити онаква како то прописује образац за запремину ваљка:

$$y = \pi r^2 x.$$

На пр. кад узмемо да је $r = 5$ см, па мењамо x, биће:

за $x = 1$ см.	$y = 3{,}14 \,.\, 5^2 \,.\, 1$
за $x = 2$ см.	$y = 3{,}14 \,.\, 5^2 \,.\, 2$
за $x = 3$ см.	$y = 3{,}14 \,.\, 5^2 \,.\, 3$ Итд.

Икс се мења како ми хоћемо, а y се мења онако како то прописује једначина којом је изражена веза између x и y. Икс се мења како хоћемо. Ипсилон се мења како мора да се мења. Његове промене зависе од дате једначине у коју уносимо разне вредности икса. Ипсилон зависи од икса онако како то прописује образац $\pi r^2 x$. Зато се ипсилон зове зависно промењљива. Зависно промењљива y зове се још и функција икса. Рећи „ипсилон је функција икса" или „ипсилон зависи од икса" исто је.

Стална количина. — Сталне количине су оне количине које се не мењају. На пр. у обрасцу за обим круга $y = 2\pi x$ мењају се кружни полупречник x и кружни обим y. Сталне су количине 2 и $\pi = 3{,}1415...$ Оне свуда, у свима рачунима, имају увек исте вредности.

Апсолутно стална количина. — Количина која не може да се мења и кад бисмо ми то хтели зове се апсолутно стална количина. На пр. у обрасцу за кружни обим $y = 2\pi r$ апсолутно сталне количине су 2 и π. Оне се овде не мењају. Али оне и не могу да се мењају. Оне увек имају своје сталне вредности.

Релативно сталне количине. — Имају ли сви ваљкасти судови исто дно? Немају. Може ли се мењати полупречник ваљкове основе? Може. Ми смо у горњем примеру узели да сипамо воде увек у исти суд само до разних висина. Тада се мењала висина воденог стуба. Задржали смо исти суд. Значи полупречник се није мењао. При сипању воде у ваљкасти суд биле су промењљиве висина и запремина. Сталне количине су биле r и π. Оне се нису мењале. Само што π није ни могло да се мења. Оно је апсолутно стална количина. Али r је могло да се мења, а није се мењало. Зато се у нашем примеру r зове релативно стална количина.

Зависност од више промењљивих. — Узмимо сад овај случај. Имамо ваљкасте судове разних основица, па сипамо у њих воде. Тада се независно мења полупречник x. (Јер ми сами бирамо суд у који ћемо сипати воде). Независно се мења и висина y (јер ми сипамо воде докле хоћемо). Зависно се мења запремина z јер она зависи и од x и од y по обрасцу $V = \pi r^2 h$, тј. овде $z = \pi x^2 y$). Овде је сад запремина функција двеју независно промењљивих: полупречника икс и висине ипсилон:

$$z = \pi x^2 y.$$

Ми то пишемо овако:

$$z = f\,(x, y) \text{ или } f\,(x, y) = \pi x^2 y.$$

Емпиричке функције. — Али једна промењљива количина може зависити од неке друге промењљиве количине тако, да ми ту зависност не умемо изразити никаквим математичким изразом.

Ако на пр. меримо температуру у једном одређеном месту у току од 24 часа, имаћемо у свакоме тренутку x једну одређену температуру y. Температура зависи од тренутка у коме је меримо. Температура је функција времена. Ми је можемо прочитати на термометру. Можемо у свакоме часу између 0 и 24 часа записати температуру која му одговара. Међутим нема математичког израза којим би се изразила веза између ових двеју промењљивих количина (времена и температуре).

Код оваквих функција можемо пратити промене зависно и независно промењљивих. Њихову зависност можемо утврдити само искуством. Зато се такве функције зову *емпиричке функције*. Наука се труди да у механици, физици, хемији и др. емпиричке функције изрази математичким језиком. Она се труди да уочену зависност изрази неким математичким изразом, образцима, те да тако математички изрази закон посматране природне појаве. Зашто?

Математичке функције. — Математичке функције су оне функције где је веза између независно промењљиве и зависно промењљиве дата неким математичким изразом. На пр:

$$y = x, \qquad y = x^2 - 5, \qquad y = 2\pi x^2 \text{ итд.}$$

Математичке функције делимо на *алгебарске функције* и на *трансцендентне функције.*

Алгебарске функције. — Функције су алгебарске ако су изражене коначним бројем ступњева једне од ових алгебарских радњи:

Сабирањем: $z = 3x + 2y$ (свега два сабирка)

Одузимањем: $z = 5x - 6y$ (два члана)

Множењем: $z = 3x \cdot 2y$ (свега два чиниоца)

Дељењем: $z = \frac{x}{y}$

Степеновањем сталним, рационалним изложиоцем:

$$f(x) = x^3. \qquad f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

Алгебарске функције деле се на:

1. — *Рационалне алгебарске функције:*

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Ово је цела алгебарска рационална функција.

b) $f(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x + c}$. Ово је разломљена алгебарска рационална функција.

2. — *Ирационалне алгебарске функције:*

То су оне алгебарске функције, код којих има разломљених изложилаца:

$$f(x) = 3(x^2 - 5x + 6)^{\frac{1}{2}}$$

Трансцендентне функције. — То су оне функције које се не могу изразити ниједном од побројаних алгебарских радњи.

Такве су функције на пр. ове функције:

$$f(x) = \log x, \qquad y = x^{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \qquad f(x) = \sin x \text{ итд.}$$

Експлицитне функције. — Функцију изражавамо једначином. Ако је та једначина решена по функцији, такву функцију зовемо експлицитна функција. Такве су на пр. ове функције:

$$y = 2x + 3 \qquad y = 2x^2 - 7 \qquad y = 3x^3 \text{ итд.}$$

Али горње једначине могу бити решене и по иксу. Тада би оне овако изгледале:

$$x = \frac{y - 3}{2} \qquad x = \sqrt{\frac{y + 7}{2}} \qquad x = \sqrt[3]{\frac{y}{3}}$$

Тада ми кажемо да су то експлицитне функције ипсилона и пишемо овако:

$$x = f(y).$$

Имплицитне функције. — Ако једначина којом је изражена функција није решена ни по једној променљивој, такву функцију зовемо имплицитна функција. Такве су на пр. ове функције:

$$2x + 3y - 6 = 0 \qquad y - 2x^2 + 4 = 0 \qquad y - 2x^3 = 0.$$

Такве функције обележавамо овако:

$$f(x, y) = 0.$$

ВЕЖБАЊА

1. — Изрази површину троугла као функцију основице.

2. — Изрази површину троугла као функцију висине.

3. — Изрази површину троугла као функцију од r.

4. — Изрази површину троугла као функцију од s (полуобим).

5. — Изрази површину троугла као функцију од R.

6. — Изрази површину троугла као функцију једног његовог угла.

7. — Изрази површину ваљка као функцију од r.

8. — Изрази површину ваљка као функцију од h.

9. — Изрази површину круга као функцију од r.

10. — Изрази запремину праве купе као функцију од r.

11. — Изрази запремину зарубљене купе као функцију од r и R.

12. — Изрази запремину зарубљене пирамиде као функцију од b и B.

13. — Изрази запремину лопте као функцију од R.

14. — Изрази површину лопте као функцију од R.

15. — Наведи пример апсолутно сталне количине.

16. — Наведи пример релативно сталне количине.

17. — Наведи неки пример емпиричке функције.

18. — Напиши неколико експлицитних функција.

19. — Напиши неколико имплицитних функција.

За све ове функције кажи какве су (којој врсти припадају):

20. $y = \frac{x}{2}$

23. $y = x^{\sqrt{x}}$

21. $y = \sqrt{x+1}$

22. $y = x^{0,(2)}$

24. $y = 3tgx$

25. $y = \frac{x+1}{x}$

2. — ГРАНИЦА

Дељење нулом нема смисла. — Поделити број a бројем b значи наћи такав број c, који помножен са b даје a.

$$a : b = c \qquad \text{значи} \quad bc = a.$$

Шта би значило ово :

$$a : 0 = \qquad ?$$

Треба наћи један број који помножен нулом даје један број који није нула. Ми знамо да такав број не постоји. (Пошто сваки број помножен нулом даје нулу, а не неки други број). Види се да дељење нулом нема смисла.

Граница. — Али ми смо често пута приморани да видимо шта значи један количник у коме је делилац нула. То ћемо показати на примеру. На пр. нацртати функцију

$$y = \frac{1}{x-3}$$

Начинимо као и досад таблицу неколико вредности за x и y.

x	10	9	8	7	6	5	4	$3\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{10}$	3,01	3,001
y	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{4}{3}$	2	4	10	100	1000

x	3,0001	3,00001	3,000001	3,0000001
y	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000

Овде се x приближава броју 3. Оно *тежи* да постане 3. Ми то пишемо овако : $x \to 3$ и читамо: „x тежи ка 3".

Можемо ли израчунати колико је y, кад је $x = 3$? Не можемо, јер нема смисла делити нулом. Али ми можемо тачно одредити куда тежи y кад x тежи вредности 3. Ми можемо одредити **границу** за y кад x тежи ка 3. Видимо да y једнако *и* веома брзо расте кад се x приближава броју 3. Што је x све ближе броју 3 y је све веће. Ми можемо учинити да разлика x—3 постане мања од сваког ма како малог броја датог унапред. На пр. да учинимо да x—3 буде мање од 0,000000001. Ставићемо $x = 3{,}0000000001$, па ће бити $x - 3 =$ $= 3{,}0000000001 - 3 < 0{,}000000001$. А колико је тада y? Оно је $y = 10\,000\,000\,000\,000$. Икс бива све мање и све ближе уз 3, а ипсилон постаје већи од сваког ма како великог унапред датог броја. Знамо да се тада каже за $x - 3$ да је **бесконачно мало,** а за овако y да је **бесконачно велико.** Ето томе тежи y, кад x тежи ка 3. Нашли смо **границу** за y. Ми то пишемо овако :

$$\lim_{x \to 3} y = \infty$$

То читамо: „Лимес ипсилон равно бесконачно, кад икс тежи ка три."

Знак *lim* долази од латинске речи *limes*, која значи *граница*.

2. — Границу смо сретали много пута досад. Знамо шта бива са обимом правилног полигона уписаног у кругу кад му број страна непрекидно расте. Тај обим ми не можемо постепено израчунавати, јер је бесконачан низ рачунских радњи које би требало да извршимо. (Треба најпре обим, рецимо, уписаног квадрата, па обим уписаног осмоугаоника, па обим уписаног шеснаестоугаоника, па обим уписаног правилног тридесетдвоугаоника итд. Тај низ никад не бисмо довршили). Али ми видимо ово: што је већи број страна тога многоугаоника, његов обим се све мање разликује од круга. Обележимо обим тога ентоугаоника са $2s$, а обим круга у коме је он уписан са $2S$. Где је граница ширењу обима $2s$? Кружни обим му је граница.

$$\lim_{n \to \infty} 2s = S.$$

3. — Имамо правилну призму чија је основица уписана у кругу. Онда можемо узети да је таква призма уписана у ваљку. Нека сад њен број страна n једнако расте. Шта је граница запремине такве правилне призме? То је ваљак исте висине, у коме је уписана та призма. Обележимо запремину призме са V_n, а запремину ваљка са V. Тада можемо писати:

$$\lim_{n \to \infty} V_n = V.$$

4. — Правилан полигон је описан око круга. Број страна му једнако расте. Где му је граница? Граница му је круг око кога је он описан.

Па шта је граница једне функције? То је вредност коју не можемо израчунати постепеним рачунским радњама, али је можемо тачно одредити кад пустимо независно промењљиву да тежи вредности којој је пошла.

5 — Да израчунамо вредност периодичног разломка 0,(5).

$$0,(5) = S_n = 0{,}5 + 0{,}05 + 0{,}005 + 0{,}0005 + \dots$$

Можемо ли постепеним рачунањем израчунати тачну вредност овога збира? Не можемо, јер је његов збир сабирака бесконачан. Ми ћемо га написати овако:

$$S = \frac{0{,}5\ (1 - q^n)}{1 - q}$$

Ако је $n = 2$, биће:

$$S_2 = \frac{0{,}5\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2\right]}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{0{,}5}{0{,}9}(1 - 0{,}01) = \frac{5}{9} \cdot 0{,}99 = 5 \cdot 0{,}11 = 0{,}55$$

Је ли то вредност нашег разломка 0, (5)? Није.

Узмимо $n = 3$. Тада је

$$S_3 = \frac{0{,}5}{0{,}9}\ (1 - 0{,}001) = \frac{5}{9} \cdot 0{,}999 = 5 \cdot 0{,}111 = 0{,}555$$

Добили смо мало тачнију вредност. Је ли то вредност нашег разломка, 0, (5)? Није. Онда узмимо $n = 4$. Тада ће бити:

$$S_4 = \frac{5}{9} \cdot 0{,}9999 = 5 \cdot 0{,}1111 = 0{,}5555.$$

Добили смо још тачнију вредност, али ни она није вредност нашег разломка 0, (5).

Видимо да се то постепеним рачунањем не може одредити. Али видимо и ово:

1) У изразу $0{,}5 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q}$ мења се само n, јер је

$$0{,}5 \cdot \frac{(1-q^n)}{1-q} = \frac{5}{9} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]$$

2) n једнако расте и тежи да постане веће од ма како велике количине. Значи $n \to \infty$. Остаје нам да одредимо чему тежи $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ за $n \to \infty$. Али ми знамо да је $\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{1}{10^n}$. Бројилац се не мења, а именилац једнако расте. Знамо да разломак опада кад му именилац расте. Али именилац постаје све већи и тежи бесконачноме. Тада разломак бива све мањи. Он се све мање разликује од нуле. Он бива мањи од сваке ма како мале унапред дате мале количине. Знамо да је онда $\frac{1}{10^n}$ бесконачно мала количина. Па где јој је граница? Не може опадати даље од нуле, пошто је ова количина позитивна. Ево њене границе:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{10^n} = 0.$$

А шта бива са S_n? И оно достиже своју границу.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S = \lim_{n \to \infty} \frac{5}{9}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = \frac{5}{9}\ (1 - 0) = \frac{5}{9}$$

Отуда је $0,(5) = \frac{5}{9}$.

6. — Одредити границу израза

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{за } x \to 2$$

Написаћемо га у другом облику

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)\ (x + 2)}{x - 2} = x + 2$$

Сад ћемо пустити да $x \to 2$. Сада је:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4.$$

7. — *Одредити границу израза* $\frac{x + 3}{x}$ за $x \to \infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x + 3}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right) = 1 + 0 = 1.$$

8. — *Одредити границу израза* $\frac{5 - x}{x}$ за $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{5 - x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{x} - 1\right) = \infty - 1 = \infty.$$

9. — *Одредити границу израза*

$$f\ (x) = \frac{x^3 + 2}{x - 3} \quad \text{за } x \to 3.$$

Пустићемо да x тежи тројци растући и опадајући.

x	1	2	2,25	2,5	2,75	2,9	2,99	2,9999
f (x)	—1,5	—10	—17,9	—35,25	—91,2	—263,89	—2 873,09	—26 993

x	5	4	3,75	3,5	3,25	3,15	3,09	3,000009
f (x)	63,5	66	72,7	89,75	145,3	221,7	350,04	3 222 249,2..

Види се ово :

Кад x расте и тежи ка 3, функција је негативна и једнако расте по апсолутној вредности. Што је x ближе тројци функција је све већа по апсолутној вредности. Пошто можемо учинити да разлика $x - 3$ буде по вољи мала, можемо дотерати функцију да има већу апсолутну вредност од сваке унапред дате ма како велике вредности. Значи функција тежи бесконачноме.

Исто је то у другом случају, само што је функција позитивна. Отуда је :

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 2}{x - 3} = \pm \infty$$

10. — *Одредити* $\lim_{x \to \infty} (x^2 + 3x + 7)$.

Написаћемо овако:

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 + 3x + 7) = \lim_{x \to \infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}\right)$$

Тада је

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = +\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{7}{x^2} = 0.$$

Отуда је

$$\lim_{x \to \infty} (x^2+3x+7) = \lim_{x \to \infty} x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right) = \infty(1+0+0) = \infty .\, 1 = +\infty$$

11. — *Одредити* $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x+1}\right)$

То је даље

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right) = 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0 \cdot 1 = 0$$

12. — *Одредити* $\lim_{x \to 0} \frac{3}{\cos x + \operatorname{cotg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{3}{\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}}$

То је даље

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 \sin x}{\sin x \cos x + \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{6 \sin x}{\sin 2x + 2 \cos x} = \frac{0}{0 + 2 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

ВЕЖБАЊА

Одреди границе ових функција:

1. $y = x + 1$, $x \to 0$
2. $x = \frac{3}{x}$, $x \to \infty$
3. $y = 2x - 3$, $x \to \infty$
4. $y = 3 + x$, $x \to 0$
5. $y = 4 - x.$, $x \to 0$
6. $y = 2x - 1$, $x \leftarrow 0$
7. $y = 1 + 3x$, $x \to 0$
8. $y = 2 + 5x + 3x^2$, $x \to \infty$
9. $y = 4x^2 + 9x - 7$, $x \to \infty$
10. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $x \to 0$
11. $y = 3x^3 + 2x^2 + 3x - 4$, $x \to \infty$
12. $y = 2x^2 - 7x + 5$, $x \to \infty$
13. $y = \frac{1}{x}$, $x \to 0$
14. $y = \frac{5}{x - 5}$, $x \to 5$
15. $y = \frac{1}{\frac{1}{x}}$, $x \to \infty$
16. $y = \frac{x + 1}{x}$, $x \to \infty$
17. $y = \frac{1 - 2x}{x}$, $x \to \infty$
18. $y = \frac{1 - x}{5 - x}$, $x \to \infty$
19. $y = \frac{x - x^2}{4x^2 - 7}$, $x \to \infty$

20. $\lim\limits_{x \to 3} y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

21. $\lim\limits_{x \to 0} y = \dfrac{2}{1 - cosx}$

22. $y = \dfrac{1}{1 - tgx}$, $x \to \dfrac{\pi}{4}$

23. $x = \dfrac{3}{sin\,2x + cosx}$, $x \to \dfrac{\pi}{2}$

24. $\lim\limits_{x \to 0} x = \dfrac{4}{3\,sinx + cotgx}$

25. $y = \dfrac{7}{cos\dfrac{x}{2} + 1}$, $x \to 2\pi$

26. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

27. $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x}$

(Напиши најпре корен у облику степена).

28. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 + x}{x}\right)^2$

29. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$

30. $\dfrac{3x^3 + 6x^2}{24x^4 - 15x^2}$, $x \to \sqrt{\dfrac{5}{8}}$

31. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2}{1 - x^2}\right)$

32. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax + b}{c - dx}$ (Најпре подели са x)

33. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - 1}{1 - \sqrt{x}}$ (Може ли овај разломак да се доведе и на неки други облик?)

34. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + 2x}{x^2 - 5x}$

35. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 7}$

36. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$

37. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x - 1)^2}$

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2tgx}{3x}$

---

3. — ИЗВОДИ

Прираштај. — Видели смо да се са променом независно промењљиве мења и функција.

$$y = 2x - 1 \qquad \text{I } x = 3 \quad y = 5 \qquad \text{II } x = 5 \quad y = 9$$

Вредност за коју порасте независно промењљива зове се прираштај независно промењљиве. Њега ћемо обележити са h, или са $\triangle x$. То читамо: „Делта икс". У нашем примеру је $h = 2$. (Од 3 порасло на 5). Вредност за коју порасте функција кад порасте независно промењљива зове се прираштај функције. Њега ћемо обележити са $\triangle y$. То читамо: „Делта ипсилон." Овде је прираштај функције 4. (Од 5 порасла на 9.). Прираштај функције можемо овако израчунати:

$$f(x) = 2x - 1$$
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5.$$
$$f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9.$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = f(3+2) - f(3) = f(5) - f(3) = 9 - 5 = 4.$$

Прираштај може бити позитиван и негативан.

Пример. $f(x) = x^2 + 4x + 2$

I $f(2) = 4 + 8 + 2 = 14$

II $f(1) = 1 + 4 + 2 = 7$

Овде је прираштај независно промењљиве $\qquad h = 1 - 2 = -1.$

Овде је прираштај функције $\qquad \Delta y = 7 - 14 = -7$

Оба су прираштаја негативна.

Може се десити да прираштај независно промењљиве буде позитиван, а прираштај функције негативан.

$$y = \frac{1}{x} \qquad f(1) = 1 \qquad f(2) = \frac{1}{2}$$

Прираштај независно промењљиве $\qquad h = 2 - 1 = +1.$

Прираштај функције $\qquad \Delta y = \dfrac{1}{2} - 1 = -\dfrac{1}{2}$

Може се десити да прираштај независно промењљиве буде негативан, а прираштај функције позитиван.

$$y = x^2 \qquad f(-1) = 1 \qquad f(-3) = 9$$

Прираштај независно промењљиве

$$h = (-3) - (-1) = -2$$

Прираштај функције $\qquad \Delta y = 9 - 1 = +8$

Непрекидна функција. — Функција y независно промењиве x је непрекидна на месту $x = m$, ако испуњава овај услов:

Кад прираштај h независно промењиве, који је она добила код вредности m (То значи постала $m + h$) тежи нули, и прираштај функције Δy тежи нули.

На пр. функција $y = x^2 + 1$ је непрекидна на месту $x = 1$. Да се уверимо. Дајмо независно промењивој прираштај h. Тада ће бити:

$$\Delta y = (x + h)^2 + 1 - (x^2 + 1) = x^2 + 2hx + h^2 + 1 - x^2 - 1 = 2xh + h^2.$$

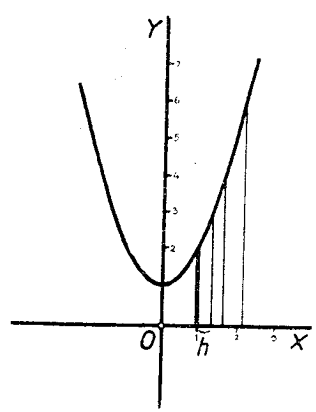
За $x = 1$ биће:

$$\Delta y = 2h + h^2$$

Пустимо сад да h тежи нули.

$$\lim_{h \to 0} \Delta y = \lim_{h \to 0} (2h + h^2) = 0 + 0 = 0.$$

Функција је непрекидна за $x = 1$. Са слике *1* се то лепо види. Кад се x постепено мења од $x = 1$, функција се постепено мења. То значи кад се x постепено, лагано мења око вредности $x = 1$ тако исто се мења и функција. Функција не скаче с једне вредности на другу. Она не прави скокове.



Сл. 1.

Прекидна функција. — Функција је прекидна за вредност $x = m$, кад не испуњава горе постављени услов. Узмимо функцију $y = \frac{1}{x-2}$. Она је одређена свуда, сем на месту $x = 2$, јер тада наш разломак нема смисла. Ми хоћемо да испитамо каква је та функција баш на томе месту $x = 2$.

Дајмо иксу прираштај h. Тада је прираштај функције

$$\Delta y = \frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2} \quad \text{или} \quad \Delta y = -\frac{h}{(x-2)(x+h-2)}.$$

Ако сад пустимо прираштај h да тежи нули, именилац у прираштају функције тежи да постане $(x-2)^2$ докле је год x различито од 2. Зато и прираштај функције (Δy) тежи

да постане $\frac{0}{(x-2)^2} = 0$. То значи да је функција $\frac{1}{x-2}$ непрекидна у свакоме месту за $x \neq 2$. Али за $x = 2$, кад прираштај h тежи нули, у изразу за Δy

$$\Delta y = \frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}$$

оба имениоца постају нуле. У Δy овако написаном

$$\Delta y = -\frac{h}{(x-2)(x+h-2)}$$

и бројилац и именилац постају у исти мах нуле кад h тежи нули.

Отуда је за

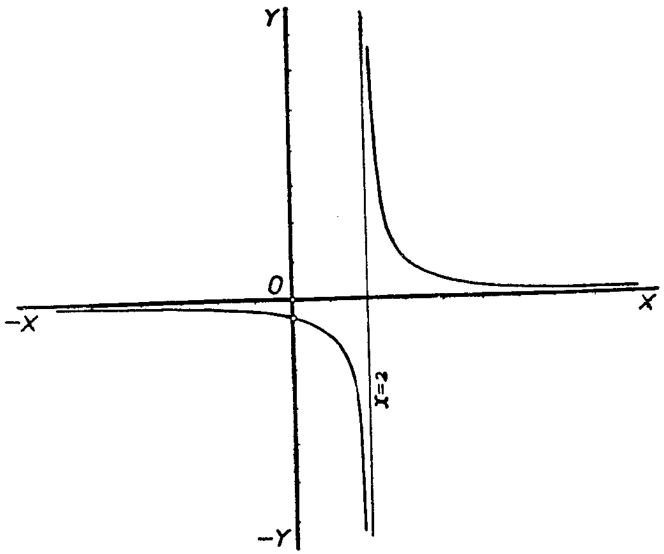
$\Delta y = \frac{1}{x+h-2} - \frac{2}{x-2}$	$\Delta y = -\frac{h}{(x-2)(x+h-2)}$
$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ \text{за } x = 2}} \Delta y = \infty - \infty$	$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ \text{за } x = 2}} \Delta y = -\frac{0}{0}.$

Добивени изрази за границу прираштаја функције *нису нуле*. Они су неке друге вредности у неодређеноме облику $\left(\infty - \infty \text{ или } -\frac{0}{0}\right)$. То значи да функција $\frac{1}{x-2}$ може бити прекидна у месту $x = 2$.

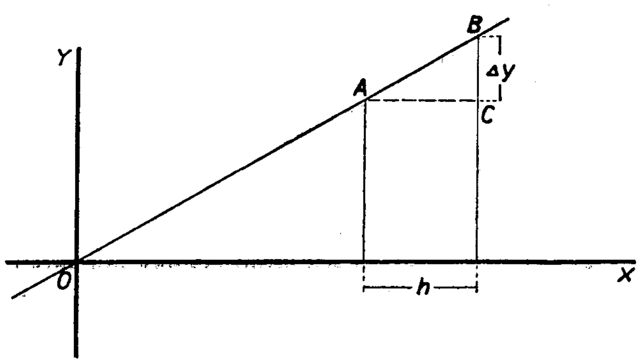
За вредност икса бескрајно мало мању од 2 у функцији $\frac{1}{x-2}$ именилац добија бескрајно малу негативну вредност, те функција има негативну бескрајно велику вредност $(-\infty)$. Ако се за x узме број бескрајно мало већи од 2, у функцији $\frac{1}{x-2}$ именилац добија бескрајно малу позитивну вредност, те функција $\frac{1}{x-2}$ добија позитивну бескрајно велику вредност $(+\infty)$. На самоме месту $x = 2$ задата функција скаче са $-\infty$ на $+\infty$. Она је на томе месту *прекидна.*

Види се да прираштај наше функције не тежи нули кад h тежи нули. Наша функција је прекидна на месту $x = 2$.

Кад је нацртамо (сл. 2) видимо да је то тачно. У тачци $x = 2$ функција прави скок од $-\infty$ до $+\infty$. Она је ту прекидна.



Сл. 2.

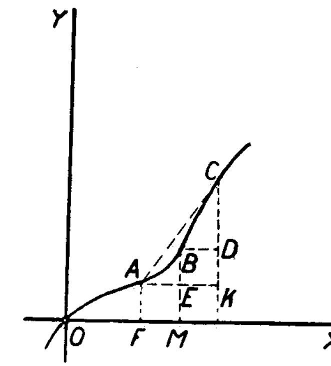


Сл. 3.

Пад између двеју тачака праве линије. — Видели смо код праве линије $y = ax + b$ да a претставља пад те линије. А шта је пад између двеју тачака на правој линији? То је однос прираштаја ординате и прираштаја апсцисе (Сл. 3).

$$a = \frac{BC}{AC} = \frac{\Delta y}{h}.$$

Код праве линије пад је **свуда исти.** Кад га одредимо **једном** између двеју тачака, **немамо** потребе да га одређујемо и на неком другом месту.



Сл. 4

Пад на кривој линији. — На кривој линији није пад свуда исти. На сл. 4 се види да је

пад између тачака O и A $\quad \frac{AF}{OF} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

пад између тачака A и B $\quad \frac{BE}{AE} = \frac{1}{1} = 1$

пад између тачака B и C $\quad \frac{CD}{BD} = \frac{2}{1} = 2$

пад између тачака A и C $\quad \frac{CK}{AK} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$

Пад између двеју тачака на правој линији *тачно* нам казује како се та линија креће између двеју тачака. А пад на кривој линији? На пр. од A до C пад је 1,5, али од A до B је 1, а од B до C је 2. Значи, од A до C пад није свуда 1,5. Пад између двеју тачака на кривој линији ми зовемо **средњи пад.** Зашто? Зато што је то просечни пад. Он не показује сасвим тачно кретање криве линије између двеју тачака. Добили смо да је пад од A до C 1,5. Тачније би било да уметнемо између A и C још једну тачку, рецимо B, па да кажемо да је пад од A до B 1, а од B до C 2. Тада видимо да се крива најпре доста благо дизала до B, па се одатле нагло дизала до C.

Пад на кривој одредићемо све тачније што будемо ближе узели две тачке на тој кривој.

А како одређујемо средњи пад? Начинимо количник прираштаја функције и прираштаја независно промењиве. На пр. пад од A до B.

Координате тачке B:	$x_2 = OM$	$y_2 = MB$:
Координате тачке A:	$x_1 = OF$	$y_1 = FA$

Средњи пад је:

$$Q = \frac{EB}{AE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{прираштај функције}}{\text{прираштај независно промењљиве}}$$

$$Q = \frac{\Delta y}{h}$$

Тај количник неће бити свуда исти. Он *зависи* од размака у коме посматрамо кретање криве линије. То значи да тај количник зависи од размака двеју тачака између којих одређујемо средњи пад. Наше Q зависи од прираштаја h независно промењљиве x. Кад је било $h = 2$ (од O до F), имали смо:

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Кад је било $h = 1$ (од A до B), имали смо:

$$Q = \frac{\Delta y}{1} = \frac{y_2 - y_1}{1} = \frac{2 - 1}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Наш количник Q ипак донекле показује како се понаша наша крива у извесним размацима. Он нам то казује све тачније што ми узимамо h мање.

Извод. — Узмимо тачку M_1 на кривој $y = 2x^2$ (сл. 5). Њене су координате $x_1 = 4$, $y_1 = 32$. Хоћемо да видимо како се понаша та крива кад по њој прилазимо тачци M_1 од тачке M (3,18). Тражићемо количник прираштаја.

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_1 - y}{h} = \frac{32 - 18}{1} = \frac{14}{1} = 14$$

Приђимо ближе тачки M_1. Узмимо $x = 3\frac{1}{2}$. Тада је:

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{32 - 24{,}5}{0{,}5} = \frac{7{,}5}{0{,}5} = \frac{75}{5} = 15$$

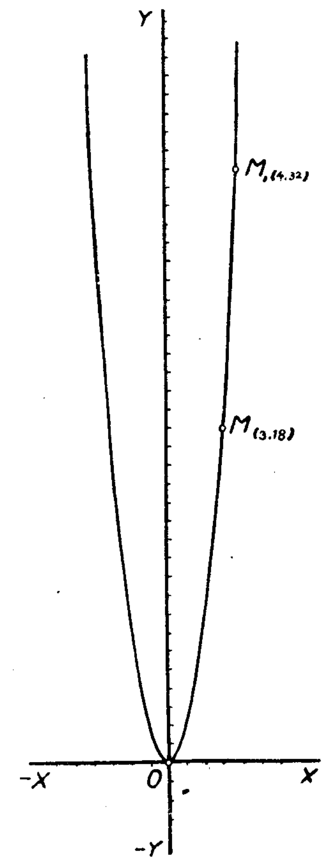
Приђимо још ближе тачки M_1. Узмимо $x = 3{,}99$. Тада је:

$$Q = \frac{\Delta y}{h} = \frac{y_1 - y}{0{,}01} = \frac{32 - 31{,}8402}{0{,}01} = \frac{0{,}1598}{0{,}01} = \frac{15{,}98}{1} = 15{,}98$$

Види се да можемо утврдити промену функције у свакоме размаку. Тај размак можемо по вољи смањивати. Ми се све више ближимо тачки M_1. Можемо јој се приближити колико ми хоћемо. Значи можемо начинити оно наше h малим колико хоћемо. Можемо га учинити мањим од ма како малог броја датог унапред. То значи кад се ми приближавамо

тачки M_1, наше h тежи нули. Али кад h тежи нули, и наш количник Q тежи својој граници:

$lim\ Q = lim \frac{\Delta y}{h}$. Видели смо да је Q све ближе броју 16.



Сл. 5.

Да одредимо ту границу за горњу функцију $y = 2x^2$

Најпре да одредимо оба прираштаја.

Прираштај независно промењљиве биће h. Тада ће прираштај функције бити:

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = 2(x + h)^2 - 2x^2 = 2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2 = 4hx + 2h^2 = 2h(2x + h)$$

Количник прираштаја биће:

$$Q = \frac{2h\,(2x+h)}{h} = 2\,(2x+h).$$

Види се да наш количник прираштаја зависи од размака h. Али ми хоћемо да се оспособимо да одређујемо пад криве линије без обзира на тај размак. Значи, треба да се ослободимо онога h. Ако хоћемо да га се ослободимо, треба да пустимо да тежи нули. Тада ће и Q тежити извесноме броју. Тај број биће његова **граница.**

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} 2\,(2x+h) = 2\,.\,2x = 4x.$$

Гранична вредност нашег количника Q зависи сад само од x.

Гранична вредност количника прираштаја функције и прираштаја независно променљиве, кад h тежи нули, зове се **извод.**

Извод се обележава овако:

y' и чита се „ипсилон прим", или „први извод"
$f'(x)$ и чита се „еф прим од икс", или „први извод од икс".
$\lim Q = f'(x) = y'$.

За нашу функцију је:

$$y = 2x^2$$
$$y' = \lim_{h \to 0} Q = 4x.$$

За нашу тачку M_1 (4, 32) биће:

$$y' = 4x = 4.4 = 16.$$

Тангента. — Узмимо једну сечицу MM_1 на некој произвољној кривој (сл. 6). Претпоставимо да се једно тело кретало од M. У тачци M је независно променљива била $x = OA$. Кад је тело дошло у M_1, независно променљива је добила овај прираштај:

$$h = OA_1 - OA.$$

Прираштај функције је:

$$\Delta\, y = A_1 M_1 - AM.$$

Тада је количник прираштаја:

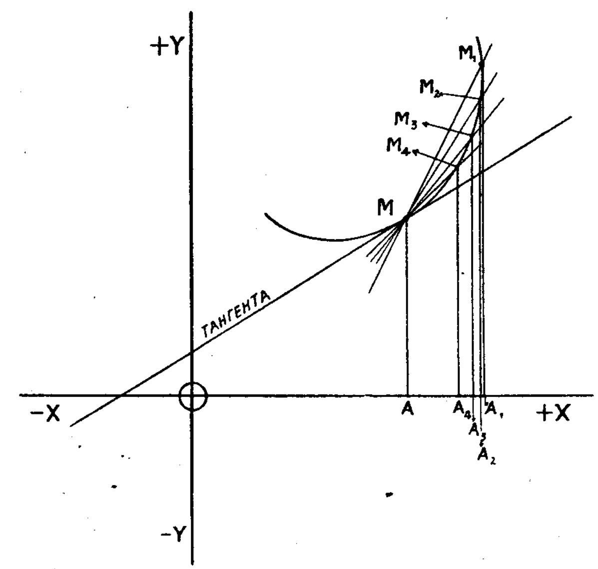
$$Q = \frac{A_1M_1 - AM}{OA_1 - OA}$$

Кад загледамо у слику, видимо да је то пад праве MM_1.

Ако се сад тело креће по нашој кривој из M_1 ка M, прираштаји ће опадати. Кад тело, идући од M_1 ка M, дође у тачку M_2, прираштаји ће бити: $h = OA_2 - OA$, $\triangle y = A_2M_2 - AM$.

Њихов количник ће бити:

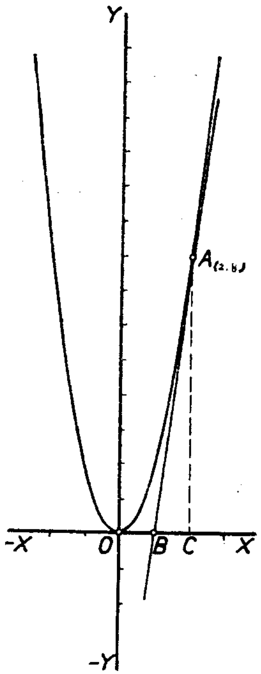
$$Q = \frac{A_2M_2 - AM}{OA_2 - OA}$$



Сл. 6.

Овај количник сад претставља пад праве MM_2.

Што год тело ближе прилази тачци **M,** прираштаји су све мањи, а њихов однос стално показује пад сечица MM_3, MM_4, итд. Најзад, прираштаји ће бити веома мали кад тело приђе сасвим близу тачке M. И у колико тело све више тежи тачки M, прираштаји теже нули тако, да кад се обе веома блиске тачке наше сечице поклопе у M, наша сечица постаје



Сл. 7

тангента, а количник прираштаја достиже своју границу и постаје **извод.** Он тада претставља пад тенгенте.

Према томе, **извод функције у за извесну вредност икса претставља пад тангенте у тачци чија је апсциса икс.**

Пример: — Дата је парабола $y = 2x^2$ (сл. 7.):

Нашли смо да је њен извод.

$$y' = 4x.$$

Узмимо једну њену тачку A. Њена је апсциса $x = 2$. Вредност првога извода за ту апсцису биће: $y' = 4x = 8$. То значи да је у тој тачци A пад тангенте 8. Кад погледамо на слику, видимо да је пад тангенте BA ово: $\dfrac{CA}{BC} = \dfrac{8}{1} = 8$.

4. — ИЗРАЧУНАВАЊЕ ИЗВОДА

I. — Изводи неких алгебарских функција

1. — Алгебарска цела функција I степена.

$$y = ax + b$$

Најпре њени прираштаји:

$$\Delta x = h$$

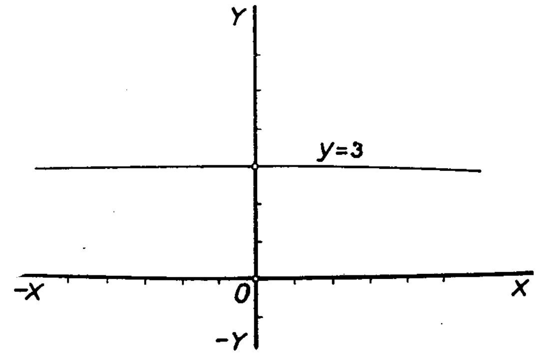
$$\Delta y = [a(x + h) + b] - (ax + b) = ah.$$

$$Q = \frac{ah}{h} = a.$$

Као што се види, количник прираштаја не зависи од икса. Он је сталан и раван a. Према томе, извод ће бити раван a:

$$y' = a.$$

Узмимо функцију $y = 3$. Она претставља једну праву (сл. 8).



Сл. 8.

Колики је њен пад? Њен пад је нула, пошто она не сече апсцисну осовину. Дакле:

$$y' = 0$$

Извод сталне количине је нула.

2. — Алгебарска цела функција II степена:

$$y = ax^2$$

Прираштај независно промењљиве: $\Delta x = h$.

Прираштај функције:

$$\Delta y = a(x + h)^2 - ax^2 = ax^2 + 2ahx + ah^2 - ax^2 = 2ahx + ah^2 = ah(2x + h).$$

$$Q = \frac{ah(2x + h)}{h} = a(2x + h).$$

$$y' = \lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} a(2x + h) = 2ax$$

Узмимо сад функцију $y = ax^2 + bx + c$.

Прираштај независно применљиве: $\Delta x = h$

Прираштај функције:

$$\Delta y = [a(x + h)^2 + b(x + h) + c] - (ax^2 + bx + c) =$$
$$= ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh + c - ax^2 - bx - c =$$
$$= 2ahx + ah^2 + bh = h(2ax + ah + b)$$

$$Q = \frac{h(2ax + ah + b)}{h} = 2ax + ah + b$$

$$y' = \lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} (2ax + ah + b) = 2ax + b$$

3. Алгебарска цела функција трећег степена.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = [a(x+h)^3 + b(x+h)^2 + c(x+h) + d] - (ax^3 + bx^2 + cx + d) =$$

$$= ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + bx^2 + 2bxh + bh^2 + cx + ch + d - ax^2 - bx^2 - cx - d =$$

$$= 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3 + 2bxh + bh^2 + ch =$$

$$= h(3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c)$$

$$Q = 3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c$$

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} (3ax^2 + 3axh + ah^2 + 2bx + bh + c) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Кад загледамо довде показане изводе, видимо ова два правила.

I. — **Извод степена** једнак је производу изложиоца и степена исте основе, али са изложиоцем умањеним за 1.

$$y = ax^2 \qquad y' = 2ax^1 = 2ax.$$

$$y = ax^3 \qquad y' = 3ax^2.$$

$$y = x^m \qquad y' = mx^{m-1}.$$

Можемо и засебно доказати да је за $y = x^m$ $y' = mx^{m-1}$.

$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = (x+h)^m - x^m = \frac{mhx^{m-1}}{1} + \frac{m(m-1)h^2x^{m-2}}{1\,.\,2} + \ldots\ldots + h^m.$$

$$Q = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)hx^{m-2}}{1\,.\,2} + \frac{m(m-1)(m-2)h^2x^{m-3}}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots + h^{m-1}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = y' = mx^{m-1}$$

II. **Извод полинома** раван је збиру извода свих његових чланова.

4. — Извод функције $y = \frac{1}{x}$.

Написаћемо је у овоме облику: $y = x^{-1}$. Отуда је

$$y' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

5. — Извод функције облика $y = \sqrt[n]{x^m}$

Написаћемо је у облику: $y = x^{\frac{m}{n}}$. Отуда је:

$$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} = \frac{m}{n} . x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{x^{m-n}}.$$

Примери.

I. — Нађи извод функције $y = 3x + 5$.

$$y' = 3.$$

II. — Нађи извод функције $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$.

$$f'(x) = 6x - 4.$$

III. — Нађи извод функције $y = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$.

$$y' = 9x^2 - 4x + 1.$$

IV. — Нађи извод функције $y = \sqrt{x}$.

Написаћемо је у овоме облику: $y = x^{\frac{1}{2}}$. Сад ћемо наћи извод

$$y' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

V. — Нађи извод функције $y = \sqrt{x^3}$. Написаћемо

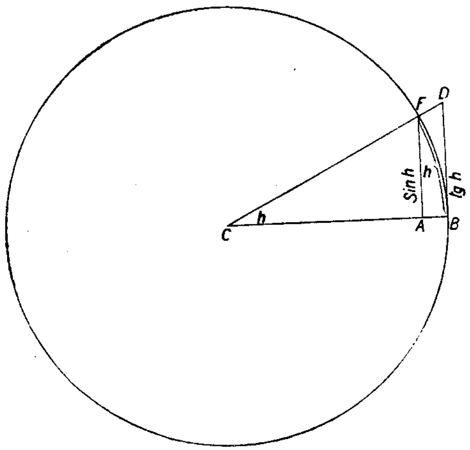
$$y = x^{\frac{3}{2}} \quad y' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

ИЗВОДИ ТРИГОМЕТРИСКИХ ФУНКЦИЈА.

1. — Извод функције $y = \sin x$.

Најпре ћемо одредити вредност за $\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$

Да бисмо одредили ову границу, нацртаћемо један круг, узети један лук h, његов синус и његову тангенту. На слици 9 је лук $BF = h$, дуж $AF = \sin h$, дуж $BD = tgh$. **Површина** кружног исечка CBF је већа од површине троугла CAF, а мања од површине трвугла CBD. Површина троугла CAF је $\frac{CA\,.\,AF}{2}$, тј.



Сл. 9.

$$\frac{\cos h \,.\, \sin h}{2}$$

Површина исечка је $\frac{h\,.\,1}{2}$.

Површина троугла CBD је $\frac{CB\,.\,BD}{2} = \frac{1\,.\,tgh}{2}$.

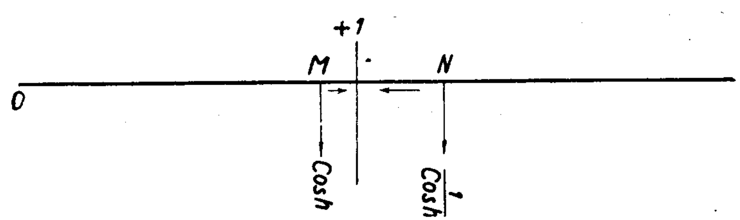
$\frac{\cos h \sin h}{2} < \frac{h}{2} < \frac{tgh}{2}$. Делимо скроз са $\frac{1}{2}$.

$\cos h \sin h < h < tgh$. Делимо скроз са $\sin h$:

$\cos h < \frac{h}{\sin h} < \frac{1}{\cos h}$. Узимамо сад реципрочне вредности:

(Тада се мењају знаци неједнакости) $\frac{1}{\cos h} > \frac{\sin h}{h} > \cosh$

Значи да се $\frac{\sinh}{h}$ налази између двеју вредности: између $\cosh$ од које је већа и између $\frac{1}{\cosh}$ од које је мања. То можемо



Сл. 10.

и нацртати (сл. 10). Кад h почне опадати, $\cosh$ **расте**, $\frac{1}{\cos h}$ опада. На нашој слици M се ближи ка 1, али и N се ближи ка 1. Разлика између M и N бива све мања. Али $\frac{\sin h}{h}$ је увек између M и N. Најзад, кад $\cosh$ и $\frac{1}{\cosh}$ достигну своје гра-

ничне вредности, постаје:

$$\lim_{h \to 0} \cos h = 1 \qquad \text{и} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h} = 1.$$

$\frac{\sin h}{h}$ је увек између тих двеју вредности. Кад се оне поклопе, и $\frac{\sinh}{h}$ се поклопи с њима:

$$\lim_{h \to 0.} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Сад можемо тражити извод функције $y = \sin x$.

$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = \sin(x + h) - \sin x$$

$$Q = \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

$$Q = \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$Q = \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right\}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = 1 \,.\, \cos x$$

$$y' = \cos x$$

Овако је сад:

$$f\,(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

2. — Извод функције $y = \cos x$

$$\Delta\ x = h$$

$$\Delta\ y = \cos(x + h) - \cos x$$

$$Q = \frac{-\,2 \cdot \sin\frac{2x + h}{2}.\ \sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$Q = \frac{-2 \sin \left(x + \frac{h}{2}\right) . \sin \frac{h}{2}}{h}$$

$$Q = -\sin \left(x + \frac{h}{2}\right) . \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$\lim_{h \to 0} Q = y' = -\sin (x + o) . 1$$

$$y' = -\sin x.$$

Дакле овако : $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \cos x. \\ f'(x) = -\sin x. \end{array} \right.$

Напомена. — Чим радиш са изводима, сви углови се мере *радијанима.*

ИЗВОД ПРОИЗВОДА

Наћи извод функције $y = (x + 1)\ (x - 1)$.

Ставимо $u\ (x) = x + 1 \qquad v\ (x) = x - 1$.

Тада је $y = u\ (x) . v\ (x) \qquad \Delta\ x = h$

$\Delta y = u\ (x + h) . v\ (x + h) - u\ (x)\ v\ (x)$

$$Q = \frac{u\ (x + h)\ v\ (x + h) - u\ (x)\ v\ (x)}{h}$$

Написаћемо горњи израз тако, да се види количник прираштаја функције u и количник прираштаја функције v. Бројиоцу ћемо одузети и додати израз

$$u\ (x)\ v\ (x + h)$$

$$Q = \frac{u\ (x+h)\ v\ (x+h) - u(x)\ v\ (x+h) + u(x)\ v\ (x+h) - u(x)\ v\ (x)}{h}$$

Сад из прва два члана у бројиоцу извлачимо заједнички чинилац и из друга два тако исто, па радимо даље.

$$Q = \frac{[u(x+h) - u\ x)] v(x+h) + u(x) [v(x+h) - v(x)]}{h}$$

$$Q = \frac{u\ (x+h) - u\ (x)}{h} \cdot v\ (x+h) + \frac{v\ (x+h) - v\ (x)}{h} \cdot u\ (x)$$

$$\lim_{h \to 0} Q = y' = u' \cdot v\ (x) + v' \cdot u(x)$$

Имамо $y = uv$, где су и u и v функције икса. Тада је:

$$y' = u' . v + u . v'$$

Сад можемо наћи извод функције $y = (x+1)\ (x-1)$.

Ставимо $u = x + 1 \qquad v = x - 1$. Тада ће бити:

$\qquad u' = 1 \qquad v' = 1$

$y' = u' . v + u . v'$

$y' = 1 . (x - 1) + (x + 1) . 1 = x - 1 + x + 1 = 2x.$

Да је тачно, можеш се и овако уверити :

$y = (x + 1)\ (x - 1)$

$y = x^2 - 1$

$y' = 2x.$

ИЗВОД КОЛИЧНИКА

Наћи извод функције $y = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}$

Наша функција y јесте количник двеју функција: оне у бројиоцу и оне у имениоцу. Обележимо те две функције овако: $u = 3x - 1$, $v = x^2 + 2$. Тада можемо да напишемо:

$$y = \frac{u\ (x)}{v\ (x)}$$

Сад ћемо тражити извод.

$\Delta x = h$

$$\Delta y = \frac{u\ (x + h)}{v\ (x + h)} - \frac{u\ (x)}{v\ (x)}$$

$$\Delta y = \frac{u(x+h)\ v\ (x) - u\ (x)\ v\ (x+h)}{v\ (x+h)\ v\ (x)}$$

Сад ћемо од бројиоца одузети количину $u\ (x)\ v\ (x)$ и додати му ту исту количину.

$$\Delta y = \frac{u(x+h)\ v\ (x) - u(x)\ v\ (x) + u(x)\ v\ (x) - u(x)\ v\ (x+h)}{v\ (x+h)\ v\ (x)}$$

Сад ћемо из прва два члана засебно, а из друга два члана засебно, изући заједнички чинилац.

$$\Delta y = \frac{[u(x+h) - u(x)]\ v\ (x) - u(x)\ [v(x+h) - v(x)]}{v(x+x)\ v\ (x)}$$

$$\Delta y = \frac{1}{v\ (x+h)\ v\ (x)} \left\{ [u\ (x+h) - u(x)] v(x) - u(x) [v(x+h) - v(x)] \right\}$$

$$Q = \frac{1}{v\ (x+h)\ v\ (x)} \cdot \frac{[u(x+h) - u(x)]\ v\ (x) - u\ (x)\ [v\ (x+h) - v(x)]}{h}$$

$$Q = \frac{1}{v\ (x+h)\ v\ (x)} \left\{ \frac{[u\ (x+h) - u\ (x)]\ v\ (x)}{h} - \frac{u(x)\ [v(+h) - v)x)]}{h} \right\}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} Q = \frac{1}{v(x)\, v(x)} \cdot (u' \cdot v - u v') \cdot$$

Нашли смо извод функције $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Њен извод је:

$$y' = \frac{u' \, . \, v - u \, . \, v'}{v^2}$$

Сад можемо наћи извод за функцију $y = \frac{3x - 1}{x^2 + 2}$, коју смо били узели у почетку.

$u = 3x - 1 \qquad v = x^2 + 2$

$u' = 3. \qquad v' = 2x.$

$$y' = \frac{3(x^2 + 2) - (3x - 1)\, 2x}{(x^2 + 2)^2} \cdot$$ Одатле је

$$y' = \frac{-3x^2 + 2x + 6}{(x^2 + 2)^2}$$

ИЗВОД ФУНКЦИЈА TGX И COTGX

1. — *Наћи извод функције $y = tgx$.*

$y = tgx = \frac{sinx}{cosx}$. Стaвићемо: $sinx = u$ Одатле је $u' = cosx$
$cosx = v$ Одатле је $v' = -sinx$

Сад је даље

$$y' = \frac{cosx \cdot cosx - sinx\ (-sinx)}{cos^2x}$$

$$y' = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$$

$$y' = \frac{1}{cos^2x}$$

2. — *Наћи извод функције $y = cotgx$.*

Ставићемо:

$$y = cotgx = \frac{cosx}{sinx}$$

$cosx = u \qquad u' = -sinx$

$sinx = v \qquad v' = cosx$

$$y' = \frac{-sinx\, sinx - cosx \cdot cosx}{sin^2x} = \frac{-sin^2x - cos^2x}{sin^2x} = -\frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2x}$$

$$= -\frac{1}{sin^2x}$$

ИЗВОД ИЗЛОЖИЛАЧКЕ И ЛОГАРИТАМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Њих ћемо само поменути:

$y = c^x \qquad y' = c^x\, lognatc$, или краће: $y' = c^x\, lnc$.

$y = lnx \qquad y' = \frac{1}{x}$

$y = log_{(a)}x \qquad y' = \frac{1}{x\ lognata}$.

ФУНКЦИЈА ФУНКЦИЈЕ

Посредна функција. — Узмимо функцију $y = 3u$, где је $u = 2x+5$. Овде је y функција од u. Али она је функција и од x, јер чим се мења x, мења се и u, а тада се мења и y. Овде је y функција икса тек преко функције u. Зато се овде y зове посредна функција, или функција функције.

Извод посредне функције. — Нека је $y = f(u)$, где је $u = \varphi(x)$.

$$Q = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} Q = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0.} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$y' = f'(u) \, . \, u'$$

Пример. — Наћи извод функције $y = (3x^2 + 4x - 7)^2$.

Ставићемо $3x^2 + 4x - 7 = u$. Тада је $u' = 6x + 4$, а $y = u^2$. Зато је:

$$y' = 2u \, . \, (6x + 4)$$

$$y' = 2\,(3x^2 + 4x - 7)\,(6x + 4).$$ То је даље

$$y' = 36x^3 + 72x^2 - 52x - 56.$$

Пример 2. — Наћи извод функције $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 2}$.

Ставићемо $3x^2 - 4x + 2 = u$. Тада је

$$y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$u' = 6x - 4.$$

Сад је даље:

$$y' = \frac{1}{2}\, u^{-\frac{1}{2}}(6x - 4).$$

$$y' = u^{-\frac{1}{2}}\,(3x - 2).$$

$$y' = \frac{3x-2}{\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{(3x-2}{\sqrt{3x^2-4x+2.}}$$

ВЕЖБАЊА

Испитати јесу ли ове функције прекидне или непрекидне:

1. $y = 2x.$
2. $y = \dfrac{1}{3x}$
3. $y = 1 - 3x$
4. $y = \dfrac{1}{1-3x}$
5. $y = \dfrac{1}{x^2}$
6. $y = \dfrac{8}{3x-4}$
7. $y = \dfrac{5x}{5-2x}$

Наћи извод ових функција:

8. $y = 3x.$
9. $y = 3x - 4$
10. $y = 7 - 5x$
11. $y - 4 = 5x - 6.$
12. $y = 3x^2 + 5x - 7$
13. $y = 5x^2 - 4x + 9.$
14. $(y - 5) = 3\,(x^2 - 7.)$
15. $y = 4x^3 + 5x^2 - 7x + 9.$
16. $y = 4x^4 - 7x + 9.$
17. — Исто за $y = \dfrac{1}{x^3}$. (Напиши овај разломак у облику степена од x, па онда тражи извод.)
18. $y = \dfrac{1}{3x^4}$
19. $y = \sqrt{x}$
20. $y = \sqrt[3]{x}$
21. $y = \sqrt[4]{x}$
22. $y = \sqrt[n]{x}$
23. $y = a\sqrt[n]{x^m}$
24. $y = a\sqrt{ax^m}$
25. $y = b\sqrt[n]{x} + bx$
26. $y = a + x^3$
27. $y = x^3 - x^2 + 2x$
28. $y = \dfrac{ax^6}{5}$
29. $y = \dfrac{a}{x}$
30. $y = a\sqrt{x}$
31. $y = \sqrt[m]{x^{2n}}$
32. $y = x^2\sqrt{x\sqrt{x^3}}$
33. $y = \dfrac{x-2}{5}$

34. $y = \dfrac{2x-7}{-19}$
35. $y = \dfrac{5x-6}{-5}$
36. $y = (2x + 5)\,(3x - 7)$
37. $y = (5x - 1)\,(1 - 4x)$
38. $y = (3x + 9)\,(9 - x)$
39. $y = (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 7)\,(x - 5)$
40. $y = (-8x^5 + 9x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 7x + 9)\,(2x + 3)$
41. $y = \dfrac{4x-9}{4x}$
42. $y = \dfrac{3-5x}{-6x}$
43. $y = \dfrac{2-x}{-x}$
44. $y = \dfrac{3x+7}{4x-5}$
45. $y = \dfrac{3x+9}{7-2x}$
46. $y = \dfrac{x^2-5x+7}{2x-9}$
47. $y = \dfrac{x^3-4x^2+5x-7}{2x^2+3x-5}$
48. $y = \dfrac{7x^3+5x^2-6x+9}{x^3-7}$
49. $y = \dfrac{3x^4-3x^2-1}{x-1}$
50. $y = \dfrac{4x^3-5x+8}{x^3-6x^2-7x+5}$
51. $y = \dfrac{1-x}{x^3-6x^4+3x^2-1}$
52. $y = \left(\dfrac{1}{x^3} - 7x + 1\right)^2$
53. $y = (x + 2)^2$
54. $y = (x^2 + 3x - 4)^2$
55. $y = (2x^2 - 7)^2$
56. $y = (x^2 - 2x + 3)^4$
57. $y = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3$
58. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^4$
59. $y = \left(\dfrac{x}{x^3-4x+7}\right)^4$
60. $y = \sqrt{2px}$
61. $y = \sqrt{2x + 19}$
62. $y = \sqrt{4x^4 + 3x^2 - 7}$
63. $y = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
64. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
65. $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2-3x+5}}$
66. $y = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)}$
67. $y = (3x^2 - 2)\,\sqrt{1 + 2x}$
68. $y = 3\,sinx$
69. $y = 4\,cosx$
70. $y = 5\,sinx - 1$
71. $y = 2 - 3\,cosx$
72. $y = 6 - 4\,sinx$
73. $y = sinxcosx$
74. $y = \dfrac{5\,sinxcosx}{2}$
75. $y = sinxcos2x$
76. $y = sin\dfrac{x}{2}$
77. $y = 2\,sin\,3x$

78. $y = 4\cos\frac{x}{2}$

79. $y = 5\sin 2x \cos\frac{x}{2}$

80. $y = 4tgx$

81. $y = 5\,tg\,2x$

82. $y = 3\,tg\,\frac{x}{2}$

83. $y = 4\,cotg\,2x$

84. $y = 3\,tgxcotg2x$

85. $y = 3\sin 2xtgx$

86. $y = sinxcotg\,3x$

87. $y = \sin x\,tg\frac{x}{2}$

88. $y = 2\,logx$

89. $y = 3\log\frac{x}{2}$

90. $y = 3^{2x}$

91. $y = 2^{3x}$

92. $y = 3^{3x-1}$

93. $y = 2^{x+2}$

94. $y = lnx$

95. $y = ln\,\frac{x}{2}$

96. $y = 4\,ln\frac{2x}{3}$

97. $y = 5\log 2x.$

98. $y = \sin x^2$

99. $y = \sin bx^3$

100. $y = \sin^2 x$

101. $y = \cos 2x^2$

102. $y = \sqrt{x^2+1}$

103. $y = x\sqrt{(3-x)x}$

104. $y = \left(x + \sqrt{2x^2 + 3x - 4}\right)^2$

105. $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$

106. — Не цртајући криву $y = x^3$ нацртати њену дирку у тачци чија је апсциса $x = 2$.

107. — На кривој $y = -x^2 - 2x + 3$ одредити координате тачке M тако, да дирка на параболи повучена кроз M сече апсцисну осовину под углом од 45^0.

5. — МАКСИМУМ И МИНИМУМ

МАКСИМУМ

Узмимо функцију

$$y = -5x^2 - 30x - 47.$$

Напишимо је у каноничном облику:

$$y = -5\left[(x+3)^2 + \frac{2}{5}\right]$$

Начинимо овакву таблицу:

x	$-\infty$	-10	-9	негативно, расте	-4	-3	-2	-1	негативно, расте
y	$-\infty$	-247	-182	негативно, расте	-7	-2	-7	-22	негативно, опада

x	0	$+1$	$+2$	позитивно, расте	$+\infty$
y	-47	-82	-127	негативно, опада	$-\infty$

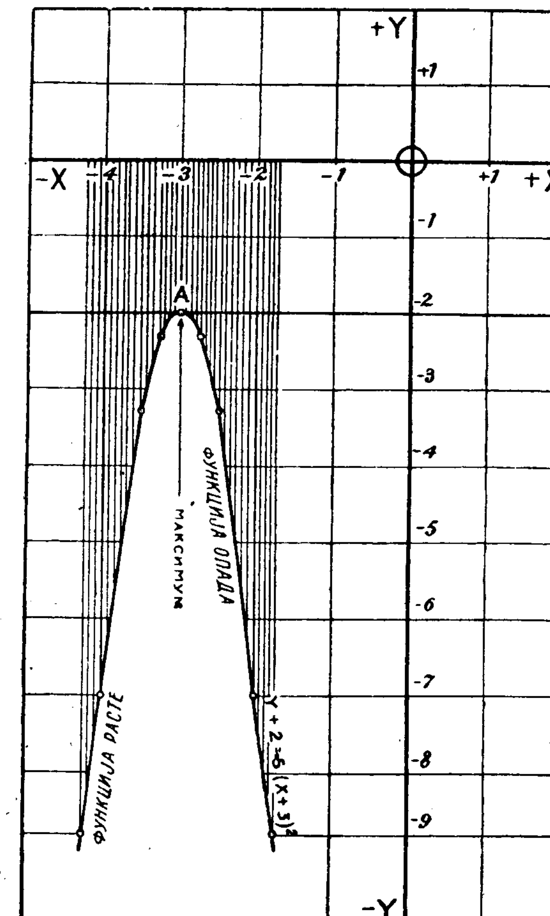
Види се ово:

1) Функција је *расла* за све вредности *икса* од $x = -\infty$ до $x = -3$. Одатле је почела да *опада* и стално је даље опадала.

2) **Највећа вредност** наше функције јесте

$$y = -2 \text{ за } x = -3.$$

Кад нацртамо нашу криву линију, добијамо слику 11.



Сл. 11.

Она нам казује да је наша крива достигла своју највећу вредност у тачки A (— 3, — 2).

Највећу вредност једне функције зовемо **максимум.**

За нашу функцију рећи ћемо да *достиже максимум* у тачки A.

Максимум *је вредност функције* **већа** *од претходне и следеће њене вредности, обе те вредности функције узете* **у најближој околини** *тачке максимума.*

У тачки A функција има ову вредност:

$$f(-3) = -2.$$

У оближњим тачкама лево и десно она има **мање** вредности:

$$f(-2{,}9) = -2{,}05$$
$$f(-3{,}1) = -2{,}05$$

Види се да је

$$f(-3) > f(-2{,}9)$$
$$f(-3) > f(-3{,}1)$$

Код тачке максимума **функција мења свој начин кретања;** до максимума **расте,** а од максимума **опада.**

МИНИМУМ

Узмимо функцију

$$y = 2x^2 - 8x + 9$$

$$y = 2\left[x - 2)^2 + \frac{1}{2}\right]$$

x	— ∞	— 10	- 9	негативно, **расте**	0	позитивно, **расте**	+2	позитивно, **расте**	+ ∞
Y	+ ∞	+289	+243	позитивно, **опада**	+9	позитивно, **опада**	+1	позитивно, **расте**	+ ∞

Види се ово:

1) функција је **опадала** за све вредности икса од $x = -\infty$ до $x = +2$. Одатле је почела да расте и стално је даље расла.

2) **Најмања вредност** наше функције је

$$y = +1 \text{ за } x = +2.$$

Кад нацртамо нашу криву линију, добијамо слику 12.

Она нам показује да је наша крива достигла своју **најмању** вредност у тачки

$$A(+2, +1).$$

Најмању вредност једне функције зовемо **минимум.**

За нашу функцију рећи ћемо да **достиже минимум** у тачки A.

Минимум је вредност *функције* **мања** *од претходне и наредне њене вредности, обе те вредности функције узете у* **најближој околини** тачке минимума.

У тачки A функција има ову вредност:

$$f(2) = +1$$

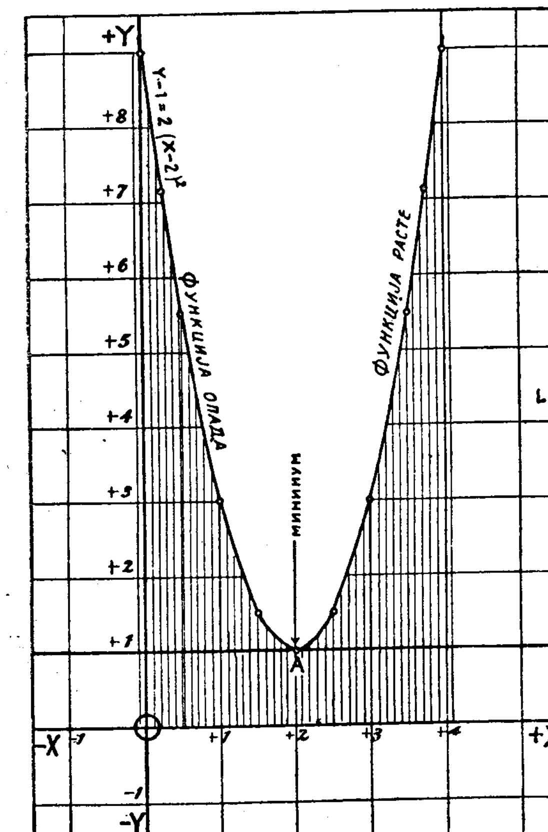
У оближњим тачкама лево и десно она има веће вредности:

$$f(1{,}9) = 1{,}02$$
$$f(2{,}1) = 1{,}02.$$

Види се да је:

$$f(2) < f(1{,}9)$$
$$f(2) < f(2{,}1)$$

И код тачке минимума крива мења свој начин кретања.



Сл. 12.

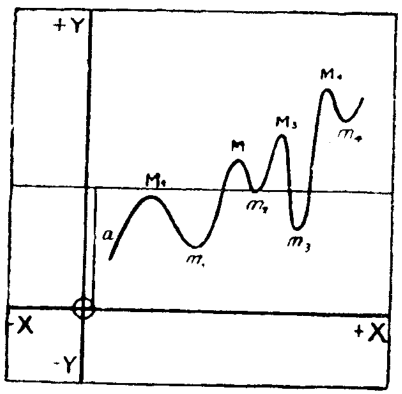
Само овде бива обрнуто: до тачке минимума функција **опада,** а од тачке минимума функција **расте** (сл. 12.).

АПСОЛУТНИ МАКСИМУМ И АПСОЛУТНИ МИНИМУМ

Апсолутни максимум је *највећа* вредност коју функција достиже у целом своме току, у тачки где мења свој начин кретања.

На слици 11 наша функција достиже свој **апсолутни максимум** у тачки *A*, пошто у тој тачки функција има највећу вредност у целом своме току.

На слици 13 крива достиже само *максимум* у тачки M_3, али не и *апсолутни максимум*, јер је ордината у M_4 већа од ординате у M_3.



Сл. 13.

Апсолутни минимум је најмања вредност коју функција достиже у целом своме току у тачки где мења свој начин кретања.

На слици 12 наша функција достиже свој **апсолутни минимум** у тачки *A*, пошто у тој тачки има најмању вредност у целом своме току.

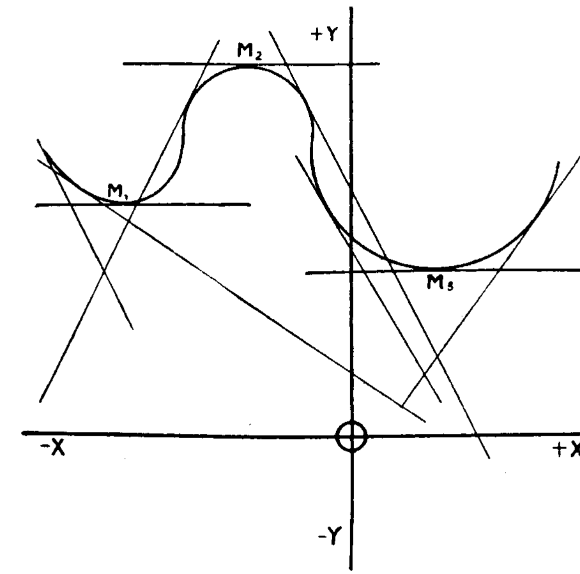
На слици 13 наша функција достиже само *минимум* у тачки m_2, али не и *апсолутни минимум*, јер је ордината у m_3 мања од ординате у m_2.

После овакве дефиниције максимума и минимума, јасно је да су и m_2 и m_4 *већи од максимума* M_1.

Може ли апсолутни максимум бити мањи од апсолутног минимума?

ОДРЕЂИВАЊЕ МАКСИМУМА И МИНИМУМА

Тангента у тачкама максимума и минимума. — Ведели смо да први извод претставља *пад тангенте*. Кад погледамо на слику 14, видимо ово:



Сл. 14.

Кад функција расте, пад тенгенте је позитиван; кад достигне **максимум**, пад тангенте је **нула;** кад почне опадати, пад тангенте је *негативан*.

Кад функција опада, тангента наше криве има *негативан* пад; кад функција достигне **минимум**, пад тангенте је **нула;** кад функција почне да расте, пад тангенте је *позитиван*.

Кад функција *расте*, пад тангенте је *позитиван* зато што тангента заклапа оштар угао с *позитивним смислом апсцисне осовине* (види тангенту лево од тачке M_2 и тангенту десно од тачке M_3).

У тачкама максимума и минимума пад тангенте је *нула*, јер тангента *не* заклапа никакав угао (угао нула) са апсцисном осовином (види тангенте у тачкама минимума M_1 и M_3 и у тачки максимума M_2). У тачкама максимума и минимума тангента је *паралелна са апсцисном осовином*, те јој је *пад нула*.

Кад функција *опада*, пад тангенте је *негативан*, јер тангента заклапа туп угао с *позитивним смислом апсцисне осовине* (види тангенте лево од тачака M_1 и M_3 и десно од тачке M_2).

Према томе можемо ово закључити:

Кад је у извесном простору извод једне функције позитиван, она расте, а кад је негативан опада, сем извесних тачака о којима ми овде нећемо говорити. Кад се извод не мења у извесном простору, функција је стална.

При посматрању функција помоћу извода треба увек ићи постепено да не бисмо прескочили неки простор где функција постаје бескрајна.

Одређивање максимума и минимума помоћу извода. — Из овога што смо досад рекли види се да се максимум или минимум појављује кад извод постане нула. Ако је пре те тачке извод био позитиван, а после ње негативан, то је *максимум,* а ако је пре те тачке извод био негативан, а после ње позитиван, онда је то *минимум.*

Практично правило за одређивање максимума и минимума.

Треба наћи извод функције. Тај извод треба ставити да је раван нули. Тако добивену једначину решити по x. Те вредности икса могу бити апсцисе тачака максимума или минимума. Сад треба узети две оближње вредности икса, мању и већи од x. Ако је извод позитиван, па негативан, значи да је *максимум.* Ако је извод најпре негативан, па позитиван, значи да је *минимум.*

Пример 1. — Од свију правоугаоника чији је обим 20 наћи онај који има највећу површину.

Нека су стране правоугаоникове x и z. Обим ће бити:

$$2x + 2z = 20$$
$$x + z = 10$$

Површина је $x \cdot z$.

$$z = 10 - x.$$

Према томе површина је:

$$x\,(10 - x).$$

Она је функција икса. Обележимо је са y:

$$y = 10x - x^2$$
$$y' = 10 - 2x$$
$$10 - 2x = 0$$
$$x = 5.$$

Функција $y = 10x - x^2$ може имати максимум или минимум за $x = 5$.

Написаћемо извод y' у овоме облику:

$$y' = 2\,(5 - x).$$

Одавде се види да је *извод* позитиван за све вредности икса мање од 5. Значи до $x = 5$ извод је *позитиван.* Код $x = 5$, он је нула. За $x > 5$ извод је *негативан.* Значи, да за $x = 5$ функција достиже свој *максимум.*

Са y смо изначили површину правоугаоника.

Стране ће му бити:

$$x + z = 10$$
$$5 + z = 10$$
$$z = 5.$$

Правоугаоник чији је збир страна 20, а има највећу површину од свих таквих правоугаоника, јесте *квадрат,* пошто су му стране једнаке: $x = z = 5$. Та највећа површина y је

$$y = 10x - x^2 = 50 - 25 = 25.$$

Нацртај неколико правоугаоника чији је збир страна 20, по упореди њихове површине са квадратом чија је страна 5.

Пример II. — Одредити максимум или минимум функције

$$y = -5x^2 - 30x - 47.$$

Најпре први извод:

$$y' = -10x - 30.$$

Ставимо га да је раван нули, па решимо једначину:

$$-10x - 30 = 0. \qquad \text{Одатле је:}$$
$$x = -3$$

Да видимо каква је вредност извода пре те тачке.

$$y' = -10\,(x + 3)$$

Види се да је извод позитиван докле год је

$$x + 3 < 0, \text{ тј. докле год је}$$
$$x < -3$$

Чим је $x > -3$ извод постаје *негативан.* Пошто је до тачке $x = -3$, извод *позитиван,* а од те тачке *негативан,* значи да у тој тачки наша крива достиже свој *максимум.*

У једначину криве

$$y = -5x^2 - 30x - 47$$

унесемо вредност $x = -3$, па ћемо добити вредност и друге координате. Биће:

за $\quad x = -3$

$$y = -5(-3)^2 - 30(-3) - 47 = -2.$$

Значи наша крива достиже свој максимум у тачки чије су координате $x = -3$, $y = -2$.

То је тачка A са слике 11.

Трећи пример. — Одредити максимум или минимум криве $y = 2x^2 - 8x + 9$.

$$y' = 4x - 8$$

Стављамо $y' = 0$, тј.

$$4x - 8 = 0.$$

Одатле је

$$x = 2$$

Унесимо ту вредност у дату једначину криве линије

$$y = 2x^2 - 8x + 9$$

да бисмо одредили *ипсилон*.

$$y = 2 . 4 - 8 . 2 + 9 = +1.$$

У тачки $x = 2$, $y = 1$ наша крива може имати максимум или минимум. Шта је у тој тачки? То ће нам рећи извод.

$$y' = 4(x - 2)$$

Извод је позитиван док је

$x - 2 > 0$ тј. док је
$x > 2$

Извод је негативан док је

$x - 2 <$ тј. док је
$x < 2$

Пошто је до тачке $x = 2$, $y = 1$ извод *негативан*, а од те тачке *позитиван*, значи да у тој тачки наша крива достиже свој *минимум*.

То је тачка A са слике 12.

Напомена. — Максимум и минимум зову се још и **екстреми.**

ВЕЖБАЊА

Наћи максимум или минимум функције:

1. $y = 4x + x^2 + 5.$
2. $y - x^2 = 4x + 5y - 7.$
3. $x^2 - 4 = 5y - 6x + 9.$
4. $y - 4 = 4(x - 3)^2.$
5. $y = x + \dfrac{9}{x}$
6. $y = 3x + \dfrac{27}{x}$
7. $y = x^2 + (x - 6)^2.$
8. $y = \dfrac{1}{1 - x}$
9. $y = 3 - \dfrac{x - 1}{x}$
10. $y = 3x^3 - 7x^2 + 9x$
11. $y = 2x^2 - x$
12. $y = \dfrac{3x - 4}{4 + 3x}$
13. $y = 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5$
14. $y = x^4 - 4ax^3 - 2$
15. $y = 2x^3 - 3ax^2 + 1$
16. $y = \dfrac{x^2}{x + 1}$

17. — Поделити 12 на два сабирка тако, да збир њихових квадрата буде минимум.

(Ако је први део x, други је $12 - x$.)

18. — Од свију правоугаоника чија је површина s наћи онај који има најмањи обим.

19. — Поделити 27 на два сабирка тако, да збир четвороструког квадрата првог дела и петоструког квадрата другог дела буде што је могуће мањи.

[Ако је први део x, други је $27 - x$.

$$y = 4x^2 + 5(27 - x)^2.$$

Наћи минимум те функције.]

20. — Поделити 40 на 2 сабирка тако, да њихов производ буде максимум.

21. — Поделити број a на 2 сабирка тако, да њихов производ буде максимум.

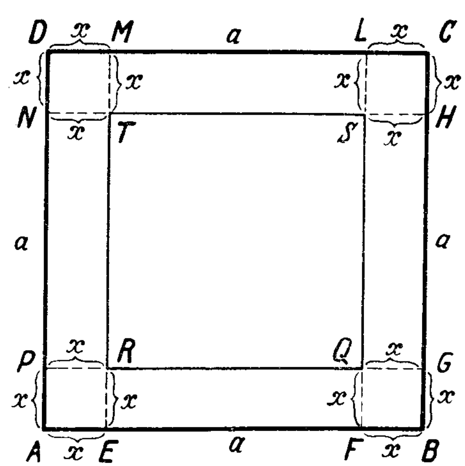
22. — Дат је круг $(x - r)^2 + y^2 = r^2$. Тачка M се креће по обиму горњег полукруга од $x = 0$ до $x = 2r$. Нека је $OA = 2r$. Ако тачку M стално спајамо дужима са O и A, добићемо увек правоугли троугао *OMA*. Где треба да се заустави *M*, па да *OMA*, има највећу површину?

23. — Лимар хоће да начини зделу ваљкастог облика без поклопца. Израчунати однос између r и h који мора постојати, ако лимар хоће да утроши најмање материјала за ту зделу.

24. — Од свих правих ваљака код којих је обим осовинског пресека $2p$ одредити онај који има највећу запремину.

(Обележи полупречник са x. Кад знаш обим $2p$, лако ти је изразити висину помоћу x).

25. — Из једног квадратног комада лима стране a лимар хоће да начини кутију без поклопца на тај начин, што ће из углова тога лима отсећи четири једнака мала квадрата, па онда уздићи све четири стране и склопити кутију. Колика треба да буде страна малога квадрата, да би лимар добио кутију највеће запремине?



Сл. 15.

[Нека квадрат *ABCD* претставља тај његов комад лима. Нека лимар сече код *E* и *F* (сл. 15). Обележићемо овако: $AE = x$. Обележимо основу те кутије са *RQST*. Страна *RQ*].

26. — Који је тај број који кад се дода својој реципрочној вредности даје најмањи збир?

(Овде је тај збир функција којој треба одредити минимум. Обележи тај број са x.).

27. — Од свих правих купа уписаних у лопти полупречника *R*, која има највећу запремину?

28. — Израчунај однос који треба да постоји између полупречника и висине једног купастог шатора, па да се најмање платна утроши за њега, а да му запремина буде *V*.

29. — Наћи однос дужине и висине правоугаоника највећег обима који се може уписати у датоме кругу.

30. — Од свих правоугаоника чија је површина 16 m^2 који има најмањи обим?

(Нека је основица x, а висина y. Значи да је $xy = 16$. А како ћеш обим изразита само помоћу икса?)

31. — Од свих правих купа описаних око лопте *R* одредити купу најмање запремине.

32. — Од свих правих купа бочне ивице s која има највећу запремину?

33. — Од свих правих купа описаних око лопте *R* одредити купу најмање површине.

МАТУРСКИ ЗАДАЦИ

34. — Треба направити левак којему је страница $s = 20$ cm, такав да има што већу запремину. Колики је полупречник основе и површина?

(Сушак, 1936).

35. — Дужину $3b$ разделити тако на два дела да они узети као полупречник базе и висина усправне купе образују купу максималне запремине. Колики је омотач те највеће купе и колики је угао при врху њеног осног пресека?

(II. М. г. Сарајево, 1936).

36. — Вредности независно промењљиве за које функција $y = 24x^5 - 135x^4 + 280x^3 - 270x^2 + 120x - 10$ узима екстремне вредности чине прва три члана растуће геометријске прогресије. Колико чланова ваља сабрати да се добије $2047^1/_2$?

(Слав. Пожега, 1936).

37. — Између свих облица које се могу уписати у лопту полупречника R, одреди ону чија је запремина максимум.

(Нови Врбас, 1935).

38. — У полулопти полупречника R уписане су две купе са заједничким врхом у средишту: равнострана купа и купа максималне запремине. У ком односу стоје њихове запремине и њихови омотачи?

(Призрен, 1938).

39. — Екстремне вредности функције $y = x^3 - 12x^2 + 45x - 49$ дају прва два члана растуће геометриске прогресије, а вредности којима припадају те експремне вредности су прва два члана растуће аритметичке прогресије. Како гласе прогресије? Који је члан аритметичке прогресије једнак четвртом члану геометриске прогресије?

(Славонски Брод, 1938).

40. — Из ваљкастог стабла висине 8 m, а пречника 80 cm исећи правоуглу греду тако да запремина отпадака буде што мања. Запремину отпадака изразити у процентима.

(Земун, 1938).

41. — У зарубљену купу ($R = 8$, $r = 2$, $h = 6$) треба уписати ваљак максималнога омотача. Колике су његове димензије и како се односи запремина тог ваљка према запремини дате купе?

(II. М. г. Сарајево, 1936).

42. — У унутрашњости једног квадрата чија је дијагонала $2d$ налази се други један концентричан квадрат чије су стране $2x$ паралелне дијагоналама првог квадрата. Свако теме новог квадрата спојено је са два оближња темена првог и на тај начин су добивена четири подударна равнокрака троугла. Уписани квадрат и та четири троугла су мрежа једне пирамиде. Одредити: 1) max запремине и 2) max површине омотача те пирамиде.

(Реалка, Београд, 1938).

43. — У круг $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$ уцртај највећи правоугаоник; у каквој размери стоје површина и запремина ваљка који има тај лик за плашт?

(Кочевје, 1938).

44. — Одредити екстремне вредности функције

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 36$$

и једначину тангенте дате криве у тачки M $(0, -36)$.

(Скопље, Друга муш. гимн., 1939).

45. — У куглу полупречника R треба уписати правилну шестострану пирамиду максималне запремине; одреди димензије те пирамиде и њену запремину.

(Вуковар, 1938)

46. — У полулопти датог полупречника R уписати зарубљену купу тако да јој омотач буде што већи. Одредити димензије те купе ако је $R = 10$ cm.

(Нови Врбас, 1936)

47. — Површина квадратне усправне пирамиде је $P = 360\ cm^2$, а основна ивица односи се према висини као $5:6$. Колика је запремина максималног ваљка који је уписан у пирамиду?

(II. м. г. Сарајево, 1936)

48. — Између свих купа дате површине одредити ону чија је запремина максимум.

(Ново Место, 1934)

49. — Над сваком основом једног цилиндра описана је полулопта. Запремина тако добивеног цилиндричног сверичног тела је πV^3. Како треба изабрати димензије тога цилиндра, да би површина тога тела (цилиндрично - сверичног) била минимум?

(Београд, Четврта муш. гимн. 1939)

50. — Кроз тачку M $(3,4)$ пролази бескрајно много елипса са центром у координатном почетку. Која од њих има најмању површину?

(Земун, Муш. гимн., 1939)

51. — Места A, B, и C леже у равници. Места A и B везана су праволиниским друмом дужине 100 km, а место C није везано путем ни са A, ни са B. Место C удаљено је од места B 144 km. Још се зна да праве линије AB и BC склапају прав угао. Неки тенк који на друму троши 0,1 л, а на беспутном равничарском терену 0,26 л бензина од сваког пређеног километра, крене се из места A друмом AB ка месту C. На којој тачки друма AB треба да скрене с друма у правцу места *C*, да би уз најмању потрошњу бензина стигао у место *C* и колики је утрошак бензина у томе случају ?

(Штип, 1939)

6. — ПОСМАТРАЊЕ ФУНКЦИЈА ПОМОЋУ ИЗВОДА

Изводи су веома корисни за посматрање тока неке функције. Како се то ради показаћемо на примерима.

Пример 1. — Испитати ток функције $y = x^2 - 5x + 6$.

Најпре да видимо има ли она одређену вредност за свако x и је ли непрекидна, или прекидна.

Видимо да за свако x можемо имати тачно одређено y По чему видимо то? Видимо по овоме :

а) Кад нам је дато x, увек можемо тачно израчунати његов квадрат. Значи тада увек имамо тачну вредност за x^2.

б) Кад нам је дато x, увек можемо израчунати његову петоструку вредност $5x$.

Сем тога, кад се x поступно мења у коначним размацима, ипсилон се мења поступно и за коначне вредности икса имамо увек коначну вредност ипсилона. Значи да је наша функција непрекидна у целом своме току.

Сад тражимо њен извод :

$$y' = 2x - 5.$$

Да ли извод мења гдегод свој знак? То ћемо овако утврдити.

Ставимо га да је раван нули.

$$2x - 5 = 0.$$

Одатле је

$$x = 2{,}5$$

У тачки *M*

$[x = 2{,}5,\ y = (2{,}5)^2 - 5 \cdot 2{,}5 + 6 = 6{,}25 - 12{,}5 + 6 = -0{,}25]$ наша функција може имати максимум или минимум.

Напишимо први извод у овом облику:

$$y' = 2\,(x - 2{,}5)$$

Видимо ово :

1) За $x < 2{,}5$ извод је негативан;

2) За $x > 2{,}5$ извод је позитиван.

Значи ово: извод је најпре негативан, па позитиван.

То нам казује да је у тачци *M* **минимум.**

Сад тражимо где крива пресеца апсцисну осовину. Стављамо $y = 0$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Одатле је

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 3.$$

Наша крива пресеца апсцисну осовину у тачкама *A* (2,0) и *B* (3,0), као што се види из горњег решења.

Сад начинимо овакву једну таблицу :

x	$-\infty$	негативно, расте	0	2	2,5	поз. расте	3	+ расте	$+\infty$
y'		негативан	негативан	$-$	0	+	+	+	
y	$+\infty$	позитивно опада	+ 6	0	$-\frac{1}{4}$ (мин.)	поз. расте	0	+ расте	$+\infty$

Сад је лако нацртати ту криву (сл. 16.).

Пример 2. — Посматрати функцију

$$y = 15x - 4x^2 - 4x^3.$$

Види се да се за свако x може добити тачно одређена вредност за y. Исто тако лако је видети да је y коначно докле год је x коначно. Крива је непрекидна и одређена у свима својим тачкама.

Сад извод.

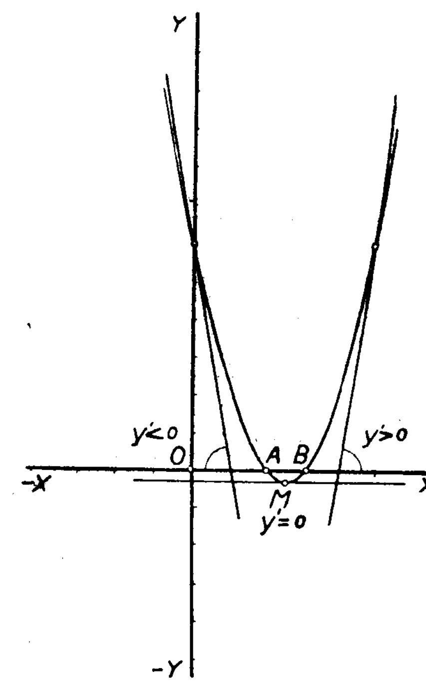
$$y' = 15 - 8x - 12x^2.$$

Ставимо $y' = 0$.

$$y' = 15 - 8x - 12x^2 = 0.$$

Ова једначина даје:

$$x_1 = -1{,}5 \text{ и } x_2 = \frac{5}{6}.$$



Сл. 16.

Да испитамо јесу ли то максимуми или минимуми.

I. — За $x = -1{,}5$. Узмимо две оближње тачке;

$$x = -1{,}6 \text{ и } x = -1{,}4.$$

Тада је за:

$$x = -1{,}6 \qquad y' = -2{,}92.$$
$$x = -1{,}4 \qquad y' = +2{,}68.$$

У тачки $(-1{,}5\ -18)$ наша крива има свој **минимум.** (У близини те тачке извод је најпре негативан, па позитиван).

II. — За $x = \frac{5}{6}$. Узмимо две оближње вредности

$$x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \text{и} \qquad x = \frac{6}{6} = 1$$

Тада је за

$$x = \frac{2}{3} \quad y' = \frac{13}{3}$$
$$x = 1 \quad y' = -5$$

У тачци $(\frac{5}{6},\ 7\frac{11}{27})$ наша крива има свој **максимум.**

Да видимо сад где наша крива сече апцисну осовину. Ставимо $y = 0$.

$$15x - 4x^2 - 4x^3 = 0$$
$$x(15 - 4x - 4x^2) = 0.$$

Одатле је

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 1{,}5 \qquad x_3 = -2{,}5.$$

Сад израдимо таблицу:

x	$-\infty$	негативно, расте	$-2{,}5$	— расте	$-1{,}5$	— расте	0
y'		негативан	негативан	негативан	0	+	+
y	$+\infty$	позитивно, опада	0	— опада	-18 (мин,)	— расте	0

x	позитивно, расте	$\frac{5}{6}$	поз, расте	$+1{,}5$	+ расте	$+\infty$
y'	+	0	негативан	—	—	
y	позитивно, расте	$7\frac{11}{27}$ (макс,)	поз, опада	0	— опада	$-\infty$

Сад је лако нацртати слику (сл. 17.)

Пример 3. — Посматрати функцију

$$y = \frac{x+2}{x-2}$$

Кад имаш разломљену функцију, увек обрати пажњу на именилац. Зашто? Зато што разломак нема смисла кад је именилац нула. Да видимо кад ће именилац бити нула.

$$x - 2 = 0.$$

Одатле је $\quad x = 2.$

Именилац је нула за $x = 2$. Тада y нема смисла. Да видимо шта бива са y кад x тежи ка 2.

$$\lim_{x \to 2} y = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right) = \pm \infty$$

Граница је $+\infty$, ако x тежи ка 2 опадајући, а $-\infty$, ако x растући тежи ка 2.

Наша је функција прекидна у тачци $x = 2$. У свима осталим тачкама функција је непрекидна; за свако x имамо одређену вредност за y.

Сад извод.

$$y' = \frac{1\ (x-2) - (x+2).\ 1.}{(x-2)^2} =$$
$$= \frac{x-2-x-2}{(x-2)^2} = \frac{-4}{(x-2)^2}$$

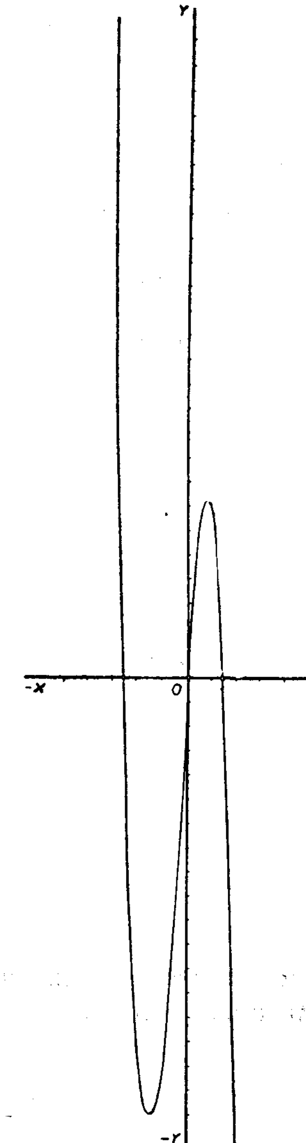
Ставимо $y' = 0$.

$$\frac{-4}{(x-2)^2} = 0$$

Одатле је $-4 = 0$. Ово нема смисла. Значи извод није никад раван нули. То се јасно видело из израза $\frac{-4}{(x-2)^2}$. Израз $(x-2)^2$ је увек позитиван, па ма како било x. Отуда је извод увек негативан. (Због -4). А кад је извод увек негативан, значи да је увек мањи од нуле. Кад је мањи од нуле, не можемо га уједначити с нулом. (Објасни зашто је горе изашло $-4 = 0$. Јесмо ли добро урадили што смо обе стране једначине помножили са $(x-2)^2$? Чиме смемо множити обе стране једне једначине?)

Кад извод наше криве није никада нула, онда нема ни максимума ни минимума.

Видимо још нешто. За све вредности икса наш извод је негативан. Значи да наша функција једнако опада.



Сл. 17.

Да видимо сад где наша крива сече апсцисну осовину. Ставимо $y = 0$. Тада ће бити:

$$\frac{x+2}{x-2} = 0. \text{ Одатле је } x = -2.$$

Наша крива сече апсцисну осовину у тачки чије су координате $x = -2$, $y = 0$.

Начинимо сад таблицу:

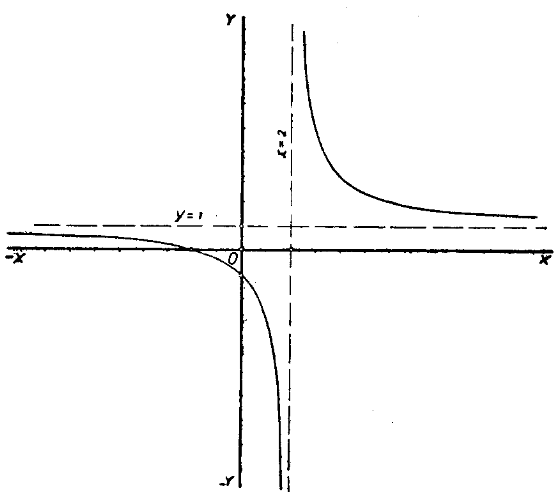
x	$-\infty$	$-$ расте	-2	$-$ расте	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+6$	$+$ расте	$+\infty$
y'		$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	
y		$+$ опада	0	$-$ опада	1	-3	$\pm\infty$	$+5$	$+3$	$+2$	$+$ опада	

Овде имамо да одредимо три границе наше функције:

а) за $x = 2$ б) за $x \to -\infty$ в) за $x \to +\infty$

Прву смо већ одредили: $\lim\limits_{x \to 2} y = \pm\infty$

Да бисмо видели шта бива с нашом функцијом за $x \to +\infty$ или за $x \to -\infty$, написаћемо дату функцију у дру-



Сл. 18

гоме облику. Поделићемо бројилац и именилац са x: Кад то урадимо, добијамо:

$$(1) \qquad y = \frac{x+2}{x+2} = \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Види се да наша крива има две асимптоте. (Асимптоте смо видели у VI разреду). Асимптоте наше криве су овде две праве: $x = 2$ и $y = 1$ (сл. 18).

ВЕЖБАЊА

1. — Наћи пад тангенте у тачки $x = 3$ параболе

$$y = x^2 - 2x + 2$$

2. — Проучити функцију од $x_1 = -4$ до $x_2 = -3{,}5$

$$y = 5x^2 + 30x + 43.$$

Нађи извод. Затим гледај какав је од тачке $x_1 = -4$ до тачке $x_2 = -3\frac{1}{2}$.

3. — Проучити исту функцију од $x_1 = -3\frac{1}{4}$ до $-3\frac{1}{2}$

4. — Проучити функцију

$$y = x^2 - 2x + 2$$

од $x_1 = -1$ до $x_2 = +2$.

5. — Проучити функцију

$$y = x^2 - 6x + 13$$

од $x_1 = -4$ до $x_2 = +2$.

6. — Проучити функцију

$$y = x^2 - 3x + 7$$

од $x_1 = -3$ до $x_2 = -1$.

7. — Проучити функцију $y = 1 - \frac{1}{x}$

8. — „ „ $y = 2x^4 - 1$

9. — „ „ $y = 2x^4 - 3x^2 + 1$

10. — „ „ $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$

11. — „ „ $y = \frac{1+x}{1-x}$

12. — „ „ $y = \frac{x}{1-x}$

13. — „ „ $y = x^2 - x^3$

14. — Проучити функцију $y = 3x^2 - \frac{x}{2}$

15. — „ „ $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x}$

16. — „ „ $y = \frac{4x^2 - 3x}{2 + x}$

17. — „ „ $y = \frac{2}{x} - 1$

Посматрати и приближно нацртати ове криве :

18. $y = \frac{x}{1+x}$ **19.** $y = \frac{1}{2+x^2}$

20. $y = \frac{x^2}{x^2-2}$ **21.** $y = \frac{x}{x^2-1}$

22. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2}$ **23.** $y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(1-x)^2}$

24. $y = \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ **25.** $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2}$

26. — Испитати и приближно нацртати криву
$y = (x + 1)^3\ (x - 2)^2$

7. — ДИФЕРЕНЦИЈАЛ

Узмимо да израчунамо прираштај функције

$$y = \frac{x^2}{4} \text{ (сл. 19.)}$$

$$\text{од } x_1 = 2 \text{ до } x_2 = 5,$$

$$h = 5 - 2 = 3$$

$$\Delta\ y = f\ (x + h) - f\ (x) = \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{x^2}{4} =$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2}{4} = \frac{6x + 9}{4} = \frac{3}{4}(2x + 3)$$

Ставимо сад место икса његову почетну вредност $x = 2$. Добијамо :

$$\Delta y = \frac{3}{4}\ (2.2 + 3) = \frac{3}{4} \cdot 7 = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$$

Посао је дугачак. Много би нам било лакше да смо имали да рачунамо приближну вредност CM прираштаја CB, тј. да смо имали да рачунамо колико функција прирасте **до тангенте, место до криве.** То значи, лакше би нам било да смо имали да рачунамо CM место CB.

Вредност CM бисмо израчунали из троугла ACM.

$$CM = AC.\ tg\alpha.$$

Али ми знамо да је $tg\alpha = y'$, а $AC = h$. Зато је

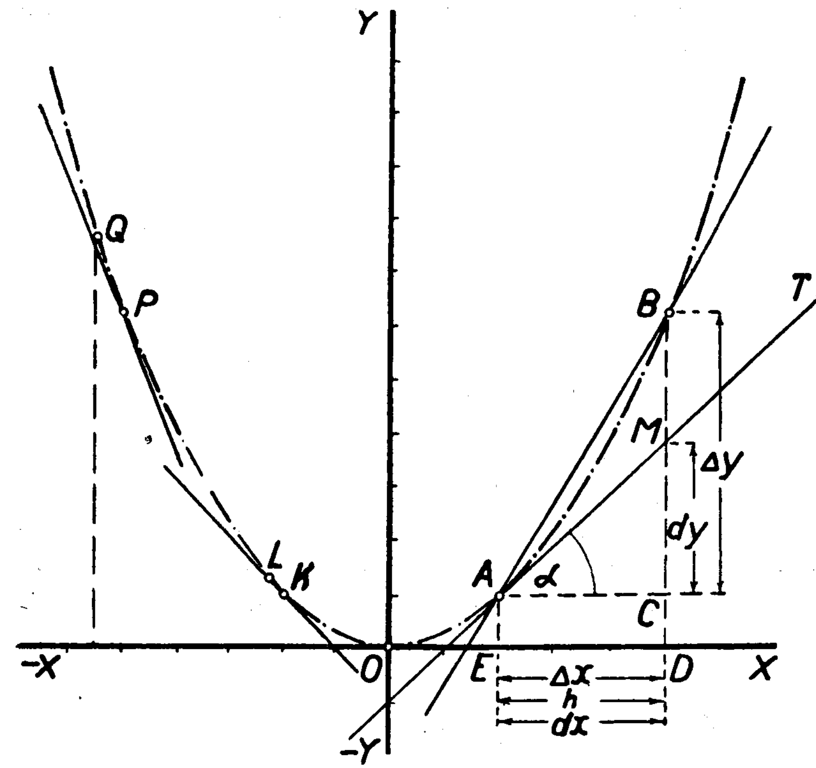
$$(1) \qquad CM = y' . h$$

$$y' = \frac{2x}{4} = \frac{x}{2}.$$

За $x = 2$ (почетна тачка A) биће

$$(2) \qquad y' = \frac{2x}{4} = 1$$

$$CM = 1 . h = h = 3.$$



Сл. 19.

Шта је ово CM? Је ли то прираштај функције? Није. То је прираштај функције само до дирке, а не до криве.

Тај прираштај функције до дирке зовемо **диференцијал функције** и пишемо га

$$dy$$

$CM = dy$. (Читамо га „де ипсилон").

Видели смо горе да је $CM = y' . h$. Отуда је

(3) $dy = y' . h$ или

(4) $dy = y' . \Delta x$

Да би нам биле исте ознаке, кад употребимо диференцијал употребљавамо место ознаке Δx ознаку **dx** и пишемо:

(5) $$\mathbf{dy = y' . dx}$$

dx зовемо тада **диференцијал независно** променљиве.

То читамо: „Де ипсилон равно ипсилон прим де икс."

Диференцијал функције је производ извода и диференцијала независно променљиве.

Ако у (5) поделимо обе стране са **dx,** имаћемо :

(6) $$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{y}'.$$

Са слике се види да је то тачно, пошто је $y' = tg\alpha = \frac{CM}{AC.}$

Сад видимо из (6) да је извод однос диференцијала функције и диференцијала независно променљиве.

Сад за извод имамо три ознаке :

y' („ипсилон први," или „ипсилон прим")

$f'(x)$ („еф први од икс" или „еф прим од икс").

$\frac{dy}{dx}$ („де ипсилон по де икс").

Веома је подесно место прираштаја функције употребити њен диференцијал онде где се дирка и крива веома мало разликују. На пр. од тачке P до тачке Q на нашој слици 19.

Да видимо најпре прираштај функције.

$$h = -\frac{1}{2.}$$

$$\Delta y = f(x + h) - f(x) = f\left(x - \frac{1}{2}\right) - f(x) =$$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2 - x + \frac{1}{4} - x^2}{4} = \frac{-x + \frac{1}{4}}{4} = \frac{-(-5) + \frac{1}{4}}{4} =$$

$$= \frac{5 + \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{21}{4}}{4} = \frac{21}{16} = 1{,}3125$$

Сад диференцијал функције.

$$dy = y'dx$$

$$dx = -\frac{1}{2}$$

$$dy = \frac{x}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

За $x = -5$ биће:

$$dy = \frac{-5}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$dy = \frac{5}{4}$$

$$dy = 1{,}25$$

Диференцијал функције мањи је за 0,0625 од прираштаја функције.

Ако нам је допуштена грешка мања од 0,07, можемо овде узети диференцијал функције место њеног прираштаја. Помоћу диференцијала је ишло много брже.

Употребити диференцијал место прираштаја функције све је згодније што је мањи прираштај независно променљиве. Узмимо тачке K и L са слик 19. Израчунаћемо прираштај и диференцијал функције да видимо је ли диференцијал подесна приближна вредност за прираштај функције.

$$h = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta y = \frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - x^2}{4} = \frac{x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} - x^2}{4} =$$

$$= \frac{-\frac{x}{2} + \frac{1}{16}}{4}$$

Пошто је почетна апсциса $x = -2$, биће :

$$\Delta y = \frac{1 + \frac{1}{16}}{4} = \frac{\frac{17}{16}}{4} = \frac{17}{64} = 0{,}265625.$$

Сад ћемо израчунати диференцијал.

$dy = y'dx$

$dy = \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)$ Пошто је $x = -2$, биће :

$$dy = (-1)\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$dy = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Прираштај функције и диференцијал разликује се за 0,015625.

8. — ИЗРАЧУНАВАЊЕ ГРЕШКЕ

Диференцијал је веома подесан за израчунавање грешака. Како се то ради показаћемо на примерима.

Пример I. — За страну једнога квадрата узета је дужина од 80 м са грешком до 1 cm. Колика ће бити грешка у површини?

$p = a^2$. Површина је функција стране. Зато ћемо ставити: $y = x^2$.

Треба да нађемо прираштај функције y за прираштај независно промењљиве x кад је $h = 1cm$.

Пошто је овде h веома мало, место прираштаја функције узећемо њен диференцијал.

$dy = y'dx \qquad dx = 0{,}01m, \; y' = 2x = 2 \times 80\,m = 160\,m,$

$dy = 160\,m \cdot 0{,}01\,m.$

$dy = 1{,}60\,m^2$ Грешка је $1{,}60\,m^2$.

Да израчунамо сад тачну грешку помоћу прираштаја функције.

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = (80 + 0{,}01)^2 - 80^2 = 160{,}01 \times 0{,}01 = 1{,}6001\,m^2$$

Прираштај функције показује да је грешка за 1 cm^2 већа од грешке коју смо ми израчунали помоћу диференцијала. То може овде да се занемари и да се узме да је грешка

$$dy = 1{,}60\,m^2$$

Из овога примера си могао видети како је диференцијал веома подесан да послужи као довољна приближна вредност за прираштај функције. Пошто је њега много лакше израчунати него прираштај функције, он је веома користан.

Пример II. — Измерена је ивица коцке $a = 12$ cm с грешком до 0,1 mm. Колика је грешка у запремини?

Овде је $h = 0{,}1$ mm. Пошто је та дужина веома мала према дужини од 12 cm, ми ћемо употребити диференцијал место прираштаја функције.

$y = x^3$

$dy = y'dx \qquad y' = 3x^2 = 3.12^2 = 3 \times 144 = 432$

$\qquad\qquad\qquad dx = 0{,}01\,cm.$

$dy = 432 \times 0{,}01$

$dy = 4{,}32\,cm^3.$

Сад ћемо израчунати грешку помоћу прираштаја функције.

$$y = f(x+h) - f(x) = (12{,}01)^3 - 12^3 = 1732{,}323601 - 1728 = 4{,}323601\,cm^3.$$

Ако узмемо диференцијал место прираштаја функције, наш рачун није тачан за 0,003601 cm^3. То је приближно 4 mm^3. Према запремини ове коцке ова четири кубна милиметра могу да се одбаце. Зато ћемо као тражену грешку узети оно што смо добили као вредност диференцијала. Грешка је 4,32 cm^3.

ВЕЖБАЊА

1. — Основица једног правоугаоника је $a = 17$ cm, а висина је 4 cm. Висина је дата с грешком до 0,1 mm. Колика је могућа грешка у површини?

2. — Једна дужина мерена је мотком од 3 m. Мотка је пренета 5 пута. При полагању мотке учињена је увек грешка до 2 mm. Колика је целокупна могућа грешка?

3. — При мерењу димензија једнога правоугаоника нађено је да оне износе 42 m и 17,5 m, али друга с грешком до 5 mm. Колика је могућа грешка у површини?

4. — Основица једног паралелепипеда је 2,43 m^2, а висина је 1,25 m, с грешком до 1 mm. Колика је могућа грешка у запремини?

5. — Колика је могућа грешка у површини равностраног троугла, кад му је страна $a = 14{,}7$ m измерена с грешком до 0,1 cm?

6. — Колика је могућа грешка у површини круга, кад је полупречник $r = 18$ m измерен с грешком до 0,5 mm?

7. — Колика је могућа грешка у запремини лопте, кад је полупречник $r = 35$ mm измерен с грешком до 0,1 mm?

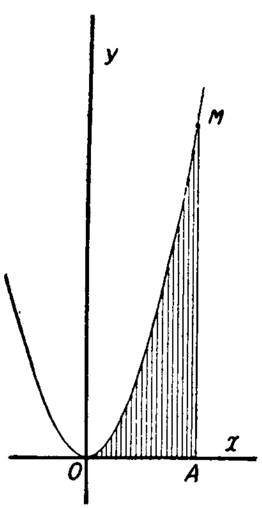
8. — Код зарубљене купе је $r = 14$ cm, $R = 24$ cm, $h = 10$ cm. Полупречник веће основе измерен је с грешком од 0,03 cm. Израчунај грешку у запремини.

II. — ИНТЕГРАЛИ

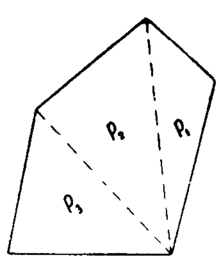
1. — ОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Нека је дата парабола $y = x^2$ (сл. 20). Хоћемо да израчунамо део њене површине ограничен делом OA апсцисне осовине, ординатом AM у тачки M и луком OM дате параболе.

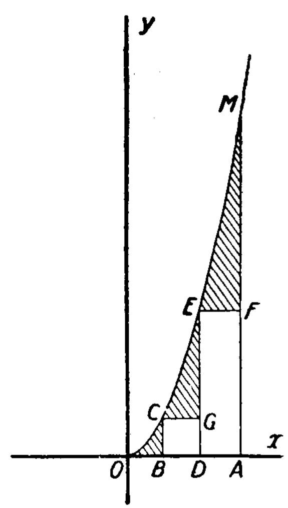
Обележимо површину OAM са F. Не знамо како се израчунава површина ове врсте. Али ми немамо никакав нарочити образац ни за израчунавање површине неправилних полигона, па ипак умемо да им израчунамо површину сасвим тач-



Сл. 20.



Сл. 21.



Сл. 22.

но. Такву површину (сл. 21) изделимо на троугле, израчунамо површину сваког троугла посебице, па добивене резултате саберемо. Ако обележимо површину овога неправилнога полигона са p, биће: $p = p_1 + p_2 + p_3$.

Покушаћемо тако нешто и на слици 20. Поделићемо апсцису OA на три једнака дела и из деоних тачака подићи ординате (BC, DE, сл. 22). Из тачака C и E повући ћемо дужи CG и EF паралелне с апсцисном осовином. Добијамо право угле четвороугле $BDGC$ и $DAFE$. Њихове површине можемо израчунати.

$$BDGC = 1 \cdot 1 = 1.$$
$$DAFE = 1 \cdot 4 = 4.$$

Збир површина ова два четвороугла очевидно није раван траженој површини F. Наши четвороугли су унутра. Они не излазе ван тражене површине. Њихова површина је $1 + 4 = 5$. Обележимо је са F_1. Од речи „унутрашњи" узмимо прва два слова *-un-* и ставимо их испред F_1. Овако:

$$\text{un}\, F_1 = \mathbf{5}.$$

Тиме хоћемо да кажемо ово: „Прва унутрашња површина је равна 5".

Добили смо прву мању вредност за F. Видимо да је

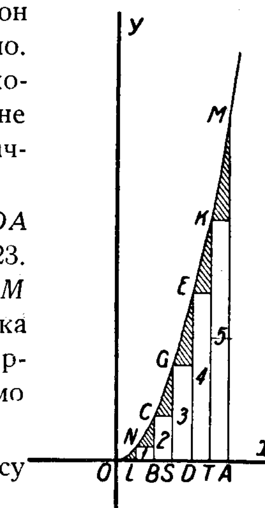
$$\text{un}F_1 < F.$$

Смемо ли број 5 узети као да је он мерни број површине AOM? Не смемо. Грешка би била много велика, јер у површину unF_1 нису урачунате површине OBC, CGE и EFM. Морамо тражити тачнији резултат.

Ми ћемо онда поделити апсцису OA на 6 једнаких делова. Добијамо слику 23.

Раставили смо сад површину OAM на 5 правоугаоника и на 6 других слика које смо на слици осенчили. Збир површина свих 5 правоугаоника обележимо са $\text{un}\, F_2$.

Основице свих правоугаоника су по $\frac{1}{2}$. Треба само да им израчунамо висине. То су ординате LN, BC, SG, DE,



Сл. 23.

TK. Кад знамо једначину параболе и апсцисе деоних тачака (L, B, итд.), лако нам је израчунати те ординате. Биће :

$$LN = (\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}$$

$$BC = 1^2 = 1.$$

$$SG = (1\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{9}{4}.$$

$$DE = 2^2 = 4$$

$$TK = (2\tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{25}{4}$$

Површина ${}_{un}F_2$ биће:

$${}_{un}F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + 4 + \frac{25}{4}\right) =$$

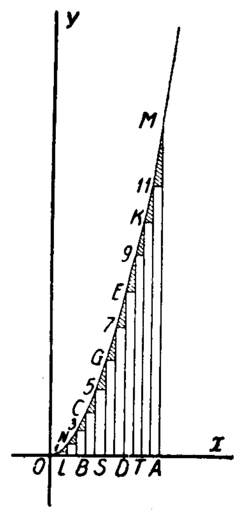
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1+4+9+16+25}{4}\right) = \frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$$

Опет је добивена површина мања од тражене површине. (Откуд знамо?).

Само што је сад грешка мања. (Откуд знамо? Који је већи: први, или други резултат?)

Поделићемо сад апсцису OA на 12 једнаких делова (сл. 24) и начинити правоугаонике као и на сликама 22 и 23.

Добијамо 11 правоугаоника. Основица им је свима по $\frac{1}{4}$. Имамо само да израчунамо ординате тачака од 1 до 11. Биће:



Сл. 24.

Ордината у тачки	1 :	$(\frac{1}{4})^2$	$= \frac{1}{16}$
„ „ „	N :		$= \frac{1}{4}$ (Види горе).
„ „ „	3 :	$(\frac{3}{4})^2$	$= \frac{9}{16}$
„ „ „	C :		$= 1$
„ „ „	5 :	$(\frac{5}{4})^2$	$= \frac{25}{16}$

Ордината у тачки	G:		$= \frac{9}{4}$
„ „ „	7 :	$(\frac{7}{4})^2$	$= \frac{49}{16}$
„ „ „	E :		$= 4$
„ „ „	9 :	$(\frac{9}{4})^2$	$= \frac{81}{16}$
„ „ „	K :		$= \frac{25}{4}$
„ „ „	11 :	$(\frac{11}{4})^2$	$= \frac{121}{16}$.

Обележимо збир свих 11 правоугаоника са ${}_{un}F_3$. Тада ће бити:

$${}_{un}F_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} + \frac{25}{16} + \frac{36}{16} + \frac{49}{16} + \frac{64}{16} + \frac{81}{16} + \frac{100}{16} + \frac{121}{16}\right)$$

$${}_{un}F_3 = \frac{1}{4} \cdot \frac{506}{16}$$

$${}_{un}F_3 = 7\frac{29}{32}$$

Имамо досад ова три резултата:

$${}_{un}F_1 = 5 < F$$

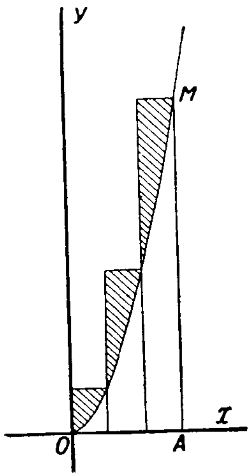
$${}_{un}F_2 = 6\frac{7}{8} < F \text{ и}$$

$${}_{un}F_3 = 7\frac{29}{32} < F.$$

Још нисмо израчунали површину F. Видимо да је наша грешка све мања. Видимо и ово: што више опадају делови на које делимо апсцису OA, све се више ближимо тачном резултату F.

Пробаћемо сад да израчунамо F на други начин.

Рачунаћемо помоћу спољних четвороуглова (сл. 25).



Сл. 25.

Ако збир свих правоугаоника са слике 25 обележимо са spF_1 („Спољна површина F_1“), биће:

$$_{sp}F_1 = 1 + 4 + 9 = \mathbf{14}.$$

Са слике видимо да је

$$_{sp}F_1 > F.$$

Изделимо апсцису OA на 6 једнаких делова. Биће (сл. 26):

$$_{sp}F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{4}+\frac{25}{4}+\frac{36}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{91}{4} = \frac{91}{8}.$$

$$_{sp}F_2 = \mathbf{11\frac{3}{8}}$$

Са слике видимо да је

$$_{sp}F_2 > F.$$

Изделићемо OA на 12 једнаких делова (сл. 27). Биће:

$$_{sp}F_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{9}{16}+\frac{16}{16}+\frac{25}{16}+\frac{36}{15}+\frac{49}{16}+\frac{64}{16}+\frac{81}{16}+\frac{100}{16}+\frac{121}{16}+\frac{144}{16}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{650}{16} = \frac{325}{32}.$$

$$_{sp}F_3 = \mathbf{10\frac{5}{32}}.$$

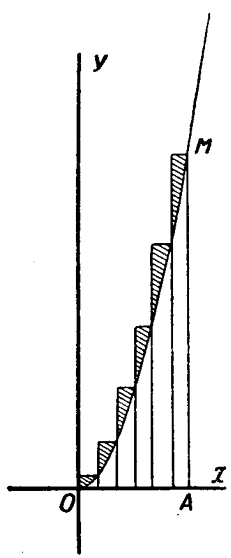
$$_{sp}F_3 > F.$$

Имали смо за F три приближно мање вредности:

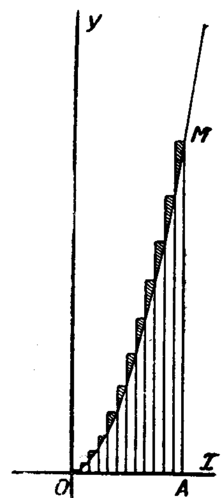
$$\mathbf{5,\ 6\frac{7}{8}}\ \text{и}\ \mathbf{7\frac{29}{32}}.$$

Сад имамо за F три приближно веће вредности:

$$\mathbf{14,\ 11\frac{3}{8}}\ \text{и}\ \mathbf{10\frac{5}{32}}.$$



Сл. 26.



Сл. 27.

Увек F лежи између једне унутрашње и једне спољашње површине:

$$_{un}F_1 < F < {}_{sp}F_1 \quad \text{тј.} \quad \mathbf{5 < F < 14}$$

$$_{un}F_2 < F < {}_{sp}F_2 \quad „ \quad \mathbf{6\frac{7}{8} < F < 11\frac{3}{8}}$$

$$_{un}F_3 < F < {}_{sp}F_3 \quad „ \quad \mathbf{7\frac{29}{32} < F < 10\frac{5}{32}}.$$

Од икса зависе и унутрашње површине и спољашње површине и површина F коју тражимо. (По чему видиш?). Из горње таблице видимо да се унутрашња и спољашња површина **ближе** једна другој.

Збир квадрата целих бројева. — При горњим рачунима видели смо да се појављују збирови квадрата целих бројева ($1^2 + 2^2 + 3^2 +$ итд.). Биће нам убрзо потребно да умемо израчунати збир квадрата ма колико целих бројева. Зато ћемо овде показати како се то ради.

Узмимо да израчунамо збир S_n ових квадрата:

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2.$$

Израчунаћемо најпре једну разлику:

$$(m+1)^3 - m^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1 - m^3 = 3m^2 + 3m + 1.$$

Сад ћемо броју m давати целе вредности почевши од нуле: За $m = 0$ имамо $(m+1)^3 - m^3 = 1^3 - 0^3 = 1^3$

за $m = 1$ имамо $(m+1)^3 - m^3 = 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$

за $m = 2$ „ „ $= 3^3 - 2^2 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$

за $m = 3$ „ „ $= 4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$

за $m = 4$ „ „ $= 5^3 - 4^3 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1$

. . . .

за $m = (n-1)$ имамо „ $= n^3 - (n-1)^3 = 3 \cdot (n-1)^2 + 3\,(n-1) + 1$

за $m = n$ „ „ $= (n+1)^3 - n^2 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$

Сабраћемо све кубове одозго до доле:

$$(1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \ldots\ldots + [n^3 - (n-1)^3] + [(n+1)^3 - n^3].$$

Добијамо:

$$(n+1)^3.$$

Кад саберемо десне стране у горњим једнакостима, добијамо:

$$3\,[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2 + n^2] + 3\,[1+2+3+\ldots\ldots + (n-1) + n] + n + 1.$$

Отуда :

$$(n+1)^3 = 3\,S_n + 3\,.\,\frac{n}{2}\,(n+1) + (n+1).$$

Одатле ћемо израчунати збир S_n квадрата целих бројева од 1 до n :

$$3\,S_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3n}{2}\,(1+n) - n - 1$$

$$2\,.\,3\,S_n = 2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n - 3n^2 - 2n$$

$$6\,S_n = 2n^3 + 3n^2 + n$$

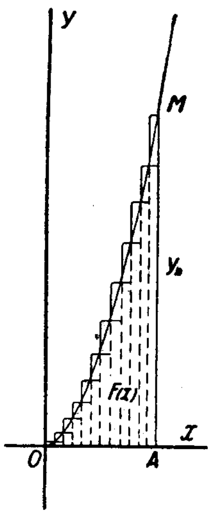
$$6\,S_n = 2n^3 + 2n^2 + n^2 + n$$

$$6\,S_n = 2n^2\,(n+1) + n\,(n+1)$$

$$6\,S_n = (n+1)\,(2n^2+n)$$

$$6\,S_n = n\,(n+1)\,(2n+1)$$

$$S_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$



Сл. 28.

Наставак израчунавања површине F. — Нацртајмо опет своју пароболу (сл. 28). Збир унутрашњих правоугаоника обележимо са F_1; збир спољашњих правоугаоника који њему одговара обележимо са F_2; површину OAM обележимо са F. Знамо да све те три површине зависе од икса. (Чим се икс мења, мењају се све те површине). Зато можемо написати :

$$F_1\,(x) < F\,(x) < F_2\,(x).$$

Делимо OA на n делова. Што је n веће, F_1 и F_2 све се више ближе површини F. Отуда је:

$$F\,(x) = \lim_{n\to\infty} F_1\,(x) = \lim_{n\to\infty} F_2\,(x).$$

Како ћемо израчунати ову граничну вредност у нашем случају ?

Обележићемо прву ординату са y_1, другу са y_2, трећу са y_3 . . . . последњу са y_n. Изразићемо површину F_2 па ћемо тражити њену граничну вредност. Добивена гранична вредност биће тражена површина F. Поделак на апсцисној осовини обележићемо овако :

$$\frac{OA}{n} = \Delta x = h.$$

$$F_2\,(x) = y_1 h + y_2 h + y_3 h + \ldots\ldots + y_n\,h.$$

Овде имамо целокупан збир производа ординате и прираштаја од икс (h) који одговара ординати. Ми то у математици пишемо скраћено великим грчким словом сигма:

$$F_2\,(x) = \sum_1^n yh.$$

То читамо: „Еф два од икс равно сигма од 1 до n ипсилон ха“. Стављамо „од 1 до n“, јер хоћемо да покажемо да имамо n сабирака: од производа прве ординате и h до производа енте ординате и h.

Сад је даље :

$$F = \lim_{n\to\infty} F_2\,(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n yh = \lim_{n\to\infty} h\;(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + \ldots\ldots + y_n) =$$

Пошто је једначина наше криве $y = x^2$, то ће даље бити :

$$F = \lim_{n\to\infty} h\;(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots\ldots + x^{n}_{2}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} h\,[(h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + (4h)^2 + \ldots\ldots\ldots + (nh)^2] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} h\,.\,h^2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n^2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} h^3\,.\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$ Ми хоћемо да израчунамо површину $OAMO$ са слике 28. Ту је

$OA = 3.$ Зато је

$$h = \frac{3}{n}$$

Зато ће површина $OAMO = F$ бити даље :

$$F = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^3.\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{27}{n^3}\,.\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \lim_{n\to\infty} 27\,.\,\frac{1\,.\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6} =$$

$$= 27\;.\;\frac{1\,.\,1\,.\,2}{6} = 27\,.\,\frac{1}{3} = 9.$$

То је тачан мерни број површине коју смо тражили. Дакле :

OAM = F = 9.

ВЕЖБАЊА

1. — Израчунај површину ограничену линијом $y = x^2$, апсцисном осовином и ординатом у крајњој тачци за x од 0 до 2

2. — Исто за линију $y = x^2$ за x од 2 до 3.

[Најпре израчунај површину за x од 0 до 3, па од ње одузми површину од $x = 0$ до $x = 2$].

3. — Исто за линију $y = x^2$ за x од 5 до 10.

Израчунај површину ограничену датом линијом, апсцисном осовином и ординатом у крајњој тачци :

4. $y = 2x^2$ за x од 0 до 5.
5. $y = 3x^2$ за x од 0 до 7.
6. $y = x^2$ за x од 3 до 8.
7. $y = 4x^2$ за x од 1 до 5.
8. $y = x^2$ за x од 0 до -4.
9. $y = -x^2$ за x од 3 до 9.
10. $y = -2x^2$ за x од 2 до 6.
11. $y = 2x$ за x од 0 до 5.
12. $y = 3x$ за x од 0 до 10.
13. $y = 4x$ за x од 0 до 7.
14. $y = 6x$ за x од 2 до 8.
15. $2y = 3x$ за x од 3 до 12.

Одређени интеграл. — Границу којој тежи збир правоугаоника које добијамо кад апсцису поделимо на *n* делова и пустимо то *n* да расте у бесконачност зовемо одређени интеграл. Он нам даје целу површину. Отуда реч интеграл. (Од латинске речи *integer*-цео). Одређени интеграл пишемо једним новим знаком, интегралним знаком, који има облик издуженог слова *ес* :

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n yh = \int_0^x y\,dx.$$

$$\mathbf{F\ (x) = \int_0^x ydx.}$$

То читамо: „Еф велико од икс једнако интеграл од нуле од *x*, ипсилон де икс". Површину коју смо раније израчунали написали бисмо овако :

$$F(x) = \int_0^3 y\,dx.$$

То бисмо прочитали: „Велико еф од икс једнако интеграл од нуле до три, ипсилон де икс."

Бројеве *0* и *3* стављамо да бисмо означили на ком делу апсцисне осовине израчунавамо површину. Доњи број показује апсцису од које смо пошли, а горњи показује ацсцису до које смо дошли. Доњи број зове се **доња граница одређеног интеграла,** горњи број зове се **горња граница одређеног интеграла.** Само овде реч „граница" не значи оно што ми обележавамо знаком **„*lim*"**. Ове границе код интеграла значе просто преграду. (Одакле докле иде површина).

Ydx потсећа на то да смо дату површину делили на правоугаонике чија је површина **yh**. Знак $\int$ **(интегрални знак)** казује да смо све те мале површине сабрали.

Са слике се 29 види да је :

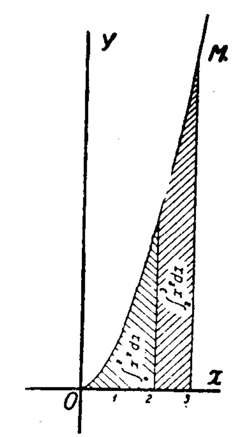
$\int_0^3 x^2\,dx = \int_0^2 x^2\,dx + \int_2^3 x^2\,dx.$ Одатле је:

$\int_2^3 x^2\,dx = \int_0^3 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx.$ И то се види са слике.

Апсциса је од 0 до 3 позитивна, али је од 3 до 0 негативна. Зато је

$$\int_0^3 x^2\,dx = -\int_3^0 x^2\,dx$$

Значи: **интеграл мења знак кад му границе промене места.**



Сл. 29.

Зашто смо горе писали $x^2\,dx$ место *ydx?* Зато што наша крива каже да је $y = x^2$. Ову једначину можемо написати и овако: $y = f(x)$. Зато нашу површину *F* можемо овако да изразимо :

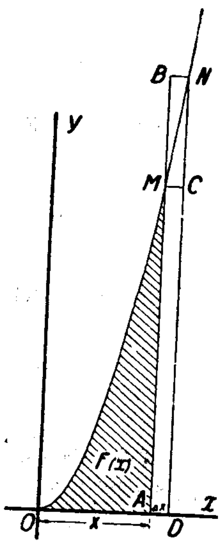
$$F(x) = \int_0^3 ydx = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

$$F(x) = \int_0^3 f(x)\,dx.$$

Однос између функција $F(x)$ и $f(x)$. — Узмимо опет своју криву $y = x^2$ (сл. 30) и једну тачку M чија је апсциса $OA = x$. Тада је површина OAM.

$$OAM = F(x) = \int_0^x f\,dx.$$

Дајмо иксу прираштај $AD = \Delta x$. Кад x порасте за Δx, површина OAM порасте за површину $ADNM$. Тада је:



Сл. 30.

$AM.AD < ADNM < DN.AD$. То је даље:

$AM.\,\Delta x < ADNO - OAM < DN.\,\Delta x.$

$AM.\Delta x < F(x + \Delta x) - F(x) < DN.\Delta x.$

Поделићемо све са Δx:

$$AM < \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} < DN$$

$$f(x) < \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} < f(x + \Delta x).$$

Са слике се види (сл. 30) да површина $ADNM$ бива све мања што је Δx мање. Кад Δx тежи нули ордината DN пада на ординату AM. То значи поклопе се $f(x + \Delta x)$ и $f(x)$. Зато је:

$$(1) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x)$$

Пошто је $\lim \dfrac{F(x + x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$, једначина (1) постаје $F'(x) = f(x)$.

Наш малопређашњи интеграл можемо сад овако написати:

$$F(x) = \int_0^3 y\,dx = \int_0^3 x^2 dx = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 F'(x)\,dx.$$

$$F(x) = \int_0^3 F'(x)\,dx$$

Видимо ово: Да бисмо одредили површину F, треба да нађемо функцију $F(x)$ чији је извод дат. [Дато је $f(x) = F'(x)$, а треба наћи $F(x)$].

Сад наилазимо на нов посао. Нама је дата крива линија $y = x^2$, па се тражи да израчунамо површину F ограничену једним луком те криве, апсцисом и ординатом. Сад смо научили да је та површина функција икса и да је функција која претставља нашу криву први извод функције $F(x)$. Значи, за дати први извод $F'(x) = f(x) = x^2$ имамо да одредимо функцију $F(x)$ тако да буде $F'(x) = x^2$.

Примитивна функција. — Нека је дата функција $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Њен извод је $F'(x) = f(x) = x^2$.

Функција $F(x)$ чији је извод функција $f(x) = F'(x)$ зове се примитивна функција функције $f(x)$.

Изводна функција $f(x) = x^2$. Њена примитивна функција $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Изводна функција $f(x) = x$. Њена примитивна функција $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$.

Зашто? Зато што је $F'(x) = \dfrac{3x^2}{3} = x^2$, а за другу функцију

$$F'(x) = \frac{2x}{2} = x$$

Изводна функција $f(x) = 2x$. Њена примитивна функција $F(x) = x^2$.

Интеграљење. — Кад за дату изводну функцију $f(x)$ одређујемо њену примитивну функцију $F(x)$, радимо посао који се зове интеграљење. Тај посао означавамо овако:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \text{ и читамо:}$$

„Велико еф од икс једнако интеграл мало еф од икс де икс.“

Функција под интегралним знаком зове се *интегранд*. Овде је интегранд функција $f(x)$. Функција коју добијамо интеграљењем дате функције $f(x)$ зове се *интегрална функција*. Овде је интегрална функција $F(x)$.

За дати интегранд израчунати интегралну функцију значи вршити посао који се зове *интеграљење*.

2. — НЕОДРЕЂЕНИ ИНТЕГРАЛ

Шта је неодређени интеграл. — Интеграл којим одређујемо примитивну функцију за њену дату изводну функцију зове се неодређени интеграл.

$\int f(x)\,dx$ је неодређени интеграл.

$\int x^2\,dx$ је неодређени интеграл.

Неодређен, јер он даје безброј разних функција. Све те функције које даје неодређени интеграл претстављају читав рој кривих. Сад ћемо то видети.

Интеграциона константа. — Кад је извод $F'(x)$ функције $F(x)$ једнак x^2, сама функција $F(x)$ мора бити

$$F(x) = \frac{x^3}{3}, \text{ јер је}$$

$$F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2.$$

Ми знамо да је извод сталне функције раван нули:

$$y = 2$$
$$y' = 0.$$

Отуда знамо да имају исти извод све функције које се разликују за један сталан број (за једну константу).

Пример.	$F(x) = 2x^2$	$F'(x) = 4x$
(„фи од икс")	$\varphi(x) = 2x^2 + 3$	$\varphi'(x) = 4x$
(„пси од икс")	$\psi(x) = 2x^2 - 7$	$\psi'(x) = 4x$

Видимо да су сва три извода једнака, ма да функције нису једнаке. Наше функције се разликују за једну сталну количину (3, —7). Зато кад из датог извода одређујемо примитивну функцију, морамо добијеној функцији додати једну сталну количину.

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Ово је C ма који сталан број.

Примери.

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 3dx = 3x + C$$

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C.$$

Ову сталну количину коју додајемо израчунатој примитивној функцији зовемо интеграциона константа.

Извлачење константе испред интеграционог знака. — Хоћемо да одредимо **функцију** $\int 2x^2\,dx$. Имаћемо:

$\int 2x^2\,dx = 2.\frac{x^3}{3} + C.$ Сад ћемо то радити на други начин.

$$\int 2x^2\,dx = 2\int x^2\,dx = 2.\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = 2.\frac{x^3}{3} + 2C = 2.\frac{x^3}{3} + C$$

Место $2C$ можемо слободно ставити C, пошто су и C и $2C$ произвољне константе.

Одавде видимо да се стална количина која је чинилац у интегранду може извући пред интегрални знак.

Примери.

$$\int 3xdx = 3\int xdx = 3.\frac{x^2}{2} + C.$$

$$\int 7xdx = 7\int xdx = \frac{7}{2}x^2 + C$$

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$$

3. — ОДРЕЂИВАЊЕ ВРЕДНОСТИ ОДРЕЂЕНОГ ИНТЕГРАЛА

Сад кад знамо шта значи неодређени интеграл можемо много брже израчунати површину са слике 23. (Површину OAM).

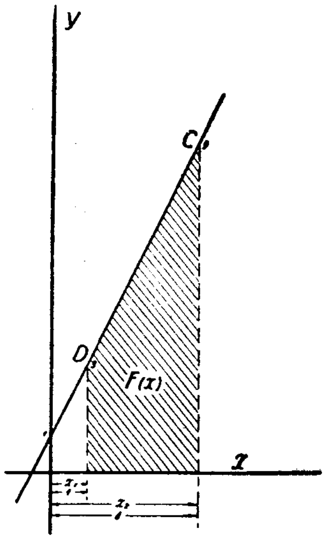
$$OAM = F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Колико је ово C?

Ми знамо да је овде $F(0) = 0$. (Површина је нула ако се ми на апсцисној осовини не помакнемо од O. Види сл. 23). Значи да је $F(x) = 0$ за $x = 0$:

$F(0) = \frac{0^3}{3} + C = 0.$ Отуда је овде $C = 0$. Зато је:

$$F(x) = \int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3} = \frac{3^3}{3} = 9.$$



Сл. 31.

(Пошто је наша површина начињена кад је x постало 3).

Тај смо резултат добили и раније, само сад много брже.

Пример. — Одредити помоћу интеграла осенчену површину (сл. 31) ограничену апсцисном осовином, правом $y = 2x + 1$ и ординатама у тачкама $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$. Обележимо осенчену површину са $F(x)$. Тада ће бити:

$$F(x) = \int_1^4 y\,dx = \int_1^4 (2x+1)\,dx =$$

$$= x^2 + x + C.$$

Како ћемо одредити C? Ми знамо да је наше $F(x) = 0$ кад буде $x = 1$. (Види слику). Тада површине нема, јер C пада на D). Изразићемо то:

$$F(1) = 1^2 + 1 + C = 0. \quad \text{Одатле је}$$

$$C = -2. \quad \text{Отуда је:}$$

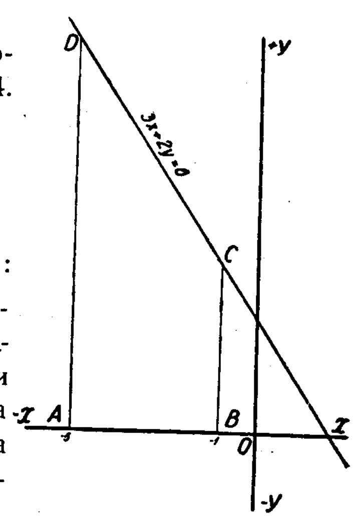
$$F(x) = x^2 + x + C = x^2 + x - 2.$$

Површина $F(x) = ABCD$ постане тек онда, кад буде $x = 4$. Зато је:

$$ABCD = F(x) = 4^2 + 4 - (1^2 + 1) = 16 + 4 - 2 = 18.$$

Одавде се одмах види и ово:

Вредност одређеног интеграла израчунава се кад се у добивеном неодређеном интегралу смени најпре x горњом границом, па доњом, па се од првога резултата одузме други. То ми овако пишемо:



Сл. 32.

$$ABCD = \int_1^4 (2x+1)\,dx = \Big[x^2 + x\Big]_1^4 =$$

$$= (4^2 + 4) - (1^2 + 1) = 18.$$

Види се да је одређени интеграл потпуно одређен, јер нигде нема произвољне константе.

Други пример. — Израчунати површину ABCD са сл. 32 ограничену апсцисном осовином, правом $3x + 2y = 6$ и ординатама у тачкама $x = -1$ и $x = -5$.

$$ABCD = \int_{-1}^{-5} \left(-\frac{3}{2}x + 3\right) dx = 1{,}5 \int_{-1}^{-5} (-x + 2)\,dx = 1{,}5 \left[-\frac{x^2}{2} + \right.$$

$$\left. + 2x\right]_{-1}^{-5} = 1{,}5\left\{\left[-\frac{(-5)^2}{2} + 2(-5)\right] - \left[-\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1)\right]\right\} =$$

$$= 1{,}5\left\{\left[-\frac{25}{2} - 10\right] - \left[-\frac{1}{2} - 2\right]\right\} = 1{,}5\Big[(-22{,}5) - (-2{,}5)\Big] =$$

$$= 1{,}5\,(-20) = -30.$$

Да проверимо овај резултат геометриски.

$ABCD$ је трапез.

$$ABCD = \frac{AD + BC}{2} \cdot BA = \frac{10{,}5 + 4{,}5}{2} \cdot (-4) = -30\ .$$

Задаци интегралног рачуна. — Задатак је интегралног рачуна да покаже како се одређује примитивна функција за дати њен извод.

Други задатак интегралног рачуна јесте одређивање вредности одређеног интеграла.

Шта геометриски значе две алгебарске функције једнаких извода. — Знамо да ове две функције:

$$f_1(x) = x^2 \qquad \text{и} \qquad f_2(x) = x^2 + 3$$

имају једнаке изводе. Нацртаћемо их обадве (сл. 33).

Две алгебарске функције једнаких извода претстављају две криве које се транслацијом у правцу ординатне осовине могу довести до поклапања.

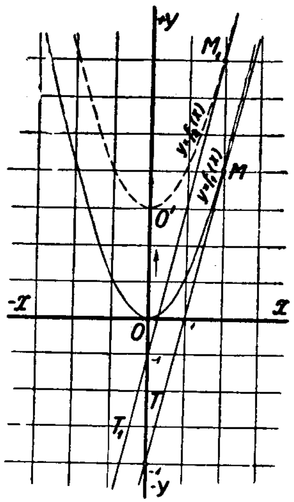
О томе се можемо уверити овако. Узмимо криву $y = x^2 + 3$. Пренесимо транслацијом осовина координатни почетак у тачку O'. Ако хоћемо једначину криве у новом координатном систему, имаћемо да извршимо ову смену:

$$x = X + 0 \qquad y = Y + 3.$$

Сменом ових вредности у једначини криве $y = x^2 + 3$ добијамо:

$$Y + 3 = X^2 + 3 \quad \text{тј.} \; Y = X^2.$$

Значи да се крива $y = x^2 + 3$ може добити из криве $y = x^2$ транслацијом у позитивном смислу ординатне осовине за $+\,3$.



Сл. 33.

У тачки M (2,4) на кривој $y = x^2$ повуцимо дирку. Ако сад пустимо да се крива $y = x^2$ транслаторно креће у позитивном смислу ординатне осовине, њене тачке неће мењати своје апсцисе, а мењаће ординате. При тој транслацији мењаће свој положај и дирка T. И она ће се кретати транслаторно. Према томе, она неће мењати свој правац. Кад крива дође у положај $O'\,M_1$, тачка M пада на M_1, а дирка пада на $M_1\,T_1$. (Јер крива вуче собом своју дирку). Пошто је $M_1\,T_1$ изведена транслацијом из MT, биће:

$$M_1 T_1 \parallel MT \;\; \text{(паралелне).}$$

О томе се можемо уверити и аналитичном геометријом.

Крива $y = x^2$.	Крива $y = x^2 + 3$
Дирка у тачки (2,4):	Дирка у тачки (2,7):
$y = 4x - 4$	$y = 4x - 1$.

Види се да су две дирке паралелне међу собом.

Кад две алгебарске функције имају једнаке изводе, дирке повучене у тачкама које на обема кривама имају једнаке апсцисе паралелне су међу собом.

Кад кажемо да је угловни сачинилац у једначини дирке за неку параболу $f(x) = 2x$, колико има таквих парабола? То су све оне параболе које су изведене једна из друге транслацијом.

Зато при израчунавању неодређеног интеграла и пишемо оно C:

$$F(x) = \int 2x dx = x^2 + C.$$

Је ли сад функција $F(x)$ потпуно одређена? Није. Она претставља читав **рој парабола** које се транслацијом у правцу ординатне осовине могу довести до поклапања (сл. 34). Све те криве имају паралелне дирке за исте апсцисе.

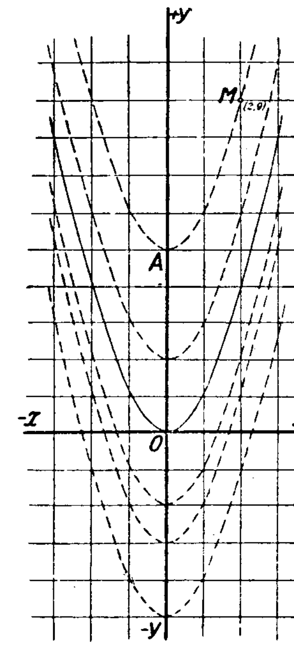
Интегрална крива. — Свака таква крива која претставља интегралну функцију зове се интегрална крива. У нашем примеру је $y = x^2 + C$ интегрална крива.

Одређена вредност неодређеног интеграла. — Нека је дата функција $f(x) = 2x$. Тражи се њен неодређени интеграл али тако, да добивена интегрална крива пролази кроз тачку M (2,9). Ми ћемо најпре израчунати неодређени интеграл дате функције.

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Добијамо примитивну функцију

$$(1) \qquad y = x^2 + C.$$



Сл. 34.

Нама је постављен услов да крива пролази кроз тачку M (2,9). Унећемо те вредности у добивену примитивну функцију (1):

$$9 = 2^2 + C. \qquad \text{Одатле је } C = 5.$$

Сад имамо ову вредност за неодређени интеграл $\int 2x\, dx$:

$$y = x^2 + 5.$$

Добијена функција $y = x^2 + 5$ претставља једну једину криву. (Криву AM, сл. 34). Ова функција $(x^2 + 5)$ зове се одређена вредност неодређеног интеграла $\int 2xdx$. Она се још зове *један* неодређени интеграл функције $f(x) = 2x$.

[Откуда то долази да сад овај неодређени интеграл претставља једну једину криву? Која је основна особина транслаторног кретања? Ми смо укочили тачку M на параболи AM.]

4. — НЕКОЛИКО ОБРАЗАЦА ЗА ИНТЕГРАЉЕЊЕ

Интеграл функције x^n. — Нека је дата функција $y = x^{n+1}$, где је n произвољан стваран рационалан број. Тада је:

$$y = x^{n+1}$$
$$y' = (n+1)\,x^n.$$

Зато је $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$

Овде n може имати ма коју рационалну стварну вредност сем — 1.

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx.$ Тај се интеграл јавља кад у интегралу $\int x^n\,dx$ изложилац n добије вредност (— 1).

Знамо да је за $y = \log nat\ x$ извод $y' = \frac{1}{x}$. Отуда је:

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log nat\ x + C.$$

Примери.

$$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C.$$

Интеграл полинома. — Знамо да је за $y = ax^3 + bx^2 + cx$ ово први извод: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Зато је:

$$\int y'\,dx = \int (3ax^2 + 2bx + c)\,dx = \int 3ax^2\,dx + \int 2bxdx + \int cdx = ax^3 + bx^2 + cx + C.$$

Интеграл полинома једнак је збиру интеграла полиномових сабирака.

Пример. $\int (3x^2 + 4x - 6)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int 4x\,dx + \int (-6)\,dx = x^3 + 2x^2 - 6x + C.$

Интеграл функције $y = \cos x$. — Знамо да је за $y = \sin x$ извод $y' = \cos x$. Отуда је $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

Интеграл функције $y = \sin x$. — Знамо да је за $y = \cos x$ извод $y' = -\sin x$. Отуда је:

$$\int \sin x\,dx = \int (-1)(-1)\sin x dx = -\int -\sin x\,dx = -\cos x + C.$$

Интеграљење помоћу смене. — *I пример.* — Одредити $\int \sin 2x\,dx.$

Ставићемо $2x = z$. Одатле је $x = \frac{z}{2}$, $\quad dx = \frac{1}{2}\,dz.$

$$\int \sin z.\ \frac{1}{2}\,dz = \frac{1}{2}\int \sin z\,dz = -\frac{1}{2}\cos z + C = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$$

II. Пример. — Израчунати $\int \sqrt{3x-2}\,dx.$

Извршићемо смену $\sqrt{3x-2} = z$. Одатле је $x = \frac{z^2}{3} + \frac{2}{3}$

$$dx = \frac{2}{3}\,z\,dz$$

$$\int \sqrt{3x-2}\,dx = \int z\,.\,\frac{2}{3}\,z\cdot dz = \frac{2}{3}\int z^2\,dz = \frac{2}{3}\cdot\frac{z^3}{3} + C = \frac{2}{9}z^3 + C = \frac{2}{9}\left(\sqrt{3x-2}\right)^3 + C.$$

ВЕЖБАЊА

Израчунати ове неодређене интеграле:

1. $\int 3x^2\,dx$	2. $\int 4x^2 dx$
3. $\int \frac{x^2}{4}\,dx$	4. $\int -2xdx$
5. $\int 2xdx$	6. $\int -3x\,dx$
7. $\int -4{,}5x\,dx$	8. $\int -6x\,dx$
9. $\int -5x^3\,dx$	10. $\int \sqrt{x}\,dx$
11. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$	12. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

13. $\int 2\sqrt{x}\,dx$ 14. $\int \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}\,dx$

15. $\int \sqrt{x^3}\,dx$ 16. $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx$

17. $\int 0{,}5\sqrt[4]{x^3}\,dx$ 18. $\int 2\,dx$

19. $\int -4dx$ 20. $\int -3dx$

21. $\int \frac{1}{2}\,dx$ 22. $\int \frac{-3}{4}\,dx$

23. $\int dx$ 24. $\int -dx$

25. $\int \frac{4}{\sqrt{x}}\,dx$

Нацртати интегралну криву из означеног вежбања која пролази кроз дату тачку N:

26. — Вежбање 4, тачка $N\ (+4, 3)$
27. — „ 5, „ $N\ (-3, -2)$.
28. — „ 6, „ $N\ (-1, 0)$.
29. — „ 18, „ $N\ (3, 5)$.
30. — „ 19, „ $N\ (2, 7)$.
31. — „ 20, „ $N\ (-2\ -8)$.

Одредити функцију $f(x)$, кад је:

32. $\int f(x)\,dx = x^2 + C$ 33. $\int f(x)\,dx = x^3 + C$

34. $\int f(x)\,dx = 2x + C$ 35. $\int f(x)\,dx = 2x + C$

36. $\int f(x)\,dx = \sqrt{x} + C$ 37. $\int f(x)\,dx = \sqrt[3]{x^2} + C$

38. $\int f(x)\,dx = \frac{3}{\sqrt{x}} + C$ 39. $\int f(x)\,dx = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + C.$

Израчунати ове неодређене интеграле:

40. $\int (x^3 + 4)\,dx$ 41. $\int (2x^2 - 7)\,dx$

42. $\int (-3x + 8)\,dx$ 43. $\int (2x^2 + 3x - 7)dx$

44. $\int (-3x^2 + 5x - 9)\,dx$ 45. $\int (3x^2 + 9)\,dx$

46. $\int x(x+3)\,dx$ [Овде најпре изврши означено множење].

47. $\int 4x(-7 + x)\,dx$ 48. $\int (-5x)(6 - 2x)d\,x$

49. $\int (3 + \sqrt{x})\,dx$ 50. $\int (x - \sqrt{x})\,dx$

51. $\int (7 + \sqrt{x})\,dx$ 52. $\int (2 + \frac{1}{x})\,dx$

53. $\int (3 - \frac{2}{\sqrt{x}})\,dx$ 54. $\int (2x^2 - \frac{3x}{\sqrt[3]{x}})\,dx$

55. $\int (2 - x)\ (x + 3)\ dx$ 56. $\int (5 - 3x)(4 + 9x)\,dx$

57. $\int (x - 1)\ (1 + x)\,dx$ 58. $\int \frac{1 + x^3}{x^2}\,dx$

59. $\int \frac{4 - 7x^2}{x^3}\,dx$ 60. $\int \frac{7 - \sqrt{x}}{3x}\,dx$

61. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ 62. $\int \frac{2x - 7}{\sqrt{x}}\,dx$

63. $\int 2\cos x dx$ 64. $\int 3\cos x\,dx$

65. $\int -5\cos x dx$ 66. $\int -\frac{\cos x}{4}\,dx$

67. $\int -\frac{2}{3}\cos\frac{x}{2}\,dx$ 68. $\int -0{,}7\cos 2x\,dx$

69. $\int 3\sin x\,dx$ 70. $\int -4\sin x\,dx$

71. $\int \frac{2}{3}\sin\frac{x}{3}\,dx$ 72. $\int -\frac{4}{5}\sin x\,dx$

73. $\int (\sin x - \cos x)\,dx$ 74. $\int (\cos x + \sin x)\,dx$

75. $\int (2\sin x - \cos x)\,dx$

76. $\int (\cos x - 3\sin x)\,dx$ 77. $\int (1 - \cos x)\,dx$

78. $\int (1 + \cos x)\,dx$ 79. $\int \frac{1 - \cos x}{2}\,dx$

80. $\int \frac{1+\cos x}{2}\,dx$

81. $\int \frac{1-\sin x}{3}\,dx$

82. $\int \frac{1+\sin x}{5}\,dx$

83. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$

84. $\int \cos^2 \frac{x}{2}\,dx$

85. $\int \sin 3x\,dx$

86. $\int -\cos 2x\,dx$

87. $\int -\sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$

88. $\int -4\sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$

89. $\int -5\cos\left(\frac{x}{4}\right) dx$

90. $\int -7\cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$

91. $\int 5\sin 4x\,dx$

92. $\int 4\cos\left(\frac{x}{5}\right) dx$

93. $\int (1+x)^3\,dx$

94. $\int (1+x)^{-2}\,dx$

95. $\int (1-x)^{-2}\,dx$

96. $\int \sqrt{2+3x}\,dx$

97. $\int 2\sqrt{2x-7}\,dx$

98. $\int \sqrt[3]{x+1}\,dx$

99. $\int \sqrt[3]{x+1}\,dx$

100. $\int \sqrt[3]{2+3x}\,dx$

101. $\int \sqrt{25-100x}\,dx$

102. $\int \sqrt{2(3x-7)}\,dx$

103. $\int \sqrt{x+\frac{1}{3}}\,dx$

104. $\int \sqrt{\frac{1}{7}-5x}\,dx$

ВЕЖБАЊА ЗА ИЗРАЧУНАВАЊЕ ВРЕДНОСТИ ОДРЕЂЕНИХ ИНТЕГРАЛА

1. $\int_0^5 x\,dx$

2. $\int_0^4 2x\,dx$

3. $\int_4^0 2x\,dx$

4. $\int_0^6 3x\,dx$

5. $\int_{-2}^0 5x\,dx$

6. $\int_0^4 7x\,dx$

7. $\int_{-3}^4 4x\,dx$ [Овде ћеш ставити $\int_{-3}^4 4x\,dx = \int_{-3}^0 4x\,dx + \int_0^4 4x\,dx$, па ћеш сабрати само апсулутне вредности. Нацртај.]

8. $\int_{-2}^2 x^2\,dx$

9. $\int_{-5}^3 2x\,dx$

10. $\int_{-4}^4 3x\,dx$

11. $\int_2^6 \sqrt{x}$

12. $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$

13. $\int_3^7 \sqrt{x^2}$

14. $\int_a^{2a} (x+a)\,dx$

15. $\int_3^5 (x-4)\,dx$

16. $\int_{-3}^3 (1x+6)\,dx$

17. $\int_{-1}^{+1} (4x+5)\,dx$

18. $\int_2^5 (x^2+3x+5)\,dx$

19. $\int_2^8 (2x^2-7x+7)\,dx$

20. $\int_1^2 (2x^3+3x^2+4x+5)\,dx$

21. $\int_1^4 (-3x^3+2x^2-3x+1)\,dx$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

23. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$

24. $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ [Овде стави $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$]

25. $\int_{\frac{2}{3}\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$

26. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$

27. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ **28.** $\int\limits_{0}^{\pi} \cos x \, dx$

29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$ **30.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \, dx$ **31.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$

32. $\int\limits_{\pi}^{3\pi} \cos x \, dx$ **33.** $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\, dx$ **34.** $\int\limits_{0}^{\pi} (\sin x - \cos x)\, dx$

35. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, 2x \, dx$ **36.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos 2x \, dx$ **37.** $\int\limits_{\pi}^{2\pi} 2 \sin 3x dx$

38. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{2}\pi} \sin\,(-2x)\, dx$ **39.** $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7}{2}\pi} \cos\,(-3x)\, dx$

40. — Разлика првог и трећег члана растуће геометриске прогресије једнака је вредности интеграла

$$\int\limits_{0}^{8} \frac{5}{2\sqrt[3]{x}} dx,$$

а производ истих чланова је 100. Како гласи прогресија?

(Београд, Трећа жен. гимн., 1938)

41. — Наћи $\int\limits_{a}^{b} 4x^3 dx$, где је горња интегрална граница b једнака броју чланова растуће аритметичке прогресије код које је збир прва два члана 10, производ првог и другог члана 24, збир прогресије 180; доња интегрална граница a је једнака првом члану ове прогресије.

(Зајечар, 1938)

42. — Наћи вредност одређеног интеграла

$$\int\limits_{n}^{m} \frac{9x^2 - 3x + 2}{x\sqrt{x}} dx$$

ако је горња граница једнака са већом вредношћу за x, а доња граница једнака са мањом вредношћу за y у систему једначина

$$x^2 - 8 = 2x(2y - 3)$$

$$\sqrt{\frac{3x - 2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x - 2y}} = 2$$

(Београд, Жен. гимн. Краљице Марије, 1938)

(Стави $\sqrt{\dfrac{3x - 2y}{2x}} = z$. Колико је онда $\sqrt{\dfrac{2x}{3x - 2y}}$?)

43. — Доња граница интеграла

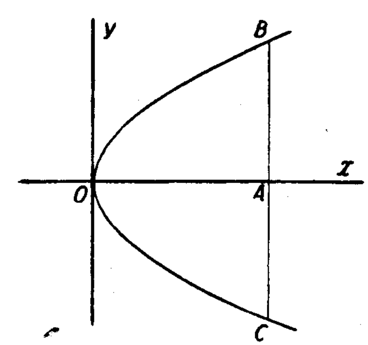
$\int \dfrac{\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}}{x^2} dx$ јесте корен једначине $4^{3x-2} - 5^{2x-1} = \dfrac{1}{9}(4^{3x-1} - 5^{2x})$; горња граница је равна збиру реда $1 + \dfrac{3}{4} + \dfrac{9}{16} + \ldots$; одреди вредност интеграла.

(Крањ, 1938)

5. — ИЗРАЧУНАВАЊЕ ПОВРШИНА И ЗАПРЕМИНА ПОМОЋУ ИНТЕГРАЛА

ПОВРШИНЕ

Површина параболе. — Нека је дата парабола $y^2 = 2px$ (сл. 35). Повуцимо тетиву BC управно на апсцисну осовину. Хоћемо да израчунамо површину отсечка $COBC$. Ми ћемо најпре израчунати површину OAB, па ћемо добивени резултат помножити са 2. Ставимо $OA = x$. Тражена површина биће:



Сл. 35.

$$COBC = 2\,OAB = 2\int\limits^{x} y\, dx =$$

$$= 2\int\limits_{0}^{x} \sqrt{2px}\, dx = 2\sqrt{2p}\int\limits_{0}^{x} \sqrt{x}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{2p}\int\limits_{0}^{x} x^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{2p}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{x}$$

$$= 2\sqrt{2p}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 0\right) =$$

$$= 2\sqrt{2p}\,\frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{4}{3}\sqrt{2p}\cdot x\sqrt{x} = \frac{4}{3}x\cdot\sqrt{2px} = \frac{4}{3}xy.$$

ВЕЖБАЊА

Кроз тачку M на датој параболи повучена је сечица управно на апсцисну осовину. Израчунати површину добивеног параболиног отсечка.

1.	$y^2 = 4x$	$M\ (3, y)$	**2.**	$y^2 = 6x$	$M\ (1, y)$
3.	$y^2 = 8x$	$M\ (4{,}75, y)$	**4.**	$y^2 = 10x$	$M\ (10, y)$
5.	$y^2 = x$	$M\ (3, y)$	**6.**	$2y^2 = x$	$M\ (7, y)$
7.	$3y^2 = x$	$M\ (5, y)$	**8.**	$\frac{2}{3}y^2 = x$	$M\ (6, y)$
9.	$y^2 = -x$	$M\ (-3, y)$	**10.**	$y^2 = -4x$	$M\ (-5, y)$

Кроз тачку M на датој параболи повучена је сечица управно на ординатну осовину. Израчунати површину добивеног параболиног отсечка.

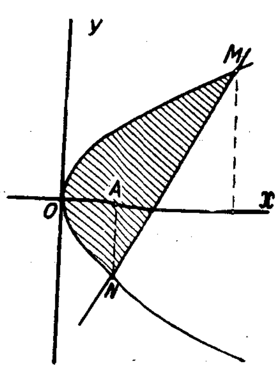
11.	$y = x^2$	$M\ (\ x{,}4\ )$	**12.**	$y = 2x^2$	$M\ (3, y)$
13.	$y = 6x^2$	$M\ (5, y)$	**14.**	$2y = x^2$	$M\ (7, y)$
15.	$2y = 5x^2$	$M\ (1, y)$	**16.**	$y = 6x^2$	$M\ (-3\ y)$
17.	$y = -4x^2$	$M\ (+5\ y)$	**18.**	$4y = -5x^2$	$M\ (20, y)$

19. — Како ће гласити образац за површину параболиног отсечка кад једначина параболе гласи:

$$y^2 = 2p\ (x - a)?$$

20. — Исто питање за параболу $(y - b)^2 = (x - a)$.

21. — Израчунати површину параболног отсечка који гради сечица MN (сл. 36) кад је једначина параболе $y^2 = 4x$, а апсцисе тачака M и N су 7 и 2 ?



Сл. 36.

22. — Параболу $y = x^2$ сече права $x + y = 3$. Израчунати површину отсечка.

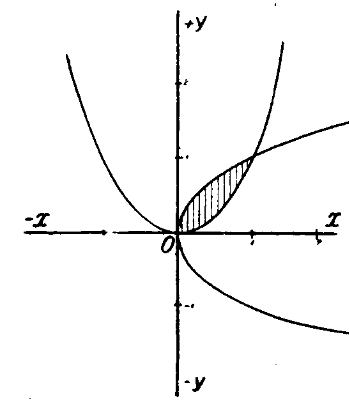
23. — Параболу $y = x^2 - 4x + 2$ сече права $x - 2y = -4$. Израчунати површину отсечка.

24. — Параболу $y - 3 = 1{,}5x^2 + 6x + 5$ сече права $x + y = 10$. Одредити површину отсечка.

25. — Параболу $y = 4x^2$ секу права $x + y = 3$ и права која је с њом паралелна на растојању $d = 1$. Колика је површина параболног дела између тих двеју правих?

26. — Колики је заједнички део површина ових двеју парабола: $y = x^2$ и $y^2 = x$? (Види слику 37).

27. — Израчунај површину између апсцисне осовине, једног дела кубне параболе $y = x^3$ од координатног почетка до ординате за $x = 3$.



Сл. 37.

Израчунати површину ограничену делом дате криве, апсцисном осовином и ординатама у тачкама чије су апсцисе m и n:

28.	$y = 2x^3$ $m = 0,\ n = 1$	**29.**	$y = \frac{x^3}{3}$ $m = 1,\ n = 5{,}1$
30.	$y = \frac{x^4}{4}$ $m = 2,\ n = 7$	**31.**	$y = 5x^5$ $m = 0,\ n = 4$
32.	$y = 2x^3$ $m = -5,\ n = 4$	**33.**	$y = 3x^4$ $m = -2,\ n = 3$
34.	$y = \sin x$ $m = 0,\ n = \frac{\pi}{2}$	**35.**	$y = \cos x$ $m = 0,\ n = \frac{\pi}{2}$
36.	$y = tg\,x$ $m = 0,\ n = \frac{\pi}{4}$	**37.**	$y = cotg\,x$ $m = 0,\ n = \frac{\pi}{4}$
38.	$y = \frac{3 + x}{x}$ $m = 1,\ n = 3$	**39.**	$y = \frac{2 - x}{x^2}$ $m = -1,\ n = 2$
40.	$y = \frac{5 + x}{x^3}$ $m = 2,\ n = 5$	**41.**	$y = \frac{x - 1}{x^4}$ $m = -3,\ n = 0$
42.	$y = \frac{2x + 1}{x^3}$ $m = -2,\ n = -1$	**43.**	$y = \frac{2x^2 - 1}{x^5}$ $m = -3,\ n = -2.$
44.	$y^3 = x^2$ $m = 1,\ n = \sqrt{27}$	**45.**	$y = x^3$ $m = \frac{1}{2},\ n = \sqrt[3]{2}$

46. — Израчунати површину ограничену луцима ових двеју кривих:

$$y^2 + x^2 - \pi x = 0 \text{ и } y = \sin x$$

47. — Дата је крива $y = x^3$. Израчунати површину ограничену луком те криве, апсцисном осовином и ординатом у тачци $x = m$. Израчунати однос који постоји између те површине и површине правоугаоника чија је основица m, а висина је ордината дате криве у тачки чија је апсциса m.

48. — Израчунати површину заједничку за ове две криве: $y^2 = 3x$ и $x^2 = 3y$.

49. — Израчунати површину ограничену делом лука криве $(y - x)^3 = x^2$ и деловима правих $y = 0$ и $x = 27$.

50. — Израчунати површину ограничену делом криве $y = x^3$ и делом праве $y = \frac{x}{4}$.

51. — Израчунај површину ограничену делом криве

$$y = x^2 - 4x + 4$$

ординатама њеним у тачкама $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ и делом апсцисне осовине између тих ордината.

52. — Исто за криву

$$y = x^2 + 8x + 7$$

од $x_1 = -3$ до $x_2 = -1$.

53. — Дата је функција

$$y = 2x^3 + 4x^2 - 18x - 36$$

Конструисати криву одредивши прво пресечне тачке са осама, затим максимум и минимум. Израчунати површину ограничену луком те криве и координатама од $x_1 = -2$ до $x_2 = 3$.

(Прва жен. гимн., Београд, 1938)

54. — Одреди површину одређену луком криве

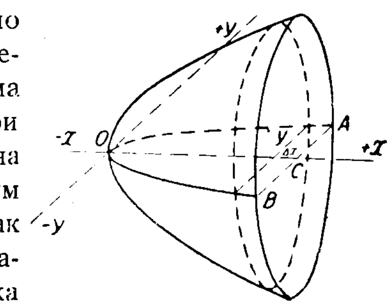
$$y = 2x^3 + 3x^2 + 2,$$

ординатама које припадају екстремним вредностима од y и оси x.

(Котор, 1938)

ЗАПРЕМИНЕ

Запремина обртног параболоида. — Ако се отсечак $OABO$ параболе $y^2 = 2px$ (сл. 38) обрће око своје осовине OC, начиниће једно обртно тело које се зове обртни параболоид. Његова је основа круг C, а висина $OC = h$. Замислимо да је овај параболоид исечен међусобно веома блиским равнима паралелним са основом C. Те би равни исекле овај параболоид на веома танке плочице. Над сваким пресеком замислимо један ваљак (унутрашњи и спољашњи). Запремина је једног таквог ваљка



Сл. 38.

$$y^2\pi \cdot \Delta x.$$

Запремина овог параболоида биће граница збира било унутрашњих, било спољашњих ваљака. Ставимо $OC = x$. Обележимо запремину параболоида са V.

$$V = \lim_{\Delta x \to \infty} \sum_{1}^{x} \pi y^2 \, \Delta x = \int_0^x \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^x 2px \; dx =$$

$$= 2p\pi \int_0^x x \, dx = 2p\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^x =$$

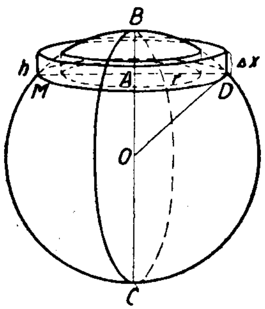
$$V = 2p\pi \cdot \frac{x^2}{2} = 2px \cdot \pi \cdot \frac{x}{2} = \frac{\pi y^2 x}{2}.$$

Ако ставимо $y = r$, $x = h$, имаћемо:

$$V = \frac{r^2 \pi h}{2}$$

[На шта те потсећа овај образац?]

Запремина лопте. — Замислимо лопту исечену међусобно веома блиским паралелним равнима. Над пресецима замислимо подигнуте ваљке (сл. 39). Лоптина запремина биће



Сл. 39.

граница збира било унутрашњих било спољашњих ваљака. Запремина једног таквог ваљка биће:

$$v = \overline{AD}^2 \cdot \pi h = r^2 \pi h.$$

Нека је $OB = R$, $AD = r$, $AB = x$. Тада је $AO = R - x$. Из троугла OAD имамо:

$$r^2 = R^2 - (R - x)^2$$
$$r^2 = 2Rx - x^2.$$

Запремина малога ваљка биће:

$$v = (2Rx - x^2)\ \pi h.$$

Запремина лопте биће:

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_1^n (2Rx - x^2)\,\pi \Delta x = \int_0^{2R} (2Rx - x^2)\,\pi\, dx =$$

$$= \pi \int_0^{2R} (2Rx - x^2)\, dx = \pi \left| Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right|_0^{2R} =$$

$$= \pi \left| R \cdot (2R)^2 - \frac{8R^3}{3} \right| = \pi \left| 4R^3 - \frac{8R^3}{3} \right| =$$

$$= \frac{\pi}{3}(12\ R^3 - 8\ R^3)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Запремина лоптиног отсечка. — Хоћемо да израчунамо запремину лоптиног отсека MDB (сл. 39).

И њега можемо замислити исеченог на блиске паралелне слојеве. Запремина једног слоја биће:

$$r^2 \pi \Delta x.$$

Запремина лоптиног отсечка биће граница збира тих слојева од висине $h = o$ до висине $AB = H$.

$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_1^n (2Rx - x^2)\ \pi\, \Delta x = \int_0^H (2Rx - x^2)\,\pi\, dx =$$

$$= \pi \int_0^H (2Rx - x^2)\, dx = \pi \left| (Rx^2 - \frac{x^3}{3} \right| =$$

$$= \pi \left(R H^2 - \frac{H^3}{3}\right) =$$

$$= \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right)$$

$$V = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$$

ВЕЖБАЊА

Израчунај запремину параболоида чија је висина h кад је он постао обртањем дате параболе око њене осовине:

1.	$y^2 = 4x$	$h = 8$	**2.**	$y^2 = 6x$	$h = 5$
3.	$y^2 = 7x$	$h = 7$	**4.**	$y^2 = 17x$	$h = 10$
5.	$y^2 = 4{,}5x$	$h = 5$	**6.**	$y^2 = 10x$	$h = 8$
7.	$y = x^2$	$h = 10$	**8.**	$y = 4x^2$	$h = 6$
9.	$y = 6x^2$	$h = 3$	**10.**	$y = 8x^2$	$h = 12.$

11. — Израчунај запремину тела које се добија кад се круг $x^2 + y^2 = 4$ обрће око апсцисне осовине.

12. — Израчунај запремину тела које се добија кад се круг $x^2 - 6x + y^2 = 0$ обрће око апсцисне осовине.

13. — Израчунај запремину тела које се добија кад се крива $y^2 + x^2 - 4x = 0$ обрће око апсцисне осовине.

14. — Исто за линију $y^2 + x^2 - x = 0$.

15. — Израчунај запремину лоптиног отсечка који постаје кад се обрће око апсцисне осовине већи кружни отсечак који на кругу $y^2 + x^2 - 8x = 0$ гради права $x = 6$.

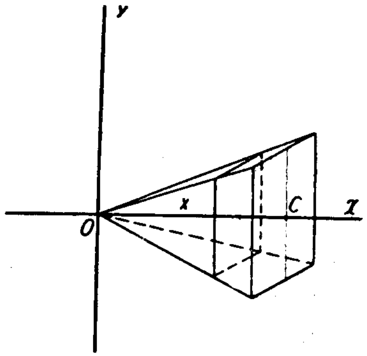
16. — Израчунај запремину лоптиног исечка који гради кружни отсечак из претходног вежбања.

17. — Израчунај запремину лоптиног отсечка који постаје кад се обрће око апсцисне осовине мањи кружни отсечак који на кругу $y^2 + x^2 + 8x = 0$ гради права $x + 3 = 0$.

18. — Крива $y = \sin x$ обрће се око апсцисне осовине. Израчунај запремину обртног тела који гради део криве од 0 до π.

19. — Помоћу интеграла извести образац за запремину пирамиде.

[Замислимо пирамиду намештену тако, да висина $OC = h$ (сл. 40) иде по апсцисној осовини. Ако је исечемо на танке слојеве равнима паралелним с основом, и подигнемо над пресецима праве призме, запремина пирамиде биће граница збира тих призми (било унутарњих, било спољашњих). Нека је један пресек чија је површина p далеко од врха за x. Означимо пирамидину основу са B. Тада је:



Сл. 40.

$p : B = x^2 : h^2$ (где је h пирамидина висина). Одатле је:

$$p = \frac{Bx^2}{h^2}.$$

Запремина једне мале призме биће:

$$v = p \cdot \Delta x = \frac{Bx^2}{h^2} \cdot \Delta x.$$

Запремина целе пирамиде биће:

$$V = \int_0^h \frac{Bx^2}{h^2}\,dx = \frac{B}{h^2}\int_0^h x^2\,dx \qquad \text{итд.}].$$

20. — Израчунати запремину елипсоида који се добија кад се елипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ обрће око своје велике осовине.

21. — Израчунати запремину хиперболоида који се добија кад се хипербола $\frac{(x+3)^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ пресече правом $x = 5$, па се пусти да се тај хиперболин отсечак обрће око апсцисне осовине.

22. — Права $2y + x - 6 = 0$ обрће се око OX. Израчунати запремину обртног тела од $x_1 = 0$ до $x_2 = 6$.

23. — Правоугли троугао чија су темена A (0,0), B (5,0), C (5,3) обрће се око AB. Израчунај запремину обртног тела помоћу интеграла. Добивени резултат провери стереометриски.

(Како гласи једначина праве AC?)

24. — Координате темена једног правоугаоника су: A (0,0), B (5,0)), C (5,4), D (0,4). Он се обрће око стране AB. Израчунај помоћу интеграла запремину обртног тела. Добивени резултат провери стереометриски.

(Како гласи једначина праве DC?)

25. — Права $x = \frac{\pi}{4}$ сече криву $x^2 - \pi x + y^2 = 0$. Отсечак се обрће око X- осовине. Израчунати запремину обртног тела.

26. — Криве $y = \sin x$ и $x^2 - \pi x + y^2 = 0$. Обе се обрћу око апсцисне осовине. Израчунати разлику запремина два обртна тела које граде луци тих двеју кривих од једне своје заједничке тачке до друге. (Нацртај!)

27. — Троугао чија су темена A (0,0), B (h,0), C (0,r) обрће се око X-осовине. Израчунај помоћу интеграла запремину обртног тела. Добивени резултат провери стереометриски.

28. — Израчунати запремину тела које обртањем око X-осовине гради отсечак који на параболи $y^2 = 9x$ гради права $y - x - 2 = 0$.

29. — Крива $y^2 = 4x^3$ пресечена је правом $x = 1$. Израчунати запремину тела које се добија кад се око апсцисне осовине обрће површина ограничена деловима: апсцисне осовине, дате криве и дате праве.

(Нацртај дату криву).

30. — Израчунати запремину која се добија обртањем око апсцисне осовине површине која је заједничка за ове две криве: $x^2 + y^2 = 4$ и $y^2 = 4x$.

31. — Крива $y = \sin x + \cos x$ обрће се око апсцисне осовине. Израчунати запремину обртног тела које при томе обртању постаје обртањем површине ограничене позитивним деловима апсцисне и ординатне осовине и делом дате криве.

32. — Елипса $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ обрће се најпре око веће своје осовине, а затим око мање. Израчунај разлику запремина та два елипсоида.

33. — На параболу $y^2 = 9x$ повучена је дирка из тачке M (0,3). Израчунати површину омеђену деловима: дирке, дате криве и позитивног крака ординатне осовине. Израчунати запремину тела које се добија кад се та површина обрће око апсцисне осовине.

34. — Израчунај површину ограничену апсцисном осовином, делом криве $y = 1 + \frac{2}{x^2}$ и правама $x = 1$ и $x = 10$. Израчунај запремину тела које постаје кад се та површина обрће око апсцисне осовине.

35. — Израчунај површину заједничку за криве $y^2 = 2x$ и $y = \frac{x^3}{2}$. Израчунати запремину тела које се добија кад се та површина обрће око апсцисне осовине.

36. — Израчунати површину ограничену луцима кривих $y = \cos x$ и $y = \sin x$ и делом апсцисне осовине од 0 до $\frac{\pi}{2}$. Колико се та површина разликује од површине троугла коме су темена $A\,(0,0)$, $B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и C које се налази у пресеку датих кривих над дужи AB? Израчунати запремину обртног тела које се добија кад се око апсцисне осовине обрће површина ограничена луцима ових двеју кривих и дужи AB?

37. — Израчунати помоћу интегралног рачуна волумен тијела које постаје ротацијом троугла $A\,(7,1)$, $B\,(5,6)$, $C\,(2,2)$ око оси Y.

(Мостар, 1939)

КРАТАК ИСТОРИСКИ ПРЕГЛЕД ГРАДИВА ИЗ АРИТМЕТИКЕ И АЛГЕБРЕ

НАЈСТАРИЈИ ТРАГОВИ

Народи код којих имамо најстарије трагове писања бројева и рачунања јесу: Кинези, Индијанци, Вавилонци, Мисирци и Грци.

Трагови се налазе на споменицима, гробницама, на исписаним плочицама, на свитцима исписане коже. Али ти трагови, чак и кад су веома стари (преко 2000 година пре Христа!), показују да су народи који су оставили те математичке трагове знали у то доба много више из рачуна, него што данас зна наше дете из основне школе. Значи да су почеци још много старији.

Како су бројали и рачунали људи у самоме почетку мора се закључивати не по нађеним писаним траговима, већ на други начин. То се закључује по бројању и рачунању заосталих урођеника по ваневропским континентима.

Човек сам себи рачунаљка. — Кад судимо по урођеничким племенима, закључујемо да је човек почео прво ређањем једне ствари поред друге, па је тек онда прешао на бројање ствари. Прве ствари које је набројао били су његови прсти. Људи су бројали прсте и по томе давали имена бројевима. Али они у почетку нису могли бројати без предмета пред собом. Морали су имати нешто што ће бројати (кокосове орахе, овце, дрвета и др.). Човек је с почетка морао да гледа и да пипа ствари које броји. И могао је бројати много, а да нема речи за бројеве веће од два.

ЦИФРЕ

Сложенији живот донео је собом и веће потребе. Стварање малих, па све већих држава наметнуло је потребу за бројањем и рачунањем. Трговина је изискивала рачуне. Сопственост је захтевала да се зна чије је шта. А то тачно није се могло одредити без броја. Оно се није могло сачувати без записаног броја. Отуда потреба да се забележе речи изречене за бројеве. Морали су се наћи знаци за бројеве.

Вавилонске цифре. — Оне су нађене на таблицама од печене иловаче. По нађеним траговима види се да су Вавилонци при обележавању бројева употребљавали систем са основом 60. Имали су два начина писања: да број претставе збиром (као код римских цифара) и да број изразе степенима од 60. То је један од најстаријих трагова писања бројева помоћу местне вредности цифара.

Бројеви племена Маја. — Код племена Маја (Јукатан и Гватемала у Америци) утврђено је да је то племе (много векова пре Христа) писало бројеве са основом 20. Бројеве су писали тако, да су цифре имале и местну вредност.

Кинеске цифре. — Кинези су још и данас задржали своје старе цифре. Бројеве су писали и пишу тако, да је поред сваке цифре означена и њена местна вредност.

Мисирске цифре. — Мисирци су обично писали на папирусу. То је била нека врста хартије израђене од биљке папирус, која је некад у обиљу расла поред Нила, а сада је тамо нема. Њихове су цифре хијероглифске. Хијероглифе је први прочитао и објаснио француски научник Шамполион, почетком прошлог века. Код Мисираца цифре нису имале местне вредности, већ су се сабирале. Али сем хијероглифских цифара имали су и друге. Тим нехијероглифским цифрама исписани су бројеви на једноме папирусу који је, око половине прошлога века, пронашао енглески научник Ринд. Тај је папирус писао неки Ахмес између 1800 и 1600 године пр. Хр. Тај је папирус дугачак 20 метара, а широк 30 сантиметара. Познат је под именом „Риндов папирус", или „Ахмесова рачуница". Тај ћемо папирус често помињати.

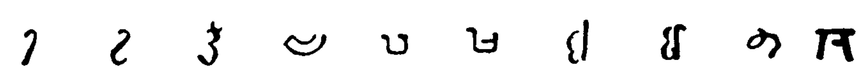
Грчке цифре. — Грци су у почетку употребљавали за бројеве почетно слово речи којом се број каже. Око 500 г пр. Хр. почели су употребљавати слова из азбуке као цифре. Само што сад цифре нису биле почетна слова имена овога броја који претстављају. Тада су им, на пр. ово биле цифре: $\alpha = 1$; $\beta = 2$ итд. Хиљаду су означавали словом алфа са запетом лево: $1000 = ,\alpha$ $2000 = ,\beta$. Цивре нису имале местне вредности. Број се читао сабирањем.

Слова као цифре. — Словима као цифрама служили су се још и Сиријанци и Јевреји. И наши су стари употребљавали слова као цифре.

Римске цифре. — Оне су познате ученицима. Код Римљана се број читао сабирањем и одузимањем.

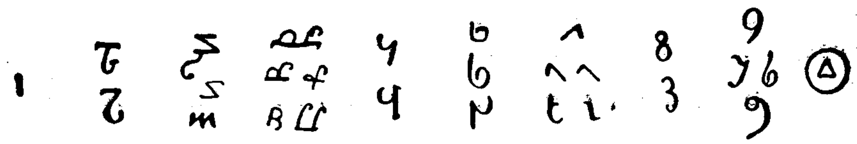
Нула. — Ни у једној од поменутих врста цифара није било нуле. Она није била потребна, пошто су бројеви били писани у облику збира. Тек доцније је пронађена нула. Осећала се потреба да се бројеви брже пишу. Индијанци су успели да задовоље ту потребу. Најстарији трагови бројева писаних у декадном бројном систему с употребом нуле тек су из почетка VII века после Христа. Индијанци су писали нулу најпре као тачку, а доцније као кружић . . . .

Индиске цифре у Европи. — Арапски су калифи призивали себи у Багдад учене индиске астрономе. Ти су астрономи преносили индиску науку у Арабију. Они су Арапима донели и своје цифре и свој начин писања бројева помоћу местне вредности цифара. Преко шпанских Арапа те су индиске цифре дошле у Европу. Њима је, временом, мењан облик док нису најзад добиле овај облик што га сад имају цифре којима се ми служимо. Оне се погрешно зову арапским цифрама, пошто нису арапски проналазак, већ индиски. Назване су тако зато што су их Арапи пренели у Европу, ма да су Арапи увек говорили да су они те цифре научили од Индијанаца.

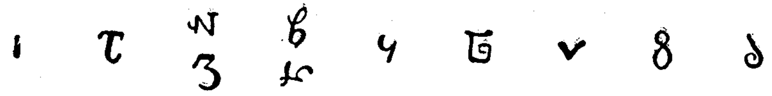


Индиске цифре из II века после Христа.
Ове цифре су почетна слова речи којима су исказани бројеви од 1 до 10.

Индиске цифре из IX века после Христа.

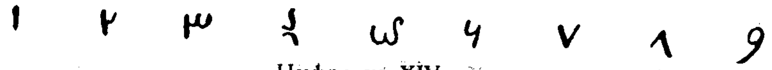


Цифре из XI века.



Цифре из XII века.

Цифре из XIII века.



Цифре из XIV века.

Цифре из XV века.

Цифре из XVI века.

РАЧУНАЊЕ

Рачунаљке

Стари народи нису имали подесних знакова за писање бројева. Сем тога, није било данашњег нашег прибора за писање, те је писмено рачунање било веома отежано. Људи су већином усмено рачунали. Помагали су се прстима. Они су могли на прсте да рачунају с великим бројевима. И ако је то било незгодно, то је имало и једну добру страну. Такво рачунање на врсте, без речи и без писања, било је нека врста међународног језика за трговце.

Кад су стари народи писмено рачунали, они су обично бележили само делимичне, или чак и само крајње резултате. У усменом рачунању нарочито су се одликовали Индијанци.

Сем прстију код старих народа је још и рачунаљка била средство за рачунање. Рачунаљки је било у главном три врсте. 1) Таблице покривене песком, или превучене воском. На њима су писани бројеви једним штапићем. По свршеном послу таблица је поравњавана другим крајем штапића и тако спремана за нове рачуне. 2) Таблице са жљебовима и камичцима у тим жљебовима. Камичак је у једном жљебу значио један број, а у другом други. Рачунко је померао камичке по жљебовима и тиме изводио своје рачуне. 3) Трећа је врста као рачунаљка коју још и сад наша деца употребљавају. На њој су биле куглице нанизане на жици. У Кини се још и сад рачуна на рачунаљкама и то веома брзо.

Рачунаљка са жљебовима употребљавана је кроз цео средњи век, па чак и до XVII века. Звала се абакус.

На рачунаљкама су место жљебова употребљаване и преграде извучене цртама. У свакој је прегради камичак значио десет пута више него камичак у прегради десно, а десет пута мање него у прегради лево.

Писмено рачунање

Имамо један стари документ о писменом рачунању. То је поменути папирус Ринд. Ахмесова је рачуница била упутство за практичне рачунске потребе. Веома је чудно да се у таквој давнини Ахмес није ни бавио целим бројевима, већ је већином радио разломке. Тај папирус не показује најраније знање Египћана. Он се ослања на раније рдове који нису пронађени. Из њега се види да су Мисирци знали сабирање, одузимање, множење, дељење. Чак су знали и да решавају једначине 1 и 2 степена, па су познавали и аритметичке и геометриске прогресије!

МАТЕМАТИКА НА НАУЧНОЈ ОСНОВИ

Из овог што смо досад поменули види се да су стари народи доста знали из рачуна. Њих су на рачунање терале практичне потребе. На пр. индиски и вавилонски астрономи бавили су се математиком због астрономије. Они су, и кад су се бавили математичким проблемима, увек називали себе само астрономима. Мисирци су радили математику због премеравања своие земље и због свога пореског система. Тек су Грци почели да раде математику ради математике. Њима математика много дугује. Овде ћемо поменути неколико важних грчких математичара.

Талес из Милета. — Први грчки математичар на кога наилази историја јесте Талес из малоазиске вароши Милета (друга половина VII века пре Христа). Он је један од седам грчких мудраца. Оснивалац је чувене Јонске школе. Он је учио своје ученике да број није ништа друго до скуп јединица.

Питагора. — Мисли се да је рођен око 586 г. пре Христа. За њега се зна да се родио на острву Самосу и да се учио у Мисиру. Са Самоса је побегао од тиранина Поликрата. Дошао је у Кротон (Јужна Италија), — у „Велику Грчку". Ту је основао школу. Зна се да се у тој школи учила аритметика, музика, геометрија и астрономија. Шта је урадио он лично, а шта ученици његове школе, не зна се тачно. Зато се може говорити о раду Питагорејаца (следбеника Питагориних), а не о раду самога Питагоре.

Они су говорили да је број главни садржај свих ствари: „Ствари су бројеви". Преко троугла чије су стране 3, 4. 5 дошли су до односа између квадрата хипотенузе и страна правог угла. Одатле су наишли на квадратову дијагоналу и видели да је несамерљива са страном. Тако су први открили данашње ирационалне бројеве, који су тек много доцније потпуно објашњени (половином XIX века). Они су делили бројеве на неколико врста. На пр. они бројеви који су равни збиру свих својих делилаца зову се код њих „савршени бројеви". (На пр. 6 је дељиво са 1, 2, 3. Међутим је $1 + 2 + 3 = 6$). Бројеви „пријатељи" јесу таква два броја, да је сваки једнак са збиром делилаца овог другог.

Они су показали како се може наћи безброј правоуглих троуглова таквих, да је збир квадрата страна правог угла једнак са квадратом хипотенузе, а да све три стране буду цели бројеви.

Сем тога они су се много бавили размерама и сразмерама.

Еуклид. — Рођен је у Александрији и живео је у њој. У највећој је слави био око 300 г пре Хр. Мисли се да је математичко знање стекао у Атини. Основао је једну високу школу у Александрији, у којој је предавао математику. Он је чувени писац *Елемената*. То је његово велико математичко дело подељено у тринаест одељака. У томе се делу налази скупљено све дотадање знање из математике. Шта је ту тачно Еуклидово, а шта дело његових претходника, данас није тачно утврђено. То је прво математичко научно дело старога века. *Елементи* су преведени на све светске језике и то је најраспрострањенија књига после Светога писма. У томе је делу чиста математичка теорија. Дело садржи у себи аритметику и геометрију. Писано је у научном духу тако, да и данас изазива дивљење. У својим елементима Еуклид је писао о пропорцијама, о проблемима првог и другог степена; о степенима и коренима; о геометриским редовима; ирационалним бројевима.

Архимед. — Највећи математичар старога века и један од највећих у историји математике. Рођен је 287 г пре Хр. у Сиракузи на Сицилији и у њој погинуо 212 г пр. Хр. кад су Римљани напали на Сиракузу и отели је. Учио се у Александрији. Син једнога астронома он се и сам почео бавити астрономијом. Она га је навела на велике бројеве и он је за те велике бројеве саставио свој систем октада. Хтео је да покаже да се свака количина, ма како велика била, може изразити бројем. Да би изразио те велике бројеве, узео је октаду као јединицу (10^8), затим је правио две октаде (10^{16}), па три (10^{24}) итд. Први низ тих великих бројева завршава „октада октада", тј. 10^8 на 10^8. То му је сад нова јединица. Његова су највећа дела из геометрије и физике. Напоменућемо само да се и сад учи у школама Архимедов закон о привидном губљењу тежине тела потопљеног у течност.

Диофант из Александрије. — Мисли се да је живео између 150 и 250 г после Христа. Пре него што је пронађена Ахмесова рачуница, Диофантова Аритметика је била најстарија очувана математичка књига. У поменутом делу Доифант се бавио једначинама. Онде где ми данас стављамо x да обележимо непознату, стављао је он грчко слово сигма.

Сад ћемо прећи на градиво у појединостима.

РАЗЛОМЦИ

Стари су народи радили само с разломцима чији је бројилац 1. У Ахмесовој се рачуници налазе разломци с бројиоцем 1. Сем таквих разломака ту се још једино налази разломак $\frac{2}{3}$. Стари су Вавилонци радили с разломцима чији је именилац 60. Индуси су рачунали с разломцима као и ми данас, само што нису писали разломачку црту. Први пут се разломачка црта налази код **Леонарда Пизана** (Леонарда Фибоначи) из Пизе у Италији, у његовој књизи *Liber Abbaci* (издата први пут 1202 г). Наслов књиге показује да је већ у то време реч абакус почела значити оно што нама данас значи реч аритметика. У тој својој књизи он говори о данашњим нашим цифрама и зове их „индиске цифре". Леонардо је доводио на заједнички именилац при сабирању, одузимању и дељењу разломака. При множењу разломака множио је најпре бројиоце, па је добивени производ делио најпре једним имениоцем, па добивени резултат другим.

Потреба за десетним разломцима осетила се много доцније. Први знаци појаве десетних разломака већ се виде у рачуници **Адама Ризе** (1442—1559 г) издатој у Ерфурту (у Немачкој). Прави се десетни разломци јављају тек крајем XVI века. Цели су одвајани цртицом, или тачком, или запетом. И данас се још цели негде одвајају тачком, а негде запетом.

МЕРЕ

Мере за дужину узимао је човек на самоме себи. Отуда старе мере: корак, лакат, пед, стопа, прст. Са јачањем државе јављале су се утврђене, државне мере. Њих су имали сви стари народи. У средњем веку било је много разних мера. Са све већим развојем трговине све више се осећала потреба да се мере уједначе.

Ми смо једновремено с највећим културним народима увели метарски систем мера (десетични систем). Такве је мере законом увела Кнежевина Србија 1873, док их је Немачка Царевина увела само две године раније. У осталим крајевима Југославије заведен је метарски систем 1876, а у Босни и Херцеговини тек 1912.

Године 1790 француска уставотворна скупштина решила је да се мере уједначе. Одређена је комисија од највећих француских научника, да одреди систем мера. Од 1792 до 1799 француски су научници измерили меридијанску дужину између Денкерка (Француска) и Барселоне (Шпанија). Из дужине тога лука израчуната је дужина целога меридијана. За метар је узета дужина која је $\frac{1}{40\,000\,000}$ део тога меридијана.

Године 1875 почеле су европске и америчке државе потписивати у Паризу међународну обавезу, да ће у својим земљама завести метарски систем свих мера. Краљевина Србија је потписала ту обавезу тек 1889, ма да ју је већ много раније била испунила.

ПРАВИЛО ТРОЈНО

Стари су Грци знали врло добро размере и сразмере. Према томе може се мислити да су умели да раде задатке из правила тројног. Међутим, први пут се налази правило тројно код Индуса **Аријабата** (око 500 г после Хр.). Од Индуса су то правило примили Арапи. Први европски писац који га објашњава јесте поменути **Леонардо Пизано** (1202). Правило је тројно називано златно правило све до праја XVIII века.

ПРОЦЕНТ

Већ у рукописима XV века налазе се трагови процента. На пр. пише се vi p. c^{0} оно што ми данас пишемо 20%. У томе веку већ има и оваквих ознака за процент: „per c^{0}." Средином XVII века процент се пише: „per $\frac{0}{0}$". Најзад је дошла ознака %.

ИНТЕРЕСНИ РАЧУН

Интерес је био познат прастарим народима. По нађеним таблицама из доба од 2000 година пре Христа види се да су за њега знали Сумерци (претходници Вавилонаца). У старо време дужник није плаћао интерес ако о року плати дуг. Тек ако одоцни, плаћао је интерес, тј. суму која је накнада за време које је између („inter est") одређеног рока и дана исплате. Још су стари Индијанци знали за интерес на интерес. Римљани исто тако. У XVI веку су нађене таблице за рачунање сложеног интереса.

ОПШТИ БРОЈЕВИ

С почетка су математичари обележавали непознату количину речима. Еуклид је употребљавао дужи као бројеве и обележавао их великим грчким писменима. Из геометрије се развио начин обележавања бројева с једном непознатом. (Разуме се, без данашњих наших ознака). Садањи начин обележавања бројева словима увео је адвокат и саветник француског краља Анриа IV, француски математичар **Франсоа Виет,** крајем XVI века. Француски математичар Декарт (проналазач аналитичне геометрије) увео је обичај да се непознате количине обележавају крајњим писменима из азбуке (прва половина XVII века).

Реч алгебра дошла је од наслова књиге једног арапског математичара с почетка IX века. Он се звао **Мухамед ибн Муза Алхваразни,** а његова књига **„Алгабр Валмукабалах“.** „Габр“ значи „допуна“, а „мукабалах“ значи „изједначење.“ Ево шта то овде значи. Узмимо једначину $4x - 3 = 1 + 3x$. На левој страни мора да се допуни 3, пошто толико недостаје. Остаје $4x$. Али сад мора да се изједначи на десној страни: $4x = 3x + 4$. Та је математичка књига била веома распрострањена. У њој је показано како се решавају једначине. Она је била преведена и на латински и у XII и XIII веку њено је име гласило у латинском преводу Algebra et Almucabala. — Доцније је друга реч отпала и тако нам је остала „алгебра.“

НЕГАТИВНИ БРОЈЕВИ

Грчки математичар **Диофант** (3 век после Хр.) сматрао је да је једначина овакве врсте $2x + 2 = 1$ немогућа. Међутим, Еуклид је геометриски знао вредност за $(a - b)^2$. Значи да су људи умели да израчунају производ два релативна броја пре него што су и сазнали за њих. Прво су у Индији пронађени негативни бројеви (VII век). Од њих су их примили Арапи, а преко њих су негативни бројеви прешли у Европу. Математичари дуго нису могли да схвате шта би имао да значи негативан број у геометрији. Зато је дуго времена прошло док су ови бројеви разјашњени. Утврдили су се тек у XVII веку.

ЈЕДНАЧИНЕ

Једначине налазимо још у Риндовом папирусу. Еуклид их је решавао геометриски, али их је Диофант решавао аритметички. Разуме се да његове једначине нису биле писане онако како их ми данас пишемо, јер није било данашњих наших ознака.

Пре Еуклида Индуси су решавали квадратне једначине. Еуклид их је решавао геометриски. За потпуно њихово решавање недостајали су им на првоме месту негативни бројеви. Још ни крајем XVI века математичари не умеју непосредно да реше потпуну квадратну једначину с једном променљивом. (Решавају је на тај начин што смењују x збиром двеју променљивих, па у добијеној квадратној једначини по једној од тих нових двеју променљивих стављају да је сачинилац уз променљиву на I степену раван нули).

Грци су још веома давно дошли у додир с једним проблемом у вези с једначином 3 степена. То је чувени проблем звани **„Делоски проблем“** (по острву Делосу на коме се јавио), или **„проблем удвајања коцке“.** Састоји се у овоме: да се нађе ивица коцке чија је запремина два пута већа од запремине дате коцке. Бавећи се тим проблемом Грци нису дошли до решења једначине 3 степена. Тим су се проблемом после бавили и Арапи, али ни они нису успели да реше једначину 3 степена. То решење се јавило тек половином XVI века у Италији. **Сципион од Фере** нашао је решење једначине $x^3 + ax = b$. Француски математичар д'Аламбер показао је како се добијају сва три корена.

Једначину 4 степена први је решио италијански математичар **Ферари** (XVI в).

Француски математичар **Декарт** показао је да је полином алгебарске једначине дељив кореним чиниоцем. Славни немачки математичар **Гаус** доказао је 1799 г основно алгебарско правило да свака алгебарска једначина има бар један корен.

СТЕПЕНОВАЊЕ

Стари Грци су се много бавили геометријом, те су брзо наишли на квадрате и кубове. Непозната на првоме степену називана је корен. Отуда ми и сада говоримо о „коренима“ једне једначина. *Диофант* је називао други степен „моћ“, трећи степен „куб“, четврти степен „моћ—моћ“, пети степен „моћ—куб“ и т. д. Знање о степенима развијало се веома лагано. Тек у XVII веку јављају се степени овако како их ми сад пишемо.

КОРЕНОВАЊЕ

Прво су Питагорејци наишли на квадратни корен. Зна се да су Грци још на неколико векова пре Христа умели да извлаче квадратни корен. Од њих су то научили Арапи и Индуси. Ови последњи су га и назвали кореном. Разломљени изложиоци јављају се тек у XVI веку.

Ирационални бројеви. — На ирационалне бројеве наишли су Питагорејци (VI в. пре Хр.). Они су утврдили да су квадратова страна и дијагонала несамерљиве. Али они нису разумели ирационалне бројеве и нису их уопште сматрали бројевима. Доказ о несамерљивости стране и дијагонале код квадрата налази се у Еуклидовим *Елементима,* али нема објашњења ирационалног броја. Леонардо Пизано у својој поменутој књизи (Liber abbaci, 1202 г) употребљава и ирационалне бројеве као решења квадратне једначине 2 степена. Само он те бројеве зове „глуви бројеви“. Немачки математичар **Михаел Штифел** (XVI век) вели: „Ирационални број није број“. Ирационални су бројеви објашњени тек у XIX веку. Објаснили су их немачки математичари Вајерштрас, Кантор и **Дедекинд.**

Уображени бројеви. — На њих је наишао **Херон** из Александрије (50 г после Христа), али није знао шта је то. Исто тако и *Диофант*. Индиски математичар **Махавира** (IX в.) каже: „Како по природи ствари негативно није квадрат, оно нема квадратног корена“. Доцније су многи математичари наилазили на квадратни корен из негативног броја, али су признавали да је немогуће извести га. Славни немачки математичар **Лајбниц** (проналазач диференцијалног и интегралног

рачуна) показао је 1676 да је $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$, али и он је само наслућивао имагинарне бројеве. Велики немачки математичар **Ојлер** (XVIII в.) означио је број $\sqrt{-1}$ са i. На овим бројевима радили су даље *Бернули* (1667—1748), *Моавр* (1667—1754). Важну теорију о њима дао је славни немачки математичар **Гаус** (1831).

ЛОГАРИТМИ

Математичари су много пута покушавали да скрате посао при раду с великим бројевима. Хтели су да претворе множење и дељење веома великих бројева у сабирање и одузимање. Најближе је био дошао до логаритама поменути математичар *Михаел Штифел* (1486—1567), немачки калуђер. Али он није успео да из својих радова извуче потребне закључке и да дође до логаритама. Логаритме је пронашао енглески математичар, барон *Џон Непер* (1550—1617). Логаритме је објавио у једноме своме делу 1614. Енглески математичар **Хенри Бригс** узео је за основу број 10 и израдио логаритамске таблице за ту основу (1618 г).

(Швајцарац *Јост Бирги,* часовничар, 1552—1632, саставио је био логаритамске таблице још 1600 г, али су оне изашле тек 1620).

МАТЕМАТИЧКИ РЕДОВИ

Први трагови аритметичких редова налазе се већ у *Ахмесовој* рачуници. И Грци су знали за аритметичке редове, само су их називали троугаоним бројевима:

```
  o        o          o
 o o      o o o      o o o
         o o o o o  o o o o o
                   o o o o o o o
```

Они су знали и да их сабирају.

Геометриски су редови исто тако били познати старим народима. На једним вавилонским таблицама из 2000 г. пре Христа налазе се геометриски редови. Они се налазе и у Риндовом папирусу.

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ И ИНТЕГРАЛНИ РАЧУН

Још су стари Грци наилазили на појам границе при одређивању запремине пирамиде, али нису знали ништа о граници. Архимед је тачно извео образац за површину параболиног отсечка, али није знао да ради интегрални рачун. Италијански математичар **Бонавентура Кавалијери** (прва половина XVII века) радио је у ствари интегрални рачун кад је израчунавао запремине тела, али није знао да он то ради. Француски математичар **Ферма** (1601—1665) служио се изводима пре него што су они и пронађени.

Диференцијални и интегрални рачун пронашли су једновремено и независно један од другога енглески математичар **Њутн** (1642—1727) и немачки математичар **Лајбниц** (1646—1716). Проналазак је из друге половине XVII века. Знаци d (за диференцијал) и $\int$ (за интеграл) остали су од Лајбница.

САДРЖАЈ: