Математички факултет

Универзитета у Београду

Математичка такмичења ученика медицинских школа

са освртом на алгебарске задатке

Ментор: Александар Липковски

Студент: Петар Алексић

Септембар 2017. године

Садржај

1 Увод

Тема која је обухваћена овим радом има за циљ да представи математичка такмичења ученика средњих медицинских школа, као и наставу математике у медицинским школама уопште. У уводу ће бити речи о настави математике у средњим медицинским школама као и о такмичењима предвиђеним за ученике тих школа. У наставку рада, за сваку годину појединачно, биће обрађени наставни план и програм, са посебним освртом на алгебарске теме као и циљеве њихове обраде који се стављају пред ученика. Такође, биће приказани такмичарски задаци и урађени одабрани примери. На крају рада, као закључак биће дат критички осврт аутора о такмичењима и наставном плану и програму.

1.1 Циљеви наставе математике

Циљ наставе математике је да ученици усвоје елементарне математичке компетенције које су потребне за схватање појава и законитости у природи и друштву, које ће их оспособити за примену усвојених математичких знања у решавању разноврсних задатака из животне праксе, као и да доприносе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет као и свестраном развитку личности ученика.

Конкретни задаци наставе математике су следећи :

1. Развијање логичког и апстрактног мишљења ;
2. Развијање способности јасног и прецизног изражавања и коришћења основног математичко – логичког језика ;
3. Развијање способности одређивања и процене квантитативних величина и њихових односа ;
4. Развијање осећаја за простор, разликовање геометријских објеката, њихови узајамни односи и трансформације ;
5. Развијање систематичности, уредности, темељности, прецизности, истрајности, критичности у раду ;
6. Оспособљавање за примену стечених знања како у математици тако и у осталим предметима ;
7. Формирање основа за наставак образовања ;
8. Формирање математичке културе која подразумева свест о универзалности и примени математике и математичког начина мишљења ;

1.2 Настава математике у средњим медицинским школама

Математика у средњим медицинским школама спада у обавезне опште-образовне предмете. Због великог броја различитих смерова у медицинским школама овим истраживањем биће обухваћен план и програм ученика фармацеутског смера чији су ученици најприсутнији на математичким такмичењима.

Недељни фонд часова математике на фармацеутском, као и на већини осталих смерова медицинских школа је два. Најбитнији и по фонду најзаступљенији предмет је хемија (имају више предмета који обрађују различите гране хемије) , која захтева прецизност и добро познавање пропорција, логаритама као и математике уопште. Такође, већина ђака образовање жели да настави на Фармацеутском факултету, где су им конкуренција при упису махом ученици са природног смера гимназија (који имају двоструко већи фонд часова и на настави раде много теже задатке) , и где су задаци на пријемном доста тежи од задатака са којима се сусрећу у средњој школи, тако да настави математике треба посветити посебну пажњу. Ученици овог смера у средњој школи уопште не раде неке области за које се на факултетима подразумева да су упознати са њима (логика и скупови, конусни пресеци, интеграли...) . Са овим областима ученици имају прилике да се упознају и у некој мери надокнаде знање од треће године, када добијају као изборни предмет Изабрана поглавља математике.

1.3 Математичка такмичења ученика медицинских школа

Ученици медицинских школа тешко да би могли по знању математике да се надмећу са ученицима природног смера гимназије или електро-техничких школа који би им због много већег фонда наставе математике били неравноправна конкуренција.Из тог и других разлога, осмишљена су ова такмичења. Циљ им је да на истом месту окупе ученике медицинских школа из целе државе, где ће моћи да тестирају своје знање и такмиче се са другим ученицима који раде по истом плану и програму. Да би се пласирали на ово такмичење, ученици прво треба да прођу школско такмичење.

Предиспозиције такмичења су да се ради 10 задатака, где су за сваки задатак понуђена и решења. Време за израду задатака је 180 минута. Задаци по разредима нису стриктно везани за области које се проучавају у том разреду, тако да се често дешава да ученици старијих разреда имају пар истих задатака као и ученици млађих разреда, што ће се видети приликом приказивања задатака.

Оно што је веома битно нагласити је да ученици трећег и четвртог разреда, који на такмичењу освоје једно од прва три места бивају ослобођени пријемног испита из математике на Фармацеутском факултету. Ово је веома добро за њих јер и пре пријемног испита на факултету имају два пута шансу да га се ослободе у доста опуштенијој атмосфери него што је то полагање пријемног испита.

У наставку рада биће приказани и анализирани задаци са такмичења и урађени неки од њих. Због обима рада, као узорак биће узети задаци са такмичења из претходне две године.

Наставни план за први разред

Годишњи фонд часова за први разред средње медицинске школе износи 66 часова, од чега је за писмене задатке и њихову исправку предвиђено 8, а за обраду градива 58 часова .

Преглед области које се уче по броју часова и по процентуалној заступљености приказан је у табели 1 :

	Тема	Укупан број часова	Заступљеност у укупном броју
1.	Вектори	4	6,9 %
2.	Реални бројеви	6	10,3 %
3.	Пропорционалност	10	17,2%
4.	Рационални алгебарски изрази	12	20,7 %
5.	Геометрија	13	22,4 %
6.	Линеарне једначине и неједначине	13	22,4 %

Табела 1

Из табеле можемо приметити да теме које имају везе са алгебром (пропорционалност. рационални алгебарски изрази, линеарне једначине и неједначине) , покривају више од половине часова предвиђених за обраду градива, тачније око 60 %.

За ове области издвојени су основни циљеви рада, као и конкретне вештине које се очекују да буду савладане од стране ученика по завршетку обраде теме.

Пропорционалност :

Општи циљ савладавања ове теме је проширивање знања о процентима и прооцентуалном рачуну, као и оспособљавање ученика да стечена знања примени на решавање реалних проблема.

Обавезни препоручени садржаји за ову тему су :

1. Размера и пропорција
2. Директна и обрнута пропорционалност
3. Прост сразмерни рачун
4. Рачун поделе и рачун мешања
5. Процентуални и промилни рачун

По завршетку ове теме од ученика се очекује да је у стању да :

- израчуна одређени део неке количине
- одреди непознате чланове просте пропорције
- прошири и скрати размеру и примени је код решавања проблема поделе
- препозна директну или обрнуту пропорционалност две величине, примени је при решавању једноставнијих проблема и прикаже је графички
- реши проблем који се односи на мешање две компоненте
- одреди непознату главницу, проценат или процентни износ

  Захваљујући корелацији ове области са предметом хемије, која је веома заступљена у медицинским школама, ученици се веома добро сналазе са задацима из пропорционалности и у стању су да реше задатке теже од за то планом предвиђених.

Рационални алгебарски изрази :

Ова област посвећена је проширивању општег знања о полиномима.

Обавезни препоручени садржаји за ову тему су :

1. Полиноми
2. Растављање полинома на чиниоце
3. НЗС и НЗД полинома
4. Трансформације рационалних алгебарсих израза

Конкретни циљеви су да ученик на крају ове теме уме да :

- сабира, одузима и множи полиноме
- примени дистрибутивни закон множења према сабирању и формуле за квадрат бинома и разлику квадрата, збир и разлику кубова при трансформацији полинома
- растави полином на чиниоце
- одреди НЗС и НЗД полинома
- трансформише једноставнији алгебарски израз

У препорученом плану остваривања програма наглашено је да тежиште треба да буде на разноврсности идеја, сврси и суштини трансформација полинома и алгебарских разломака, а не на раду са компликованим изразима (који се свакако појављују на такмичењима). У плану није предвиђено учење дељења полинома као ни Безуов став и његова примена.

Линеарне једначине и неједначине :

Општи циљеви ове теме су проширивање знања о линераној једначини, неједначини и функцији, оспособљавање за анализу графика функције и његову примену као и оспособљавање за примену једначина, неједначина и система једначина на реалне проблеме.

Конкретни циљеви су да ученик на крају ове теме уме да :

- дефинише појам линеарне једначине
- реши линеарну једначину
- примени линеарну једначину на решавање проблема
- реши једначину која се своди на линеарну једначину
- дефинише појам линеарне функције
- прикаже аналитички, графички и табеларно линеарну функцију
- реши линеарну једначину и графички прикаже скуп решења
- реши систем линеарних једначина са две непознате

Линеране једначине су тема која је ученицима у свежем сећању јер је рађена у 8. разреду основне школе, па немају већих проблема са решавањем задатака, када је једначина већ постављена. Решавање текстуалних задатака који се своде на линеарну једначину или систем једначина са две непознате представља проблем већини ђака, тачније разумевање текста и примена стеченог знања. Такође, велики број ученика има проблем са разумевањем графика функције иако немају проблем са цртањем истог.

Задаци са такмичења за први разред средњих медицинских школа

У овој области биће наведени задаци са такмичења и анализа стркутуре задатака по обастима. Такође биће урађени неки задаци из алгебре као и интересантнији задаци из других области. На такмичењу, ученик бира између 4 понуђена одговора, који овде неће бити наведени, тако да ће и сам текст задатка претрпети ситне измене.

Задаци са такмичења одржаног 2016. године

1) Израчунати вредност израза $\dfrac{(7-6{,}35):6{,}5+9{,}9}{\left(\frac{1{,}2}{36}+\frac{1{,}2}{0{,}25}-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$

2) Нека је A= $\{x\epsilon\, \boldsymbol{Z} \mid x^2 < 9\}$ B = $\{x\epsilon\, \boldsymbol{N} \mid x-5 < 3\}$ C= $\{x\epsilon\, \boldsymbol{N} \mid x|12\}$

Колико елемената има скуп (A $\cup B)/C$?

3) Скуп решења једначине | | x -1 | - 2 | = 3 $- x$

4) Ако је $f\left(\frac{x+3}{x+1}\right) = 2x+1$ за $x \in$ R/ { -1} одредити $f(5)$

5) Ако је $a \cdot b \neq 0$ и $a \neq b \neq 0$ средити израз

$\left(\frac{(a-b)^2}{ab} + 3\right) \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{a^3-b^3}{ab}$

6) У првој посуди налази се 52% раствор сумпорне киселине а у другој 88% раствор сумпорне киселине. Одредити однос количина раствора које треба узети из прве и друге посуде да би се добило 288 литара 72% раствора сумпорне киселине?

7) Колико има вредности реалног броја k за које једначина по x

$$\frac{x}{x+2} + \frac{kx+2}{x^2-4} = \frac{x-1}{x-2}$$

нема решења по x ?

8) Ако је $f(3x+4) = 2x-5$ и $f^{-1}(4x) = ax+b$ одредити $a+b$

9) Полином $P(x) = x^4 + ax^3 - x^2 + 2x + b$ при дељењу са $x - 2$

даје остатак 8 и има нулу $x = -2$. Одредити $a \cdot b$?

10)Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 сати, ако га пуне друга и трећа, напуни се за 15 сати а ако га пуне прва и трећа напуни се за 12 сати. За колико времена би се напунио базен ако би се пунио са све три цеви ?

Анализа задатака :

Упоређујући задатке са наставним планом за први разред, примећује се да нема задатака из области вектора и области геометрије. Задаци из вектора се свакако ретко појављују на тачмичењима, што је и нормално у односу на то колико се обрађују у настави. Оно што је необично је да нема ниједан задатак из геометрије иако та тема спада међу процентуално најзаступљеније у градиву за први разред. Акценат је стављен на алгебарске задатке, којих има 6, уз 2 задатка из области функција, којих нема у плану за први разред и по једног задатка из области реалних бројева и скупова. Задаци 1, 2 и 5 не захтевају много више од пажљивог рачуна и то су задаци који се појављују и на контролним и писменим задацима. Четврти задатак је такође задатак који се прилично лако решава сменом, који би без већих проблема решили и ђаци који не иду на такмичења. Имамо два задатка, 6 и 10, који се решавају применом система једначина и два задатка, 3 и 7, који спадају у област линеарних једначина. Интересанти и најтежи задаци су задаци 8 и 9, који ће бити урађени у наставку.

Одабрани задаци :

Задатак 8.

Да би решили овај задатак, треба наћи $f(x)$ и $f^{-1}(x)$.

$f(3x + 4) = 2x - 5$, сменом $3x + 4 = t$, одакле је $x = \frac{t-4}{3}$

добијамо да је $f(x) = \frac{2x-23}{3}$

Даље, сменом $4x = u$ добијамо да је $f^{-1}(x) = \frac{ax}{4} + b$.

Из услова $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ следи $f^{-1}\left(\frac{2x-23}{3}\right) = x$ и сређивањем израза добијамо да је $\frac{ax}{6} + b - \frac{23a}{12} = x$

Поредећи леву и десну страну израза закључујемо да је $\frac{a}{6} = 1$, тј . $a = 6$

и $b - \frac{23a}{12} = 0$, одакле када заменимо вредност a добијамо да је $b = \frac{23}{2}$, тако да је тражена вредност $a + b = \frac{35}{2}$.

Задатак 9.

Применом Безуовог става знамо да је $P(2) = 8$, тј. $(1)\quad 8a + b = -8$

и $P(-2) = 0$ односно (2) $-8a + b = -8$.

Решавањем система једначина (1) и (2) добијамо да је $a = 0, b = -8$,

Па је тражена вредност $a \cdot b = 0$

Задаци са такмичења одржаног 2017. године

1) Одредити вредност израза
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6}$$

2) Колико решења има једначина $x - \frac{7}{x-3} = 3 - \frac{7}{x-3}$

3) Ако је $a = 3{,}25$ и $b = 0{,}753$ одредити вредност израза

$$\frac{a^2(a+3b) + b^2(3a+b)}{a^2 + 2ab + b^2} + a - b$$

4) Одредити скуп свих решења неједначине $\frac{2x-1}{x-3} \leq 1$

5) После снижења цене улазница, број посетилаца утакмица порастао је за 50%, а приход је порастао за 26%. За колико процената су снижене цене улазница?

6) За које вредности параметра α линеарна једначина

$\alpha^2 x - 2 = \alpha + 4x$ нема реалних решења ?

7) За $a, b \neq 0$ одредити вредност израза
$$[(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}] : (\frac{a^2 + b^2}{ab} + 1)$$

8) Помешано је $40\,l$ 15% раствора соли са $20\,l$ 40% раствора соли и $10\,l$ воде. После загревања таквог раствора остао је 28% раствор соли. За колико се загревањем смањила количина раствора?

9) Колики је најмањи могући број чланова математичке секције ако се зна да је број девојчица мањи од 50% али већи од 45% ?

10 Колико решења у скупу целих бројева има једначина $+y = xy - 4$?

Анализа задатака :

Ни ове године нема задатака из области геометрије, поново су највише заступљени алгебарски задаци. За разлику од претходне године, ове нема ни задатака из области функција и полинома. Први задатак је прелак за такмичење, задатак бр. 4 је обична линеарна неједначина коју би знала да реши већина ученика који не иду на такмичења. Задаци 3 и 7 су доста слични и решавају се применом алгебарских трансформација. Задаци 5,6 и 8 своде се на примену линеарних једначина и њихових система. Интересантни и тежи од њих су задаци 10 и свакако задатак бр. 9 који се појавио међу задацима за све четири године и веома мало такмичара је успело да га реши. Та два задатка биће урађена у наставку.

Одабрани задаци :

Задатак 9.

Ако са D означимо броје девојчица у секцији а са X укупан број ученика, добијамо почетни услов $0{,}45X < D < 0{,}5X$

Множећи све изразе у неједначини са 2, добијамо да је $0{,}9X < 2D < X$

Како број чланова секције X и број девојчица D морају бити природни бројеви, самим тим и $2D$ мора бити природан број, а за то потребан услов је да је $X - 0{,}9X > 1$ одакле следи да је $0{,}1\,X > 1$,

тачније $X > 10$, па је најмања вредност коју X може да узме

једнака 11.

Заменом $X = 11$ у почетни услов добијамо $\frac{99}{10} < 2D < \frac{110}{10}$.

Пошто је $2D$ природан број, он мора узети вредност 10.

одакле следи да је $D = 5$.

Задатак 10.

Пребацивањем непознатих на леву страну добијамо

$xy - x - y = 4$,

додавањем обема странама броја 1, добијамо

$xy - x - y + 1 = 5$, одакле применом алгебарских трансформација добијамо $(x-1)(y-1) = 5$

Пошто су x и y цели бројеви, добијамо 4 случаја :

1. $x-1=1 \ \ y-1=5 \qquad (x,y)=(2,6)$
2. $x-1=-1 \ \ y-1=-5 \qquad (x,y)=(0,-4)$
3. $x-1=5 \ \ y-1=1 \qquad (x,y)=(6,2)$
4. $x-1=-5 \ \ y-1=-1 \qquad (x,y)=(-4,0)$

Наставни план за други разред

Годишњи фонд часова за други разред средње медицинске школе износи 68 часова, од чега је за писмене задатке и њихову исправку предвиђено 8, а за обраду градива 60 часова .

Преглед области које се уче по броју часова и по процентуалној заступљености приказан је у табели 2 :

	Тема	Укупан број часова	Заступљеност у укупном броју
1.	Тригонометрија правоуглог троугла	8	13,3 %
2.	Степеновање и кореновање	12	20,0 %
3.	Функција и график функције	6	10,0%
4.	Квадратна једначина и квадратна функција	17	28,3 %
5.	Полиедри и обртна тела	17	28,3 %

Табела 2

Из табеле можемо приметити да теме које имају везе са алгебром , а то је у овом случају само област степеновање и кореновање, заузима 20 % од укупног фонда часова за обраду градива.

За ову област издвојени су основни циљеви рада, као и конкретне вештине које се очекују да буду савладане од стране ученика по завршетку обраде теме.

Степеновање и кореновање :

Ова област посвећена је проширивању знања о степеновању и кореновању као и стицању основних знања о комплексним бројевима.

Обавезни препоручени садржаји за ову тему су :

1. Појам степена. Операције са степенима
2. Степен са целим изложиоцем
3. Појам корена. Операције са коренима
4. Степен са рационалним изложиоцем
5. Рационалисање румениона разломка
6. Појам комплексног броја и операције са њима
7. Коњугован број комплексног броја
8. Модуо комплексног броја

Конкретни циљеви су да ученик на крају обраде ове теме уме да :

- наведе својства операција са степенима и примени их у трансформацијама једноставнијих израза
- наведе својства операција са коренима и примени их у трансформацијама једноставнијих израза
- рационалише именилац разломка у једноставним случајевима
- дефинише појмове имагинарна јединица и комплексан број
- сабере, одузме, помножи и подели два комплексна броја
- одреди коњуговани број датог комплексног броја
- израчуна модуо комплексног броја

У препорученом плану за обраду програма наглашено је да треба оспособити ученика да уз помоћ калкулатора знада одреди степен и корен датог броја.
Што се теме комплексних бројева тиче, она је највише обрађена у циљу припреме ученика за решавање квадратних једначина које немају реална решења.

Задаци са такмичења за други разред средњих медицинских школа

Задаци са такмичења одржаног 2016. године

1) Одредити вредност израза $\frac{1-5\sqrt{6}+6\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

2) Одредити вредност израза $$\frac{(7-6,35):6,5+9,9}{\left(\frac{1,2}{36}+\frac{1,2}{0,25}-1\frac{5}{16}\right):\frac{169}{24}}$$

3) Од пет правоугаоника димензија

$10cm \times 2cm,\ \ 3cm \times 8cm,\ \ 5cm \times 3cm\ ,\ 2cm, \times 3cm$ и $7cm \times 5cm$
састављен је квадрат. За колико процената је обим новодобијеног квадрата већи од обима правоугаоника најмање површине ?

4) Ако је $z = \frac{(1-i)^{2015}}{2^{1005}}$ одредити вредност $Re(z) \cdot Im(z)$

5) У првој посуди налази се 52% раствор сумпорне киселине а у другој

88% раствор сумпорне киселине. Одредити однос количина раствора

које треба узети из прве и друге посуде да би се добило 288 литара 72%

раствора сумпорне киселине?

6) Одредити збир свих решења једначине $\sqrt[4]{2^x\sqrt{2^x\sqrt[x]{8^{15}}}}=8$

7) Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 сати, ако га пуне друга и трећа, напуни се за 15 сати а ако га пуне прва и трећа напуни се за 12 сати. За колико времена би се напунио базен ако би се пунио са све три цеви ?

8) Одредити вредност параметра α за коју је неједнакост

$$\frac{x^2+3x+\alpha}{x^2+x+1} < 2$$

тачна за све реалне вредности x осим за једну

9) Одредити вредност израза $\sin 20^{\circ} \sin 40^{\circ} \sin 80^{\circ}$

10 Решити систем једначина $y^2 - |\,xy\,| + 2 = 0$ и $8 - x^2 = (x+2y)^2$

Анализа задатака :

Ако упоредимо задатке са наставним планом за други разред, приметићемо да међу задацима нема ниједан из области Полиедри и обртна тела, која је процентуално најзаступљенија у плану. Што се друге најзаступљеније обасти тиче, имамо два задатка, осми, и шести, који је занимљива комбинација степеновања, кореновања и квадратне једначине на коју се на крају своди. Први задатак је прилично једноставан и своди се на рационалисање имениоца, док је други мало гломазнији алгебарски израз који треба средити. Задатак број четири је задатак из области комплексних бројева, где ученици треба да примене растављање степена бројиоца. У деветом задатку треба применити једну од бројиних тригонометријских формула, без које је задатак јако тешко решити. Задаци 5 и 7 се своде на решавање линеарних једначина односно система линеарних једначина и биће обрађени у наставку као и задатак број 10 .

Одабрани задаци :

Задатак 5.

Задатак се своди на линеарну једначину. Обележимо редом са x и y, број литара из прве односно друге посуде, при чему је $x + y = 288$. Даље је

$$x \cdot \frac{52}{100} + (288 - x) \cdot \frac{88}{100} = 288 \cdot \frac{72}{100}$$

Решавајући ову линерану једначину добијамо да је $x = 128 \quad y = 160$.

Однос количина је 128 : 160 што скраћивањем са 32 долази до 4 : 5.

Задатак 7.

Ако са x, y, z обележимо редом који део укупне запремине базена пуни свака цев појединачно у року једног сата, наш задатак ће се свести на систем од три једначине са три непознате.

$$20x + 20y = 1 \text{ (1)}$$

$$15y + 15z = 1 \text{ (2)}$$

$$12x + 12z = 1 \text{ (3)}$$

Методом замене, из прве једначине добијамо да је $y = \frac{1-20x}{20}$, а када овај израз заменимо у другу једначину добијамо

$$15z - 15x = \frac{1}{4} \quad \text{(4)}$$

Решавајући систем једначина (3) и (4) добијамо $z = \frac{1}{20}$ и $x = \frac{1}{30}$ и заменом ових вредности у неку од једначина која у себи садржи y, добијамо $y = \frac{1}{60}$.

За један сат, све три цеви напуне $\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$ базена, па би цео базен, када би га пуниле све три цеви одједном био напуњен за 10 сати.

Задатак 10.

Да би смо се ослободили апсолутне заграде, морамо задатак поделити на два случаја.

1. x и у су супротног знака, када је $x\text{y} < 0$ па почетни систем једначина добија облик

$$(1)\quad y^2 + xy + 2 = 0$$

$$(2)\quad 8 - x^2 = (x + 2y)^2$$

Из прве једначине добијамо да је $x = \frac{-y^2-2}{y}$ (3)

Сада сређујемо другу једначину,

$$8 - x^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

пребацивањем свега на једну страну добијамо

$$2x^2 + 4xy + 4y^2 - 8 = 0$$

одакле дељењем обе стране са 2 долазимо до једначине

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 4 = 0$$

Када у ову једначину убацимо услов (3) добијамо

$$(\frac{-y^2 - 2}{y})^2 + 2y \cdot \left(\frac{-y^2 - 2}{y}\right) + 2y^2 - 4 = 0$$

Морамо поставити услов $y \neq 0$ а даље сређивањем израза и множењем обе стране са y^2 долазимо до биквадратне једначине

$$y^4 - 4y^2 + 4 = 0$$

Сменом $y^2 = t$ биквадратну једначину сводимо на квадратну

$$t^2 - 4t + 4 = 0$$

Одакле добијамо да је $t = 2$

Враћањем смене и заменом у израз (3) добијамо

$$y_1 = \sqrt{2}, \qquad \text{одакле је } x_1 = -2\sqrt{2}$$

и

$$y_2 = -\sqrt{2}, \qquad \text{одакле је } x_2 = 2\sqrt{2}$$

Други случај је да су x и y истог знака. Тада из једначине (1) добијамо услов

$x = \frac{y^2+2}{y}$. Истим поступком као у првом случају и свођењем биквадратне на квадратну једначину долазимо до једначине

$$5t^2 + 4t + 4 = 0$$

која нема реалних решења, тако да нам остају само решења из првог случаја.

Решења су уређени парови $(x,y) = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ и $(x,y) = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Задаци са такмичења одржаног 2017. године

1) Одредити вредност израза $\dfrac{4^{-0,5} + (\sqrt{8})^{\frac{2}{3}} + 2\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9}}{(4,8 \cdot 6\frac{2}{3} - 31,75)^{-0,5}}$

2) Ако је $a = 3,25$ и $b = 0,753$ одредити вредност израза

$$\frac{a^2(a+3b) + b^2(3a+b)}{a^2+2ab+b^2} + a - b$$

3) Ако је $f(x-2) = \frac{x-1}{2x-1}$ одредити вредност $f(f(x))$

4) Одредити вредност израза $2(sin^6\alpha + cos^6\alpha) - 3(sin^4\alpha + cos^4\alpha)$

5) Одредити вредности реалног параметра m за које је разлика решења квадратне једначине $x^2 - mx + 6 = 0$ једнака 1.

6) Помешано је $40\,l$ 15% раствора соли са $20\,l$ 40% раствора соли и $10\,l$ воде. После загревања таквог раствора остао је 28% раствор соли. За колико се загревањем смањила количина раствора?

7) Дати су комплексни бројеви $z_1 = k + 1 + i(k-1)$ и $z_2 = 2k - ik$

Одредити вредност параметра k за коју је количник $\frac{z_1}{z_2}$ реалан број.

8) Одредити производ најмање и највеће вредности функције $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ за $x \in R$

9) Колики је најмањи могући број чланова математичке секције ако се зна да је број девојчица мањи од 50% али већи од 45% ?

10) Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 + x + 1 = 0$ одредити квадратну једначину чија су решења $y_1 = ax_1 + x_2$ и $y_2 = ax_2 + x_1$.

Анализа задатака :

Ове године, задаци су били сразмернији наставном плану. Имамо 3 задатка из области квадратне функције, један из области комплексних бројева. Први задатак, из области степеновања, доста је сложенији него претходне године. За разлику од њега, задатак из тригонометрије је доста лакши него задатак из претходне године. Девети задатак пренет је из задатака за први разред и већ је обрађен у том делу. У наставку ћемо урадити задатке број 2 и 6.

Одабрани задаци :

Задатак 2.

Сређивањем израза у бројиоцу добијамо $\frac{a^3+3a^2b+3ab^2}{a^2+2ab+b^3} + a - b$

Приметимо да је израз у бројиоцу једнак кубу бинома $a + b$,
док је израз у имениоцу једнак квадрату истог бинома, па скраћивањем долазимо до $a + b + a - b = 2a.$
Када заменимо вредност a добијамо да је вредност целог израза једнака 6,5.

Задатак 6.

Овај задатак се своди на линеарну једначину. Означимо са x број литара за који се смањила укупна количина раствора.

$$40 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}4 = 0{,}28 \cdot (40 + 20 + 10 - x)$$

Множећи обе стране са 100 добијамо

$$40 \cdot 15 + 20 \cdot 40 = 28 \cdot (40 + 20 + 10 - x)$$

Одакле решавањем једначине добијамо да је $x = 20$.

Значи, загревањем се количина раствора смањила за 20 литара.

Наставни план за трећи разред

Годишњи фонд часова за трећи разред средње медицинске школе износи 66 часова, од чега је за писмене задатке и њихову исправку предвиђено 8, а за обраду градива 58 часова .

Преглед области које се уче по броју часова и по процентуалној заступљености приказан је у табели 3 :

	Тема	Укупан број часова	Заступљеност у укупном броју
1.	Експоненцијална и логаритамска функција	14	24,1 %
2.	Тригонометријске функције	15	25,9 %
3.	Аналитичка геометрија у равни	15	25,9 %
4.	Низови	7	12,1 %
5.	Елементи финансијске математике	7	12,1 %

Табела 3

Задаци са такмичења за трећи разред средњих медицинских школа

Задаци са такмичења одржаног 2016. године

1) Одредити област дефинисаности функције $f(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$

2) Одредити једначину тангенте кружнице $x^2+y^2-6x-2y+m=0$

у тачки (4,2) која припада кружници.

3) У првој посуди налази се 52% раствор сумпорне киселине а у другој 88% раствор сумпорне киселине. Одредити однос количина раствора које треба узети из прве и друге посуде да би се добило 288 литара 72% раствора сумпорне киселине?

4) Одредити производ свих решења једначине $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$

5) Одредити збир свих решења једначине $\sqrt[4]{2^x\sqrt{2^x\sqrt[x]{8^{15}}}}=8$

6) Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 сати, ако га пуне друга и трећа, напуни се за 15 сати а ако га пуне прва и трећа напуни се за 12 сати. За колико времена би се напунио базен ако би се пунио са све три цеви ?

7) Одредити вредност израза $\sin 20^{\circ} \sin 40^{\circ} \sin 80^{\circ}$

8) Ортоцентар троугла (пресек висина) је тачка $H(3,4)$ а две странице троугла налазе се на правама $y = 2x$ и $x + y = 9$. Одредити једначину праве којој припада трећа страница троугла.

9) Одредити број решења једначине $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x$=0

на интервалу $[0, \frac{9\pi}{2}]$

10) Решити једначину
$\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$

Анализа задатака :

Задаци 3,5,6 и 7 су пренети из задатака за први и други разред и анализирани су у том делу рада. Први задатак није тежак, али није нешто што би ученик научио без додатне наставе јер се област дефинисаности функције по плану ради тек у четвртом разреду. Нема ниједног задатка из области финансијске математике, што и није чудно јер то нису задаци који су згодни за такмичења. Много се више примећује да нема ниједног задатка из области низова. Имамо три задатка из области експоненцијалне и логаритамске функције, као и два из аналитичке геометрије што је сразмерно њиховој заступљености у наставном плану. У наставку ће бити одабран и урађен по један задатак из обе од тих области.

Одабрани задаци :

Задатак 2.

Прво је потребно одредити параметар m да би тачка припадала кружници. Заменом $x = 4, y = 2$ у дату једначину добијамо $m = 8$.

Сада једначина добија облик $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ и треба је свести на општи облик једначине кружнице, допуном до потпуног квадрата

$$x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 2y + 1 - 1 + 8 = 0$$

Одакле добијамо

$$(x-3)^2+(y-1)^2=2$$

Даље, применом обрасца за једначину тангенте у датој тачки кружнице имамо

$$(x-3)(4-3)+(y-1)(2-1)=2$$

тј.

$$x-3+y-1=2$$

одакле добијамо крајњи облик тражене једначине тангенте

$$y=-x+6$$

Задатак 5.

Ако обе стране једначине $\sqrt[4]{2^x\sqrt{2^x\sqrt[x]{8^{15}}}}$=8 подигнемо на четврти степен једначина добија облик

$$2^x\sqrt{2^x\sqrt[x]{8^{15}}}=2^{12}$$

Када се ослободимо корена, израз се трансформише у израз

$$2^x\cdot 2^{\frac{x}{2}}\cdot 2^{\frac{45}{2x}}=2^{12}$$

Средимо ли леви страну израза добијамо $2^{\frac{2x^2+x^2+45}{2x}}=2^{12}$

Одакле је $3\,x^2+45=24x$, тј. долазимо до квадратне једначине

$$3x^2-24x+45=0$$

чија су решења $x_1=3\quad x_2=5$ а њихов збир једнак 8.

Задаци са такмичења одржаног 2017. године

1) Израчунати вредност израза $\frac{4^{-0,5}+(\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}+2\frac{1}{3}:1\frac{5}{9}}{(4,8\cdot 6\frac{2}{3}-31,75)^{-0,5}}$

2) После снижења цене улазница, број посетилаца утакмица порастао је за 50%, а приход је порастао за 26%. За колико процената су снижене цене улазница?

3) Ако је $f(x-2)=\frac{x-1}{2x-1}$ одредити вредност $f(f(x))$

4) Одредити вредност израза $2(sin^6\alpha+cos^6\alpha)-3(sin^4\alpha+cos^4\alpha)$

5) Одредити површину четвороугла чије странице припадају правама

$$x+y-8=0\,,\qquad x-2y+4=0\,,\qquad x=0\,,\qquad y=0$$

6) Колики је најмањи могући број чланова математичке секције ако се зна да је број девојчица мањи од 50% али већи од 45% ?

7) Колико решења има једначина $3\cos x-\sin 2x=0$

на интервалу [0,3π] ?

8) Решити једначину $(4^x+2^x-2)\cdot(\log_{10}x+\log_{10}(x+3)-1)=0$

9) Под којим углом се секу кружнице

$$x^2+y^2-16=0 \;\; и \;\; x^2+y^2-10x+16=0$$

10) Решити неједначину $\log_2\log_{0,5}\frac{x}{x+1}<1$

Анализа задатака :

Ове године поново нема задатака из области низова , као ни задатака из финансијске математике. Задаци 3,4,6 пренети су из задатака за млађе разреде и анализирани су у том делу. За разлику од прошле године, ове су се појавила два задатка из области тригонометрије. Задатака из аналитичке геометрије поново има два, док из области експоненцијалних, ирационалних и логаритамски једначина има два задатка, један мање него претходне године, а уместо тог задатка убачен је задатак број 1, из области степеновања и кореновања. У наставку ће бити урађен осми задатак, ако комбинација задатака из експоненцијалних и логаритамских једначина.

Одабрани задаци :

Задатак 8.

Прво поставимо услов да је $x > 0$

Израз $(4^x + 2^x - 2) \cdot (\log_{10} x + \log_{10}(x+3) - 1)$ биће једнак нули

Када је један од његових чинилаца једнак нули, па ћемо раздвојити два случаја.

1) $4^x + 2^x - 2 = 0$ ову експоненцијалну једначину решавамо сменом $2^x = t$ чиме је сводимо на квадратну једначину
$$t^2 + t - 2 = 0$$

   чија су решења $t_1 = 1$ односно $x = 2$ и

   $t_2 = -2$ за које једначина нема решења

2) $\log_{10} x + \log_{10}(x+3) - \log_{10} 10 = 0$ довођењем свега под

   Један логаритам добијамо $\log_{10} \frac{x(x+3)}{10} = 0$ односно

   $\frac{x(x+3)}{10} = 1$, тј. $x^2 + 3x - 10 = 0$

   Решења ове квадратне једначине су

   $x_1 = 2$ и
   $x_2 = -5$, које не припада области дефинисаности па је

   $x = 2$ једино решење овог задатка.

Наставни план за четврти разред

Годишњи фонд часова за четврти разред средње медицинске школе износи 56 часова, од чега је за писмене задатке и њихову исправку предвиђено 8, а за обраду градива 48 часова .

Преглед области које се уче по броју часова и по процентуалној заступљености приказан је у табели 4 :

	Тема	Укупан број часова	Заступљеност у укупном броју
1.	Функције	15	31,2 %
2.	Извод функције	15	31,2 %
3.	Комбинаторика	7	14,6 %
4.	Вероватноћа и статистика	11	22,9 %

Табела 4

Задаци са такмичења за четврти разред средњих медицинских школа

Задаци са такмичења одржаног 2016. године

1) Одредити област дефинисаности функције $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$

2) Од пет правоугаоника димензија

$10cm \times 2cm,\ \ 3cm \times 8cm,\ \ 5cm \times 3cm\ ,\ \ 2cm, \times 3cm$ и $7cm \times 5cm$ састављен је квадрат. За колико процената је обим новодобијеног квадрата већи од обима правоугаоника најмање површине ?

3) Одредити производ свих решења једначине $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$

4) Базен се пуни водом са три цеви. Ако га пуне само прва и друга цев, базен се напуни за 20 сати, ако га пуне друга и трећа, напуни се за 15 сати а ако га пуне прва и трећа напуни се за 12 сати. За колико времена би се напунио базен ако би се пунио са све три цеви?

5) Одредити вредност израза $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

6) Ортоцентар троугла (пресек висина) је тачка $H(3,4)$ а две странице троугла налазе се на правама $y = 2x$ и $x + y = 9$. Одредити једначину праве којој припада трећа страница троугла.

7) У развоју бинома $(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^n$ збир биномних коефицијената другог и трећег члана развоја једнак је 136. Одредити коефицијент уз x^{-2} .

8) Одредити број решења једначине $\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2x$=0 на интервалу [0,$\frac{9\pi}{2}$]

9) Бројеви $\log 2 \quad \log(2^x - 1) \quad$ и $\log(2^x + 3)$
представљају у датом поретку три узастопна члана аритметичког низа. Одредити реалан број x.

10) Одредити висину ваљка максималне запремине уписаног у лопту полупречника $\sqrt{3}$.

Анализа задатака :

Задаци за четврти разред најмање прате наставни план и програм. Задаци су већином из области које се уче у претходна три разреда, па је већина њих и пренета из задатака за млађе разреде. Једино су први и седми задатак из области које се раде у четвртом разреду. Први задатак је пренет из задатака за трећи разред, и док би ученицима трећег разреда могао да буде тежак, ученици четвртог разреда би требало лако да га реше. Примети се и да нема задатака из области комбинаторике и области вероватноће, што је штета јер су они прилично интересантни и занимљиви ученицима, самим тим и погодни за такмичења.

Одабрани задаци :

Задатак 2.

Укупна површина датих правоугаоника је 20+24+15+6+35=100cm^2,

па ће квадрат састављен од њих имати страницу 10, а тиме и обим од 40cm.

Обим најмањег правоугаоника је 10 cm, па је обим новодобијеног квадрата већи од њега за 300%.

Задатак 9.

Да би се решио овај задатак потребно је знати једно од главних својстава аритметичког низа, да је сваки члан аритметичка средина к-тог претходника и к-тог следбеника.

Користећи то долазимо до једначине

$2\log(2^x - 1) = \log 2 + \log(2^x + 3)$ односно

$\log(2^x - 1)^2 = \log(2 \cdot 2^x + 6)$ одакле добијамо

$4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 6$ што се своди на експоненцијалну једначину

$4^x - 4 \cdot 2^x + 5 = 0$ одакле сменом $2^x = t$

добијамо $t_1 = -1$ односно $x = \frac{1}{2}$ односно

$t_2 = 5$ одакле је $x = \log_2 5$, тако да задатак има два решења.

Задаци са такмичења одржаног 2017. године

1) Прва три члана аритметичке прогресије су
$a_1 = x - 1$ $a_2 = x + 1$ и $a_3 = 2x + 3$. Одредити x.

2) Одредити вредност израза $2(sin^6\alpha + cos^6\alpha) - 3(sin^4\alpha + cos^4\alpha)$

3) Одредити коефицијент уз x^{10} у биномном развоју $(3 - 2x^2)^7$

4) Одредити површину четвороугла чије странице припадају правама

$$x + y - 8 = 0\,, \qquad x - 2y + 4 = 0\,, \qquad x = 0\,, \qquad y = 0$$

5) Одредити вредност x за коју је бесконачан збир
$3log_{16}x + 9(log_{16}x)^2 + 27(log_{16}x)^3 + \ldots$ једнак 3

6) Колики је најмањи могући број чланова математичке секције ако се зна да је број девојчица мањи од 50% али већи од 45% ?

7) Колико решења има једначина $3\cos x - \sin 2x = 0$

на интервалу [0,3π] ?

8) Решити једначину $(4^x + 2^x - 2) \cdot (\log_{10} x + \log_{10}(x + 3) - 1 = 0$

9) Под којим углом се секу кружнице

$$x^2 + y^2 - 16 = 0 \;\text{ и }\; x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$$

10) Одредити производ најмање и највеће вредности функције $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ за $x \in R$

Анализа задатака :

Избор задатака је сличан као претходне године, поново је већина задатака из области које се раде у прва три разреда. Скоро сви задаци су из области за трећи разред, једино је трећи задатак, примена биномне формуле из градива за четврти разред. Поново нема задатака из области вероватноће и комбинаторике. За разлику од претходне године, ове године је додат задатак са бесконачним геомтеријским низом, задатак број 5, који ће бити урађен у наставку као и задатак број 10.

Одабрани задаци :

Задатак 5.

Применом формуле за суму бесконачног геометријског низа

$S_n = \frac{1}{1-q}$ и заменом $q = 3\log_{16} x$ добијамо

$$3\log_{16} x \cdot \frac{1}{1-3\log_{16} x} = 3 \text{ односно}$$

$$\frac{\log_{16} x}{1-3\log_{16} x} = 1$$

Даље је $\log_{16} x = 1 - 3\log_{16} x$ тј $4\log_{16} x = 1$

Сада је $\log_{16} x = \frac{1}{4}$ па је тражено $x = \sqrt[4]{16}$ односно x=2.

Да би применили формулу морамо поставити и услов $|3\log_{16} x| < 1$

па је -1$< 3\log_{16} x < 1$ одакле сређивањем долазимо до

$\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} < x < 2\sqrt[3]{2}$ а наше решење задовољава овај услов.

Задатак 10.

Ако кренемо од $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ добијамо $x^2 + x + 1 = y(x^2 - x + 1)$

Пребацивањем свих вредности на једну страну добијамо

$$x^2(y-1)-(y+1)x+y-1=0$$

x припада R акко D≥ 0 па добијамо услов

$$(y+1)^2-4(y-1)^2 \geq 0$$

Сређивањем добијамо неједначину $-3y^2+10y-3 \geq 0$

чије је решење $\frac{1}{3} \leq y \leq 3$

па је $y_{min}=\frac{1}{3}$ а $y_{max}=3$ па је њихов производ једнак 1.

3 Закључак

Анализирајући задатке са такмичења, примети се да то нису задаци са такмичења ученика гимназија, што је и у складу са наставом математике у медицинским школама. На такмичењима се појављују и сложенији задаци, али већи део њих не захтева посебне компетенције за решавање, већ само примену знања стеченог у настави.

Међу задацима је јако мало задатака проблемског типа (задатак са најмањим бројем девојчица у математичкој секцији), где би ученик из текста задатка требао сам да постави услове који ће га одвести до решења. Задаци су углавном већ постављени а на ученику је да примени формуле и пажљивим рачуном дође до решења у чему могу да му помогну и већ понуђени одговори.

Области из којих су задаци су у приличној мери сразмерни заступљености дате области у плану и програму, али неке области су скроз изостављене као на пример геометрија или комбинаторика. Пошто и у медицинским школама има ученика веома надарених за математику, општи утисак аутора је да би задаци могли бити и тежи, што ни у каквој мери не умањује значај ових такмичења.

Што се тиче наставног плана и програма, мишљење аутора је да док је за неке смерове (масер, физиотерапеутску техничар, козметички техничар) фонд од два часа недељно оптималан, за неке смерове, поготово оне са којих ученици иду на такмичења и настављају образовање на студијама, фонд од два часа недељно је мали и треба га повећати.

Поредећи наставни план математике за гимназије и медицинске школе за сваки разред посебно и њихове разлике, долази се до закључка да ученици медицинских школа поред тога што доста површније од ученика гимназија раде заједничке области :

- у првој години не уче област логика и скупови, ставове сличности и подударности троуглова.
- у другој години не уче ирационалне једначине док је области комплексних бројева посвећено јако мало пажње и више су рађени због квадратних једначина
- у трећој години не уче површину фигура у равни, детерминатне и матрице, системе једначина, елипсу, хиперболу и параболу
- у четвртој години уопште не раде интеграле

Знање које им је ускраћено због малог броја часова, ученици у некој мери могу да надокнаде радом на додатној настави. Узимајући у обзир ученике који желе да упишу факултете на којима има математике и где се подразумева да су већ упознати са овим областима, у нади да ће се то у будућности променити, закључак аутора је да недељни фонд часова математике дефинитивно треба повећати.

Литература

(1) Ендре Пап, Загорка Лозанов., *Математика са збирком задатака за први разред* , за гимназију друштвено – језичког смера и стручне школе са фондом од два часа недељно ; ЗУНС ; 1990.
(2) Ендре Пап, Загорка Лозанов., *Математика са збирком задатака за други разред* , за гимназију друштвено – језичког смера и стручне школе са фондом од два часа недељно ; ЗУНС ; 1990.
(3) Ендре Пап, Загорка Лозанов., *Математика са збирком задатака за трећи разред* , за гимназију друштвено – језичког смера и стручне школе са фондом од два часа недељно ; ЗУНС ; 1990.
(4) Ендре Пап, Загорка Лозанов., *Математика са збирком задатака за четврти разред* , за гимназију друштвено – језичког смера и стручне школе са фондом од два часа недељно ; ЗУНС ; 1990.