Математички факултет
Универзитет у Београду

ЗНАЧАЈ АНАЛИТИЧКОГ ПРИСТУПА У НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Аутор
Радомир Вукадиновић

Ментор
проф.др Александар Липковски

Јануар 2018

САДРЖАЈ

УМЕСТО ПОСВЕТЕ

Испричаћу вам на почетку један скорашњи бизаран догађај који ме је, премда нема никакве директне везе са образовањем, мотивисао да, упркос разним изазовима, истрајем на овој теми и уобличим је онако како то чиним у наставку.

Елем, једног дана, пре пар месеци, спремао сам се да одем до нашег педијатра у оближњи Дом здравља како би дотични проверио да ли је наш трогодишњи синчић оздравио и да ли је спреман да поново крене у вртић. Кад сам ухватио сина за руку у намери да кренемо, супруга се успротиви нашем заједничком одласку рекавши да јој је прошлог пута педијатар препоручио да дођемо без детета јер нема потребе да и оно чека, поготову међу болесном децом. Био сам уверен да је нешто погрешно разумела: па дете се мора прегледати како би се проверило да ли је здраво и спремно да се поново дружи са малишанима у вртићу. Али не, педијатар је баш тако рекао и морао сам некако да натерам себе да одем сâм. Кад сам видео да уместо нашег изабраног педијатра ради особа на замени која са нама и дететом никад раније није ни имала контакт, био сам сигуран да ћу се поштено обрукати. Али, не, после двоипосатног чекања добијам потврду у року од минут-два, без проблема или било каквог, макар и куртоазног питања како је дете и од чега је боловало. Враћам се у неверици, са осећајем да сам два ипо сата протраћио на једну потпуно бесмислену ствар. Јер, наравно, са добијеним *папиром* дете може сутра у вртић без обзира да ли је заиста здраво, или је можда још болесно и заразно.

Оваквог празног формализма, нормативизма...назовите то како хоћете, форме без суштине и покрића, у нашим животима има много, али највећи проблем је што смо се *опасно навикли* на то. Описани пример је драстичан и огољен у свом бесмислу, али и много тога у актуелном образовном систему чијим неким аспектима се бави овај рад функционише по аналогном механизму декларације без садржаја.

УВОДНЕ НАПОМЕНЕ

Аутор има дуго искуство у процесу обучавања математике ученика основне и средње школе, а последњих година интензивно ради на припреми полазника за полагање тзв. Computer Adaptive Tests (CAT) у којима се, као услов за упис на мастер студије разних профила (економија, хемија, фармација...) у САД и бројним европским и другим државама, проверавају и елементарне математичке способности кандидата. То је аутору дало могућност компарације начина на који се математичка знања и вештине усвајају у нашим школама и онога што поменути тестови захтевају и вреднују. Резултати су, одмах да кажемо, по нас поражавајући. Ауторова лична статистика (коју због незваничности не наводимо) показује да су улазна математичка знања у просеку на забрињавајуће ниском нивоу, да код великог броја кандидата постоји конфузија чак и око основних појмова аритметике, алгебре и геометрије, те да је просечно време припреме ових испита далеко дуже него што је (незванични) просек на глобалном нивоу, уз доста одустајања и поновљених излажења.

За све примере из своје професионалне праксе који су наведени у раду аутор одговорно тврди:
- да су *репрезантитивни*, тј. да илуструју општу слику коју је аутор у дугогодишњем раду стекао на популацијама ученика и студената;
- да су у складу са *начелом приватности* њихових актера, тј. да не садрже личне, просторне или било какве друге одреднице које би то начело нарушиле.

Аутор се у првом делу рада бави дијагнозом стања, а у другом даје своје предлоге и обрисе могућих промена у појединим областима образовног процеса. Један део таквих промена на микронивоу аутор и примењује у свом раду, па у том смислу презентује и своје утиске и повратне информације. Рад свакако не претендује да даје потпун системски оквир измена, тиме се баве експертски тимови; време писања овог текста коинцидира са громогласно најављеним системским реформама које би требало да прате и промене ,,на терену", па би, ако се заиста буде радило о реформама, а не шминкању постојећег стања, аутор био срећан ако овај рад буде скроман допринос том процесу. Једна од важних ствари за које се аутор залаже у наставку је и коренита промена уџбеничких стандарда и прелазак на литературу која ће имати одлике читљивог, узбудљивог и интригантног штива, а без нарушавања научности. Приметићете одмах, по насловима и садржају који следи, да аутор има претензије да овај рад буде баш пример таквог штива.

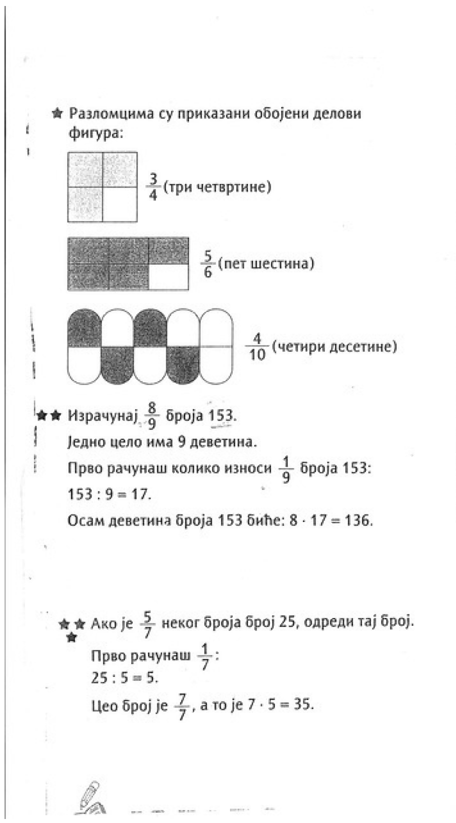
1 УВОД или зашто оно што учимо у школи не треба покушавати код куће

Пуно је примера из школског учења математике којима сам био очевидац и које ћу навести у овом раду, а овај који следи, по много чему, заслужује да буде први од њих. Дакле, недавно ме једна сусетка замолила да њеном сину који иде у IV разред основне школе помогнем око савладавања неких математичких садржаја са којима има одређених тешкоћа. На нашем сусрету дечак ми стидљиво рече да се у школи тренутно први пут сусреће са разломцима и да му заправо само једна ствар није јасна: у задатку који гласи: ,,Колико износи $\frac{3}{4}$ броја 120?" треба да се ради $120 : 4 \cdot 3$", а у задатку у коме кажу :,,Ако $\frac{3}{4}$ неког броја износи 120, који је то број?" треба $120 : 3 \cdot 4$. Како да разликује те две врсте задатака? Мало се изненадих што су текстови на том узрасту тако апстрактни, али одмах смо се потрудили да их засладимо. Узели смо једну праву чоколаду на којој смо уочили 10 једнаких ,,табли" и једну виртуелну вагу и, баратајући десетинама, за кратко време утврдили о чему се ради, схвативши успут и зашто ,,доњи" број у разломку зовемо именилац, а ,,горњи" бројилац. Ипак, бриге јунака наше приче нису биле до краја отклоњене: пошто се у задацима који су га мучили не помињу ни чоколаде ни торте, да ли ће ипак препознати како који ,,тип" задатка треба да ради (ми бисмо рекли: да ли може да *апстрахује* модел и одвоји се од конкретних објеката). Стога смо у наставку сецкали канап прешавши на посматрање дужине, бројали новац и ко ће коме колико дати и свашта још, не бисмо ли улили нашем јуноши још оптимизма. А онда смо, у жељи да видимо како се у школи то радило, у његовој школској свесци из математике на ту тему прочитали овакав текст:
1. Како се рачуна $\frac{8}{9}$ *броја 153 ? Размишљамо: једно цело има 9 деветина. Прво рачунамо* $\frac{1}{9}$ *броја 153 :* $153 : 9 = 17$. *Осам деветина броја 153 биће:* $8 \cdot 17 = 136$. *2. Ако је* $\frac{5}{7}$ *неког броја број 25, одредити тај број. Прво рачунаш* $\frac{1}{7}$ *:* $25 : 5 = 5$. *Цео број је* $\frac{7}{7}$*, а то је* $7 \cdot 5 = 35$.

Прави галиматијас! Овде не само да нема ни трага од торти и колача, већ је овако конфузан текст тешко пратити чак и од стране одрасле особе којој би ова тематика требало да буде рутинска ствар. Цртежа (мада не нарочито инвентивних) било је само пре ових задатака где је разломком требало описати обележене делове целине, али у реченим задацима (у којима је требало израчунати меру дела (израженог разломком) неке целине и обрнуто, на основу познатог дела одредити меру целине), није било ни трага ни гласа било каквој илустрацији. И то би нам сад, на први поглед, био довољан разлог на бацимо дрвље и камење на учитељицу која оваквим приступом наводи децу на учење напамет. Међутим, стицајем околности (које овај пример и чине специфичним), аутор је и тој учитељици десетак година раније помагао током студија на Учитељском факултету у време када се и она, као њен ученик данас, презнојавала над ,,тешком" Математиком и ,,још тежом" Методиком наставе математике, питајући се неретко како да разликује ,,кад се ради овако, а кад онако". Иако се читаоцу може чинити да овим задиремо у непотребно детаљисање или нарушавамо приватност (од чега се чувамо ненавођењем било каквих одредница), али потписник ових редова добио је овим ретку прилику да прати еволуирање од подучаване особе (студента) до особе која подучава (учитеља, наставника, професора). Ако овде очекујете да ћу тврдити да је учитељица као студент учила ,,без разумевања" или ,,напамет", не, то не би било коректно рећи, а требало би и да је у тој врсти високошколског образовања и немогуће искључиво на тај начин проћи математичке и методичке садржаје и задовољити критеријум пролазности. Био је то заправо конгломерат свега и свачега, могли бисмо га назвати ad hoc учењем у коме је све дозирано да испуни само један циљ: положити испит. Свако претварање у шаблон, за све за шта се то чинило могућим, било је добродошло; усхићење открићем нових веза или законитости било је пропорционално процени колико ће то утицати на позитиван исход испита, сваки тачно урађен задатак доносио је задовољство јер је увећавао шансе да тако буде и на испиту, није било трагања за алтернативним путевима, консултовања друге литературе, жеље за полемиком... било је у питању једноставно класично *формално* спремање испита које, пре или касније, са оваквом или онаквом оценом, по правилу доводи до резултата. То подразумева и прикупљање информација које типове задатака професор преферира, шта воли а шта не воли као коментаре; за Методику то значи и попуњавање некаквог практикума пуким преписивањем одговора особе која је на то већ добила позитивно мишљење професора (време за ову операцију било је чак знатно веће од времена чекања у ординацији педијатра у причи с почетка). Ту је била и припрема за одржавање часа у школи која се ослањала на искуства неког ко је то већ успешно прошао, где ћемо бомбонице заменити чоколадицама, а Јелена ће постати Милица...

Сада ће вам вероватно бити јасније зашто смо одмах посумњали да прича из дечакове свеске потиче од учитељице као аутора; и заиста, после упорне потраге, пронашли смо је, у идентичном облику, у једном уџбенику за IV разред математике за основце, као и све што јој је претходило. Стога све методичке примедбе којима смо хтели да оптеретимо учитељицу сада можемо пренети на литературу.[1]

[1] Сенка Тахировић - Математика, уџбеник за IV разред основне школе, Логос, Београд, 2016



★ Разломцима су приказани обојени делови фигура:

$\frac{3}{4}$ (три четвртине)

$\frac{5}{6}$ (пет шестина)

$\frac{4}{10}$ (четири десетине)

★★ Израчунај $\frac{8}{9}$ броја 153.

Једно цело има 9 деветина.

Прво рачунаш колико износи $\frac{1}{9}$ броја 153:

153 : 9 = 17.

Осам деветина броја 153 биће: $8 \cdot 17 = 136$.

★★★ Ако је $\frac{5}{7}$ неког броја број 25, одреди тај број.

Прво рачунаш $\frac{1}{7}$:

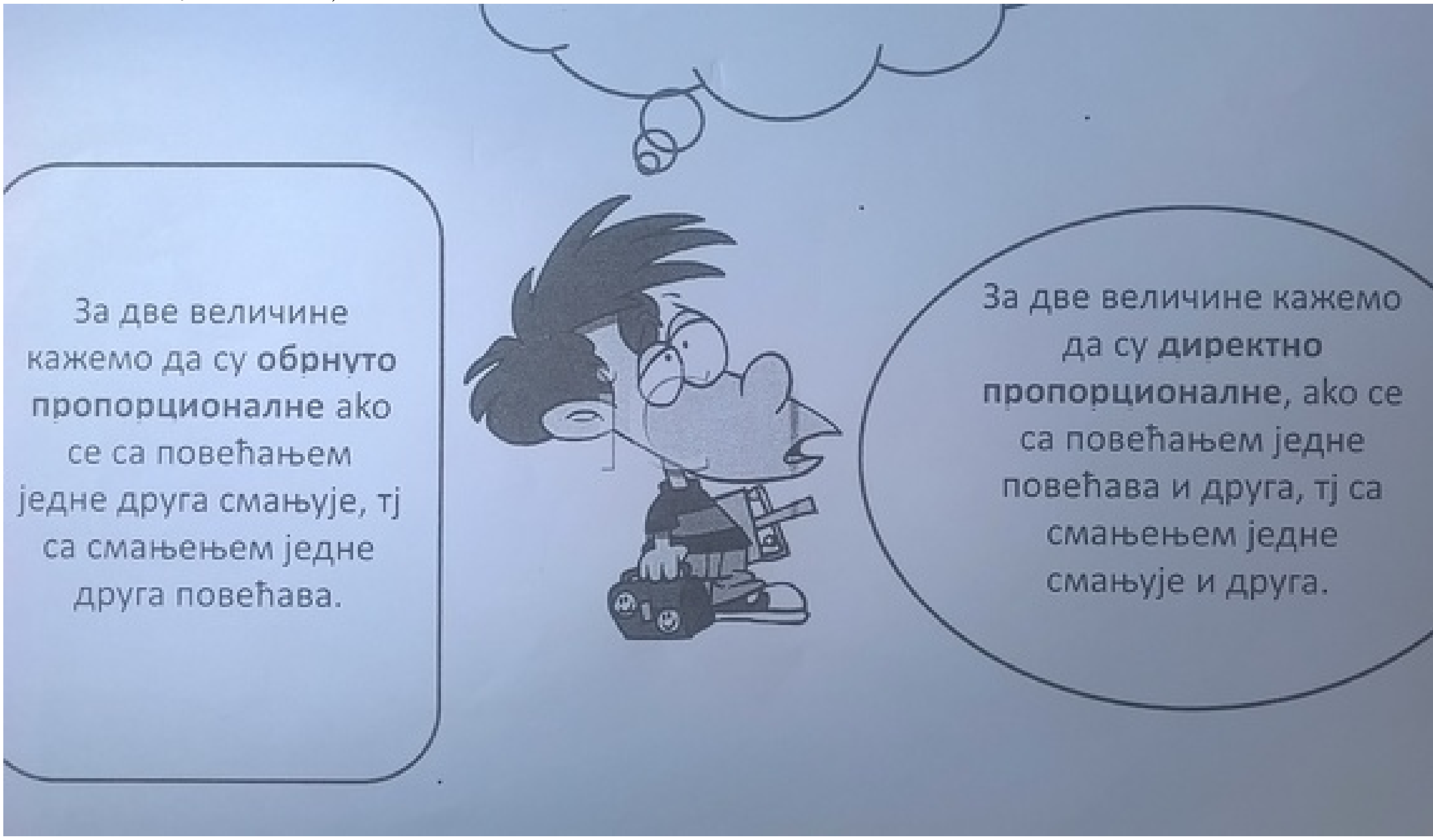
25 : 5 = 5.

Цео број је $\frac{7}{7}$, а то је $7 \cdot 5 = 35$.

Циљ ове приче је био да илуструје како и зашто *тортура формалним учењем* почиње још у раним фазама школовања и како је сви учесници у ланцу предавач - ученик - родитељи углавном следе, прихватају или ћутањем одобравају. Од учитељице која је модел формалног учења користила на својим студијама (а вероватно и у ранијем школовању, чиме се ствара зачаран круг) и не можете (осим у случају неког накнадног екстерног просветљења) очекивати другачији приступ, али је проблем што и уџбеници, а показаћемо и целокупан званични миље у овом тренутку, *системски* подржавају овакав рад. Поражавајућу чињеницу да је и 10-годишње дете већ дубоко зашло у мрачне лавиринте формалног учења доказује и епилог целе епизоде. На задовољство родитеља и ђака, тест који је уследио после нашег рада био је успешан, дете је ,,обе врсте задатка" решило тачно, а сигурност у раду је, по сопственим речима, дуговало пре свега срећној околности да је у сваком задатку дати природан број био дељив или само бројиоцем или само имениоцем разломка, па није било потребно подсећање ни на чоколаде ни на било шта друго.

Друга прича има за циљ да илуструје шта се дешава када ученик жели да, у мору математичких знања којима га затрпавају у школи, ипак задржи острвце здравог разума и сопственог логичког повезивања чињеница.

Јунак наше друге приче, ученик прве године једне приватне информатичке средње школе, похвалио се вашем приповедачу како знања која стиче у школи из математике примењује у свакодневном животу и, као илустрацију тога, навео да је мало пре нашег разговора закључио да су износ новца који потроши у маркету и износ који му остаје у џепу обрнуто пропорционалне величине. Јер, професорка је рекла да ако се са порастом једне величине друга смањује, такве величине су обрнуто пропорционалне. ,,Па неће бити да је баш тако рекла", покушах тактично да му докажем да није ухватио комплетну мисао, али се он успротиви: ,,Баш тако је речено, и пише на презентацији". И гле, за тили час момак уђе на презентацију своје професорке (доступну само одабранима, пре свега њеним ученицима) и тамо заиста пише



Могли бисмо помислити да је професорка, не дај боже, незналица и да би требало преиспитати њену лиценцу (да таква ствар уопште постоји). Међутим, из искуства верујем да се по свој прилици ради о нечем другом, да је скривена порука у презентацији била ,,Сада се бавимо само пропорционалним величинама и, у оквиру тога, ако са порастом једне друга опада, рећи ћемо да су обрнуто пропорционалне и радићемо задатке тако и тако. Тиме вам чиним услугу јер вас брзо и лако инструирам да урадите следећи контролни (писмени) како треба". Да је у питању медвеђа услуга и да се тиме, уместо незнања о нечему, прави гора ситуација: погрешно или непотпуно знање, показало се, ето, чим сте изашли из оквира текуће школске лекције и сусрели се у стварности са две функционално зависне величине такве да кад једна расте друга опада. Требало је да видите разочарање момка када сам га уверио да се прича из супермаркета не односи на обрнуто пропорционалне величине из текуће лекције, већ, за фиксирану почетну суму, на линеарно зависне величине (са негативним коефицијентом правца) из, ето, неке друге лекције. Када је с правом одлучио да своје разочарање подели и са предметном професорком, добио је одговор који је, без обзира да ли је требало само да буде духовит или је имао дубљи смисао, свакако заслужио да оде у наслов ове главе: ,,Оно што учите у школи не треба да покушавате код куће".

Ни овде не би било фер да сву одговорност свалимо на професорку, и то из више разлога. У овом тренутку је најмање важно то што њен приступ целој причи није усамљен, напротив, добар део предавача слично поступа (о свим аспектима оваквог рада биће више речи у наредним поглављима) и при томе код ђака и родитеља стиче епитет професора ,,који добро објашњава и каже деци све што треба" па ,,нису потребни приватни часови". Такође, у овом маниру често и ,,нематематичари" инструирају децу и поносе се како постижу бољи успех од математичара који ђацима ,,причају романе". Важније је то (и то је тема о којој говоримо у наредним одељцима) што наставни планови и програми *наводе* предавача да, линијом мањег отпора, баш овако поступа. Лекцијашка концепција, наменске провере знања, чак и некакви завршни тестови (годишњи, матурски) као проста сума наменских, одсуство било какве *општости* (решавање практичних проблема, задавање пројеката, тестови опште математичке културе...) - све су то системске карактеристике са којима се начин рада наше професорке потпуно слаже. Могли бисмо јој чак и честитати на храбрости да презентације (на које је њена школа обавезује) прави заиста за своје ученике (а не управу школе или просветне власти), или је у питању можда чињеница да њихов садржај ионако нико не контролише...ко ће знати...

2 ПОВРАТАК ШКОЛИ или о професорки која тражи кез

Искуство са математиком у школи се многима свело на упознавање са насумичним правилима без икаквог склада, која морају да науче да би положили испит, а да никад не увиде зашто су истински корисна за њих.

Колин Рајт, савремени аустралијски математичар

Припремање за Computer Adaptive Tests (где се проверавају математичке способности кандидата који аплицирају за мастер студије одређених профила) већина полазника, на основу листе области чије се знање подразумева, доживљава као неочекиван повратак у основну и средњу школу. И заиста, ради се о темама из елементарне математике које се у нашим програмима поклапају са градивом закључно са квадратном једначином (II година средње школе), уз комбинаторику и почетна поглавља теорије вероватноће и статистике као десерт. Стварни проблем праве текстови задатака који, генерално, захтевају креативно коришћење речених знања и умећа и где се, по правилу, рефлектују све бољке нашег школског учења математике. Актери прве, друге и четврте приче од пет које следе су управо CAT апликанти:

Прича прва: Током припрема за полагање CAT један полазник наишао је, решавајући одређени проблем, на рачун $(447 + 553)^2$ и, с обзиром да калкулатор није дозвољен, почео вредно да рачуна: $447^2 + 2 \cdot 447 \cdot 553 + 553^2$. На моје питање: а зашто не једноставно 1000^2 , одговорио је ,,Е тако је могло до VII разреда основне, а после тога, кад смо научили формулу за квадрат бинома, може једино као: први на квадрат, двоструки први пута други...”. На моје питање: а да ли се, најпре сабравши бројеве у загради, а затим квадрирајући тај збир, добије исти одговор, одговорио је, након краће паузе: ,,Видите, о томе нисам размишљао...”.(ову ,,дилему” поставили смо у форми задатка и на тесту *општематематичке културе* за средњошколце који, заједно са резултатима, можете видети у Додатку III на крају рада).

Прича друга: Бавећи се задацима у тзв.*data sufficiency* формату (у коме није потребно дати решење, већ само утврдити да ли се задатак може једнозначно решити на основу датих информација), група полазника сусрела се са оваквим проблемом: ,,*Мила је овог месеца имала 5% већу плату него претходног. Ако се зна да је 10% своје плате овог месеца дала на станарину, колика је њена плата овог месеца (у америчким доларима)?*. Један број полазника утврдио је да у тексту има довољно података да се одговори на питање. На моје инсистирање: како?, подсетили су ме да није неопходно да нађу решење, битно је да знају да се до решења може доћи. Штавише, и ако они то не могу, сигурни су да би добар математичар то свакако могао.

Прича трећа: Субота пре подне, сунчан дан, идеално време за одмор од обавеза. Идилу прекида позив од претпостављеног са молбом да, ванредно, дођем до службених просторија јер један његов добар пријатељ има ,,хитан математички проблем". Мало невољно, али ипак за пола сата успевам да се пребацим у радни мод и, са оловком у руци, спремно саслушам причу дотичног господина. Тако сазнајем да је господин (назовимо га X) архитекта и да је пре извесног времена конкурисао за један добар и профитабилан пројекат у иностраној фирми. С обзиром да има драгоцено искуство у једном специфичном подручју своје струке (скрушено признајем да сам готово у истом тренутку заборавио о чему се ради) и да се тражила особа баш тог профила, те да му је лице које је кључно у одлучивању (назовимо га Y) у неформалном телефонском разговору рекло да је 90% вероватноћа да ће бити примљен с обзиром на знање и искуство, X је имао итекако разлога да буде задовољан. Обећано је да ће му одлука бити саопштена у року од n дана. Како му се, међутим, ни након $2n$ дана нико тим поводом није јавио, X је одлучио да позове Y и да види како стоји његов случај. Y му је, приметно мање љубазним гласом него први пут, рекао да је у великој гужви, да се пријавило више кандидата са одговарајућим искуством него што је очекивано, и да ће му ускоро бити јављен исход. Разумећете да је током целе приче спремна оловка у мојој руци све време неодређено кружила у ваздуху. А онда је, неочекивано, уследило питање особе X упућено мени, уз изражену спремност да стручан одговор награди колико је потребно : шта каже математика, колика је сада, у светлу накнадних чињеница, вероватноћа да ће добити посао?

Прича четврта: Један полазник, посвећен истом послу као актери прве и друге приче, наилази на занимљив проблем са куцама и мацама и одлучује да број првих обележи са x, а број других са y. На моју успутну сугестију, није ли згодније одабрати рецимо k и m (или, по енглески, d и c) као почетна слова имена животиња како касније не би дошло до забуне, узвраћа питањем: ,,А зар то сме?". Након мог ,,а што да не" одговора, каже несигурно: ,,Не знам, али памтим још из основне школе да моја професорка није дозвољавала било каква друга слова у системима једначина са две непознате осим x и y, тако да ни у ,текстуалним' задацима нисмо смели да користимо неке друге ознаке." (читаоца подсећамо да је у САТ задацима потребно само ,,кликнути" на један од понуђених одговора).

Прича пета: Протагониста ове приче, особа М, млађа од свих претходних, вредан је ђак друге године једне ,,добре" београдске гимназије, а потписнику ових редова се обратила за помоћ око неколико тригонометријских једначина које није успела да реши. Једначине смо, заједничким снагама, свели на основни облик (*trig* $\square = b$, где је $\square$ неки израз са једном променљивом, b реалан број, а *trig* ознака једне од операција *sin, cos, tg* или *ctg*), а даље ,,није проблем". У том ,,није проблем" делу, међутим, моја маленкост запазила је да нема нигде тригонометријског круга, већ само меморисаних алгоритама типа: $\sin x = b$ нема решење ако $b \notin [-1,1]$; има решење $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ за $b = 1$, а $x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ за $b = -1$, док за $b \in (-1,1)$ имамо две фамилије решења: $x = \arcsin b + 2k\pi$ и $x = \pi - \arcsin b + 2k\pi$. Уз ово иде и листа неких вредности аркусних функција које треба знати и које су таман стале на једну омању ,,пушкицу". Мој савет да причу мало релаксирамо на тригонометријском кругу наишао је на чврст зид одбијања, па сам убрзо одустао схвативши да је тачност одговора особе М уједно њој и најјачи аргумент да ту не треба ништа мењати. И само што сам затворио свеску, М ме опомену да сам заборавио нешто важно: ,,Морате на крају решеног задатка ставити *кез*, иначе професорка скида поене." ,,Боже, шта нећу чути", помислих и зачиних одговор смајлићем, кад се већ мора, на шта М узвикну: ,,Не, не тако" и написа (латиницом) *KEZ*. Срећом да су ми тог дана сиве ћелије релативно добро функционисале, па у тренутку схватих да се иза тога крије $k \in Z$. Сад је дошао ред на М да се изненади:,,То значи да k припада Z ? Заиста?" ,,Па зар ваша професорка не изговара оно што пише", упитах. ,,Само понешто", рече М, ,,углавном пише. Не прича много, али доста тражи".

Постављамо сада (логично) питање: шта је заједничко за актере ових пет прича? Одговор, колико год звучао грубо или претерано, а имајући у виду да су наведене анегдоте илустрација *општег* утиска, гласи: њихово математичко знање је *инвалидно* јер су жртве формалног учења коме су били подвргнути не својом вољом, а чега нису били свесни током целог процеса учења математике. (а и када постанете свесни, јако тешко је променити нешто на шта се навикнете од малих ногу). Они једноставно не знају основне принципе на којима се гради ,,математичка зграда"(термин др Милана Божића [1]), не знају (да се мало задржимо на асоцијацији) ни шта су јој носећи стубови, главни вентили ни како изгледа и функционише инсталациона мрежа. Бавећи се математиком током школовања (особа из пете приче још је у средњошколској фази, али је, нажалост, на добром путу да дође у позиције осталих актера) научили су да много тога ураде што им се каже, али не и да сами одлучују. С друге стране, ради се о амбициозним младим људима који имају жељу да професионално напредују и продубљују своје знање и способности. Такође, сви они су у досадашњим фазама школовања (у прве четири приче ради се о факултетски образованим људима) постигли солидан формалан успех. Питање којим се бавимо у овом раду је: због чега је математичко образовање које су стекли током, пре свега, основне и средње школе, без правих темеља, неконзистентно, фрагментарно и нефункционално? Основне кривце за то смо већ именовали: образовни систем, уџбеничка стварност и професорски кадар. У наредним одељцима детаљније ћемо се позабавити сваким од њих.

Можда ће неко помислити да се ради ипак о изузецима. Међутим, моје искуство (али и бројна друга истраживања на ту тему) говоре, на жалост, супротно. Писац ових редова има ту (не)срећу, због природе посла, да се са овим сусреће буквално свакодневно, а горњи примери су само драстични у својој огољености. Могао се међу њима наћи и пример особе која је, након телефонског разговора, утврдила да је потписник ових редова математичка незналица јер не зна шта је *фофирање* и *гофирање*, а њему треба још и више од тога, *фогофирање* и *гогогирање* (тек накнадно сам схватио да је мислио на композиције одређених функција $f(x)$ и $g(x)$); или да легенде о онима који разломак $\frac{tgx}{ctgx}$,,скраћују" у $\frac{1}{c}$ нису само пусте приче.

Наравно, у свом раду аутор се суретао и са кандидатима са одличним знањем и добрим или врхунским способностима, али су они били у мањини. Ту се потпуно потврдило запажање др Добрила Тошића да се ,,просек знања математике сваке године смањује. Последњих неколико година освојено је доста медаља на математичким олимпијадама - сваке године све више и више. Међутим, средина је све слабија и слабија."[2] Најмањи проценат кандидата од оних са којима је аутор радио је имао комбинацију : сјајно знање и одличан успех из претходних фаза школовања. По мом утиску, то су природно талентовани студенти који су, и у постојећем систему, или можда *упркос* њему, достигли завидан ниво математичких способности, и рад са њима је по правилу био само формално навикавање на САТ концепт. Индикативно је, међутим, да од кандидата који су касније остварили добар успех на тесту, највећи број је оних који су, по сопственим речима, имали просечан или испотпросечан успех у основној и средњој школи, са неком ,,двојком - тројком" из математике, да би на факултету, по правилу, постигли далеко боље резултате. Код ових кандидата са знатно развијеним способностима математичко-логичког расуђивања примећује се и изражена вештина заобилажења али и самосталног извођења ,,заборављених" формула, као и, методом примера и контрапримера, неупадања у замку погрешних закључака на које тестови често наводе.

Да закључимо: све док се ђак или студент у процесу учења математике пита: ,,Шта ће ми ово у животу?" (и не задовољава се одговором типа: ,,Потребно вам је за пријемни" или ,,...за добру оцену"), има шансу да избегне да дође у позицију поседовања папира без покрића. Наравно, *нетипично* добар професор, *нетипично* добар уџбеник и разни други повољни фактори окружења и личног развоја могу итекако да буду катализатор процеса квалитетног учења. А одговор на питање ,,Шта ће ми ово у животу" дужан је да тражи од свих актера образовног процеса, али и да самостално трага за њим. У супротном, може доћи у позицију службеника банке који је дошао на радно место вашег приповедача са молбом да му објасни ,,како се рачунају проценти дигитроном", особе на послу контроле квалитета којој је математичар био потребан да направи формулу која ће повезати величину x и време t ако је у почетном тренутку $x = x_0$, а у сваком следећем за 3 веће него у претходном, или можда архитекту из треће приче... који је, успут, добио жељени посао...

3 ИНСТИТУЦИОНАЛНИ ОКВИР или Како скројити математичко одело по мери

Школу доживљавам као затвор.
Јана Шевкушић (14), списатељица,
најмлађа учесница БГ Сајма књига 2016

Сусед који ради у Градском саобраћајном предузећу редовно ми се жали како на линијама на којима вози никако не успева да поштује ред вожње који налаже да од места A_i до места A_j пут траје m_{ij} минута. Сигуран је да се ,,онај ко је то саставио" никад није возио наведеним линијама или је то чинио под идеалним околностима, и при томе је недоступан за повратне информације, тако да је возачима и диспечерима остављено да се сналазе како умеју.

И наставни планови и програми за основну и средњу школу, као прописани редови вожње кроз математичке садржаје, имају сличну бољку (и ту се аналогија са горњим примером завршава), па просветари за њих обично користе већ изанђалу фразу: ,,списак лепих жеља". Додуше, формално их је могуће испоштовати, али аутор одговорно тврди да, желите ли да заиста да избегнете замке формалног и наменског подучавања, морате свесно да кршите наставне планове. У пракси се и сада ти планови крше, додуше из разноразних разлога, и готово да нема професора (пре свега у средњој школи) који неку од предвиђених тема није заобишао, иако је, папиролошки, све чисто и по реду вожње. У средњошколским програмима на солидаран бојкот професора наилазе својевремено убачене теме (са предвиђених 1-2 часа за обраду) попут ,,Основе линеарног програмирања", ,,Системи алгебарских једначина вишег реда" и ,,Диференцне једначине" (III година гимназије природног смера), док се, с друге стране, често обрађују наставне јединице које су одавно избачене из програма, попут ,,Каматног рачуна" у I години или ,,Интеграције рационалних функција" (IV година гимназије, природни смер).

Проблем обимности програма је, заправо, проблем односа квантитета и квалитета. Пракса показује да је предвиђени садржај немогуће обрадити *аналитички* (термин о коме у наставку више говоримо) са *просечним* ђаком (овај термин треба схватити само у свом статистичком значењу). Чињеница да постоје природне (и добродошле) индивидуалне разлике међу ђацима и да време које је потребно за одређену наставну јединицу варира од ђака до ђака (можемо рећи: време потребно једном ђаку да савлада наставну јединицу J је случајна променљива X_J са претпостављеном нормалном расподелом чија је очекивана вредност често већа од сада ,,прописане") морала би другачије него до сада да се узме у обзир. При томе се гимназијска подела на друштвени, општи и природни смер чини одавно превазиђеним моделом. Колико нам је познато, искуства из образовних система других земаља су разнолика: негде се, из године у годину, ради некакав *Diagnostic test* на основу ког се, у оквиру једног образовног профила, ђаци упућују на један од неколико нивоа (обично три) са истим фондом, али различитом садржином часова; негде се и недељни фондови разликују, негде се и жеље ученика узимају у обзир, негде је (пример Финске) цела концепција из основа другачија. Полазећи од својих искустава у образовном процесу, аутор у нашим околностима предлаже постојање обавезног фонда часова на коме би се на примерен начин (о тој примерености више говоримо у наставку) обрађивало оно *што се договоримо* да је основно и суштинско. Листе обавезних наставних јединица за сваку годину основне и средње школе (у средњој школи и за сваки образовни профил) би, следствено, била свакако мања него што је данас и то по два основа: неких тема уопште не би било, а неке би се радиле мање него сада. Аутор нема амбиције да у овом тренутку даје било какве предлоге у том смислу, свака измена је осетљива тема којој треба да претходе анализе разних врста, али сматрам да је листа тема које улазе у туторијал за САТ индикативна у том смислу: она не садржи бројне теме које се раде у нашој средњој, па чак и основној школи, али претпоставља знатно веће знање из теорије дељивости целих бројева, као и почетни курс теорије вероватноће и статистике који не коинцидира у потпуности са оним што се обично (не) уради на крају IV године средње школе када се ове теме по програму раде. Ван обавезног фонда часова аутор предлаже систем изборних часова где би ђаци могли до одређене границе да повећавају број часова математике недељно и тиме прошире листу тема које ће обрадити или продубити, али и да га поново по жељи смање (до минималног могућег броја). Поврх тога, требало би вратити у систем опцију додатне наставе која би могла да омогући даљу екстензију овог система за посебно надарене и заинтересоване ђаке. Сматрам да би, у блажој форми, овакав систем требало да се примењује већ од V разреда, са мањим варирањем броја часова и наглашенијом варијантом додатне наставе, да би постепено, до краја средње школе, постајао све флексибилнији. Допунска настава се у свакој варијанти подразумева.

Међутим, пренатрпаност ни случајно није једина мана постојећих програма. Дискутабилан је и распоред појединих тема, при чему је најдрастичнији пример почетка прве године средње школе. У наставним плановима за већину образовних профила у питању су почетна поглавља математичке логике, након чега следе одабране партије из теорије скупова (укључујући доказивање скуповних једнакости ,,превођењем" на језик исказне алгебре), увођење појма бинарне релације и уводна поглавља теорије функција (дефиниција, појам домена и кодомена, 1-1 и на функција, композиција функција, појам инверзне функције, решавање функцијских једначина...). Сусрет са градивом које ни мало не личи на оно што је наслеђено из основне школе већина ученика схвата као поруку: ,,Оно што сте радили у основној заборавите, следи сасвим другачија математика која нема везе са старом и у којој можда нећете бити успешни као до сада." У атмосфери преласка на вишу фазе школовања, амбијенту новог простора и нових предавача, стрес који овакав старт има код многих произведе ефекат потпуног дебакла из ког се касније тешко опораве. Ако је састављач желео да ђацима на почетку средњег школовања пренесе поруку ,,лоше вам се пише", онда је ван сваке сумње успео.

Парадокс је што се касније коришћење знања из математичке логике у пракси, на (велику) жалост, своди само на формалну употребу симбола $\Longrightarrow$ и $\Longleftrightarrow$. Мишљења смо да би увођење логичких операција могло да уследи током I године (али не на самом почетку, из већ образложених психолошких разлога) , а већину осталих тема (употреба квантора, појам потребног и довољног услова, скупови и скуповне једнакости, бинарне релације) видимо у делу ван обавезног фонда часова или у III години у пакету са математичком индукцијом, што се посебно слаже са чињеницом да тад гимназијалци имају и логику као засебан предмет. Део о функцијама прикладнији је за почетак II године, будући да се током те године обрађују теме везане за квадратне, коренске, експоненцијалне, логаритамске и тригонометријске функције и где се ефектно примењује знање о својствима 1-1 и на, појму инверзне функције, монотоности итд (на чему се заснива и решавање одређених класа једначина, неједначина итд.)

Постоји свакако још доста тема у основној и средњој школи којима пракса налаже промену ,,тајминга”. Аутор из свог искуства наводи још неке:

- *подударност троуглова* представља први сусрет са ,,доказном” геометријом чије је смештање у VI разред основне школе потпуно неадекватно, без обзира на то што се на основу тога касније доказују бројна својства троуглова и четвороуглова. Пракса једноставно показује да ђаци у преовлађујућој мери не могу да разумеју суштину ове приче и доживљавају је као још једну од бесмислица коју треба некако научити имитирајући већ урађене задатке са часа. Самим тим и поменута својства би се у тој фази визуелно обрађивала, а докази оставили за I годину средње, када се подударност и по садашњим програмима поново обрађује;

- *елементи комбинаторике* који се, у виду почетног курса (принцип множења и принцип сабирања) раде на почетку I године средње школе, такође представљају део шокантног стартног пакета у средњој школи коме ту није место. Јасна је повезаност тога са ,,бројањем” правих и равни у каснијим геометријским партијама, али то се може сасвим задовољавајуће избећи, а цела област оставити за IV годину у којој се и сада обрађује.

- *вектори* као тема аналитичке геометрије (III година средње) представљају апсолутни пример недоследности, ако их упоредимо са горе поменутим темама. Уводе се, наиме, координате вектора у простору без икаквог предвиђеног увода у ,,тродимензионални” координатни систем, па се од ђака очекује у задацима да су просветљени и знају да нпр. тачка на Oz - оси има координате облика $(0, 0, z)$, а тачка у xOy равни $(x, y, 0)$.То ће искусни професор решити прикладним уводним словом, али ове партије (за које постоји легенда да се раде пре свега због захтева у физици на том узрасту) велика већина ђака ради опет методом аналогије (,,имитирања” ,,сличних” задатака). Увођење појма линеарне (не)зависности вектора, што програм такође предвиђа, и да не помињемо.

- *елементи комбинаторике, вероватноће и статистике* који спадају у општематематичку културу треба да буду *почетна* тема IV године средње (чиме би се избегла садашња пракса њиховог изостављања јер су на самом крају те године), а елементима више математике може припадати остатак завршне године, у обиму који би зависио од образовног профила и осталих чинилаца које смо поменули.

О потреби институционализованог механизма проверавања математичких способности ученика кроз тестове *оптематематичке културе* биће речи касније. Овде бисмо навели једно запажање које сматрамо важним, а тиче се институције матурских испита (у плану је и да се пријемни испити на факултетима замене стандардизованим матурским испитом у средњој школи, па о бесмисленом двојству, срећом, нема потребе више говорити). Мишљења смо, наиме, да би завршним испитима који обезбеђују пролаз на више етапе школовања требало скинути ореол ексклузивности за један уписни рок. Тензија која се код већине ученика ствара због чињенице да би, у случају неуспеха, морали да паузирају годину дана, као и трема која због тога код неких достиже и блокирајући ниво, су непотребне и могу довести до потпуно погрешне слике о способностима појединца. Омогућавањем већег броја термина за полагање за исти уписни рок и сумарне ранг листе након свих термина (где би једна особа могла да излази више пута) дало би, по чврстом уверењу аутора, далеко реалнију слику о стварном знању појединаца. Овде мислимо и на тзв. малу и велику матуру; полагање мале матуре у прошлости, док су услови били неупоредиво строжи него данас, било је изузетно трауматично за децу . Сада је ту прича релаксиранија, а поменути предлог би је учинио још веродостојнијом.

4 КЊИГЕ ИЗ КОЈИХ УЧИМО или Црна маска из Ал-џебре

У периоду од V разреда основне школе до краја средње школе, на који се, пре свега, односе запажања у овом раду, школском савладавању математике ђацима би требало да помажу две врсте књига - уџбеници и збирке задатака. У пракси, међутим, ђаци скоро да уопште не користе уџбенике (средњошколци их, по правилу, и не купују), тако да их практично једино читају професори који то желе (у чему нема ничег лошег, али то није њихова примарна намена).

Уџбеник би требало да помогне деци тако што ће приступачним стилом, без губитка научности, и одабраним примерима помоћи у разумевању пређених партија. Основни проблем код њиховог креирања је управо балансирање између научности и популарног стила писања. И поред жеље да се приближе деци, па макар то било и симпатичним илустрацијама, охрабрујућим уводним словом или на некакав други начин, аутору се чини да су скоро сви уџбеници које је имао прилику да анализира, по правилу неприступачни и одбојни када су у њих мало дубље зађе. Данас постоји обиље уџбеничке литературе, просто такмичење разних издавача звучних имена, нарочито за основну школу. Њихови аутори су углавном универзитетски и средњошколски професори. Серија уџбеника за средњу школу (природни смер гимназије) који се, у погледу аналитичности и ширине, свакако истичу, су они писани од стране покојног проф. Јована Д.Кечкића, који је и сам био веома оштар критичар постојећег система школства и у уводном слову сваког од уџбеника редовно наглашавао да је немогуће прећи све теме, онако како би требало, за предвиђено време. Стога његови текстови обилују фуснотама и ,,необавезним" текстом писаним ситним словима како би се задржао макар минимум општости и целине логички повезале. Његови уџбеници су, по нашем мишљењу, сјајна литература за професоре од којих се, природно, подразумева далеко дубље знање од оног које предају. Има у њима и отворених тема за размишљање, полемичких тонова, нестандардних приступа неким темама елементарне математике, дилема у виду разговора са истакнутим колегама математичарима (пок.професором Славишом Б.Прешићем) Међутим, за ученике, поготову у садашњој ери инстант-учења, ово тешко да може бити адекватно, чега је и аутор био свестан, и сâм очекујући да његову књигу користе углавном посебно надарени или радознали ђаци.

С друге стране, постоје уџбеници који се стилом више ,,додворавају" ђацима, али остајући упорно на трагу *псеудодедуктивног* стила, што уме да резултира накарадним последицама. Типичан пример јесте један уџбеник за I годину средње школе у коме се, на пример, као прве две аксиоме међу аксиомама припадања апсолутне геометрије наводе:

Пошто простор замишљамо као скуп, природно је да „бити елемент", а тиме и „бити подскуп", спадају у основне односе међу уведеним основним објектима. Навешћемо шест аксиома које се односе на припадање.

Прва аксиома (полазна претпоставка) подржава уверење да свака права садржи бесконачно много тачака, али јој и не припада бесконачно много тачака. Друга то исто тврди за било коју раван.

На свакој правој можемо изабрати произвољно много међусобно различитих тачака. За сваку праву можемо изабрати произвољно много тачака које јој не припадају.

У свакој равни можемо изабрати произвољно много међусобно различитих тачака. Такође, за сваку раван можемо изабрати произвољно много тачака које јој не припадају.

По нашем мишљењу, ово прави далеко већу штету у научном смислу него да је аксиоматика једноставно заобиђена и све ,,очигледне" ствари прихваћене као ,,подразумевајуће" (што је за тај узраст сасвим примерено). У Хилбертовом систему аксиома апсолутне геометрије, који је, са малим варијацијама, прихваћен у целокупној научној литератури, из прве групе аксиома (аксиоме припадања или инциденције) може се само закључити да права садржи најмање две различите тачке, раван најмање три, а простор најмање четири различите тачке. Штавише, постоје модели са 4 тачке које испуњавају све аксиоме инциденције. Тек са другом групом, аксиомама поретка, може се доказати да права садржи бесконачно много различитих тачака. Увођењем бесконачно много тачака у првој аксиоми припадања потпуно се нарушава смисао аксиома апсолутне геометрије и залази у некакав импровизовани ,,вилајет". Ово сматрамо типичним примером беспотребног инсистирања на дедуктивном приступу чије спајање са жељом да се направи популарно и допадљиво штиво може да изроди и ,,Франкештајна".

Аутор је мишљења да је, прикладно узрасту, важно да математичка знања која се стичу буду утемељена, да се на одабраним примерима види мотив за њихово увођење, а затим значај и домет, те да им се одреди јасно место у ,,математичкој згради". Строга дедукција је у сваком случају немогућа на узрасту основне и средње школе, што не значи да елемената дедукције уопште не треба да буде - напротив, али њена улога је ту само да наговести ,,шта се иза брда ваља" и како изгледа строго грађење математичке ,,зграде". За многе теореме довољно је поткрепити их примерима, уз обавезну напомену да се не ради ни о каквом доказу (већ о емпиријској индукцији) и да је то привремено "веровање на реч" професору.

Међутим, независно од тога, мишљења смо да би стил математичких уџбеника требало да буде битно другачији од оног који је уобичајен. Да је могуће у математичку литературу унети доста духа и шарма *а без нарушавања научности* и изложити градиво у виду питке, забавне, чак и детективске приче, доказ су следеће три књиге које наводимо као узор за то, а чији су аутори (што је веома важно у овом контексту) математичари:

1. *"Три дана у Карликанији" В.Љевина и "Црна маска из Ал-џебре" В.Љевина и Е.Александрова (у преводу и обради проф.Богољуба Маринковића)* (прва је приповетка, друга мањи роман). У овим умотворинама су, кроз причу у маниру ,,Алисе у земљи чуда" о дружини од два дечака и једне девојчице који су се обрели у земљи Карликанији (чији су житељи бројеви) и Ал-џебри (чији су житељи, погађате, бројеви и слова), на узбудљив и духовит начин, савршено презентовани најважнији елементи аритметике и алгебре за узраст V-VII разреда основне школе. Суштина, значај, последице - све је перфектно уткано у ово

узбудљиво путовање, чак је и остављен простор за знања која тек долазе. Аутор ових редова је,као дете, оба дела прочитао без даха (видите да је део тог усхићења остао) и многе математичке појмове је касније везивао за поједине делове штива. Поклањамо и вама једно парче магије: [1]

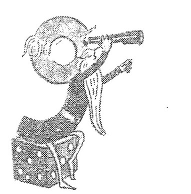
Пресекосмо Трг бројева, пређосмо парче Аутоматизоване улице и скренусмо на лево.

Пред нама је била бесконачна алеја. На њеном улазу је седео стари — прастари карликан и гледао у телескоп.

— Не види се, опет се не види, — мрмљао је себи у браду.

— Шта се то не види? — заинтересова се Сева. — Дозволите да ја погледам. Можда ћу видети.

— Па, како ћете ви угледати оно што се не види? Не види се крај! Још синоћ сам на самом крају алеје приметио огроман, највећи број и помислио сам: »Ево, ту је сада све. Даље ништа више не може бити«. А данас погледам, а оно иза тог броја опет број, још већи од оног јучерашњег!



— А какав је то број? — упита Тања.

— Како да вам то одмах објасним? Та, вама се жури! Боље ће бити да прошетате дуж ове алеје и да широм отворите очи — да пажљиво гледате. Можда ћете то тада схватити. Можда! . . . И старо гунђало се опет загњури у свој телескоп.

Пошли смо левом страном алеје и одједном чусмо команду:

— Према свом реду, раа-з-бројс!

— Ово је нека јутарња прозивка? — упита Сева.

Бројеви који су стајали с леве стране почеше викати:

— Два, три, пет, седам, једанаест, тринаест . . .

Гласови су постајали све слабији, што су били даљи.

— Па ово није никакав ред, већ неред, — додаде Тања.

Међутим, бројеви су извикивали свој назив тачно оним редом како су стајали:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 итд.

— Сумanутих ли бројева! — био је у недоумици Сева.

— Сам си сумanут! — побуни се стари карликан. — Уз то и незналица! Зар нисте прочитали натпис код улаза?

— Нисмо, — збуни се Сева.

— Па, ово је Алеја Простих Бројева! Разумете ли?

— А шта су то п р о с т и бројеви?

— Погледајте на десно, — рече карликан, — можда ће вам то мало разбистрити мозак.

98

Са десне стране стајали су сасвим други бројеви:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27 итд.

— Па то су баш они бројеви којих нема на десној страни алеје, — рече Тања.

— Тамо им и није место! — подсмешљиво ће карликан. — То су с л о ж е н и б р о ј е в и, а не прости.

— А зашто су онда овде?

— Изгледа, почиње да ме боли јетра од ваших неумесних питања! Зар не видите шта је изнад вас? Не треба гледати само пред ноге, понекад није згорег и горе бацити поглед.

Ми подигосмо главе.

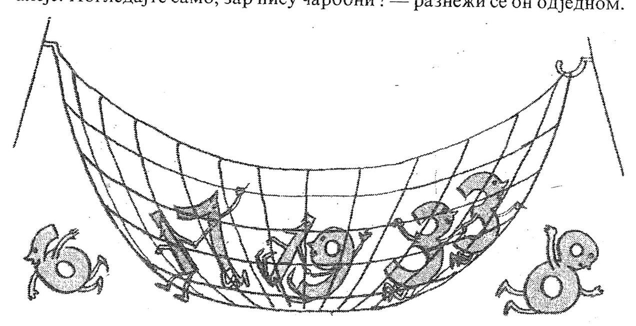
— Одбојкашка мрежа! — јави се Сева.

Стварно, изнад целе алеје беше разапета огромна мрежа.

— Опет сте рекли глупост! — љутну се карликан. — Ради чега би овде била одбојка? Нису ово никакве играчке. Уосталом, оно уопште и није мрежа, већ с и т о!

— С и т о! Па шта се кроз њега просејава?

— Бројеви! Бројеви се просејавају!! . . — дрекну карликан, изгубивши свако стрпљење. — Погледајте само, како их темељито протресају! Свакакви отпаци, попут сложених бројева, пропадају кроз сито и њих одбацују на десну страну алеје. А у ситу остају у најчистијем виду наши драгоцени, наши премили прости бројеви. Њих пажљиво, у одређеном поретку, распоређују са леве стране алеје. Погледајте само, зар нису чаробни? — разнежи се он одједном.



99

[1] Љубазношћу проф. Б. Маринковића

2.,,*Математика логика са елементима опште логике" Милана Божића и Слободана Вујића*, уџбеник везан за средњошколски систем (усмерено образовање) који је давно отишао у историју, једини је званични школски уџбеник на овој листи и, по нашем мишљењу, пример како он треба да изгледа. Иако написан пре 37 година, остао је, колико знамо, једини донкихотовски пројекат те врсте до дана данашњег. Духовитом комуникацијом са читаоцем, писана лаким и забавним стилом, књига уводи читаоца у основне појмове математичке логике (исказни и предикатски рачун, аксиоматика природних бројева, математичка индукција, теорија доказа...) на начин да је и данас и студенти и други којима је потребно изучавање математичке логике користе као незаобилазну литературу.

3. ,,*Папагајева теорема" Денија Геђа* је, за разлику од претходне две, комерцијална литература, некаква математичка белетристика, и као таква најслабија карика овог ланца, али ипак следи поенту приче - да је могуће направити узбудљив (у овом случају и детективски) роман у који ћете вешто уткати, на мање или више строг начин (зависно од циљне групе којима је књига намењена), одређена математичка знања.

Основна мисао је, дакле, да научност (строгост у заснивању) и атрактиван стил излагања нису неспојиве ствари, напротив. Рекли бисмо чак да је данашњи стандардан *стерилан* стил писања едукативног штива у супротности са полетом и усхићењем који су пратили многа математичка ,,открића" и пробоје. Сетимо се само Талеса који је у одушевљењу открића о периферијском углу над пречником принео жртвеног вола у знак захвалности боговима, или Хипаса који се наводно утопио од срамоте што је одао тајну питагорејског братства о постојању несамерљивих дужи, а што је данас у школском систему сведено на ,,досадне ствари које се уче за оцену".

Што се збирки задатака тиче, међу онима намењених ученицима основне школе постоји велико шаренило издавача и аутора, док су се за средњу школу углавном профилисале два ,,бренда" (за све разреде), која, иако намењена само природном смеру гимназије и техничким школама, по препоруци професора користи већина ђака, чиме често буду стављени на муке бирања прикладних задатака за свој профил. Постоје, истина, и збирке намењене друштвеном смеру гимназије и појединим образовним профилима средње школе, али се, из непознатих разлога, не користе у значајнијој мери. Такође, активи математичара неких средњих школа праве и своје штампане или електронске збирке (у бројним случајевима користећи задатке из већ постојећих, а не наводећи их као литературу). У школској пракси често је и агитовање писаца или издавача међу професорима, ниподаштавање других аутора, једном речју, права ,,тржишна" утакмица.

Како год, збирке су, за разлику од уџбеника, неизоставни пратилац школског рада. Нарочито су популарне оне које на почетку сваке ,,лекције" имају кратак теоријски сажетак који ђаци (неретко и професори) користе као замену за теоријски део (о штетности оваквог учења математике биће речи у наредном одељку). У свему осталом, збирку су потпуно огледало наставних планова и програма и наше стварности - по правилу недовољно елементарних задатака, доста тешких задатака и неприступачних текстова, бар за обавезан ниво учења (појам о ком смо говорили у прошлом одељку). Иако ово можда делује паушално и фразерски, аутор овакву оцену заснива на чињеници да су нпр. сви ,,текстуални" задаци у партији ,,Системи једначина и њихова примена" у збирци за I разред гимназија и техничких школа (аутори: Ж.Ивановић и С.Огњановић, ,,Круг", Београд) тежи него САТ задаци који раде особе у просеку 10 година старије од тог узраста, па су опет резултати такви о којима смо говорили. То је само потврда *неприлагођености* литературе својој сврси - проблем који се у пракси ,,решава" на разне начине - или професор такве задатке неће уопште ни радити (што је у описаном примеру заиста најчешће случај), или ће рећи: даћу вам сличне као 576.и 577., или ће (у најгорем случају) остати само на томе да ће ,,текстуалне" задатке дати из збирке, па вам се може исплатити да их све научите...

Можда би требало поменути на крају и математичку шунд литературу, која, иако заступљенија на (неким) факултетима, постоји и везана за узраст о коме говоримо. То су књиге, збирке, скрипте, наравно неодобрене од било кога, у којима се на ,,брз и приступачан начин" гарантује постизање успеха у кратком року. Ту можете наћи информацију да је ,,паралелограм кос правоугаоник', да је $5 : 0 = \infty$ као и да сваки задатак из пирамиде можете решити ако за сваку ,,врсту" пирамиде запамтите формуле за површину, запремину и ,,све Питагорине теореме које у њој постоје" (ово последње можете наћи и у теоријском уводу многих официјелних збирки за VIII разред и III годину средње школе).

5 СЛОВО О ПРОФЕСОРИМА или како измерити висину дрвета и по облачном времену

О школским професорима, откад је школе, света и века, најупечатљивије, најдетаљније и најлуцидније приче могу испричати управо њихови ђаци. Ту можете чути и о малеру добијања строгог професора математике, и о онима који су благи, онима који вам пре провере знања дају ,,припрему, па после само промене бројеве", али и онима ,,који дају задатке какве нису радили у школи", онима који ,,дају задатке само из збирке" и онима ,,који имају свеску са много тешким задацима". ту су и професори који ,,траже да све радите онако како они раде и не признају ништа другачије", као и они који ,,диктирају нешто што нико живи не разуме" и тако даље и тако даље.

Аутор ових редова је, током свог дугог искуства, имао прилике да, што у раду са ученицима што у дискусији са колегама, многе од тих ствари покуша да осветли из стручног и методичког угла. Закључак, признајемо потпуно неколегијалан, је да на предавачима лежи највећа одговорност за постојеће стање, јер су у позицији директног посредника између ученика и сазнајног процеса и тиме у прилици да исправе, коригују или ублаже све институционалне мањкавости о којима смо говорили; у пракси, међутим, се већином показује да се те мањкавости користе као алиби за формално и репродуктивно учење и да се оне, на жалост, често и ,,обогаћују,, низом стручних и методичких грешака, о чему говоримо у наставку.

5.1 Стручност

Стручност професора у основној и средњој школи подразумева ниво *стручне математичке културе* у којој је предавачу потпуно јасна визија свих кључних елемената конструкције ,,математичке зграде", на основу чега он, у настави, може:

- да свакој теми из актуелног градива одреди место и улогу у математичкој згради на начин који је у складу са дотадашњим ученичким знањима; то подразумева много тога - повезивање са претходним градивом и уочавање у њему мотива који доводе до нових појмова (пример увођења тригонометријских функција правоуглог троугла који дајемо нешто касније), наглашавање оног што је у новом сазнању најважније и указивање на разне аспекте примене, уочавање домета коришћења нових сазнања - шта се може, а шта не може тиме решавати, разни специјални случајеви итд., све зависно од конкретне теме;
- да током сазнајног процеса врши апстраховање и уопштавање у оној мери у којој то узраст и конкретан одзив ученика дозвољавају; ово се креће у распону од ствари са којима обично лако изађете на крај типа обима многоугла (дајете општи принцип уместо појединачних формула; касније ширите то на обим круга итд) до ствари у којима ђак скривене поруке може открити тек у каснијим фазама школовања попут

својстава поља или векторких простора која ,,неосетно" можете наглашавати као важна или заједничка за више конкретних примера ових структура

- да одговара на радознала ученичка питања типа ,,шта се још иза брда ваља" : тако вас и у основној школи ученици могу навести на помињање имагинарне јединице, n-тог корена, правилних полиедара, а у средњој на општију причу о детерминантама, појам матрице или помињање кривих у равни које нису криве II реда, са атрактивним именима и облицима попут кардиоиде, циклоиде или Архимедове спирале.

Да би неко могао обавити ову улогу, мора имати есенцијално дубље знање од публике којој се обраћа, и то је разлог зашто рецимо добар и талентован гимназијалац не може квалитетно преносити своје знање старијим основцима (а вршњаке и да не помињемо), осим неке ad hoc помоћи, и зашто они којима математика није струка, и поред најбољих намера, често могу да направе формалну корист, а суштинску штету, нешто као аналгетик код зубобоље који ће вам помоћи да се осећате боље, али вам неће трајно решити проблем. Ово је уједно и разлог зашто предавач-математичар не треба да се понаша на тај начин и да, стављајући се у улоги некаквог ,,ђачког пријатеља", само инструира ђаке како да решавају задатке какве ће им (он или неко други) касније на тесту дати.

Математичар стручност стиче на факултету; касније је важно да се то знање одржава у смислу да све што се од стечених знања заборави (што је природан и нормалан процес) може лако бити надокнађено, по жељи или потреби, јер су темељи знања чврсти и стабилни. Тешко и незахвално би било на овом месту конкретније разрађивати који је то минимум испод ког се не може ићи, али аутор ових редова је у великом броју случајева, разним путевима, ,,открио" недопустиво (често и фрапантно) незнање оних који су у позицији да деци буду извор знања. Сви примери из ауторовог примера ,,теста за професоре" на крају овог рада настали су управо на тај начин. Описаћемо вам порекло за неке од њих:

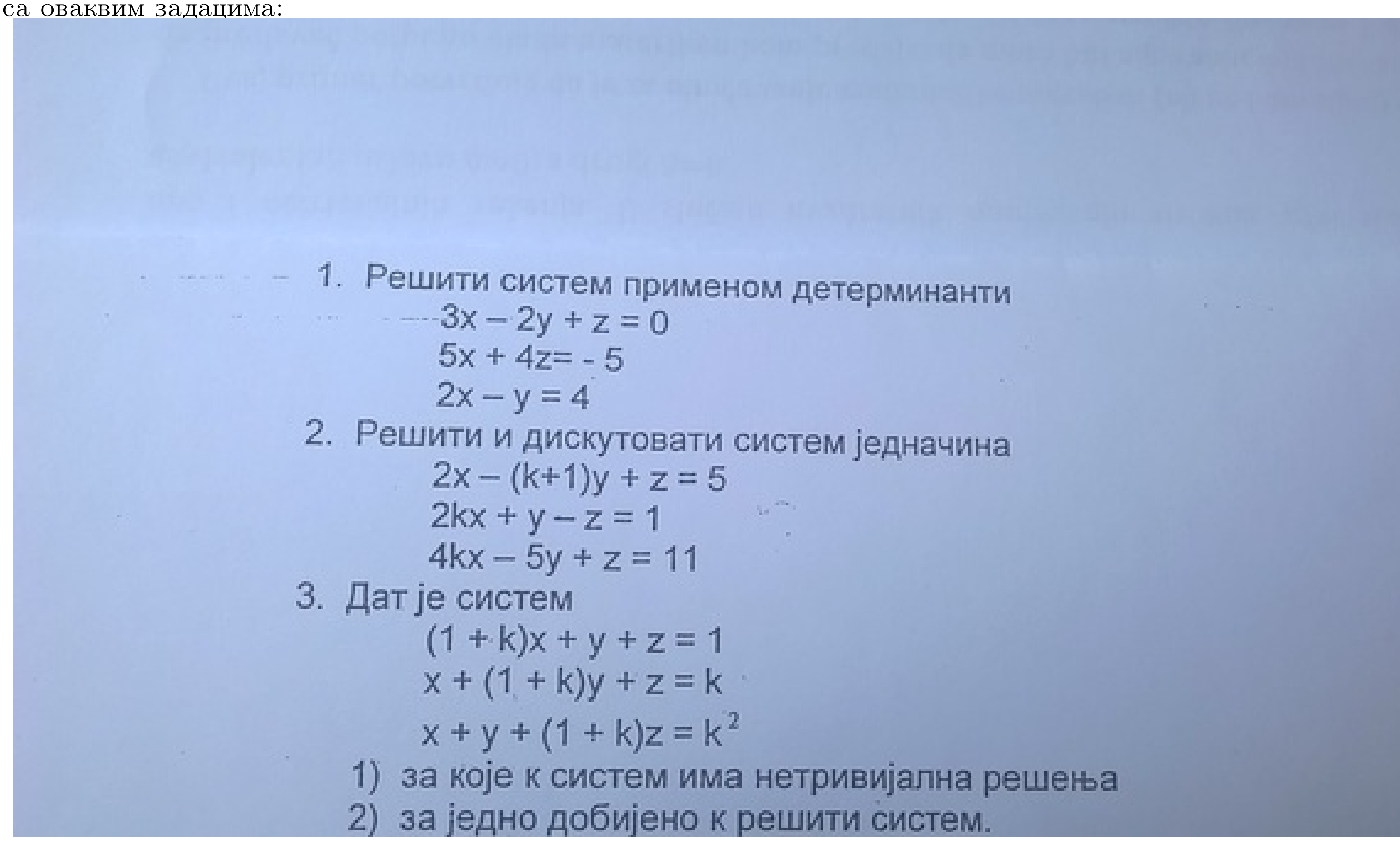
Пример 1. Ово је најстарији, али и најшокантнији од свих примера. Један дечак узраста VI разреда основне школе добио је на часу стандардизован тест из целих бројева у коме је први задатак гласио: *Напиши бар три подскупа скупа целих бројева.* Учеников одговор (који је гласио, отприлике, $\{1, 2, 3\}, \{-1, 0\}$ и ϕ) предметна професорка је прецртала и написала: елементарно незнање. У жељи да сазна о каквом незнању је реч, ваш приповедач се упутио на ,,отворена врата" и, представљајући се као блиски рођак, замолио дотичну за појашњење. Ту је љубазно добио прекор да и он испољава елементарно незнање, јер, замислите, скуп Z има само три подскупа: Z^+, Z^- и $\{0\}$, што је професорка одмах документовала уџбеником у коме пише црно на бело $Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = Z$. На питање: а зар деца у V разреду нису већ од трочланог скупа правила 8 подскупова, одговорила је да је то тако код коначних скупова, а бесконачни скупови су ,,нешто друго". Ипак, на крају је дозволила да је оно ,,бар" у тексту задатка могло да збуни.

Пример 2. Један познат професор једне београдске гимназије имао је веома строге захтеве при решавању задатака, па је, између осталог, тражио да се код решавања квадратне једначине ,,мање" решење означи са x_1, а ,,веће" са x_2. Наступајући у истом својству као у претходном примеру (и при томе се не представљајући као математичар), аутор ових редова је, покушавајући да ,,оправда" ђака који је прекршио ово ,,правило", упитао дотичног предавача како применити ову конвенцију на комплексна решења која нису реална (у II години средње школе квадратна једначина се решава у скупу C), кад је њих немогуће поредити (у скупу комплексних бројева не може се увести релација поретка сагласна са операцијама поља). Међутим, предметни професор узвратио је опаском да се комплексни бројеви могу поредити и да је јасно да је $2 - i < 2 + i$, ,,али је то за Вас вероватно виша математика".

Пример 3. Ово је ситуација у којој смо се обрели баш у време писања овог рукописа, разговарајући са професорком математике једне приватне средње школе која је, радећи са матурантима почетни курс теорије вероватноће, тврдила да је при истовременом бацању две нумерисане коцке број једнаковероватних исхода једнак 21 (уместо 36) и даље радила задатке на тему класичне дефиниције вероватноће руководећи се тиме. Узалуд је било ауторово позивање на Де Мереа који је пре више од 350 година мислио слично кад је бацао 3 коцке, па је пракса показала другачије (што је Паскал разрешио у њиховој чувеној преписци), узалуд је било позивање на валидну писану литературу, чак и збирку коју и сама професорка користи у раду - не, то је грешка у збирци ,,какве се дешавају", вашем писцу је рекла да не разликује ситуације кад није битан редослед од оних у којима то јесте и упутила на сајт који је, замислите, потврдио њене речи - чиме је затворила врзино коло неукости и дилетантизма.

Пример 4. Грешка сличног типа као у претходној причи се, готово истовремено, у раду са матурантима једне београдске гимназије поткрала и једној познатој професорки, а што је ваш приповедач случајно открио док је дотична прегледала радове својих ђака - матураната- са завршног писменог задатка. Међу задацима (чији је аутор сама професорка, што је свакако хвалевредно) био је у овакав: *Баца се коцка за игру док не падне шестица или се не обаве 2 бацања. а) Описати скуп свих исхода* Ω *; б)Израчунати вероватноћу да је пала бар једна шестица.*. У делу под а) ђаци су већином тачно описали оно што је тражено ($\Omega = \{6, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56\}$) али они који су то тако урадили су у делу под б) листом узимали да су сви ови исходи једнаковероватни, па је одговор био $\frac{6}{31}$ што је професорка аминовала штиклирањем! Ни овде наше пријатељско убеђивање да исход ,,6" има вероватноћу $\frac{1}{6}$, а сваки од осталих $\frac{1}{36}$ није помогло, одговор ђака је проглашен тачним и потпуно у складу са ,,оним како је рађено на часу".

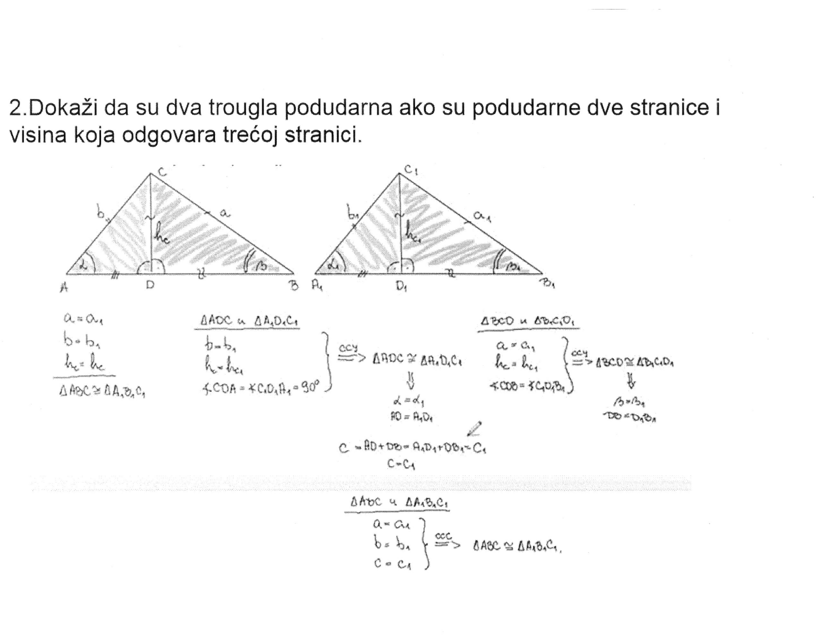
Пример 5. Професорка једне београдске економске школе дала је ђацима III године тест са оваквим задацима:



1. Решити систем применом детерминанти
   $3x - 2y + z = 0$
   $5x + 4z = -5$
   $2x - y = 4$
2. Решити и дискутовати систем једначина
   $2x - (k+1)y + z = 5$
   $2kx + y - z = 1$
   $4kx - 5y + z = 11$
3. Дат је систем
   $(1 + k)x + y + z = 1$
   $x + (1 + k)y + z = k$
   $x + y + (1 + k)z = k^2$
   1) за које к систем има нетривијална решења
   2) за једно добијено к решити систем.

Одмах нам је упао у очи трећи задатак у коме се термин *тривијално решење* система линеарних једначина појављује тамо где му место није (а место му је, стандардно, у хомогеним системима). И овде је аутор ових редова био у прилици да се ,,просветли" од стране поменуте математичарке, па је сазнао да се, кад год систем линеарних једначина има јединствено решење, оно зове тривијално, а за све друге ситуације се каже да има ,,нетривијална решења", што значи да се ово последње каже и кад систем нема решења! То је нешто што по речима дотичне ,,зна сваки студент I године Математичког факултета", ето... Руку на срце, ова прича нема тежину претходних (и следеће), јер се ради о конвенцији, али је из контекста јасно да је израз нестручности, а не некакве реформисане терминологије.

Пример 6. Актер шесте приче је професорка о чијој умотворини ,,величине такве да кад једна расте друга опада зовемо обрнуто пропорционалним" смо већ говорили. Покушали смо, сећате се, да је колико-толико оправдамо и да изразимо захвалност што нам је, правећи аутентичне презентације за своје ђаке који се школују за елитне програмере, у великој мери олакшала труд, уједно и наговестила један могући начин контроле процеса обучавања од стране надлежних. Чешљајући презентације за неколико наредних часова, наишли смо, на жалост, на гомилу бесмислица. За ову причу одабраћемо њен ,,доказ" да су два троугла подударна ако имају две једнаке странице и висину која одговара трећој :



Чак и у једној од збирки задатака за I годину средње школе (што је узраст коме је и намењена презентација) професорка је могла да се увери да нешто ту не штима (наводимо задатак и решење):

306. *Да ли су два троугла подударна ако су им подударни следећи одговарајући елементи:*

а) висина и одсечци, које она образује на одговарајућој страници;

б) висина и углови наспрам ње;

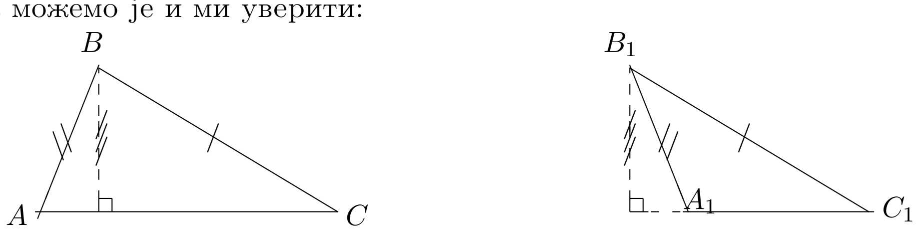
в) две странице и висина, која одговара трећој;

г) две странице и висина, која одговара једној од њих;

д) тежишна дуж и углови на које она дели угао, из чијег темена полази?

306. Троуглови у примерима а), б) и д) су подударни, а у примерима в) и г) не морају бити подударни.

а можемо је и ми уверити:



Оваквих прича има сијасет, далеко више него задатака у нашем моделу једног могућег ,,теста за професоре" који дајемо на крају овог рада, а где су сви задаци формирани баш из оваквих искустава. Погрешно решавање система линеарних једначина Гаусовим алгоритмом, погрешна израда бројних стереометријских задатака (један од таквих је дат у тесту), погрешно коришћење методе ,,свођења на апсурд" у проверавању да ли је нека исказна формула таутологија, испитивање парности функције $y = \ln x$ упоређивањем $\ln(-x)$ и lnx, погрешно увођење појма ,,на" функције итд. итд. неке су од ствари којих аутор у овом тренутку може да се сети, а у које се , што је важно напоменути, уверио у непосредној комуникацији са предметним професорима. С друге стране, из увида у неке оцењене писане задатке и тестове, аутор се уверио у много тога још: да бројна тачна решења нису призната јер ,,тако не може" (не може се, кажу, ирационална једначина са квадратним кореном решавати квадрирањем, па добијена решења проверити; у доказивању тригонометријских идентитета не сме се дирати ,,десна" страна, при решавању логаритамских једначина не можете се из облика $\log_a f(x) = b$,,ослободити" логаритма, већ прво морате да доведете на општи облик $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, па онда даље...и шта све не.)

Разлика између последњих примера и претходних је у томе што су овде ,,професорски" начини решавања тачни, али су тачни и ови ученички. О форсирању једног од могућих начина решавања као једино могућег и о огромној штети која се ту прави биће речи у следећем одељку, али сматрамо да је и то резултат помањкања стручности, иако смо свесни да може бити и резултат сујете и ко зна чега још. Ово често буде доведено и до апсурда, што најбоље одсликава пример ђака чија је професорка тражила да се при читању записа $\log_a b$ прво изговори основа, а затим нумерус, да би се, кад је променио школу, нови професор ужаснуо како ,,неисправно изговара".

5.2 Методичност

И методичност је, поред стручности, неопходан услов за презентовање математичких садржаја у облику у коме ће се они у виду креативног оруђа за рад постепено уграђивати у ученичку емпирију. Навешћемо разне методичке замке у које предавачи могу, мање или више свесно, упасти у свом раду:

1. Претерана строгост излагања непримерена узрасту обично има за последицу одбојност од стране већине, што резултира или деморалисањем ђака у сопствене способности и стресним доживљајем математике као терета кога се треба што пре ослободити или покушајем да се нађе ,,неко" ко ће то објаснити некако приступачније (ту креће јагма за приватним часовима) и тако, више или мање, ублажити ствар. Професор треба да има на уму да подучавање не представља чин провере његовог знања нити доказивања пред аудиторијумом, а такође не ни начин одржавања некаквог ауторитета. Напротив, потребно је, колико год је то могуће, поставити се у улогу онога ко то прати и са тог становишта градити причу уместо ламентирања над помањкањем способности или заинтересованости слушалаца.

2. Наменско подучавање, инструирање намењено искључиво за интерну (школску) употребу, честа је деформација у школству о којој смо већ доста говорили и, не без разлога, оптуживали систем да је преобимним програмима подстиче. Овакав приступ, иако по правилу ослобађа ђака стреса од математике и даје осећај лагодности и сигурности, заправо је веома опасан, јер је слушалац уљуљкан у сопствени успех потпуно несвестан да је његово знање инвалидно и да ће се срушити као кула од карата када изађе из школских оквира. Овде се поново враћамо презентацији у којој ,,величине зовемо обрнуто пропорционалним ако, кад једна расте, друга опада" као типичном примеру

таквог накарадног учења. Карактеристика оваквог начина рада је претварање планског грађења математичке зграде у скуп шаблона у којима се кључна реч у учењу ,,*зашто*" замењује речју ,,*како*". У таквог систему атмосфера је често блиска идиличној у којој су сви задовољни: и професори којима се чини да постижу солидан успех и ђаци на којима је само да ревносно опомену професора ако неки задатак случајно искочи из система. А у том систему најчешће професор даје некакву ,,припрему за писмени" у којој ће после само ,,изменити бројеве", или, у горем случају, каже у поверењу ,,имаћете на провери то и то... а нећу вам дати то и то..." Идилу с времена на време може да поквари неки радознали слушалац који ће питати нпр. зашто у геометријском задатку једначину $x^2 = 5x$ (где је x , рецимо, непозната дужина) смемо решити тако што ћемо обе стране поделити са x, а при решавању исте такве квадратне једначине у II години средње школе ,,морамо пребацити све на једну страну", па $x^2 - 5x = 0$ написати као $x(x-5) = 0$ и одатле добити два решења... Али, ако је професор вешт да смисли неки ad hoc одговор, онда ће се прашина брзо слегнути... Јер ако се упусти у аргументовану причу о могућем губитку решења при дељењу једначине са $f(x)$ (губе се нуле ове функције, ако их има), о томе да једначину смете делити водећи рачуна о томе да решењима онога што добијете морате додати и решења једначине $f(x) = 0$ ако припадају домену полазне једначине или конкретног проблема...где би му био крај и кад би стигао да пређе све што програм заповеда. Онда би требало и да уместо реченице ,,неједначину не смете множити изразом који садржи x" кажемо ,,ако неједначину $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ (уместо знака $<$ може стајати и $>$, $\leq$, $\geq$) множимо изразом $g(x)$, тада генерално морамо разликовати два случаја: кад је $g(x) > 0$ (кад не мењамо знак у добијеној неједначини) и кад је $g(x) < 0$ (у ком случају се, као што знамо, знак мења). Због неудобности таквог начина рада ово је згодно само кад је $g(x)$ константног знака; у супротном, имамо брже начине попут таблице знака итд." Примера има колико хоћете; наравно, није све црно-бело, па и у неком генерално коректном начину излагања могу да се поткраду прећуткивања, ради уштеде времена. И савесни предавачи могу доћи у искушење да ђацима I године средње школе или VIII основне кажу за линеарну функцију : *За њен домен увек напишите* R или (у основној школи): *Кад је непознат умањилац, затим кад је непознат један чинилац,а други је негативан и кад је непознат дељеник, а делилац је негативан, у следећем реду при решавању неједначине ,,окрећете" њен знак* ... Математика се не може радити као скуп алгоритама у којима некад нешто сме, а некад не сме, зависно од лекције... Некад је мања штета да предавач нешто и прескочи (нпр. да остави домен линеарне функције за касније, у склопу приче о природном домену функција) него да нешто уради на овај начин. Овакво *формално* учење (где мислимо и на предавача и на слушаоца) и доводи до парадокса да неко нпр. има одличан успех из математике, а чак и на факултетском узрасту доживи као откровење чињеницу да је формула за квадрат бинома добијена множењем $(a+b)\cdot(a+b)$, као и да $(a-b)^2$ не мора да се ,,памти" као посебна, већ је то $(a+(-b))^2$, да су проценти стоти делови нечега, а не нека апстрактна примена пропорција итд.

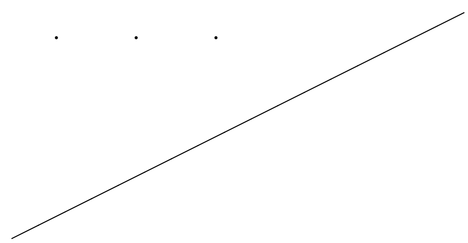
3. Разликовати битно од мање битног, суштину од детаља. У аналитичкој геометрији, рецимо, суштина је да је једначина криве (у шта, дабоме, убрајамо и праву) ,,формула тачна за све њене тачке", а мање је битан линеарни или нумерички ексцентрицитет елипсе. Уосталом, ако радите како треба, многе детаље можете препустити и самим ђацима да их изведу. Нагласите ли да су карактеристични троуглови правилног шестоугла једнакостранични, можете слушаоцима препустити формуле за површину, краћу и дужу дијагоналу и полупречник описаног и уписаног круга; приступите ли ваљку као граничном случају призме (уз могуће ограничење на права тела), лако ће ђаци сами извести формуле за површину и запремину таквог ваљка итд. Ово је битна одлика аналитичког приступа (што треба разликовати од строге дедукције), о чему говоримо у наредној глави детаљније.

4. Ознаке, терминологија, приступ које користи предавач нису њедини могући и ту се од њега очекује максимална либералност. Свако исправно расуђивање ученика треба прихватити, оригиналност и наградити. И исправне моменте у раду треба охрабрити, без обзира на резултат. Све инструкције типа ,,мора како ја кажем" спадају у сиву зону образовања, оцењивање само тачних крајњих резултата без вредновања поступка такође. Крајње је време да такве ствари буду и званично санкционисане.

5. Свако ишчуђавање типа ,,како је могуће да то не знате" такође је контрапродуктивно. Математичко знање школараца у великој мери је резултат рада њихових професора (уз уважавање и других фактора, наравно) и ту најчешће нема места стварању код ђака осећаја кривице или постиђености. Предавач би радије требало да се запита у којој мери је и он допринио својим (не)чињењем таквом стању ствари.

6. Посебно је важно имати у виду да предавачи могу, често и несвесно, користити у објашњавању и терминологији неке конвенције које ђак не мора да зна и то може бити извор неспоразума. Ђак не само да није крив за тај неспоразум, већ то може бити и позитиван показатељ неспутаног размишљања ,,својом главом" што је важно неговати и трудити се да га систем не затрпа. И у стручној литератури из методике су забележени најчешћи такви неспоразуми: када основцима кажете да нацртају три тачке које не при-

падају једној правој, одговор обично буде овакав:



Проблем је, наравно, у томе што је фраза ,,три тачке које не припадају једној правој" конвенционална скраћеница за ,,три тачке такве да не постоји права којој све три припадају". (успут, аутор ових редова овде предлаже термин ,,ненанизане тачке" који би касније могао да еволуира у званичан ,,неколинеарне"). Други пример потиче из III разреда основне школе у коме је учитељица тражила да ђак речима напише следеће бројеве: 27, 159, 200003, а један ђачки одговор је гласио : двадесет осам, сто шездесет, двеста хиљада четири. Забележено је чак да је овај одговор учитељица прогласила скандалозним и интерпретирала га као некакво извргавање руглу њеног рада, уопште на схвативши (а и не потрудивши се, вероватно, да схвати) да је дете оно ,,*следеће*" протумачило буквално. Таквим гестовима се врло ,,успешно" гуши креативност и радозналост код ђака, на жалост... Као потврду чињенице да одрасли користе по инерцији разне фразе не размишљајући како оне звуче деци, сетимо се старе анегдоте у којој се родитељ обрати детету: ,,Последњи пут ти кажем да распремиш своју собу", а дете са олакшањем одговори: ,,Е добро је да је последњи пут, већ ми је досадило"...

7. Кад смо већ код конвенција, њих увек треба уводити пажљиво, ту мислимо да општеприхваћене конвенције. Колико год предавачу био јасан смисао израза $\log_3^2 x$, важно је одмах појаснити да је то договор за $(log_3 x)^2$ и користити једно време оба записа (што је важно и касније у тригонометрији). Синтагма ,,*корени једначине*" већини ученика ће зазвучати потпуно неприродно и, ако не нагласите да је реч о решењима једначине и објасните њено порекло, биће извор неспоразума (навикавањем на ову терминологију олакшаћете будућим студентима навикавање на појмове општег интеграла диференцијалне једначине или првих интеграла система диференцијалних једначина итд).

8. Предавач треба да избегава своје конвенције, јер ту може упасти и у стручне грешке (сетимо се примера са комплексним решењима квадратне једначине). Чак и ако их уводи, нема право да захтева од ђака да их поштује, нити да не признаје одговоре у којима те конвенције нису поштоване.

9. Клонити се ,,везивања за слова". Питагорина теорема НЕ гласи: $a^2 + b^2 = c^2$, већ

(уз толерисано поједностављење терминологије): (једна катета)^2+(друга катета)^2 =(хипотенуза)^2. У узрасту у коме говоримо природно је спонтано везивање за слова и стога се не треба либити оваквих језичко-математичких формула. Тада ће ђаци моћи да теорему користе сваки пут са текућим ознакама и неће се памтити бесмислене формуле за ,,Примену питагорине теореме на ромб" или ,,...на једнакокраки троугао". Таквих ситуација има много. И у тригонометрији правоуглог троугла дефиниција синуса је: sin(оштрог угла правоуглог троугла) = $\frac{\text{наспрамна катета}}{\text{хипотенуза}}$, а не $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Онда је лако ђацима да уоче да на било који оштар угао било ког правоуглог троугла могу применити речену дефиницију и врло брзо могу и сами открити да за два различита оштра угла истог правоуглог троугла важи да је вредност тригонометриске функције једног једнака вредности кофункције другог итд. итд. И у ситуацијама када морате да користите ,,нека слова" може се прибећи триковима, па формулу за разлику квадрата, рецимо, можете писати у облику $(\Box)^2 - (\triangle)^2 = (\Box - \triangle)(\Box + \triangle)$ или $I^2 - II^2 = (I - II)(I + II)$. О ефектности коришћења ,,кућица" $(\Box, \triangle)$ чију је употребу свесрдно препоручивао пок.проф.др Славиша Прешић биће још речи.

10. У школској пракси није редак случај да поједини ђаци неке ствари раде на начин коме се, са становишта исправности, нема шта приговорити, али који често изазива у најмању руку мрштење професора, а неретко и непризнавање одговора. Може то бити неки поступак који је ђак научио у ранијим фазама школовања и из разних разлога не жели да га се ,,одрекне" (типичан пример јесу основношколске технике решавања правоуглих троуглова са угловима $30^0, 60^0, 90^0$ и $45^0, 45^0, 90^0$ допуном до једнакостраничног троугла и квадрата, респективно, или памћењем готових формула за односе међу страницама, што се у средњој ,,замењује" употребом тригонометрије). Некада то може бити и као последица девизе ,,што је сигурно, сигурно је" као код ђака који ће тзв. ,,непотпуне" квадратне једначине радије решавати формулом него растављањем на чиниоце. Коначно, некад је и тешко одгонетнути зашто је ученику више прирастао к срцу начин рада који би требало да превазиђе (аутор овде из сопственог искуства наводи пример ученика који је сваки квадрат бинома $(a+b)^2$ упорно замењивао са $(a+b)(a+b)$ и множио ,,сваки са сваким" уз опаску да му је тако сигурније). На нивоу основне и средње школе сматрамо да се све такве ствари морају признати без поговора, али да се, од случаја до случаја, може радити (уколико се сматра да треба) на дестимулисању таквог начина рада. Најгоре што се може радити је да се шеме за ,,специјалне правоугле троуглове" прогласе погрешним (јер оне то нису), да ђаци остану у заблуди да се једначине рогобатног назива ,,непотпуне квадратне" не могу решавати формулом или да се формула за квадрат бинома дâ без објашњења - извођења. То нас враћа на приче из друге главе у којима су поједини

САТ апликанти тврдили да је ,,нешто могло тако да се ради у основној, а после више не” и разне друге ствари које су зарадили у деформисаном систему образовања.

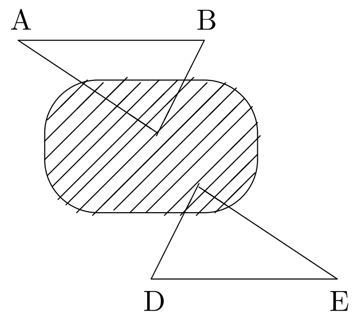
11. Аутор ових редова ће убрзо образложити своје залагање за делимичну легализацију ,,пушкица”, али је свакако важно при писаним проверама знања правити разлику између илегалног коришћења формула и преписивања од других (на класичан начин или коришћењем модерних ,,справица”). У другом случају реч је о варању и то се мора строго санкционисати, без поговора; у првом случају, кривица је неупоредиво мања јер, осим ако предавач није заглибио у репродуктивну наставу, употреба формула са папира уместо из главе не нарушава суштину процеса (о замкама у које се може упасти претераном употребом формула, кад су оне легалне, за све и свашта, биће речи на другом месту). У неким случајевима је и јако оптерећујуће за ђака ако мора да памти све предвиђене тригонометријске формуле или таблицу извода; формуле су нешто што је и ,,у животу” увек доступно,(о софтверима да не говоримо) ; битније је како их користити. Овде не можемо а да не поменемо анегдоту, премда је она везана за високо и више образовање, са појединих факултета где још није легализовано коришћење силних формула из статистике, и то баш у концепцијама где се оне дају набацано и логички неповезано, уз опаску дежурног: ,,користите формуле али тако да ја то не видим”. Иста ствар је и са употребом калкулатора. Аутор ће се на другом месту залагати за повремено дозвољавање калкулатора, али се и у случају његове нелегалне употребе то не може никако сматрати еквивалентним ,,кићењу туђим перјем”.

12. Оно за шта смо се залагли код матурских испита преносимо и на писане провере знања у школама: скидање ореола ексклузивности. Ђак мора имати могућност да сваки лош успех поправи, да сваки тест ради поново и да му се рачуна успех са поновног излажења (како је и на факултетима). По речима већ цитиране Јане Шевкушић, 14–огодишње списатељице, и деца имају право на лош дан, на нерасположење, на страх, на лошу организацију..., чак би требало да буду и повлашћенији у том погледу од студената и одраслих,а испада обрнуто. Мудар професор ту увек може изаћи у сусрет и у постојећем систему, а још би му лакше било кад би то било и системски подржано.

13. Коначно, додавање атрактивних и пажљиво бираних математичко-логичких задатака као ,,џокера” може бити вишеструко корисно - од подстицања креативног размишљања до привлачења ђака који бојкотују текуће градиво. О овоме више у следећој глави у којој ће аутор изложити своје *вјерују*.

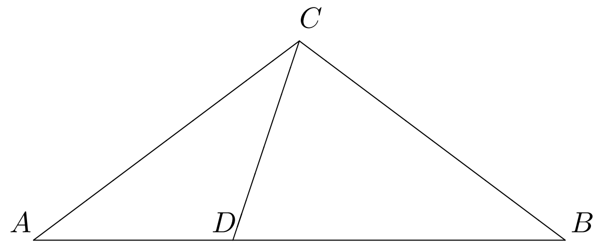
5.3 Како то може изгледати у пракси или један дан у земљи Троугландији

Покушаћемо сада на примеру неких тема I године средње школе да илуструјемо једном могућом варијантом обраде на часу како би све то могло да изгледа. Креативност, маштовитост и лична уверења предавача у таквој ситуацији максимално долазе до изражаја. У том смислу чак и исти предавач, зависно од одељења с којим ради, наслеђеног стања и великој броја ових или оних фактора, може врло вероватно на различите начине приступити истој ствари са различитим одељењима (исте године). То се подразумева, стога ово што следи има само снагу илустрације онога о чему смо до сада говорили, а не било какве препоруке. Почећемо примером увођења подударности троуглова које везујемо за I годину средње школе (та се тема ради и у VI основне, али смо већ коментарисали да јој тамо није место; мада, ако се већ мора, прича која следи може се презентовати и на том узрасту):
Једном давно постојала је земља Троугландија у којој су сва имања била у облику троуглова. Један становник те земље оставио је у опоруци својој двојици синова у наследство два таква имања за која је тврдио да су подударна (идентична, као ,,пресликана", copy - paste). Међутим, након извесног времена после очеве смрти, браћа посумњаше да су њихови поседи заиста подударни и одлучише да то мерењем провере (овде креће дискусија са ђацима, шта је по њиховом мишљењу довољно измерити за проверу. Искуство вашег приповедача говори да се сви листом одлуче за (све) странице троугла и да су у први мах сигурни да је сасвим јасно да је то доказ. На питање да ли би и мерење само углова било довољно кренуло је шаренило одговора и супротстављених мишљења. Врло брзо уверимо оне који дају потврдан одговор да два троугла са истим угловима не морају бити подударни, чиме испровоцирамо покоју самокритичку поштапалицу ,,Како сам глуп"(у нецензурисаном облику). Након дискусије о томе да ли рецимо два паралелограма морају бити подударна ако су им међусобно једнаке све странице, један део слушалаца почиње да сумња да ли је међусобна једнакост страница два троугла довољна за подударност. Ту је аутор ових редова замолио да за тренутак дискусија стане да би саслушали наставак приче, уз обећање да ће све убрзо бити разрешено).



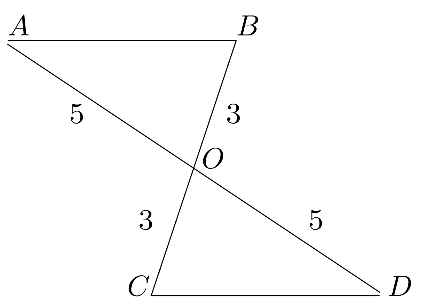
Увидом у стање на терену, које показује горња слика, постаје јасно у чему је проблем. Део имања и једног и другог брата је под мочваром, те браћа позваше мудраца Геометра да провере да ли се на основу оног што је доступно мерењу може проверити подударност. Геометарар није губио време. Измерио је најпре дужине страница AB *и* ED *и, установивши да су подударне, прешао на мерење углова (посебно справицом која се зове теодолит). Мерење је показало да је угао* A *једнак углу* E*, а угао код темена* B *једнак углу код темена* D*. Након тога је Геометар мирно склопио мерне инструменте и нестрпљивој браћи саопштио да су им имања идентична. Кад га браћа радознало упиташе како је то закључио, он им одговори да у геометрији постоји став (правило) УСУ по коме, ако су једна страница и два на њој налегла угла једног троугла подударни са истим тим елементима другог троугла, троуглови морају бити подударни; просто речено, ако су им те три ствари исте, исто им је и све друго. Задовољна браћа га након тога добро наградише .*

Став УСУ одабран је само ради ефектности приче, могао се сличном причом покрити и став СУС или какав други. Након што на овај начин заинтересујете аудиторијум за проблематику довољних услова за подударност, лако можете искористити пажњу и навести сва четири става подударности, међу којима ће се наћи и ССС о коме је већ било дискусије, док за став ССУ обавезно објасните зашто је важно не скраћивати његову формулацију (што многи касније нехајно чине) . Предлажемо у ту сврху пример једнакокраког троугла на чијој основици AB је узета тачка D која *није* њено средиште и уочавањем троуглова ADC и DBC који имају једнаке две странице и угао наспрам једне

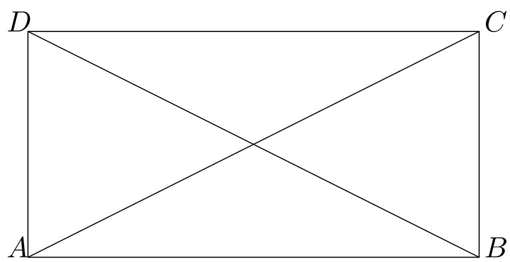


од њих, али очигледно нису подударни..

Да ли ћете ставове и доказивати или можда боље коме ћете их доказивати а коме не, ствар је ваше процене. У некој идеалистичкој варијанти наставе о којој смо говорили докази се могу оставити за одељења са већим бројем часова или за додатну наставу или се у писаној форми поделити заинтересованим ђацима. Свакако нема ничег лошег оставити доказе за нека друга времена; важније би у овом случају било разрешити дилеме око мерења страница и углова који се помињу у горњем примеру. Јер, ако то не урадите, ђаци се могу лако упитати зашто задатке на часу не решавамо мерењем, поготову кад нема мочваре, па можемо да бирамо. Ту треба бити тактичан. На примеру



видимо да је неко већ измерио странице ова два троугла и саопштио нам те податке, док за углове AOB и COD нам није потребно мерење - ми знамо да су они подударни као унакрсни (искусни предавач овде треба да нагласи да је дато да су тачке A, O, D на једној правој , као и B, O, C , без обзира што ће се ђацима то чинити беспотребно јер је ,,очигледно"). Након тога, можемо рецимо уочити троуглове ABC и ABD у правоугаонику $ABCD$.



Ми знамо да је $BC = AD$, као и да су углови DAB и ABC прави и, према томе, једнаки. Те елементе нема потребе мерити, јер да није тако, не би био у питању правоугаоник, дакле, наведене чињенице произлазе из дефиниције правоугаоника, друга ствар је прецизност цртања и мерења и ту треба направити јасну дистинкцију. Након што докажемо подударност речених троуглова, одатле сада, као последицу, можемо закључити да су дијагонале правоугаоника једнаке. На тај начин, врло брзо можемо доћи до ,,класичних" школских задатака на тему подударности.

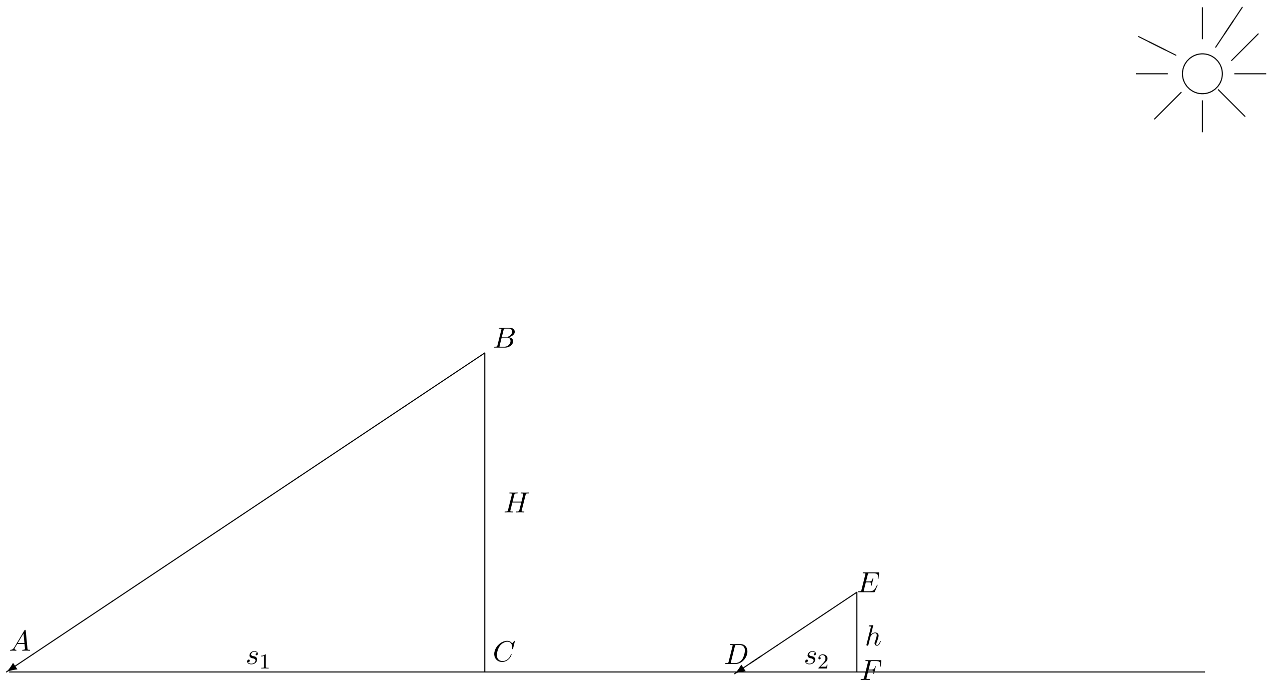
5.4 Како то још може изгледати у пракси или тригонометрија за почетнике

Када се, обично у I години средње школе ђацима презентују уводна поглавља о тригонометрији, под формалним насловом ,,Тригонометрија правоуглог троугла", прича у пракси обично иде овако :*Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена C, a и b катете наспрам темена A и B, редом, и c хипотенуза. Нека је α оштар угао код темена A. Тада је $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ итд.* На први поглед све је на месту и све је тачно.

Покушајте, међутим, да се поставите у улогу некога ко има 15 година и први пут чује за овакве ствари. Хоће ли му ово изгледати природно? И немојмо се при томе позивати што се, у бављењу математике на факултету, ствари некада заиста уводе декретом, без јасно дефинисаног мотива у првом тренутку. Овде се ради у општем образовању 15-огодишњака и ту нема места таквој линији мањег отпора. Зашто би неко делио странице троугла (тачније, мерне бројеве њихових дужина), шта се тиме опипљиво добија - обично је прва недоумица слушалаца који промишљају оно што чују. Много већи проблем је, међутим, то што се у оваквој дефиницији већина веже за угао α , па се онда збуне када се помену и тригонометријске функције угла β (ово ђачко везивање за одређена слова смо већ разрађивали раније), али најбитнија ствар је што ће вероватно само малобројни схватити да вредности тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла *зависе само од величине (мере) тог угла, а не зависе од дужина (мера) страница правоуглог троугла чији је то оштар угао.* . Оваквим увођењем тригонометрије само су формално испуњени захтеви програма; у бити је то за већину увођење у ,,тамни вилајет" који ће после, са уопштењима и убацивањем у игру и тригонометријског круга, постати још црњи и гори. Свако помињање тригонометрије у каснијим темама градива наредних година, као и у другим предметима (физици нпр.) многим ђацима представља већ само по себи обично извор стреса. А професори по правилу не могу да се начуде откуд то...

Хајде да видимо, у кратким скицама, како би могла изгледати цела прича узимајући у обзир основна начела методике наставе математике и аналитичког учења: повезивање са претходним градивом, уочавање у том градиву проблема који доводе до изградње нових појмова и, у складу са тим, њихово увођење на природан начин који ће ученику бити јасан и тиме имати шансу да постане део његове емпирије.

Кренимо од проблема мерења висине дрвета или стуба, углавном објекта чију је висину релативно неудобно мерити директно. Ту одмах евоцирамо причу о сличности троуглова која је на том узрасту позната, али је није згорег детаљно поновити. Од полазног објекта и његове сенке, као и неког штапа постављеног у близини чију дужину лако меримо и његове сенке (уз јасне апроксимативне претпоставке нормалности објекта и штапа у односу на подлогу, ,,равног,, терена и паралелности сунчевих зракова) формирамо два слична троугла одакле пропорцијом можемо лако доћи до жељене мере: $H : h = s_1 : s_2$. Иако врло ефектан начин, коришћен још у античкој геометрији (Талес је измерио висину Кеопсове пирамиде чекајући тренутак кад је сенка штапа била једнака његовој висини,тј. чекајући једнакокрако-правоугле троуглове), ипак има нека ограничења: шта ако нема Сунца, ако пада киша, ако је дрво у густој шуми где и друга стабла праве сенку итд.итд.



Пажљивим анализирањем горње приче, у смеру који ће неосетно да води искусни предавач, закључићемо да је троугао сличан оном који граде објекат и његова сенка могао да се прави и на земљи, песку, папиру...само је важно да има исте углове као ABC и ту је предност коришћења паралелности сунчевих зрака где смо лишени главобоље мерења углова. Ако пропорцију из горње приче напишемо у облику $H : s_1 = h : s_2$ (*) , можемо рећи да нам је у том другом сличном троуглу који ми правимо довољно знати однос катета да бисмо мерећи дужину сенке s_1 израчунали непознату висину H.

Стога проблему можемо приступити и овако. Хајде да, одређености ради, (оштар) угао наспрам странице H назовемо α. Замислимо сада да смо ,,у доколици" конструисали (на папиру, земљишту, гдегод) низ правоуглих троуглова DEF у којима мера осхтрог угла код темена D узима све целобројне вредности од 1^0 до 89^0 (уз јасну могућност да поделу касније уситњавамо по жељи, убацивањем у игру минута и секунди). Ако меру угла α оригиналног троугла апроксимирамо на целе степене, тада ћемо у овом низу троуглова пронаћи троугао сличан нашем, а онда из рецимо (*) израчунати H.

У првом тренутку и ово изгледа неудобно. Тӗ морали бисмо имати цртеже 89 различитих троуглова (обратите пажњу да при њиховој конструкцији водимо само рачуна о вредности углова, не и страница, захваљујући сличности), па онда издвојити онај који нам је потребан, па мерити... Али, ако још дубље размотримо ствар, нама и нису потребни цртежи тих троуглова нити мерни бројеви њихових страница, већ само *однос* *катета* (погледајте (*)). Стога причу можемо релаксирати тако што ћемо свакој целобројној вредности угла α од 1^0 до 89^0 доделити број и то, одређености ради, рецимо однос *насправне и налегле катете*. Тако добијамо табелу:

мера угла у степенима	однос насправне и налегле катете
1^0	0,017455
2^0	0,034921
...	...
89^0	57,289962

Сада се већ лакше дише. Дакле, измеримо у нашем троуглу вредност угла код темена A (справицом која се зове *теодолит*) и дужину сенке s_1, затим нађимо из табелеречени однос за нашу вредност угла α. Ако очитани број из табеле означимо са b, из (*) непосредно добијамо $H : s_1 = b$, одакле је лако наћи непознато H.

Пажљиви слушалац ће се, пре или касније, ипак побунити. Ако нам је и овде потребна сенка дрвета, значи да су испуњени сви услови (сунчан дан, одсуство објеката који сметају уочавању сенке...) да се измери и сенка неког штапа у почетној верзији решења проблема, чему онда беспотребно компликовање?

Ту писац вади кеца из рукава: а *зашто би уопште AC морала бити сенка?* Зашто се не бисмо могли од подножја C удаљити, идући по подлози, за *произвољну* дужину CA и затим из тачке A теодолитом измерити угао BAC (каже се: угао под којим се дуж BC види из тачке A), а онда радити све као у претходном пасусу? Ту је поента приче и корист коју нам овакав приступ може донети. Сада можемо и по киши и другим ометајућим факторима испунити наш задатак (а касније, у II години средње, моћи ћемо то урадити и за неправоугли троугао, кад је BC нагнуто у односу на подлогу под неким углом који је могуће измерити).

Након што је пробој направљен следи паковање приче у теоријски оквир. Најпре, договоримо се да однос насправне и налегле катете оштрог угла правоуглог троугла назовемо *тангенсом* тог угла (о разлозима за овакво име треба сачекати II годину), у ознаци $tg\alpha$. У неким другим ситуацијама значиће нам да знамо и однос насправне катете и хипотенузе или налегле катете и хипотенузе. С обзиром да међу страницама правоуглог троугла важи добро позната релација (Питагорина теорема), ,,бољим" ђацима може бити јасно да је један однос довољан (тј. да из односа катета може да се нађе и однос сваке од катета са хипотенузом), што ће убрзо значити да из једне тригонометријске функције угла α могу да се нађу остале. Пошто минималност овде није циљ, направићемо табелу свих могућих односа; није тешко пребројати да их има 6 и даћемо им редом имена $\sin\alpha$ (однос наспрамне катете и хипотенузе), $\cos\alpha$ (однос налегле катете и хипотенузе), итд. Овде ћемо дакле у први мах укључити и $\sec\alpha$ и $cosec\alpha$ за које ћемо одмах рећи да их у пракси ретко користимо.

Тако долазимо до официјелне приче коју сада ученик може са разумевањем пратити. Сада ћете лако извести да комплементни углови имају својство да је тригонометријска функција једног једнака вредности кофункције другог; лако ћете извести основне релације међу тригонометријским функцијама истог угла (из Питагорине теореме, дељењем квадратом хипотенузе, непосредно се добије $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$; једноставно се изведу и остале). На крају баладе може се оставити наговештај њених ограничења и даљих уопштавања (на углове који нису оштри): нпр. ако, ради лакшег разумевања, фиксирате налеглу катету и ,,пустите" да угао α расте и *тежи* правом углу, тада наспрамна катета расте и ,,све је ближа" хипотенузи (њихов однос, који је $\sin\alpha$, тежи 1) итд. , све на нивоу интуиције у датом тренутку, наравно.

6 АУТОРОВО ВЈЕРУЈУ или о деди који није успео да фотографише свог унука

Време писања ових редова (јул 2017) поклапа се са ауторовим одмором који породично проводи на једном живописном језеру. И баш данас поподне били смо сведоци једног на први поглед не нарочито занимљивог скеча на плажи који се некако наметнуо као лајт-мотив ове кључне главе у којој аутор планира да изложи своје *вјерују*. Не треба то сматрати неком нарочитом коинциденцијом, пре чињеницом да се инспирација за многе ствари (па и математичке и методичке) често лако налази у свакодневици, ако су нам чула довољно изоштрена, а ми својој причи довољно посвећени.

Елем, данас поподне, један старији господин који је са унуком дошао на брчкање, пожелео је да добрим фото-апаратом забележи тренутке боравка малишана на језеру. Али дечкића, који је већ испољавао знаке нервозе, никако није успевао да наговори да заузме позе које је деда замислио. Преговарање је трајало прилично дуго, деда је у почетку стрпљиво давао инструкције типа ,,...стани ту и ту", ,,...намести се тако и тако, па погледај тамо...", а дечак се упорно бунио, окретао леђа и доследно бојкотовао идеје свог деке. На крају је господин, уз неизбежна гунђања о данашњем накарадном васпитању, морао да одустане. Међутим, ни једног тренутка му није пало на памет да направи бар једну спонтану фотографију, да овековечи унука баш у том (не)расположењу у коме се налази.

Цела ситуација нас је одмах асоцирала на поенту наше приче. Процес калупљења, каналисања, шаблонизовања, типизирања...којом год од ових (ружних) речи то назвали, одвија се перманентно над децом, додуше не само у образовном процесу и не само од стране наставника, али је гушење аутентичности и индивидуалности без сумње кључни проблем нашег образовања, што дабоме значи и математичког образовања. Без обзира да ли се то ради свесно или несвесно, без обзира да ли је праћено строгошћу и неприступачношћу професора или камуфлирано његовом љубазношћу и солидарношћу, процес обучавања у математици претежно је трансфер чињеница при чему се не настоји да су у слушаоцу побуди мотив и интерес нити да му се у појединим фазама препусти кормило да се види како ће управљати и до чега ће доћи. То се обично правда недостатком времена и обимношћу програма у коме такви маневри имају тежину искакања из реда вожње. У питању је, међутим, често и недостатак воље предавача да еквилибрира између захтева програма и креативног приступа. Стога се цела прича по правилу завршава у ex cathedra жабокречини где ученици усвајају чињенице које им се не чине ни природним ни логичним ни нужним у животу и које на тај начин не налазе место у њиховој емпирији. Све то је суштински противно духу математичке делатности уопште. Математичке зграде појединаца нису исте нити типизиране - иако конструисане по математичким принципима, свака је лични продукт свог власника, његова креација и његовог ума дело, са распоредом и детаљима само њему блиским, и само је он може употребљавати, а здање било ког другог не може доживети као своје нити се осећати у њему природно. Предавач је ту да процес изградње такве зграде надгледа и да, примерено узрасту, власнику препушта да је обликује саобразно својим хтењима. При томе предавач не сме да упада у замку да саветује друге да се угледају на његову конструкцију, или, још горе, да се згражава над нечим што му се не свиђа код других - ако то није нарушило принципе по којима се гради. А и у случају нарушавања принципа, боље је некад и на кратко пустити власника да ради по своме, а затим га на време навести да сâм увиди где је и како нарушио стабилност свог математичког здања и какве последице то може имати, него брже - боље узети ствар у своје руке. (на овом месту препоручујемо пар занимљивих ситуација описаних у литератури у којима је дошла до изражаја супериорност несспутаног ђачког размишљања над професионално-математичким, о чему можете прочитати у Додатку II на крају рада). У супротном, ако ученику неко други гради математичку зграду, он се у њој не може осећати као домаћин. То нужно води непрепознавању ситуација у којима се њени садржаји могу користити, дакле потпуну непримењивост и нефункционалност знања на чије се стицање потроши огромно време (о новцу и буџету, и државном и родитељском, и да не говоримо).

Након свих запажања, дијагностификовања и критика постојећег стања у основном и средњем образовању и наговештаја у последња два одељка како би то могло да изгледа у једном здравијем систему, а додатно мотивисани добронамерним дедом и бунтовним унуком (чију бунтовност, за разлику од деде, доживесмо као врлину), дошао је тренутак да аутор у овом кључном поглављу искаже своје *вјерују*. У редовима који следе аутор ће сажети и на једном месту окупити и прецизно формулисати све идеје и предлоге за које се залагао у претходним поглављима. При томе ће искуства која је стекао у професионалном раду користити као аргумент одбране својих ставова, али се неће либити ни у једном тренутку да те ставове у аргументованој дискусији увек изнова критички размотри, што ваљда и јесте одлика сваког интелектуалног делања.

Више пута смо поменули појам *аналитичког* учења насупрот *формалном*. Хајде да, на основу свег изложеног, покушамо да их дефинишемо. Напоменимо најпре да и један и други тип учења посматрамо са два аспекта: обучавање математичке делатности (од стране предавача) и усвајање нових садржаја (од стране ученика). Под формалним обучавањем (синоним је и: наменско обучавање) математике подразумевамо процес у коме предавач излаже градиво као просту суму чињеница класификованих у лекције и подучавање своди на скуп инструкција ученицима како да испуне захтеве (ураде задатке) које ће (он или неко други) дати као део образовне процедуре. Под формалним усвајањем математичких садржаја подразумевамо процес у коме ученик математичке садржаје доживљава и користи као скуп алгоритама које ваља запамтити, разликовати и применити у решавању задатака. Формално учење није нужно пуко репродуктивно учење или учење по шаблону; оно може у себи имати, у већој или мањој мери, и логичко повезивање чињеница, али само у оној мери у којој то утиче на лакше меморисање инструкција за рад. У формалном учењу се сусрећете са ученичким јадиковањем када се у задацима из једне лекције појаве чињенице из неке раније или, не дај боже, из градива неке раније године, па професорима меког срца некад измаме обећање да у нпр. стереометријским задацима III године ,,неће бити тригонометрије" или да у сређивању ирационалних израза (II година средње) ,,неће бити кубова" (ово је у комуникацији ђак-професор конвенција за: неће бити формула за збир и разлику кубова нити за куб бинома). У формалном учењу дешава се да ђаци не могу да се начуде откуд се у геометрији појављује квадрат бинома (,,нисмо знали да се $(a+3)^2$ и у геометрији ради по формули, мислили смо да то овде не мора, већ једноставно $a^2 + 9$ "), да се тврди да се задаци из процената морају радити преко пропорција или да се (о чему смо већ причали) $(557+443)^2$ до VII основне ради као 1000^2, а после ,,мора по формули за квадрат бинома".

Насупрот овоме, *аналитичко* учење (и са становишта предавача и са становишта ученика) је процес изградње математичке зграде у коме се, након изградње полазних темеља (ослањањем на емпирију, процес који се пре свега везује за ниже разреде основне школе), даље поступа на следећи начин:

- у постојећој конструкцији уочавају се проблеми или нерешена питања која представљају мотив за увођење нових појмова;
- приступа се изградњи нових делова математичке зграде на основу јасног мотива, уочава се ефектност у решавању питања која у до тада изграђеној структури нису решена (чиме се омогућује поступни прелазак нових знање у емпирију ученика, за шта је нужно потребно извесно време и искуство), врши се уопштавање, апстраховање, теоријска формализација, прављење модела...
- нови садржаји уграђују се у математичку зграду на основу свог значаја и улоге, чиме цела конструкција функционише са новим могућностима ; нова компонента не може се посматрати нити функционисати изоловано, чак ни огрнута у рухо неких из нужде изабраних ранијих садржаја ;
- јасно се одређују домети нових знања, шта се њима може, а шта не може решити; тиме се прави наговештај даљих екстензија

У пракси, како ништа није црно-бело, могуће су и конгломерати (мешавине) , али и комбинације : аналитичко подучавање и формално усвајање садржаја или обрнуто. У првом случају обично се ради о ситуацији где су ђаци, у ранијим фазама школовања, већ дубоко зашли у замке формалног учења да се, по инерцији или из страха, и даље држе старих навика и аналитички приступ предавача конвертују у свој ,,формални" језик. Ово је прилично чест проблем са којим се добри предавачи сусрећу, чак и у старијим разредима основне школе (сетимо се примера из прве главе); могућности његовог превазилажења ствар су дубље анализе. Обрнута ситуација (формално подучавање, аналитичко усвајање садржаја) је ређа и тешко да се ту ради о чисто аналитичкој изградњи математичке зграде; али, на темељу сопственог талента, креативности или екстерних извора подучавања, могуће је и тако нешто.

Аналитички приступ, у овом тренутку није подржан ни од стране просветних власти, ни од стране уџбеника ни од стране професора - предавача. Колико год се декларисали као поборници школовања у коме ће ђаци стицати функционална и примењива знања и уграђивати математичке вештине у сопствено искуство, сви актери се понашају заправо супротно и ако читаоца до сада нисмо уверили у то, онда боље да дигне руке од ових писанија. Сваки појединац (било као део просветних власти било као писац литературе било као предавач у школи) који настоји да у пракси покрене зарђале точкове образовне машинерије, већ добро зарасле у коров и прекривене паучином, остаје само усамљени Дон Кихот чији труд без пô муке однесе матица већине.

У некаквом врлом новом свету, али схваћеном у позитивном (а не Хакслијевом) смислу, аутор ових редова види учење математике као процес у коме институционална и законска решења омогућују аналитичко учење, поштују индивидуалност, тако драгоцену особину деце коју је важно чувати у што је могуће већој мери, а у процесу вредновање знања у највећој могућој мери искључују елементе стреса и треме. То, по ауторовој визији значи следеће:

1. Математичке садржаје у нижим разредима основне школе концептуирати пре свега као рад са природним бројевима и изабраним геометријским појмовима, полазећи у оба случаја од емпирије и опажаја, а затим уопштавајући и апстрахујући у мери и на начин примерен узрасту. Проблемске задатке (популарно зване ,,текстуални задаци"), осим оних елементарних, треба оставити за додатну наставу, користити их као ,,џокер" задатке у проверама знања и за интерна одељенска или међуодељенска такмичења. Тиме ће се елиминисати извор првобитног ученичког страха од математике испољен у често и паничној немоћи да схвати задатке од којих му зависи оцена. Тиме ће се елиминисати и први стимулус учења напамет када деца запамте да ако ,,суму од 420 динара треба поделити између Аце и Беце тако да Беца добије 6 пута више него Аца", тада је потребно 420 поделити са 7 (,,увек за 1 више него што пише") и да не настављамо даље са овим тужним причама. Методика за тај узраст нуди разне методе; реченом примеру одговара тзв.метода дужи, али у нашем случају она подразумева висок степен апстракције - задатак са дељењам канапа ћете лако објаснити преко дужи, али за новац је много теже. Деци се то учини као велики залогај и радије се држе неке шеме која им улива сигурност. Ослобођени притиска да овакви задаци ,,утичу на оцену" деца ће бити далеко пријемчивија за размишљање и неће се плашити ако ,,не иде од прве". Подразумева се да задатак који је проблемски у неком узрасту може постати редован у каснијем узрасту - то су ствари које процес учења природно у себи садржи.

2) На узрасту од V основне до краја средње школе аутор сматра да треба успоставити систем: обавезан фонд часова + додатни фонд по избору. Обавезан фонд би обухватао оно за шта се договоримо да су основна знања, додатни би значио екстензију тога у смислу и продубљивања садржаја основног фонда, али и додатне теме. На крајевима

тог ланца стајале би (у овом тренутку скоро угашене) опције додатне наставе (за посебно надарене и заинтересоване) и допунске наставе (за оне којима је и потребна и додатна помоћ). На почетку V разреда би систем свакако био мање флексибилан, са мањим варирањем броја часова и наглашенијим опцијама додатне и допунске наставе, да би на старијем узрасту пружао све веће слободе око избора фонда часова. Ауторова визија подразумева пуну либерализацију у смислу да ђак бира опције (у свету се у те сврхе често раде Diagonostic тестови) и да у одређеним тренуцима и ,,мења подешавања" ако то жели . Циљ је да сваки (или скоро сваки) ученик може да формални оквир учења у највећој могућој мери прилагоди својим потребама.

3) Редовне стандардизоване тестове *општематематичке културе* на свим нивоима образовања од V основне до краја средње школе; тиме би се проверавала стабилност и функционалност математичких знања појединаца независно од текућег градива. Ови тестови би свакако улазили у завршну оцену; могли би садржавати и задатке једнаке тежине и задатке градиране по тежини. Пример таквог теста на крају овог рада, у Додатку III, не претендује да буде репрезентативан, између осталог и зато што му је намена да дијагностификује неке аномалије у садашњем систему, на основу ауторовог искуства.

4) Процес обучавања (од стране предавача) мора бити контролисан и у стручном и у методичком смислу од стране стручних тела. У овом тренутку над тим процесом не постоји никаква системска контрола; повремене ,,инспекције" само су редак инцидент у коме се по правилу ништа суштински не утврди. Одсуство контроле с једне и немотивисаност (а некад и нестручност) предавача с друге стране процес обучавања математике чине инвалидним и претварају га у формално учење, системски стварајући личности са непотпуним и неупотребљивим знањем. Контрола предавача би значила:

- контролу рада у учионици,а што се може остварити на разне начине: обавезним електронским презентацијама предавача или видео снимцима предавања у учионици; иако ово последње можда звучи орвеловски, и једна и друга форма би омогућиле не само контролу процеса, већ би олакшале ђацима савладавање градива и ако нису били присутни на одређеном часу или им градиво није било довољно јасно. Подсећамо да смо неке стручне и методичке грешке професора изложене претходно у овом раду открили управо на електронским презентацијама; с друге стране, видео снимци предавача нису реткост у свету, неки су доступни и на интернету без ограничења.

- редовне тестове *стручне математичке културе* намењене професорима у којима би се перманентно проверавала њихова стручност. На крају овог рада, у Додатку III стоји пример таквог теста, формиран на основу изабраних заблуда и грешака на које је аутор ових редова наилазио у комуникацији са колегама. С тим у вези може се дискутовати и о увођењу лиценце за рад и других начина да се квалитет наставе држи под контролом.

5) Проверавање знања, исто као и процес обучавања, треба да води рачуна о индивидуалности. То између осталог значи да институционално треба обезбедити да се сваки лоше урађен тест може поправити, да је сваки писмени или контролни задатак могуће радити поново (попут испита на факултету), уз нека разумљива ограничења, при чему ће се вредновати најбољи резултат. У пракси и сада неки савесни професори оставе један ,,предчас" (уобичајено неисправан термин за ,,претчас" по законима нашег језика) током школске године за све који желе да неки од ранијих тестова раде поново. Ово се односе и на матурске испите у којима ексклузивност датума за текућу школску годину многим представља извор стреса и знатно утиче на резултат; преласком на либералнији систем више рокова та врста ометања би се значајно смањила.

6) И у редовним проверама знања би, као џокер задатке, требало увести математичко-логичке, па и чисто логичке задатке, не само ради релаксирања целог процеса, већ и привлачења оних ученика који бојкотују редовне програмске садржаје. Примере неких таквих задатака такође дајемо на крају овог рада у Додатку I.

7) При оцењивању писмених и контролних задатака из текућег градива важно је имати слуха за ђачки доживљај стечених знања, награђивати креативност (а не дестимулисати оно што није урађено ,,као на часу") чак и ако је изашла из оквира строге математичке утемељености (где је сваки пример прича за себе, свакако), тражити и стимулисати све што је показатељ доброг размишљања, а на време уочавати пропусте и погрешно интерпретиране чињенице. У целом процесу поштовати ђачку аутентичност и оригиналност; нарочито на нижем узрасту је важно не дестимулисати, макар и несвесно, изразе дечјег размишљања или наивног закључивања, већ их пажљиво усмеравати. Увек имати у виду да слушаоци не морају знати (а када први пут чују и не могу знати) разне фразе и поштапалице које су уврежене у математичком свету (...три тачке које не припадају једној правој, корени једначине...), па могу текст задатка схватити другачије него што сте замислили или га уопште не разумети; могу мешати стечене математичке вештине са емпиријском индукцијом итд итд, али све такве ствари су показатељ позитивне чињенице да се размишља својом главом, насупрот ,,идили" у коме сви раде исто, као да је математика хорско певање.

8) Колико год треба строго санкционисати ,,варање" чије се могућности у данашње време све више повећавају, толико треба, по мишљењу аутора, попустити кад су у питању званично нелегалне ствари али које не значе ,,кићење туђим перјем" - ,,пушкице" и калкулатор. Аутор овде понавља своје (у претходним главама већ образлагано) залагање за легализацију ,,пушкица" како би се процес учења лишио сувишног памћења нужних готових резултата. При томе смо свесни да би коришћење готових формула и чињеница могло лако да се злоупотреби и да се шаблонима замени оно што је природно да ђак сâм изведе; типичан пример јесу подсетници које каткад ученици праве за површину и запремину призми и пирамида где за сваку ,,врсту" пирамиде пишу формуле за површину и запремину, као и ,,све Питагорине теореме" (из правоуглих троуглова који се стандардно у тим телима уочавају), чиме се свакако цела прича деградира. Стога би употреба формула морала бити контролисана рецимо тако што ће предавач одлучити које чињенице могу ђаку бити доступне током провера (па их држати на зидовима кабинета као паное или делити ученицима након пређених партија и дозволити њихову употребу приликом тестирања). Тада би дошла до изражаја и позитивна страна ове приче - наиме, слушаоци би били у поседу не само сажетака текућег градива, већ и раније пређеног, чиме би се дао додатни стимулус аналитичком учењу математике које, по својој природи, искључује наменски и лекцијашки приступ. Слично је и са употребом калкулатора - бесмислена је (сада важећа) његова потпуна забрана при проверама знања. Тако се ствара парадокс да и старији ђаци који вешто раде на рачунарима не знају како на калкулатору да израчунају логаритам или да подесе јединицу за мерење углова код рачунања тригонометријских функција. И овде се залажемо за контролисану употребу у смислу да предавач одреди на којим тестовима се он сме користити, на којима не. И ту је могуће спречити злоупотребу ове алатке, али поново пледирамо да се кршење таквог договора не санкционише једнако строго као ,,преписивање".

9) Аналитички приступ настави математике подразумева и разне друге форме које су у данашњим навикама незамисливе попут практичне наставе, пројеката, задавања проблема за размишљање, тимског решавања изабраних сложенијих захтева... Читалац ће можда помислити да је и аутор ових редова склизнуо у празну фразеологију : каква практична настава је могућа у школској математици? Таквом скептику предлажемо да потражи негде у близини какво осушено стабло и да са ученицима (VIII разреда или III године средње школе) покуша да израчуна колико ,,кубика" (кубних метара) грађе од њега може добити. Ако је дрво равномерне ,,дебљине", можемо га апроксимирати (правим) ваљком за чију запремину су нам потребни полупречник и висина. За одредјивање полупречника довољно је понети са собом пантљику коју у животу (неисправно)

зовемо ,,сантиметар", измерити ,,струк" дрвету (обим круга), па одатле извући тражени податак; за одређивање висине дрвета може се користити сличност или тригонометрија, зависно од узраста на коме се ради (видети пример из одељка 5.4 ,,...тригонометрија за почетнике"). Уколико користите тригонометрију, што је свакако за препоруку ако узраст дозвољава, морате имати и теодолит ради мерења углова. Касније причу можете зачинити и рачунањем цене по којој ту дрвену масу можете продати итд. Ако је циљ аналитичког учења математике тај да она постепно ,,прелази у емпирију појединца" (термин проф.др Гојка Калајџића), онда је јасно да је невезивање математике за свет око нас само последица поимања ове науке онако како је данашња школа приказује. Велика већина тема основне и средње школе може се осветлити и тестирати кроз практичне примере, пројекте или проблемске теме за самосталан рад. ,,Неверне Томе" упућујемо на поглавље 11 о линеарним једначинама са параметрима где ће се видети природни мотив за увођење и интерпретацију овог, на први поглед, апстрактног појма из градива I године средње школе.

10. Коначно, коришшћење софтвера у процесу наставе математике је тема која није разматрана у овом раду само из разлога што су значај и могућности које се ту отварају широко поље и тема многих других стручних радова. Оно што је за нас у овом контексту битно је да то може и те како бити катализатор процеса аналитичког учења математике. Довољно је само демонстрирати процес рецимо ротације трапеза око нпр. веће основице за 360^0 где ћете симулацијом тога на рачунару далеко лакше навести ђака да уочи тело које настаје (што је лако касније формализовати у пројекцију на папиру и уопштити на друге примере те врсте) него што бисте то урадили помоћу ,,штапа и канапа" на шта смо често и дан-данас принуђени.

————————

У наредних неколико глава даћемо наше предлоге и сугестије око обраде неких кључних тема из елементарне аритметике и алгебре за која је аутор ових редова установио у пракси забрињавајуће помањкање разумевања суштине. За разлику од геометријских тема о подударности троуглова и увођењу тригонометрије где смо дали симулацију могућег предавања деци на часу, сугестије које следе намењене су предавачу, зато су и дате у виду скица и различитих могућих путева. Надамо се, међутим, да ни читаоцу другог профила, ако нас је већ пратио довде, неће бити незанимљиве.

7 ПОЈАМ ПОЛИНОМА или како математика помаже пчелама у кошници

Појам полинома уводи су по садашњим програмима у VII разреду основне школе и представља први дубљи корак у алгебру у процесу математичког образовања. Програм налаже да се уводном темом ,,Алгебарски изрази" (у оквиру које ће се давати изрази са променљивим уз захтев да се израчуна њихова бројевна вредност за дате вредности променљивих) направи одскочна даска у област у коме ,,резултат задатка" неће више бити број, већ сређен алгебарски израз. Колико год предавач аргументовао правила сређивања (која се у тој фази заснивају на комутативном и асоцијативном закону за сабирање и множење, као и у великој мери на дистрибутивном закону множења према сабирању), већина ђака рад са полиномима доживљава као мисаону игру (што само по себи није обавезно лоше)у којој се увежбавањем може постати вешт играч, али уз неизбежно ,,...зашто ми ово уопште учимо и шта ће нам то у животу". Стога професори обично, након изложених правила игре и довољне обуке, пређу што пре могу на решавање једначина које се, применом тих правила, своде на линеарне једначине са једном непознатом. Тиме су деца нађу на познатом терену и на тај начин ваљда буду уверена да цела теорија ипак има неку примену.

Не можемо на овом месту а да не напоменемо да је схватање математике као мисаоне игре (игре симболима) једна од струја у филозофији математике о чему овде сада није место говорити; али чињеница је да математика на целокупном распону узрасту који овај рад обрађује настала као резултат уопштавања и апстраховања праксе и искуства, да је самим тим нужно везана за конкретне ситуације и свет око нас; ми је ,,нећемо предавати историјски како је настала" (др Гојко Калајџић) , али ћемо, следствено, ако се осврнемо, лако наћи моделе за садржаје о којима причамо деци.

Стога предлажемо да за тренутак фокус наше приче преселимо у Медоград чији су житељи пчеле и где је на снази кућни ред по коме свака пчела у кошници има обавезу да током јутра, поред свог редовног оброка, направи још 3 грама меда, при чему цела заједница треба да матици остави 50 грама за доручак; поподне је норма 5 грама по радилици, уз апетит матице од 70 грама. Коначно, у вечерњим сатима пред спавање, свака радилица има медну вечеру где у просеку поједе по 2 грама меда, док матица прескаче вечеру. Колико грама меда је дневна прозводња сваке кошнице?

Наравно, посвећени слушалац одмах ће рећи, с правом: на питање је немогуће одговорити, не зна се број становника кошнице. И ту је, без сумње, у праву - подаци из текста нису довољни за нумеричко решење ове приче. А и како би? Прича се односи на произвољну кошницу, а број становника кошнице је променљива величина- то зна сваки пчелар, негде их је више, негде мање. Значи ли то да из овог текста ама баш ништа не можемо извући? Могли бисмо, свакако, за сваку кошницу појединачно израчунати дневни принос меда: ако кошница има, примера ради, 1000 житеља, на основу приче резултат би био

$$(3 \cdot 1000 - 50) + (5 \cdot 1000 - 70) - 2 \cdot 1000$$

; ако у кошници обитава 12356 пчела све бисмо исто тако радили стављајући тај број у претходни израз уместо 1000 и тако даље и тако даље. Заметан посао, признаћете, за неког ко би требало да рачуна медни приход од кошнице до кошнице.

Предлажемо стога да поступимо овако: ако број становника сваке кошнице, будући да је променљива величина, обележимо са x (или било којим другим словом), горња прича даје неку врсту обрасца (формуле) за рачунање приноса:

$$(3x - 50) + (5x - 70) - 2x$$

што је већ само по себи корисно јер сажима целу причу у језгровит и јасан математички запис у коме само треба x сваки пут заменити податком за конкретну кошницу. Поставља се, међутим, питање: а може ли се наведени израз некако упростити? Упростити у универзалном смислу, тако да то упрошћење важи без обзира на то колико је x (тј. да важи за сваки x) ? На овом месту треба само поновити комутативни, асоцијативни, дистрибутивни закон; без обзира што још нисмо зашли у формалну причу о полиномима, сва апаратура потребна за процес који следи је доступна, а убрзо ће се она лако уопштити и снабдети одговарајућим називима. Тако ће се лако доћи до израза

$$6 \cdot x - 120$$

који је једнак горњем *за сваку вредност променљиве* x. То значи да некакав рачуновођа Медограда сад може у овом сређеном изразу замењивати x бројем житеља сваке кошнице понаособ, што му је далеко лакше за рачун (без обзира да ли ради ,,ручно" или калкулатором) , а увек ће добити исти резултат као и кад би радио почетну калкулацију. Штавише, ако сматра корисним, може, користећи закон дистрибутивности множења спрам сабирања, написати резултат и у облику $6(x - 20)$, што се некад може показати и још комфорнијим: за кошницу од 1000 пчела лако ће добити резултат од 5880 грама меда, дакле скоро 6 килограма дневно.

Претходна прича је, разумећете, импровизација и као таква не мора да садржи реалне податке нити да узима у обзир и друге променљиве које утичу на резултат (попут доба године итд.). Она је направљена ad hoc , али је важно да има поенту и уверљивост о корисности увођења израза са променљивом и даљих формализација око њихових сређивања. Предавач може увек направити реалнији и деци на том узрасту можда још ближи пример; али и овај је сасвим довољан да их ,,придобијете" за тему коју планирате да разрадите. При томе ви уопште не ,,варате" нити сте слаткоречиви без покрића: увођење израза са променљивом заиста је мотивисано баш описаним разлозима, проблем је само што је данашња концепција наставе на то потпуно заборавила. Сада, искористивши кредит и поверење које сте стекли, можете дефинисати какве изразе са променљивим зовемо полиномима. Ту ћете имати ограничења у погледу рачунских операција, али и екстензију у смислу чињенице да може постојати и више независних променљивих. Увешћете надаље појам монома, сличних монома, сабирање (и одузимање) сличних монома итд. итд., а сва правила у раду са полиномима базирати на раније познатим (а сада поновљеним) законима за сабирање и множење и чињеници да они важе за било које бројеве, што значи и за било које вредности променљивих у полиному.

8 ПОЈАМ ФУНКЦИЈЕ или хајде да се играмо погађања

Појам функције се, по садашњем програму, уводи у VII разреду основне школе и прича која следи може се сматрати погодном за тај узраст, али и за старији, будући да се и у наредним годинама школовања овај појам, један од основних у математици, понавља и надограђује. При томе, парадоксално, иницијализацији самог појма се најмање поклања пажња. Ту тврдњу можете проверити ако било ког старијег од VII разреда (што укључује и одрасле особе, под усовом да нису математичари) упитате шта је функција у математици. Аутор ових редова у једној таквој мини-анкети ни у једном случају није добио макар приближно задовољавајући одговор, а најчешће није добио никакав одговор. Функција је ,,нешто што..." (понекад се ова реченица завршавала са... ,,има свој график, своју формулу..."). Рекли бисмо: није ни чудо. У школској литератури функција се уводи као некакав несрећни ,,...закон, пропис, правило по коме се сваком елементу једног скупа додељује тачно један елемент другог скупа " и очас после се прелази на реалне функције задате формулом (у основној линеарне, у средњој се поступно уводе и друге класе) и на њихове графике. Отуд многи поистовећују те појмове са појмом функције. Почетни примери функција који се дају на коначним скуповима врло брзо избледе и функције постану синоним за формуле ,,са једним словом".

У средњој школи је тај прелаз толико неприродан да не оставља ђаку времена да на примерима функција на коначним скуповима уочи суштину својстава 1-1 и на, као и појам инверзне функције. У пракси (I и III година средње школе) се за доказивање 1-1 и на памте неки готови шаблони, као и за налажење формуле функције инверзне датој (ако постоји). Нарочито би било смешно (да није тужно) бити сведок (не тако ретким) ситуацијама из I године средње где професори ђацима шапну у ,,у поверењу" да ће све функције које им дају бити 1-1 и на, само они то треба да званично докажу. Ако томе додамо и збрку око појмова домена, кодомена и скупа вредности функције, добија се прави галиматијас из ког ђаци, линијом мањег отпора, обично изађу са девизом ,,Боље шаблон у руци него мистерија на грани".

Руку на срце, и причи која следи могла би се ставити примедба да наводи слушаоца да функцију поистовећује са формулом. Међутим, мишљења смо да је за пример важно да ђака мотивише за улазак у непознато, а да након тога , на овај или онај начин (што, дабоме, може укључивати и друге примере) ваља одређивати обим и ширину уведеног појма. Читалац нематематичар који ово штиво чита из радозналости може , ако жели, прескочити пасусе написане ситним словима.

Започнимо, дакле, остварење оног што смо наумили оваквом комуникацијом са публиком:

Хајде да за почетак играмо једну игру. Ви кажете број по жељи, а ја ћу за сваки од њих рећи свој број. (ово брзо може да еволуира у ,,... сваком од њих придружићу свој број, касније и ,,...ја ћу сваки од њих пресликати у свој број".) *Након неколико таквих ,,ваш број-мој одговор" парова, ваш задатак је да откријете законитост по којој сам ја давао одговоре (или да на следећи ваш број сами дате одговор или да заменимо улоге не мењајући законитост или сл.)*

У почетном примеру прича може да изгледа рецимо овако:

ваш број	2	5	8	$\cdots$
мој број	4	10	16	$\cdots$

Овде очекујемо, без сумње, да ће слушаоци брзо погодити да су њихови бројеви само duplирани, односно да је правило: мој број $=2\cdot$ ваш број . У наредном примеру можете ,,закомпликовати" правило:

ваш број	1	4	10	$\cdots$
мој број	2	17	101	$\cdots$

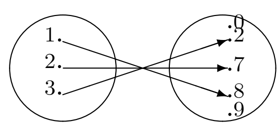
Већ је теже погодити ,,формулу" по којој предавач ради. Обично није проблем да ђаке придобијете да покушају да открију формулу , при чему је вероватно и да ће помислити да је баш у томе поента приче (а није, али забаве никад на одмет). Када се, на овај или онај начин, дође до чињенице да су у реченом примеру ђачки бројеви квадрирани и увећани за 1, можемо се већ договорити да то правило искажемо на удобнији начин него речима. Договоримо се да бројеве које смо назвали ,,ваш број" означимо рецимо са x, а ,,ове друге" са y; у последњем примеру тако добијемо правило придруживања у виду формуле $y=x^2+1$. Слово x представља промењиву величину коју ђак може бирати по жељи - назовимо га стога *независно промењивом*; y је такође промењива величина, али њена вредност зависи од вредности x којој се придружује - назовимо је стога *зависно промењљивом.* Предлажемо још бар један уводни пример који ће показати да је појам ,,законитости" много ,,растегљивији" него што би претходни примери могли да сугеришу:

ваш број	2	5	18	123	$\cdots$
мој број	2	5	9	6	$\cdots$

У почетку, док задају природне једноцифрене бројеве као *аргументе* ове функције (још један термин који се може вешто ,,уткати" у причу), ђаци могу помислити да је ово неко папагајско правило (исказано формулом $y = x$), али већ са вишецифреним бројевима (на које ће их предавач вешто навести) ствар пада у воду. Свакако је успех ако неко открије да је y збир цифара броја x ; то правило, с обзиром на узраст, нећемо исказати формулом, већ речима.

На овај начин деци дајете инспирацију за игру. Можете сада заменити улоге и препустити њима да смисле законитост коју ћете ви откривати (да ту можете упасти у проблем, показује и занимљив Пример 1 Додатка II на крају књиге). Пре или касније, међутим, тај курс треба поступно променити и причу уопштити како бисте појам функције увели на коректан начин.

Можете у том циљу ђацима поставити питање који све бројеви могу бити аргументи у првом примеру ($y = 2x$). Одговор ће највероватније бити: било који бројеви, са чиме се (у смислу: сви реални бројеви) свакако можете сложити. Исто тако и у другом примеру. У трећем, пак, ствар постаје проблематична: збир цифара можете рачунати природним бројевима, можете и целим, па и децималним, али коначним. Бесконачним децималним бројевима (периодичним или непериодичним) збир цифара није коначан, тако да треће ,,правило" не можете примењивати на ма који реалан број. Али, ни то није све: ако први пример $y = 2x$ интерпретирамо у виду причице по којој рецимо цена такси вожње у граду А кошта 2 евра по пређеном километру (старт је бесплатан), па x буде број пређених километара, а y цена вожње, тада x неће моћи бити било који, већ само позитиван реалан број. Ако, пак, истом правилу дамо интерпретацију у којој је x број купљених кесица сланих штапића (при чему једна кесица кошта 2 динара), а y износ који ћете дати за тих x кесица, тада x може бити само природан број. То значи да скуп допустивих вредности за x може варирати и са истом ,,формулом". Размотримо и пример у коме неко са 11 динара у џепу купује слане штапиће чија је цена 2 динара по кесици, па са x означимо број купљених кесица, а са y ,,кусур". Није тешко доћи до формуле $y = 11 - 2x$, али је скуп могућих вредности за x коначан $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Након оваквог мотивационог увода може се кренути са уопштењем и апстраховањем. Прво, ђак сада може осетити поенту оне рогобатне конструкције да је ,,функција сваки закон, пропис, правило који сваком елементу датог скупа A додељује тачно један елемент датог скупа B". Можете формулисати то и без помињања закона, прописа...: ,,За дате непразне скупове A и B свако придруживање елементима скупа A елемената скупа B (такво да се *сваком* елементу скупа A придружује (додељује) *тачно један* елемент скупа B) зовемо функцијом која пресликава A у B", али хоће ли ђак испратити такву реченицу до краја? Могуће су и друге варијанте; како год, све су то неформалне (нестроге) дефиниције, будући да користе термине (закон, пропис, правило, придружује...) који претходно нису дефинисани нити узети као основни, већ се прихватају на нивоу интуиције. На узрасту о коме говоримо то је нужно, бар у почетној фази. Важно је нагласити оно ,,...сваком елементу ....додељује тачно један...", као и чињеницу да скупови A и B (које ћемо звати, редом, домен и кодомен) функције такође улазе у дефиницију. Елементе домена A зваћемо *оригиналима*, њима придружене елементе скупа B њиховим *сликама*; за реч функција користићемо и синоним *пресликавање*. Уводни примери су показали да скуп A може бити и бесконачан и коначан; уз то, функције са истом формулом, а различитим доменом свакако сматрамо различитим, на шта указују претходни примери. Тако се ђацима већ може наговестити да функцију на неки начин ,,карактеришу" домен, кодомен и са̂мо ,,повезивање" елемената домена са елементима кодомена. Даље уопштење подразумева потенцирање чињенице да су A и B произвољни непразни скупови - дакле, њихови елементи не морају бити бројеви, већ шта год (телефони, градови, личности...). Ту се сада отвара широко поље ,,игара без граница". Прича се може претворити у забаву, али се може задржати и едукативност (пример у коме се слова наше азбуке пресликавају у скуп {сугласник, самогласник }. Такође, при ,,повезивању" не мора постојати ,,правило" на начин како се то доживљава из претходних примера. У том смислу је и



једна функција, једно ,,немушто" правило. Тиме је прича завршена и појам функције је добио своје место, остаје даља надоградња у складу са програмом и наставничком проценом расположења ,,на терену".

У том смислу сматрамо да је важно направити разлику између појмова кодомена и скупа вредности функције, поготову што се они често мешају и на средњошколском нивоу. Претходни цртеж ће нам добро доћи за то. Примећујете да елементи 0 и 9 у другом скупу (кодомену) нису ,,обухваћени" повезивањем, тј.немају своје оригинале. То не противречи ,,дефиницији" функције: она инсистира да у првом скупу (домену) не сме бити ,,слободних", а за други скуп то не захтева. Други скуп (у овом примеру $\{0, 2, 7, 8, 9\}$) зовемо кодомен; скуп оних елемената кодомена који нису ,,слободни" зовемо скупом вредности дате функције - у овом примеру то је $\{2, 7, 8\}$. Одатле је јасно да је скуп вредности подскуп кодомена; ако су ти скупови једнаки, дакле ако у кодомену нема слободних, функцију зовемо ,,на".

И око домена је потребно разјашњење, без ког би средњшколски задаци ,,Одреди домен реалне функције чија је формула..." били бесмислени. Како одредити домен кад је он компонента при задавању функције, кад функције са истом формулом могу имати различите домене и тиме и саме бити међусобно различите? Ту, међутим, постоји једна конвенција: ако се реалној функцији зада само формула, домен by default чине сви бројеви x на које се та формула може применити у смислу ,,израчунљивости" (дакле, математичких правила). Такав домен зовемо природним доменом. За формулу $y = 2x$ природни домен је R; но, у случају формуле $y = \frac{1}{x}$ то је $R \setminus \{0\}$. Постоји и природни кодомен реалних функција задатих само формулом - то је R. С обзиром на то да кодомен није ,,оптерећен" условом коришћења свих елеманта (као домен), то је сасвим јасно. И једна и друга конвенција, напоменимо још једном, важе само ако се другачије не каже.

Након тога бавимо се различитим начинима представљања функције. У овој причи су већ коришћени прикази таблицом, графом и формулом.

Код формула није наодмет поновити да је важно знати домен и (кодомен), тј. да формула није довољна за потпуно задавање функције, будући да су три потпуно ,,различита" примера у претходном тексту покривена истом формулом; с друге стране, лако ћете објаснити да таблица и граф, у случају бесконачног домена, не могу дати потпун ,,опис" функције - чак и да нагласите да ,,законитост која се уочава на унетим паровима се наставља и на следећим" (колико год то строго математички било некоректно), опет у таблици ,,са тачкицама", као што је случај са уводним примерима, не знате рецимо домен функције. Код коначних домена граф даје потпун опис функције, док из таблице у том случају једино не можете одгонетнути кодомен (већ само скуп вредности).

Колико ће се ту детаљисати, ствар је процене предавача, свакако не претерано како се иницијална идеја ни би затрпала. С тим у вези, не би било немогуће (нарочито не на нивоу додатне наставе) увести функцију као скуп парова (са одређеним својствима), што је блискије формалној дефиницији функције као специјалном случају релације. У почетној фази најважнија је мотивација за увођење новог појма и везивање за емпирију (где у емпирију убрајамо и дотадашња математичка знања), а строго дедуктивно излагање је нешто што суштински чека само оне који ће се посветити математици као свом позиву. Елементи дедукције се могу провлачити и у раним, па и основношколским фазама, само је питање места и тренутка за то (иначе се може направити и Франкенштајн, о чему смо већ говорили).

Следећи корак, по програму за VII разред основне школе, јесте увођење појма графика функције (чему претходи упознавање са x0y Декартовим правоуглим координатним системом). Томе треба приступити опрезно и стрпљиво, знајући да ће се ђаци у будућности највише са тим сусретати и често појам (реалне) функције поистовећивати са њеним графиком. Најпре ваља рећи да је приказивање графиком могуће само код функција чији домен и кодомен чине бројеви. График такве функције је скуп тачака у координатном систему чије су координате сви њени парови(x; y) (ако нисте дали назнаку дефиниције функције као скупа уређених парова, онда се може рећи : ,,сви парови из таблице...” и сл.) . У случају коначног домена и скуп тачака биће коначан ; у случају бесконачног домена ствар се компликује. Ако за функцију $y = 2x$ из уводне приче унесете неколико тачака њеног графика, ђаци ће приметити да су све те тачке ,,нанизане” на једној правој (колинеарне). То се може доказати и на том узрасту, али тешко да би то имало поенту у редовној настави. Много занимљивије је утврдити да ће, у случају природног домена наведене формуле, график бити права, у случају домена који чине ненегативни реални бројеви (пример такси-вожње) график бити полуправа, а у случају скупа $N \cup \{0\}$ као домена (пример са куповином сланих штапића) график је скуп бесконачно много неповезаних тачака (које ,,леже” на једној правој). Даље треба ићи колико програм и предавачева процена налажу, свакако не превише; програм предвиђа разматрање тзв.,,функције директне пропорционалности” ($y = k \cdot x$) и ,,функције обрнуте пропорционалности” ($y = \frac{k}{x}$). У оба случаја k је реална константа различита од 0, а подразумевајући домени, редом, R и $R \setminus \{0\}$. Оне треба да омогуће увођење директно пропорционалних и обрнуто пропорционалних величина, што је садржај и наше следеће главе.

Наставак ове приче у VIII разреду подразумева увођење линеарне функције и појмова својствених реалним функцијама: нуле, знак и монотоност (за ово последње се на том узрасту користи и привремен термин ,,ток функције”). У I години средње школе прича о функцијама се ,,ресетује” (дакле, почиње од почетка), али се уводе и бројни нови појмови: 1-1, на, инверзна функција, слагање (композиција) функција... Све те ствари би, ако се већ раде, требало обрадити аналитички и поткрепити их примерима и на коначним и на бесконачним скуповима, али се у пракси све своди на њихову шаблонско ,,отаљавање” на функције задате формулама без икакве суштине и смисла. При томе се ствара конфузија тиме што се за функције задане формулама подразумева природан домен (а кодомен R) и шаблони ,,врте” на њима, не уочавајући да са истом формулом, а променом домена, функција која није била 1-1 то може постати, односно са променом кодомена постати ,,на” а да претходно то није била. У вези са тим и инверзна функција се у пракси обрађује формално као техника да се из формуле дате функције ,,изрази x, па x и y замене улоге” , често и без провере да ли дата функција уопште има инверзну. Да не говоримо о чињеници да две функције са истом формулом, а различитим доменима или кодоменима могу да се различите понашају у том смислу: једна може имати инверзну, друга не, или обе могу имати инверзну чији се аналитички изрази (формуле) међусобно разликују итд. Функцијске једначине и начин како им се обично приступа су тек прича за себе.

Аутор ових редова је мишљења да је мања штета неке ствари прескочити (свесно кршећи актуелни програм) него их радити формално, без суштине и смисла. То на сваком месту можемо одбранити чињеницом да у добро конструисаној математичкој згради појединца није тешко и накнадно нешто додати и убацити, а у појединим фазама и самом власнику зграде препустити да се са̂м едукује (уз потоњу контролу од стране предавача).

9 ПРОПОРЦИЈЕ или зашто, напослетку, потрошен новац и кусур из маркета нису део ове приче

Ово је тема која се по важећим програмима за VII разред наставља на претходну причу о функцијама. И овде вежи иста напомена за делове текста писане ситним словима. На почетку је сасвим ОК дефинисати пропорцију као једнакост два *количника* (чак се може избећи реч *размера*), као и доказати (на том узрасту) својство о једнакости производа спољашњих и унутрашњих чланова. То су ствари које су лако прихватљиве на том нивоу иако се у старту не види мотив за њихово увођење. Увођење неког појма декретом, ето, некад има смисла и на нижим нивоима обучавања - уколико је лако схватљив у оквиру дотадашње (математичке) емпирије.

Остављајући све то за тренутак по страни (уз обећање да ћемо врло брзо практично користити уведен појам и његова својства), прелазимо на суштину за коју смо већ припремили терен говорећи претходно о функцијама директне и обрнуте пропорционалности. У том смислу предавач треба да има у виду да су следеће две дефиниције еквивалентне (иако то ђацима неће саопштити тим речима нити обавезно доказати).

Дефиниција 1. За величине x и y казаћемо да су директно пропорционалне ако су „повезане” формулом $y = k \cdot x$ за неки (реалан) број $k \neq 0$.

Дефиниција 2. За величине x и y казаћемо да су директно пропорционалне ако имају својство да повећање једне од њих n пута повлачи и повећање друге исто толико пута.

Строго гледано, ове дефиниције имају бројне мањкавости. У првој би математичар морао доказати да је дефиниција коректна у смислу симетричности релације (заиста, из $y = k \cdot x$ следи $x = \frac{1}{k} \cdot y$, с обзиром да је $k \neq 0$). У другој, пак, није речено које вредности може имати n (ту читаоци обично мисле на природан број). Строго гледано, ако би величине x и y могле бити и негативне, онда је некоректно рећи ,,...повећање". Посебна прича је што n може бити и реалан број различит од 0 (дакле, и између 0 и 1), што термин ,,повећање" опет чини некоректним; специјално, ако се ограничимо на скуп природних бројева за вредност n, онда и ,,смањење" једне од величина n пута (што је као множење са $\frac{1}{n}$) повлачи смањење друге n пута.

Међутим, то су на том узрасту финесе око којих ђаци не морају лупати главу. Оне, једноставно, у том тренутку неће замутити воду (што не значи да их не треба поменути на неком каснијем узрасту). Битно је да ученици имају обе дефиниције пред собом као оруђе за препознавање директно пропорционалних величина. Ако је x рецимо број килограма јабука чија је цена 20 дин/кг ,а y износ (у динарима) која се има платити за купљену количину, лако је закључити да је $y = 20x$ и да су те величине стога директно пропорционалне; исто је и са висином и страницом једнакостраничног троугла ($h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$) итд. У случају када је x рецимо број килограма теста, а y број палачинки који се од тога може испећи, јасно је да, колико пута више теста направимо, толико пута ће се више палачинки добити (уз prećутне претпоставке о униформисаности процеса), па су и те величине директно пропорционалне (и сигурно повезане одговарајућом формулом).

Нека су x и y директно пропорционалне величине. Нека се за $x = x_1$ добије $y = y_1$, а нека, кад је $x = x_2$, испадне $y = y_2$ (ако овако апстрактна прича не наиђе на добар пријем, увек је можете конкретизовати на примеру). Тада је, на основу претходног, свакако $y_1 = k \cdot x_1$ и $y_2 = k \cdot x_2$. Из прве једнакости се може закључити да је $\frac{y_1}{x_1} = k$, а из друге да је $\frac{y_2}{x_2} = k$, што значи да је $y_1 : x_1 = y_2 : x_2$, а то опет значи да два конкретна пара вредности директно пропорционалних величина чине пропорцију. Из својстава пропорције лако се види да се ово може писати и у облику $x_1 : y_1 = x_2 : y_2$, као и у облику $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$. За овај последњи имамо и мнемотехнику за памћење у виду шеме

величина x	величина y
$\mid x_1$ $\downarrow x_2$	$\mid y_1$ $\downarrow y_2$

Сада можемо релаксираније приступити и увођењу обрнуто (инверзно) пропорционалних величина. Премда је ту прича можда мало сложенија, ако је претходна урађена коректно и поткрепљена примерима, онда се са тим искуством не очекују проблеми ни у овом случају. У том смислу, следеће три ,,дефиниције" су еквивалентне (наводници су због нестрогости, односно мањкавости, аналогних оним код директно пропорционалних величина):

Дефиниција 1. За величине x и y кажемо да су обрнуто пропорционалне ако су ,,повезане" формулом $y = \frac{k}{x}$ за неки (реалан) број

$k \neq 0$.

Дефиниција 2. За величине x и y кажемо да су обрнуто пропорционалне ако имају својство да, кад се једна повећа n пута, друга се нужно толико пута смањи и обрнуто, кад се једна смањи n пута, друга се толико пута повећа.

Дефиниција 3. За величине x и y кажемо да су обрнуто пропорционалне ако су x и $\frac{1}{y}$ (или $\frac{1}{x}$ и y) директно пропорционалне.

И овде имамо сличне коментаре око препознавања као и малопре. Ако су x и y рецимо странице правоугаоника фиксиране површине, најјасније је по Дефиницији 1 закључити да су оне обрнуто пропорционалне. Ако је, пак, x број славина које пуне базен, а y време пуњења (у сатима рецимо), онда је Дефиниција 3 вероватно најзгоднија. Нека, примера ради, 6 славина напуни базен за 8 сати. То значи да за 1 сат тих 6 славина напуни $\frac{1}{8}$ базена. Дупло више славина (уз претпоставку да су све једнако продуктивне) ће дупло повећати део базена који напуне за 1 сат, тј. напуниће $2 \cdot \frac{1}{8}$ базена; уопште, ако се x (број славина) повећа колико год пута, исто толико пута ће се повећати и $\frac{1}{y}$ (део базена који оне напуне за 1 сат), па су величине x (број славина) и y (време пуњења) обрнуто пропорционалне.

Нека су сада x и y обрнуто пропорционалне величине. Нека се за $x = x_1$ добије $y = y_1$, а кад је $x = x_2$ нека испадне $y = y_2$, уз подразумеван могућ прелазак на конкретан пример и конкретне бројеве кад год општа прича има за последицу мрштење аудиторијума. Тада је $y_1 = \frac{k}{x_1}$ и $y_2 = \frac{k}{x_2}$, одакле је $x_1 \cdot y_1 = k$, као и $x_2 \cdot y_2 = k$ и, следствено, $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$. (речима: код обрнуто пропорционалних величина производи конкретних одговарајућих вредности једне и друге су сваки пут исти). Једнакост производа коју смо добили, наравно, није пропорција, али ју је могуће написати у облику пропорције, рецимо, $x_1 : x_2 = y_2 : y_1$ уз одговарајућу мнемошему

величина x	величина y
$\mid x_1$	$\uparrow y_1$
$\downarrow x_2$	$\mid y_2$

Овим се интуитивно оправдава и оно ,,директно" и ,,обрнуто" у називу, па то и није потребно посебно коментарисати.

Могућа екстензија ове приче (која би у VII разреду била на нивоу додатне наставе, док је у првој години средње у редовном програму) подразумевала би да се, у складу са Дефиницијом 3, нагласи да је обрнуту пропорцију могуће поставити и као $x_1 : x_2 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2}$, што је припрема терена за касније фазе (у оквиру тзв. рачуна поделе, када ће се радити са величинама чије су вредности директно или обрнуто пропорционалне датим бројевима). Ту су и задаци са пропорцијама (сличних претходним мнемошемама)чије табеле имају ,,више од две наслова" (више од две величине, при чему су сваке две директно или обрнуто пропорционалне) - иако намењени градиву средње школе , могу се радити и у VII разреду, макар у ситуацијама када је природно ,,обједињавање два наслова у један” (нпр. број дана рада и број сати рада дневно могу се множењем ,,претворити” у наслов ”укупан број радних сати” и сл.)

10 ПРОЦЕНТИ или колико је просто израчунати 20 посто

За неверицу је како један једноставан аритметички концепт, свакако једноставнији него сви претходно поменути, неретко ствара конфузију, и током школовања и тестирања задржава ореол нечега у шта испитаници никад нису сигурни да ли ће исправно урадити. Основни кривац за то је, по ауторовом мишљењу, чињеница да ударно место у програму проценти имају у VII разреду као примена пропорција, што има многе лоше последице. Проценте не треба примарно везивати за пропорције, а камоли сводити их на то; пропорције су само једна од варијанти решавања неких задатака из процената, чак не ни нарочито фасцинантна, а ни неопходна. Прича о процентима се може у потпуности испричати без икаквог помињања пропорција.

Ако ђак на нивоу VII разреда већ зна да се неки део (изражен разломком) неке целине добија множењем ($\frac{3}{4}$ од 20 је $\frac{3}{4} \cdot 20$), тада је основно рећи да су проценти просто стоти делови неке целине (на шта указује и корен те речи која би се у нашем језику могла звати и *постотак*; гора је варијанта користити непроменљиву реч *посто*). Разлози због којих су баш стоти делови добили посебно име и посебну ознаку у односу на остале разломке су чисто практичне (дакле нематематичке) природе. Следствено, 20% од 120 биће $\frac{20}{100} \cdot 120$ и ту нема никакве мистике. При томе се проценти ,,претварају” у разломке који се често могу лепо скратити: $20\% = \frac{1}{5}$, $25\% = \frac{1}{4}$. Јасно, 100% је исто што и једно цело (што је ученик вероватно у животу чуо пуно пута до тада), 200% су 2 цела итд. Све у свему, важи

$$p\% \text{ од } G = \frac{p}{100} \cdot G \qquad (1)$$

Ако неки број G (ово слово је одабрано да асоцира на термин главница, али је то небитно) увећамо за (својих) $p\%$, увећана вредност износиће $G + \frac{p}{100} \cdot G = G(1 + \frac{p}{100})$ (ово можете спровести и на примеру, наравно). На тај начин је

$$\text{величина } G \text{ увећана за својих } p\% = G(1 + \frac{p}{100}) \qquad (2)$$

При томе израз $(1 + \frac{p}{100})$ можете назвати фактором увећања (у актуарској терминологији то је фактор акумулације).

Аналогном расуђивањем добије се и

$$\text{величина } G \text{ умањена за својих } p\% = G(1 - \tfrac{p}{100}) \qquad (3)$$

при чему је $(1 - \frac{p}{100})$ фактор умањења (есконтни фактор).

Формуле (1), (2) и (3) су довољне за све задатке из процената на било ком нивоу школовања; све три су једноставно изводиве из дотадашње (математичке) емпирије и ђак их у сваком тренутку може реконструисати.

Формула (1) се може написати у облику $G : P = 100 : p$ (где је ,,резултат" формуле (1) означен са P), а формуле (2) и (3) у облику $(G + P) : G = (100 + p) : 100$ и $(G - P) : G = (100 - p) : 100$, респективно, што одговара интерпретацији у оквиру пропорција, али су (1), (2) и (3) у изворном облику лакше за схватање, често погодније за примене, у сваком случају довољне за све што ова тема захтева, што ћемо илустровати на више примера.

Пример 1. Након поскупљења од 15% , а затим појефтињења од 25%, цена једног модела лап-топа износила је 34500 динара. Колика је била почетна цена?

Решење. На основу (2) и (3), а ако почетну цену означимо рецимо са x, математички запис горњег текста гласио би

$$x(1 + \frac{15}{100})(1 - \frac{25}{100}) = 34500$$

, односно

$$x \cdot \frac{23}{20} \cdot \frac{3}{4} = 34500$$

што је даље лако решиво. Овде се види једна од предности формула (2) и (3) - оне, наиме, омогућују да се низ поскупљења и појефтињења, односно повећања или смањења неке вредности за одређени број процената, представи једним изразом.

Пример 2. Гледаност једне телевизије расла је из месеца у месец током једног квартала (тромесечја) за по 10%. За колико процената је гледаност на крају квартала била већа него на почетку?

Решење Ако број гледалаца на почетку приче означимо са x , а тражени број процената са p, горњи текст даје

$$x(1 + \frac{10}{100})^3 = x(1 + \frac{p}{100})$$

што, након дељења обе стране једнакости са x (где нема губитка решења, будући да је x произвољан позитиван реалан број, а p непозната) и сређивања даје

$$(\frac{11}{10})^3 = (1 + \frac{p}{100})$$

одакле је лако добити p.

Пример 3. Ако једну страницу правоугаоника увећамо за 20%, а другу смањимо за 20%, да ли ће се површина променити и за колико?

Решење Уз означавање страница правоугаоника са a и b, а траженог броја процената са p, добијамо:

$$a(1 + \frac{20}{100}) \cdot b(1 - \frac{20}{100}) = ab(1 + \frac{p}{100})$$

Ово је прилика да се уочи да је формула (3) проширење формуле (2) на случај кад је p негативно (јер се десна страна у (3) може писати у облику $G(1 + \frac{-p}{100})$). То говори да би, у случају (непотребног) захтева минималности, довољно било формулу (2) користити и за повећање и смањење, само што бисмо у другом случају за p узимали негативан број; то нам је, међутим, важно када не знамо унапред да ли је у питању смањење или повећање - у том случају узмемо формулу (2), а по знаку добијеног броја p знаћемо шта је у питању. Углавном, након дељења обе стране са ab (уз коментар аналоган као у претходном примеру) добијамо

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} = 1 + \frac{p}{100}$$

одакле лако изађе $p = -4$,дакле, површина се смањила за 4%.

Пример 4. Мила је нижа од Петре за 20%. За колико процената је Петра виша од Миле?

Решење Ако Милину висину означимо са m, а Петрину са p, информацију из текста можемо записати у облику

$$m = p(1 - \frac{20}{100})$$

односно

$$m = \frac{4}{5}p$$

Ако непознат број процената означимо са x, тада је питање могуће преточити у једначину

$$p = m(1 + \frac{x}{100})$$

односно
$$p = \frac{4}{5}p(1 + \frac{x}{100}).$$
Скраћивањем са p ово даје
$$1 = \frac{4}{5}(1 + \frac{x}{100}),$$
тј.
$$1 + \frac{x}{100} = \frac{5}{4}$$
одакле је $x = 25$, па је Петра виша од Миле за 25%.

Ови и други задаци могу се свакако решавати и мање формално, неки ђаци ће у четвртом примеру закључити логички да, ако је Мила нижа од Петре за петину (Петрине висине), Петра је виша од Миле за четвртину (Милине висине) . Ми смо претходним причама илустровали довољност употребе формула и за оне који нису склони ни (бар не у почетку) вични пречицама; личне пречице свакако треба подржати ако су добре и опште, а ако су ограниченог домета вештим примерима скренути пажњу на то. Решавање преко пропорција или на друге начине је у том смислу непотребно, али ко жели може и тако. Увек се, међутим, треба чувати непотребних детаљисања која могу замаглити суштину; у том смислу, аутор не подржава ни рецимо ,,формулу" у неким САТ туторијалима по којој, када се вредност x повећа на вредност y, проценат повећања је $\frac{y-x}{x} \cdot 100$ (што се у ствари добије решавањем по p одговарајуће једначине $y = x(1 + \frac{p}{100})$). Слично и за смањење итд. Презентовање као готових формула ствари које се лако могу извести из општих формула може бити и контрапродуктивно ; уосталом, радознали ђаци увек могу и сами долазити до таквих закључака или их налазити у литератури која шире обрађује неке теме. Када имате пред собом обиље математичких садржаја, о економичности те врсте треба водити рачуна. Неки аутори и на нивоима школовања вишим од средње школе у задацима попут наших примера 2, 3, 4 примењују тзв.методу посредног рачуна бирајући за почетну величину произвољну вредност, обично неки ,,округао" број. Са тим се врло вероватно можете сусрести и код ђака, било самоиницијативно, било да су инструирани из неког другог извора. Чак и у ситуацијама попут оне у Примеру 1 неки аутори крену од произвољне вредности (100 динара), обаве на њој потребне процентуалне промене и добију резултат, а затим из пропорције нађу стваран почетни износ у задатку. Многи школски професори такав начин рада неће признати, иако је у неким почетним курсевима актуарске математике препоручен. Мана је свакако што се то у суштини користи као шаблон уз занемаривање питања зашто је то могуће тако и да ли је увек коректно. Уместо предавачевог негирања објективно тачног задатка само зато што му се начин рада не свиђа, мишљења смо да је у таквим ситуацијама, колико узраст и околности дозвољавају, најбоље заједнички дискутовати о домету употребе методе (скица доказа, навођење примера у којима она није могућа, као и примера у којима је теже уочљива и сл.).

Ефектност употребе формула (2) и (3) илустроваћемо на још једном (занимљивом) примеру:

Пример 5. Одређени артикал је у продавницама A и B имао на почетку исту цену. У продавници A је најпре поскупео за 20%, а затим појефтинио за 30%, док је у продавници B најпре појефтинио за 30%, а затим поскупео за 20%. Где сада има већу цену?

Решење На интуитивном нивоу, ово може изгледати тешко докучиво, али ако уз помоћ формула поставите кретање цене у оба продавнице, добијете изразе $G(1+\frac{20}{100})(1-\frac{30}{100})$ и $G(1-\frac{30}{100})(1+\frac{20}{100})$ који су, елементарно,једнаки.

Формуле (1),(2) и (3) се даље могу уопштити и користити за налажење дела неке величине, као и повећање и смањење за неки њен део, и у случају када тај део није изражен у процентима, већ разломком или децималним бројем. Погледајмо у том смислу један пример:

Пример 6. Запосленој особи у једној фирми речено је да ће му $\frac{3}{4}$ плате повећати за петину, а преостали део плате смањити за трећину. Помозите том запосленом да израчуна да ли ће му плата после тога бити мање или већа од полазне и за који део.

Решење Ако је првобитна плата износила x, а непознат део обележимо са r, из текста имамо

$$\frac{3}{4}x(1+\frac{1}{5})+\frac{1}{4}x(1-\frac{1}{3})=x(1+r).$$

Слично ранијем, дељењем обе стране са x и сређивањем налазимо

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=1+r,$$

одакле се лако добија $r=\frac{1}{15}$, па јунаку наше приче ипак следује (скромно) повећање.

11 ЛИНЕАРНЕ ЈЕДНАЧИНЕ СА ПАРАМЕТРИМА или како постати мађионичар са 15 година

Можда ће се ревносни читалац изненадити: откуд сад баш линеарне једначине са параметрима после претходних ,,капиталних" тема ? Прича је овде везана за I годину средње школе и за једну ,,епизоду" у оквиру поглавља о линеарним једначинама. Та епизода са параметрима ђацима често задаје муку, и ако јој приступају аналитички али и ако је покушавају претворити у шаблон. Цела ствар није ни безазлена ни безначајна, она је наговештај онога што се иза брда ваља (попут система линеарних једначина са параметрима, али и генерално задатака са *општим бројевима*; с друге стране, ту се увежбава и терминологија: решити једначину *по* одређеном слову итд.). Одабрали смо ову тему да бисмо показали да је апстрактност и неприступачност којом је ђаци обично карактеришу само привид и резултат помањкања воље предавача да је веже за дотадашњу емпирију из које је она природно и настала. Стога прича која следи није никакво прављење вештачких ситуација нити слаткоречивост; она даје илустрацију реалног мотива за увођење оваквих ствари, уз разумљива приповедачка поједностављења која не утичу на суштину.

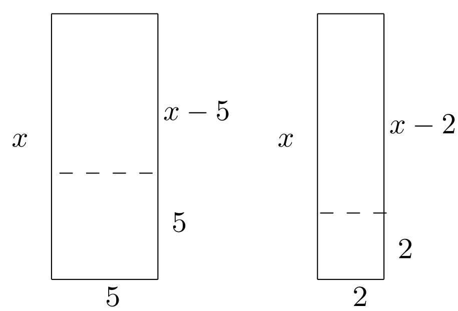
Ако се неком ипак учини да је причица коју дајемо у наставку као мотив превише наивна и да су ученици I године средње превазишли тако нешто, имамо одговор: чак и ако некад личе на бајке, ове наше причице су заправо басне, а оне су, знамо, само поједностављени и огољени модели стварности. Оне сасвим верно осликавају проблеме из света који нас окружује и ђаци након њих могу да уоче ситуације за чије решавање ће им помоћи стечено искуство. А сваком ко за иницијализацију појма одабере неку бољу и уверљивију причу скидамо капу, без поговора. Почнимо, дакле...

Једног дана, у време док је ваш предавач радио у фирми УРОП (Успешно Решавање Озбиљних Проблема), дошао је клијент са захтевом за решавање једног занимљивог проблема. Ваш саговорник је тај проблем претворио у једначину

$$5(x-5) = 2(x-2)$$

из које је лако дошао до решења $x = 7$. (овакав приступ може да буде прихваћен како треба уколико су се слушаоци претходно пуно пута уверили у везу између ситуација из реалног света и математичких записа попут једначина; то значи да очекујемо да и ревносном читаоцу овог материјала, након досадашњих примера, у овом тренутку није неопходно да и ову једначину прати нека загонетна прича. Ипак, за оне који то желе:

Имамо два имања правоугаоног облика чије су дужине, редом, $5m$ и $2m$, а ширине једнаке (и веће од дужине). Колика треба да буде ширина тих имања како би, након издвајања из њих квадратних парцела чија је страница једнака краћој страници имања, преостали делови полазних парцела били једнаке површине? Прича можда мало звучи компликовано, али слика јасно показује очему се ради:



...И таман што је претходни клијент задовољно изашао, после само једног гутљаја кафе, долази други са сличном причом као претходни коју, након претходног искуства, још брже претворисмо у једначину

$$4(x-4) = 2(x-2)$$

са лако докучивим решењем $x = 6$.(на овом месту, наравно, можете поновити целу причу са парцелама, променивши само дужину прве парцеле на 4m) *И још не пописмо кафу до краја, уверисмо се да она народна о добром гласу који се далеко чује није без основа: трећи клијент и трећа једначина*

$$3(x-3) = 2(x-2)$$

(и опет парцеле, ако сте тако почели...) *Ваш предавач је тад схватио да ће, ако нешто брзо не смисли, цео данашњи радни дан провести у решавању захтева који су сродни, решавају се по истом моделу, али се по једном полазном податку (дужини првог имања) разликују, те немају исто нумеричко решење.*

Кад се све три једначине напишу једна испод друге:

$$5(x-5) = 2(x-2)$$

$$4(x-4) = 2(x-2)$$

$$3(x-3) = 2(x-2)$$

потпуно је јасно да су настале ,,из исте кухиње". Разликују се, очигледно, само по једном податку (који се у свакој једначини појављује на два места).

Идеја је следећа: хајде да тај податак у поставци једначине који се разликује од клијента до клијента обележимо неким словом, рецимо m. Тако добијамо једначину

$$m(x-m)=2(x-2)$$

која репрезентује читаву *фамилију ,,сродних" једначина* - у њој се, наиме, појављује слово m које није непозната, већ податак који се мења од клијента до клијента; назовимо то m параметром. Та једначина замењује све чланове речене фамилије; ако њу успешно решимо по x, решићемо, маестрално, све једначине одједном (а њих има теоријски бесконачно много, колико и различитих опција за m). Па хајде да нађемо x, зашто да не:

$$mx-m^2=2x-4$$

$$mx-2x=m^2-4$$

$$(m-2)x=m^2-4$$

Све су ово јасни кораци које примењујемо и иначе код сређивања једначина; увек имамо на уму да је m број (који је променљив од једначине до једначине) и према том слову се тако односимо, а x треба да нађемо (да решимо једначину по x).

Тако смо једначину довели до основног облика за линеарну једначину $\square x=\triangle$ (1) где су $\square$ и $\triangle$ реални бројеви. Ако у том тренутку неприпремљене ђаке упитате колико је x, већина ће као из топа одговорити $x=\frac{m^2-4}{m-2}$ и вероватно и поносно скратити тај разломак приде. Ту сад предавач наступа са питањем: а шта ако је $m=2$? Коефицијент уз x у једначини тада постаје 0, а дељење нулом, како знамо, није могуће. За ту вредност m једначина гласи $0\cdot x=0$ и користећи се логиком (тј.дотадашњом математичком емпиријом) лако је закључити да x може бити било који реалан број. Стога је општа шема за решавање једначине (1) следећа:

- ако је $\square\neq 0$, тада је, без сумње, $x=\frac{\triangle}{\square}$
- ако је $\square=0$, тада једначину треба решити логички: ако су ђаци математичка знања стицали на начин који промовишемо у овом раду, лако ћете их навести да сами изведу да тада постоје два ,,подслучаја": ако је и $\triangle=0$, решење је сваки реалан број (сваки број из домена полазне једначине), у супротном једначина нема решење.

У складу са тим, једначину до које смо стигли

$$(m-2)x = m^2 - 4$$

решавамо даље овако:

- Ако је $m-2 \neq 0$, тј. $m \neq 2$, решење (након јасног скраћивања) гласи $x = m+2$.
- А ако је m баш једнако вредности за коју претходни одговор не важи? И за тог клијента морамо обезбедити одговор. Дакле, за $m = 2$ једначина постаје $0x = 0$ и њено решење је сваки реалан број. (за оне који су све пратили кроз парцеле, ова последња констатација се мора провући кроз домен наше приче , па се као одговор добија сваки реалан број већи или једнак од 2).

Решивши на тај начин једначину и обезбедивши се за *све случајеве* у погледу вредности за m, могли смо са осмехом да сачекамо наредног клијента. Чим је почео да излаже проблем , схватисмо да је и он један од чланова породице и препознасмо да је наше m конкретно 8 (метара). Док још није ни завршио, дискретно смо отворили фиоку, погледали претходно изложено решење опште приче, одмах видели да његова прича спада под случај $m \neq 2$ где је решење $x = m+2$ и саопштили му одмах да је решење његовог проблема $x = 10$. Клијент је био забезекнут: како смо тако брзо решили случај? Оставили смо то као тајну; касније смо од претпостављеног сазнали да су од клијената стигле силне похвале на наше фасцинантне математичке вештине. Појавио се међу њима, замислите, и клијент са вредношћу 2 за m. Нисмо се дали преварити и нисмо му по инерцији дали одговор $x = 4$; напротив, препознавши други случај, обрадовали смо га да за непознату величину може да изабере број по жељи (нека ђаци замене $m = 2$ у првобитни облик једначине; добиће $2(x-2) = 2(x-2)$ чиме цела прича психолошки добија на уверљивости; ствар се одлично види и на парцелама - за $m = 2$ обе парцеле су исте и коју год ширину $x > 2$ да узмете, преостали делови биће једнаких површина). Шта мислите, поштовани читаоци, да ли би нам фасцинирани клијенти веровали да су те математичке вештине и сами учили као 15.-огодишњаци у школи под називом *Линеарне једначине са параметром* ? Будите сигурни да не би (аутор ових редова имао је слично искуство). Успут, не сумњајте да је већина тих клијената учила по готово истим програмима као што су актуелни; брже се мења клима у свету него наши наставни планови и програми.

На овај начин се ученицима може дочарати изворни смисао појма параметра - решити једначину са параметром значи решити читаву (бесконачну) фамилију сродних једначина, решити систем са параметром значи решити ,,једним потезом" фамилију сродних система... Ако у формули функције која садржи параметар треба одредити вредност тог параметра тако да функција има тражено својство (што су такође ради на том узрасту), значи да из читаве фамилије сродних функција треба изабрати ону (оне) која испуњава посебно исказане захтеве. Сасвим природно ће се ствар уопштити на проблеме са два или више (независних) параметара... Овим дајете и додатни стимулус за прихватање задатака са тзв.општим бројевима: шта друго радите када одређујете запремину правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица a и чија је бочна страна нагнута према равни основе под углом α него једним потезом решавате читаву (бесконачну) фамилију сродних задатака; за сваког конкретног члана те фамилије лако ћете заменити његове податке у крајње решење. Можете рећи ђацима да на тај начин сами изводе формуле за одговарајуће ситуације; када одређују површину и запремину правилног тетраедра ивице a и добију резултате $P = a^2\sqrt{3}$ и $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ ђаци су ,,у таквој ситуацији иноватори" (др Гојко Калајџић), јер без пô муке изводе формуле које се често наводе или памте као готове.

ДОДАТАК I : Математичке загонетке и питалице

На овом месту наводимо неке загонетке и питалице, само део ауторове личне архиве, које користимо у разним ситуацијама и на разним нивоима у обучавању математике. Неке од њих имају дубљи математички смисао (попут Загонетке 1), неке су само забавне и логичке (попут Загонетке 3). Сврха им је различита: за неке ђаке могу бити креативна разбибрига, ђацима који бојкотују математичке садржаје, беже од математике (не обавезно буквално) или настоје да се математике ослободе као баласта, могу бити подстицај да преиспитају свој став, могу бити коришћени као (раније помињани) џокер-задаци на тестовима и проверама... У сваком случају, као задаци за изоштравање ума, логичан су део математичког корпуса; у ауторовој архиви има веома занимљивих задатака и за предаваче (чувени задатак са патуљцима који се решава користећи резултате из Теорије група), али тиме се овде нећемо бавити. Прва загонетка је, колико знамо, ауторско дело пок. проф. Мирјане Мрмак; другој је аутор проф. Богољуб Маринковић (,,Архимедес") који нам је љубазно дозволио коришћење садржаја из богате литературе овог математичког друштва; трећа загонетка је део велике серије логичких проблема који су задавани читаоцима у оквиру давно угашеног часописа за популаризацију науке ,,Галаксија" . Питалице (које су краће од загонетки и по форми и по сложености) су преузете са неких међународних интернет-такмичења у решавању математичко- логичких главоломки. Мини-сет који је пред вама аутор је користио као поклон свим ђацима - средњошколцима који су учествовали у тестирању (видети Додатак III).

МАТЕМАТИЧКО - ЛОГИЧКЕ ЗАГОНЕТКЕ

1. Срела се, после дуго година, два математичара X и Y.
- Здраво, колега, дуго се нисмо видели - рее X - Чујем да си се оженио и да имаш три ћерке.
- Тачно - одговори Y
- Колико имају година? - радознало ће X
- Пошто смо математичари, хајде да ти одговорим у виду загонетке. Прво ћу ти рећи да је производ њихових година 36.
- То ми није довољно да откријем колико свака има година - одговори X
- А ако ти кажем да је збир њихових година једнак броју на згради поред које управо

пролазимо?- на то е Y.

X погледа број на згради, размисли мало, па рече:

- Још увек не могу да одредим колико свака има година.
- А ако ти кажем да најстарија ћерка свира клавир?
- Е сада знам колико свака има година !

А знате ли ви?

2. У четири различита стана једне зграде живе особе A, B, C и D. Особе B, C и D су рођена браћа особе A и особа A, осим њих, нема друге рођене браће. Све четири особе возе трамваје у ГСП ,,Београд".

О становима тих особа зна се следеће:

1. У стану особе A има 5 врата и 4 прозора.
2. У стану особе B има онолико врата колико је прозора у стану особе C и онолико прозора колико је врата у стану особе C.
3. Сва рођена браћа особе D имају, укупно узевши, једнак број врата и прозора.

Питање гласи: да ли је особа A отац неког (садашњег или бившег) студента Математичког факултета у Београду?

3. На једној бензинској пумпи, негде на Сицилији, заустављају се кола београдских регистарских ознака, са возачем Пајом, туристом из Србије.

- Гориво? - упита га продавац.
- Не, не - на солидном италијанском одговори Паја - хтео сам само флашицу воде.
- Ево, ја ћу вам донети - љубазно ће продавац и оде ка фрижидеру.

У том тренутку улицом поред пумпе прођоше великом брзином једна кола, а за њима и друга из којих се пуцало на ова прва.

- Шта то би? - упита престрављени Паја продавца.
- Ма то су мафијашки обрачуни - одговори продавац - то је, на жалост, код нас на Сицилији као добар дан. Не брините, него, изволите Вашу воду.
- Не, хвала, не треба - одговори Паја, седе у кола и настави пут.

Питање: ЗАШТО?

МАТЕМАТИКО - ЛОГИЧКЕ ПИТАЛИЦЕ

1. Колико слова има одговор на ово питање?

2. Четири особе се купају у мору тако да је свака једнако удаљена од остале три. Ако три од њих имају на лицу наочари за сунце, шта има четврта?

3. Аутомобил у сервису је подигнут тако да му точкови не додирују подлогу, а управљач (волан) је у положају у коме ауто "иде право". Ако волан окренете под углом од 30^0 у односу на почетни положај, да ли ће се и предњи точкови закренути под углом од 30^0 у односу на почетни положај, или под већим, или под мањим углом? (Претпоставка је да је све идеално "дотегнуто", тј.да код волана нема празног хода).

РЕШЕЊА МАТЕМАТИЧКО -ЛОГИЧКИХ ЗАГОНЕТКИ

1. *2, 2 и 9 година.* На основу чињенице да је производ три природна броја 36 није тешко (растављањем броја 36 на просте чиниоце и њиховим груписањем, или некако другачије) закључити да постоји 8 таквих ,,комбинација". Ако свакој од њих израчунамо збир, видећемо да само опције 1,6,6 и 2,2,9 имају исти збир (13). То значи да је број на згради свакако био 13, јер је то једини збир из кога се не може једнозначно одредити колико свака девојчица има година. Конано, реченица у којој се помиње најстарија ћерка елиминише могућност 1,6,6, па остаје само 2,2,9.

2. *НЕ.* На основу података из 1. и 2. моемо закључити следеће:

	врата	прозори
A	5	4
B	x	y
C	y	x
D		

.

Анализа треће информације заснива се на чињеници да су B и C свакако браћа особе D (из уводног текста), док се, ако пажљиво прочитамо текст, једино за A не зна да ли је брат или сестра особе D. Ако би A био брат, тада би информација 3. значила $5 + x + y = 4 + y + x$, што је немогуће. Стога A једино може бити сестра преосталој тројици браће (информација 3. тада гласи $x+y=y+x$), па самим тим није отац никоме.

3. Човек је, једноставно, имао несносни напад штуцавице и хтео је да попије воду како би она престала. Међутим, од поменутог догађаја се толико уплашио да је штуцање у тренутку престало (препадање неког је стари проверен начин да га излечите од штуцања).

РЕШЕЊА МАТЕМАТИЧКО - ЛОГИЧКИХ ПИТАЛИЦА

1. *Три.* То је једини број у нашем језику који написан речима има онолико слова колико он сâм износи. Ово питање нема исти одговор у свим језицима: на енглеском је рецимо решење фоур (4). У неким језицима нема решења, а у неким има више решења.

2. *Маску за роњење.* На основу текста, поменуте особе представљају темена правилног тетраедра. С обзиром да су све у мору (ни једна није у ваздуху), четврта мора бити под водом, будући да су преостале три на површини.

3. *Под мањим углом од* 30^0 . Јасно је ако волан окренете за рецимо 180^0 и проверите да ли су се точкови закренули за толико.

ДОДАТАК II : О надмоћности дечјег расуђивања

Већ смо више пута помињали колико је лоше, из много разлога, када предавач прекорева децу (без обзира на интензитет тог прекоревања) зато што нешто нису схватили онако како је он желео. Скоро свака таква ситуација представља гушење личне логике детета и спутавање слободе размишљања, из много разлога; често се, рецимо, ради о томе да професионални предавач користи фразе и конструкције које су усвојене као стандард и не помишљајући да то у дечјој глави може с правом другачије да се схвати (или да направи проблем у схватању). Аутор ових редова је често био фрапиран дечјим тумачењем неког текста које је, ван контекста увређене терминологије, звучало сасвим логично (сетимо се примера три тачке које не припадају једној правој). Чињеница је да је математичарима, уз све предности свог позива, својствен мање или више један посебан вид отуђења од стварности, манир математизације и оних ствари које по својој природи излазе из стандардне приче, једном речју нека врста професионалне самодовољности. Постоје занимљива истраживања на ту тему која откривају и слабе тачке професионалног бављења математиком и упозоравају математичаре да, уз све наведено, ипак треба да имају у виду да је и њима у извесном смислу својствен професионални синдром ограниченог ума. (постоји прича, чију аутентичност не можемо проверити, да је један висок математичар, професор факултета, погледавши собе у једном хотелу посумњао да ли је кревет довољних димензија с обзиром на његову висину; након тога је отишао у град, купио метар, измерио дужину и ширину, по Питагориној теореми израчунао дијагоналу и утврдивши да је мало већа од његове висине, закупио собу - а могао је једноставно да легне и провери.) На овом месту навешћемо пар примера из ауторове личне архиве и литературе у којима ће се видети супериорност дечјег над професионалним расуђивањем. Сматрамо их веома важним као упозорење професорима да никад не ниподаштавају дечју логику, већ да је пажљиво анализирају. Процес обучавања између предавача и ђака је двосмеран - предавач током свог рада заиста може доста да научи од деце и у стручно-методичком смислу и у смислу ширине размишљања.

Пример 1. Анегдота која следи, забележена и у литератури, потиче од једног нашег чувеног математичара, професора факултета, сада покојног, из времена када је свог тада деветогодишњег синчића кроз игру и забаву, независно од школског програма, уводио у неке основне математичке појмове. Професор се с правом држао чињенице да многе основне појмове (попут појма скупа, појма релације и функције) треба да, на одговарајући начин, уводите и у раним фазама образовања (донекле аналогно чињеници да је, рецимо, страни језик боље учити док сте мали). Елем, тако је дотични тата свом малишану причао о функцијама, уводећи их управо онако како смо ми то чинили на почеткуу Главе 8 , кроз игру *твој број - мој број.* Дечак који је на том узрасту самоуверено владао основним аритметичким операцијама радо је прихватио игру погађања и бивао све вештији у њој да би једног тренутка саопштио оцу да жели да замене улоге. Тата је то радо прихватио и игра је почела: отац је кренуо са ,,Један", на шта је малишан као из топа одговорио:,,Пет". На очево: ,,Два" малишан је рекао: ,,Три". Након мало размишљања отац је рекао: ,,Три" и био веома изненађен када је добио одговор: ,,Три". Било је очигледно да ово није 1-1 функција што је, имајући у виду којим рачунским операцијама барата дете на том узрасту, деловало доста загонетно. Сада је тата покушао да направи маневар и рекао ,,Двадесетједан". На ово се, први пут, син мало замисли, а затим рече: ,,Тринаест". И после вишеминутног размишљања професор никако није успевао да одгонетне ову уjдурму. Покуша још са ,,Сто" на шта му син одговори : ,,Три". По речима професора, а верујући детету да даје одговоре по неком ,,правилу" (у уобичајеном смислу те речи), до краја дана покушавао је да одгонетне логику, али безуспешно. На крају је био принуђен да се преда и, по сопственим речима, осетио се постиђеним када је од сина чуо решење. Знате ли га Ви?

x	1	2	3	21	100
y	5	3	3	13	3

Пример 2. Ранко Рајовић, директор МЕНСЕ за Србију, на једном свом предавању поменуо је проблем који своју тежину дугује чињеници да му је решење, иако објективно једноставно, ван уобичајених шаблона. И за децу је задатак тежак (тестирања су показала да 20% деце источноазијских земаља где је функционално учење најјаче може да реши овај проблем), али за одрасле се показао као нерешив. У (незваничној) анкети коју је Ваш приповедач спроводио међу саговорницима у тренуцима (социјалне) доколице нико од одраслих није успео да дође до решења, али понеко од деце јесте:

У низу

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ - & - & - & - & - & - \end{array}$$

одредити које цифре треба да стоје уместо ,,цртица” .

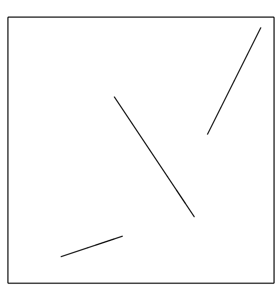
Пример 3. Можете ли нацртати квадрат са три дужи? Ако је одговор негативан, знајте да многа деца то (успешно) могу.

РЕШЕЊА

1. Малишан је једноставно бројао слова у речи. Број *један* написан речима има пет слова, број *два* три слова, исто тако и *три* и *сто*.

2. Сваки следећи члан низа ,,описује” садржај претходног (други члан описује први: једна јединица; трећи члан описује други: две јединице; четврти: једна двојка једна јединица...). Могло би се то исказати и математичким (статистичким) језиком, али непотребно, признаћете...

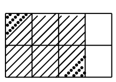
3.



ДОДАТАК III : Примери тестова

На примере тестова који следе већ смо пуно пута реферисали у претходном тесту. Први од следећа два теста представља тест *општематематичке културе* и намењен је ђацима средњошколцима; премда је знање које се за њега захтева основношколско, због временске дистанце, формулације и формата задатака, циљну групу оваквог теста, по замисли аутора, чине ђаци II - IV разреда средње школе било ког смера или профила. Поновимо на овом месту да овај наш предлог теста не сматрамо репрезентативним као тест општематематичке културе, пре дијагностичким у садашњем нездравом систему образовања.

ТЕСТ ОПШТЕМАТЕМАТИЧКЕ КУЛТУРЕ

1.  Колико процената чоколаде је осенчено на слици?
(А) 6% (Б) 60% (Ц) 70% (Д) 75% (Е) 80%

2. Ако се бројеви дечака и девојчица у неком одељењу односе као 2:3, у ком односу је број девојчица према укупном броју ученика тог одељења?
(А) 3:1 (Б) 3:2 (Ц) 3:5 (Д) 2:5 (Е) 1:3

3. Особе А, В и С имају исте суме новца - по x динара ($x > 10$). Ако особа А дâ особи В 10 динара, а В дâ С 10 динара, колико динара сада С има више од А?
(А) 10 (Б) 20 (Ц) 30 (Д) А и Ц имају једнако (Е) не може се одговорити на питање јер се не знају њихове почетне суме.

4. У једном азилу за псе и маце јутрос је одјекивало,,мјауу" и,,вауу"... - укупно је ту било 35 паса и мачака. Током дана није стигла ни једна нова животиња, али је зато усвојена (предата новим власницима) четвртина свих паса и петина свих мачака. Колико је ивотиња усвојено током данашњег дана?
(А) 4 (Б) 5 (Ц) 8 (Д) 9 (Е) Не може се одговорити на питање јер се не зна колико је било мачака, а колико паса

5. Колико природних бројева има од 100 до 200 (укључујући и 100 и 200)?

(А) 90 (Б) 100 (Ц) 99 (Д) 101 (Е) 200

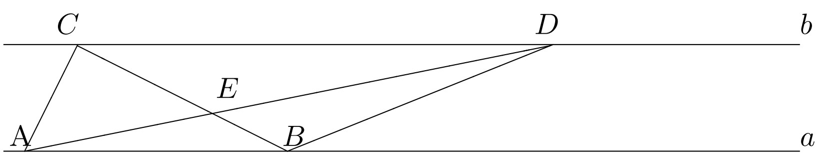
6. Који од следећих израза је исправан наин рачунања $(599+401)^2$:

(I) $599^2 + 2 \cdot 599 \cdot 401 + 401^2 = \cdots$

(II) $1000^2 = ...$

(III) $599^2 + 401^2 = ...$?

(А) само (I) (Б) само (II) (Ц) само (III) (Д) (I) и (II) (Е) (II) и (III)



7. Ако су на горњој слици праве a и b паралелне, а поврина троугла ABC 20, колика је поврина троугла ABD?

(А) 10 (Б) 20 (Ц) 30 (Д) 40 (Е) Нема довољно података да би се одговорило на питање

8. Цена боце Кока-коле снижена је (на акцији) за 5% у односу на редовну цену. Ако купите 4 такве боце, колико % ћете их мање платити него да сте их купили по редовној цени?

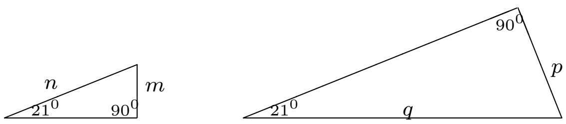
(А) 1,25% (Б) 4% (Ц) 5% (Д) 20% (Е) не може се одговорити на питање јер се не зна редовна цена

9. У позоришној сали има 10 редова. Током једне представе у првих 6 редова било је укупно 70 посетилаца, а последњих 6 редова укупно 50 посетилаца. Колико је укупно посетилаца присуствовало представи?

(А) 70 (Б) 95 (Ц) 100 (Д) 120 (Е) Нема довољно података да би се одговорило на питање

10. Који од следећих бројева је најближи вредности израза $\frac{4{,}99 \cdot 3{,}02 - 2{,}97^2}{\pi}$?

(А) 0 (Б) 1 (Ц) 2 (Д) 3 (Е) $\frac{1}{3}$

11. 

На основу података са слике, шта се може рећи о односу разломака $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$?

(А) $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$ (Б) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ (Ц) $\frac{m}{n} < \frac{p}{q}$ (Д) Колико пута су странице једног троугла веће (мање) од страница другог, толико пута је и одговарајући разломак већи (мањи) од другог (Е) Није могуће закључити ништа од наведеног

12. У земљи Дембелији степен a^b пише се $a \heartsuit b$. Која од следећих тврђења су тачна (a, b, c су реални бројеви)?
(I) $a \heartsuit b = b \heartsuit a$
(II) $(a \heartsuit b) \heartsuit c = a \heartsuit (b \heartsuit c)$
(III) $a \heartsuit 0 = 1 \heartsuit a$ (за $a \neq 0$)
(А) сва три (Б) само (II) (Ц) само (III) (Д) (I) и (II) (Е) (II) и (III)

ПОРЕД СЛЕДЕЋИХ ПИТАЊА ЗАОКРУЖИТИ ДА ИЛИ НЕ (a, b, c су *произвољни* реални бројеви; у разломцима се подразумева да именилац није 0, а у квадратном корену да је поткорена величина ≥ 0):
Да ли је $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$? ДА НЕ
Да ли је $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$? ДА НЕ
Да ли је $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}$? ДА НЕ
Ако је $a > 1$ и $b > 1$, да ли мора бити и $a \cdot b > 1$? ДА НЕ
Ако је $a < 1$ и $b < 1$, да ли мора бити и $a \cdot b < 1$? ДА НЕ
Ако је $2^a = 2^b$, да ли мора бити $a = b$? ДА НЕ
Ако је $a^2 = b^2$, да ли мора бити и $a = b$? ДА НЕ
Ако је $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ да ли мора бити и $a = b$? ДА НЕ
Ако је цео број дељив и са 6 и са 4, тада је дељив и са 24 ДА НЕ
Ако је цео број дељив са 24, тада је дељив и са 6 и са 4 ДА НЕ

Ако је збир 2 цела броја дељив са 10, тада сваки од сабирака мора бити дељив са 10
ДА   НЕ

—————————

И о потреби увођења тестова *стручне математичке културе* смо већ доста причали; за модел који следи важи иста напомена као и за ,,ђачки” тест: он је више дијагностичког карактера у садашњим околностима (подсећамо да је настао као резултат дискусије аутора ових редова са неким од колега - средњошколским и основношколским професорима, при чему смо уочили неке, за професора математике, елементарне и забрињавајуће грешке и заблуде и на основу тога су формулисана сва питања; материјала је било и за много више). У неким здравијим околностима верујемо да би овакав тест имао и тежих питања и да се аутор ових редова можда и не би сматрао компетентним за његово састављање; имали смо увид у неке тестове тог профила намењене предавачима, из неких других образовних система, и видели да, поред елементарних питања везаних за градиво из предавачевог домена, постоји и доста питања која задиру далеко више и дубље у математичке садржаје са подручја предавачевог стручног образовања.

ТЕСТ СТРУЧНЕ МАТЕМАТИЧКЕ КУЛТУРЕ

1. Тврђење $2^{f(x)} = 2^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$ (за ма које x из домена обе функције) важи јер...
(А) Реална функција $y = 2^x$ је 1-1   (Б) Реална функција $y = 2^x$ је ,,на”   (Ц) Реална функција $y = 2^x$ је непрекидна на R (Д) У питању је својство једнакости (закон замене за једнакост)   (Д) Наведено тврђење и не важи у општем слуају

2.Тврђење $f(x) = g(x) \Rightarrow 2^{f(x)} = 2^{g(x)}$ (за ма које x из домена обе функције) важи јер...
(А) Реална функција $y = 2^x$ је 1-1   (Б) Реална функција $y = 2^x$ је ,,на”   (Ц) Реална функција $y = 2^x$ је непрекидна на R (Д) У питању је својство једнакости (закон замене за једнакост)   (Е) Наведено тврђење и не важи у оптем случају

3. Које од следећих тврђења је тачно у скупу комплексних бројева ($i^2 = -1$) ?
(А) $2-i < 2+i$ (Б) $2-i = 2+i$ (Ц) $2-i > 2+i$ (Д) Важи сваки од претходна

три одговора (Е) Не важи ни један од претходних одговора

4. Нека за реалне бројеве x, y ваи $x > 5 \wedge y > -3$. Шта се из тога може закључити о производу xy ?
А) $xy > -15$ (Б) $xy < -15$ (Ц) $xy \in (-\infty, 15) \cup (0, +\infty)$ (Д) $xy < 15$ (Е) xy може бити било који реалан број

5. Колико подскупова има скуп целих бројева Z ?
(А) три, и то су $Z^-, \{0\}$ и Z^+, јер је $Z^- \cup \{0\} \cup Z^+ = Z$ (Б) два, N и N_0 (Ц) два, ϕ и Z (Д) бесконачно много (Е) Питање нема смисла, јер о кардиналности скупа свих подскупова неког скупа има смисла говорити само за коначне скупове

6. Ако је, за неку диференцијабилну функцију $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx} = x^2 e^x$, који од следећих израза даје приращтај функције $f(x)$ кад се x мења од 250 до 280?
(А) $\int_{250}^{280} x^2 e^x dx$ (Б)$\triangle y = x^2 e^x \triangle x$, тј. $\triangle y = 250^2 e^{250} \cdot 30$ (Ц))$\triangle y = x^2 e^x \triangle x$, тј. $\triangle y = 280^2 e^{280} \cdot (-30)$ (Д) $y'(250) = 250^2 \cdot e^{250}$ (Е) $y'(30) = 30^2 \cdot e^{30}$

7. Основа праве призме је ромб ије су дијагонале 40 cm и 30cm. Висина призме једнака је растојању наспрамних бочних страна. Запремина те призме износи (у cm^3)
(А) 14400 (Б) 15000 (Ц) 5000 (Д) 4800 (Е) Нема довољно података да би се одговорило на питање

ПОРЕД СЛЕДЕЋИХ ПИТАЊА ЗАОКРУИТИ ДА ИЛИ НЕ

8. Ако су a, b, c, d позитивни бројеви и важи $ab > cd \wedge b > c$, да ли се може закључити да је $a > d$? ДА НЕ

9. Претпоставимо да испитујете да ли је формула облика $A \Longleftrightarrow B$ таутологија методом свођења на апсурд. Полазите од претпоставке да је формула $\perp$, то је могуће у два случаја: $\tau(A) = \top \wedge \tau(B) = \perp$ или $\tau(A) = \perp \wedge \tau(B) = \top$. Претпоставимо да сте из првог случаја добили контрадикцију. Да ли је нужно радити други случај да бисте закључили да је формула таутологија? ДА НЕ

10. Да ли два троугла морају бити подударни ако имају једнаке по две странице и висину која одговара једној од њих? ДА НЕ

11. Које од следећих дефиниција апсолутних вредности реалног броја бисте прихватили као коректне?

I $|x| = \begin{cases} x & \text{за } x \geq 0 \\ -x & \text{за } x < 0 \end{cases}$ II $|x| = \begin{cases} x & \text{за } x > 0 \\ -x & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$

III $|x| = \begin{cases} x & \text{за } x \geq 0 \\ -x & \text{за } x \leq 0 \end{cases}$ IV $|x| = \begin{cases} x & \text{за } x > 0 \\ 0 & \text{за } x = 0 \\ -x & \text{за } x < 0 \end{cases}$

(А) само (I) (Б) само (IV) (Ц) само (III) (Д) (I) и (IV) (Е) све четири дефиниције су коректне

12. Који од следећих одговора бисте прихватили као коректан доказ да функција $f(x) = \frac{x}{x-1}$ $(x \in R \setminus \{1\})$ није ни парна ни непарна?

I За било који број $x \in D_f$
је $f(-x) = \frac{-x}{-x-1} = \frac{x}{x+1} \neq \pm f(x)$
Стога функција није ни парна ни непарна

II Како је $f(-2) = \frac{2}{3}$, $f(2) = 2$, јасно је да
није $f(-x) = f(x)$ нити је $f(-x) = -f(x)$
за све x из домена функције f.
Стога функција није ни парна ни непарна

III Како је $f(x) = \frac{x}{x-1}$, $f(-x) = \frac{-x}{-x-1}$,
$-f(x) = -\frac{x}{x-1}$, јасно је да је $f(-x) \neq \pm f(x)$
па функција није ни парна ни непарна

IV Како домен функције није симетричан
у односу на тачку $x = 0$,
функција није ни парна ни непарна

(А) само (I) (Б) само (IV) (Ц) (I) и (III) (Д) (II) и (IV) (Е) сва четири одговора су коректна

13. Који од следећих одговора бисте прихватили као коректан доказ да је једнакост $sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$ идентитет?

I $\quad sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x$
$=\sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)-\cos^2 x$
$=\sin^2 x-\cos^2 x$
$=-(\cos^2 x-\sin^2 x)$
$=-\cos 2x$

II $\quad -\cos 2x$
$=-(\cos^2 x-\sin^2 x)$
$=\sin^2 x-\cos^2 x$
$=\sin^2 x\cdot(\sin^2 x+\cos^2 x)-\cos^2 x$
$=\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x$

III $\quad \sin^2 x\cos^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$
$\iff \sin^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)-\cos^2 x=-\cos 2x$
$\iff \sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x \quad /\cdot(-1)$
$\iff \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$
Стога је почетна једнакост еквивалентна идентитету, па је и сама идентитет

А) само (I) (Б) (I) и (II) (Ц) (I) и (III) (Д) само (III) (Е) сва три одговора су коректна

14. Који од следећих одговора бисте прихватили као коректно решење ирационалне једнаине
$\sqrt{2-x}=x$ у скупу реалних бројева?

I $\quad \sqrt{2-x}=x \quad /^2$
$2-x=x^2\wedge x\geq 0$
$x^2+x-2=0\wedge x\geq 0$
Решења квадратне једначине су
1 и -2 од којих услов задовољава
само $x=1$ то је једино
решење полазне једначине

II $\quad \sqrt{2-x}=x \quad /^2$
$2-x=x^2\wedge 2-x\geq 0\wedge x\geq 0$
$x^2+x-2=0\wedge x\leq 2\wedge x\geq 0$
Решења квадратне једначине су 1 и -2 од којих оба услова
(или њихов пресек $x\in[0,2]$)
задовољава само $x=1$

III $\quad \sqrt{2-x}=x \quad /^2$
$2-x=x^2$
$x^2+x-2=0$
Решења квадратне једначине су 1 и -2 .
Провером (непосредном заменом добијених вредности x у полазну једначину) закључујемо да је једино решење $x=1$

А) само (II) (Б) (I) и (II) (Ц) (II) и (III) (Д) само (I) (Е) сва три одговора су коректна

15. Колика је вероватноћа да при истовременом бацању две коцке за јамб збир добијених бројева буде 4?
А) $\frac{1}{7}$ (Б) $\frac{1}{12}$ (Ц) $\frac{2}{21}$ (Д) 2 (Е) $\frac{1}{18}$

ДОДАТАК IV : За математичке сладокусце

1. Имате на располагању теразије (са 2 таса) и тегове чије су масе 1, 3, 9, 27... (дакле, 3^n, где $n \in N_0$). Треба измерити предмет чија је маса произвољан природан број. При томе размотрити два случаја:

а) маса предмета није унапред позната;

б) маса предмета је унапред позната, а алгоритам треба да обезбеди стављање тегова на тасове без потоњег склањања или премештања на други тас.

2. Дванаест војвода треба да плати порез цару од по 100 златника, при чему је маса сваког златника 20 грама. Један војвода вара на тежини златника. Цар има на располагању вагу која може да измери највише 10 килограма. Под претпоставком да је маса сваког вараличиног златника исти природан број (< 20), једним мерењем открити преваранта.

Ако неки читалац овог рада, посебно ако је нематематичар а вешт у логичким задацима, запне у решавању горња два проблема, то не треба да га чуди. За решење првог задатка треба да, поред довитљивости и маштовитости, зна добро да барата сабирањем и одузимањем у тернарном бројевном систему (систему са основом 3), док у другом треба да влада теоријом простих бројева. Говоримо, свакако, о решењима која су нама доступна (не нужно и једина могућа). Иако су и ове две причице заправо басне, подсећамо вас да су басне само упрошћени модели стварности. Стога и ово схватите као прилог тврдњи да је математика и настала из емпирије и примењива на бројне проблеме у свету који нас окружује. То што је већина математичких садржаја који се уче у школама отуђена од стварности проблем је система образовања, а не математике.