Универзитет у Београду

Математички факултет

Драгана Г. Шапоњић

РЕШАВАЊЕ ГРАНИЧНОГ ПРОБЛЕМА СА КАПУТОВИМ ИЗВОДОМ РАЗЛОМЉЕНОГ РЕДА МЕТОДАМА КОНАЧНИХ РАЗЛИКА И КОЛОКАЦИЈЕ

Мастер рад

Београд, 2017.

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Александра Делић,
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Александра Делић,
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милан Дражић,
ванредни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зорица Станимировић,
ванредни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Садржај

1 Увод

Теорија граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине као и за парцијалне диференцијалне једначине са разломљеним изводима битно се ослања на функционалну анализу. Решења ових једначина представљају се као елементи појединих функционалних простора. У овом поглављу ће бити дефинисани неки основни појмови и резултати функционалне анализе који су потребни у даљем раду, а који се могу наћи у [9, 10].

1.1 Теорија оператора

Дефиниција 1.1. *Функција $A : X \to Y$ између два векторска простора над истим пољем скалара $\mathbb{K}$ се назива линеарном ако је*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

за свако $x, y \in X$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

У случају линеарног пресликавања $A : X \to Y$ између векторских простора X и Y користи се ознака Ax уместо $A(x)$ и израз линеаран оператор уместо израза линеарна функција, односно линеарно пресликавање. У случају $Y = \mathbb{K}$, пресликавање $f^* : X \to K$ се назива линеарним функционалом. Инверзни оператор A^{-1} оператора A постоји и линеаран је ако и само ако је $Ax = 0$ само за $x = 0$.

Дефиниција 1.2. *Комплетан нормиран простор назива се Банаховим*[1] *простором.*

Нека су X и Y два нормирана простора над истим пољем скалара. Ради једноставнијег писања, нула елемент, као и норма у оба простора се означава на исти начин, тј. са 0 односно $\|\cdot\|$ респективно.

Став 1.1. *Ако је $A : X \to Y$ линеаран оператор и ако је непрекидан у једној тачки, тада је он непрекидан на читавом простору.*

Природно, такви оператори се називају непрекидним линеарним операторима.

[1] Stefan Banach (1892-1945)

Дефиниција 1.3. *Линеарни оператор $A : X \to Y$ је ограничен ако постоји позитиван број M такав да за свако $x \in X$ важи $\|Ax\| \leq M\|x\|$. Инфимум бројева M за које важи претходна неједнакост назива се нормом оператора A и кратко се означава са $\|A\|$.*

Став 1.2. *Ако је A линеаран оператор тада важи*

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Став 1.3. *Линеаран оператор $A : X \to Y$ је непрекидан ако и само ако је ограничен.*

Нека за нормиране просторе X и Y важи $X \subset Y$. Оператор $I : X \to Y$ такав да је $Ix = x$ за свако $x \in X$ се назива идентичким оператором.

Дефиниција 1.4. *Хилбертовим[2] простором се назива сваки Банахов простор чија је норма индукована неким скаларним производом тог простора.*

Нека је H Хилбертов простор. Са $(\cdot, \cdot)$ се означава скаларни производ у H, а са $\|\cdot\|$ одговарајућа индукована норма. Ако су A и A^* ограничени линеарни оператори који пресликавају H у H и ако је $(Ax, y) = (x, A^*y)$ за свако $x, y \in H$ тада се оператор A^* назива адјунгованим оператором оператора A. Ако је $A = A^*$, оператор A се назива самоадјунгованим.

1.2 Функционални простори

Отворен и повезан скуп $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ се назива област. Границом области Ω се назива скуп $\Gamma = \partial\Omega = \bar{\Omega}\backslash\Omega$, где је $\bar{\Omega}$ затворење скупа Ω. Мултииндексом се назива n-торка

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,$$

где је са $\mathbb{N}_0$ означен скуп ненегативних целих бројева. Ненегативан цео број $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ се назива дужина мултииндекса $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

У овом раду ће се користити функције облика $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

У случају функције више променљивих, парцијални изводи се означавају са

$$\partial^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

[2] David Hilbert(1862-1943)

1.2.1 Простор непрекидних функција

Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$. Са $C^k(\Omega)$ се означава скуп свих непрекидних функција f, дефинисаних на Ω, таквих да је $\partial^\alpha f$ непрекидна функција на Ω за сваки мултииндекс $|\alpha| \leq k$.
Специјално, са $C(\Omega)$ (скраћени запис за $C^0(\Omega)$) се означава простор непрекидних функција на Ω, а са $C^\infty(\Omega)$ простор бесконачно диференцијабилних функција на Ω.

Ако је Ω ограничен отворен скуп, са $C^k(\bar{\Omega})$ се означава скуп свих функција $f \in C^k(\Omega)$ за које се $\partial^\alpha f$ може непрекидно продужити са Ω на $\bar{\Omega}$, за сваки мултииндекс $|\alpha| \leq k$. Ово је Банахов простор снабдевен нормом

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \max_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

За $k \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda \leq 1$, са $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ се означава скуп свих функција $f \in C^k(\bar{\Omega})$ за које

$$|f|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})} := \max_{|\alpha| = k} \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \Omega}} \frac{\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)}{|x-y|^\lambda},$$

где је $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, има коначну вредност. $C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})$ је Банахов простор са нормом

$$\|f\|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})} := \|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} + |f|_{C^{k,\lambda}(\bar{\Omega})}.$$

За функције $f \in C^{0,\lambda}(\bar{\Omega}), 0 < \lambda < 1$ се каже да су Хелдер непрекидне са степеном λ. Ако је $\lambda = 1$ онда је функција Липшиц непрекидна на $\bar{\Omega}$. Пример Хелдер непрекидне функције је $f(x) = |x|^\alpha \in C^{0,\beta}[0,1]$, $0 < \beta \leq \alpha$, а Липшиц непрекидна је $f(x) = |x|$.

Уводи се и простор $AC^n[a,b]$ тј. простор апсолутно непрекидних функција, дефинисаних на $[a,b]$, чији су сви изводи до реда $n-1$ апсолутно непрекидне функције на $[a,b]$. Практично, $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

1.2.2 Простор интеграбилних функција

Нека је p реалан број, $p \geq 1$ и Ω отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. Са $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ се означава простор функција дефинисаних на Ω таквих да је

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x < \infty.$$

$L_p(\Omega)$ је Банахов простор са нормом

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \le p < \infty.$$

Простор $L_\infty(\Omega)$ састоји се из функција f дефинисаних на Ω таквих да $|f|$ има коначан есенцијални супремум, односно постоји константа M таква да је $|f(x)| \le M$ за скоро свако $x \in \Omega$. Најмањи такав број M се назива есенцијални супремум од $|f|$ и означава се са $M = \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$. Простор $L_\infty(\Omega)$ је снабевен нормом

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Специјално, простор $L_2(\Omega)$ је Хилбертов, са скаларним производом

$$(f, g) = \int\limits_\Omega f(x)g(x) \,\mathrm{d}x$$

и нормом

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лема 1.4. (Коши-Шварцова неједнакост) *Нека су функције f и g из простора $L_2(\Omega)$. Тада $fg \in L_1(\Omega)$ и*

$$|(f, g)| \le \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)}.$$

Лема 1.5. *Нека су функције f и g из простора $L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$. Тада је*

$$\|f + g\|_{L_p(\Omega)} \le \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_p(\Omega)}.$$

Лема 1.6. (Јангова неједнакост) *Нека су $a, b \ge 0$, $p, q > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тада је*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Лема 1.7. (ε-неједнакост) *Нека су $a, b \ge 0$. За произвољно $\varepsilon > 0$ важи*

$$ab \le \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

2 Интеграли и изводи разломљеног реда

У овом поглављу ће бити уведене дефиниције и основне особине интеграла и извода разломљеног реда. Најзаступљенији приступ њиховог дефинисања, који ће овде бити изложен, је Риман-Лиувилов и Капутов приступ.

У дефиницији извода и интеграла разломљеног реда се јавља гама функција, па се, прво, уводе њене основне особине. За више детаља погледати [3, 11, 14].

Гама функција $\Gamma(z)$ се дефинише преко Ојлеровог[3] интеграла друге врсте

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \mathrm{d}t \tag{2.1}$$

који конвергира за све $z \in \mathbb{C}$ за које је $Re(z) > 0$. Једна од основних особина гама функције је да задовољава једнакост

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad Re(z) > 0, \tag{2.2}$$

која се лако може доказати парцијалном интеграцијом. Користећи претходну једнакост, гама функција се може продужити до функције дефинисане за свако $z \in \mathbb{C}$ осим за $z = 0, -1, -2, ...$ Гама функција задовољава и једнакост

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

која следи из (2.2), јер је $\Gamma(1) = 1$.

Бета функција $B(z, w)$ се дефинише помоћу Ојлеровог интеграла прве врсте

$$B(z, w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} \mathrm{d}t, \quad Re(z), Re(w) > 0. \tag{2.4}$$

Веза између гама и бета функције се представља следећом формулом

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \neq 0, -1, -2, ...$$

[3] Leonhard Euler(1707-1783)

2.1 Риман-Лиувилов интеграл разломљеног реда

Важну улогу у дефинисању Риман-Лиувиловог интеграла разломљеног реда има Кошијева формула за n-тоструку интеграцију

$$\int_a^x \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\,\mathrm{d}t_n \cdots \mathrm{d}t_2\,\mathrm{d}t_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\mathrm{d}t, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

која се једноставно доказује математичком индукцијом и заменом редоследа интеграције.

Ако се у формули (2.5) замени $n \in \mathbb{N}$ са $\alpha \in \mathbb{R} > 0$ (тј. $\alpha \in \mathbb{R}_+$) и факторијел са Ојлеровом гама функцијом долази се до следеће дефиниције.

Дефиниција 2.1. *Нека је $f \in L_1(a,b)$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Леви Риман-Лиувилов интеграл $I_{a+}^{\alpha} f$ разломљеног реда α се дефинише са*

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], \tag{2.6}$$

док се десни Риман-Лиувилов интеграл $I_{b-}^{\alpha} f$ разломљеног реда α дефинише са

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]. \tag{2.7}$$

За $\alpha = 0$, се дефинише $I_{a+}^{0} := I$, $I_{b-}^{0} := I$, где је I идентички оператор.
За $a = -\infty$ се користи ознака I_{+}^{α}, а за $b = +\infty$ ознака I_{-}^{α}.

Интеграли $I_{a+}^{\alpha} f$ и $I_{b-}^{\alpha} f$ постоје за скоро свако $x \in [a,b]$. Такође, $I_{a+}^{\alpha} f$, $I_{b-}^{\alpha} f \in L_1(a,b)$.

Напомена 2.1. [3, 11] *У специјалном случају када је $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, односно $f(t) = (b-t)^{\beta-1}$, $t \in [a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, важи*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

$$\left(I_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Теорема 2.2. [7] *Нека је $\alpha > 0$. Оператор $I_{a+}^{\alpha} : L_p(a,b) \to L_p(a,b)$, односно $I_{b-}^{\alpha} : L_p(a,b) \to L_p(a,b)$, је непрекидан линеаран оператор.*

Теорема 2.3. [7] *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Леви и десни Риман-Лиувилови интеграли разломљеног реда су узајамно адјунговани оператори у односу на $L_2(a,b)$*

скаларни производ, тј.

$$\left(I_{a+}^{\alpha} f, g\right)_{L_2(a,b)} = \left(f, I_{b-}^{\alpha} g\right)_{L_2(a,b)}.$$

Напомена 2.4. [3] *Фамилија оператора*

$$\{I_{a+}^{\alpha} : L_1(a,b) \to L_1(a,b),\, \alpha > 0\}$$

формира комутативну полугрупу. Идентички оператор I_{a+}^{0} *је неутрални елемент ове полугрупе. Тако, ако је* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *и* $f \in L_p(a,b)$, $1 \leq p \leq \infty$ *онда су једнакости*

$$I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f(x) = I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f(x) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(x), \quad I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f(x) = I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f(x) = I_{b-}^{\alpha+\beta} f(x)$$

задовољене скоро свуда на $[a,b]$. *Специјално, ако је* $f \in C[a,b]$ *или* $\alpha + \beta \geq 1$, *онда једнакости важе на целом интервалу* $[a,b]$.

2.2 Капутов извод разломљеног реда

За решавање појединих проблема, нпр. у области механике, погодно је користити Капутов извод разломљеног реда.

Дефиниција 2.2. *Нека је функција* f *дефинисана на интервалу* (a,b), $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *и* $n-1 \leq \alpha < n$. *Леви Капутов извод* ${}^{C}D_{a+}^{\alpha} f$ *разломљеног реда* α *се дефинише са*

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} f(x) := \left(I_{a+}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{dx^n}\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], \tag{2.8}$$

док се десни Капутов извод ${}^{C}D_{b-}^{\alpha} f$ *разломљеног реда* α *дефинише са*

$${}^{C}D_{b-}^{\alpha} f(x) := (-1)^n \left(I_{b-}^{n-\alpha} \frac{d^n f}{dx^n}\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]. \tag{2.9}$$

Теорема 2.5. *[12] Нека је* $f \in C^n[a,b]$ *и* $n-1 \leq \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. *Тада је*

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha} f(a) = 0.$$

Доказ. Из дефиниције Капутовог извода важи

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]. $$

Нека је

$$ M = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n)}(x)|, $$

где је M позитивна константа.

Онда,

$$ |{}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f(x)| \leq \frac{M}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} \mathrm{d}t = \frac{M(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha-1)}, $$

из чега следи ${}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f(a) = 0$.

□

Уз услове претходне теореме, важиће и ${}^{C}D^{\alpha}_{b_-} f(b) = 0$.

Може се приметити да је [12]:

$$ \begin{aligned} &\lim_{\alpha \to (n-1)^+} {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f(x) = \lim_{\alpha \to (n-1)^+} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= \int_a^x f^{(n)}(t) \mathrm{d}t = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a), \\ &\lim_{\alpha \to (n-1)^+} {}^{C}D^{\alpha}_{b_-} f(x) = \lim_{\alpha \to (n-1)^+} \left(\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= (-1)^n \int_x^b f^{(n)}(t) \mathrm{d}t = (-1)^n (f^{(n-1)}(b) - f^{(n-1)}(x)), \\ &\lim_{\alpha \to n^-} {}^{C}D^{\alpha}_{a_+} f(x) = \lim_{\alpha \to n^-} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{\alpha \to n^-} \left(\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t = f^{(n)}(x), \\ &\lim_{\alpha \to n^-} {}^{C}D^{\alpha}_{b_-} f(x) = \lim_{\alpha \to n^-} \left(\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= \lim_{\alpha \to n^-} (-1)^n \left(\frac{f^{(n)}(b)(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} - \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \right) \\ &= (-1)^n \left(f^{(n)}(b) - \int_x^b f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t \right) = (-1)^n f^{(n)}(x). \end{aligned} $$

За $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ важи ${}^{C}D^{n}_{a_+} f(x) = f^{(n)}(x)$ и ${}^{C}D^{n}_{b_-} f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$.

Теорема 2.6. *Ако је* $f \in AC^n[a,b]$, *онда изводи* ${}^C D^{\alpha}_{a+} f$ *и* ${}^C D^{\alpha}_{b-} f$ *постоје за скоро свако* $x \in [a,b]$.

Напомена 2.7. [3, 11] *У специјалном случају када је* $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, *односно* $f(t) = (b-t)^{\beta-1}$, $t \in [a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *важи*

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a+} (t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha > 0,\, \beta > 0,$$

$$\left({}^C D^{\alpha}_{b-} (b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha > 0,\, \beta > 0.$$

и

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a+} (t-a)^{k}\right)(x) = 0, \quad \left({}^C D^{\alpha}_{b-} (b-t)^{k}\right)(x) = 0, \quad (k = 0, ..., n-1).$$

Капутов извод константе C је једнак нули тј.

$${}^C D^{\alpha}_{a+} C = 0, \quad {}^C D^{\alpha}_{b-} C = 0.$$

Теорема 2.8. *[12] Ако је* $f \in C^1[a,b]$, *онда важи*

$${}^C D^{\alpha_2}_{a+} {}^C D^{\alpha_1}_{a+} = {}^C D^{\alpha_1}_{a+} {}^C D^{\alpha_2}_{a+} = {}^C D^{\alpha_1+\alpha_2}_{a+},$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$ *и* $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

Услов $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$, из претходне теореме, се не може занемарити. Једноставан контрапример је:

$${}^C D^{0.7}_{0+} {}^C D^{0.6}_{0+} x = \frac{1}{\Gamma(0.7)} x^{-0.3}, \quad {}^C D^{1.3}_{0+} x = 0.$$

За $n-1 \leq \alpha < n$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, Капутови изводи ${}^C D^{\alpha}_{a+}$ и ${}^C D^{\alpha}_{b-}$ су оператори који пресликавају простор $C^n[a,b]$ у

$$C_a[a,b] = \{f | f \in C[a,b], f(a) = 0\}, \quad \|f\|_{C_a[a,b]} = \|f\|_{C[a,b]},$$

$$C_b[a,b] = \{f | f \in C[a,b], f(b) = 0\}, \quad \|f\|_{C_b[a,b]} = \|f\|_{C[a,b]},$$

респективно.

Напомена 2.9. [3] *Нека је* $n-1 \leq \alpha < n$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. *Тада су Капутови изводи* ${}^C D^{\alpha}_{a+}$ *и* ${}^C D^{\alpha}_{b-}$ *ограничени оператори из* $C^n[a,b]$ *у* $C_a[a,b]$ *и* $C_b[a,b]$, *респективно,* *и важи*

$$\|{}^C D^\alpha_{a_+} f\|_{C_a[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n-\alpha}}{|\Gamma(n-\alpha)|(n-\alpha+1)} \|f\|_{C^n[a,b]},$$

$$\|{}^C D^\alpha_{b_-} f\|_{C_b[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{n-\alpha}}{|\Gamma(n-\alpha)|(n-\alpha+1)} \|f\|_{C^n[a,b]}.$$

Ако је $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$, тада су оператори ${}^C D^\alpha_{a_+}$ и ${}^C D^\alpha_{b_-}$ ограничени оператори из $C^n[a,b]$ у $C[a,b]$. Шта више,

$$\|{}^C D^\alpha_{a_+} f\|_{C[a,b]} = \|f\|_{C^n[a,b]}, \quad \|{}^C D^\alpha_{b_-} f\|_{C[a,b]} = \|f\|_{C^n[a,b]}.$$

Теорема 2.10. [5] *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $f \in C[a,b]$. Важи*

$$\left({}^C D^\alpha_{a_+} I^\alpha_{a_+} f\right)(x) = f(x), \quad \left({}^C D^\alpha_{b_-} I^\alpha_{b_-} f\right)(x) = f(x).$$

Теорема 2.11. [5, 14] *Нека је $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n-1 \leq \alpha < n, f \in C^{n-1}[a,b]$ и нека је $f^{(n)}$ интеграбилна функција. Тада важи*

$$\left(I^\alpha_{a_+} {}^C D^\alpha_{a_+} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!},$$

$$\left(I^\alpha_{b_-} {}^C D^\alpha_{b_-} f\right)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)(b-x)^k}{k!}.$$

2.3 Риман-Лиувилов извод разломљеног реда

До дефиниције Риман-Лиувиловог извода разломљеног реда се долази заменом редоследа интеграције и диференцирања у дефиницији Капутовог извода разломљеног реда.

Дефиниција 2.3. *Нека је функција f дефинисана на интервалу (a,b), $\alpha \in \mathbb{R}_+$ и $n-1 \leq \alpha < n$. Леви Риман-Лиувилов извод $D^\alpha_{a_+} f$ разломљеног реда α се дефинише са*

$$D^\alpha_{a_+} f(x) := \frac{d^n}{dx^n} \left(I^{n-\alpha}_{a_+} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) \mathrm{d}t, \quad x \in [a,b], \tag{2.10}$$

док се десни Риман-Лиувилов извод $D_{b_-}^{\alpha}f$ разломљеног реда α дефинише са

$$D_{b_-}^{\alpha}f(x) := (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(I_{b_-}^{n-\alpha}f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1}f(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]. \tag{2.11}$$

За $\alpha = 0$, дефинише се $D_{a_+}^0 := I$, $D_{b_-}^0 := I$, где је I идентички оператор.
За $a = -\infty$ се користи ознака D_+^{α}, а за $b = +\infty$ ознака D_-^{α}.

За $\alpha = n \in \mathbb{N}$ је $D_{a_+}^n f(x) = f^{(n)}(x)$ и $D_{b_-}^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$.

Теорема 2.12. *Ако је $f \in AC^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, онда изводи $D_{a_+}^{\alpha}f$ и $D_{b_-}^{\alpha}f$ постоје за скоро свако $x \in [a,b]$.*

Напомена 2.13. [3, 11] *У специјалном случају када је $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, односно $f(t) = (b-t)^{\beta-1}$, $t \in [a,b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, важи*

$$\left(D_{a_+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha \geq 0,\ \beta > 0,$$

$$\left(D_{b_-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1}\right)(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad \alpha \geq 0,\ \beta > 0.$$

Из последње две једнакости се може видети да ако је $\beta = 1$ и $\alpha \geq 0$ онда

$$D_{a_+}^{\alpha}1(x) = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad D_{b_-}^{\alpha}1(x) = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (0 < \alpha < 1)$$

тј. Риман-Лиувилов извод разломљеног реда α константе C не мора бити 0

$$D_{a_+}^{\alpha}C(x) = C\frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad D_{b_-}^{\alpha}C(x) = C\frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

У општем случају Риман-Лиувилов оператор диференцирања не задовољава својство комутативности.

Теорема 2.14. [3, 11] *Нека је $\alpha > 0$. Тада за свако $f \in L_p(a,b)$ важи*

$$D_{a_+}^{\alpha}I_{a_+}^{\alpha}f(x) = f(x) \quad \text{и} \quad D_{b_-}^{\alpha}I_{b_-}^{\alpha}f(x) = f(x) \tag{2.12}$$

скоро свуда на $[a,b]$.

На основу претходне теореме следи да је Риман-Лиувилов извод $D_{a_+}^{\alpha}$ ($D_{b_-}^{\alpha}$) леви инверзни оператор за Риман-Лиувилов интеграл $I_{a_+}^{\alpha}$ ($I_{b_-}^{\alpha}$). У општем случају се не може тврдити да је и десни.

Теорема 2.15. [11] *Ако је $\alpha \geq \beta > 0$, онда, за $f \in L_p(a,b)\,(1 \leq p \leq \infty)$, релација*

$$(D^{\beta}_{a+} I^{\alpha}_{a+} f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{a+} f(x) \quad \text{и} \quad (D^{\beta}_{b-} I^{\alpha}_{b-} f)(x) = I^{\alpha-\beta}_{b-} f(x) \tag{2.13}$$

важи скоро свуда на $[a,b]$.

Једнакости (2.12) су специјалан случај једнакости (2.13).

Веза између Капутовог и Риман-Лиувиловог извода је дата са

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+} f(t) = D^{\alpha}_{a+} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right), \quad t \in [a,b],$$

$${}^{C}D^{\alpha}_{b-} f(t) = D^{\alpha}_{b-} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(b) \right), \quad t \in [a,b].$$

За $0 < \alpha < 1$ и $t \in [a,b]$, важи

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+} f(t) = D^{\alpha}_{a+} (f(t) - f(a)) = D^{\alpha}_{a+} f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)(t-a)^{\alpha}},$$

$${}^{C}D^{\alpha}_{b-} f(t) = D^{\alpha}_{b-} (f(t) - f(b)) = D^{\alpha}_{b-} f(t) - \frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)(b-t)^{\alpha}}.$$

Користећи везу између Риман-Лиувиловог и Капутовог извода се долази до теореме

Теорема 2.16. [11] *Нека је $n-1 \leq \alpha < n, \alpha \in \mathbb{R}_+$ и нека је $f(x)$ функција за коју постоје Капутови изводи разломљеног реда ${}^{C}D^{\alpha}_{a+} f$ и ${}^{C}D^{\alpha}_{b-} f$ заједно са Риман-Лиувиловим изводима разломљеног реда $D^{\alpha}_{a+} f$ и $D^{\alpha}_{b-} f$, тада, важи следећа веза између ових извода*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{a+} f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a),\ x \in [a,b],$$

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-} f\right)(x) = \left(D^{\alpha}_{b-} f\right)(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(b),\ x \in [a,b].$$

Последица 2.17. *Нека су испуњени услови теореме 2.16. Тада важи*

$${}^{C}D^{\alpha}_{a+} f = D^{\alpha}_{a+} f, \quad \left({}^{C}D^{\alpha}_{b-} f = D^{\alpha}_{b-} f\right),$$

ако и само ако је

$$\frac{d^k f(a)}{dx^k} = 0, \quad \left(\frac{d^k f(b)}{dx^k} = 0\right) \quad \text{за} \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

3 Гранични проблем са Капутовим изводом разломљеног реда

У овом поглављу ће бити изведени закључци који се односе на конкретан гранични проблем, чија се граница састоји од две тачке. Проблем је дефинисан на интервалу $[0,1]$, са Капутовим изводом реда $2-\delta$, где је $0<\delta<1$, и моделује супердифузионо кретање честица, уз присуство конвекције:

$$-{}^{C}D_{0_+}^{2-\delta}u(x)+b(x)u'(x)+c(x)u(x)=f(x), \quad x\in(0,1), \tag{3.1}$$

$$u(0)-\alpha_0u'(0)=\gamma_0, \tag{3.2}$$

$$u(1)+\alpha_1u'(1)=\gamma_1, \tag{3.3}$$

где су константе $\alpha_0,\alpha_1,\gamma_0,\gamma_1$ и функције b,c и f дате. Претпоставља се да $b,c,f\in C^q[0,1]$ за неки цео број $q\geq 1$, $c\geq 0$ на $[0,1]$, $\alpha_0\geq\frac{1}{1-\delta}$ и $\alpha_1\geq 0$.

Многе друге класе граничних проблема су разматране у [13]. Нумеричке методе за решавање датог проблема су представљене и опширније разматране у [8, 13, 17, 19].

3.1 Егзистенција и јединственост решења

При испитивању егзистенције и јединствености решења проблема (3.1)-(3.3) се користи принцип поређења/максимума. У овом поглављу ће бити изложен поменути принцип, а затим и теореме које следе из њега а односе се на јединственост и егзистенцију решења.

Лема 3.1. *[2] Ако функција $u\in C^2[0,1]$ достиже глобални минимум у тачки $x_0\in(0,1)$ тада важи*

$${}^{C}D_{0_+}^{2-\delta}u(x_0)\geq\frac{x_0^{\delta-2}}{\Gamma(\delta)}\{(1-\delta)[u(0)-u(x_0)]-x_0u'(0)\}, \tag{3.4}$$

за свако $0<\delta<1$.

Доказ. Дефинише се помоћна функција $h(x)=u(x)-u(x_0)$, $x\in[0,1]$.

Важи

$$h(x) \geq 0, \quad h(x_0) = h'(x_0) = 0, \quad h''(x_0) \geq 0 \quad \text{и} \quad {}^C D_{0_+}^{2-\delta} h(x) = {}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x),$$

за $x \in [0,1]$.

Примењујући парцијалну интеграцију на

$${}^C D_{0_+}^{2-\delta} h(x_0) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\delta-1} h''(t) \mathrm{d}t$$

добија се

$$\Gamma(\delta)\, {}^C D_{0_+}^{2-\delta} h(x_0) = (x_0 - t)^{\delta-1} h'(t)|_{t=0}^{x_0} - \int_0^{x_0} (1-\delta)(x_0 - t)^{\delta-2} h'(t) \mathrm{d}t.$$

Из $h'(x_0) = 0$ и из ограничености $h''(x_0)$, следи да постоји $\mu_1(x) \in C[0,1]$ тако да је $h'(x) = (x_0 - x)\mu_1(x)$. Из претходног ће за $0 < \delta < 1$, важити

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h'(x)}{(x_0 - x)^{1-\delta}} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)\mu_1(x)}{(x_0 - x)^{1-\delta}} = \lim_{x \to x_0} (x_0 - x)^{\delta} \mu_1(x) = 0.$$

Одатле следи

$$\Gamma(\delta)\, {}^C D_{0_+}^{2-\delta} h(x_0) = -x_0^{\delta-1} h'(0) - (1-\delta) \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\delta-2} h'(t) \mathrm{d}t.$$

Примењујући опет парцијалну интеграцију на претходни интеграл добија се

$$\begin{aligned} \Gamma(\delta)\, {}^C D_{0_+}^{2-\delta} h(x_0) &= -x_0^{\delta-1} h'(0) - (1-\delta) \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\delta-2} h'(t) \mathrm{d}t \\ &= -x_0^{\delta-1} h'(0) - (1-\delta) \left[(x_0 - t)^{\delta-2} h(t)|_{t=0}^{x_0} - (2-\delta) \int_0^{x_0} (x_0 - t)^{\delta-3} h(t) \mathrm{d}t \right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из $h(x_0) = h'(x_0) = 0$ и из ограничености $h''(x_0)$ следи да постоји $\mu_2(x) \in C[0,1]$ тако да је $h(x) = (x_0 - x)^2 \mu_2(x)$. Одатле следи

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{(x_0 - x)^{2-\delta}} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x_0 - x)^2 \mu_2(x)}{(x_0 - x)^{2-\delta}} = \lim_{x \to x_0} (x_0 - x)^{\delta} \mu_2(x) = 0.$$

Користећи претходно и $h(x) \geq 0$ у (3.5), добија се

$$\Gamma(\delta)\,{}^C D_{0_+}^{2-\delta} h(x_0) = -x_0^{\delta-1} h'(0) - (1-\delta)\left[-x_0^{\delta-2}h(0) - (2-\delta)\int_0^{x_0}(x_0-t)^{\delta-3}h(t)\mathrm{dt}\right]$$
$$= -\,x_0^{\delta-1}h'(0) + (1-\delta)x_0^{\delta-2}h(0) + (1-\delta)(2-\delta)\int_0^{x_0}(x_0-t)^{\delta-3}h(t)\mathrm{dt}$$
$$\geq -\,x_0^{\delta-1}h'(0) + (1-\delta)x_0^{\delta-2}h(0) = -x_0^{\delta-1}u'(0) + (1-\delta)x_0^{\delta-2}(u(0)-u(x_0)). \tag{3.6}$$

Овим је лема доказана. $\square$

Претходна лема ће важити и под слабијим условом

$$\textit{(Хипотеза регуларности)} \quad u \in C^2(0,1] \quad \text{и} \quad |u''(x)| \leq Cx^{-\theta} \quad \text{за} \quad 0 < x \leq 1, \tag{3.7}$$

где су C и θ константе тако да је $0 < \theta < 1$.

Лема 3.2 (*Принцип поређења/максимума*). *[1] Нека је $u \in C^2[0,1]$, $b, c \in C[0,1]$ и $c(x) > 0$ за све $x \in (0,1)$. Ако за $\alpha_0 \geq \frac{1}{1-\delta}$ и $\alpha_1 \geq 0$, функција u задовољава*

$$-\,{}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) \geq 0, \quad x \in (0,1), \tag{3.8}$$

$$u(0) - \alpha_0 u'(0) \geq 0, \tag{3.9}$$

$$u(1) + \alpha_1 u'(1) \geq 0, \tag{3.10}$$

тада је $u \geq 0$ на $[0,1]$.

Доказ. Претпоставља се супротно, тј. $u(x) < 0$, $x \in [0,1]$. Тада $u(x)$ има минимум у некој тачки x_0 и $u(x_0) < 0$.

За $x_0 \in (0,1)$ је $u'(x_0) = 0$. Користећи лему 3.1 доказује се да је ${}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) \geq 0$. Посматрају се случајеви кад је $u'(0) \leq 0$ и $u'(0) > 0$.

За $u'(0) \leq 0$, је очигледно да ће из леме 3.1 важити ${}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) \geq 0$. Ако је $u'(0) > 0$, опет, из леме 3.1 следи

$$\begin{aligned}\Gamma(\delta)\,{}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) \geq&(1-\delta)x_0^{\delta-2}(u(0)-u(x_0)) - x_0^{\delta-1}u'(0)\\ =&x_0^{\delta-2}((1-\delta)(u(0)-u(x_0)) - x_0 u'(0)).\end{aligned} \tag{3.11}$$

Како је $\alpha_0 \geq \frac{1}{1-\delta}$ тј. $\alpha_0(1-\delta) \geq 1$ и како из граничног услова (3.9) следи

$u(0) \geq \alpha_0 u'(0)$, добија се

$$(1-\delta)(u(0)-u(x_0)) \geq (1-\delta)(\alpha_0 u'(0)-u(x_0)) \geq u'(0)-(1-\delta)u(x_0).$$

Замењујући претходно у (3.11) следи

$$\begin{aligned}\Gamma(\delta)^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) \geq & x_0^{\delta-2}(u'(0)-(1-\delta)u(x_0)-x_0 u'(0)) \\ = & x_0^{\delta-2}(u'(0)(1-x_0)-(1-\delta)u(x_0)).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Из $u'(0) > 0$, $0 < x_0 < 1$ и $u(x_0) < 0$ се добија ${}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) \geq 0$.

Користећи ${}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) \geq 0$ и $c(x) > 0$ следи

$$-{}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) + b(x_0)u'(x_0) + c(x_0)u(x_0) = -{}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x_0) + c(x_0)u(x_0) < 0,$$

за $x_0 \in (0,1)$. На основу неједнакости (3.8), добија се контрадикција.

Ако је $x_0 = 0$, из једноставног принципа максимума следи $u'(0^+) \geq 0$. Из претходног и из граничног услова (3.9) следи $u(0) \geq 0$, што је контрадикторно претпоставци $u(x) < 0$, $x \in [0,1]$, с почетка доказа.

Слично се доказује и ако је $x_0 = 1$. Тада из $u'(1^-) \leq 0$, што следи из принципа максимума, и из граничног услова (3.10) следи $u(1) \geq 1$. На основу претпоставке $u(x) < 0$, $x \in [0,1]$ се, опет, добија контрадикција.

$\square$

Лема 3.2 ће важити и ако се услов $u \in C^2[0,1]$ замени хипотезом регуларности (3.7), а услов $c(x) > 0$ замени условом $c(x) \geq 0$ за све $x \in (0,1)$.

Напомена 3.3. *[17] Ако се претпостави да је $c \geq 0$ на $[0,1]$, $\alpha_0 \geq \frac{1}{1-\delta}$ и $\alpha_1 \geq 0$ онда проблем који се разматра задовољава принцип поређења/максимума, из ког следи егзистенција и јединственост решења проблема и [19]. Ако се Робинов гранични услов за $x = 0$ замени Дирихлеовим граничним условом, онда принцип поређења/максимума не мора да важи.*

Простор $C^{q,\nu}(0,1]$, за цео број $q \geq 1$ и $\nu \in (-\infty, 1)$, је простор којем припадају функције $y : [0,1] \to \mathbb{R}$ такве да $y \in C^q(0,1]$ и важи

$$|y^{(i)}(x)| \leq \begin{cases} C & \text{за } i < 1-\nu, \\ C(1+|\ln x|) & \text{за } i = 1-\nu, \\ Cx^{1-\nu-i} & \text{за } i > 1-\nu, \end{cases} \tag{3.13}$$

за $0 < x \leq 1$, $i = 1, 2, ..., q$ и неку позитивну константу C. Очигледно важи, $C^q[0,1] \subset C^{q,\nu}(0,1] \subset C[0,1]$.

Теорема 3.4. *[13] Нека $b, c, f \in C^{q,\nu}(0,1]$ за цео број $q \geq 1$ и $\nu \in (-\infty, 1)$. Дефинише се $\mu = \max\{\nu, \delta\}$ и S, скуп свих функција ω дефинисаних на $[0,1]$ за свако ${}^C D_{0+}^{2-\delta} w \in C^{q,\mu}(0,1]$. Ако се претпостави да проблем (3.1)-(3.3) за $f \equiv 0$, $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_1 = 0$ има у S једино тривијално решење $\omega \equiv 0$ онда следи да има јединствено решење $u \in S$. Такође, важиће и да $u \in C^1[0,1]$.*

Теорема 3.5. *[19] Нека је $b, c, f \in C^{q,\nu}(0,1]$ за неки цео број $q \geq 2$ и $\nu \leq \delta$. Ако се претпостави да је $c \geq 0, \alpha_1 \geq 0$ и $\alpha_0 \geq \frac{1}{1-\delta}$ онда проблема (3.1)-(3.3) има јединствено решење u, тако да је $u \in C^1[0,1] \cap C^{q+1}(0,1]$ и за неку константу C важи*

$$|u^{(i)}(x)| \leq \begin{cases} C & \text{за } i = 0, 1, \\ Cx^{2-\delta-i} & \text{за } i = 2, 3, ..., q+1 \end{cases} \tag{3.14}$$

за све $x \in (0,1]$.

3.2 Решавање проблема методом коначних разлика

Ова метода се заснива на замени извода количницима коначних разлика [15].

Нека је N позитиван цео број и $h = \frac{1}{N}$. На интервалу $[0,1]$ се уводи равномерна мрежа

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \,|\, i = 0, ..., N; h = 1/N\}.$$

Тачке x_i, $i = 0, ..., N$ се називају чворовима мреже. Уводи се такође скуп $\omega_h = \bar{\omega}_h \cap (0,1)$.

На равномерној мрежи први извод функције u у тачки x_i се може апроксимирати са:

$$\text{коначном разликом унапред} \quad u_{x,i} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h},$$

$$\text{коначном разликом уназад} \quad u_{\bar{x},i} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h},$$

$$\text{централном коначном разликом} \quad u_{\mathring{x},i} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = \frac{u_{x,i} + u_{\bar{x},i}}{2}.$$

Други извод функције u у тачки x_i обично се апроксимира са:

$$u_{\bar{x}x,i} = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} = \frac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h}.$$

Претпоставља се да функција $u(x)$ има непрекидан и ограничен други извод. Из Тејлоровог развоја

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + h^2 u''(\xi)/2, \quad \xi \in (x, x+h)$$

се добија

$$u_x = (u(x+h) - u(x))/h = u'(x) + (h/2)u''(\xi), \quad \text{тј.} \quad u' = u_x + O(h).$$

На сличан начин се добија $u' = u_{\bar{x}} + O(h)$. Ако се претпостави да $u(x)$ има на интервалу $[x-h, x+h]$ непрекидан и ограничен трећи извод може се $u'(x)$ апроксимирати с тачношћу $O(h^2)$. Тако из Тејлоровог развоја

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + (h^2/2)u''(x) \pm (h^3/6)u'''(\xi^{\pm}),$$

за $\xi^+ \in (x, x+h)$, $\xi^- \in (x-h, x)$, добија се

$$u_{\mathring{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + \frac{h^2}{12}[u'''(\xi^+) + u'''(\xi^-)] = u'(x) + \frac{h^2}{6}u'''(\xi), \tag{3.15}$$

за $\xi \in (x-h, x+h)$ тј. $u' = u_{\mathring{x}} + O(h^2)$.
Последња једнакост у (3.15) следи из следеће леме.

Лема 3.6. *Ако је f непрекидна функција на $[a,b]$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ су истог знака, онда постоји $\xi \in [a,b]$, тако да важи*

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\xi).$$

У случају другог извода $u''(x)$, за $u \in C^4[a,b]$, важи

$$u_{\bar{x}x} = (u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))/h^2 = u''(x) + O(h^2).$$

Ове апроксимације ће тежити вредностима извода функције $u(x)$ у чворовима, када $h \to 0$, тј. када се мрежа згушњава. Може се приметити да је та конвергенција бржа код апроксимације централним количницима коначних разлика $u_{\mathring{x}}$ и $u_{\bar{x}x}$, јер је главни члан грешке $O(h^2)$.

Континуална величина $u(x)$ се замењује вектором $\mathbf{v}= (v_0, ..., v_N)^T$, при чему је $v_i \approx u(x_i)$.

Леви Капутов извод разломљеног реда δ, $0 < \delta < 1$, функције u, се апроксимира на следећи начин [16]:

$$
\begin{aligned}
{}^{C}D^{\delta}_{0_+}u(x_i) &= \frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\int_0^{x_i}(x_i-t)^{1-\delta}u''(t)\mathrm{dt} = \frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\sum_{k=0}^{i-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_i-t)^{1-\delta}u''(t)\mathrm{dt}\\
&\approx \frac{1}{\Gamma(2-\delta)}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{u(x_{k+2})-2u(x_{k+1})+u(x_k)}{h^2}\int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_i-t)^{1-\delta}\mathrm{dt}\\
&\approx \frac{1}{h^{\delta}\Gamma(3-\delta)}\sum_{k=0}^{i-1}d_{i-k}(u(x_{k+2})-2u(x_{k+1})+u(x_k)) = (\Delta^{\delta}_{0_+}u)_i,
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

где је

$$
d_r = r_+^{\delta} - (r-1)_+^{\delta} \quad \text{за све целе бројеве } r, \tag{3.17}
$$

и

$$
r_+ = \begin{cases} r & \text{за } r \geq 0,\\ 0 & \text{за } r < 0. \end{cases}
$$

Може се приметити да је $d_r = 0$ за $r \leq 0$.

Са $\|g\|_\infty = \max_{x\in[0,1]}|g(x)|$ ће се означавати униформна норма за $g \in C[0,1]$. У неједнакостима ће се са C означавати константа која зависи од података проблема, али не зависи од мреже која се користи за нумеричко решавање проблема.

3.2.1 Апроксимација проблема методом коначних разлика

У овом поглављу се посматра проблем (3.1)-(3.3). Апроксимира се следећом диференцијском шемом:

$$
\begin{aligned}
-\Delta^{2-\delta}_{0_+}v + bv_{\mathring{x}} + cv = f, &\quad x \in \omega_h,\\
v_0 - \alpha_0 v_{x,0} = \gamma_0,&\\
v_N + \alpha_1 v_{\bar{x},N} = \gamma_1.&
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Добија се следећи систем једначина

$$
\begin{aligned}
v_0 - \alpha_0 \frac{v_1 - v_0}{h} &= \gamma_0, \\
\sum_{k=0}^{j-1} a_{jk} v_j &= f_j, \quad j = 1, 2, ..., N-1, \\
v_N + \alpha_1 \frac{v_N - v_{N-1}}{h} &= \gamma_1,
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

где је

$$a_{j0} = \frac{-d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} - \delta_{j1}\frac{b_1}{2h}, \tag{3.20}$$

$$a_{j1} = \frac{-d_{j-1} + 2d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} - \delta_{j2}\frac{b_2}{2h} + \delta_{j1}c_1, \tag{3.21}$$

$$a_{jk} = \frac{-d_{j-k} + 2d_{j-k+1} - d_{j-k+2}}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} + \frac{b_j}{2h}(\delta_{j,k-1} - \delta_{j,k+1}) + \delta_{jk}c_j \tag{3.22}$$

за $j = 1, 2, ..., N-1$, $k = 2, 3, ..., N$ и

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{за } j = k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Са f_j, b_j, c_j, $j = 1, ..., N-1$ се означавају вредности функција f, b, c респективно, у чвору x_j, $j = 1, ..., N-1$.

Добијени систем се представља у матричном облику $A\mathbf{v} = \mathbf{f}$, где је $A = (a_{jk})_{j,k=0}^{N}$ матрица димензије $(N+1) \times (N+1)$, а $\mathbf{f} := (\gamma_0 \; f_1 \; f_2 \ldots f_{N-1} \; \gamma_1)^T$ вектор димензије $N+1$, који одговарају дискретизацији (3.19).

Нулта врста матрице A је $((1+\alpha_0 h^{-1}), \quad -\alpha_0 h^{-1}, \quad 0, \quad 0, ..., 0)$, а N-та врста је $(0, \quad 0, ..., 0, \; -\alpha_1 h^{-1}, \quad (1+\alpha_1 h^{-1}))$.

Лема 3.7. *Коефицијенти d_j из формуле* (3.16) *имају следеће особине:*

1. $d_j > 0$, *за* $j \in \mathbb{N}$,

2. d_j *је опадајући низ, тј.* $1 = d_1 > d_2 > ... > d_{N-1} > 0$,

3. $2d_j - d_{j-1} > 0$ *за* $j = 1$ *и* $j = 3, 4, ..., N-1$,

4. $-d_{j+1} + 2d_j - d_{j-1} < 0$, *за* $j = 2, ..., N-1$.

Доказ.
1. Како је $j > 0$ и $\delta > 0$, важи $j^\delta > (j-1)^\delta$, а одатле следи $d_j > 0$.

2. Користећи Кошијеву теорему о средњој вредности добија се

$$\frac{d_j}{d_{j+1}} = \frac{j^\delta - (j-1)^\delta}{(j+1)^\delta - j^\delta} = \frac{\delta\xi^{\delta-1}}{\delta(\xi+1)^{\delta-1}} = \left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{1-\delta} > 1, \quad \xi \in (j-1, j),$$

тј. низ d_j је опадајући.

3. За $j = 1$, важи

$$2d_1 - d_0 = 2d_1 > 0.$$

У случају кад је $j = 2$, знак за

$$2d_2 - d_1 = 2d_2 - 1 = 2(2^\delta - 1) - 1 = 2^{\delta+1} - 3$$

зависи од δ.

За остале вредности $j = 3, ..., N-1$, важи

$$\begin{aligned} 2d_j - d_{j-1} =& 2j^\delta - 2(j-1)^\delta - (j-1)^\delta + (j-2)^\delta \\ =& 2\left[(j-1)^\delta - (j-2)^\delta\right]\left[\frac{j^\delta - (j-1)^\delta}{(j-1)^\delta - (j-2)^\delta} - \frac{1}{2}\right]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Користећи Кошијеву теорему о средњој вредности, за $\theta \in (j-1, j)$ важи

$$\frac{j^\delta - (j-1)^\delta}{(j-1)^\delta - (j-2)^\delta} = \frac{\delta\theta^{\delta-1}}{\delta(\theta-1)^{\delta-1}} = \left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{1-\delta} > \left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-\delta} > \frac{1}{2},$$

из $\theta > j-1 \geq 2$. Из претходног и из (3.23) следи $2d_j - d_{j-1} > 0$.

4. Уводи се функција $f(x) = x^\delta - (x-1)^\delta$. Из Тејлоровог развоја, за $\xi^+ \in (x, x+h)$, $\xi^- \in (x-h, x)$ важи

$$f(x \pm h) = f(x) \pm hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi^\pm).$$

Одатле важи

$$\begin{aligned} f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) =& f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi^+) - 2f(x) + \\ & f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi^-) = \frac{h^2}{2}f''(\xi^+) + \frac{h^2}{2}f''(\xi^-) = h^2 f''(\xi), \end{aligned}$$

за $\xi \in (x-h, x+h)$.

Из претходног следи

$$-d_{j+1} + 2d_j - d_{j-1} = -1 \cdot f''(\xi) = -\,\delta(\delta-1)\left[\xi^{\delta-2} - (\xi-1)^{\delta-2}\right]$$

$$= \delta(1-\delta)(\xi-1)^{\delta-2}\left[\left(\frac{\xi}{\xi-1}\right)^{\delta-2}-1\right] = \delta(1-\delta)(\xi-1)^{\delta-2}\left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{2-\delta}-1\right],$$

за $\xi \in (j-1, j+1)$.
Како је $0 < \delta < 1$, следи $\delta > 0, (1-\delta) > 0$. Важи и $(\xi-1)^{\delta-2} > 0$ и $\left[\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{2-\delta}-1\right] < 0$ јер је $\left(1-\frac{1}{\xi}\right)^{2-\delta} < 1$. Из претходног следи $-d_{j+1}+2d_j-d_{j-1} < 0$. □

Из претходне леме се могу извести следеће неједнакости за елементе матрице A:

$a_{j1} > 0$ за $j = 3, 4, ..., N-1$, јер је тада $a_{j1} = \frac{-d_{j-1}+2d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}$,

$a_{jk} < 0$ за $j = 4, ..., N-1$ и $k = 2, ..., j-2$, јер је тада $a_{jk} = \frac{-d_{j-k}+2d_{j-k+1}-d_{j-k+2}}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}$.

Важиће и $a_{jj} > 0$ за $j = 1, 2, ..., N-1$ из (3.20), (3.21), (3.22), (3.17) и $c \geq 0$.

Лако се показује да важе и следеће неједнакости:

$$\begin{aligned} a_{00} > 0, \quad a_{01} < 0, \quad a_{N,N-1} \leq 0, \quad a_{NN} > 0, \\ a_{j0} = \frac{-d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} < 0 \quad \text{за} \quad j = 2, 3, ..., N-1. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Остало је да се провери знак преосталих поддијагоналних и наддијагоналних елемената.
Разматра се прво a_{10}. Важи

$$a_{10} = \frac{-1}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} - \frac{b_1}{2h} \leq \frac{-1}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} + \frac{\|b\|_\infty}{2h}.$$

Десна страна неједнакости ће бити непозитивна ако је

$$\frac{\|b\|_\infty}{2h} \leq \frac{1}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)},$$

односно

$$h \leq \left[\frac{2}{\|b\|_\infty \Gamma(1+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\delta}}. \tag{3.25}$$

Под истим условом и за наддијагоналне елементе важи $a_{j,j+1} \leq 0$ за $j = 1, ..., N-1$.

Елемент a_{21} је једнак

$$a_{21} = \frac{2^{1+\delta} - 3}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} - \frac{b_2}{2h}, \tag{3.26}$$

па његов знак зависи од δ, h и b.

Користећи особине коефицијената d_j за преостале поддијагоналне елементе $a_{j,j-1} = \frac{-d_1+2d_2-d_3}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} - \frac{b_j}{2h}$ за $j = 3, 4, ..., N-1$, закључује се да су негативни ако је испуњен услов

$$h \leq \left[\frac{2(d_1 - 2d_2 + d_3)}{\|b\|_\infty \Gamma(1+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\delta}}, \tag{3.27}$$

тј.

$$a_{j,j-1} = \frac{-d_1 + 2d_2 - d_3}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} - \frac{b_j}{2h} \leq \frac{-d_1 + 2d_2 - d_3}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} + \frac{\|b\|_\infty}{2h} \leq 0.$$

Како је $2(d_1 - 2d_2 + d_3) < 2$ еквивалентно са $d_3 - 2d_2 < 0$, што је испуњено, следи да је услов (3.27) много јачи од услова (3.25).

Напомена 3.8. *Може се приметити да ако је $b \geq 0$ на $[0,1]$, тада из (3.20), (3.21) и (3.22) следи да $a_{j,j-1} \leq 0$ за $j = 1, 3, 4, ..., N-1$, тако да услов (3.27) може бити изостављен.*

На основу свега претходног, матрица A ће изгледати на следећи начин

$$\begin{bmatrix}
+ & - & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 \\
- & + & - & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 \\
- & (3.26) & + & - & 0\ldots0 & 0 & 0 \\
- & + & - & + & -\ldots0 & 0 & 0 \\
- & + & - & - & +\ldots0 & 0 & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
- & + & - & - & -\cdots+ & - & 0 \\
- & + & - & - & -\cdots- & + & - \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & - & +
\end{bmatrix}$$

Монотоност матрице дискретизације A:

За анализу грешака ове методе потребна је монотоност матрице A, која се доказује користећи M-матрице.

Дефиниција 3.1. *Нека је* $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{N}$ *матрица са сопственим вредностима* λ_i, $i = 0, ..., N$. *Спектрални радијус матрице* A *је број*

$$\rho(A) = max_{0 \leq i \leq N} |\lambda_i|.$$

Дефиниција 3.2. *Свака матрица облика*

$$A = sI - B, \quad s > 0, B \geq 0,$$

где је $s \geq \rho(B)$ *и* I *јединична матрица, се назива* M*-матрица.*

Теорема 3.9. *Квадратна матрица* A *је монотона ако и само ако је регуларна и* $A^{-1} \geq 0$.

Неједнакост између две матрице или два вектора представља неједнакост између одговарајућих парова елемената матрица или вектора.

Теорема 3.10. *Квадратна матрица* $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{N}$ *је* M*-матрица ако је регуларна и* $A^{-1} \geq 0$ *и важи* $a_{ij} \leq 0$ *за све* $i, j = 0, .., N$, $i \neq j$.

Теорема 3.11. *Квадратна матрица* $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{N}$ *за коју важи* $a_{ij} \leq 0$ *за све* $i, j = 0, .., N$, $i \neq j$ *је* M*-матрица ако и само ако постоји позитиван вектор* z *такав да је* $Az > 0$.

Теорема 3.12. M*-матрица* $(a_{ij})_{i,j=0}^{N}$ *је монотона матрица са својствима* $a_{ii} > 0$ *и* $a_{ij} \leq 0$ *за* $i \neq j$.

Лема 3.13. *Нека је* A *монотона матрица и нека је* v *вектор са нормом* $\|v\|_\infty = 1$ *такав да је* $\min_i (Av)_i \geq \alpha > 0$. *Тада је* $\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}$.

Више о M-матрицама се може наћи у [6].

Препрека за доказивање да је $A^{-1} \geq 0$ су позитивни недијагонални елементи у колони 1 матрице A. Матрица A се трансформише тако да се у нултој колони добију сви елементи једнаки 0, осим a_{00} који је различит од 0. Ово се постиже тако што се одузме прва врста матрице, помножена одговарајућим множитељем $\frac{a_{i0}}{a_{00}}$ од врсте i, редом за $i = 1, ..., N-1$. Тако се добија трансформисана матрица A'

$$A' = \underbrace{E^{(N-1)} E^{(N-2)} ... E^{(1)}}_{E} A \tag{3.28}$$

где су $E^{(k)} := \left(e_{ij}^{(k)}\right)_{i,j=0}^{N}$ елементарне матрице и

$$e_{ij}^{(k)} := \delta_{ij} - \frac{a_{k0}}{a_{00}}\delta_{ik}\delta_{j0}.$$

Одатле је матрица E следећег облика

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\dots0 & 0 \\ -\frac{a_{10}}{a_{00}} & 1 & 0 & 0\dots0 & 0 \\ -\frac{a_{20}}{a_{00}} & 0 & 1 & 0\dots0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{N-1,0}}{a_{00}} & 0 & 0 & 0\dots1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots0 & 1 \end{bmatrix}$$

Писаће се $A' = \left(a'_{jk}\right)_{j,k=0}^{N}$.

Нулта врста матрице A' је $(a_{00}\; a_{01}\; 0\; 0 \dots 0)$, где је $a_{00} = 1 + \alpha_0 h^{-1}$ и $a_{01} = -\alpha_0 h^{-1}$. Из конструкције матрице A' је $a'_{j0} = 0$ за $j = 1, 2, ..., N$. За $k > 1$ и за све j је очигледно $a'_{jk} = a_{jk}$.

Из следеће леме се могу одредити остали елементи прве колоне матрице A'.

Лема 3.14. *Ако се претпостави да h задовољава услов*

$$h \leq \min\left\{ \left[\frac{d_2(2^{1-\delta}-1)}{\|b\|_\infty \Gamma(1+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\delta}}, \frac{\alpha_0}{2}(2^{1-\delta}-1) \right\}. \tag{3.29}$$

онда ће за елементе прве колоне матрице A' важити

$$a'_{11} > 0 \quad \text{и} \quad a'_{j1} < 0 \quad \text{за} \quad j = 2, 3, ..., N-1.$$

Доказ претходне леме се може наћи у [18].

Може се доказати да је услов стабилности (3.29) много рестриктивнији од услова (3.27).

Лема 3.15. *Важи*

$$d_2(2^{1-\delta}-1) < 2(d_1 - 2d_2 + d_3) \quad \text{за} \quad \delta \in (0,1). \tag{3.30}$$

Доказ. Уводи се функција

$$
\begin{aligned}
g(\delta) = 2(d_1 - 2d_2 + d_3) - d_2(2^{1-\delta} - 1) =& 2(1 - 2(2^\delta - 1) + 3^\delta - 2^\delta) - (2^\delta - 1)(2^{1-\delta-1}) \\
=& 2 \cdot 3^\delta - 6 \cdot 2^\delta + 6 - (2^\delta - 1)(2^{1-\delta} - 1).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Тада је

$$
\begin{aligned}
g'(\delta) =& 5 \cdot 2^\delta \ln 2 - 2 \cdot 3^\delta \ln 3 + 2^{1-\delta} \ln 2 > 5 \cdot 2^\delta \ln 2 - 2 \cdot 3^\delta \ln 3 \\
=& 2 \cdot 3^\delta \ln 3 \left[\frac{5 \cdot 2^\delta \ln 2}{2 \cdot 3^\delta \ln 3} - 1 \right] = 2 \cdot 3^\delta \ln 3 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^{1-\delta} \frac{5 \ln 2}{3 \ln 3} - 1 \right] > 0
\end{aligned}
$$

јер је $5 \ln 2 > 3 \ln 3$. Тако је g строго растућа функција и $g(1) = 0$, из чега следи да је $g(\delta) > 0$, за $0 < \delta < 1$.

□

Ово се користи у следећој теореми, у којој се доказује да постоји A^{-1} и да је $A^{-1} \geq 0$, тј. матрица A је монотона.

Теорема 3.16. *Ако h задовољава услов стабилности* (3.29)*, матрица A' је M-матрица, A је инвертибилна и $A^{-1} \geq 0$.*

Доказ. Ако је испуњен услов (3.29), онда су испуњени и услови (3.27) и (3.25), на основу леме 3.15 и тога што је услов (3.27) много јачи од услова (3.25). Зато ће елементи матрице A' (димензије $(N+1) \times (N+1)$) бити позитивни на главној дијагонали и непозитивни иначе, што следи из особина матрице A, конструкције матрице A' и леме 3.14. Такође, важи да је

$$
\sum_{k=0}^{N} a'_{0k} = \sum_{k=0}^{N} a'_{Nk} = 1,
$$

док за $j = 1, 2, ..., N-1$ важи

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} a'_{jk} =& 0 + \left(a_{j1} + \frac{\alpha_0 h^{-1}}{1 + \alpha_0 h^{-1}} a_{j0} \right) + \sum_{k=2}^{N} a_{jk} \\
=& \left(\frac{\alpha_0 h^{-1}}{1 + \alpha_0 h^{-1}} - 1 \right) a_{j0} + \sum_{k=0}^{N} a_{jk}.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Из диференцијске схеме и система (3.19) следи да је $\sum_{k=0}^{N} a_{jk} = c_j$.

Како су сви елементи $a_{j0},\ j = 1, ..., N-1$ негативни, закључује се да је

$$\sum_{k=0}^{N} a'_{jk} = \frac{-a_{j0}}{1+\alpha_0 h^{-1}} + c_j > 0.$$

Из претходног се може закључити да $A'(1,1,...,1)^T > \vec{0}$, па из теореме 3.11 следи да је матрица A' M - матрица. Такође важи и да $(A')^{-1}$ постоји и $(A')^{-1} \geq 0$.

Како је

$$A' = EA,$$

следи да

$$A^{-1} = (A')^{-1}E$$

постоји и да је $A^{-1} \geq 0$, јер је производ матрица које имају ненегативне елементе. □

Напомена 3.17. *Из напомене 3.8 се може закључити да ако је $b \geq 0$ на $[0,1]$ тада је за монотоност матрице A једино довољан услов* (3.25). *Специјално, ако је $0 \leq b \leq \frac{2}{\Gamma(1+\delta)}$ на $[0,1]$, тада услов* (3.25) *важи за било коју вредност параметра N.*

3.2.2 Анализе грешке

У овом поглављу ће бити одређена тачност решења диференцијске схеме (3.18).
Нека је $\mathbf{z} = u - \mathbf{v}$ грешка диференцијске схеме.
Тада се из $A\mathbf{v} = \mathbf{f}$ добија да грешка $\mathbf{z}$ задовољава систем:

$$A\mathbf{z} = A\mathbf{u} - \mathbf{f} =: \boldsymbol{\tau},$$

где $A\mathbf{u}$ означава производ матрице A и вектора који представља рестрикцију функције $u(\cdot)$ на мрежи.
Према томе, дефинише се вектор грешке $\boldsymbol{\tau} := (\tau_0\, \tau_1 \dots \tau_N)^T$, тако да задовољава

$$A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \boldsymbol{\tau}.$$

Одатле следи

$$\begin{aligned}\tau_0 = (A\mathbf{u})_0 - \gamma_0 =& (1+\alpha_0 h^{-1})u(x_0) - \alpha_0 h^{-1}u(x_1) - u(x_0) + \alpha_0 u'(x_0)\\ =& \alpha_0 u'(x_0) - \alpha_0 h^{-1}[u(x_1) - u(x_0)],\end{aligned} \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\tau_N = (A\mathbf{u})_N - \gamma_1 =& -\alpha_1 h^{-1}u(x_{N-1}) + (1+\alpha_1 h^{-1})u(x_N) - u(x_N) - \alpha_1 u'(x_N)\\ =& -\alpha_1 u'(x_N) + \alpha_1 h^{-1}[u(x_N) - u(x_{N-1})],\end{aligned} \tag{3.34}$$

и за $j = 1, 2, ..., N-1$,

$$\tau_j = (A\mathbf{u})_j - f(x_j) = (A\mathbf{u})_j +^C D_{0_+}^{2-\delta}u(x_j) - b(x_j)u'(x_j) - c(x_j)u(x_j). \tag{3.35}$$

Лема 3.18. *[19] Постоји константа C, независна од j, тако да је*

$$\sum_{k=1}^{j-1}[(j-k)^\delta - (j-k-1)^\delta]k^{-1-\delta} \le Cj^{\delta-1}, \quad \textit{за све целе бројеве} \quad j \ge 2.$$

Доказ. Са $\lceil x \rceil$, $x \in \mathbb{R}$, се означава најмањи цео број који је већи или једнак x. Примењујући теорему о средњој вредности на функцију $f(x) = x^\delta$ добија се

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\lceil j/2\rceil-1}[(j-k)^\delta - (j-k-1)^\delta]k^{-1-\delta} \le& \sum_{k=1}^{\lceil j/2\rceil-1}\delta(j-k-1)^{\delta-1}k^{-1-\delta}\\ \le \delta(j-\lceil j/2\rceil)^{\delta-1}\sum_{k=1}^{\lceil j/2\rceil-1}k^{-1-\delta} \le& C\delta(j/2)^{\delta-1}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1-\delta} \le Cj^{\delta-1},\end{aligned}$$

јер је $0 < \delta < 1$ па ред $\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1-\delta} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta}}$ конвергира.
Доказује се још и да је $\sum_{k=\lceil j/2\rceil}^{j-1}[(j-k)^\delta - (j-k-1)^\delta]k^{-1-\delta} \le Cj^{\delta-1}$ одакле ће и да следи тврђење леме.

Како је $0 < \delta < 1$ следи

$$\begin{aligned}\sum_{k=\lceil j/2\rceil}^{j-1}[(j-k)^\delta - (j-k-1)^\delta]k^{-1-\delta} \le& \lceil j/2\rceil^{-1-\delta}\sum_{k=\lceil j/2\rceil}^{j-1}[(j-k)^\delta - (j-k-1)^\delta]\\ = \lceil j/2\rceil^{-1-\delta}(j-\lceil j/2\rceil)^\delta \le& (j/2)^{-1-\delta}(j/2)^\delta = 2j^{-1} \le 2j^{\delta-1}.\end{aligned}$$

□

Лема 3.19. *[19] За елементе вектора грешке $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0\,\tau_1\,...\,\tau_N)^T$ у дискретизацији $A\mathbf{v} = \mathbf{f}$ важе следећа ограничења*

$$|\tau_j| \leq \begin{cases} C\alpha_0 h^{1-\delta} & \text{за } j = 0, \\ C & \text{за } j = 1, \\ C(j-1)^{\delta-1} & \text{за } j = 2, 3, ..., N-1, \\ C\alpha_1 h & \text{за } j = N, \end{cases} \tag{3.36}$$

где је C нека константа.

Доказ. Доказује се прво ограничење за τ_0. Може се приметити да из Лагранжове теореме о средњој вредности важи $\frac{u(h)-u(0)}{h-0} = u'(\eta_1)$, за $\eta_1 \in (0, h)$. Тако се добија

$$\begin{aligned} |\tau_0| = \alpha_0 \left| u'(0) - \frac{u(h) - u(0)}{h} \right| &= \alpha_0 \left| u'(0) - u'(\eta_1) \right| = \alpha_0 \left| \int_{t=0}^{\eta_1} u''(t) \mathrm{dt} \right| \\ &\leq \alpha_0 \int_{t=0}^{\eta_1} |u''(t)| \mathrm{dt} \leq \alpha_0 \int_{t=0}^{h} |u''(t)| \mathrm{dt}. \end{aligned}$$

Из теореме 3.5 важи $|u''(t)| \leq C_1 t^{-\delta}$, па следи

$$|\tau_0| \leq \alpha_0 \int_{t=0}^{h} |u''(t)| \mathrm{dt} \leq \alpha_0 C_1 \int_{t=0}^{h} t^{-\delta} \mathrm{dt} \leq \alpha_0 C h^{1-\delta}.$$

На сличан начин се доказује и ограничење за τ_N тј.

$$\begin{aligned} |\tau_N| = \alpha_1 \left| u'(1) - \frac{u(1) - u(1-h)}{h} \right| &= \alpha_1 \left| u'(1) - u'(\eta_2) \right| = \alpha_1 \left| \int_{t=\eta_2}^{1} u''(t) \mathrm{dt} \right| \\ \leq \alpha_1 \int_{t=\eta_2}^{1} |u''(t)| \mathrm{dt} &\leq \alpha_1 \int_{t=1-h}^{1} |u''(t)| \mathrm{dt} \leq \alpha_1 C_2 \int_{t=1-h}^{1} t^{-\delta} \mathrm{dt} \\ &= \alpha_1 C(1 - (1-h)^{1-\delta}) \leq C\alpha_1 h, \end{aligned}$$

где је $\eta_2 \in (1-h, 1)$ добијено из Лагранжове теореме о средњој вредности, а C_2 из теореме 3.5. Неједнакост $1-(1-h)^{1-\delta} \leq h$ важи из $(1-h)^{1-\delta} \geq 1-h$, јер је $1-h < 1$ и $0 < 1-\delta < 1$.

Доказује се сада ограничења за τ_j, где је $j = 2, 3, ..., N-1$.

Из (3.35), (3.20),(3.21),(3.22) и (3.16) следи да се τ_j, $j = 2, ..., N-1$ може написати у следећем облику

$$\tau_j = R_j + \sum_{k=0}^{j-1} \tau_{j,k},$$

где је

$$R_j = b_j \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - (bu')(x_j)$$

и

$$\tau_{j,k} = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_j - s)^{\delta-1} u''(s) \mathrm{ds} - \frac{d_{j-k}}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} [u(x_{k+2}) - 2u(x_{k+1}) + u(x_k)]. \tag{3.37}$$

Из Тејлоровог развоја, леме 3.6 и неједнакости троугла следи

$$\begin{aligned} |R_j| &\leq \|b\|_\infty \left| \frac{1}{2h} \frac{h^2}{2} \left(u''(\xi^+) - u''(\xi^-) \right) \right| \leq \|b\|_\infty \frac{h}{4} \left(\left| u''(\xi^+) \right| + \left| u''(\xi^-) \right| \right) \\ &\leq C_3 h \left| u''(\xi) \right| \leq C_3 h \max_{x \in (x_{j-1}, x_{j+1})} \left| u''(x) \right|, \end{aligned}$$

где су $\xi^+ \in (x_j, x_{j+1})$, $\xi^- \in (x_{j-1}, x_j)$, $\xi \in (x_{j-1}, x_{j+1})$. На основу теореме 3.5, $0 < \delta < 1$ и $hj \leq \frac{1}{N}(N-1) \leq 1$ следи

$$\begin{aligned} |R_j| \leq & C_3 h \max_{x \in (x_{j-1}, x_{j+1})} |u''(x)| \leq C_3 h \max_{x \in (x_{j-1}, x_{j+1})} x^{-\delta} \leq C_3 h (x_{j-1})^{-\delta} \\ \leq & C_3 h [h(j-1)]^{-\delta} = C_3 [h(j-1)]^{1-\delta} (j-1)^{-1} \leq C_3 (j-1)^{\delta-1}. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Користећи теорему о средњој вредности за интеграле добија се

$$\begin{aligned} \tau_{j,k} = & \frac{u''(\eta_3)}{\Gamma(\delta)} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_j - s)^{\delta-1} \mathrm{ds} - \frac{d_{j-k}}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} [u(x_{k+2}) - 2u(x_{k+1}) + u(x_k)] \\ = & \frac{h^\delta d_{j-k}}{\Gamma(1+\delta)} \left[u''(\eta_3) - \frac{u(x_{k+2}) - 2u(x_{k+1}) + u(x_k)}{h^2} \right], \end{aligned}$$

за $\eta_3 \in (x_k, x_{k+1})$.

Из Тејлоровог развоја и леме 3.6 важи

$$\begin{gathered} \frac{1}{h^2} \left(u(x_{k+2}) - 2u(x_{k+1}) + u(x_k) \right) = \\ \frac{1}{h^2} \left(u(x_{k+1}) + hu'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2} u''(\xi^+) - 2u(x_{k+1}) + u(x_{k+1}) - hu'(x_{k+1}) + \frac{h^2}{2} u''(\xi^-) \right) \\ = \frac{1}{2} u''(\xi^+) + \frac{1}{2} u''(\xi^-) = u''(\xi), \end{gathered}$$

за $\xi^+ \in (x_{k+1}, x_{j+2})$, $\xi^- \in (x_k, x_{k+1})$, $\xi \in (x_k, x_{k+2})$, где је $k \geq 1$.

Користећи претходно и Лагранжову теорему о средњој вредности за $\eta_4 \in (x_k, x_{k+2})$ следи

$$\left| u''(\eta_3) - \frac{u(x_{k+2}) - 2u(x_{k+1}) + u(x_k)}{h^2} \right| = |u''(\eta_3) - u''(\xi)| = |(\eta_3 - \xi) u'''(\eta_4)|$$

$$\le C_4 h \max_{x\in(x_k,x_{k+2})} |u'''(x)| \le C_5 h \max_{x\in(x_k,x_{k+2})} x^{-1-\delta} \le C_5 h x_k^{-1-\delta},$$

где је последња неједнакост добијена из теореме 3.5.
Одатле се добија

$$|\tau_{j,k}| \le \frac{C_5 h^{1+\delta} d_{j-k} x_k^{-1-\delta}}{\Gamma(1+\delta)} = \frac{C_5 h^{1+\delta} d_{j-k} (hk)^{-1-\delta}}{\Gamma(1+\delta)} = \frac{C_5 d_{j-k} k^{-1-\delta}}{\Gamma(1+\delta)}, \quad \text{за} \quad k \ge 1.$$

Из леме 3.18 следи

$$\sum_{k=1}^{j-1} |\tau_{j,k}| \le \sum_{k=1}^{j-1} \frac{C_5 d_{j-k} k^{-1-\delta}}{\Gamma(1+\delta)} \le C_6 j^{\delta-1}. \tag{3.39}$$

Како претходно важи за $k \ge 1$, може се одредити и ограничење за $\tau_{j,0}$. Из (3.37) и неједнакости троугла следи

$$|\tau_{j,0}| \le \left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{x_0}^{x_1} (x_j - s)^{\delta-1} u''(s) \mathrm{ds} \right| + \left| \frac{d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} [u(x_2) - 2u(x_1) + u(x_0)] \right|. \tag{3.40}$$

Како је $j = 2, ..., N-1$ и из теореме 3.5 биће

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{x_0}^{x_1} (x_j - s)^{\delta-1} u''(s) \mathrm{ds} \right| &\le \frac{C_7 [x_j - x_1]^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \int_{x_0}^{x_1} s^{-\delta} \mathrm{ds} \\ &= \frac{C_7 [(j-1)h]^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \frac{h^{1-\delta}}{1-\delta} = \frac{C_7 (j-1)^{\delta-1}}{(1-\delta)\Gamma(\delta)}. \end{aligned}$$

За други сабирак из (3.40) важи

$$\begin{aligned} \left| \frac{d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} [u(x_2) - 2u(x_1) + u(x_0)] \right| &= \frac{d_j |(x_2 - x_1) u'(\eta_6) - (x_1 - x_0) u'(\eta_5)|}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} \\ = \frac{d_j h |u'(\eta_6) - u'(\eta_5)|}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} \le \frac{d_j h}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} &\int_{\eta_5}^{\eta_6} |u''(t)| \mathrm{dt} \le \frac{C_8 d_j h}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} \int_0^{2h} t^{-\delta} \mathrm{dt} \\ = \frac{C_8 d_j h}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} \frac{(2h)^{1-\delta}}{1-\delta} &= C_9 d_j \le C_{10} (j-1)^{\delta-1}, \end{aligned}$$

где прва једнакост следи из Лагранжове теореме о средњој вредности за $\eta_5 \in (x_0, x_1)$ и $\eta_6 \in (x_1, x_2)$, а друга неједнакост из теореме 3.5. Замењујући претходно у (3.40) добија се

$$|\tau_{j,0}| \le C_{11} (j-1)^{\delta-1}. \tag{3.41}$$

Из (3.38), (3.39), (3.41) следи

$$|\tau_j| = R_j + \sum_{k=0}^{j-1} \tau_{j,k} \leq C(j-1)^{\delta-1}.$$

Остало је још да се докаже случај $j = 1$. Нека је τ_1 представљено у следећем облику $\tau_1 = R_1 + \tau_{1,0}$, где су

$$R_1 = b_1 \frac{u_2 - u_0}{2h} - (bu')(x_1)$$

и

$$\tau_{1,0} = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^{\delta-1} u''(s) \mathrm{ds} - \frac{d_1[u(x_2) - 2u(x_1) + u(x_0)]}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}.$$

Из неједнакости троугла важи $|\tau_1| \leq |R_1| + |\tau_{1,0}|$. Лагранжова теорема о средњој вредности за $\eta_7 \in (x_0, x_2)$ даје

$$|R_1| \leq \|b\|_\infty |u'(\eta_7) - u'(x_1)| \leq C_{12},$$

за неку константу C_{12}, јер је $u \in C^1[0,1]$.
Користећи теорему (3.5) и својство Бета функције следи

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^{\delta-1} u''(s) \mathrm{ds} \right| \leq \frac{C_{13}}{\Gamma(\delta)} \int_{x_0}^{x_1} (x_1 - s)^{\delta-1} s^{-\delta} = \frac{C_{13}\Gamma(\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\delta)} \leq C_{14}.$$

Као у претходном случају, може се показати

$$\left| \frac{d_1[u(x_2) - 2u(x_1) + u(x_0)]}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} \right| \leq C_{15} d_1 = C_{16}.$$

На основу претходне две неједнакости се добија $|\tau_{1,0}| \leq C_{17}$. Одатле и из $|R_1| \leq C_{12}$ следи $|\tau_1| \leq C$. □

Теорема 3.20. *Нека је $b, c, f \in C^{q,\nu}(0,1]$ за неки цео број $q \geq 2$ и $\nu \leq \delta$. Претпоставља се да је $c \geq 0, \alpha_1 \geq 0$, $\alpha_0 \geq \frac{1}{1-\delta}$ и да ширина мреже h задовољава услов (3.29). Тада постоји константа C таква да грешка дискретизације $A\mathbf{v} = \mathbf{f}$ полазног проблема (3.1)-(3.3) задовољава*

$$\|u - \mathbf{v}\|_{\infty,d} \leq C h^{1-\delta},$$

где је $\|u - \mathbf{v}\|_{\infty,d} = \max_{j=0,1,\ldots,N} |u(x_j) - v_j|$.

Доказ. Дефинише се $\boldsymbol{\tau'} := (\tau_0\, \tau_1' \ldots \tau_{N-1}' \tau_N)^T$ тако да је

$$A'\,\mathbf{z} = \boldsymbol{\tau'}. \tag{3.42}$$

На основу конструкције (3.28) матрице A' је $\boldsymbol{\tau'} = E\,\boldsymbol{\tau}$, тј.

$$\tau_j' := \tau_j - \frac{a_{j0}}{a_{00}}\tau_0 = \tau_j + \frac{\tau_0}{1+\alpha_0 h^{-1}}\left[\frac{d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} + \delta_{j1}\frac{b_1}{2h}\right] \quad \text{за} \quad j = 1, 2, ..., N-1. \tag{3.43}$$

Из теореме 3.16, матрица A' је M-матрица. На основу (3.32) и (3.20) важи да је сума елемената у j-тој врсти

$$\sum_{k=0}^{N} a_{jk}' = \frac{1}{1+\alpha_0 h^{-1}}\left[\frac{d_j}{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)} + \delta_{j1}\frac{b_1}{2h}\right] + c_j \quad \text{за} \quad j = 1, 2, ..., N-1. \tag{3.44}$$

Помножи се j- та једначина система (3.42) са

$$\frac{(1+\alpha_0 h^{-1})h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}{d_j} \quad \text{за} \quad j = 1, 2, ..., N-1. \tag{3.45}$$

На овај начин се добија нова матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{jk})_{j,k=0}^{N}$ и нова десна страна $\boldsymbol{\tilde{\tau}} := (\tau_0\, \tilde{\tau}_1\, \tilde{\tau}_2 ... \tilde{\tau_{N-1}} \tau_N)^T$ за које важи $\tilde{A}\mathbf{z} = \boldsymbol{\tilde{\tau}}$.
Сума елемената матрице A' у нултој и N-тој врсти је једнака 1, а како елементи матрица A' и $\tilde{A}$ имају исти знак и из (3.44) за суму елемената у врстама $j = 2, 3, ..., N-1$ важи

$$\sum_{k=0}^{N} \tilde{a}_{jk}' = 1 + \frac{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}{d_j}\left(\delta_{j1}\frac{b_1}{2h} + (1+\alpha_0 h^{-1})c_j\right) \geq 1.$$

Ако је $j = 1$, услов стабилности (3.29) даје

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} \tilde{a}_{1k}' \geq & 1 - \frac{\|b\|_\infty \Gamma(1+\delta)}{2} h^{1-\delta} \geq 1 - \frac{\|b\|_\infty \Gamma(1+\delta)}{2}\,\frac{d_2(2^{1-\delta}-1)}{\|b\|_\infty \Gamma(1+\delta)} \\ &= 1 - d_2(2^{1-\delta}-1) = 2^\delta + 2^{1-\delta} - 2 \geq 2(\sqrt{2}-1).\end{aligned} \tag{3.46}$$

Дакле, и $\tilde{A}$ је M-матрица и из леме 3.13 следи $\|(\tilde{A})^{-1}\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

С друге стране, из ограничења (3.36) $\tilde{\tau}$ задовољава $|\tau_0| \leq Ch^{1-\delta}$, $|\tau_N| \leq$

$C\alpha_1 h$ и за $j = 1, 2, ..., N-1$ важи

$$|\tilde{\tau}_j| = \left| \frac{(1+\alpha_0 h^{-1})h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}{d_j}\tau_j' \right|$$
$$= \left| \frac{(1+\alpha_0 h^{-1})h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}{d_j}\tau_j + \left[1 + \delta_{j1}\frac{b_1}{2h}\frac{h^{2-\delta}\Gamma(1+\delta)}{d_j}\right]\tau_0 \right| \leq Ch^{1-\delta}. \tag{3.47}$$

Користећи претходно и $\|(\tilde{A})^{-1}\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2}$, теорема је доказана.

□

3.3 Нумерички експерименти

У овом одељку ће бити изложени нумерички резултати, који приказују перформансе претходне методе. Ове анализе су од великог значаја, јер се не-класични изводи користе у моделирању многих физичких процеса.

Посматраће се два гранична проблема, чије се границе састоје од две тачке, и који садрже Капутов извод разломљеног реда $2-\delta$, за $0 < \delta < 1$. За налажење приближног решења ће се користи претходна метода.

Користиће се услов стабилности (3.29) за доказ да схема конвергира. Овај услов неће бити задовољен у неким примерима, кад δ тежи 1. У том случају, приближно решење може имати мале осцилације у близини $x = 1$ и веома мале осцилације у близини $x = 0$. Биће описан и поступак којим се те осцилације могу уклонити.

Тест проблем I Решава се проблем

$$-{}^C D_{0+}^{2-\delta} u(x) + b(x)u'(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) - \frac{1}{1-\delta}u'(0) = \gamma_0,$$
$$u(1) + u'(1) = \gamma_1,$$

где су функција f и константе γ_0 и γ_1 изабране тако да је $u(x) = x^{2-\delta} + x^{3-2\delta} + 1 + 3x - 7x^2 + 4x^3 + x^4$ тачно решење проблема. Посматраће се случај кад је $b(x) = -(x^2 + x + 3)$ и $b(x) = x^2 + x + 3$. Приближно решење $\vec{v} = (v_0, v_1, ..., v_N)$ представља решење добијено методом коначних разлика са кораком $h = 1/N$.

За различите вредности N и δ, се одређује грешка

$$e_N^\delta := \|u - \vec{v}\|_{\infty,d} = \max_{j=0,1,\dots,N} |u(x_j) - v_j|,$$

и ред конвергенције

$$p_N^\delta := \log_2 \left(\frac{e_N^\delta}{e_{2N}^\delta} \right).$$

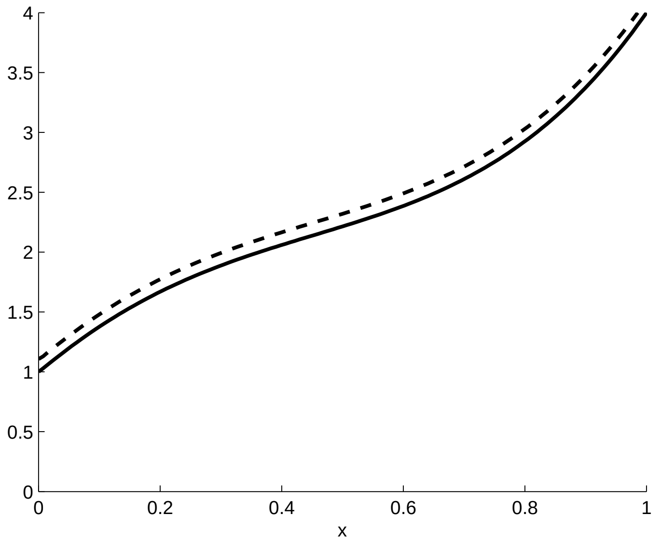
Тест проблем I за $\mathbf{b(x) = -(x^2 + x + 3)}$: У Табели 1 су дати експериментални резултати за различите вредности N и δ, при решавању датог проблема методом коначних разлика. Из табеле, се може закључити да је метода првог реда конвергенције за све вредности N и δ, и да је то много боља конвергенција од $O(h^{1-\delta})$ конвергенције која је дата у теореми 3.20. Може се приметити да то у другом случају неће важити, тј. ред конвергенције ће се погоршавати кад се δ приближава 1.

Подебљане вредности у табели означавају случајеве када матрица A није монотона.

Табела 1: Тест проблем I за $b(x) = -(x^2 + x + 3)$: представљена је грешка e_N^δ и ред конвергенције p_N^δ

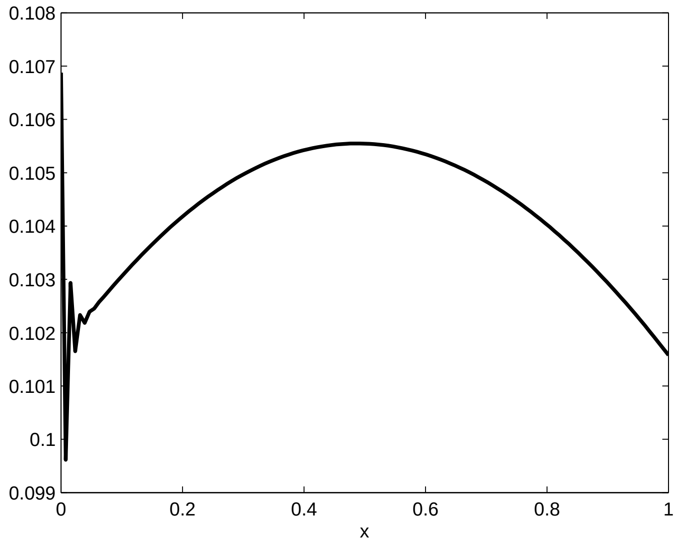
δ	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$	$N = 2048$
0.1	2.477e-1	1.256e-1	6.368e-2	3.225e-2	1.632e-2	8.250e-3
	0.979	0.980	0.981	0.983	0.984	0.985
0.2	2.522e-1	1.280e-1	6.483e-2	3.279e-2	1.656e-2	8.354e-3
	0.979	0.981	0.983	0.985	0.987	0.989
0.3	2.485e-1	1.257e-1	6.346e-2	3.198e-2	1.610e-2	8.091e-3
	0.983	0.986	0.989	0.991	0.992	0.994
0.6	2.265e-1	1.136e-1	5.691e-2	2.850e-2	1.426e-2	7.136e-3
	0.996	0.997	0.998	0.999	0.999	0.999
0.7	**2.201e-1**	**1.102e-1**	**5.517e-2**	2.760e-2	1.381e-2	6.905e-3
	0.998	**0.999**	**0.990**	1.000	1.000	1.000
0.8	**2.150e-1**	**1.075e-1**	**5.378e-2**	**2.690e-2**	**1.345e-2**	**6.726e-3**
	1.000	**1.000**	**1.000**	**0.998**	**1.000**	**1.000**
0.9	**2.142e-1**	**1.069e-1**	**5.332e-2**	**2.661e-2**	**1.328e-2**	**6.627e-3**
	1.003	**1.003**	**1.003**	**1.003**	**1.003**	**1.002**

На Слици 1 су приказани график тачног и приближног решења, које је добијено методом коначних разлика за $\delta = 0.9$ и $N = 128$. У овом случају матрица A није монотона и услов (3.29) не важи, али је, ипак, добијено приближно решење исправно.



Слика 1: Тачно (пуна линија) и приближно (испрекидана линија) решење за $\delta = 0.9$ и $N = 128$

Слика 2 приказује график грешке за $\delta = 0.9$ и $N = 128$ и на њему се могу уочити мале осцилације у близини $x = 0$. Амплитуда ових осцилација опада кад N расте.



Слика 2: Грешке приближног решења добијеног за $\delta = 0.9$ и $N = 128$

Тест проблем I за $\mathbf{b(x) = x^2 + x + 3}$: Табела 2 приказује грешку и ред конвергенције, добијене решавајући задати проблем за $b(x) = x^2 + x + 3$ и за различите вредности δ и N. Као што је већ поменуто, ред конвергенције ће се погоршавати и највећа грешка ће се појавити кад се δ приближава 1.

Као и у претходном, резултати који су подебљани у табели се односе на случајеве кад матрица A није монотона, па зато они нису обухваћени теоремом 3.20.

Табела 2: Тест проблем I за $b(x) = x^2 + x + 3$: представљена је грешка e_N^δ и ред конвергенције p_N^δ

δ	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$	$N = 2048$
0.1	6.680e-2	3.154e-2	1.485e-2	6.978e-3	3.276e-3	1.538e-3
	1.083	1.087	1.089	1.091	1.091	1.091
0.2	5.716e-2	2.618e-2	1.197e-2	5.476e-3	2.510e-3	1.239e-3
	1.127	1.129	1.128	1.126	1.019	0.872
0.3	5.470e-2	2.495e-2	1.142e-2	5.260e-3	2.441e-3	1.142e-3
	1.132	1.127	1.119	1.108	1.096	0.924
0.6	2.854e-2	2.308e-2	1.493e-2	8.674e-3	4.751e-3	2.515e-3
	0.306	0.629	0.784	0.869	0.918	0.947
0.7	**1.888e-1**	**1.443e-1**	**9.427e-2**	**5.583e-2**	**3.103e-2**	**1.657e-2**
	0.388	**0.614**	**0.756**	**0.847**	**0.905**	**0.940**
0.8	**1.024e+0**	**8.304e-1**	**6.146e-1**	**4.216e-1**	**2.695e-1**	**1.613e-1**
	0.302	**0.434**	**0.544**	**0.646**	**0.741**	**0.822**
0.9	**5.445e+0**	**5.041e+0**	**4.482e+0**	**3.883e+0**	**3.300e+0**	**2.757e+0**
	0.111	**0.170**	**0.207**	**0.235**	**0.259**	**0.284**

Тест проблем II Други проблем који се анализира је

$$-{}^C D_{0+}^{2-\delta} u(x) + 7.1u'(x) = 4.5, \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) - \frac{1}{1-\delta} u'(0) = 0.4,$$
$$u(1) + u'(1) = 1.7.$$

Приближно решење $\vec{v} = (v_0, v_1, ..., v_N)$ представља решење добијено методом коначних разлика са кораком $h = 1/N$. Како је непознато тачно решење $u(x)$, грешка апроксимације се одређује користећи принцип који користи две равномерне мреже: једну са дијаметром h, и другу са дијаметром $h/2$, на којој се добија решење $\vec{z} = (z_0, z_1, , ..., z_{2N-1}, z_{2N})$ истом методом. Тако се грешка одређује из

$$d_N^\delta := \max_{j=0,1,...,N} |u_j - z_{2j}|,$$

и ред конвергенције

$$q_N^\delta := \log_2 \left(\frac{d_N^\delta}{d_{2N}^\delta} \right),$$

Табела 3: Тест проблем II: представљена је грешка d_N^δ и ред конвергенције q_N^δ

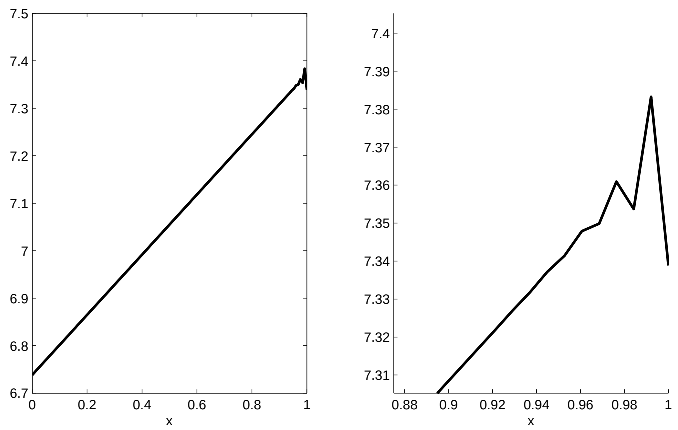
δ	$N=64$	$N=128$	$N=256$	$N=512$	$N=1024$
0.1	2.661e-3	1.395e-3	7.266e-4	3.768e-4	1.947e-4
	0.932	0.941	0.947	0.953	0.957
0.2	3.707e-3	1.981e-3	1.047e-3	5.477e-4	2.844e-4
	0.904	0.921	0.934	0.946	0.954
0.3	5.032e-3	2.730e-3	1.456e-3	7.651e-4	3.976e-4
	0.882	0.907	0.928	0.944	0.957
0.7	1.338e-2	7.540e-3	4.296e-3	2.469e-3	1.420e-3
	0.827	0.812	0.799	0.798	0.814
0.8	1.756e-2	9.395e-3	5.057e-3	2.746e-3	1.509e-3
	0.902	0.894	0.881	0.864	0.844
0.9	4.181e-2	1.986e-2	9.330e-3	4.337e-3	2.150e-3
	1.075	1.089	1.105	1.013	0.960

за различите вредности N и δ.

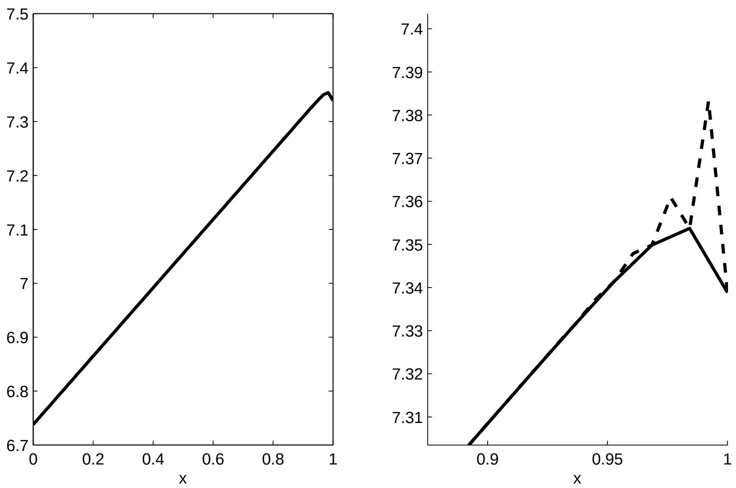
Добијени нумерички резултати су излажени у Табели 3. Из табеле се види да је метода првог реда конвергенције за све δ и N.

На Слици 3 је приказано проближно решење, добијено методом коначних разлика за $\delta = 0.9$ и $N = 127$. У близини $x = 1$ се могу уочити мале осцилације, чија се амплитуда смањује како N расте. Ове осцилације се могу отклонити на следећи начин: Претпоставља се да је N непаран број. Из решења $\vec{v} = (v_0, v_1, ..., v_N)$, које је добијено методом коначних разлика, искористе се само вредности које су добијене у тачкама $\{x_0, x_1, x_3, x_5, ..., x_{N-2}, x_N\}$.

Слика 4 приказује приближно решење добијено уклањањем осцилација из претходног решења. На овај начин се уклањају и веома мале осцилације које се појављују у близини $x = 0$, кад је $b < 0$. Ако би се одредиле грешке за решење без осцилација, користећи две мреже опет, уочило би се да је решење без осцилација много тачније од решења са осцилацијама за скоро све вредности δ и N.



Слика 3: Приближно решење за $\delta = 0.9$ и $N = 127$ (лево). Зумирана околина $x = 1$ (десно).



Слика 4: Решење добијено уклањањем осцилација, за $\delta = 0.9$ и $N = 127$(лево). Приближно решење (испрекидана линија) и решење добијено уклањањем осцилација (пуна линија) у околини $x = 1$ (десно).

4 Реформулација граничног проблема

У овом поглављу ће бити представљена реформулација проблема (3.1)-(3.3) у Волтерину[3] интегралну једначину друге врсте. Резултати који ће бити изложени су преузети из рада [20].

Користећи дефиницију Капутовог извода, може се приметити да важи $({}^C D_{0_+}^{2-\delta} u)(x) = ({}^C D_{0_+}^{1-\delta} u')(x)$. Из претходног и теореме 2.11 следи да је

$$I_{0_+}^{1-\delta}({}^C D_{0_+}^{2-\delta} u)(x) = I_{0_+}^{1-\delta}({}^C D_{0_+}^{1-\delta} u')(x) = u'(x) - u'(0).$$

Делујући оператором $I_{0_+}^{1-\delta}$ на једначину (3.1), добија се интегрална једначина

$$-u'(x) + u'(0) + I_{0_+}^{1-\delta}(bu' + cu)(x) = I_{0_+}^{1-\delta}(f)(x). \tag{4.1}$$

Ако се уведу ознаке

$$\mu = u'(0), \quad y(x) = u'(x) - \mu \tag{4.2}$$

и

$$Y(x) = \int_0^x y(s)\mathrm{d}s, \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4.3}$$

тада, користећи и гранични услов (3.2), решење u се може записати као

$$u(x) = Y(x) + \mu x + u(0) = Y(x) + \mu x + \mu\alpha_0 + \gamma_0 = Y(x) + \mu(x + \alpha_0) + \gamma_0. \tag{4.4}$$

Заменом (4.2), (4.3) и (4.4) у интегралну једначину (4.1) се добија

$$y(x) - I_{0_+}^{1-\delta}(by + b\mu + cY + c\mu(x + \alpha_0) + c\gamma_0)(x) = -I_{0_+}^{1-\delta} f(x),$$

тј.

$$y(x) - I_{0_+}^{1-\delta}(by + cY)(x) = I_{0_+}^{1-\delta}(\mu g_1 + g_2)(x) \tag{4.5}$$

где је

$$g_1(x) := b(x) + (x + \alpha_0)c(x),$$
$$g_2(x) := \gamma_0 c(x) - f(x), \tag{4.6}$$

за $0 \leq x \leq 1$.

Једначина (4.5) представља Волтерину интегралну једначину друге врсте са слабо сингуларним језгром $K(x,t) = (x-t)^{-\delta}$. Нумеричко решење ове

[3] Vito Volterra(1860-1940)

једначине се може добити применом методе колокације, која је детаљно изложена у [4], а овде ће бити представљена на интегралној једначини:

$$\begin{aligned} z(x) - \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{t=0}^{x} (x-t)^{-\delta} \left[b(t)z(t) + c(t) \int_{0}^{t} z(s)\mathrm{d}s \right] \mathrm{d}t \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{t=0}^{x} (x-t)^{-\delta} g(t)\mathrm{d}t, \quad 0 \le x \le 1, \end{aligned} \tag{4.7}$$

где се за функцију g бира нека од већ дефинисаних функција g_1 и g_2.

Лема 4.1. *[20] Нека је $b, c, g \in C^q[0,1]$ за $q \in \mathbb{N}$. Тада једначина (4.7) има јединствено решење $z \in C^{q,\delta}(0,1]$ и важи*

$$|z(x) - z(0)| \le Cx^{1-\delta}, \quad \text{за} \quad 0 \le x \le 1.$$

4.1 Решавање проблема методом колокације

Ради једноставнијег записа, интегрална једначина (4.7) се представља у следећем облику

$$z(x) = G(x) + \int_0^x (x-t)^{-\delta} k(t, z(t))\mathrm{d}t, \quad 0 \le x \le 1, \tag{4.8}$$

где је

$$G(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^x (x-t)^{-\delta} g(t)\mathrm{d}t$$

и

$$k(t, z(t)) = \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left(b(t)z(t) + c(t) \int_0^t z(s)\mathrm{d}s \right).$$

Дефинише се мрежа I_h на интервалу $[0,1]$

$$I_h = \{x_n : 0 = x_0 < x_1 < ... < x_N = 1\},$$

где је $x_n = \left(\frac{n}{N}\right)^r$, $n = 0, 1..., N$. За $r = 1$ ова мрежа ће бити униформна. За $0 \le n \le N-1$ се дефинише и

$$e_n = (x_n, x_{n+1}], \quad \bar{e}_n = [x_n, x_{n+1}], \quad h_n = x_{n+1} - x_n \quad \text{и} \quad h = \max_{0 \le n \le N} h_n.$$

За дату мрежу I_h и дати цео број $m \ge 1$ се дефинише простор

$$S_{m-1}^{-1}(I_h) = \{\nu : \nu|_{e_n} \in \pi_{m-1}, \, n = 0, 1, ..., N-1\},$$

где је $\pi_{m-1} = \pi_{m-1}(e_n)$ скуп реалних полинома на $e_n = (x_n, x_{n+1}]$ степена $\leq m-1$. Простор S_{m-1}^{-1} се састоји од део по део полиномијалних функција степена не већег од $m-1$, које могу имати прекиде у унутрашњим тачкама мреже I_h.

Приближно решење z_h једначине (4.8) ће се тражити тако да буде елемент простора $S_{m-1}^{-1}(I_h)$. У општем случају, елемент простора $z_h \in S_{m-1}^{-1}(I_h)$ има Nm непознатих коефицијената. За одређивање тих коефицијената потребно је Nm различитих тачака у интервалу $[0,1]$, у којима решење z_h мора да задовољава Волтерину интегралну једначину (4.8). Ове тачке се називају тачкама колокације. Скуп тачака колокације се дефинише са

$$X_h = \{\xi_{jn} = x_n + c_j h_n : 0 \leq c_1 < c_2 < ... < c_m \leq 1,\, n = 0, 1, ..., N-1\},$$

где су $\{c_j\}$ задати бројеви који се називају колокационим параметрима. Ако је $c_1 = 0$ и $c_m = 1$ онда z_h припада простору

$$S_{m-1}^{0}(I_h) = \{\nu \in C[0,1] : \nu|_{\bar{e_n}} \in \pi_{m-1},\, n = 0, 1, ..., N-1\} = S_{m-1}^{-1}(I_h) \cap C[0,1],$$

чија је димензија $N(m-1)+1$. Ово значи да се мора поставити почетни услов. Како се интеграли у (4.8) анулирају за $x = 0$, почетни услов је $z_h(0) = 0$.

Метода колокације за Волтерину интегралну једначину друге врсте са слабо сингуларним језгром је детаљно анализирана у [4, 20], где је показано да је за довољно мало h, приближно решење z_h једначине (4.8) добро дефинисано.

Приближно решење z_h се одређује рекурзивно. На првом сегменту $(0, x_1]$ функција z_h треба да задовољава једначину

$$z_h(x) = G(x) + \int_0^x (x-t)^{-\delta} k(t, z_h(t)) \mathrm{d}t, \tag{4.9}$$

за $x = \xi_{i0} = x_0 + c_i h_0$, $i = 1, ..., m$.

Нека је

$$z_h^0(x) = z_h(x), \quad x \in (0, x_1].$$

Како је $z_h \in S_{m-1}^{-1}(I_h)$, може се представити Лагранжовим интерполационим полиномом:

$$z_h^0(x) = \sum_{j=1}^{m} \bar{Z}_j L_{j0}(x), \tag{4.10}$$

где су

$$L_{j0}(x) = \prod_{k=1, k\neq j}^{m} \frac{x - \xi_{k0}}{\xi_{j0} - \xi_{k0}}, \quad j = 1, ..., m$$

Лагранжове базне функције и Z_{j0}

$$\bar{Z}_j = Z_{j0} \quad (j = 1, ..., m)$$

коефицијенти које треба одредити. За Лагранжове базне функције важи

$$L_{j0}(\bar{\xi}_k) = \begin{cases} 1, & \text{за } k = j \\ 0, & \text{за } k \neq j \end{cases}$$

за $k, j = 1, ..., m$ и $\bar{\xi}_k = \xi_{k0}$, па је

$$z_h(\bar{\xi}_k) = \sum_{j=1}^{m} \bar{Z}_j L_{j0}(\bar{\xi}_k) = \bar{Z}_k.$$

Користећи претходно у једначини (4.9), за $k = 1, ..., m$ важи

$$\begin{aligned}
\bar{Z}_k =& G(\bar{\xi}_k) + \int_0^{\bar{\xi}_k} (\bar{\xi}_k - t)^{-\delta} k \left(t, \sum_{j=1}^{m} \bar{Z}_j L_{j0}(t)\right) \mathrm{d}t \\
=& G(\bar{\xi}_k) + \int_0^{\bar{\xi}_k} (\bar{\xi}_k - t)^{-\delta} \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left(b(t) \sum_{j=1}^{m} \bar{Z}_j L_{j0}(t) + c(t) \int_0^t \sum_{j=1}^{m} \bar{Z}_j L_{j0}(s) \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \\
=& G(\bar{\xi}_k) + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_0^{\bar{\xi}_k} (\bar{\xi}_k - t)^{-\delta} \sum_{j=1}^{m} \left(b(t) L_{j0}(t) + c(t) \int_0^t L_{j0}(s) \mathrm{d}s\right) \bar{Z}_j \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

тј.

$$\bar{Z}_k - \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \sum_{j=1}^{m} \bar{Z}_j \int_0^{\bar{\xi}_k} (\bar{\xi}_k - t)^{-\delta} \left(b(t) L_{j0}(t) + c(t) \int_0^t L_{j0}(s) \mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t = G(\bar{\xi}_k). \tag{4.11}$$

На овај начин је добијен линеаран систем по променљивим $\bar{Z}_k = Z_{k0}$, $k = 1, ..., m$ и његовим решавањем се добија решење на сегменту $(0, x_1]$.

Када се добије $z_h^0(x)$, прелази се на следећи интервал $(x_1, x_2]$. Са $z_h^1(x)$ се означава решење дефинисано на $(x_1, x_2]$. Функција $z_h^1(x)$ треба да задовољава једначину

$$z_h^1(x) = G(x) + \int_0^x (x-t)^{-\delta} k(t, z_h(t))\mathrm{d}t, \tag{4.12}$$

за $x = \xi_{j1} = x_1 + c_j h_1$, $j = 1, ..., m$. Аналогно претходном, бира се

$$z_h^1(x) = \sum_{j=1}^m Z_{j1} L_{j1}(x), \quad x \in (x_1, x_2], \tag{4.13}$$

где су

$$L_{j1}(x) = \prod_{k=1, k\neq j}^m \frac{x - \xi_{k1}}{\xi_{j1} - \xi_{k1}}, \quad j = 1, ..., m$$

Лагранжове базне функције и $Z_{j1}, (j = 1, ..., m)$ коефицијенти које треба одредити. Слично као на претходном сегементу важи да је

$$z_h^1(\xi_{k1}) = \sum_{j=1}^m Z_{j1} L_{j1}(\xi_{k1}) = Z_{k1}.$$

Нови систем линеарних једначина се добија из

$$\begin{aligned}
Z_{k1} =& G(\xi_{k1}) + \int_0^{\xi_{k1}} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} k(t, z_h(t))\mathrm{d}t \\
=& G(\xi_{k1}) + \int_0^{x_1} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} k(t, z_h^0(t))\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{\xi_{k1}} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} k(t, z_h^1(t))\mathrm{d}t \\
=& G(\xi_{k1}) + \int_0^{x_1} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} k(t, z_h^0(t))\mathrm{d}t + \\
&+ \int_{x_1}^{\xi_{k1}} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \left(b(t) \sum_{j=1}^m Z_{j1} L_{j1}(t) + c(t) \int_0^t \sum_{j=1}^m Z_{j1} L_{j1}(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned}
Z_{k1} - \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \sum_{j=1}^m Z_{j1} \int_{x_1}^{\xi_{k1}} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} \left(b(t) L_{j1}(t) + c(t) \int_0^t L_{j1}(s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\
= G(\xi_{k1}) + \int_0^{x_1} (\xi_{k1} - t)^{-\delta} k(t, z_h^0(t))\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

за $k = 1, ..., m$.

Одређујући функцију z_h итеративно, интервал по интервал, добија се решење

$$z_h(x) = z_h^n(x), \quad x \in (x_n, x_{n+1}],$$

за $n = 0, ..., N-1$, тј.

$$z_h(x) = \sum_{j=1}^{m} Z_{jn} L_{jn}(x), \quad x \in (x_n, x_{n+1}].$$

Ако би се ова метода применила директно на полазни проблем (3.1)-(3.3), добио би се систем једначина са N непознатих чија матрица није ретка. Применом методе на (4.5) се решавају системи линеарних једначина са m непознатих, где $m << N$.

Лема 4.2. *[4, 20] Претпоставља се да $g \in C^m[0,1]$, да је h довољно мало и да r задовољава*

$$r = \frac{\sigma}{1-\delta} \quad \text{за} \quad \sigma \geq 1-\delta.$$

Тада решење z_h добијено применом методе колокације на једначину (4.7) *задовољава оцену грешке*

$$\|z - z_h\|_\infty \leq C h^{\min\{\sigma, m\}}, \tag{4.15}$$

где константа C зависи од тачака колокације и од r, али не и од h.

У претходној теореми се претпоставља да се сви интеграли који се појављују у методи колокације могу израчунати тачно. Међутим, у пракси је то ретко могуће, већ се морају користити квадратурна правила. Избором одговарајуће квадратурне формуле, ред конвергенције методе колокације се неће смањити.

Како се у n-тој итерацији захтева да важи једнакост

$$z_h^n(x) - \int_{x_n}^{x} (x-t)^{-\delta} k(t, z_h^n(t)) \mathrm{dt} = \sum_{l=0}^{n-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} (x-t)^{-\delta} k(t, z_h^l(t)) \mathrm{dt}$$
$$+ \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{x_l}^{x_{l+1}} (x-t)^{-\delta} g(t) \mathrm{dt} + \frac{1}{\Gamma(1-\delta)} \int_{x_n}^{x} (x-t)^{-\delta} g(t) \mathrm{dt},$$

за ξ_{jn}, $j = 1, 2, ..., m$, интеграли облика

$$\left(Q_n^l f\right)(x) = \int_{x_l}^{x_{l+1}} (x-t)^{-\delta} f(t) \mathrm{dt}, \quad l = 0, 1, ..., n-1,$$
$$\left(Q_n f\right)(x) = \int_{x_n}^{x} (x-t)^{-\delta} f(t) \mathrm{dt},$$

се могу апроксимирати следећим квадратурним формулама

$$\left(\widehat{Q}_n^l f\right)(x) = \sum_{j=1}^{m} w_{jn}^l(x) f(\xi_{jl}), \qquad l = 0,1,...,n-1,$$
$$\left(\widehat{Q}_n f\right)(x) = \sum_{j=1}^{m} w_{jn}(x) f(\hat{\xi}_{jn}),$$

респективно, где је $\hat{\xi}_{jn} = x_n + c_j(x - x_n)$, $j = 1,2,...,m$,

$$w_{jn}^l(x) = \int_{x_l}^{x_{l+1}} (x-t)^{-\delta} L_{jl}(t)\mathrm{d}t, \quad L_{jl}(x) = \prod_{k=1,k\neq j}^{m} \frac{x - \xi_{kl}}{\xi_{jl} - \xi_{kl}}$$
$$w_{jn}(x) = \int_{x_n}^{x} (x-t)^{-\delta} \widehat{L}_{jn}(t)\mathrm{d}t, \quad \widehat{L}_{jn}(x) = \prod_{k=1,k\neq j}^{m} \frac{x - \hat{\xi}_{kl}}{\hat{\xi}_{jl} - \hat{\xi}_{kl}}.$$

У [4] је показано да се тачност квадратурног правила повећава ако је величина

$$J = \int_0^1 \prod_{j=1}^{m} (s - c_j)\mathrm{d}s$$

једнака нули. Под тим условом би квадратурно правило (са m чворова) на сваком интервалу $[x_n, x_{n+1}]$ имало тачност $O(h_n^{m+1})$ а не само $O(h_n^m)$.

Лема 4.3. *[4] Нека је z_h решење добијено методом колокације примењеном на једначину (4.8) и $\hat{z}_h$ решење добијено применом квадратурних правила са тачкама колокације као чворовима. Ако се претпостави да за $r = 1$ важи $b, c, g \in C^m[0,1]$, а да за $r > 1$ важи $b, c, g \in C^{m+1}[0,1]$, тада*

$$\|z_h - \hat{z}_h\|_\infty \leq \begin{cases} Ch^m, & \text{за } J \neq 0 \\ Ch^{m+1-\delta}, & \text{за } J = 0. \end{cases}$$

Последица 4.4. *Претпоставља се да $b, c, g \in C^m[0,1]$. Нека је $r = \frac{\sigma}{(1-\delta)}$, где $\sigma \geq 1 - \delta$. Тада решење $\hat{z}_h$ добијено методом колокације, уз употребу квадратурних формула задовољава*

$$\|z - \hat{z}_h\|_\infty \leq Ch^{min\{\sigma,m\}}.$$

Доказ. Користећи неједнакост троугла, као и леме 4.2 и 4.3 следи

$$\|z - \hat{z}_h\|_\infty \leq \|z - z_h\|_\infty + \|z_h - \hat{z}_h\|_\infty \leq Ch^{min\{\sigma,m\}}.$$

$\square$

4.1.1 Нумеричко решење u_h за (3.1)-(3.3)

У овом одељку ће бити конструисана апроксимација решења u проблема (3.1)-(3.3). Изложени резултати су преузети из [20].

Са ν се означава решење једначине (4.7) када је

$$g(t) = g_1(t) = b(t) + (t + \alpha_0)c(t)$$

и са ω решење исте једначине када је

$$g(t) = g_2(t) = \gamma_0 c(t) - f(t).$$

Одговарајућа приближна решења, добијена користећи методу колокације и квадратурна правила, означавају се са $\hat{\nu}_h \in S_{m-1}^{-1}$ и $\hat{\omega}_h \in S_{m-1}^{-1}$ респективно.

Лема 4.5. *Важи*

$$1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1\nu(1) + \int_0^1 \nu(x)\mathrm{d}x \geq \alpha_0 > 1. \tag{4.16}$$

Доказ. Ако се дефинише $\nu_1 = 1 + \nu(x)$ и $V_1(x) = \int_0^x \nu_1(t)\mathrm{d}t$ за $0 \leq x \leq 1$, важиће

$$1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1\nu(1) + \int_0^1 \nu(x)\mathrm{d}x = \alpha_0 + \alpha_1\nu_1(1) + \int_0^1 \nu_1(x)\mathrm{d}x. \tag{4.17}$$

На основу дефиниције, $\nu \in C[0,1] \cap C^m(0,1]$ је решење интегралне једначине

$$\nu(x) - I_{0_+}^{1-\delta}(b\nu + cV)(x) = (I_{0_+}^{1-\delta}g_1)(x) \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где је $V(t) := \int_0^t \nu(s)\mathrm{d}s$. Одатле важи

$$\nu_1(x) - I_{0_+}^{1-\delta}(b\nu_1 + cV_1)(x) = 1 + \alpha_0(I_{0_+}^{1-\delta}c)(x) \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{4.18}$$

где је $V_1(t) := \int_0^t \nu_1(s)\mathrm{d}s$.

Доказује се да $\nu_1(x) \geq 0$, за $0 \leq x \leq 1$, следи из (4.18). Претпоставља се супротно и дефинише се $x^* = \inf_{x\in[0,1]}\{x : \nu_1(x) < 0\}$. Услови $\nu_1 \in C[0,1]$

и $\nu_1(0) = 1$ (из дефиниције ν), обезбеђују да $x^* \in (0,1)$, $\nu_1(x^*) = 0$, и $\nu_1 \geq 0$ на $[0, x^*)$. Делујући Риман-Лиувиловим изводом $D_{0_+}^{1-\delta}$ на (4.18), добија се

$$D_{0_+}^{1-\delta}\nu_1(x) - (b\nu_1 + cV_1)(x) = \frac{x^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} + \alpha_0 c(x) \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

За $x = x^*$, важи

$$D_{0_+}^{1-\delta}\nu_1(x^*) - (cV_1)(x^*) = \frac{(x^*)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} + \alpha_0 c(x^*). \tag{4.19}$$

Важи

$$D_{0_+}^{k-\delta}g(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^k (I_{0_+}^{\delta}g)(x) \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1$$

за $0 < \delta < 1$, $k \in \mathbb{N}$ и за све функције g за које постоји $D_{0_+}^{k-\delta}g(x)$.

Користећи претходно следи

$$\begin{aligned} D_{0_+}^{1-\delta}\nu_1(x^*) =& \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma(\delta)}\int_0^x (x-t)^{\delta-1}\nu_1(t)\mathrm{d}t\right)\bigg|_{x=x^*} \\ =& \frac{\delta-1}{\Gamma(\delta)}\int_0^{x^*}(x^*-t)^{\delta-2}\nu_1(t)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Из $\nu_1(x^*) = 0$ и $\nu_1 \in C[0,1] \cap C^m(0,1]$ следи $|\nu_1(t)| \leq C(x^* - t)$ за $t \in [0, x^*]$. Користећи (4.19) и (4.20) добија се

$$-\frac{1-\delta}{\Gamma(\delta)}\int_0^{x^*}(x^*-t)^{\delta-2}\nu_1(t)\mathrm{d}t = (cV_1)(x^*) + \frac{(x^*)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} + \alpha_0 c(x^*).$$

Из $\nu_1(0) = 1$ и $\nu_1 \geq 0$ на $[0, x^*)$, следи $V_1(x^*) > 0$ и лева страна претходне једнакости је негативна, али десна није док је $c \geq 0$. Добија се контрадикција, па се закључује да је $\nu_1 \geq 0$ на $[0,1]$.

Сада из (4.17) следи $1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1\nu(1) + \int_0^1 \nu(x)\mathrm{d}x \geq \alpha_0$. Важи и $\alpha_0 \geq \frac{1}{\delta-1} > 1$.

□

Претходна лема се може употребити за доказ следеће теореме.

Теорема 4.6. *Решење* u *проблема* (3.1)-(3.3) *задовољава*

$$\textit{(i)} \quad u'(x) = \mu[\nu(x) + 1] + w(x), \tag{4.21}$$

$$\textit{(ii)} \quad u(x) = \gamma_0 + \mu\alpha_0 + \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t, \tag{4.22}$$

где је

$$\mu = \frac{\gamma_1 - \gamma_0 - \alpha_1 w(1) - \int_0^1 w}{1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1 v(1) + \int_0^1 v}. \tag{4.23}$$

Доказ. Из дефиниције $y(x) = u'(x) - \mu$ тј. $u'(x) = y(x) + \mu$ следи

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t = u(0) + \mu x + \int_0^x y(t)\mathrm{d}t.$$

Како из Волтерине једначине (4.5) и из дефиниција решења ν и ω следи $y = \mu\nu + \omega$, биће

$$u(x) = u(0) + \mu x + \int_0^x (\mu\nu + \omega)(t)\mathrm{d}t, \quad \text{за} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Да би важили гранични услови (3.2) и (3.3), захтева се

$$\gamma_0 = u(0) - \alpha_0 u'(0) = u(0) - \alpha_0 \mu,$$

$$\gamma_1 = u(1) + \alpha_1 u'(1) = u(0) + \mu + \int_0^1 (\mu\nu(x) + \omega(x))\mathrm{dx} + \alpha_1[\mu + \mu\nu(1) + \omega(1)].$$

Одатле је

$$\gamma_1 - \gamma_0 = \mu \left[1 + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_1 \nu(1) + \int_0^1 \nu(x)\mathrm{dx}\right] + \alpha_1 \omega(1) + \int_0^1 \omega(x)\mathrm{dx}.$$

Користећи претходно и лему 4.5 добија се μ.

Замењујући μ у $u'(x) = \mu + y(x) = \mu + \mu\nu(x) + \omega(x)$ добија се (4.21). На једноставан начин се добија и (4.22), заменом граничног услова (3.2) у $u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\mathrm{d}t$.

□

Са $y_h := \mu_h \hat{\nu}_h + \hat{\omega}_h$ се дефинише решење проблема (4.5), које је добијено методом колокације и где су $\hat{\nu}_h$ и $\hat{\omega}_h$ решења која су већ дефинисана и где ће константа μ_h бити одређена из услова (3.2)-(3.3). Решења $\hat{\nu}_h$ и $\hat{\omega}_h$ су одређена користећи исти скуп X_h тачака колокације и важи $\hat{\nu}_h \in S_{m-1}^{-1}$ и $\hat{\omega}_h \in S_{m-1}^{-1}$.

Замењујући μ, ν, ω, y у доказу теореме 4.6 са $\mu_h, \hat{\nu}_h, \hat{\omega}_h, y_h$ респективно, добија се решење $u_h \in S_m^0$ проблема (3.1)-(3.3) које задовољава граничне услове (3.2) и (3.3) под условом да

$$1+\alpha_0+\alpha_1+\alpha_1\hat{\nu}_h(1)+\int_0^1 \hat{\nu}_h(x)\mathrm{dx} \neq 0. \tag{4.24}$$

За довољно мало h, из последице 4.4 и леме 4.5 следи да је неједнакост (4.24) задовољена. Зато, (4.21), (4.22) и (4.23) из теореме 4.6 важе и за $\mu_h, \hat{\nu}_h, \hat{\omega}_h, y_h$ тј.

$$u_h(x)=\gamma_0+\mu_h\alpha_0+\int_0^x [\mu_h(1+\hat{\nu}_h(t))+\hat{w}_h(t)]\mathrm{d}t, \tag{4.25}$$

где је

$$\mu_h=\frac{\gamma_1-\gamma_0-\alpha_1\hat{w}_h(1)-\int_0^1 \hat{w}_h}{\alpha_0+\alpha_1[1+\hat{\nu}_h(1)]+\int_0^1[1+\hat{\nu}_h]}. \tag{4.26}$$

Теорема 4.7. *Нека је $b, c, f \in C^m[0,1]$ за $m \in \mathbb{N}$, h довољно мало и нека за r важи*

$$r=\frac{\sigma}{1-\delta} \quad \text{за} \quad \sigma \geq 1-\delta.$$

Тада за оцену грешке решења u_h проблема (3.1)-(3.3), које је добијено методом колокације уз употребу квадратурних формула за израчунавање интеграла (са тачкама колокације као чворовима) важи

$$\|u-u_h\|_\infty+\|u'-u_h'\|_\infty \leq \begin{cases} Ch^\sigma & \text{за } 1-\delta \leq \sigma \leq m, \\ Ch^m & \text{за } \sigma \geq m. \end{cases} \tag{4.27}$$

Ако још важи $J=0$ и $b, c, f \in C^{m+1}[0,1]$, онда се за $\sigma \geq m$ добија

$$\|u-u_h\|_\infty+|(u'-u_h')(x_i+c_jh_j)| \leq Ch^{m+1-\delta} \tag{4.28}$$

за $i=0,1,...,N$ и $j=1,2,...,m$, уз услов $h_N=0$.

4.2 Нумерички експерименти

Као у одељку 3.3, и овде ће бити изложени нумерички резултати за два гранична проблема, чије се границе састоје од две тачке, и који садрже Капутов извод разломљеног реда $2-\delta$, за $0<\delta<1$. Ови проблеми ће бити решени методом колокације.

За различите вредности N и δ, се одређује грешка

$$e_N^\delta := \|u - u_h\|_{\infty,d} = \max_{j=0,1,\dots,N} |u(x_j) - u_h(x_j)|,$$

и ред конвергенције

$$p_N^\delta := \log_2 \left(\frac{e_N^\delta}{e_{2N}^\delta} \right).$$

Тест проблем I Посматра се проблем

$$-{}^C D_{0_+}^{2-\delta} u(x) + u'(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) - \frac{1}{1-\delta} u'(0) = \gamma_0,$$

$$u(1) + \frac{1}{3.5} u'(1) = \gamma_1,$$

где су функција f и константе γ_0 и γ_1 изабране тако да је $u(x) = x^{3.5} + 1$ тачно решење проблема. У овом проблему, за одређивање интеграла нису коришћене квадратурне формуле, већ су они тачно израчунати.

У Табели 4 су изложени резултати за случај са једном тачком колокације, тј. $m = 1$ и колокацијским параметаром $c_1 = 1/2$.
Резултати за случај са две тачке колокације су изложени у Табели 5, где су избарани колокацијски параметри $c_1 = 0$ и $c_2 = 2/3$.
Из табела се може приметити да добијени редови конвергенције одговарају тврђењу из леме 4.2.

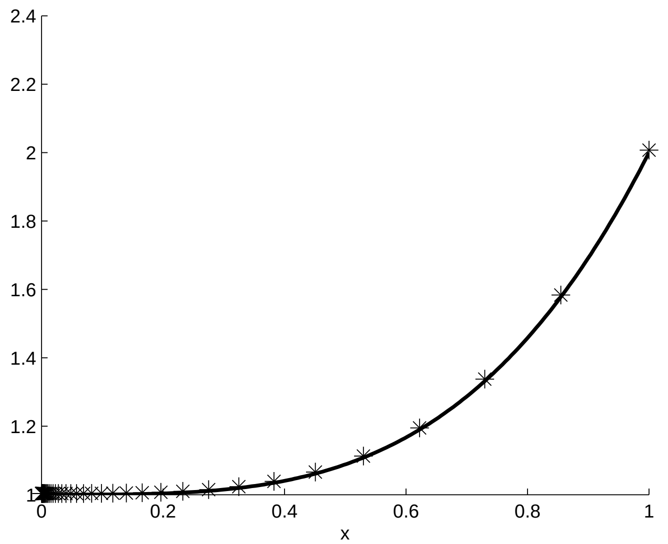
На Слици 5 су приказани тачно и приближно решење претходног проблема, добијено методом колокације за $\delta = 0.9$, $N = 128$, и $c_1 = 0$, $c_2 = 2/3$.

Табела 4: Тест проблем I за $m = 1$ и $c_1 = 1/2$: представљена је грешка e_N^δ и ред конвергенције p_N^δ

δ	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
0.1	6.457e-2	3.298e-2	1.667e-2	8.380e-3	4.202e-3	2.104e-3
	0.97	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00
0.2	7.139e-2	3.671e-2	1.863e-2	9.389e-3	4.714e-3	2.362e-3
	0.96	0.98	0.99	1.00	1.00	1.00
0.3	7.958e-2	4.132e-2	2.109e-2	1.066e-2	5.364e-3	2.691e-3
	0.95	0.97	0.98	0.99	1.00	1.00
0.8	1.708e-1	1.004e-1	5.579e-2	2.992e-2	1.569e-2	8.113e-3
	0.77	0.85	0.90	0.93	0.96	0.96
0.9	2.326e-1	1.490e-1	8.783e-2	4.894e-2	2.630e-2	1.382e-2
	0.64	0.76	0.84	0.90	0.93	0.95

Табела 5: Тест проблем I за $m = 2$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 2/3$: представљена је грешка e_N^δ и ред конвергенције p_N^δ

δ	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
0.1	8.083e-3	2.172e-3	5.633e-4	1.435e-4	3.622e-5	9.099e-6
	1.90	1.95	1.97	1.99	1.99	2.00
0.2	9.817e-3	2.682e-3	7.026e-4	1.800e-4	4.558e-5	1.147e-5
	1.87	1.93	1.96	1.98	1.99	1.99
0.3	1.214e-2	3.386e-3	8.983e-4	2.319e-4	5.902e-5	1.490e-5
	1.84	1.91	1.95	1.97	1.99	1.99
0.8	6.374e-2	2.372e-2	7.468e-3	2.140e-3	5.827e-4	1.541e-4
	1.43	1.67	1.80	1.88	1.92	1.94
0.9	1.163e-1	5.766e-2	2.194e-2	7.028e-3	2.042e-3	5.627e-4
	1.01	1.39	1.64	1.78	1.86	1.90



Слика 5: Приближно решење за $\delta = 0.9$, $N = 128$, $c_1 = 0, c_2 = 2/3$. (звездице), и тачно решење (линија)

Тест проблем II Сада се анализира проблем

$$-{}^{C}D_{0_+}^{2-\delta}u(x) + \cos(x)u'(x) = f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) - \frac{1}{1-\delta}u'(0) = \gamma_0,$$

$$u(1) + \frac{1}{3.5}u'(1) = \gamma_1,$$

где су функција f и константе γ_0 и γ_1 изабране тако да је $u(x) = x^{3.5} + 1$ тачно решење проблема. За одређивање интеграла су употребљена квадратурна правила.

Резултати изложени у Табели 6 се односе на случај са две тачке колокације, тј. $m = 2$, где су колокацијски параметри $c_1 = 0$ и $c_2 = 1$. Добијени редови конвергенције одговарају тврђењу из леме 4.3 кад је $J \neq 0$. У Табели 7 су представљени резултати за три тачке колокације, и колокацијским параметрима $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$ и $c_3 = 1$. Овде је $J = 0$, па се јавља повишен ред конвергенције, што је и очекивано на основу леме 4.3.

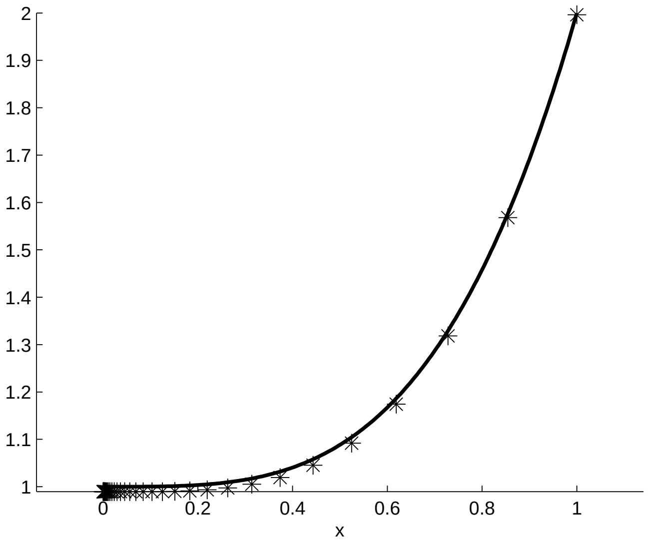
На Слици 6 су приказани тачно и приближно решење претходног проблема, добијено методом колокације за $\delta = 0.8$, $N = 64$, и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Табела 6: Тест проблем II за $m = 2$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1$: представљена је грешка e_N^δ и ред конвергенције p_N^δ

δ	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
0.1	5.943e-3 1.99	1.493e-3 2.00	3.737e-4 2.00	9.348e-5 2.00	2.338e-5 2.00	5.844e-6 2.00
0.2	8.119e-3 1.99	2.043e-3 1.99	5.129e-4 2.00	1.285e-4 2.00	3.214e-5 2.00	8.041e-6 2.00
0.3	1.145e-2 1.98	2.905e-3 1.99	7.319e-4 1.99	1.838e-4 2.00	4.608e-5 2.00	1.154e-5 2.00
0.8	1.441e-1 1.71	4.407e-2 1.81	1.256e-2 1.86	3.449e-3 1.90	9.247e-4 1.92	2.444e-4 1.93
0.9	3.595e-1 1.45	1.319e-1 1.66	4.162e-2 1.79	1.203e-2 1.84	3.338e-3 1.88	9.074e-4 1.90

Табела 7: Тест проблем II за $m = 3$ и $c_1 = 0$, $c_2 = 1/2$, $c_3 = 1$: представљена је грешка e_N^δ и ред конвергенције p_N^δ

δ	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$
0.1	4.425e-6 3.85	3.066e-7 3.84	2.136e-8 3.84	1.493e-9 3.90	9.992e-11 3.45
0.2	1.065e-5 3.74	7.969e-7 3.74	5.983e-8 3.74	4.483e-9 3.75	3.336e-10 3.26
0.3	2.342e-5 3.65	1.869e-6 3.65	1.489e-7 3.65	1.185e-8 3.66	9.356e-10 3.62
0.8	1.270e-3 3.01	1.576e-4 3.11	1.828e-5 3.15	2.051e-6 3.19	2.254e-7 3.20
0.9	5.209e-3 2.35	1.021e-3 2.78	1.490e-4 2.92	1.987e-5 3.01	2.450e-6 3.06



Слика 6: Приближно решење за $\delta = 0.8$, $N = 64$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$. (звездице), и тачно решење (линија)

Литература

[1] M. Al-Refai. *Basic results on nonlinear eigenvalue problems of fractional order.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2012 (191):1-12, 2012.

[2] M. Al-Refai. *On the fractional derivatives at extreme points.* Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 2012 (55):1-5, 2012.

[3] T. M. Atanacković, S. Pilipović, B. Stanković, D. Zorica. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics.* ISTE Ltd, London, 2014.

[4] H. Brunner. *Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations.* Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 15, 2004.

[5] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations.* Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[6] M. Fiedler. *Special matrices and their applications in numerical mathematics.* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1986.

[7] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications.* Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[8] B. Jin, R. Lazarov, J. Pasciak, W. Rundell. *Variational formulation of problems involving fractional order differential operators.* Math. Comp.,84(296):2665-2700, 2015.

[9] D. Jocić, M. Arsenović, M. Dostanić. *Teorija mere. Funkcionalna analiza. Teorija operatora.* Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[10] B. S. Jovanović, E. Süli. *Analysis of Finite Difference Schemes.* Springer, 2014.

[11] A. A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Elsevier Science and Technology, Boston, 2006.

[12] C. Li, W. Deng. *Remarks on fractional derivatives.* Appl. Math. Comput., 187: 777–784, 2007.

[13] A. Pedas, E. Tamme. *Piecewise polynomial collocation for linear boundary value problems of fractional differential equations.* J. Comput. Appl. Math., 236: 3349–3359, 2012.

[14] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations.* Academic Press, 1998.

[15] D. Radunović. *Numeričke metode.* Akademska misao, Beograd, 2004.

[16] E. Sousa. *How to approximate the fractional derivative of order* $1 < \alpha \leq 2$. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 22(4), 2012.

[17] M. Stynes. *A Caputo Two-Point Boundary Value Problem: Existence, Uniqueness and Regularity of a Solution.* Modeling and Analysis of Information Systems, 23: 370–376, 2016.

[18] M. Stynes, J. L. Gracia. *Central difference approximation of convection in Caputo fractional derivative two-point boundary value problems.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 273: 103-115, 2015.

[19] M. Stynes, J. L. Gracia. *A finite difference method for a two-point boundary value problem with a Caputo fractional derivative.* IMA J. Numer. Anal., 35: 698–721, 2015.

[20] M. Stynes, N. Kopteva. *An efficient collocation method for a caputo two-point boundary value problem.* BIT,55(4):1105-1123, 2015.