УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Радмила Маџар

Математика без аксиоме избора

Мастер рад

Београд, 2018.

Садржај

Предговор

Седи и мирно разговара група људи одређене професије. На који начин сазнати да ли су они математичари? Једна од могућности јесте да им приђете и поставите питање шта они мисле о Аксиоми избора. Ако ти људи нису математичари, упутиће вам чудан поглед и наставити свој разговор. Ако су они ипак математичари, постоји велика шанса да ће се сада њихов разговор претворити у жучну расправу. Једни ће тврдити да је треба прихватити, други ће инсистирати на томе да се она у целости одбаци, трећи ће се залагати за компромис у виду прихватања неке ослабљене верзије, а сигурно је само једно: крај расправе неће бити ни близу.

Иако су се данас страсти око Аксиоме избора смириле, и већина математичара прихвата Аксиому избора, сматрајући да њене добре стране надвладавају лоше, горњи сценарио је био врло могућ пре неколико десетина година.

Опште је прихваћено да је у математици све стриктно дефинисано и да логичким следом све произилази једно из другог. Како је онда могуће да се математичари деценијама расправљају о прихватању математичког става? Ваљда се математички став или прихвата или одбацује. Он је или тачан, или нетачан, зар не?

Па, и није тако. Немогуће је да све произилази логичним следом. Од нечег се мора кренути. Такви ставови су Аксиоме. Оне се не доказују, него се прихватају. За њих су се стручњаци сложили да су довољно очигледне и даља наука је на њима изграђена. У чему је онда проблем са Аксиомом избора, ако и она делује очигледно?

Иако Аксиома избора делује очигледно, у њој су многи закључци који се супротстављају здравој логици човека. Банах[1] и Тарски[2] су 1924. године показали да Аксиома избора даје следеће тврђење: дата лопта се може поделити на број делова (касније је утврђено да је довољан број пет) таквих да се затим од добијених делова могу саставити две лопте, које су идентичне полазној. Ако се на све ово дода и чињеница да Аксиома избора припада области теорије скупова, а теорија скупова са формалном логиком чини темељ читаве данашње математике, сасвим је јасно зашто се Аксиома избора назива "Ахилова пета" за све математичаре, а не само за оне који су у непосредном додиру са њом.

Цермело[3]-Френкелова[4] теорија скупова са аксиомом избора (ZFC) је аксиоматски систем који се појавио почетком XX века као одговор на проблем како формулисати теорију скупова без парадокса. Данас је (ZFC) стандардни начин за аксиоматизацију теорије скупова и заснивања математике. Улога аксиоме избора (AC) у ZFC која је

[1]Stefan Banach (1892—1945), пољски математичар
[2]Alfred Tarski (1901—1983), пољски математичар
[3]Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871—1953) немачки логичар, математичар
[4]Abraham Halevi (Adolf) Fraenkel (1891—1965) израелски математичар

у почетку била спорна, касније је добро изучена. А захваљујући Геделу[5] и Коену[6], знамо да је AC независна од ZF и сагласна са ZF (ZFC без AC).

Као што је добро познато, само у ZF много теорема у математици престаје да важи. Изучавању теорема чији докази захтевају AC посвећено је доста пажње, а посебно се издвајају оне теореме које су еквивалентне са AC. Такође, добро су изучене и теореме чији докази захтевају неке слабије верзије AC, као нпр. аксиома пребројивог избора (CC).

У овом мастер раду полазна тачка биће претпоставка да постоји модел у ZF у којем се појмови коначног (у смислу Тарског) и D-коначног скупа не поклапају. Затим, биће представљена нека позната математичка тврђења (из алгебре, теорије графова, ...) која не морају да важе у ZF. Такође биће представљено која су тврђења међусобно еквивалентна у ZF, и која су еквивалентна са AC, односно CC у ZF.

[5]Kurt Gödel (1906—1978) аустријско-амерички математичар, логичар
[6]Paul Joseph Cohen (1934—2007) амерички математичар

Увод

Развој математичке логике кроз векове

Стари Грци су били први народ у историји који се бавио проблемима логичког закључивања, и они су поставили темеље логике (првенствено као дела филозофије). Најпознатији Грчки филозофи-научници који су били зачетници логике као науке су Талес[7], Питагора[8], Парменид[9], Зенон[10], Протагора[11], Сократ[12], Платон[13] и Аристотел[14].

Једна посебна група филозофа, тзв. софисти, бавила се подучавањем вештина расправљања која је старим Грцима највише користила приликом учења у управљању градом-полисом, и у личним споровима. Између осталог, софисти су били познати по својим причама, тзв. софизмима, у којима се полазећи од привидно истинитих претпоставки, по правилима логичког закључивања, стиже до апсурдних закључака. Аристотела су такви софизми мотивисали да сакупи и катологизира све до тада познате шеме исправног, логичног закључивања у свом делу "Органон". Аристотелова логика, која је позната и под називом Аристотелова теорија силогизама чинила је скоро две хиљаде година обавезан део сваког озбиљног образовања.

Након мрачног средњег века долази до помака у логици као науци, и то можемо видети у делима научника-филозофа, пре свега Декарта[15] и Лајбница[16]. У XIX веку, са радовима Џорџа Була[17] стиже права математичка логика. Он је у својој теорији (тзв. рачун класа) развио две идеје: прво, да приликом рада са исказима треба користити ознаке, и друго, да закони мишљења имају много сличности са законима аритметике. Он је користио три фундаменталне операције међу класама (које ми данас зовемо унија, пресек и комплемент) помоћу којих је записао и доказао основне законе исказног рачуна. Данас су ти идентитети познати под називом аксиоме Булове алгебре.

[7]Талес из Милета (624. п.н.е.—547(546). п.н.е) старогрчки математичар, филозоф
[8]Питагора са Самоса (око 570. п.н.е.—око 495 п.н.е.) старогрчки математичар, филозоф
[9]Парменид из Елеје (око 500. п.н.е.—450. п.н.е.) старогрчки филозоф
[10]Зенон из Елеје (490. п.н.е.— 430. п.н.е.) старогрчки филозоф
[11]Протагора из Абдера (486. п.н.е.—411. п.н.е.) старогрчки филозоф
[12]Сократ из Алопеке (470. п.н.е.—399. п.н.е.) старогрчки филозоф
[13]Платон из Атине (427. п.н.е.—347. п.н.е.) старогрчки филозоф
[14]Аристотел из Стагира (384. п.н.е.—322. п.н.е.) старогрчки филозоф и беседник
[15]Ren Descartes (1596—1650) француски филозоф, математичар и научник
[16]Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz (1646—1716) немачки филозоф, математичар
[17]George Boole(1815—1864) енглески математичар, филозоф

ГЛАВА 1

Теорија скупова

1. Парадокси у теорији

Теорију скупова су створили математичари XIX века који су хтели да прошире основе математичке анализе, и први радови из те области били су посвећени скуповима бројева и скуповима функција. Скупове са произвољним елементима први је почео да проучава Георг Кантор[1], и он се сматра оснивачем тзв. наивне теорије скупова. У периоду од 1871. до 1883. године он је поставио темеље добро уређених скупова и објавио прве радове о кардиналним и ординалним бројевима.

Канторова теорија скупова је у почетку наилазила на противљење и незаинтересованост већине математичара и филозофа, и тек почетком деведесетих година почиње нагло примењивање теорије скупова у анализи и геометрији. Кантор 1895. године среће први парадокс[2] у својој теорији и саопштава га Хилберту[3], али га и не објављује. Бурали-Форти[4] поново открива тај парадокс, публикује га, и данас је он познат под називом Буралии-Фортијев парадокс.

Бурали-Фортијев парадокс (1897): У теорији ординалних бројева, сваком добро уређеном скупу одговара јединствен ординал. Такође, сваки почетни сегмент ординала (скуп ординала који са сваким својим елементом садржи и све ординале мање од њега) је природно добро уређен и одговара му ординал који је већи од свих ординала у сегменту (заправо, није тешко видети да ординал који одговара скупу ординала који су мањи од α, баш α). Како је скуп W свих ординала природно добро уређен, њему одговара ординал ω. Ординал ω мора да припада W, јер W садржи све ординале. Али са друге стране, ω је већи од свих ординала у W, па специјално $\omega < \omega$. Контрадикција.

Две године касније, Кантор открива сличан парадокс у теорији кардинала.

Канторов Парадокс (1899): По Канторовој теореми, скуп $P(S)$ је веће кардиналности од S. Међутим, постоји скуп код кога то није случај. Узмимо скуп свих скупова (U) и његов партитивни скуп $P(U)$. Према Канторовој теореми, однос њихових кардиналности би требало да је следећи: $|U| < |P(U)|$. Међутим, то је немогуће пошто је $P(U) \subseteq U$ (јер се сви чланови скупа $P(U)$ морају садржати у U), а то значи да,

[1] Georg Cantor (1845—1918) немачки математичар

[2] Парадокс (или антиномија) је расуђивање које води у противречност иако изгледа да су полазне претпоставке тачне, а правила расуђивања исправна.

[3] David Hilbert (1862—1943) немачки математичар

[4] Cesare Burali-Forti (1861—1931) италијански математичар

према дефиницији подскупа, мора да важи $|P(U)| < |U|$.
Расел[5], 1901. године анализира доказ Канторове теореме и конструише нови парадокс, који је много елементарнији.

Раселов парадокс (1901): Посматрајмо скуп $S = \{X : X \notin X\}$, тј. скуп свих скупова који нису елементи самог себе. Поставља се питање да ли је S елемент од S или није? Одговор на то питање је контрадикторан, јер по дефиницији скупа S, S елемент од $S \Leftrightarrow S$ није елемент од S.
Истовремено, а независно од Расела, тај исти парадокс је разматрала група математичара на челу са Цермелом.

Парадокс брице: Било једном једно село које је имало свог брицу. Брица је бријао тачно оне људе у селу који се не брију сами. Питање је да ли се брица сам брије или не?
Раселов парадокс нас подсећа на причу о "селу и брици", али прича о "селу и брици" има јасно решење: Брица је самоконтрадикторан, па једноставно закључујемо да такво село не може да постоји. Међутим, у случају скупа S из Раселовог парадокса није јасно зашто он не би постојао, зашто је самоконтрадикторан, као и који још скупови у себи носе сличну контрадикцију?

[5]Bertrand Russell (1872—1970) британски филозоф и математичар

2. Приступи који омогућавају избегавање парадокса

Почетком XX века, математичари и филозофи су анализирали парадоксе у наивној теорији скупова и имали су различите планове за њихово решавање. У то време није било јасно шта би могла бити база за елиминацију Раселовог парадокса.

Већину покушаја да се изгради сигурнија база за теорију скупова можемо поделити у три групе: то су логицистички, интуиционистички и аксиоматски приступ.

2.1. Логицистички приступ.

У логицистичком приступу издвајамо Раселову општу теорију класа (тзв. теорију типова). Расел је у тој теорији ограничавао формуле које користимо: сваком објекту је доделио ненегативан цео број("тип" објекта) и формула $x \in y$ има смисла само ако је тип y за један већи од типа x. Парадокси се не јављају у овако добијеној теорији, али су због строгог прихватања теорије типова многи резултати постали непотребно сложени. Раселову теорију типова је дорадио и употпунио Квајн[6], и та теорија скупова је названа "New Foundation" (NF). Она никад није постала опште прихваћена због својих чудних особина (нпр. несагласност са Аксиомом избора).

2.2. Интуиционистички приступ.

Интуиционисти уклањају парадоксе тако што радикално мењају логику и тиме доводе у питање читаве гране класичне математике. Њихова основна одлика је та што они не признају универзални карактер неких основних закона логике и тврде да се постајање у математици поклапа са конструктибилношћу. По њиховом начину размишљања, закон о искључењу трећег (P или не P) важи за коначне скупове, али не постоји оправдање да се пренесе и на бесконачне скупове. Такође, интуционисти не признају тзв. индиректне и егзистенцијалне доказе: тврђење "није истина да за свако x важи $P(x)$", не доказује постојање објекта x са особином $\neg P(x)$. Овакав начин размишљања, по њима може бити само повод за тражење конструктивног доказа. Другим речима, интуционисти ће признати постојање објекта x само ако имају начин за његову конструкцију.

2.3. Аксиоматски приступ.

Цермело је 1908. године први дао аксиоматски ситем теорије скупова који је касније допуно Френкел и он се данас зове ZF систем аксиома. Осим ZF система, користи се и тзв. NBG систем аксиома. Ту теорију је увео фон Нојман[7] и његова идеја је била да до контрадикције у Канторовој теорији скупова долази зато што су ти скупови нечији елементи. Због тога, он је неким објектима забранио да буду елементи неког другог објекта и те објекте зовемо класе, а објекте који су елменти неког другог објекта зовемо скупови. Наравно, ни у једној теорији се не могу извести познати парадокси из Канторове теорије скупова.

[6] Willard Van Orman Quine (1908—2000) амерички филозоф и логичар
[7] Margittai Neumann Janos Lajos (1903—1957) мађарско-амерички математичар и научник

3. ZF систем аксиома

ZF теорија скупова је теорија првог реда са једнакошћу. У таквим теоријама, "=" је логички симбол, при чему се $x = y$ увек интерпретира као једнакост објеката. Једини нелогични симбол ZF теорије јесте бинарни релацијски симбол "$\in$". По договору, уместо $\neg x \in y$ пишемо $x \notin y$. Даље ћемо навести систем аксиома, које носе назив ZF систем аксиома.

О једнакости скупа	
1. Ако два скупа имају исте елементе, они су једнаки	$Ax1$. Аксиома екстензионалности $(\forall y)(\forall x)((\forall z) z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y$

О празном скупу	
2. Постоји скуп који нема елементе	$Ax2$. Аксиома празног скупа $(\exists u)(\forall x) x \notin u$

Лако се може доказати (на основу $Ax1$) да је такав скуп u, чију егзистенцију обезбеђује $Ax2$, јединствен. Уобичајено се обележава са $\emptyset$, и зове празан скуп.

О скупу са два елемента	
3. Ако су x и y скупови, онда постоји скуп који садржи тачно x и y као елементе	$Ax3$. Аксиома пара $(\forall x)(\forall y)(\exists u)(\forall z)(z \in u \Leftrightarrow (z = x \vee z = y))$

Користећи само $Ax1$, може се доказати да је скуп u из $Ax3$ јединствен; обележавамо га са $\{x, y\}$. По договору, уместо $\{x, x\}$, пишемо само $\{x\}$.

О унији	
4. Ако је x скуп, онда постоји скуп y који садржи све елементе елемената од x	$Ax4$. Аксиома уније $(\forall x)(\exists u)(\forall z)(z \in u \Leftrightarrow (\exists v)(v \in x \wedge z \in v))$

Скуп u из $Ax4$ је јединствен и обележавамо га са $\bigcup x$. Уводимо ознаку $z \subseteq x$ за формулу $(\forall t)(t \in z \Rightarrow t \in x)$. Ако је $z \subseteq x$, кажемо да је z подскуп од x.

О партитивном скупу	
5. Ако је x скуп, онда постоји скуп u који садржи све подскупове скупа x	$Ax5$. Аксиома партитивног скупа $(\forall x)(\exists u)(\forall z)(z \in u \Leftrightarrow z \subseteq x)$

Скуп u из $Ax5$ је јединствен, и обележавамо га са $\mathcal{P}(x)$.

О слободи формирања скупа	
6. Имати ”што више” скупова, али избећи (бар познате) парадоксе у теорији скупова	$Ax6$. Аксиома подскупа $(\forall z)(\exists u)(\forall x)(x \in u \Leftrightarrow (x \in z \land \varphi(x)))$ *где је* $\varphi(x)$ *произвољна формула језика ZF, која не садржи променљиву* u

Како за сваку такву формулу $\varphi(x)$ имамо по једну аксиому, за $Ax6$ кажемо да је ”шема аксиома”. Пошто је за све одговарајуће формуле $\varphi(x)$ скуп u из $Ax6$ јединствен, уводимо ознаку: $\{x \mid x \in z \land \varphi(x)\}$ или $\{x \in z \mid \varphi(x)\}$. Дакле, $Ax6$ нам омогућава да (под условом да је z неки скуп), издојимо у скуп оне елементе из z који имају особину φ.

На основу $Ax1 - Ax6$, можемо дефинисати појмове као што су: пресек, разлика, директан производ скупова, релације, функције, ординали, кардинали, ... Али, треба приметити да за сада немамо обезбеђену егзистенцију бесконачног скупа. Сви скупови, који се могу конструисати на основу аксиома $Ax1 - Ax6$ су коначни. Аксиома бесконачности нам обезбеђује постојање бесконачног скупа.

О бесконачном скупу	
7. Постоје бесконачни скупови	$Ax7$. Аксиома бесконачности $(\exists u)(\emptyset \in u \land (\forall z)(z \in u \Rightarrow z \cup \{z\} \in u))$

Морамо напоменути да скуп u из $Ax7$ садржи као своје елементе следеће скупове:

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, ...$$

и да ти скупови имају редом $0, 1, 2, 3, ...$ елемената. Скуп u из $Ax7$ је индуктиван скуп.

Остале су нам још две битне аксиоме које имају задатак да прилагоде формални систем одговарајућој интуитивној теорији. Прва од њих служи да прошири домен модела формалне теорије, а друга да је мало ”скрати”.

О сликама скупова	
8. Функција пресликава скуп на скуп	$Ax8$. Аксиома замене $(\forall a)((\forall x \in a)(\exists! y)\phi(x, y) \Rightarrow (\exists z)(\forall x \in a)(\exists y \in z)\phi(x, y))$ *за све формуле* $\phi(x, y)$ *које немају слободну променљиву* y

Као што је $Ax6$, тако је и $Ax8$ шема аксиома. Ову аксиому је Цермеловом систему додао Френкел. Следећа аксиома служи да искључи скупове у којима би важило, на пример: $x \in x$, или $x \in y \land y \in x$.

О забрани лоших скупова	
9. Не постоје скупови са особинама $x \in x, x \in y \wedge y \in x$ $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni ... \ni x_n \ni ...$	$Ax9$. Аксиома регуларности $(\forall x \neq \emptyset) \Rightarrow (\exists y \in x)(\forall t)\neg(t \in x \wedge t \in y)$

Могуће је доказати многе ствари и без $Ax9$. Формални систем који се ослања само на $Ax1 - Ax8$, обележава се са ZF^-. Аксиоме $Ax1 - Ax9$ чине аксиоматски систем за ZF теорију скупова.

3.1. Директан (Декартов) производ скупова.
Нека је n природан број, $X_1, ..., X_n$ низ непразних скупова, а i индекс из скупа $\{1, ..., n\}$. Њихов директни производ се дефинише као скуп свих n-низова $(x_1, ..., x_n)$, таквих да је испуњен услов: $(\forall i)x_i \in X_i$. Тај скуп означавамо са

$$X_1 \times ... \times X_n \text{ или } \prod\{X_i \mid i = 1, ..., n\}$$

Уколико придружимо сваком елементу i из скупа $I = \{1, ..., n\}$, скуп X_i, добићемо низ скупова $X_1, ..., X_n$. Дакле, низ скупова можемо схватити и као фамилију $\{X_i \mid i \in I = \{1, ..., n\}\}$. Низ $(x_1, ..., x_n) \in X_1 \times ... \times X_n$, можемо посматрати као пресликавање скупа индекса $I = \{1, ..., n\}$ у скуп $X = \bigcup\{X_i \mid i \in I = \{1, ..., n\}\}$, при чему је испуњен услов: $(\forall i)x_i \in X_i$.

Сада ћемо навести општу дефиницију директног производа скупова. Нека је $\{X_i \mid i \in I\}$ фамилија непразних скупова. Директни производ ове фамилије је скуп $\prod\{X_i \mid i \in I\}$, чији су елементи пресликавања

$$x \colon I \to \bigcup\{X_i \mid i \in I\} = X$$

при чему је испуњен услов $(\forall i)\ x(i) \in X_i$.

3.2. Аксиома избора.

Аксиома 1.1 (Аксиома избора). Нека је $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ колекција непразних скупова. Тада постоји функција $g \colon \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ таква да за све $\lambda \in \Lambda$ важи $g(\lambda) \in X_\lambda$. Оваква функција назива се функција избора.

Многи математичари, укључујући и Кантора, користили су неки облик Аксиоме избора још крајем XIX века, али је нису експлицитно наводили. Расел је Аксиому избора 1906. године формулисао на следећи начин:

Аксиома 1.2 (Мултипликативна аксиома). Ако је $(X_i)_{i\in I}$ фамилија дисјунктних непразних скупова, онда је производ $\prod\limits_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

Цермело је Мултипликативну аксиому формулисао у општем случају, тако да скупови у X не морају бити дисјунктни.

Еквиваленција ових двеју формулација готово је очигледна. Уколико је $(X_i)_{i\in I}$ фамилија непразних скупова, и ако знамо да постоји одговарајућа функција избора g, тада важи $m = \langle g(i)\rangle_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} X_i$. Обрнуто, уколико знамо да је $\prod\limits_{i\in I} X_i \neq \emptyset$, тада уочимо елемент $m \in \prod_{i\in I} X_i$, и можемо дефинисати функцију избора фамилије $(X_i)_{i\in I}$ са $g(i) = \pi_i(m)$.

Ове две формулације надаље ћемо равноправно користити. Уз то, уведимо за Аксиому избора скраћеницу AC. Систем ZF с придруженом AC скраћено називамо ZFC систем.

Аксиома 1.3. AC(n), за $n \in \mathbb{N}$, наводи да је за сваку фамилију $(X_i)_{i\in I}$ n-елементних скупова, производ $\prod_{i\in I} X_i$ непразан.

Сада ћемо навести неке слабије верзије AC.

Аксиома 1.4. Аксиома пребројивог избора (CC) наводи да је за сваки низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непразних скупова X_n, производ $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ непразан.

Аксиома 1.5. CC$(\mathbb{R})$ наводи да је за сваки низ $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ непразних подскупова X_n од $\mathbb{R}$, производ $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ непразан.

ГЛАВА 2

Еквиваленти аксиоме избора

У овом делу ћемо навести три теореме о парцијалном уређењу и видети у каквој су они вези с Аксиомом избора.

1. Хауздорфов принцип максималности

Лема 2.1. *Претпоставимо да важи АС. Нека је X непразан скуп, и нека је колекција $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ парцијално уређена релацијом $\subseteq$. Претпоставимо да су испуњени следећи услови:*

а) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

б) *ако је $S \in \mathcal{A}$ и $R \subseteq S$, тада је и $R \in \mathcal{A}$;*

в) *ако је $\mathcal{L}$ ланац у $\mathcal{A}$, тада $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$.*

Тада у $\mathcal{A}$ постоји максималан елемент.

Доказ. Посматрајмо пресликавање $g\colon \mathcal{A} \to \mathcal{P}(X)$ које ћемо дефинисати са $g(S) = \{x \in X \mid S \cup \{x\} \in \mathcal{A}\}$. Приметимо да је увек испуњено $S \subseteq g(S)$, и да важи једнакост ако и само ако је елемент колекције $\mathcal{A}$ максималан. За свако $\emptyset \neq Y \subseteq X$ одаберимо $x_Y \in Y$ (то нам омогућава АС). Дефинишимо функцију $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ на следећи начин:

$$f(S) = \begin{cases} S \cup \{x_{g(S) \setminus S}\}, & \text{ако је } S \neq g(S); \\ S, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Јасно је увек $S \subseteq f(S)$. Даље, очито је увек $f(S) = S \Leftrightarrow g(S) = S$, па је довољно доказати да постоји $S \in \mathcal{A}$ такав да је $f(S) = S$. Назовимо $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ *торањ* ако су испуњени следећи услови:

i) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

ii) ако је $T \in \mathcal{T}$, тада је и $f(T) \in \mathcal{T}$;

iii) ако је $\mathcal{L}$ ланац у $\mathcal{T}$, тада $\bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{T}$.

Приметимо да је и колекција $\mathcal{A}$ торањ. Даље приметимо: уколико постоји колекција $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ која је истовремено и ланац и торањ, тада је елемент $N = \bigcup \mathcal{M}$ максималан у $\mathcal{A}$. Заиста, према iii) важи $N \in \mathcal{M}$, а тада је према ii) и $f(N) \in \mathcal{M}$; али с обзиром на дефиницију елемента N, сада је $f(N) \subseteq N$, али важи и $N \subseteq f(N)$, па је $f(N) = N$, те смо показали довољан услов за максималност елемента N у колекцији $\mathcal{A}$.

Дакле, довољно је наћи колекцију $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ која је истовремено и ланац и торањ. Покажимо да то важи за колекцију $\mathcal{M} = \bigcap_{\mathcal{T} \textit{ je toranj}} \mathcal{T}$. Тривијално се проверава да је $\mathcal{M}$ заиста торањ. Како бисмо показали да је и ланац, дефинишимо колекцију

$$\mathcal{B} = \{S \in \mathcal{A} \mid (\forall M \in \mathcal{M})(M \subseteq S \text{ или } S \subseteq M)\}.$$

Јасно, $\mathcal{M}$ је ланац ако и само ако је испуњено $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$, али с обзиром на дефиницију колекције $\mathcal{M}$ ово последње важи ако је $\mathcal{B}$ торањ. Проверавамо зато да ли $\mathcal{B}$ испуњава услове i), ii) и iii). Тривијално важи $\emptyset \in \mathcal{B}$. Даље, ако је $\mathcal{L}$ ланац у $\mathcal{B}$, покажимо да и за $K = \bigcup \mathcal{L} \in \mathcal{A}$ важи $K \in \mathcal{B}$. Заиста, ако је $M \in \mathcal{M}$ и $M \nsubseteq K$, тада за све $L \in \mathcal{L}$ важи $M \nsubseteq L$, а пошто $L \in \mathcal{B}$, имамо $L \subseteq M$. Дакле и $\bigcup \mathcal{L} = K \subseteq M$.

Тиме смо показали да $\mathcal{B}$ испуњава услове i) и iii). Преостаје још ii). Нека $Z \in \mathcal{B}$, и покажимо да за све $M \in \mathcal{M}$ важи $f(Z) \subseteq M$ или $M \subseteq f(Z)$. Посматрајмо скуп

$$\mathcal{K} = \{M \in \mathcal{M} \colon f(Z) \subseteq M \text{ или } M \subseteq Z\}.$$

Наравно, с обзиром на то што је $Z \subseteq f(Z)$, доказ је завршен уколико покажемо да је $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{K}$, али за ово је опет потребно доказати да је $\mathcal{K}$ торањ. Тривијално се проверава да $\mathcal{K}$ испуњава услове i) и iii). Преостаје још да претпоставимо да $K \in \mathcal{K}$ и из тога извучемо закључак да $f(K) \in \mathcal{K}$. Како K припада торњу $\mathcal{M}$, важи и $f(K) \in \mathcal{M}$. Дакле, треба још показати да важи $f(Z) \subseteq f(K)$ или $f(K) \subseteq Z$. Како на основу $K \in \mathcal{K}$ знамо да $f(Z) \subseteq K$ или $K \subseteq Z$, размотрићемо три случаја. Ако је $f(Z) \subseteq K$, тада заиста важи $f(Z) \subseteq f(K)$ (јер је $K \subseteq f(K)$). Ако је $K = Z$, опет је тривијално $f(Z) = f(K)$. И последње, ако је $K \subset Z$, тада пошто $f(K) \in \mathcal{M}$ и $Z \in \mathcal{B}$, на основу дефиниције колекције $\mathcal{B}$ имамо $f(K) \subseteq Z$ или $Z \subseteq f(K)$. Ако би било $Z \subset f(K)$, имали би смо $K \subset Z \subset f(K)$, али ово је немогуће јер на основу дефиниције функције f видимо да мора важити $|f(K) \setminus K| \leq 1$. У овом случају, дакле, остаје $f(K) \subseteq Z$, чиме је доказ завршен. □

Теорема 2.2 (Хауздорфов[1] принцип максималности). *Уколико претпоставимо да важи AC, тада је у парцијално уређеном скупу сваки ланац садржан у неком максималном ланцу.*

Доказ. Довољно је показати да у сваком парцијално уређеном скупу постоји максималан ланац. Заиста, уколико је X парцијално уређен скуп и L ланац у њему, тада је и скуп $\{K \mid L \subseteq K \subseteq X \text{ и } K \text{ је ланац}\}$ парцијално уређен релацијом $\subseteq$, па у њему постоји максималан ланац $\mathcal{M}$. Тада $\bigcup \mathcal{M}$ садржи L, и истовремено представља максималан ланац у парцијално уређеном скупу X.

Дакле, нека је X парцијално уређен скуп. Дефинишимо колекцију $\mathcal{F}$ свих ланаца у скупу X. Довољно је проверити услове Леме 2.1:

а) $\emptyset$ јесте ланац;
б) ако је S ланац и $R \subseteq S$, тада и R јесте ланац;
в) нека је $\mathcal{L}$ ланац у колекцији $\mathcal{F}$, и нека је $x, y \in \bigcup \mathcal{L}$; постоје, дакле, $L, K \in \mathcal{L}$ такви да је $x \in L$ и $y \in K$, али пошто је $\mathcal{L}$ ланац у колекцији $\mathcal{F}$, важи без умањења општости, $K \subseteq L$, па и $y \in L$, а како је L ланац у X, x и y јесу упоредиви.

□

[1] Felix Hausdorff (1868—1942) немачки математичар

2. Цорнова лема

Лема 2.3 (Лема Цорна[2]). *Претпоставимо да важи Хауздорфов принцип максималности, и нека је X непразан парцијално уређен скуп у ком сваки ланац има горње ограничење. Тада у скупу X постоји максималан елемент.*

Доказ. Према Хауздорфовом принципу максималности, у скупу X постоји максималан ланац M. Према претпоставци, ланац M има горње ограничење m. Докажимо да је m максималан елемент скупа X. Претпоставимо супротно, да постоји $x \in X$ које је веће од m у односу на посматрано парцијално уређење. Али, тада је $M \cup \{x\}$ ланац у скупу X, и при том је M прави подскуп ланца $M \cup \{x\}$, што је немогуће с обзиром на претпостављену максималност ланца M. □

3. Принцип доброг уређења

Прилично је лако добро уредити скуп $\mathbb{N}$. Заиста, сваки непразан подскуп скупа $\mathbb{N}$ у односу на стандардно уређење $\leq$ има најмањи елемент. Ово више не важи у скупу $\mathbb{Z}$, али није тешко добро уредити и њега. нпр. на следећи начин: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots$. Имајући у виду да је скуп $\mathbb{Q}$ пребројив, могли би смо замислити и његово добро уређење, али делује да све идеје падају у воду када наиђемо на скуп $\mathbb{R}$. Заиста, да ли је могуће све реалне бројеве поређати тако да сваки непразан подскуп скупа $\mathbb{R}$ има најмањи елемент у односу на нађени поредак? У овом одељку бавићемо се тим питањем не само за скуп $\mathbb{R}$, већ за произвољан скуп. Дајемо резултат Цермела.

Теорема 2.4 (Принцип доброг уређења). *Уколико претпоставимо да важи Цорнова лема, тада се сваки скуп X може добро уредити.*

Доказ. Нека је X непразан скуп (случај празног скупа је тривијалан). Означимо са $\mathcal{A}$ колекцију свих парова $\langle A, \leq_A \rangle$ таквих да је $A \subseteq X$ и да $\leq_A$ добро уређује A. Таква колекција је очито непразна. На колекцији $\mathcal{A}$ дефинисаћемо релацију $\preceq$ са:
за све $\langle A, \leq_A \rangle$, $\langle B, \leq_B \rangle \in \mathcal{A}$ важи $\langle A, \leq_A \rangle \preceq \langle B, \leq_B \rangle$ ако и само ако важи:
$A \subseteq B$, $\leq_A = \leq_{B|A^2}$, $(\forall b \in B)(\forall a \in A)(b \leq_B a \Rightarrow b \in A)$. Одмах се запажа да релација $\preceq$ парцијално уређује колекцију $\mathcal{A}$.

Докажимо да у колекцији $\mathcal{A}$ сваки ланац има горње ограничење. Нека је $\mathcal{L} \in \mathcal{A}$ ланац, и покажимо да је скуп $K = \bigcup_{\langle L, \leq_L \rangle \in \mathcal{L}} L$ добро уређен релацијом $\leq_K = \bigcup_{\langle L, \leq_L \rangle \in \mathcal{L}} \leq_L$. Није тешко уверити се да је $\leq_K$ линеарно уређење. Погледајмо зашто је добро. Нека је $J \subseteq K$, и уочимо $\langle L_1, \leq_{L_1} \rangle \in \mathcal{L}$ такво да важи $J \cap L_1 \neq \emptyset$. Како је $\leq_{L_1}$ добро ређење, у скупу $J \cap L_1 \subseteq L_1$ постоји најмањи елемент s. Покажимо да је он тада најмањи и у скупу J у односу на парцијално уређење $\leq_K$. Претпоставимо да важи $J \ni r \leq_K s$, и нека је испуњено $\langle L_1, \leq_{L_1} \rangle \preceq \langle L_2, \leq_{L_2} \rangle \in \mathcal{L}$, $r \in L_2$. Из трећег захтева приликом увођења уређења $\preceq$ сада следи $r \in L_1$, па и $r \in J \cap L_1$, али пошто је s најмањи елемент у том скупу и $r \leq_K s$, мора бити $r = s$.

Дакле, $\langle K, \leq_K \rangle$ јесте горње ограничење ланца $\mathcal{L}$ у колекцији $\mathcal{A}$. Према Цорновој леми, колекција $\mathcal{A}$ има максималан елемент, тј. постоји максималан добро уређен

[2]Max August Zorn (1906—1993) немачки математичар

подскуп M, скупа X. Тврдимо да је $M = X$. Заиста, уколико би постојао елемент $x \in X \setminus M$, тада би се скуп $M \cup \{x\}$ могао добро уредити тако што, уз одговарајуће уређење $\leq_M$, прогласимо x за највећи елемент, али сада имамо контрадикцију с претпостављеном максималношћу скупа M. □

Наредна теорема наводи еквиваленте аксиоме избора.

Теорема 2.5. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) *AC;*

(2) *Хауздорфов принцип максималности;*

(3) *Цорнова лема;*

(4) *Принцип доброг уређења.*

Доказ. (1)⇒(2) Теорема 2.2

(2)⇒(3) Лема 2.3

(3)⇒(4) Теорема 2.4

(4)⇒(1) Нека је $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ колекција непразних скупова, и нека је, према (4), $\leq$ добро уређење скупа $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Нека је функција $g\colon \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ тако дефинисана да $g(\lambda)$ означава најмању вредност у скупу X_λ у односу на релацију $\leq$. Тада је g функција избора колекције $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. □

ГЛАВА 3

Проблеми без аксиоме избора

1. Коначност

Појам коначности који је дефинисан преко природних бројева је јасан и не представља нам проблем.

Дефиниција 3.1. За скуп A кажемо да је коначан ако је или празан, или је еквипотентан са скупом $\mathbb{N}_n$, за неки природан број n (где је $\mathbb{N}_n$ скуп првих n природнх бројева, $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$).

"A је еквипотентан са $\mathbb{N}_n$" значи да "A има n елемената".

Ако се појам коначности сматра фундаменталнијим него појам броја (иако су природни бројеви дефинисани као кардинали коначних скупова), појављују се проблеми, нпр. како дефинисати коначност? Најстарија дефиниција коначности је Дедекиндова[1] дефиниција (1888).

Дефиниција 3.2. Скуп X се назива D-бесконачан ако постоји прави подскуп Y од X, где је $|X| = |Y|$; у супротном, X се назива D-коначан.

Тврђење 3.3. *Следећи услови су еквивалентни:*

1. *X је D-бесконачан.*
2. $|X| = |X| + 1$.
3. $\aleph_0 \leq |X|$.

Доказ. (3)$\Rightarrow$(2) Како је $\aleph_0$ кардинални број скупа природних бројева, имамо $|\mathbb{N}| \leq |X|$. Како важи $|\mathbb{N}| \leq |X|$ на основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева постоји инјекција $f\colon \mathbb{N} \to X$. Нека је ∞ елемент који није садржан у X, тада функција $g\colon X \to X \cup \{\infty\}$, дефинисана са

$$g(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ако је } x = f(0) \\ f(n), & \text{ако је } x = f(n+1) \\ x, & \text{иначе} \end{cases}$$

је бијекција. Како постоји бијекција међу скуповима следи да су и кардинални бројеви тих скупова једнаки. Дакле, $|X| = |X \cup \{\infty\}|$ а на основу дефиниције о сабирању кардиналних бројева $|X \cup \{\infty\}| = |X| + |\{\infty\}|$. Очигледно $|\{\infty\}| = 1$, па је услов (2) задовољен

$$|X| = |X| + |\{\infty\}| = |X| + 1.$$

[1]Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831—1916) немачки математичар

(2)$\Rightarrow$(1) Нека је ∞ елемент који није садржан у X, тада на основу претпоставке (2) како је $|X| = |X| + 1$, постоји бијекција $f\colon X \to X \cup \{\infty\}$. Тада је рестрикција f^{-1} на X, бијекција из X у прави подскуп $X \setminus \{f^{-1}(\infty)\}$ од X. Дакле, постоји прави подскуп од X који је исте кардиналности као X, па је X D-бесконачан.

(1)$\Rightarrow$(3) Како је X D-бесконачан скуп, постоји бијекција из X у прави подскуп од X, $f\colon X \to X$. Ако изаберемо елемент y из скупа $X \setminus f[X]$ и дефинишемо рекурзивно функцију $g\colon \mathbb{N} \to X$ тако да $g(0) = y$ и $g(n+1) = f(g(n))$, тада је g инјекција пошто за различите елементе из домена имамо различите слике. На основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева, како је $g\colon \mathbb{N} \to X$ инјекција следи $|\mathbb{N}| \leq |X|$, односно $\aleph_0 \leq |X|$. □

Без AC, овако дефинисани коначни скупови немају неке основне особине на које смо навикли, што показује следећи проблем.

Проблем 3.4. Може се десити да:

1. D-коначна унија D-коначних скупова буде D-бесконачна.
2. Партитивни скуп D-коначног скупа буде D-бесконачан.
3. D-бесконачан скуп буде слика D-коначног скупа.

Доказ. Посматрајмо модел[2] ZF са следећим особинама.
Постоји низ (X_n) међусобно дисјунктних скупова који имају по два елемента $X_n = \{x_n, y_n\}$, тако да је $X = \bigcup X_n$ D-коначан. Тада:

(1) За свако $x \in X$ посматрајмо скуп $Y_x = \{x, n\}$, где је n јединствен природан број за који $x \in X_n$. Тада је $Y = \bigcup\limits_{x \in X} Y_x$ D-коначна унија (пошто је X D-коначан скуп) D-коначних скупова (пошто су Y_x D-коначни скупови). Међутим, уколико скуп Y представимо као унију скупа природних бројева и $\bigcup_n X_n$, $Y = \mathbb{N} \cup \bigcup_n X_n$ функција $f\colon \mathbb{N} \to Y$, дефинисана са $f(n) = n$ је инјекција. На основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева пошто је $f\colon \mathbb{N} \to Y$ инјекција следи да је $|\mathbb{N}| \leq |Y|$, односно $\aleph_0 \leq |Y|$. Искористићемо импликацију (3)$\Rightarrow$(1) из Тврђења 3.3 на основу $\aleph_0 \leq |Y|$ следи да је Y D-бесконачан скуп.

(2) Нека је X D-коначан скуп. Тада је функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}X$ дефинисана са $f(n) = \bigcup\limits_{m \leq n} X_m$ инјекција. На основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева, пошто је $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}X$ инјекција следи $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}X|$, односно $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}X|$. Поново примењујемо импликацију (3)$\Rightarrow$(1) из Тврђења 3.3, и на основу $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}X|$, следи да је $\mathcal{P}X$ D-бесконачан скуп.

(3) Нека је X D-коначан скуп. Тада је функција $f\colon X \to \mathbb{N}$, дефинисана са

$$f(x) \text{ је јединствено } n \in \mathbb{N} \text{ за } x \in X_n$$

сирјекција.Како је скуп природних бројева у бијекцији са својим правим подскупом следи да је $\mathbb{N}$ D-бесконачан скуп.

[2]Модел A5 (N2(2) у [**3**])

□

Горе поменути проблеми показују да у одсуству AC наведена дефиниција Дедекинове D-коначности има пуно мана. Задовољавајући појам коначности дефинисао је Тарски (1924).

Дефиниција 3.5. Скуп X се назива коначан, ако сваки непразан подскуп скупа $\mathcal{P}X$ садржи минималан елемент у односу на инклузију. Скупови који нису коначни, називају се бесконачни.

Тврђење 3.6. *Следећи услови су еквивалентни:*

1. *X је коначан.*
2. *Ако $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}X$ задовољава*
   (а) *$\emptyset \in \mathfrak{A}$, и*
   (б) *$A \in \mathfrak{A}$ и $x \in X$ имплицира $(A \cup \{x\}) \in \mathfrak{A}$,*
   онда $X \in \mathfrak{A}$.

Доказ. (1)⇒(2) Нека је X коначан, и $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}X$. Тада скуп $\mathfrak{B} = \{X \setminus A \mid A \in \mathfrak{A}\}$ има минималан елемент B. Стога, $\mathfrak{A}$ има максималан елемент $A = X \setminus B$. Ако је $A \neq X$, онда постоји $x \in X \setminus A$ па на основу (б) следи $A \cup \{x\} \in \mathfrak{A}$ што је у контрадикцији са чињеницом да је A максималан елемент у $\mathfrak{A}$. Дакле, $A = X$ што имплицира да $X \in \mathfrak{A}$.

(2)⇒(1) Нека је $\mathfrak{A}$ скуп свих коначних подскупова од X. Услови $\emptyset \in \mathfrak{A}$ и уколико $A \in \mathfrak{A}$ и $x \in X$ важи $(A \cup \{x\}) \in \mathfrak{A}$ су испуњени, па на основу б) следи да $X \in \mathfrak{A}$. Добили смо да X припада скупу коначних подскупова што имплицира да је X коначан скуп. □

Тврђење 3.7. *Ако су X и Y коначни скупови, онда је и $X \cup Y$ коначан скуп.*

Доказ. Нека је $\mathfrak{A}$ непразан подскуп од $\mathcal{P}(X \cup U)$. Тада $\mathfrak{B} = \{A \cap X \mid A \in \mathfrak{A}\}$ садржи минималан елемент B, пошто је X коначан. Скуп $\mathcal{C} = \{A \cap Y \mid A \in \mathfrak{A}$ и $A \cap X = B\}$ садржи минималан елемент C, пошто је Y коначан. Према томе, $B \cup C$ је минималан елемент од $\mathfrak{A}$, па је $X \cup Y$ коначан скуп. □

Тврђење 3.8. *Коначна унија коначних скупова је коначна.*

Доказ. Нека је $\mathfrak{M}$ коначан скуп коначних скупова. Посматрајмо

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{M} \mid \bigcup \mathfrak{B} \text{ је коначна }\}.$$

Проверавамо услове (а) и (б) из Тврђења 3.6. Услов $\emptyset \in \mathfrak{A}$ је испуњен пошто је празан скуп коначан. Претпоставка $A \in \mathfrak{A}$ и $m \in \mathfrak{M}$ имплицира $(A \cup \{m\}) \in \mathfrak{A}$ па важи $\mathfrak{M} \in \mathfrak{A}$. Дакле $\bigcup \mathfrak{M}$ је коначна. □

Тврђење 3.9. *Ако је X коначан скуп, онда је и $\mathcal{P}X$ коначан скуп.*

Доказ. Претпоставимо да је X коначан скуп и посматрајмо $\mathfrak{A} = \{A \subseteq X \mid \mathcal{P}A$ коначан$\}$. Проверавамо услове (а) и (б) из Тврђења 3.6. Услов $\emptyset \in \mathfrak{A}$ је испуњен пошто је партитивни скуп празног скупа коначан. Претпоставка да $A \in \mathfrak{A}$ и $x \in X$ имплицира $(A \cup \{x\}) \in \mathfrak{A}$ па важи $X \in \mathfrak{A}$. Дакле, $\mathcal{P}X$ је коначан. □

Тврђење 3.10. *Слике коначних скупова су коначне.*

Доказ. Претпоставимо да је X коначан скуп и нека је функција $f\colon X \to Y$ сирјекција. Ако је $\mathfrak{A}$ непразан подскуп од $\mathcal{P}Y$, онда је $\mathfrak{B} = \{f^{-1}[A] \mid A \in \mathfrak{A}\}$ непразан подскуп од $\mathcal{P}X$. Пошто је X коначан скуп, сваки непразан подскуп $\mathcal{P}X$ садржи минималан елемент. Како је $\mathfrak{B}$ непразан подскуп $\mathcal{P}X$ следи да $\mathfrak{B}$ садржи минималан елемент B. Тада је $f[B]$ минималан елемент скупа $\mathfrak{A}$. Према томе, Y је коначан скуп. □

Сада ћемо се вратити Дедекиновој дефиницији D-коначности. Поставља се питање на који начин су појмови коначности и D-коначности међусобно повезани?

Тврђење 3.11. *Сваки коначан скуп је D-коначан.*

Доказ. Ово тврђење ћемо доказати контрапозицијом. Треба да покажемо да је сваки D-бесконачан скуп бесконачан. Предпоставимо да је X D-бесконачан скуп. На основу импликације (1)⇒(3) Тврђења 3.3, пошто је X D-бесконачан скуп следи $\aleph_0 \leq |X|$, односно $|\mathbb{N}| \leq |X|$. Услов $|\mathbb{N}| \leq |X|$ имплицира да постоји инјекција $f\colon \mathbb{N} \to X$. Стога је скуп $\mathfrak{A} = \{\{f(m)|m \geq n\}|n \in \mathbb{N}\}$ непразан подскуп од X, али не садржи минималан елемент, па је X бесконачан скуп. □

Међутим, обрат претходног тврђења не важи. Постоји модел[3] ZF где је бесконачан скуп D-коначан.

Поставља се питање када се појмови коначности подударају, тачније, када се Проблем 3.4 не дешава. Следећа лема ће нам помоћи приликом доказа наредне теореме.

Лема 3.12. *Следећи услови су еквивалентни:*

1. *Постоји сирјекција* $X \to \mathbb{N}$.
2. $\mathcal{P}X$ *је D-бесконачан, тј. постоји инјекција* $\mathbb{N} \to \mathcal{P}X$.

Доказ. (1)⇒(2) Претпоставимо да је функција $f\colon X \to \mathbb{N}$ сирјекција. Тада је функција $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}X$ дефинисана са $g(n) = f^{-1}[\{n\}]$ инјекција. На основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева како је $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}X$ инјекција следи $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}X|$, односно $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}X|$. Даље примењујемо импликацију (3)⇒(1) Тврђења 3.3 и како важи $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}X|$ следи да је $\mathcal{P}X$ је D-бесконачан скуп.

(2)⇒(1) Нека је функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}X$ инјекција. Дефинишемо рекурзивно функцију $g\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}X$ тако да су сви $g(n)$ непразни и међусобно дисјунктни. За $n \in \mathbb{N}$ претпоставимо да су $g(m)$ дефинисани за све $m < n$ тако да је скуп $\{f(k) \setminus \bigcup\limits_{m<n} g(m) | k \geq n\}$ бесконачан. Дефинишемо

$$n^* = \min\{k \mid k \geq n \text{ и } f(k) \setminus \bigcup_{m<n} g(m) \neq \emptyset \neq (X \setminus f(k)) \setminus \bigcup_{m<n} g(m)\}.$$

[3] Коxенов први модел A4 (M1 у [**3**])

Ако је $\{f(k) \setminus (f(n^*) \cup \bigcup_{m<n} g(m)) \mid k > n^*\}$ бесконачан, дефинишемо $g(n) = f(n^*) \setminus \bigcup_{m<n} g(m)$; у супротном дефинишемо $g(n) = X \setminus (f(n^*) \setminus \bigcup_{m<n} g(m))$. Према томе, функција $h\colon X \to \mathbb{N}$, дефинисана са $h(x) = \begin{cases} n, & \text{ако } x \in g(n) \\ 0, & \text{ако } x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} g(n) \end{cases}$, је сирјекција. □

Теорема 3.13. *Следећи услови су еквивалентни:*

1. *Коначан = D-коначан.*
2. *D-коначна унија D-коначних скупова је D-коначна.*
3. *Слике D-коначних скупова су D-коначне.*
4. *Партитивни скуп D-коначног скупа је D-коначан.*

Доказ. (1)⇒(2) Како важи да је коначан скуп исто што и D-коначан, онда на основу Тврђења 3.8. имамо да је D-коначна унија D-коначних скупова D-коначна.

(2)⇒(3) Нека је функција $f\colon X \to Y$ сирјекција са D-коначним доменом X. Онда је $Y = \bigcup_{x\in X} \{f(x)\}$ D-коначна унија D-коначних скупова, D-коначна због претпоставке (2). Дакле, слика D-коначног скупа је D-коначна.

(3)⇒(4) Ову импликацију ћемо доказати контрапозицијом. Треба да покажемо да је X D-бесконачан скуп уколико је $\mathcal{P}X$ D-бесконачан скуп. Претпоставимо да је $\mathcal{P}X$ D-бесконачан. Тада, на основу Леме 3.12, постоји сирјекција $f\colon X \to \mathbb{N}$. Пошто је $\mathbb{N}$ D-бесконачан, (3) имплицира да је X D-бесконачан.

(4)⇒(1) Довољно је показати да је сваки бесконачан скуп D-бесконачан. Функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}\mathcal{P}X$, дефинисана са $f(n) = \{A \subseteq X \mid |A| = n\}$ је инјекција. На основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева следи $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}\mathcal{P}X|$, односно $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}\mathcal{P}X|$. Даље, према импликацији (3)⇒(1) Тврђења 3.3 следи да је $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ D-бесконачан скуп. Претпоставка (4) даље имплицира да је $\mathcal{P}X$ D-бесконачан. Стога, поново примењујемо претпоставку (4) и добијамо да је X D-бесконачан скуп. □

Тврђење 3.14. *Следећи услови су еквивалентни:*

(1) *X је коначан,*

(2) *$\mathcal{P}\mathcal{P}X$ је D-коначан.*

Доказ. (1)⇒(2) Нека је X коначан скуп. На основу Тврђења 3.9, ако је X коначан, онда је и $\mathcal{P}X$ коначан. Даље, примењујемо теорему по други пут и добијамо да је $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ коначан. Како је сваки коначан скуп D-коначан на основу Тврђења 3.11, следи да је $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ D-коначан скуп.

(2)⇒(1) Ову импликацију ћемо доказати контрапозицијом. Ако је X бесконачан скуп теба да покажемо да је $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ D-бесконачан. Претпоставимо да је X бесконачан скуп, онда је функција $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}\mathcal{P}X$, дефинисана са $f(n) = \{A \subseteq X \mid |A| = n\}$ инјекција. На основу дефиниције о упоређивању кардиналних бројева, пошто је $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}\mathcal{P}X$ инјекција, следи $|\mathbb{N}| \leq |\mathcal{P}\mathcal{P}X|$, односно $\aleph_0 \leq |\mathcal{P}\mathcal{P}X|$. Даље, на основу импликације (3)⇒(1) Тврђења 3.3 следи да је $\mathcal{P}\mathcal{P}X$ D-бесконачан скуп. □

2. Проблеми у теорији уређења

У овом поглављу ћемо размотрити који проблеми настају у теорији уређења без употребе аксиоме избора.

Проблем 3.15. Парцијално уређени скупови не морају имати ни максимални ланац ни максимални антиланац.

Доказ. Аксиома избора је еквивалентна са условом Хауздорфовог максималног ланца, који наводи да сваки парцијално уређен скуп садржи максимални ланац. Такође, Аксиома избора је еквивалентна са условом Курепиног[4] максималног антиланца, који наводи да сваки парцијално уређен скуп има максимални антиланац. Пошто се у теорији уређености не позивамо на аксиому избора, настаје горе поменути проблем. □

Сада ћемо нашу пажњу усмерити на питање да ли мреже имају максималне филтере.

Дефиниција 3.16. Мрежа је парцијално уређен скуп L, где сваки коначан подскуп F има инфинум, $\inf F$, супремум, $\sup F$, (посебно L има најмањи елемент $0 = \sup\emptyset$, и највећи елемент, $1 = \inf\emptyset$) тако да $0 \neq 1$.

Дефиниција 3.17. У свакој мрежи дефинишемо бинарне операције $\wedge$ и $\vee$[5], на следећи начин:

$$x \wedge y \colon = \inf\{x, y\} \quad \text{и} \quad x \vee y \colon = \sup\{x, y\}$$

Дефиниција 3.18. Мрежа L се зове:

1. Дистрибутивна, ако задовољава једначину $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ за све x, y и z (и такође једначину $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$).
2. Потпуна (комплетна), ако сваки њен подскуп има инфимум и супремум.
3. Мрежа партитивног скупа, ако је L изоморфна са мрежом свих подскупова неког непразног скупа.

Дефиниција 3.19.
1. Подскуп F мреже L, зове се филтер у L ако и само ако су испуњена следећа два услова:
   (а) $1 \in F$ и $0 \notin F$.
   (б) $(x \wedge y) \in F$ ако и само ако $(x \in F$ и $y \in F)$.
2. Филтер F у L се зове максимални ако и само ако L нема већи филтер од F.
3. Филтер F у L се зове прост ако и само ако задовољава услов
   (в) $(x \vee y) \in F \Leftrightarrow (x \in F$ или $y \in F)$.
4. Филтер (максимални филтер) у мрежи партитивног скупа од X се такође зове филтер (ултрафилтер) од X.

Дуални појмови су: идеал, максимални идеал, прост идеал.

[4]Ђуро Курепа (1907—1993) српски математичар
[5]Изговарају се редом "и" и "или", терминима позајмљеним из исказне логике; у српском језику не постоје други (шире прихваћени) називи те операције.

Следеће питање на које треба да одговоримо, да ли мреже имају максималне филтере? У случају мреже партитивног скупа облика $\mathcal{P}(X)$, одговор је "да", пошто за свако $x \in X$ скуп $\dot{x} = \{F \subseteq X \mid x \in F\}$ је ултрафилтер на X. Ултрафилтери $\mathcal{F}$ овог облика се називају главни (пошто $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$), сви остали се називају неглавни или слободни. Даље се питамо да ли постоје неки слободни ултрафилтери на X? За коначно X, очигледно не. Међутим, за бесконачно X постоји $2^{2^{|X|}}$ слободних ултрафилтера, стим да смо у ZFC. Међутим, у ZF ситуација је потпуно другачија.

Проблем 3.20. Може да се деси следеће:

1. Не постоје слободни ултрафилтери.
2. Постоје слободни ултрафилтери на неким скуповима, али не постоје на $\mathbb{N}$.
3. Постоје ултрафилтери на сваком бесконачном скупу, али не може се сваки филтер $\mathcal{F}$ на скупу X увећати да буде ултрафилтер на X.
4. Постоје скупови са тачно једним слободним ултрафилтером.

Читалац доказ може да пронађе у литератури [**1**].

Остало је још да одговоримо на питање да ли постоје максимални филтери у мрежама? Следеће тврђење нам даје одговор.

Тврђење 3.21. *Следећи услови су еквивалентни:*

1. *Свака мрежа има максимални филтер.*
2. *AC.*

Доказ. (1)⇒(2) Нека је $(X_i)_{i\in I}$ фамилија непразних скупова. Посматрајмо скуп свих парова (J, x), где $J \subseteq I$ и $x \in \prod_{j\in J} X_j$, уређених са

$$(J, x) \leq (K, y) \text{ ако и само ако } (J \subseteq K \text{ и } x \text{ је рестрикција од } y \text{ на } J).$$

Додавањем највећег елемента 1, добијамо мрежу L. Претпоставка (1) тврди да свака мрежа има максимални филтер, што значи да и дуална мрежа од L има максимални филтер. То даље имплицира да L има максимални идеал M. За (J, x) и (K, y) у M, важи неједнакост $(J, x) \vee (K, y) \neq 1$ пошто $1 \notin M$, а $(J, x) \vee (K, y) \in M$. Даље, неједнакост имплицира да је $x_i = y_i$ за свако $i \in (J \cap K)$. Дакле, унија свих првих компоненти чланова од M је подскуп K од I, а унија свих других компоненти чланова од M је елемент x који припада $\prod_{k\in K} X_k$. Како је M максимални идеал, имамо $K = I$. Дакле, Аксиома избора је задовољена, пошто смо доказали да $x \in \prod_{i\in I} X_i$.

(2)⇒(1) Нека је A скуп свих филтера у датој мрежи (таква колекција је сигурно непразна јер $1 \in A$). Доказаћемо да у том скупу сваки ланац има горње ограничење. Ако је $N \subseteq A$ ланац, тада је и $\bigcup N \in A$, па је ово горње ограничење ланца. Испуњени су услови за примену Цорнове леме, а како је Аксиома избора еквивалентна Цорновој леми, на основу Теореме 2.5, доказ је завршен. □

3. Проблеми у теорији графова

Теорија графова је област математике која се бави проучавањем особина графова. Једна од техника рада с графовима је бојење, којој ћемо посветити пажњу у наставку рада.

3.1. Бојење графова.

Сам почетак бојења графова везује се за проблем бојења држава на географској карти, при чему две суседне државе не могу бити обојене истом бојом (из разумљивих разлога). Дуго времена се није знало колики је минималан број боја који је потребан за овако нешто, тј. да ли су четири боје увек довољне. Да четири боје јесу довољне 1976. године показали су Кенет Апел[6] и Волфганг Хакен[7].

Горњи пример, а и многи други, илуструју још нешто: најчешће је решење утолико корисније уколико је мање боја искоришћено. Зато је природно поставити и питање да ли је могуће обојити граф унапред задатим бројем боја.

У наставку бавићемо се тим питањем за бесконачне графове уколико су испуњени одређени услови на њиховим коначним подграфовима.

Најпре ћемо дефинисати основне појмове везане за теорију графова.

Дефиниција 3.22. **Граф** је уређен пар $\langle X, \varrho\rangle$ који се састоји од скупа X, чији се елементи називају **чворови**, и симетричне, антирефлексивне бинарне релације ϱ на X (тј. $x\varrho y \Rightarrow (y\varrho x \wedge x \neq y)$), чији се елементи $\langle x, y\rangle$ називају **ивице**.

- Хомоморфизам $f\colon \langle X, \varrho\rangle \to \langle Y, \sigma\rangle$ између графова је функција $f\colon X \to Y$ која задовољава услов
$$x\varrho y \Rightarrow f(x)\sigma f(y).$$
- Граф $\langle X, \varrho\rangle$ се назива **подграф** од графа $\langle Y, \sigma\rangle$ ако је X подскуп од Y и $\varrho = \sigma_X$ је рестрикција σ на $X \times X$.
- Граф $\langle X, \varrho\rangle$ се назива **комплетан** ако важи
$$\varrho = \{\langle x, y\rangle \in X \times X \mid x \neq y\}.$$
- K_n означава комплетан граф, где је $n = \{0, 1, ..., n-1\}$ скуп чворова, а елементи скупа n се зову **боје**.
- n-бојење графа G је хомоморфизам $f\colon G \to n$.
- Граф G је n-обојив ако постоји n-бојење од G
- Граф $\langle X, \varrho\rangle$ се зове **повезан** ако за произвољна два елемента x и y из X постоји $n+1$-торка $\langle x_0, x_1, ..., x_n\rangle$ где је
$$x_0 = x, \quad x_n = y \quad \text{и} \quad x_i\varrho x_{i+1} \quad \text{за свако} \quad i = 0, ..., n-1.$$

Уколико је граф G n-обојив, јасно је да је и сваки његов коначан подграф n-обојив, док није сасвим јасно да ли важи обрнуто. Кључну улогу у одговору на то питање има Аксиома избора.

Одмах дајемо негативан одговор у општем случају на постављено питање.

[6]Kenneth Ira Appel (1932—2013) амерички математичар
[7]Wolfgang Haken (1928—) немачки математичар

Проблем 3.23. Може се догодити да је сваки коначан подграф неког графа G 2-обојив, а да G није n-обојив ни за једно $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нека је $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ колекција двоелементних скупова за коју не постоји функција избора. Посматрајмо граф $G = \langle X, \varrho\rangle$ одређен са

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X_n \times \{n\}),$$

$$\varrho = \{\langle\langle x, n\rangle, \langle y, m\rangle\rangle \in X \times X \mid n = m \ \text{ и } \ x \neq y\}.$$

Тада је сваки коначан подграф графа G 2-обојив. Заиста, ако његови чворови припадају скупу $\bigcup\limits_{i=1}^{k} (X_{n_i} \times \{n_i\})$, једно 2-бојење може се добити одабиром по једног елемента из сваког скупа X_{n_i}, $1 \leq i \leq k$, и бојењем њега бојом 0, док би се преостали елементи ових скупова обојили бојом 1.

С друге стране, уверимо се да граф G није n-обојив ни за једно $n \in \mathbb{N}$. Претпоставимо супротно: нека је дато једно n-бојење графа G, и дефинишимо функцију $g\colon \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ на следећи начин: $g(n)$ представља прву координату оног елемента скупа $X_n \times \{n\}$ чија је боја у графу G минимална. Овако дефинисана функција g представља функцију избора скупа $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, контрадикција. $\Box$

Уколико имамо само 2 боје ситуација код повезаних графова је нешто боља.

Тврђење 3.24. *За повезан граф G следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *G је 2-обојив;*
2. *Сваки коначан подграф од G је 2-обојив.*

Доказ. Јасно, потребан нам је само смер (2)⇒(1). Претпоставимо да је сваки коначан подграф повезаног графа $G = \langle X, \varrho\rangle$ 2-обојив. Ако је X празан скуп, резултат је тривијалан. У супротном, одаберимо елемент $a \in X$ и дефинишимо функцију $g\colon X \to \mathbb{N}$ на следећи начин: за $\forall x \in X$ нека је $g(x)$ најмање $n \in \mathbb{N}$ такво да постоји $n+1$-торка $\langle x_0, ..., x_n\rangle \in X^n$ таква да је $x_0 = a$, $x_n = x$ и $x_i \varrho x_{i+1}$ за свако $i = 0, ..., n-1$. Тада функција $f\colon X \to \{0, 1\}$ дефинисана са

$$f(x) = g(x) \bmod 2$$

представља 2-бојење графа G. Заиста, уколико би постојали $x, y \in X$ такви да је $f(x) = f(y)$ и $x\varrho y$, тада би подграф сачињен од ивице $\langle x, y\rangle$ и путева од a до x и y коришћених приликом дефинисања вредности $g(x)$ и $g(y)$ био коначан подграф графа G, а не би био 2-обојив, што је немогуће. $\Box$

Теорема 3.25. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *Ако је сваки коначан подграф графа G 2-обојив, онда је и G 2-обојив;*
2. *AC(2).*

Доказ. (1)⇒(2) Нека је $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ колекција двоелементних скупова. Посматрајмо граф $G = \langle X, \varrho\rangle$ одређен са

$$X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (X_\lambda \times \{\lambda\}),$$

$$\varrho = \{\langle\langle x, n\rangle, \langle y, m\rangle\rangle \in X \times X \mid m = n \ \text{ и } \ x \neq y\}.$$

Тада је сваки коначан подграф графа G 2-обојив (као и у доказу Проблема 3.23). Према томе, на основу претпоставке (1), и граф G је 2-обојив. Нека је то 2-бојење $f\colon X \to \{0,1\}$. Тада за све $\lambda \in \Lambda$ постоји тачно један елемент x_λ из X_λ такав да важи $f(\langle x_\lambda, \lambda\rangle) = 0$. Дакле, $\langle x_\lambda\rangle_{\lambda\in\Lambda} \in \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$.

(2)⇒(1) Нека је $G = \langle X, \varrho\rangle$ непразан граф такав да је сваки његов коначан подграф 2-обојив. Нека је $\mathcal{C}$ колекција свих скупова $C \subseteq X$ таквих да је подграф $\langle C, \varrho|_C\rangle$ графа G максималан повезан подграф од G. Тада је, према Тврђењу 3.24 и претпоставци, за све $C \in \mathcal{C}$ граф $\langle C, \varrho|_C\rangle$ 2-обојив. Даље, лако се може видети да за све $C \in \mathcal{C}$ постоји тачно два 2-бојења графа: фиксирајмо један чвор графа $\langle C, \varrho|_C\rangle$, и обојимо га једном од датих двеју боја, произвољно, а боје свих осталих чворова графа $\langle C, \varrho|_C\rangle$, тада су једнозначно одређене као у доказу Тврђења 3.24. Означимо са F_C двочлани скуп 2-бојења графа $\langle C, \varrho|_C\rangle$. Према томе, на основу (2), можемо одабрати $\langle f_C\rangle_{C\in\mathcal{C}} \in \prod\limits_{C\in\mathcal{C}} F_C$. Дефинишемо функцију $f\colon X \to \{0,1\}$ са

$$f(x) = f_C(x), \quad \text{где је} \ \ C \ \ \text{тако одабрано да} \ \ x \in C.$$

Покажимо да је горња дефиниција једнозначна. Уколико би постојали различити скупови $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ таквих да $x \in C_1$ и $x \in C_2$, граф $\langle C_1 \cup C_2,\ \varrho|_{C_1\cup C_2}\rangle$ би такође био повезан (јер су графови $\langle C_1, \varrho|_{C_1}\rangle$ и $\langle C_2, \varrho|_{C_2}\rangle$ повезани, према потпоставци, а x их "спаја"), али би строго садржао бар један од графова $\langle C_1, \varrho|_{C_1}\rangle$, $\langle C_2, \varrho|_{C_2}\rangle$, што је у контрадикцији са њиховом претпостављеном максималношћу. Једнозначност ове дефиниције било је заправо све што је требало утврдити како бисмо се уверили да f јесте 2-бојење графа G. □

Доказ смера (1)⇒(2) лако се може уопштити и ако се број 2 замени било којим природним бројем $n \geq 3$. На питање шта се дешава с импликацијом (2)⇒(1) вратићемо се након што докажемо идућу теорему.

Лема 3.26. *Нека је I подскуп скупа B; и нека је $F = B \setminus I$. Тада су следећи услови еквивалентни:*

1. *I је прост идеал у B;*
2. *F је ултрафилтер у B;*
3. *важе следећи услови*
   а) $0 \in I$;
   б) $x \in I$ *и* $y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$;
   в) $x \in F$ *и* $y \in F \Rightarrow x \vee y \in F$.

Теорема 3.27. *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *Ако су сви коначни подграфови графа G 3-обојиви, тада је и цео граф G 3-обојив;*
2. *PIT: Свака Булова алгебра садржи прост идеал.*

Доказ. (1)⇒(2) Нека је B нетривијална Булова алгебра чији прост идеал желимо да одредимо. Конструисаћемо граф G такав да важи:

а) сваки коначан подграф графа G је 3-обојив;

б) ако је граф G 3-обојив, тада B има прост идеал.

Дакле, ово ће уз (1) имплицирати (2).

Граф ћемо конструисати из три корака.

Први корак: Нека је $G_1 = \langle X_1, \varrho_1 \rangle$ граф у ком је $X_1 = B$ а $\varrho_1 = \{\langle x, x' \rangle : x \in B\}$ где је x' комплемент од x у B.

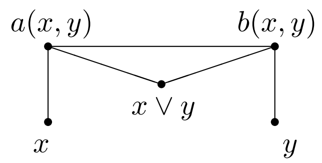
Други корак: Граф $G_2 = \langle X_2, \varrho_2 \rangle$ добијамо када додамо још један чвор на X_1, $X_2 = X_1 \cup \{p\}$, где је p неки елемент који није у B и спојимо га са свим чворовима G_1, $\varrho_2 = \varrho_1 \cup (\{p\} \times X_1) \cup (X_1 \times \{p\})$.

Трећи корак: Требаће нам следећи скуп:

$$P = \{\{x, y\} \subseteq B \mid x \text{ и } y \text{ нису упоредиви, ни комплементи један другог}\}$$

за свако $\{x, y\} \in P$ уочимо још по два "нова" елемента (тј. да не припадају скупу B и да су различити од p), назовимо их $a(x, y)$ и $b(x, y)$ и уочимо граф $G(x, y) = \langle C(x, y), \varrho(x, y) \rangle$ приказан на следећој скици

$G(x, y)$



Најзад, дефинишемо граф $G = \langle X, \varrho \rangle$ са:

$$X = X_2 \cup \bigcup_{\{x,y\} \in P} C(x, y)$$

$$\varrho = \varrho_2 \cup \bigcup_{\{x,y\} \in P} \varrho(x, y).$$

Приметимо како из првог корака следи да за свако 3-бојење f графа G и све $x \in B$ важи $f(x) \neq f(x')$. Даље, из другог корака следи да свако 3-бојење графа G индукује 2-бојење графа G_1 (чвор p повезан је са свим чворовима који су у графу G_1, што значи да је он обојен једном бојом, а само преостале две боје користе се за бојење графа G_1), док се свако 2-бојење графа G_1 може проширити до 3-бојења графа G_2 (ово је још лакше видети: само обојимо чвор p трећом бојом). Најзад, трећи корак је конструисан тако да се за све $\{x, y\} \in P$ функција $f\colon \{x, y, x \vee y\} \to \{0, 1, 2\}$ може проширити до 3-бојења $\widetilde{f}$ графа $G(x, y)$ ако и само ако је задовољен следећи услов

$$\text{ако је } f(x) = f(y), \text{ тада је } f \text{ константна.} \quad (*)$$

Докажимо то. Смер ($\Rightarrow$) доказујемо контрапозицијом: претпоставимо да је $f(x) = f(y)$ а да f није константна, тј. $f(x \vee y) \neq f(x)$; тада $a(x, y)$ мора да буде обојено различитом бојом и од x и од $x \vee y$, па њега бојимо трећом бојом; али сада немамо одговарајућу боју за $b(x, y)$, јер је оно повезано са три чвора која су већ обојена трима расположивим бојама. Преостаје смер ($\Leftarrow$). Уколико је $f(x) = f(y)$, тада је, према претпоставци, тој вредности једнако и $f(x \vee y)$, а функцију f можемо проширити до 3-бојења $\widetilde{f}$ графа $G(x,y)$ тако што ћемо за $\widetilde{f}(a(x,y))$ и $\widetilde{f}(b(x,y))$ узети преостале две боје. Уколико је $f(x) \neq f(y)$, тада имамо две могућности: или $f(x \vee y)$ заузима трећу боју, у ком случају дефинишемо $\widetilde{f}(a(x,y)) = f(y)$ и $\widetilde{f}(b(x,y)) = f(x)$, или је $f(x \vee y)$ једнако са $f(x)$ (аналогно радимо уколико је једнако са $f(y)$), па можемо дефинисати $\widetilde{f}(a(x,y)) = f(y)$ а за $\widetilde{f}(b(x,y))$ узети трећу боју.

Сада смо спремни да докажемо а) и б).

Доказујемо а). У графу G уочимо његов произвољан коначан подграф $H = \langle Z, \varrho_Z \rangle$. Тада је могуће пронаћи коначну подалгебру K алгебре B такву да важи $Z \subseteq K \cup \{p\} \cup \bigcup_{\{x,y\} \in P \cap \mathcal{P}(K)} C(x,y)$. Како је K коначна, нетривијална Булова алгебра, K има прост идеал I. Његов комплемент $F = K \setminus I$ је ултрафилтер на основу Леме 3.26 Конструисаћемо 3-бојење $h\colon Z \to \{0,1,2\}$ из три корака. Најпре, за $x \in Z \cap X_1$ дефинишимо $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \in I \\ 1, & \text{ако } x \in F \end{cases}$. Затим, уколико $p \in Z$, дефинишимо $h(p) = 2$. Пре него што наведемо трећи корак, уверимо се да за све $\{x,y\} \in P \cap \mathcal{P}(K)$ функција $f = h|_{\{x,y,x\vee y\}}$ задовољава (*). Заиста, уколико важи $f(x) = f(y)$, знамо да су x и y или оба у ултрафилтеру F, или оба у простом идеалу I, а како су F и I затворени у односу на операцију $\vee$, Лема 3.26 добијамо да важи $f(x \vee y) = f(x) = f(y)$. Дакле, за $z \in Z \cap C(x,y)$, где је $\{x,y\} \in P \cap \mathcal{P}(K)$, можемо дефинисати $h(z) = \widetilde{f}(z)$, где је $\widetilde{f}$ проширење функције f до 3-бојења графа $G(x,y)$.

Доказујемо б). Нека је $f\colon X \to \{0,1,2\}$ 3-бојење графа G. Претпоставимо, без умањења општости, да је $f(p) = 2$ и $f(0) = 0$. Дефинишимо $I = B \cap f^{-1}[\{0\}]$. Тада је $F \overset{\text{деф.}}{=} B \cap f^{-1}[\{1\}] = B \setminus I$. Штавише, из $\varrho_1 \subseteq \varrho$ следи да је $F = \{x' \mid x \in I\}$. Даље, ако $\{x,y\} \in P \cap \mathcal{P}(I)$, мора важити $x \vee y \in I$, јер у супротном $f|_{\{x,y,x\vee y\}}$ не би испуњава услов (*). Дакле, скуп I је затворен у односу на операцију $\vee$. Аналогно се показује да је и F затворен у односу на операцију $\vee$. Дакле, према Леми 3.26, I је прост идеал у B.

Пре доказа (2)⇒(1) навешћемо пар теорема и доказа који ће нам послужити у доказивању горе наведеног смера.

Нека је I произвољан индексни скуп, v_i за $i \in I$, валуације исказаних слова и U ултрафилтер Булове алгебре $\mathcal{P}(I)$. Како је U ултрафилтер, за свако исказно слово p, тачно један од скупова:

$$\{i \in I \mid v_i(p) = 0\} \text{ и } \{i \in I \mid v_i(p) = 1\}$$

припада U (јер је један комплемент другог). Дефинишимо валуацију v_U на следећи начин, за свако исказно слово p:

$$v_U(p) = 1 \text{ акко } \{i \in I \mid v_i(p) = 1\} \in U.$$

Основна особина овако дефинисане валуације дата је у следећем тврђењу.

Тврђење 3.28. *За сваку исказну формулу ϕ важи:*

$$v_U \models \phi \text{ акко } \{i \in I \mid v_i \models \phi\} \in U.$$

Доказ. Тврђење доказујемо индукцијом по сложености формуле ϕ. За исказна слова, тврђење важи директно по дефиницији валуације v_U.

Претпоставимо да је формула ϕ облика $\neg\psi$ и да за ψ важи тврђење. Тада $v_U \models \phi$ акко $v_U \not\models \psi$ акко $\{i \in I \mid v_i \models \psi\} \notin U$ акко $\{i \in I \mid v_i \not\models \psi\} \in U$ (јер је то комплемент) акко $\{i \in I \mid v_i \models \phi\} \in U$, што завршава доказ у овом случају.

Претпоставимо да је формула ϕ облика $\psi \wedge \theta$ и да за ψ и θ важи тврђење. Тада $v_U \models \phi$ акко $v_U \models \psi$ и $v_U \models \theta$ акко $\{i \in I \mid v_i \models \psi\} \in U$ и $\{i \in I \mid v_i \models \theta\} \in U$ акко $\{i \in I \mid v_i \models \phi\} = \{i \in I \mid v_i \models \psi\} \cap \{i \in I \mid v_i \models \theta\} \in U$, што завршава доказ. $\square$

Уочимо следећа тврђења о Буловим алгебрама.

Теорема о ултрафилтеру (Ultrafilter theorem, UFT). Свака Булова алгебра у којој $1 \neq 0$ садржи ултрафилтер.

Теорема о ултрафилтеру II (Ultrafilter theorem, UFT$_2$). Ако подскуп S Булове алгебре има својство коначног пресека, онда постоји ултрафилтер који садржи S.

Теорема 3.29. *У **ZF** тврђења **PIT**, **UFT** и **UFT**$_2$ су еквивалентна.*

Доказ. **PIT** $\Leftrightarrow$ **UFT** је лако, јер ако је P прост идеал алгебре B, онда је $B \setminus P$ ултрафилтер исте алгебре, и обратно, ако је F ултрафилтер алгебре B, онда је $B \setminus F$ прост идеал.

UFT$_2$ $\Rightarrow$ **UFT** је такође лако јер је $\{1\}$ скуп који има својство коначног пресека.

UFT $\Rightarrow$ **UFT**$_2$: Нека је S скуп који има својство коначног пресека. Лако се види да је са:

$$F = \{x \in B \mid x \leq s_1 \wedge ... \wedge s_n, \text{ за неке } s_1, ..., s_n \in S\}$$

дефинисан филтер од B који садржи S, и који није једнак целој алгебри B јер S има својство коначног пресека. Тада количничка алгебра B/F није тривијална, па садржи ултрафилтер U. Инверзна слика $\pi^{-1}[U]$, где је $\pi\colon B \longrightarrow B/F$ стандардна пројекција, је ултрафилтер од B који садржи F, па самим тим и S. $\square$

Уочимо следеће тврђење.

Компактност исказне логике. Скуп исказних формула $\sum$ је задовољив акко је сваки коначан подскуп од $\sum$ задовољив.

Теорема 3.30. *У **ZF**, **PIT** повлачи Компактност исказне логике.*

Доказ. Претпоставимо **PIT**; у доказу ћемо користити његов еквивалент **UFT**$_2$. Докажимо Компактност исказне логике.

Смер $\Rightarrow$ је очигледан: Свака валуација која задовољава Σ, задовољава и сваки његов коначан подскуп.

$\Rightarrow$: Нека је Σ скуп исказних формула чији је сваки коначан подскуп задовољив. Означимо са I скуп свих свих коначних подскупова од Σ, и за свако $i \in I$ означимо са v_i валуацију која задовољава подскуп i.[8] За сваку формулу $\phi \in \Sigma$, уочимо подскуп $I_\phi = \{i \in I \mid \phi \in i\}$ од I, свих коначних подскупова од Σ који садрже ϕ. У Буловој

[8]Приметимо да радимо чудну ствар, са i означавамо коначан подскуп од Σ.

алгебри $\mathcal{P}(I)$ фамилија $S = \{I_\phi \mid \phi \in \Sigma\}$ има својство коначног пресека; заиста, сваки коначан пресек $I_{\phi_1} \cap I_{\phi_2} \cap ... \cap I_{\phi_n}$ садржи $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$, па је непразан. Због тога постоји ултрафилтер U алгебре $\mathcal{P}(I)$ који садржи S, тј. све I_ϕ, $\phi \in \Sigma$.

Тврдимо да v_U задовољава скуп Σ, што завршава доказ. Нека $\phi \in \Sigma$. Приметимо да $\{i \in I \mid v_i \models \phi\}$ садржи I_ϕ. Како $I_\phi \in U$, то и $\{i \in I \mid v_i \models \phi\} \in U$, па према горњем тврђењу заиста важи $v_U \models \phi$. □

Уочимо следеће тврђење.

Тврђење 3.31 ($\mathbf{G}_k$). *Сваки коначан подграф од G је k-обојив ако и само ако је граф G k-обојив.*

Теорема 3.32. *У **ZF**, Компактност исказне логике повлачи $\boldsymbol{G}_3$.*

Доказ. Смер $\Leftarrow$ у $\mathbf{G}_3$ је очигледан, па доказујемо $\Rightarrow$. Нека је G граф чији је сваки коначан подграф 3-обојив. Уочимо скуп исказних слова P кога чине следећи скупови:

$$\{p_g \mid g \in G\} \cup \{q_g \mid g \in G\} \cup \{r_{gh} \mid g, h \in G, g \neq h\}.$$

На исказном језику P уочимо скуп реченица Σ који садржи следеће реченице:

$$\neg(p_q \wedge q_g), \text{ за све } g \in G,$$

$$r_{gh} \Leftrightarrow r_{hg}, \text{ за све } g, h \in G, \ g \neq h,$$

$$r_{gh} \Rightarrow [\neg(p_g \wedge p_h) \wedge \neg(q_g \wedge q_h) \wedge \neg(\neg p_q \wedge \neg q_g \wedge \neg p_h \wedge q_h)], \text{ за све} g, h \in G, \ g \neq h,$$

$$r_{gh}, \text{ за све } g, h \in G, \ g\rho h.$$

Објаснимо шта овде радимо. Формализујемо исказном логиком информацију да је G 3-обојив. Слово p_g читамо као "чвор g је обојен бојом 0", а слово q_g као "чвор g је обојен бојом 1". Првом аксиомом у Σ смо забранили да чвор g буде обојен и бојом 0 и бојом 1. Ако је $\neg p_g \wedge \neg q_g$, тј. g није обојен ни бојом 0 ни бојом 1, кажемо да је обојен бојом 2. Даље, слово r_{gh} каже да су чворови g и h спојени ивицом. Друга аксиома у Σ је јасна, она каже да су g и h спојени акко су h и g спојени. Трећа аксиома у Σ каже да спојени чворови не могу бити обојени истом бојом. Коначно, последња аксиома у Σ каже који су чворови спојени у G.

Дакле, према датом објашњењу, граф G је 3-обојив акко је скуп Σ задовољив. Према Компактности исказне логике, довољно је да су сви коначни подскупови од Σ задовољиви. Нека је Σ_0 неки коначан подскуп од Σ. Како је он коначан, у њему се јавља само коначно много исказних слова, и можемо проширити скуп Σ_0 са свим реченицама из Σ које садрже (само) та слова, тј. можемо га проширити до скупа који говори о 3-обојивости неког коначног подграфа од G (то је подграф одређен са словима која се јављају у Σ_0). Међутим, по претпоставци, тај коначан подграф јесте 3-обојив, тј. Σ_0 је задовољив. Доказ је завршен. □

Како важе импликације

$$\mathbf{PIT} \Rightarrow \text{Компактност исказне логике} \Rightarrow \mathbf{G}_3$$

доказ (2)$\Rightarrow$(1) је завршен. □

Враћамо се на смер (2)$\Rightarrow$(1) Теореме 3.25 и за $n \geq 3$.

Проблем 3.33. Чак и ако претпоставимо AC(3), може се догодити да постоје графови који нису 3-обојиви упркос томе што су сви њихови коначни подграфови 3-обојиви.

Доказ. Постоји модел[9] који задовољава AC(3), а не задовољава PIT. Из еквиваленције доказане у претходној теореми следи да у уоченом моделу имамо жељени контра пример. □

Теорема 3.34. *У ZFC систему аксиома, за све $n \in \mathbb{N}$ следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *Граф G је n-обојив.*
2. *Сваки коначан подграф графа G је n-обојив.*

Доказ. Смер (2)$\Rightarrow$(1) Теореме 3.27 аналогно се доказује ако уместо броја 3 ставимо било које $n \in \mathbb{N}$. Како AC имплицира PIT, доказ је завршен.

□

[9]Принцусов Модел (M43 у [**3**] задовољава AC(fin), али не задовољава PIT

ГЛАВА 4

Закључак

Колико је важна Аксиома избора у математици? Важност је релативан појам. За програмера, за математичара који се бави примењеном математиком или пак за математичара који се бави комбинаториком, аксиома избора је најмање важна аксиома у математици. При раду са само коначним скуповима нема потребе за Аксиомом избора.

Важност Аксиоме избора се примећује при раду са бесконачним скуповима. Уколико искључимо Аксиому избора може се десити да D-коначна унија D-коначних скупова буде D-бесконачна, партитивни скуп D-коначног скупа буде D-бесконачан и да D-бесконачан скуп буде слика D-коначног скупа.

Следећи проблем на који наилазимо у теорији уређености без примене AC: Парцијално уређени скупови не морају имати ни максимални ланац ни максимални антиланац, може се десити да не постоје слободни антифилтери.

У области теорије графова сусрећемо се са проблемом да је коначан подграф неког графа G 2-обојив, а да G није n-обојив ни за једно $n \in \mathbb{N}$, уколико не примењујемо AC.

Сама мишљења математичара око важности аксиоме избора су и данас увелико подељена, али за сада, њене добре стране, преовладавају лоше. Што не значи да у некој будућности неће доћи до промене.

Литература

[1] Herrlich H., *Axiom of Choice,* Department of Mathematics, University of Bremen, Germany, 1876

[2] Башић Б., *Аксиома избора и математика* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду, Србија, 2009

[3] Howard P. and J.E. Rubin, *Consequences of the Axiom of Choice.* Amer. Math. Soc. 1998. Project Homepage. http://www.math.purdue.edu/jer/cgi-bin/conseq.html или http://www.dragon.emich.edu/phoward/conseq.html

[4] Стојковић З., Бошњак И., *Елементи линеарне алгебре* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2010

[5] Марјановић М., Врећица С., *Топологија* Завод за уџбенике, Београд, 2011

[6] Шешеља Б., Тепавчевић А., *Алгебра 1* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2010

[7] Шешеља Б., Тепавчевић А., *Алгебра 2* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2011

[8] Шешеља Б., Тепавчевић А., *Булове алгебре и функције* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2005

[9] Курилић М., *Основи опште топологије* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 1998

[10] Хаџић О., Пилиповић С., *Увод у функционалну анализу* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 1996

[11] Вуковић М., *Теорија скупова-предавања* Природно-математички факултет, Свеучилиште у Загребу, Загреб

[12] Њамцул А., *Теорема Кантор-Бенедиксона и њене примене* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2015

[13] Куљић М., *Буловско вредносни модели* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2014

[14] Савић Н., *Ултрафилтери* Департман за математику и информатику, Природно-математички факултет, Нови Сад, 2013

[15] Икодиновић Н., *Увод у математичку логику-скрипта* Математички факултет, Београд 2015

[16] Петровић З., *Увод у математичку логику-скрипта* Математички факултет, Београд 2016

[17] др Пучић Ф. Ц., *Топологија са одабраним задацима-скрипта* Државни универзитет у Новом Пазару, Нови Пазар, 2014

[18] Madarasz Sz. R., *Matematička logika-skripta* Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2012