Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Kompleksni brojevi i Mebijusove transformacije

Master rad

Student:
Marina Đurica, 1043/2016

Mentor:
prof dr. Miodrag Mateljević

Beograd,
2017.

Sadržaj

Uvod

Poznato je da je u istoriji matematike osnovni motiv za uvođenje kompleksnih brojeva bilo rešavanje algebarskih jednačina. Korišćenjem kompleksnih brojeva su neke stare teorije iskazane na drugačiji način. Takođe skup kompleksnih brojeva možemo interpretirati kao euklidsku ravan. Mnogi geometrijski zadaci se pomoću kompleksnih brojeva mogu elegantnije i jednostavnije rešiti.

U ovom radu će biti reči o kompleksnim brojevima i Mebijusovim transformacijama. Mebijusove transformacije imaju veoma lepa svojstva i različite primene u kompleksnoj analizi. Pokazuje se da se svaka Mebijusova transformacija kompleksne ravni može predstaviti kao kompozicija translacije, rotacije, homotetije i inverzije.

Ovaj rad ima šest poglavlja. Prvo poglavlje se odnosi na definisanje kompleksnih brojeva kao uređenih parova a tu definiciju dao je Vilijam R. Hamilton, irski matematičar (1805-1865.). Takođe odnosi se na zapis kompleksnog broja u algebarskom, trigonometrijskom i eksponencijonalnom obliku, a u ovom poglavlju razmatra se i $n-$ti koren kompleksnog broja. Drugo poglavlje govori o preslikavanjima kompleksne ravni kao što su translacija, rotacija, homotetija, inverzija i recipročno preslikanje. U trećem poglavlju nalazi sa predstavljanje jednačine prave i jednačine kruga. Kao i nalaženje kooordinate težišta trougla ili definisanje mere ugla. Četvrto poglavlje odnosi se na skalarni proizvod, vezu između normalnosti dve prave i skalarnog proizvoda. Takođe odnosi se na vektorski proizvod, vezu između kolinearnosti tri tačke i vektorskog proizvoda kao i povezanost vektorskog proizvoda sa orijentisanom površinom. Zatim, u poglavlju se nalazi i veza skalarnog i vektorskog proizvoda. U petom poglavlju vidimo kako su neki geometrijski zadaci jednostavnije rešeni preko kompleksnih brojeva poput zadataka Ojlerov krug, ili Simsonova prava. Na kraju dolazi šesto poglavlje koje se odnosi na Mebijusove transformacije, neke njegove osobine i dvorazmeru tačaka. Kao i klasifikacije Mebijusovih transformacija na hiberboličko, eliptičko, loksodromičko i paraboličko.

1 Kompleksni brojevi

1.1 Algebarski oblik kompleksnog broja

Izraz oblika $x + iy$, gde su x, y realni brojevi, a i simbol za koji važi $i^2 = -1$, nazivamo kompleksnim brojem. Za kompleksan broj zapisan u obliku

$$z = x + iy \tag{1}$$

kažemo da je zapisan u ***algebarskom obliku***.

Skup $\mathbb{C} = \{z = x + iy \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ je skup kompleksnih brojeva, gde je $x = \mathrm{Re}(z)$ *realni* deo kompleksnog broja z, a $y = \mathrm{Im}(z)$ *imaginarni* deo kompleksnog broja z. Simbol i zovemo *imaginarna* jedinica.
Neka su $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Tada su jednakost, operacije sabiranja i množenja u skupu $\mathbb{C}$ su definisane na sledeći način:

$$\begin{aligned} x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2, \\ z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i. \end{aligned}$$

Formalna definicija skupa kompleksnih brojeva bi glasila:

Definicija 1. *Skup kompleksnih brojeva definišemo kao skup uređenih parova* $z = (x, y)$ *gde su* $x, y \in \mathbb{R}$. *Pri tome, se jednakost, sabiranje i množenje kompleksnih brojeva definišu na sledeći način:*

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2, \\ (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Tvrđenje 1. *Algebarska struktura* $\mathbf{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

Dokaz. Da bi smo pokazali da je struktura $\mathbf{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ polje, potrebno je proveriti tri činjenice.

- Da je $(\mathbb{C}, +)$ Abelova grupa. Jasno je da asocijativnost i komutativnost operacije sabiranja važe jer se svode na komutativnost i asocijativnost u $\mathbb{R}$. Primetimo da važi $(x, y) + (0, 0) = (0, 0) + (x, y) = (x, y)$, pa je neutralni element operacije sabiranja $(0, 0)$. Takodje vidimo da važi $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$ pa je suprotni element $(-x, -y)$.

- Da je $(\mathbb{C},\cdot)$ komutativni monoid u kome samo $(0,0)$ nema inverz. Na isti način važi i ovde asocijativnost i komutativnost operacije množenja. Dok je neutralni element u odnosu na množenje $(1,0)$ a inverzni element u odnosu na množenje za $(x,y)\neq(0,0)$ je $\left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$.
- Distributivnost množenja prema sabiranju. Korišćenjem operacija (2) lako vidimo da važi distributivnost množenja prema sabiranju: $(z_1,z_2)\cdot((z_3,z_4)+(z_5,z_6))=(z_1,z_2)\cdot(z_3,z_4)+(z_1,z_2)\cdot(z_5,z_6)$.

$\square$

Neka je $\mathbb{C}_0=\{(x,0)\ :\ x\in\mathbb{R}\}$. Kako važi $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$ i $(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1x_2,0)$, sledi da je $(\mathbb{C}_0,+,\cdot)$ potpolje polja $\mathbf{C}$. Posmatrajmo $f\ :\ \mathbb{C}_0\to\mathbb{R}$, $f((x,0))=x$, jasno je da je f bijekcija, i da važi $f((x_1,0)+(x_2,0))=f((x_1,0))+f((x_2,0))$, prema tome potpolje $(\mathbb{C}_0,+,\cdot)$ polja $\mathbf{C}$ je izomorfno polju $(\mathbb{R},+,\cdot)$ i zbog toga realan broj x možemo posmatrati kao kompleksan broj $(x,0)$.

Definicija 2. *Kompleksni broj* $(0,1)$ *zovemo imaginarna jedinica. Označavamo ga sa već pomenutim simbolom* i.

Kako važi $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ odatle vidimo da je i simbol za koji važi $i^2=-1$. Stepenovanjem imaginarne jedinice i uz to da je $i^2=-1$, primećujemo da za imaginarnu jedinicu važi:

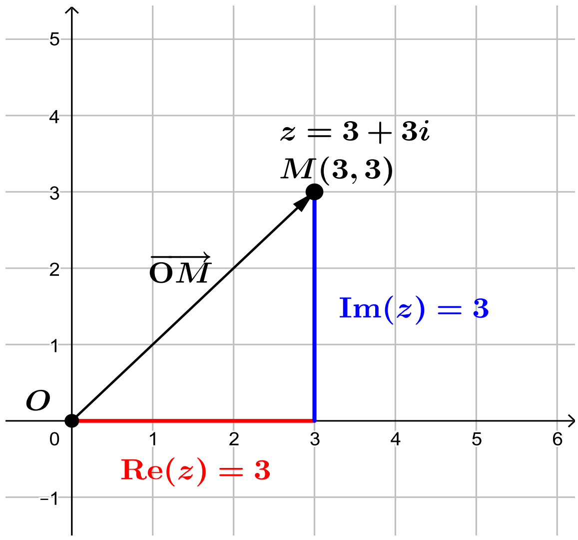
$$i^n=\begin{cases}1, & n=4k,k\in\mathbb{Z},\\ i, & n=4k+1,k\in\mathbb{Z},\\ -1, & n=4k+2,k\in\mathbb{Z},\\ -i, & n=4k+3,k\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

Sada lako dolazimo do algebarskog zapisa (1):
$(x,y)=(x,0)+(0,y)=(x,0)+(0,1)(y,0)=x+iy$.

Definisanje kompleksnih brojeva kao skupa uredjenih parova sa realnim koordinatama omogućava nam geomatrijski prikaz kompleknih brojeva. Svakom kompleksnom broju $z=x+iy$ je dodeljena tačno jedna tačka $M(x,y)$ u ravni $\mathbb{R}^2$, za tačku $M(x,y)$ možemo uvesti oznaku i $M(z)$. Na taj način skup $\mathbb{C}$ je prikazan kao ravan sa Dekartovim[1] koordinatnim sistemom pri čemu je x-osa realna osa, a y-osa je imaginarna osa. Takva ravan se naziva i *Gausova ravan*[2]. Kompleksan broj $z=x+iy$ možemo videti i kao vektor čija je

[1]Rene Descartes, 31.mart 1596.-11.februar 1650., francuski matematičar i filozof.
[2]Johann Carl Friedrich Gauss, 30. april 1777.-23. februar 1855., nemački matematičar.

početna tačka koordinatni početak **O** a vrh vektora je tačka koja je dodeljena tom kompleksnom broju, odnosno tačka $M(x, y)$. Dakle, kompleksnom broju z odgovara vektor $\overrightarrow{\mathbf{O}M}$ (videti sliku 1). Prema tome možemo videti da zbir kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravni možemo geometrijski interpretirati kao sabiranje vektora po pravilu paralelograma.



Slika 1: *Kompleksan broj kome je dodeljena tačka i odgovarajući vektor koji odgovara tom kompleksnom broju.*

Definicija 3. *Broj* $\overline{z} = x - iy$ *nazivamo konjugovani broj kompleksnog broja* $z = x + iy$.

Sabiranjem i oduzimanjem brojeva $\overline{z} = x - iy$ i $z = x + iy$ dobijamo jednakosti

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}).$$

Operacijom množenja z i $\overline{z}$ uvek dobijemo realan broj $x^2 + y^2$. Zatim računom možemo pokazati da operacija konjugovanja ima sledeća svojstva:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, \; z_2 \neq 0, \quad \overline{\overline{z}} = z.$$

Definicija 4. *Nenegativan broj* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *koji se označava sa* $|z|$ *je modul kompleksnog broja* $z = x + iy$.

Iz definicije modula slede sledeće osobine:

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad |z| = |\overline{z}|, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0, \quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|.$$

Teorema 1. *Za svako $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ važe sledeće formule:*

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2, \tag{3}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2, \tag{4}$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \tag{5}$$

Dokaz. Korišćenjem svojstva $z\overline{z} = |z|^2$, imamo:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) + z_2\overline{z_2}.$$

Znamo da važi $2\,\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})$, dakle važi i $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}) = 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$. Prema tome: $|z_1 + z_2|^2 = z_1\overline{z_1} + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + z_2\overline{z_2}$, samim tim opet pozivajući se na $z\overline{z} = |z|^2$ sledi jednakost (3). Na sličan način se dokazuje jednakost (4) a sabiranjem jednakosti (3) i (4) dobija se (5)[3]. $\square$

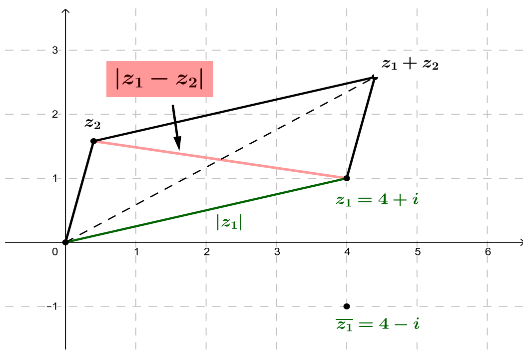
Neka je $M(x, y)$ tačka koja je dodeljena kompleksnom broju $z = x + iy$. Kako euklidsko rastojanje tačke $M(x, y)$ od koordinatnog početka **O** jeste $\sqrt{x^2 + y^2}$, možemo zaključiti da je modul kompleksnog broja $z = x + iy$ jednak rastojanju tačaka **O** i $M(x, y)$.

Takođe ***rastojanje tačaka*** koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_1 i z_2 jednako je modulu razlike ta dva broja (videti sliku 2) tj. računa se kao:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Osnovno svojstvo ovog rastojanja je da zadovoljava nejednakost trougla: $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$. Dokažimo sada tu nejednakost. Stavimo da je $z = z_1 - z_3$ a da je $w = z_3 - z_2$ odatle preostaje nam da dokažemo

$$|z + w| \leq |z| + |w|. \tag{6}$$



Slika 2: *Rastojanje tačaka, moduo kompleksnog broja, konjugovani broj kompleksnog broja.*

[3]Zakon paralelograma: zbir kvadrata dijagonala jednak je zbiru kvadrata svih stranica.

Kako važi $\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z|\,|w|$ i prema jednakosti (3) sledi nejednakost $|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2$. Zbog toga sto je modul nenegativan broj iz ove nejednakosti sledi nejednakost (6). Posledica nejednakosti (6) je nejednakost $||z|-|w|| \leq |z-w|$.

1. $|z|-|w| = |z-w+w|-|w| \leq |z-w|+|w|-|w|$,

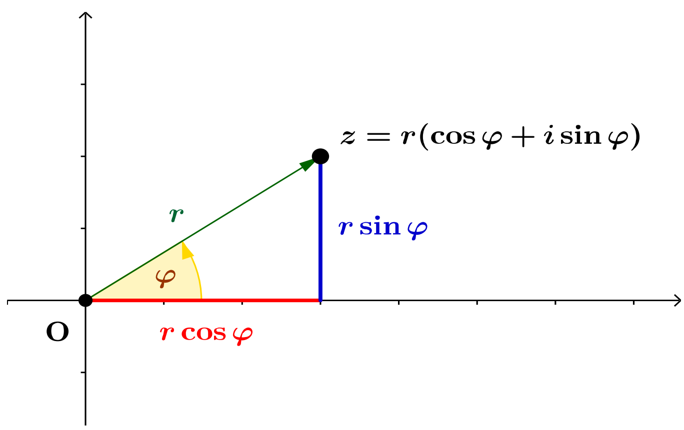
2. $-(|z|-|w|) = |w|-|z| = |w-z+z|-|z| \leq |w-z|+|z|-|z|$,

Dakle iz 1. i 2. sledi $||z|-|w|| \leq |z-w|$. Ako u poslednju nejednakost umesto w stavimo $-w$ dobijemo $||z|-|w|| \leq |z+w|$. Prema tome važi i $||z|-|w|| \leq |z+w| \leq |z|+|w|$.

1.2 Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Neka je $M(z)$ tačka dodeljena kompleksnom broju $z = x+iy$ i različita je od koordinatnog početka **O**. Određena je rastojanjem r od **O** i veličinom pozitivno orjentisanog ugla φ između pozitivnog dela realne ose i vektora čija je početna tačka **O** a vrh tačka M(intenzitet ovog vektora je baš r). Kako se položaj tačke može opisati pomoću Dekartovih koordinata (x,y) a i polarnih koordinata (r,φ), veza između tih koordinata je:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$



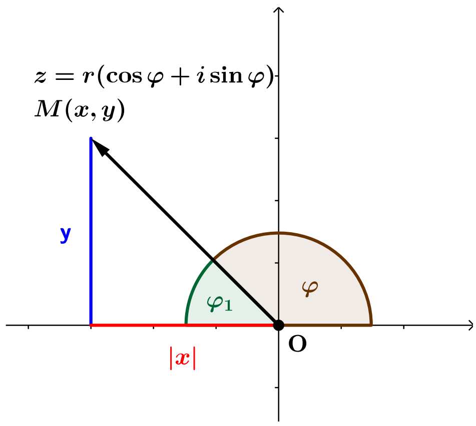
Slika 3: *Trigonometrijski oblik kompleksnog broja.*

Veličinu pozitivno orijentisanog ugla φ zovemo *argument* komplesnog broja. Argument nije jednoznačno određen zbog periodičnosti funkcija cos i sin skup

svih vrednosti označićemo sa $\mathrm{Arg}(z) = \{\varphi + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. Za $\varphi \in [0, 2\pi)$ kažemo da je glavna vrednost argumenta i označavamo sa $\arg(z)$, (umesto intervala $[0, 2\pi)$ možemo uzeti bilo koji oblika $[\alpha, \alpha + 2\pi), \alpha \in \mathbb{R}$, u ovom radu uzimaćemo $[0, 2\pi)$). Dakle, zapis kompleksnog broja $z \neq 0$ u obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gde je $r = |z| \in (0, +\infty), \varphi = \arg(z) \in [0, 2\pi)$, nazivamo ***trigonometrijski oblik*** kompleksnog broja(videti sliku 3).
Posmatrajmo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi), r \in (0, +\infty)$ tada se glavna vrednost argumenta određuje prema :

- $x > 0, y > 0$ tada $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Prema tome iz jednakosti $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ imamo $\varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

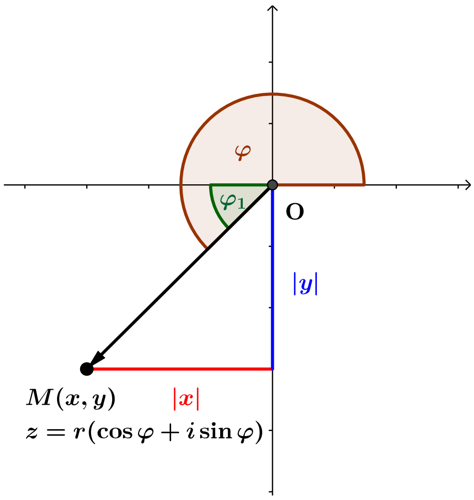
- $x < 0, y > 0$ tada $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$. Neka je $\varphi_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tako da važi $\varphi_1 + \varphi = \pi$. Kako je $\varphi_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ kao na slici 4 onda iz jednakosti



Slika 4: *Slučaj* $x < 0, y > 0$.

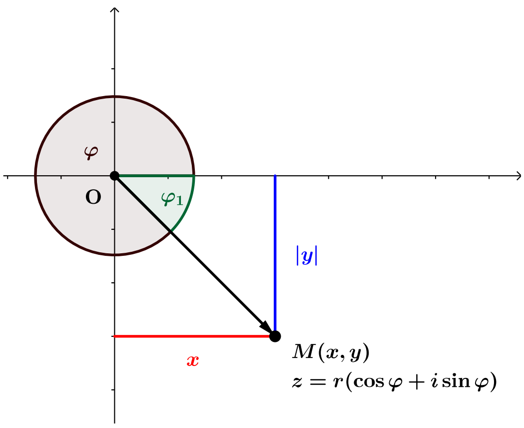
$\tan\varphi_1 = \dfrac{y}{|x|}$ imamo $\varphi_1 = \arctan\left(\dfrac{y}{|x|}\right)$, a kako je $\varphi = \pi - \varphi_1$ odatle imamo da je $\varphi = \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

- $x < 0, y < 0$ tada $\varphi \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Neka je $\varphi_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ tako da važi $\varphi - \varphi_1 = \pi$.
Kako $\varphi_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ kao na slici 5 onda iz jednakosti $\tan\varphi_1 = \dfrac{|y|}{|x|}$ imamo $\varphi_1 = \arctan\left(\dfrac{|y|}{|x|}\right)$, a kako je $\varphi - \varphi_1 = \pi$ imamo $\varphi = \pi + \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.



Slika 5: *Slučaj* $x < 0, y < 0$.

- $x > 0, y < 0$ tada $\varphi \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$. Neka je $\varphi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tako da važi $\varphi + \varphi_1 = 2\pi$, videti sliku 6. Kako $\varphi_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ onda iz jednakosti



Slika 6: *Slučaj* $x > 0, y < 0$.

$\tan\varphi_1 = \frac{|y|}{x}$ imamo $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{|y|}{x}\right)$, a kako je $\varphi + \varphi_1 = 2\pi$ odatle imamo da je $\varphi = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

- $x > 0, y = 0$ tada $\varphi = 0$.

- $x < 0, y = 0$ tada $\varphi = \pi$.
- $x = 0, y > 0$ tada $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.
- $x = 0, y < 0$ tada $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

Zadatak 1. *Neka* $\alpha \in (-\pi, \pi)$. *Broj* $A = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ *zapisati u trigonometrijskom obliku. Preciznije, broj* A *zapisati u obliku* $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *tako da* $r \in (0, +\infty)$ *i* $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Rešenje. Treba da odredimo $r = |A|$ i $\varphi = \arg(A)$. Pre svega odredimo r: $\sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} = \sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. Dato nam da $\alpha \in (-\pi, \pi)$ pa $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ samim tim sledi $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$. Dakle, $r = |A| = 2\cos\frac{\alpha}{2}$. Dalje,

$$A = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}} + i\frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right) = 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

ali kako $\frac{\alpha}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ to neodgovara φ jer mora $\varphi \in [0, 2\pi)$.[4] Prema tome,

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2}, & \alpha \in [0, \pi) \\[2ex] \dfrac{\alpha}{2} + 2\pi, & \alpha \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

odnosno imamo da rešenje zavisi od parametra α,

$$A = \begin{cases} 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} + i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right), & \alpha \in [0, \pi) \\[2ex] 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + 2\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 2\pi\right)\right), & \alpha \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

△

[4] Ako nam rečeno da posmatramo u trigonometrijskom zapisu da glavna vresnost argumenta φ pripada $(-\pi, \pi]$ tada trigonometrijski zapis broja A je $2\cos\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2})$ jer $\frac{\alpha}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a samim tim i $\frac{\alpha}{2} \in (-\pi, \pi]$, odnosno $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

1.2.1 Proizvod kompleksnih brojeva

Neka su z_1, z_2 dva kompleksna broja različita od nule zapisana u trigonometrijskom obliku:

$$z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ako pomnožimo ta dva broja dobijemo:

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \tag{7}$$

Formula (7) daje zapis kompleksnog broja z_1z_2 u trigonometrijskom obliku ako je $\varphi_1 + \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ i tada je $\arg(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$. Dok ako imamo da $\varphi_1 + \varphi_2 \notin [0, 2\pi)$ onda je zapis broja z_1z_2 u trigonometrijskom obliku $z_1z_2 = |z_1|\,|z_2|\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2-2\pi) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2-2\pi))$ i vidimo da je tada $\arg(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi$.

Teorema 2. *Ako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi), r \in (0, +\infty)$, onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{8}$$

Ta formula naziva se Muavrova formula[5].

Rešenje. Očigledano da formula važi za $n = 1$. Predpostavimo da važi za $n-1$ i dokažimo da važi za n. Dakle,

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{n-1}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$$

$$= r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$$

$$= r^n((\cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi) + i(\cos(n-1)\varphi\sin\varphi + \sin(n-1)\varphi\cos\varphi)) =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Primetimo da važi i za $n = 0$, $z^0 = r^0(\cos 0\varphi + i\sin 0\varphi) = 1$. $\triangle$

Posmatrajmo $\arg(z^n)$, jasno je da je (8) trigonometrijski zapis broja z^n ako je $n\varphi \in [0, 2\pi)$ i tada je argument jednak $n\varphi$, inače je jednak $n\varphi - 2m\pi$ za takvo $m \in \mathbb{N}$ za koje je $n\varphi - 2m\pi \in [0, 2\pi)$.

[5] Abrahamu de Moivreu, 26.maj 1667.-27. novembar 1754., francuski matematičar.

1.2.2 Količnik kompleksnih brojeva

Neka je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi), r \in (0, +\infty)$. Ako sada posmatramo broj $\frac{1}{z}$ imamo

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \frac{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Tada to daje trigonometrijski zapis broja $\frac{1}{z}$ ako $-\varphi \in [0, 2\pi)$. Kako je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi)$, samim tim $-\varphi \notin [0, 2\pi)$ sledi da je trigonometrijski zapis broja $\frac{1}{z}$ ustvari $\frac{1}{r}(\cos(-\varphi + 2\pi) + i\sin(-\varphi + 2\pi))$.

Neka su $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ dva kompleksna broja zapisana u trigonometrijskom obliku, količnik ta dva broja je:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \tag{9}$$

Formula (9) daje trigonometrijski zapis broja $\frac{z_1}{z_2}$ ako je $\varphi_1 - \varphi_2 \in [0, 2\pi)$ i onda je argument jednak baš $\varphi_1 - \varphi_2$. Ako $\varphi_1 - \varphi_2 \notin [0, 2\pi)$, onda je argument količnika jednak $\varphi_1 - \varphi_2 + 2\pi$.

Neka je $-n \in \mathbb{N}$ tada n je negativan i neka je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi), r \in (0, +\infty)$. Posmatrajmo sada:

$$z^n = \left(\frac{1}{z}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))\right)^{-n},$$

koristeći sada teoremu 2 imamo $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$. Dakle, zaključujemo da za svako $n \in \mathbb{Z}$ važi $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Trigonometrijski zapis broja $z^n, n \in \mathbb{Z}$ je $r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ ako je $n\varphi \in [0, 2\pi)$. Ako to nije, tada je $\arg(z^n)$ jednak $n\varphi + 2m\pi$ za ono $m \in \mathbb{Z}$ za koje $n\varphi + 2m\pi \in [0, 2\pi)$.

1.3 Eksponencijalni oblik kompleksnog broja

Definicija 5. *Za svako* $t \in \mathbb{R}$ *važi* $e^{it} = \cos t + i\sin t$. *Ova formula naziva se Ojlerovom formulom*[6].

[6] Leonhard Euler, 15. april 1707.-18. septembar 1783., švajcarski matematičar i fizičar.

Svojstva:

- $\left|e^{it}\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$,
- $\overline{e^{it}} = \cos t - i\sin t = \cos(-t) + i\sin(-t) = e^{-it}$,
- $e^{ip}e^{iq} = (\cos p + i\sin p)(\cos q + i\sin q) = \cos(p+q) + i\sin(p+q) = e^{i(p+q)}$,
- $e^{ip} = e^{iq}$ akko $p = q + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Sada ako posmatramo trigonometrijski oblik kompleksnog broja $z \neq 0$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i koristeći Ojlerovu formulu dolazimo do ***eksponencijalnog oblika***: $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|, \varphi = \arg(z)$.

1.4 n-ti koren kompleksnog broja

Definicija 6. *Svako rešenje jednačine*

$$z^n = a, \tag{10}$$

*gde je $n \in \mathbb{N}, z, a \in \mathbb{C}$ naziva se **n-ti koren kompleksnog broja a**.*

Teorema 3. *Neka je u skupu kompleksnih brojeva data jednačina $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$. Tada ako je $a = 0$ onda jednačina ima tačno jedno rešenje $z_0 = 0$, a ako je $a \neq 0$ onda postoji tačno n različitih rešenja jednačine i to su brojevi $z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.*

Dokaz. Neka je $a = |a|\, e^{i\arg(a)}$ i $z = |z|\, e^{i\arg(z)}$. Tada jednačina (10) koristeći Muavrovu formulu postaje $|z|^n\, e^{in\arg(z)} = |a|\, e^{i\arg(a)}$. Da bi važila ova jednakost mora da je zadovoljeno $|z|^n = |a|$ i $n\arg(z) = \arg(a) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Odnosno dobijamo da jednakost $|z|^n\, e^{in\arg(z)} = |a|\, e^{i\arg(a)}$ važi akko važi $|z| = \sqrt[n]{|a|}$ i $\arg(z) = \frac{\arg(a)+2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$. Ipak, zbog periodičnosti funkcija sin i cos možemo da posmatramo $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ i tako dobijamo n različitih rešenja. Dakle, svaki od brojeva

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}},\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

jeste rešenje jednačine $z^n = a$, odnosno n-ti koren broja a. Da sada proverimo činjenicu da dobijamo različita rešenja. Neka $p, q \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ različiti, tada $z_p = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2p\pi}{n}}$ i $z_q = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2q\pi}{n}}$. Predpostavimo sada da je $z_p = z_q$ tada važi $e^{i\frac{2\pi(p-q)}{n}} = 1$, odnosno $\cos\frac{2\pi(p-q)}{n} = 1$. Odatle sledi

$$\frac{2\pi(p-q)}{n} = 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

$$p - q = mn,\ m \in \mathbb{Z}$$

pa smo dobili da $p - q \in \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\}$ što nas dovodi do kontradikcije. $\square$

Teorema 4. *Rešenja jednačine (10) gde je $a \neq 0$, odnosno n-ti koreni kompleksnog broja a pripadaju krugu sa centrom 0 i poluprečnikom $\sqrt[n]{|a|}$ i predstavljaju temena pravilnog n-tougla.*

Dokaz. Ako su $z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ n-ti koreni broja a onda za svako $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ je $|z_k| = \sqrt[n]{|a|}$. Prema tome svaki z_k pripada krugu čiji je centar koordinatni početak, a poluprečnik $\sqrt[n]{|a|}$. Posmatrajmo sada susedna temena M_k i M_{k+1} koje odgovaraju kompleksnim brojevima z_k i z_{k+1} tada važi $\arg z_{k+1} - \arg z_k = \frac{\arg(a)+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\arg(a)+2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}$ i kako važi za svako $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ a uz to je $M_n = M_0$ odavde sledi da M_k, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ predstavljaju temena pravilnog n-tougla. $\square$

1.4.1 n-ti koreni jedinice

Interesantan slučaj je kada je u jednačini (10) $a = 1$, odnosno koreni jednačine $z^n = 1$ se nazivaju n-ti koreni jedinice i oblika su $\epsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Geometrijski, n-ti koreni jedinice formiraju pravilan n-tougao čije je jedno teme baš tačka $(1, 0)$, i koji je upisan u krug sa centrom 0 i poluprečnika 1.
Neka je sada $\epsilon = \epsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ tada imamo da je $\epsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = \epsilon^k$ gde je $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ i primetimo da je $\epsilon^n = 1$. Prema tome skup svih korena jedinice je $\{1, \epsilon, \epsilon^2, \dots, \epsilon^{n-1}\}$. Možemo da primetimo da je proizvod dva n-ta korena iz jedinice opet n-ti koren iz jedinice.
Neka je z kompleksni broj i z_k bilo koji od rešenja jednačine $z^n = a$. Računom

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|a|}e^{i\frac{\arg(a)}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

vidimo da je $z_k = z_0\epsilon^k$.
Dakle svi n-ti koreni kompleksnog broja a su: z_0, $z_0\epsilon, \dots, z_0\epsilon^{n-1}$.

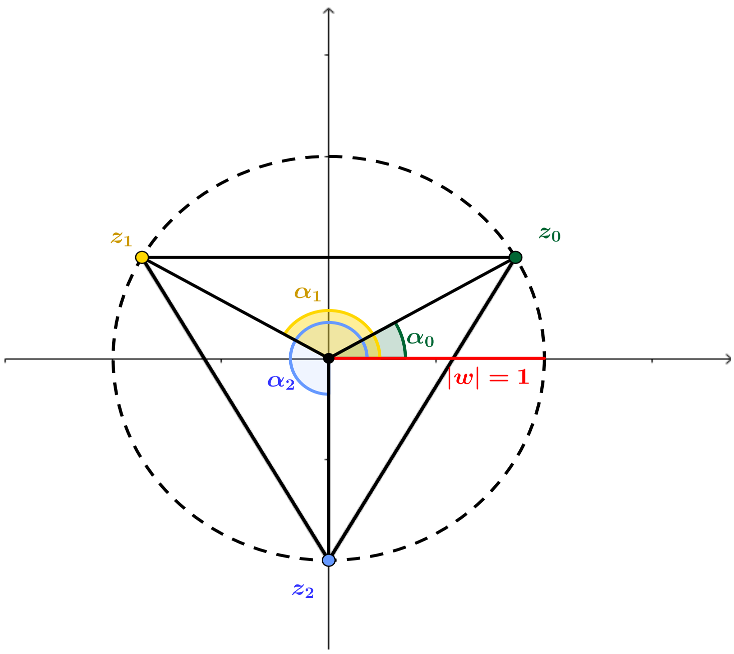
Zadatak 2. *Odrediti treće kompleksne korene broja i, zatim ih prikazati na slici.*

Rešenje. Neka je $z^3 = i$. Pre svega se broj $w = i$ zapiše u trigonometrijskom obliku.
Dakle, $w = i = 0 + i1$ pa je $|w| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$. Kako smo rekli da ćemo argument ako broj zapisujemo u trigonometrijskom obliku posmatrati na $[0, 2\pi)$, onda $\arg(w) = \frac{\pi}{2}$. Prema tome, $z^3 = e^{i(\frac{\pi}{2})}$.

Zatim koristeći formulu imamo:

$$z^3 = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

$$z_k = e^{i\frac{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}{3}}, k = 0, 1, 2.$$



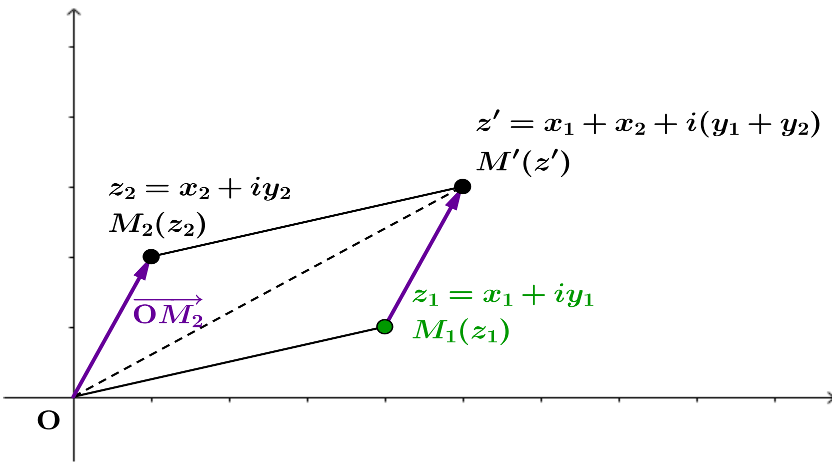
Slika 7: *Treći koreni broja i.*

Tri tražena kompleksna korena su: $z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, z_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}}, z_2 = e^{i\frac{9\pi}{6}}$. Prikazani su na slici 7 i primećujemo da čine jednakostraničan trougao upisan u jedinični krug. $\triangle$

2 Neka preslikavanja kompleksne ravni

2.1 Translacija

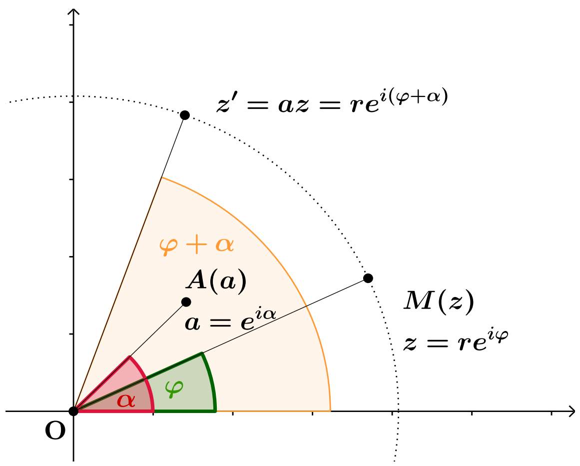
Neka su z_1 i z_2 dva kompleksna broja, a M_1 i M_2 tačke dodeljene tim kompleksnim brojevima, redom. Sabiranjem z_1 i z_2 dobijemo kompleksan broj $z' = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$. Označimo sa M' tačku dodeljenu broju z'. Tačka M' dobija se translacijom tačke M_1 za vektor $\overrightarrow{\mathbf{O}M_2}$, odnosno vektor kojim je određen kompleksan broj z_2 (videti sliku 8). Označimo sa $T_{z_2}(z_1) = z_1 + z_2$.



Slika 8: *Translacija tačke $M_1(z_1)$ za vektor kojim je određen kompleksan broj z_2.*

2.2 Rotacija

Neka je $a = e^{i\alpha}$ kompleksan broj modula jedan i neka je tačka $A(a)$ dodeljena broju a, takođe neka je dat kompleksan broj $z = re^{i\varphi}$ i tačka $M(z)$ dodeljena broju z. Proizvod ta dva broja tj. $z' = az = re^{i(\alpha+\varphi)}$ predstavlja rotaciju tačke $M(z)$ oko koordinatnog početka $\mathbf{O}$ za ugao α(videti sliku 9). Označimo sa $R_{\mathbf{O},\alpha}(z) = ze^{i\alpha}$. Takođe možemo definisati rotaciju tačke $M_1(z_1)$

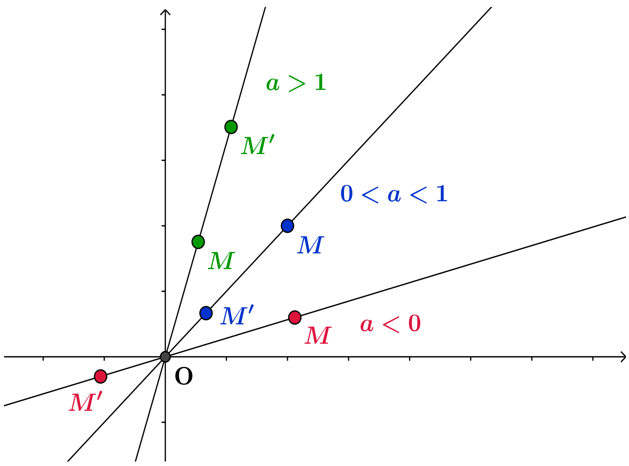


Slika 9: *Rotacija tačke $M(z)$ oko koordinatnog početka za ugao α.*

oko proizvoljne tačke $A'(a')$ za ugao α'. Takvu rotaciju možemo prikazati kao kompozicija translacije za vektor $-\overrightarrow{\mathbf{O}A'}$, rotacije oko $\mathbf{O}$ za ugao α' i translacije za vektor $\overrightarrow{\mathbf{O}A'}$. Prema tome, $z' = (z_1 - a')e^{i\alpha'} + a'$, $M'(z')$. Označimo sa $R_{A',\alpha'}(z) = (z_1 - a')e^{i\alpha'} + a'$.

2.3 Homotetija

Neka je $a \neq 0$ realan broj, i neka je kompleksan broj $z = re^{i\varphi}$ i tačka $M(z)$ dodeljena kompleksnom broju z. Tada je proizvod a i z kompleksan broj $z' = az = are^{i\varphi}$ i $M'(z')$ je tačka dodeljena kompleksnom broju z'. Množenje realnim brojem a predstavlja homotetiju čiji je centar koordinatni početak $\mathbf{O}$ i koeficijent a. Postojaće nekoliko slučajeva (videti sliku 10). Ako je $0 < a < 1$ redosled tačaka biće $\mathbf{O} - M' - M$, za $a > 1$ biće $\mathbf{O} - M - M'$. U slučaju $a = 1$ tačka M preslikava se na samu sebe. U poslednjem slučaju ako je $a < 0$ tada je $|z'| = -ar$ i $\varphi' = \varphi + \pi$ odnosno tačka M' pripada pravoj $\mathbf{O}M$ ali su tačke M i M' sa različitih strana tačke $\mathbf{O}$. Označimo sa $H_{\mathbf{O},a}(z) = az$.



Slika 10: *Homotetija čiji je centar koordinatni početak* **O** *i koeficijent* a.

2.4 Linearno preslikavanje

Preslikavanje oblika $z' = az + b$, gde je $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ je linearno preslikavanje. Neka je $a = |a|\, e^{i\alpha}$, onda primetimo da je linearno preslikavanje kompozicija preslikavaja: $z_1 = e^{i\alpha} z$, $z_2 = |a|\, z_1$ i $z_3 = z_2 + b$. Gde je z_1 rotacija za ugao α, z_2 homotetija sa koeficijentom $|a|$ i z_3 je translacija zadata kompleksnim brojem b.

2.5 Inverzija

Inverzija u odnosu na krug $K(z_0, R)$ je preslikavanje
$\Psi_{z_0,R} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, $z^* = \Psi_{z_0,R}(z)$ takvo da važi sledeće:

1. tačke z i z^* pripadaju istoj polupravoj čiji je početak tačka z_0.

2. $|z^* - z_0|\, |z - z_0| = R^2$.

Tačke z i z^* zovemo i simetrične u odnosu na krug $K(z_0, R)$, z_0 zovemo centar inverzije. Neka je $z^* = \Psi_{z_0,R}(z)$, tada na osnovu 1. i 2. sledi:
$z^* = z^* - z_0 + z_0 = |z^* - z_0|\, e^{i \arg(z^* - z_0)} + z_0 = \dfrac{R^2}{|z - z_0|} e^{i \arg(z - z_0)} + z_0$. Prema tome

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z - z_0}} + z_0.$$

Inverzija je bijekcija tj. preslikavanje $\Psi_{z_0,R} : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ je bijekcija. Ako posmatramo na $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, tada $\Psi_{z_0,R}(z_0) = \infty$ i $\Psi_{z_0,R}(\infty) = z_0$, prema tome biće bijekcija i preslikavanje $\Psi_{z_0,R} : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Možemo videti da je inverzija involucija, tj. važi $\Psi_{z_0,R}(\Psi_{z_0,R}(z)) = z$[7]. Takođe, inverzija fiksira tačke sa kruga inverzije, odnosno ako $z_1 \in K(z_0, R)$ tada $|z_1 - z_0| = R$, pa je

$$\Psi_{z_0,R}(z_1) = \frac{R^2}{\overline{z_1 - z_0}} + z_0 = \frac{R^2}{|z_1 - z_0|^2}(z_1 - z_0) + z_0 = z_1 - z_0 + z_0 = z_1.$$

Inverzijom se unutrašnost kruga inverzije slika u spoljašnost kruga inverzije i obrnuto. Što se tiče uglova, inverzija nemenja uglove, ali menja njihovu orijentaciju.

Dodatno, ako predpostavimo da posmatramo inverziju na $\overline{\mathbb{C}}$ tada:

- Prava koja sadrži centar inverzije, inverzijom se slika na samu sebe(neslika se tačka po tačka). Centar inverzije slika se u tačku ∞.

- Prava koja ne sadrži centar inverzije inverzijom se slika na krug koji sadrži centar inverzije. Tačka ∞ sa prave se slika u centar inverzije.

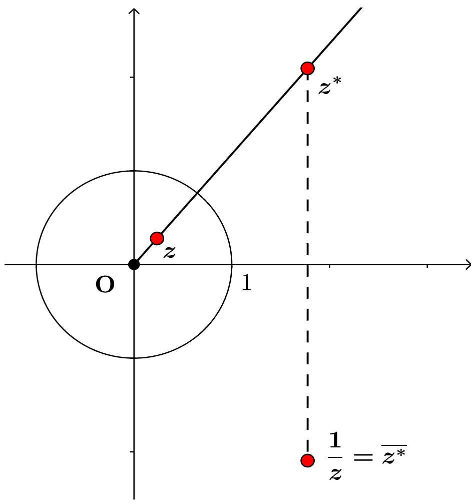
- Krug koji sadrži centar inverzije, inverzijom se slika u pravu koja ne sadrži centar inverzije. Centar inverzije sa tog kruga slika se u tačku ∞ sa te prave.

- Krug koji ne sadrži centar inverzije, inverzijom se slika na krug koji ne sadrži centar inverzije.

2.6 Recipročno preslikavanje

Ako bi posmatrali inverziju u odnosu na krug $K(0, 1)$ imaćemo da se tačka z slika u $\frac{1}{\overline{z}}$, odnosno $z^* = \Psi_{0,1}(z) = \frac{1}{\overline{z}}$. Dok se tačka $\overline{z}$ slika u $\frac{1}{z}$. Jasno nam da je konjugovanje refleksija u odnosu na realnu osu, prema tome kompozicija inverzije u odnosu na jedinični krug i refleksije u odnosu na realnu osu je preslikavanje $\Psi_{0,1}(\overline{z}) = \frac{1}{z}$ ili $\overline{\Psi_{0,1}(z)} = \overline{z^*} = \frac{1}{z}$. Dakle, preslikavanje oblika $z' = \frac{1}{z}$ zovemo recipročno preslikavanje (videti sliku 11). U nekoj literaturi recipročno preslikavanje se zove kompleksna inverzija.

[7] Za preslikavanje za koje važi $f \circ f = id$ kažemo da je involucija.



Slika 11: *Recipročno preslikavanje.*

3 Jednačina prave i kruga u kompleksnoj ravni

3.1 Podela duži u datom odnosu

Neka je $M(z)$ tačka sa prave koja je određena različitim tačkama $A(a)$ i $B(b)$. Tačka $M(z)$ deli duž AB u odnosu $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ ako važi da je $\overrightarrow{AM} : \overrightarrow{MB} = k$, odnosno $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB}$. Potražimo kompleksnu koordinatu tačke $M(z)$:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{O}M} - \overrightarrow{\mathbf{O}A} = k(\overrightarrow{\mathbf{O}B} - \overrightarrow{\mathbf{O}M})$$

sledi $z - a = k(b - z)$ pa je $z = \dfrac{a + kb}{1 + k}$. Primetimo da se raspored tačaka menja u zavisnosti od vrednosti za k, ako je $k \in (0, +\infty)$ tada raspored je $A - M - B$, ako $k \in (-\infty, -1)$ tada raspored je $A - B - M$, a za $k \in (-1, 0)$ tada je raspored $M - A - B$. Specijalno, za $k = 1$ dobijemo:

$$z = \frac{a + b}{2}$$

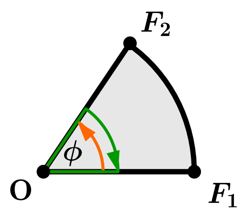
a to je baš ***koordinata središta duži***.

Poznato nam da se težišne duži trougla sa temenima $A(a), B(b)$ i $C(c)$, seku u jednoj tački koja svaku od njih deli u odnosu $2 : 1$. Pronađimo kompleksnu koordinatu težišta trougla ABC. Neka je $A_1(a_1)$ središte duži BC, $B_1(b_1)$ središte duži AC, $C_1(c_1)$ središte duži AB. Onda imamo da je $a_1 = \frac{c+b}{2}$, $b_1 = \frac{c+a}{2}$ i $c_1 = \frac{a+b}{2}$. Neka je tačka $T(t)$ koja deli težišnu duž AA_1 u odnosu $2:1$, $\overrightarrow{AT} : \overrightarrow{TA_1} = 2:1$ odnosno $t = \frac{a+2a_1}{1+2} = \frac{a+b+c}{3}$. Proverom $\overrightarrow{BT} : \overrightarrow{TB_1} = 2:1$ primetimo isto to važi i za duž BB_1. Slično proverimo i za CC_1. Dakle, kompleksna ***koordinata težišta trougla*** je:

$$t = \frac{a+b+c}{3}.$$

3.2 Mera ugla

Posmatrajmo kružni isečak sa slike 12, veličina ugla tog isečka je ϕ. Smatraćemo da je ugao $\measuredangle F_1\mathbf{O}F_2$ pozitivno orijentisan ako krećući se od poluprave $\mathbf{O}F_1$ ka polupravoj $\mathbf{O}F_2$ idemo u suprotnom smeru kazaljke na satu(odnosno ako pratimo narandžastu strelicu sa slike 12). Dok ako se krećemo od poluprave $\mathbf{O}F_2$ ka polupravoj $\mathbf{O}F_1$ i idemo u smeru kazaljke na satu(odnosno ako pratimo zelenu strelicu sa slike 12) ugao će biti negativno orijentisan.



Slika 12

Mera pozitivno orijentisanog ugla je veličina ugla sa predznakom $+$(u ovom slučaju ϕ), dok je mera negativno orijentisanog ugla jednaka njegovoj veličini sa predznakom $-$(u ovom slučaju $-\phi$).

Prethodni tekst je samo intuitivno objašnjenje, a sada ćemo preciznije definisati meru orijentisanog ugla.

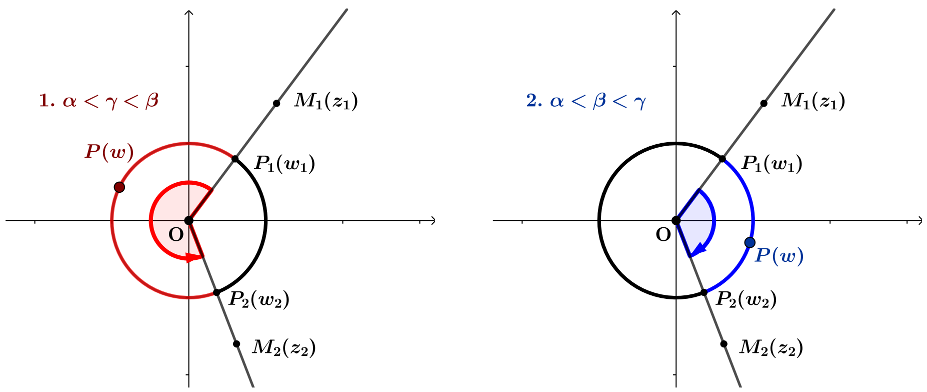
Definicija 7. *Neka su z_1, z_2 kompleksne koordinate tačaka M_1, M_2 redom. Neka je $w_1 = \frac{z_1}{|z_1|}, w_2 = \frac{z_2}{|z_2|}$ i $w_1 = e^{i\alpha}$. Tada postoji jedinstveno β takvo da $w_2 = e^{i\beta}$ i $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Neka je P proizvoljna tačka otvorenog luka $\widehat{P_1P_2}$ koja pripada unutrašnjosti ugla $\measuredangle M_1\mathbf{O}M_2$ pri čemu su P_1 i P_2 tačke dodeljene kompleksnim brojevima w_1 i w_2 redom. Tada postoji jedinstveno*

γ koje pripada $[\alpha, \alpha + 2\pi)$ takvo da $w = e^{i\gamma}$, pri čemu je w kompleksna koordinata tačke P. Imaćemo dva slučaja:

1. *$\alpha < \gamma < \beta$: tada reći ćemo da je $\measuredangle M_1\mathbf{O}M_2$ (crveni sa slike 13 pod a) pozitivno orijentisan i mera je jednaka $\varphi = \beta - \alpha$.*

2. *$\alpha < \beta < \gamma$: tada reći ćemo da je $\measuredangle M_1\mathbf{O}M_2$ (plavi sa slike 13 pod b) negativno orijentisan i mera je jednaka $\varphi = \beta - \alpha - 2\pi$.*

Tačke P_1, P_2 iz definicije 7 grade dva luka pa tačka P nam pokazuje na koji luk se misli.



(a) *Pozitivno orijentisan ugao.* (b) *Negativno orijentisan ugao.*

Slika 13

Tvrđenje 2. *Mera pozitivno orijentisanog ugla $\measuredangle M_1\mathbf{O}M_2$ jednaka je* $\arg \dfrac{z_2}{z_1}$.

Dokaz. Neka su M_1 i M_2 tačke koje su dodeljene kompleksnim brojevima $z_1 = |z_1|\, e^{i\alpha}$, $z_2 = |z_2|\, e^{i\beta}$, pri čemu je β tako izabrano da je $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$. Prema definiciji 7 mera pozitivno orijentisanog ugla $\measuredangle M_1\mathbf{O}M_2$ jednaka je $\beta - \alpha$. Imamo da je

$$\arg \frac{z_2}{z_1} = \arg\left(\frac{|z_2|\, e^{i\beta}}{|z_1|\, e^{i\alpha}}\right) = \arg\left(\frac{|z_2|}{|z_1|} e^{i(\beta-\alpha)}\right),$$

i kako je $\beta \in [\alpha, \alpha + 2\pi)$ tada $\beta - \alpha \in [0, 2\pi)$ pa važi $\arg \dfrac{z_2}{z_1} = \beta - \alpha$. □

Tvrđenje 3. *Neka su tačke $M_1(z_1), M_2(z_2)$ i $M_3(z_3)$ tri različite tačke. Mera pozitivno orijentisanog ugla $\measuredangle M_2M_1M_3$ je jednaka* $\arg \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Dokaz. Tačke $M_1(z_1), M_2(z_2)$ i $M_3(z_3)$ translacijom za vektor $-\overrightarrow{\mathbf{O}M_1}$ preslikavaju se u tačke $\mathbf{O}(0), M_2'(z_2 - z_1)$ i $M_3'(z_3 - z_1)$. Translacijom ugao ostaje isti, odnosno $\measuredangle M_2 M_1 M_3 = \measuredangle M_2' \mathbf{O} M_3'$. Tada prema tvrđenju 2 sledi

$$\measuredangle M_2 M_1 M_3 = \measuredangle M_2' \mathbf{O} M_3' = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

□

3.3 Jednačina prave

Tvrđenje 4. *Tačke $M_1(z_1), M_2(z_2)$ i $M_3(z_3)$ su kolinerane ako i samo ako je $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Dokaz. Ako su tačke $M_1(z_1), M_2(z_2)$ i $M_3(z_3)$ kolinearne tada ako posmatramo vektore $\overrightarrow{M_1 M_2}$ i $\overrightarrow{M_1 M_3}$ onda su oni ili istog smera ili su suprotnog smera. Prema tome, imamo da je moguće ili $\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_3 - z_1)$ ili $\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_3 - z_1) \pm \pi$. Tada imamo da je $\arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ jednako ili 0 ili π što jeste ekvivalentno sa $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jer ako je argument nekog kompleksnog broja jednak 0 ili π onda taj broj pripada realnoj osi. □

Neka tačka $M(z)$ pripada pravoj određenoj dvema tačkama $M_1(z_1)$ i $M_2(z_2)$, odnosno posmatramo da su $M(z), M_1(z_1)$ i $M_2(z_2)$ kolinearne. Tada $\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, takođe znamo da ako $a \in \mathbb{R}$ onda važi $a = \overline{a}$ pa imamo

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \overline{\left(\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\right)}.$$

Prema tome, jednakost:

$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z} - \overline{z_1}}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} \tag{11}$$

predstavlja jednačinu prave koja je određena tačkama $M_1(z_1)$ i $M_2(z_2)$. Takođe ekvivalentan oblik jednačine prave u kompleksnoj ravni je

$$\begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sređivanjem ove determinante dolazi se do oblika

$$(\overline{z_1} - \overline{z_2})z - (z_1 - z_2)\overline{z} + (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2) = 0$$

ako stavimo da je $k = (\overline{z_1} - \overline{z_2})i$ i $l = (z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2)i = (2i\,\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2}))i$, imamo novi oblik jednačine prave

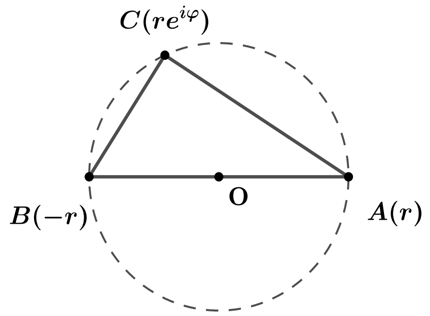
$$kz + \overline{k}\overline{z} + l = 0,\ k \in \mathbb{C},\ l \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Neka je $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = s \in \mathbb{R}$ tada dobijemo jednačinu: $z = (1-s)z_1 + sz_2,\ s \in \mathbb{R}$ koja takođe predstavlja neki oblik jednačine prave.

Tvrđenje 5. *Prava M_1M_2 određena dvema tačkama $M_1(z_1)$ i $M_2(z_2)$ i prava M_3M_4 određena dvema tačkama $M_3(z_3)$ i $M_4(z_4)$, su ortogonalne akko je* $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Dokaz. Prava M_1M_2 i prava M_3M_4 su ortogonalne akko je mera ugla između $\overrightarrow{M_1M_2}$ i $\overrightarrow{M_3M_4}$ jednaka ili $\dfrac{\pi}{2}$ ili $\dfrac{3\pi}{2}$, tj $\arg\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}$ je ili $\dfrac{\pi}{2}$ ili $\dfrac{3\pi}{2}$. Prema tome, broj $\dfrac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

Zadatak 3. *Ugao nad prečnikom je prav.*



Slika 14

Rešenje. Neka je ABC trougao zadat sa $A(r), B(-r), C(re^{i\varphi}), \varphi \in (0, \pi)$.

$$\frac{r - re^{i\varphi}}{-r - re^{i\varphi}} = \frac{1 - e^{i\varphi}}{-1 - e^{i\varphi}} = \frac{-2i \sin\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})}{-2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})} = i \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

prema tvrđenju 5 imamo da je ugao kod temena C prav. $\triangle$

Tvrđenje 6. *Prava M_1M_2 koja je određena dvema tačkama $M_1(z_1)$ i $M_2(z_2)$ i prava M_3M_4 koja je određena dvema tačkama $M_3(z_3)$ i $M_4(z_4)$, su paralelne akko je $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Dokaz. Prava M_1M_2 i prava M_3M_4 su paralelne akko važi $\overrightarrow{M_1M_2} = s\overrightarrow{M_3M_4}$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, odnosno $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} = s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\square$

3.4 Jednačina kruga

Tvrđenje 7. *Različite tačke $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ i $M_4(z_4)$ pripadaju jednom krugu ili su kolinearne ako i samo ako je $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*

Dokaz. $\Rightarrow$:

- Tačke $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ i $M_4(z_4)$ su kolinearne. Kako su tačke $M_1(z_1), M_2(z_2)$ i $M_3(z_3)$ kolinearne važi $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i kako su tačke $M_1(z_1), M_3(z_3)$ i $M_4(z_4)$ kolinearne važi $\dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Prema tome, $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Tačke $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ i $M_4(z_4)$ pripadaju krugu. Moguće je na šest načina rasporediti četiri tačke na krugu. Meru pozitivno orijentisanog ugla $\measuredangle PQR$ u ovom dokazu ćemo označavati sa $\overline{\measuredangle PQR}$. Posmatraćemo tri rasporeda od mogućih šest rasporeda:

  1. Neka je $\measuredangle M_1M_2M_3 = \phi$, $\measuredangle M_3M_4M_1 = \varphi$. Ako su tačke M_1, M_2, M_3, M_4 na kružnici tada je četvorougao M_1, M_2, M_3, M_4 tetivan. Ako je raspored tačaka M_4, M_3, M_2, M_1 gledajući u pozitivnom

smeru tada će biti $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \phi$ i $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \varphi$. Dakle, kako je četvorougao tetivan i kako su uglovi $\measuredangle M_1M_2M_3$, $\measuredangle M_3M_4M_1$ naspramni biće $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \phi + \varphi = \pi$. Prema tvrđenju 3 je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ i $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$.
Broj $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \dfrac{z_3 - z_4}{z_1 - z_4}$ posmatramo kao $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}$. Prema tome,

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) =_{2\pi} \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} = \pi^8.$$

Kako $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) = \pi$ tada $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Ako je raspored tačaka M_1, M_4, M_2, M_3 gledajući u pozitivnom smeru tada $\phi + \varphi = 0$, jer su uglovi nad istom tetivom i različite su orijentacije.
   Kako je ϕ negativan, φ pozitivan tada je $\phi = \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} - 2\pi$, $\varphi = \measuredangle\overline{M_3M_4M_1}$. Prema tome, $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi$. Sada imamo

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) =_{2\pi} \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} =_{2\pi} 2\pi =_{2\pi} 0,$$

   pa je $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

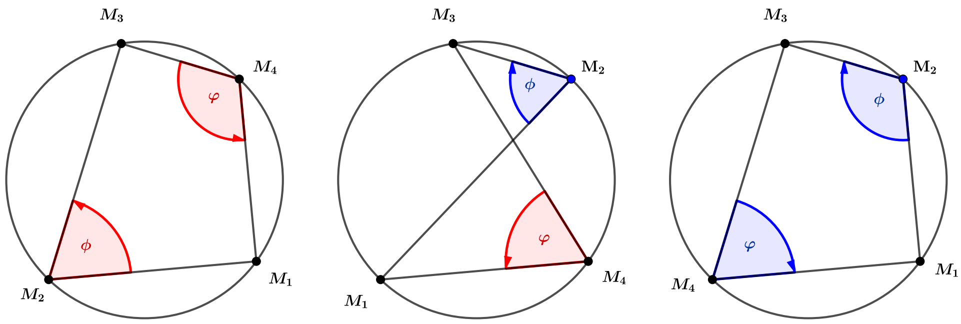
3. Ako je raspored tačaka M_1, M_2, M_3, M_4 gledajući u pozitivnom smeru tada $\phi + \varphi = -\pi$, jer su oba ugla negativno orijentisana i naspramna. Pa je $\phi = \measuredangle\overline{M_1M_2M_3} - 2\pi$ i $\varphi = \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} - 2\pi$. Sada imamo: $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 3\pi$ tada je

$$\arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) =_{2\pi} \arg\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} =_{2\pi} 3\pi =_{2\pi} \pi,$$

   samim tim $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Preostala tri slučaja biće(čitamo u suprotnom smeru kazaljke na satu): M_1, M_3, M_4, M_2; M_1, M_3, M_2, M_4; M_1, M_2, M_4, M_3. Slično se pokazuju kao za prethodna tri.

[8] $a =_{2\pi} b \Longleftrightarrow a - b = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.



(a) $\phi + \varphi = \pi$ (b) $\phi + \varphi = 0$ (c) $\phi + \varphi = -\pi$

Slika 15

$\Leftarrow$: Neka $\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tada $\arg\left(\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4}\right) \in \{0, \pi\}$.
Pa imamo: $\arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} =_{2\pi} 0$ ili $\arg\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} + \arg\dfrac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} =_{2\pi} \pi$, tj. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} =_{2\pi} 0$ ili $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} =_{2\pi} \pi$. Kako je $0+0=0, \pi+\pi=2\pi, 0+\pi=\pi, \pi+0=\pi$, imamo da kolinearnost tačaka M_1, M_2, M_3 povlači kolinearnost tačaka M_1, M_3, M_4. Dakle, sledi da su tačke M_1, M_2, M_3, M_4 kolinearne.
Ako je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} \notin \{0, \pi\}$ i $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} \notin \{0, \pi\}$ imamo tri mogućnosti:

1. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi$:

   Neka je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \phi$ i neka je k krug koji sadrži tačke M_1, M_2, M_3. Kako je $\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi - \phi$ i kako $\measuredangle\overline{M_1M_4M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi$, biće $\measuredangle\overline{M_1M_4M_3} = 2\pi - \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 2\pi - (2\pi - \phi) = \phi = \measuredangle\overline{M_1M_2M_3}$, prema tome M_4 pripada k. Možemo primetiti da u ovom slučaju dobijamo četiri od šest mogućih rasporeda a to su (čitamo u suprotnom smeru kazaljke na satu):
   M_1, M_3, M_4, M_2; M_1, M_4, M_2, M_3; M_1, M_3, M_2, M_4; M_1, M_2, M_4, M_3.

2. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \pi$:

   Neka je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \phi$ i neka je k krug koji sadrži tačke M_1, M_2, M_3. Kako je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = \pi$ raspored tačaka je M_1, M_4, M_3, M_2 (čitamo u suprotnom smeru kazaljke na satu) i kako je sada zbir naspramnih uglova u četvorouglu M_1, M_2, M_3, M_4 jednak π odatle sledi da tačka M_4 pripada pripada k. Odnosno četvorougao M_1, M_2, M_3, M_4

je tetivan.

3. $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} + \measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 3\pi$:

   Neka je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3} = \phi$ i neka je k krug koji sadrži tačke M_1, M_2, M_3. Kako je $\measuredangle\overline{M_1M_2M_3}+\measuredangle\overline{M_3M_4M_1} = 3\pi$ raspored tačaka je M_1, M_2, M_3, M_4 (čitamo u suprotnom smeru kazaljke na satu) pa je zbir naspramnih uglova $4\pi - 3\pi = \pi$, odnosno π. Dakle, sledi da tačka M_4 pripada pripada k.

$\square$

Pod pojmom uopšteni krug u $\mathbb{C}$ podrazumevamo krugove i prave u $\mathbb{C}$, jer kad dodamo tačku ∞, prave iz $\mathbb{C}$ postaju krugovi u $\overline{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Na osnovu tvrđenju 7 tačke $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ i $M(z)$ pripadaju uopštenom krugu ako i samo ako $\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} : \frac{z_3 - z}{z_1 - z} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ što je ekvivalentno sa

$$\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z}{z_3 - z} = \frac{\overline{z_3} - \overline{z_2}}{\overline{z_1} - \overline{z_2}} \cdot \frac{\overline{z_1} - \overline{z}}{\overline{z_3} - \overline{z}}. \tag{13}$$

Dakle, jednačina (13) predstavlja pripadnost tačke $M(z)$ krugu određenim tačkama $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$ ili pravoj koja je određena tačkama $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$. Sređivanjem jednačine (13) imamo

$$\underbrace{((z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2}) - (z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}))}_{J}\, z\overline{z} +$$
$$+ \underbrace{((z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\overline{z_3} - (z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})\overline{z_1})}_{K}\, z -$$
$$- \underbrace{\overline{((z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\overline{z_3} - (z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})\overline{z_1})}}_{\overline{K}}\, \overline{z} +$$
$$+ \underbrace{((z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})\overline{z_1}z_3 - (z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})\overline{z_3}z_1)}_{L} = 0.$$

Jednačina (13) postaje $Jz\overline{z} + Kz + \overline{K}\overline{z} + L = 0$. Ako je izraz

$$J = ((z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2}) - (z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}))$$

jednak nuli naša jednačina je jednačina prave, u suprotnom je jednačina kruga. Dakle, ukoliko je $J \neq 0$ tada možemo celu jednačinu da podelimo sa J i dobija se oblik

$$z\overline{z} + kz + \overline{k}\overline{z} + l = 0, \tag{14}$$

gde su $k, \overline{k}, l$ redom $\frac{K}{J}, \frac{-\overline{K}}{J}, \frac{L}{J}$. Daljim sređivanjem jednačine (14) dolazimo do $\left|z+\overline{k}\right|^2 = |k|^2 - l$. Primetimo da su J, L čisto imaginarni[9], tj. $J, L \in i\mathbb{R}$ pa je $l \in \mathbb{R}$. Dakle, izraz $|k|^2 - l$ je realan broj. Ako je $|k|^2 - l > 0$ stavimo da je $|k|^2 - l = r^2$ dolazimo da popularnije jednačine kruga $\left|z+\overline{k}\right| = r$(Krug sa centrom $-\overline{k}$ i poluprečnikom r je skup svih tačaka koje su na rastojanju r od $-\overline{k}$). Za $|k|^2 - l \leq 0$ je nemoguće. Za $\left|z+\overline{k}\right|^2 < 0$ jasno je da nije moguće dok $\left|z+\overline{k}\right|^2 = 0$ proverimo računom da nije moguće, tj. nevaži $K\overline{K} = L\overline{J}$.

Zaključujemo da jednačina $Jz\overline{z} + Kz + \overline{K}\overline{z} + L = 0$ predstavlja:

- jednačina prave ako $J = 0$,
- jednačinu kruga ako je $J \neq 0$, i ako važi $\left|\frac{K}{J}\right|^2 - \frac{L}{J} > 0$.

4 Skalarni i vektorski proizvod kompleksnih brojeva

U ovoj sekciji definisaćemo dva pojma analogna pojmovima skalarnog i vektorskog proizvoda analitičke geometrije.

4.1 Skalarni proizvod

Definicija 8. ***Skalarni proizvod*** *kompleksnih brojeva a, b je realan broj određen kao*

$$a \bullet b = \frac{1}{2}(\overline{a}b + a\overline{b}).$$

Posmatrajmo sada $\overline{a \bullet b} = \frac{1}{2}(a\overline{b} + \overline{a}b) = a \bullet b$ pa odavde sledi da $a \bullet b \in \mathbb{R}$. Prema tome, u literaturi se sreće da se skalarni proizvod zove i *realni proizvod*. Neka su $a, b, c, z \in \mathbb{C}$, onda iz definicije (8) jednostavno slede sledeće osobine skalarnog proizvoda :

1. $a \bullet a = |a|^2$,

[9] Neka je $A = (z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})$, tada je $A - \overline{A} = 2i\,\mathrm{Im}(A)$. Dakle, $J = 2i\,\mathrm{Im}(A)$, tj. J je čisto imaginarni. Na sličan način zaključujemo i za L.

2. $a \bullet b = b \bullet a$,

3. $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$,

4. $(\alpha a) \bullet b = \alpha(a \bullet b) = a \bullet (\alpha b)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

5. $a \bullet b = 0$ akko je $\mathbf{O}A \perp \mathbf{O}B$, gde su $A(a), B(b)$,

6. $(az) \bullet (bz) = |z|^2 \, a \bullet b$.

Tvrđenje 8. *Neka su date četiri različite tačke $A(a), B(b), C(c)$ i $D(d)$. Tada su sledeće činjenice ekvivalentne:*

1. $AB \perp CD$,

2. $(b - a) \bullet (d - c) = 0$,

3. $\dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

4. $\mathrm{Re}\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right) = 0$.

Dokaz. $1 \Leftrightarrow 2$: Transliramo pravu AB i pravu CD u koordinatni početak, tada će jedna novodobijena prava biti određena tačkama $\mathbf{O}(0)$ i $K(b - a)$ a druga novodobijena prava tačkama $\mathbf{O}(0)$ i $L(d - c)$. Primenjivanjem osobine (5) skalarnog proizvoda, tada dobijamo da je $(b - a) \bullet (d - c) = 0$.

$2 \Leftrightarrow 3$: Iz $(b-a) \bullet (d-c) = \frac{1}{2}(\overline{(b-a)}(d-c) + (b-a)\overline{(d-c)}) = 0$ dolazimo do $\dfrac{b-a}{d-c} = -\dfrac{\overline{b-a}}{\overline{d-c}}$ što govori baš da $\dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}$. Isključivanje nule sledi iz toga što su tačke različite.

$3 \Leftrightarrow 4$: Očigledno je, ako $\dfrac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R} \setminus \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\left(\dfrac{b-a}{d-c}\right) = 0$. $\square$

Pozivajući se na jednakost $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ važi $\frac{1}{2}(\overline{a}b + a\overline{b}) = \mathrm{Re}(\overline{a}b)$, pa skalarni proizvod možemo da posmatramo i kao jednakost $a \bullet b = \mathrm{Re}(\overline{a}b)$.

Ako su date tačke $A(a)$ i $B(b)$, gde je $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i gde je $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$, tada $a \bullet b = |a|\,|b|\cos(\beta - \alpha)$. Dakle, skalarni proizvod možemo da definišemo i kao $a \bullet b = |a|\,|b|\cos\measuredangle(a, b)$, gde je $\measuredangle(a, b)$ ugao između vektora $\overrightarrow{\mathbf{O}A}$ i $\overrightarrow{\mathbf{O}B}$.

4.2 Vektorski proizvod

Definicija 9. ***Vektorski proizvod*** *kompleksnih brojeva a, b je kompleksan broj određen kao*
$$a \times b = \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}).$$

Opet posmatrajući $\overline{a \times b} + a \times b = \frac{1}{2}(a\overline{b} - \overline{a}b) + \frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}) = 0$ odavde sledi da $\mathrm{Re}(a \times b) = 0$ odnosno $a \times b$ je čisto imaginarni broj. Kao što se u literaturi sreće za skalarni proizvod da se zove i realni proizvod, tako za vektorski kažu *kompleksni proizvod.* Kao i skalarni proizvod tako i vektorski proizvod ima svoja svojstva. Neka su $a, b, c \in \mathbb{C}$ tada:

1. $a \times b = 0$ akko je $a = 0$ ili $b = 0$ ili je $a = \lambda b$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

2. $a \times b = -b \times a$,

3. $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$ za svako $\alpha \in \mathbb{R}$,

4. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$,

5. Ako su $A(a), B(b)$ dve međusobno različite tačke, i obe se razlikuju od koordinatnog početka. Tada je $a \times b = 0$ akko su tačke $\mathbf{O}(0), A(a), B(b)$ kolinearne.

Slično kao za skalarni proizvod možemo da uočimo neke jednakosti i za vektorski proizvod. Pozivajući se sada na jednakost $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ jasno je da važi $\frac{1}{2}(\overline{a}b - a\overline{b}) = \frac{1}{2}(\overline{a}b - \overline{\overline{a}b}) = i\,\mathrm{Im}(\overline{a}b)$, odnosno vektorski proizvod možemo da posmatramo i kao jednakost $a \times b = i\,\mathrm{Im}(\overline{a}b)$.

Ako su date tačke $A(a)$ i $B(b)$, gde je $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ i gde je $b = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$, tada $a \times b = |a|\,|b|\,i\sin(\beta - \alpha)$. Dakle, uočili smo da je $|a \times b| = |a|\,|b| \sin\measuredangle(a, b)$, gde je $\measuredangle(a, b)$ ugao između vektora $\overrightarrow{\mathbf{O}A}$ i $\overrightarrow{\mathbf{O}B}$.

Poznato nam da se površina trougla izračunava kao $P = \frac{1}{2}xy\sin\psi$ gde su x, y dužine stranica a ψ ugao između njih, odatle zaključujemo da je $|a \times b| = 2P_{A\mathbf{O}B}$, gde je $P_{A\mathbf{O}B}$ površina trougla $A\mathbf{O}B$.

Izrazimo sada vektorski proizvod $a \times b$ preko površine trougla $A\mathbf{O}B$ u zavisnosti od njegove orijentacije. Posmatraćemo trougao nad vektorima $\overrightarrow{\mathbf{O}A}$ i $\overrightarrow{\mathbf{O}B}$, i orijentacija ugla izmedju vektora $\overrightarrow{\mathbf{O}A}$ i $\overrightarrow{\mathbf{O}B}$ određuje orijentaciju trougla $A\mathbf{O}B$. Tako dobijamo:

1. Ako je trougao $A\mathbf{O}B$ je pozitivno orijentisan:

$$P_{A\mathbf{O}B} = \frac{1}{2}|a|\,|b|\sin\measuredangle(a,b) = \frac{1}{2}|a|\,|b|\sin\left(\arg\frac{b}{a}\right) \overset{10}{=}$$

$$= \frac{1}{2}|a|\,|b|\,\mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{2}|a|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}|a|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right) = \frac{1}{2}|a|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{b\overline{a}}{|a|^2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}(b\overline{a}),$$

   odavde vidimo da je $a \times b = 2iP_{A\mathbf{O}B}$.

2. Ako je trougao $A\mathbf{O}B$ je negativno orijentisan:

$$P_{A\mathbf{O}B} = \frac{1}{2}|a|\,|b|\sin\measuredangle(a,b) = \frac{1}{2}|a|\,|b|\sin\left(-\arg\frac{b}{a}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}|a|\,|b|\,\mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\right)\frac{|a|}{|b|} = -\frac{1}{2}|a|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}|a|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{b}{a}\frac{\overline{a}}{\overline{a}}\right) = -\frac{1}{2}|a|^2\,\mathrm{Im}\left(\frac{b\overline{a}}{|a|^2}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(b\overline{a}),$$

   odavde vidimo da je $a \times b = -2iP_{A\mathbf{O}B}$.

Tvrđenje 9. *Neka su $A(a), B(b)$ i $C(c)$ tri različite tačke u kompleksnoj ravni, tada površina pozitivno orijentisanog trougla ABC se računa kao:*

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a\right).$$

Dokaz. Kako su nam sad sve tri tačke različite od koordinatnog početka, transliramo trougao za vektor $-\overrightarrow{\mathbf{O}A}$, na taj način tačke $A(a), B(b)$ i $C(c)$ prelaze u tačke $\mathbf{O}(0), B'(b-a)$ i $C'(c-a)$ a trougao ABC u trougao $\mathbf{O}B'C'$. Translacija nemenja površinu figure, pa su površine ova dva trougla jednake.

$$P_{ABC} = P_{\mathbf{O}B'C'} = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{(b-a)}(c-a)\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{b}c - \overline{a}c - a\overline{b} + a\overline{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a\right).$$

$\square$

[10] $\sin(\arg z) = \mathrm{Im}(z)\left|\frac{1}{z}\right|$: neka je $z = |z|\,e^{i\arg z}$ tada $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\arg z)$.

Koristeći $\mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$ dolazimo do zaključka da važi

$$P_{ABC} = \frac{1}{2i}(a \times b + b \times c + c \times a).$$

Tvrđenje 10. *Neka su $A_1(a_1), A_2(a_2), \ldots, A_n(a_n)$ tačke kompleksne ravni. Tada površina pozitivno orijentisanog konveksnog n-tougla $A_1A_2\ldots A_n$ se računa kao:*

$$P_{A_1A_2\ldots A_n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1).$$

Dokaz. Imaćemo dva slučaja:

1. Koordinatni početak $\mathbf{O}$ pripada unutrašnjosti n-tougla.
   Tada je $P_{A_1A_2\ldots A_n} = P_{\mathbf{O}A_1A_2} + P_{\mathbf{O}A_1A_2} + \ldots + P_{\mathbf{O}A_nA_1}$. Kako su trouglovi $\mathbf{O}A_1A_2, \mathbf{O}A_1A_2, \ldots, \mathbf{O}A_nA_1$ pozitivno orijentisani imaćemo

$$P_{A_1A_2\ldots A_n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{a_1}a_2) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{a_2}a_3) + \ldots + \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{a_n}a_1) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1).$$

2. Koordinatni početak $\mathbf{O}$ ne pripada unutrašnjosti n-tougla.
   Tada izaberemo proizvoljnu tačku iz unutrašnjosti $S(s)$. Transliramo n-tougao za vaktor $-\overrightarrow{\mathbf{O}S}$ i tada tačka $S(s)$ prelazi u tačku $\mathbf{O}(0)$, odnosno u koordinatni početak. Dok n-tougao $A_1A_2\ldots A_n$ prelazi u n-tougao $A_1'A_2'\ldots A_n'$ gde su $A_1'(a_1 - s), A_2'(a_2 - s), \ldots, A_n'(a_n - s)$.
   Kako je S u unutrašnjosti n-tougla $A_1A_2\ldots A_n$, onda je $\mathbf{O}(0)$ u unutrašnjosti $A_1'A_2'\ldots A_n'$.
   Prema tome,

$$P_{A_1A_2\ldots A_n} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}((\overline{a_1 - s})(a_2 - s) + (\overline{a_2 - s})(a_3 - s) + \ldots + (\overline{a_n - s})(a_1 - s)) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \ldots + \overline{a_n}a_1)$$

   jer je $\mathrm{Im}(z + \overline{z}) = 0$ i $\mathrm{Im}(|z|^2) = 0$.

$\square$

Tvrđenje 11. *Neka su date tri različite tačke $A(a), B(b)$ i $C(c)$. Tada su sledeće činjenice ekvivalentne :*

1. *Tačke $A(a), B(b)$ i $C(c)$ su kolinearne,*

2. $a \times b + b \times c + c \times a = 0$,

3. $(b-a) \times (c-a) = 0$.

Dokaz. 1 $\Leftrightarrow$ 2: Tačke $A(a), B(b)$ i $C(c)$ su kolinearne akko je $P_{ABC} = 0$, odnosno $(a \times b + b \times c + c \times a) = 0$

2 $\Leftrightarrow$ 3: Kako je $(a \times b + b \times c + c \times a) = 0$ odnosno $P_{ABC} = 0$ pa je $\frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\overline{a}b + \overline{b}c + \overline{c}a\right) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\overline{(b-a)}(c-a)\right) = 0$.

Dakle $\operatorname{Im}\left(\overline{(b-a)}(c-a)\right) = 0$, pa prema tome sledi

$$(b-a) \times (c-a) = i \operatorname{Im}\left(\overline{(b-a)}(c-a)\right) = 0.$$

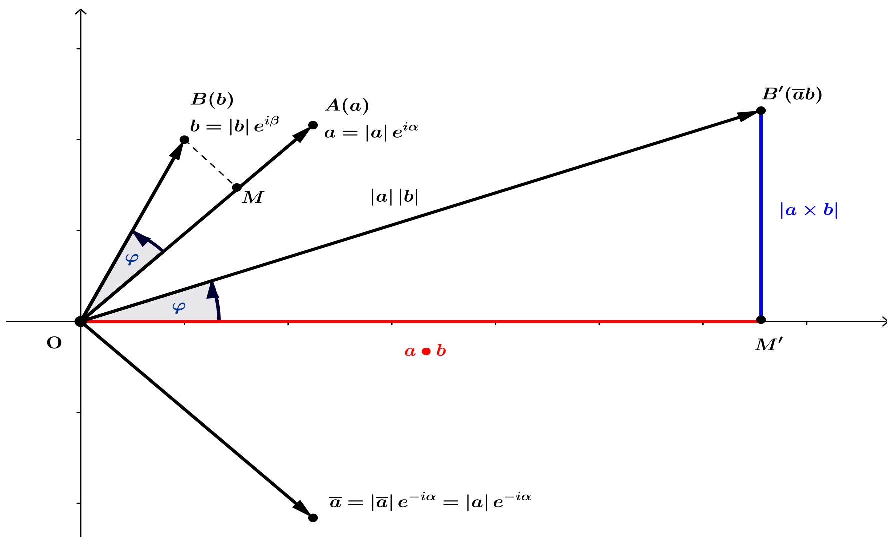
□

4.3 Veza skalarnog i vektorskog proizvoda

Vezu skalarnog i vektorskog proizvoda možemo izvesti analitički. Znamo da važi $\overline{a}b = \operatorname{Re}(\overline{a}b) + i \operatorname{Im}(\overline{a}b)$ a kako smo rekli da je $a \bullet b = \operatorname{Re}(\overline{a}b)$ i da je $a \times b = i \operatorname{Im}(\overline{a}b)$ tada imamo

$$\overline{a}b = a \bullet b + a \times b.$$

Do ove veze možemo doći i geometrijski. Neka su data dva kompleksna broja $a = |a| e^{i\alpha}, b = |b| e^{i\beta}$ gde su $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$ i neka su A, B tačke čije su kompleksne koordinate a, b, redom. Postojaće nekoliko slučajeva, razmotrićemo jedan od njih. Posmatrajmo slučaj da je $\beta > \alpha$ i neka $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: Tada ugao između vektora $\overrightarrow{\mathbf{O}A}$ i $\overrightarrow{\mathbf{O}B}$ obeležimo sa φ i jednak je $(\beta - \alpha)$. Neka je M projekcija tačke B na vektor $\overrightarrow{\mathbf{O}A}$. Pomnožimo sada svaku tačku kompleksne ravni sa $\overline{a}$. Kako je množenje sa brojem $\overline{a}$ zapravo kompozicija rotacije za ugao $-\alpha$ i homotetije čiji je centar $\mathbf{O}$ i koeficijent $|a|$ onda trougao $\mathbf{O}MB$ se slika u trougao $\mathbf{O}M'B'$, gde je B' tačka dodeljena kompleksnom broju $\overline{a}b$ a M' je slika od M pri kompoziciji preslikavanja. Dakle, $\overline{a}b = a \bullet b + i\,|a \times b|$. Odnosno $\overline{a}b = a \bullet b + a \times b$.



Slika 16: *Veza skalarnog i vektorskog proizvoda.*

5 Zanimljivi zadaci

Zadatak 4. *Neka je dat trougao ABC zadat sa $A(a), B(b)$ i $C(c)$ i neka simetrala ugla kod temena $A(a)$ seče naspramnu stranicu u tački $D(d)$. Tada je $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Dokazati.*

Rešenje. Neka je $d_0 \in \mathbb{C}$ i $d_0 = \frac{d-b}{c-d}$, ali kako su tačke B, C i D kolinearne d_0 će biti realan. Prema tome imamo da važi $\frac{d-b}{c-d} = \left|\frac{d-b}{c-d}\right|$. Uočimo tačku $D_1(d_1)$ na stranici BC pa važi $\frac{d_1-b}{c-d_1} = \left|\frac{d_1-b}{c-d_1}\right|$ i neka je D_1 takva da važi $\frac{d_1-b}{c-d_1} = \left|\frac{b-a}{c-a}\right|$, odnosno $\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$. Sredjivanjem imaćemo

$$d_1 = \frac{c\,|b-a| + b\,|c-a|}{|c-a| + |b-a|}.$$

Neka je $\alpha = \arg\frac{c-a}{b-a}$ pa je $\frac{\alpha}{2} = \arg\frac{d-a}{b-a}$. Dokazujemo da važi da je

$\measuredangle BAD_1 = \dfrac{\alpha}{2} = \measuredangle BAD$ odatle sledi da se D_1 i D poklapaju. Dakle,

$$\measuredangle BAD_1 = \arg\frac{d_1 - a}{b - a} = \ldots = \arg\frac{|c-a| + \dfrac{c-a}{b-a}|b-a|}{|c-a| + |b-a|},$$

ubacivanjem $\dfrac{c-a}{b-a} = \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| e^{i\alpha}$ dobijemo:

$$\measuredangle BAD_1 = \arg\frac{|c-a|\,(1 + e^{i\alpha})}{|c-a| + |b-a|} = \arg\frac{|c-a|\,2\cos\frac{\alpha}{2}}{|c-a| + |b-a|}e^{i\frac{\alpha}{2}}.$$

Kako $\dfrac{|c-a|\,2\cos\frac{\alpha}{2}}{|c-a| + |b-a|} \in \mathbb{R}^+$ onda je $\measuredangle BAD_1 = \dfrac{\alpha}{2}$, tj. $\measuredangle BAD_1 = \measuredangle BAD$. Dakle, D_1 i D se poklapaju. △

Zadatak 5. *Odrediti koordinatu centra kruga upisanog u trougao ABC zadatog sa $A(a), B(b)$ i $C(c)$.*

Rešenje. Neka je $D(d)$ tačka u kojoj simetrala ugla kod temena A seče stranicu BC. Tada je $d = \dfrac{c\,|b-a| + b\,|c-a|}{|c-a| + |b-a|}$. I neka je tačka $S(s)$ centar upisanog kruga a znamo da je centar upisanog kruga presek simetrala unutrašnjih uglova, prema tome tačka S pripada stranici AD trougla ADB i simetrala ugla kod temena B seče stranicu AD baš u tački S. Sada na ADB primenimo zadatak 4 pa imamo da važi $\dfrac{AS}{SD} = \dfrac{AB}{BD}$.
Kako su tačke A, S i D kolinearne tada važi $\dfrac{s-a}{d-s} = \left|\dfrac{s-a}{d-s}\right|$. Dakle,

$$\frac{s-a}{d-s} = \frac{|b-a|}{\dfrac{|b-a|\,|c-b|}{|b-a| + |c-a|}},$$

sređivanjem dobijamo kompleksnu koordinatu centra upisanog kruga

$$s = \frac{a\,|c-b| + b\,|c-a| + c\,|b-a|}{|a-b| + |a-c| + |b-c|}.$$

△

Zadatak 6. *Odrediti koordinatu centra kruga opisanog oko trougla ABC, zadatog sa $A(a), B(b)$ i $C(c)$.*

Rešenje. Već smo pokazali da jednačina $\left|z + \overline{k}\right| = r$ predstavlja jednačinu kruga. Takođe rekli smo da tačka dodeljena kompleksnom broju $-\overline{k}$ predstavlja centar tog kruga. Pri izvođenju jednačine kruga u poglavlju 3.4 imali smo:

$$-\overline{k} = \frac{\overline{K}}{\overline{J}} = \frac{(z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})z_3 - (z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})z_1}{(z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})z_3 - (z_3 - z_2) - (z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})},$$

gde su z_1, z_2 i z_3 kompleksni brojevi i njima su dodeljene tačke M_1, M_2 i M_3. Tačke M_1, M_2 i M_3 određuju krug $\left|z + \overline{k}\right| = r$. Sređivanjem dobijamo:

$$-\overline{k} = \frac{(z_1 - z_2)\left|z_3\right|^2 + (z_2 - z_3)\left|z_1\right|^2 + (z_3 - z_1)\left|z_2\right|^2}{(z_1 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2})z_3 - (z_3 - z_2) - (z_3 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})}.$$

Kako u našem zadatku krug je određen tačkama $A(a), B(b)$ i $C(c)$ jasno je da su kompleksne koordinate centra opisanog kruga oko trougla ABC:

$$o = \frac{(a - b)\left|c\right|^2 + (b - c)\left|a\right|^2 + (c - a)\left|b\right|^2}{(a - b)(\overline{c} - \overline{b})c - (c - b) - (c - b)(\overline{a} - \overline{b})}.$$

$\triangle$

Zadatak 7. *Neka su $A(a), B(b)$ i $C(c)$ tačke kompleksne ravni, i neka je ABC trougao čiji je centar opisanog kruga koordinatni početak. Pokazati da je $H(h)$ ortocentar trougla ABC sa kompleksnom koordinatom $h = a + b + c$.*

Rešenje. Neka su duži AA_1, BB_1 i CC_1 visine trougla ABC. Ako neka tačka $M(m)$ pripada visinama AA_1, BB_1 i CC_1 tada pozivajući se na tvrđenje 8 važe sledeće tri jednakosti: $(m - a) \bullet (b - c) = 0, (m - b) \bullet (c - a) = 0$ i $(m - c) \bullet (a - b) = 0$. Pokazaćemo da tačka H čija je kompleksna koordinata $h = a + b + c$ pripada svakoj od visina AA_1, BB_1 i CC_1, pa je na taj način ta tačka presek tih visina odnosno ortocentar. Koristeći da je $|a| = |b| = |c|$ imamo da su sve tri jednakosti jednake nuli:

$$(h-c)\bullet(a-b) = (a+b)\bullet(a-b) = \frac{1}{2}(\overline{(a + b)}(a-b)+(a+b)\overline{(a - b)}) = a\overline{a}-b\overline{b} = 0,$$

$$(h - a) \bullet (b - c) = (b + c) \bullet (b - c) = b\overline{b} - c\overline{c} = 0,$$

$$(h - b) \bullet (c - a) = 0,$$

prema tome tačka H sa kompleksnom koordinatom $h = a + b + c$ pripada svakoj od visina AA_1, BB_1 i CC_1. $\triangle$

Zadatak 8. *Neka su $A(a), B(b)$ i $C(c)$ tačke kompleksne ravni, i neka je ABC trougao. Tačka $P(p)$ je podnožje normale proizvoljne tačke $Z(z)$ na neku od stranica trougla ABC. Tada je kompleksna koordinata podnožja:*

$$p = \frac{1}{2}\left(z - \frac{bc}{R^2}\overline{z} + b + c\right),$$

gde je R poluprečnik opisanog kruga oko trougla ABC, čiji je centar koordinatni početak.

Rešenje. Neka je P podnožje na stranici BC, tada su tačke $P(p), B(b)$ i $C(c)$ kolinearne. Koristeći tvrđenje 11 imamo $(p-b)\times(c-b)=0$, a kako je prava ZP normalna na stranicu BC tada koristeći tvrđenje 8 imamo da je $(p-z)\bullet(c-b)=0$. Dakle, tačka P treba da zadovoljava sistem:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{(p-b)}(c-b) - (p-b)\overline{(c-b)}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\overline{(p-z)}(c-b) + (p-z)\overline{(c-b)}\right) = 0$$

Rešavanjem sistema dobijamo $p = \dfrac{1}{2}\left(b + z + (\overline{z} - \overline{b})\dfrac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}}\right)$. Korišćenjem $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = R^2$, odnosno $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = R^2$, prethodnu jednačinu svodimo na:

$$p = \frac{1}{2}\left(z - \frac{bc}{R^2}\overline{z} + b + c\right).$$

$\triangle$

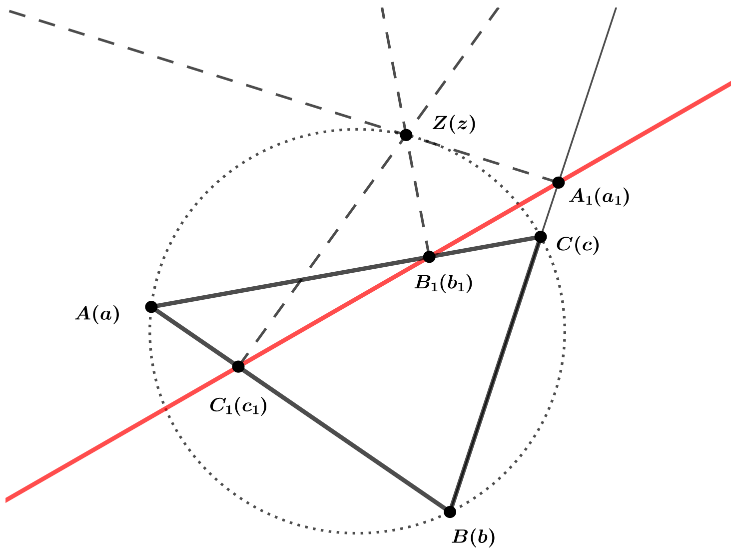
Specijalno, ako tačka $Z(z)$ iz zadatka 8 pripada opisanom krugu oko trougla ABC tada kompleksna koordinata podnožja je:

$$p = \frac{1}{2}\left(z - \frac{bc}{z} + b + c\right).$$

Zadatak 9 (Simsonova prava[11])**.** *Ako se iz proizvoljne tačke sa kruga opisanog oko trougla ABC konstruišu podnožja normala na prave koje sadrže stranice trougla, onda su te tri tačke kolinearne.*

Rešenje. Neka je centar O opisanog kruga oko trougla ABC koordinatni početak. Neka je $Z(z)$ proizvoljna tačka sa kruga, i neka su $A_1(a_1), B_1(b_1)$ i $C_1(c_1)$ podnožja normala na prave koje sadrže stranice trougla.

[11]Robert Simson, 14 Oktobar 1687.-1 Oktobar 1768., Škotski matematičar.



Slika 17: *Simsonova prava.*

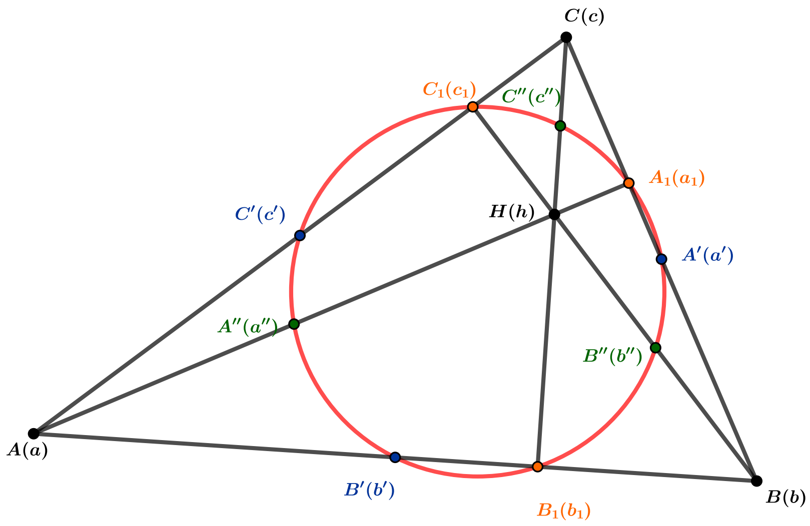
Tada na osnovu zadatka 8 imamo:
$a_1 = \frac{1}{2}\left(z - \frac{bc}{z} + b + c\right), b_1 = \frac{1}{2}\left(z - \frac{ac}{z} + a + c\right)$ i $c_1 = \frac{1}{2}\left(z - \frac{ba}{z} + b + a\right)$.

Rešavanjem $\frac{a_1 - b_1}{c_1 - b_1} = \frac{-\frac{bc}{z} + b + \frac{ac}{z} - a}{-\frac{ba}{z} + b + \frac{ac}{z} - c} = \frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}$ i kako tačke A, B, C i Z pripadaju krugu tada na osnovu tvrđenja 7 sledi da $\frac{(b-a)(z-c)}{(b-c)(z-a)}$ je realan broj. Prema tome i izraz $\frac{a_1 - b_1}{c_1 - b_1}$ je realan broj, samim tim na osnovu tvrđenja 4 tačke $A_1(a_1), B_1(b_1)$ i $C_1(c_1)$ su kolinearne. Prava koja sadrži tačke $A_1(a_1), B_1(b_1)$ i $C_1(c_1)$ naziva se ***Simsonova prava***. $\triangle$

Zadatak 10 (Ojlerov krug)**.** *Neka su $A(a), B(b)$ i $C(c)$ tačke kompleksne ravni, ABC trougao oko kog je opisan krug čiji je centar $O(o)$ i poluprečnik R, i neka su tačke:*

- *$A'(a'), B'(b'), C'(c')$ središta duži $(BC), (AC)$ i (AB);*
- *$A_1(a_1), B_1(b_1), C_1(c_1)$ podnožja visina iz temena A, B, C na stranice $(BC), (AC)$ i (AB) a $H(h)$ ortocentar;*
- *$A''(a''), B''(b''), C''(c'')$ središta duži $(AH), (BH)$ i (CH).*

U trouglu ABC tačke $A', B', C', A_1, B_1, C_1, A'', B'', C''$ pripadaju jednom krugu čiji je centar $O_9(o_9)$, gde je $O_9(o_9)$ središte duži (OH).



Slika 18: *Ojlerov krug.*

Rešenje. Neka je centar O opisanog kruga oko trougla ABC koordinatni početak. Tada je koristeći zadatak 7 koordinata ortocentra $h = a + b + c$. Iz postavke zadatka znamo:

- $a' = \dfrac{b+c}{2}, b' = \dfrac{a+c}{2}, c' = \dfrac{a+b}{2}$;
- $a_1 = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{bc}{a} + b + c\right), b_1 = \dfrac{1}{2}\left(b - \dfrac{ac}{b} + a + c\right),$
  $c_1 = \dfrac{1}{2}\left(c - \dfrac{ba}{c} + b + a\right)$;
- $a'' = \dfrac{a+h}{2}, b'' = \dfrac{b+h}{2}, c'' = \dfrac{c+h}{2}$;

Koristeći da je $h = a + b + c$ imamo $a'' = \dfrac{2a+b+c}{2}, b'' = \dfrac{2b+a+c}{2}$ i $c'' = \dfrac{2c+b+a}{2}$.
Proverimo rastojanje O_9 od tačaka $A', B', C', A_1, B_1, C_1, A'', B'', C''$:

$|a' - o_9| = \left|\dfrac{b+c}{2} - \dfrac{a+b+c}{2}\right| = \dfrac{|a|}{2} = \dfrac{R}{2}$, na isti način se proveri za b' i c'.
$|a_1 - o_9| = \left|\dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{bc}{a} + b + c\right) - \dfrac{a+b+c}{2}\right| = \dfrac{|bac|}{2R^2} = \dfrac{R^3}{2R^2} = \dfrac{R}{2}$, na isti način se proveri za b_1 i c_1.
$|a'' - o_9| = \left|\dfrac{2a+b+c}{2} - \dfrac{a+b+c}{2}\right| = \left|\dfrac{a}{2}\right| = \dfrac{R}{2}$, na isti način se proveri za b'' i c''.
Dakle, sve tačke $A', B', C', A_1, B_1, C_1, A'', B'', C''$ su na istom rastojanju od tačke O_9, odnosno pripadaju krugu čiji je centar O_9 i poluprečnik $\dfrac{R}{2}$. Ovaj krug se naziva ***Ojlerov krug***. △

Zadatak 11 (Ojlerova prava)**.** *Neka su u trouglu ABC sa $T(t), H(h)$ i $O(o)$ označeni težište, ortocentar i centar kruga opisanog oko trougla ABC. Dokazati da su tačke $T(t), H(h)$ i $O(o)$ kolinearne kao i da važi $HT = 2TO$.*

Rešenje. Poznato nam da je kompleksna koordinata težišta $t = \dfrac{a+b+c}{3}$. Neka je centar O opisanog kruga oko trougla ABC koordinatni početak. Tada je koristeći zadatak 7 kompleksna koordinata ortocentra $h = a + b + c$. Prema tome,

$$\frac{t-h}{t-o} = \frac{\dfrac{a+b+c}{3} - (a+b+c)}{\dfrac{a+b+c}{3}} = \frac{\dfrac{-2}{3}}{\dfrac{1}{3}} = -2,$$

odnosno dolazimo do jednačine oblika $t - h = -2(t - o) = 2(o - t)$. Dakle, važi $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$, i kako je $\dfrac{t-h}{t-o}$ realan broj tada su tačke $T(t), H(h)$ i $O(o)$ kolinearne. Prava koja ih sadrži zove se ***Ojlerova prava***. △

6 Mebijusove transformacije

6.1 Dvorazmera

Neka su z_1, z_2, z_3 i z_4 kompleksni brojevi, tim brojevima dodeljujemo kompleksan broj

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \tag{15}$$

koji nazivamo ***dvorazmera*** ta četiri broja. Ako je jedan od brojeva ∞ u tom slučaju izrazi u kojima se javlja ∞ se menjaju sa 1, odnosno:

1. ako je $z_4 = \infty$ tada $[z_1, z_2; z_3, \infty] = \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$,
2. ako je $z_3 = 0, z_4 = \infty$ tada $[z_1, z_2; 0, \infty] = \dfrac{z_1}{z_2}$,
3. ako je $z_2 = 1, z_3 = 0, z_4 = \infty$ tada $[z_1, 1; 0, \infty] = z_1$.

Zamenom bilo koja dva para čuva se dvorazmera tj. važi:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [z_2, z_1; z_4, z_3] = [z_3, z_4; z_1, z_2] = [z_4, z_3; z_2, z_1].$$

Pozivajući se na tvrđenje 7 imamo da dvorazmera četiri kompleksna broja $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ je realan broj ako i samo ako tačke koje su dodeljene tim kompleksnim brojevima pripadaju krugu ili su kolinearne.

6.2 Bilinearno preslikavanje i neke osobine bilinearnog preslikavanja

Definicija 10. *Preslikavanje oblika:*

$$w = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{16}$$

*tako da su $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ i važi $ad - bc \neq 0$ naziva se **bilinearno preslikavanje**. Takođe, naziva se i Mebijusovom transformacijom.*[12]

Posmatrajmo sada ako bi važilo $ad - bc = 0$, tada bi smo imali $bc = ad$. Postojaće dva slučaja:

1. Slučaj $d \neq 0$. Zamenjujući $a = \dfrac{bc}{d}$ u (16) dobijamo

$$M(z) = \frac{\frac{bc}{d}z + \frac{bd}{d}}{cz + d} = \frac{b}{d}.$$

Primetimo da smo dobili konstantno preslikavanje što nas ne zanima.

[12] August Ferdinand Mebius, 17. novembar 1790.-26. septembar 1868., nemački matematičar.

2. Slučaj $d = 0$ pa sledi da je $bc = 0$, odnosno sledi $b = 0$ (tada (16) ima oblik $M(z) = \frac{a}{c}$ pa opet dobijamo konstantno preslikavanje što nas nezanima) ili $c = 0$ (tada u (16) imamo delenje nulom što nije definisano ako posmatramo na $\mathbb{C}$, a ako posmatramo na $\overline{\mathbb{C}}$ opet imamo konstantno preslikavanje koje slika sve u ∞).

Dakle, nije zanimljivo ako važi $ad - bc = 0$.

Pogodno je da razmatramo (16) kao preslikavanje $\overline{\mathbb{C}}$ u $\overline{\mathbb{C}}$. Neka su z_1 i z_2 kompleksni brojevi takvi da je $M(z_1) = M(z_2)$. Tada računom dolazimo do

$$\underbrace{(ad - bc)}_{\neq 0}(z_1 - z_2) = 0.$$

Otuda sledi $z_1 = z_2$, odnosno preslikavanje (16) je injekcija.

Dodefinišemo bilinearno preslikavanje tako da $-\frac{d}{c}$ se preslikava u ∞ a ∞ se preslikava u $\frac{a}{c}$, ako je $c \neq 0$. Dakle, imamo

$$M(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \\ \infty, & z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & z = \infty. \end{cases}$$

i možemo pronaći inverzno preslikavanje

$$M^{-1}(w) = \begin{cases} \frac{dw-b}{-cw+a}, & w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ \infty, & w = \frac{a}{c} \\ -\frac{d}{c}, & w = \infty \end{cases} \qquad ,$$

kako za $M^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$ važi $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$ zaključujemo da preslikavanje inverzno bilinearnom preslikavanju je bilinearno preslikavanje. Za $c = 0$ zbog uslova $ad - bc \neq 0$ sledi da je $d \neq 0$ pa imamo da (16) ima oblik $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, takođe i u ovom slučaju možemo da pronađemo inverzno $M^{-1}(w) = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a}$. Zaključujemo da je bilinearno preslikavanje neprekidna bijekcija $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Dekompozicija bilinearnog preslikavanja:

- za $c = 0$: tada iz $ad - bc \neq 0$ imamo $a \neq 0$ i $d \neq 0$ a jednačina (16) ima oblik $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Jasno nam da taj oblik jednakosti predstavlja linearno preslikavanje.

- za $c \neq 0$:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\overline{\left(\frac{1}{\overline{z + \frac{d}{c}}}\right)}$$

Dakle, bilinearno preslikavanje je kompozicija sledećih preslikavanja :

1. $w_1 = z + \frac{d}{c}$ translacija za vektor $\frac{d}{c}$,
2. $w_2 = \frac{1}{\overline{w_1}}$ inverzija u odnosu na jedinični krug,
3. $w_3 = \overline{w_2}$ refleksija u odnosu na realnu osu,
4. $w_4 = \frac{bc - ad}{c^2} w_3$ kompozicija rotacije i homotetije,
5. $w_5 = \frac{a}{c} + w_4$ translacija za vektor $\frac{a}{c}$.

Odnosno, $M(z) = (w_5 \circ w_4 \circ w_3 \circ w_2 \circ w_1)(z)$. Primetimo da je $w_* = w_3 \circ w_2$ recipročno preslikavanje.

Ako je k proizvoljan kompleksan broj različit od nule, tada imamo

$$\frac{az + b}{cz + d} = M(z) = \frac{kaz + kb}{kcz + kd}.$$

Dakle, množenjem koeficijenata sa k ne menja se preslikavanje. Možemo da pomnožimo koeficijente bilinearnog preslikavanja $M(z)$ sa $k = \pm\frac{1}{\sqrt{ad - bc}}$, u tom slučaju novi koeficijenti zadovoljavaju $(ad - bc) = 1$. Tada kažemo da je bilinearno preslikavanje *normalizovano*. Kada istražujemo osobine opštih bilinearnih preslikavanja, ispada da je veoma pogodno raditi sa normalizovanim oblikom preslikavanja. Ali kada imamo račun sa određenim bilinearnim preslikavanjem, najbolje je da ga nepredstavljamo u normalizovanom obliku.

Razmotrimo sada fiksne tačke bilinearnog preslikavanja, i posmatrajmo za $c \neq 0$. Fiksne tačke bilinearnog preslikavanja su rešenja jednačine

$$\frac{az+b}{cz+d} = M(z) = z.$$

Primetimo da je ta jednačina ekvivalentna sa $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, prema tome kako je prethodna jednačina kvadratna zaključak je da bilinearno preslikavanje može imati najviše dve fiksne tačke. Jasno je da ako ima više od dve fiksne tačke onda bilinearno preslikavanje mora biti identiteta. Neka je $M(z)$ normalizovano bilinearno preslikavanje, tada su dve fiksne tačke:

$$\nu_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c}.$$

U slučaju kada je $a + d = \pm 2$, fiksne tačke $\nu_{1,2}$ se poklapaju. Ako je $c = 0$, tada bilinearno preslikavanje ima oblik $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, p = \frac{a}{d}, q = \frac{b}{d}$ pa imamo nekoliko slučajeva:

- Ako je $p = 1, q \neq 0$ onda je jedina fiksna tačka ∞.
- Ako je $p = 1, q = 0$ onda bilinearno preslikavanje je zapravo identičko preslikavanje kome su sve tačke fiksne.
- Ako je $p \neq 1$ onda bilinearno preslikavanje ima dve fiksne tačke ∞ i $z = \frac{q}{1-p}$.

Bilinerano preslikavanje čuva uglove između krivih, uključujući i orijentaciju. Kako je bilinearno preslikavanje kompozicija nekoliko preslikavanja oblika $z \to \frac{1}{z}$ i linearnog preslikavanja $z \to az + b$. Kako inverzija i refleksija čuvaju uglove, čuva ga i preslikavanje $z \to \frac{1}{z}$, jer je kompozicija inverzije u odnosu na jedinični krug i refleksije u odnosu na realnu osu. Kako inverzija i refleksija menjaju orijentaciju uglova, njihova kompozicija čuva orijentaciju. Preslikavanje $z \to az + b$ takođe čuva uglove i orijentaciju.

Tvrđenje 12. *Skup* $\mathbb{M} = \{M : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \;:\; M$ *je bilinearno*$\}$ *čini grupu u odnosu na operaciju kompozicije preslikavanja. Odnosno* $(\mathbb{M}, \circ)$ *je grupa.*

Dokaz. Treba pokazati četiri stavke:

1. Zatvorenost skupa $\mathbb{M}$ u odnosu na operaciju $\circ$.
   Neka $M_1, M_2 \in \mathbb{M}$, tada su $M_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ i $M_2(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$.
   $$M_1 \circ M_2(z) = \frac{a_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{\overbrace{(a_1 a_2 + c_1 b_2)}^{A}\, z + \overbrace{(b_1 a_2 + d_1 b_2)}^{B}}{\underbrace{(a_1 c_2 + c_1 b_2)}_{C}\, z + \underbrace{(b_1 c_2 + d_1 d_2)}_{D}},$$ računom vidimo da $AD - BC$ je različito od nule.
   Dakle, $M_1 \circ M_2(z) = \dfrac{Az + B}{Cz + D}$, $AD - BC \neq 0$ pa sledi $M_1 \circ M_2(z) \in \mathbb{M}$.

2. Asocijativnost.
   Neka $M_1, M_2, M_3 \in \mathbb{M}$, tada $M_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$, $M_2(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$ i $M_3(z) = \dfrac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$, $a_3 d_3 - b_3 c_3 \neq 0$.
   Nije potrebno ispitivanje računom jer znamo da operacija $\circ$ kompozicije preslikavanja je uvek asocijativna operacija prema tome važi
   $$M_1 \circ (M_2 \circ M_3) = (M_1 \circ M_2) \circ M_3.$$

3. Neutralni element, odnosno treba pokazati da postoji $\varepsilon \in \mathbb{M}$ takav da je za svako $M \in \mathbb{M}$ važi $M \circ \varepsilon = \varepsilon \circ M = M$.
   Posmatrajmo $id(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$. Jasno nam da važi $z = \dfrac{1z + 0}{0z + 1}$ i da je $ad - bc = 1 \neq 0$ pa sledi $id(z) = z$ jeste bilinearno. Takođe važi $id \circ M = M \circ id = M$, odnosno id je traženo ε.

4. Inverzni element, odnosno treba pokazati da za svako $M \in \mathbb{M}$ postoji $M^{-1} \in \mathbb{M}$ takav da važi $M \circ M^{-1} = M^{-1} \circ M = \varepsilon$.
   Kako je bilinearno preslikavanje bijekcija $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ onda nam jasno da za svako $M \in \mathbb{M}, M(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ postoji $M^{-1}(w) = \dfrac{dw - b}{-cw + a}$.

$\square$

Tvrđenje 13. *Ako je* M *bilinearno preslikavanje za koje važi:* $M(\infty) = \infty$, $M(0) = 0$, $M(1) = 1$. *Onda je* M *identiteta.*

Dokaz. Imamo sledeće činjenice:

1. $0 = M(0) = \dfrac{b}{d}$ pa je $b = 0$
2. $\infty = M(\infty) = \dfrac{a}{c}$ pa je $c = 0$, samim tim preslikavanje je linearno.
3. $1 = M(1) = \dfrac{a+b}{c+d}$. Kako je $\dfrac{a+b}{c+d} = 1$ i kako su $b = c = 0$ tada imamo da je $a = d$.

Dakle, $M(z) = z$. □

Teorema 5. *Neka su tri različite tačke $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ i neka su takođe tri različite tačke $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$. Tada postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje M takvo da je $M(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.*

Dokaz. Neka je:

$$\begin{aligned} M_1 : &\quad z_1, z_2, z_3 \mapsto 0, \infty, 1 \\ M_2 : &\quad w_1, w_2, w_3 \mapsto 0, \infty, 1 \end{aligned}$$

gde su M_1, M_2 oblika $M_1(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2} : \dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$, $M_2(w) = \dfrac{w - w_1}{w - w_2} : \dfrac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$, dva bilinearna preslikavanja. Naše traženo preslikavanje biće $M = M_2^{-1} \circ M_1$, tj. $w = M_2^{-1} \circ M_1(z)$. Dakle, imamo $M_2(w) = M_1(z)$, odnosno

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Dokažimo jedinstvenost ovog preslikavanja.
Neka je $w = \lambda(z)$ bilinearno preslikavanje tako da $w_k = \lambda(z_k), k = 1, 2, 3$. Posmatrajmo $\mu(\xi) = M_2 \circ \lambda \circ M_1^{-1}(\xi)$. Kako je μ bilinearno i kako važi $\mu(0) = 0, \mu(1) = 1$ i $\mu(\infty) = \infty$ tada na osnovu tvrđenja 13 zaključujemo:

$$\begin{gathered} id = M_2 \circ \lambda \circ M_1^{-1}, \\ \lambda = M_2^{-1} \circ id \circ M_1, \\ \lambda = M_2^{-1} \circ M_1, \\ \lambda = M. \end{gathered}$$

□

Tvrđenje 14. *Bilinearno preslikavanje čuva dvorazmeru.*

Dokaz. Neka su z_1, z_2 i z_3 tri različita kompleksna broja, prema teoremi 5 postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $M(z) = w$ takvo da $M(z_j) = w_j$, $w_j \in \overline{\mathbb{C}},\ j = 1,2,3$ i uz to važi:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2},$$

odnosno

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{M(z) - M(z_1)}{M(z) - M(z_2)} : \frac{M(z_3) - M(z_1)}{M(z_3) - M(z_2)},$$

$$[z_1, z_2; z, z_3] = [M(z_1), M(z_2); M(z), M(z_3)].$$

Dakle, bilinearno preslikavanje čuva dvorazmeru. $\square$

Zadatak 12. *Odrediti bilinearno preslikavanje koje tačke* $1, i, \infty$ *preslikava u tačke* $0, \infty, -1$ *tim redom.*

Rešenje. Po teoremi 5 postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $M(z) = w$ takvo da $M(z_j) = w_j$, $w_j \in \overline{\mathbb{C}},\ j = 1,2,3$ i uz to važi:

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2},$$

u zadatku nam se traži da

$$\underbrace{1}_{z_1}, \underbrace{i}_{z_2}, \underbrace{\infty}_{z_3} \mapsto \underbrace{0}_{w_1}, \underbrace{\infty}_{w_2}, \underbrace{-1}_{w_3}.$$

Dakle,

$$\frac{z - 1}{z - i} : \frac{\infty - 1}{\infty - i} = \frac{w - 0}{w - \infty} : \frac{-1 - 0}{-1 - \infty},$$

$$w = \frac{1 - z}{z - i} = M(z).$$

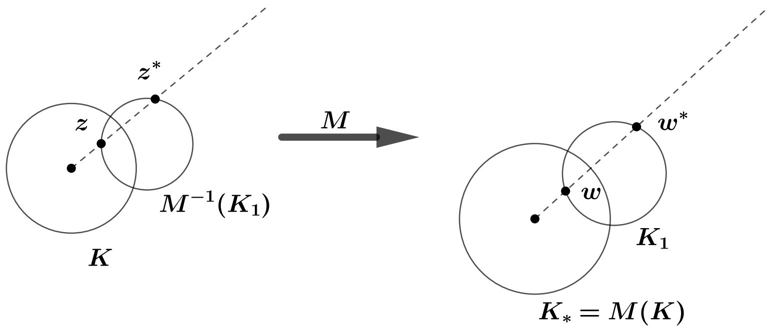
Direktnom proverom vidimo da preslikavanje zadovoljava uslove zadatka, odnosno $M(1) = 0$, $M(i) = \infty$, $M(\infty) = -1$. $\triangle$

Tvrđenje 15. *Bilinearno preslikavanje uopšteni krug slika u uopšteni krug.*

Dokaz. Pod uopštenim krugom podrazumeva se prava ili krug. Posmatrajmo bilinearno preslikavanje zapisano u obliku $w = A+B\dfrac{1}{z+C}$, gde je $w_1 = z+C$ translacija, $w_2 = \dfrac{1}{w_1}$ recipročno, $w_3 = Bw_2$ kompozicija rotacije i homotetije, $w_4 = w_3 + A$ translacija. Očigledno je da w_1, w_3 i w_4 uopšteni krug slikaju u uopšteni krug. Potrebno je proveriti za w_2. Prisetimo se da jednačina ovog oblika $Jz\overline{z}+Kz+\overline{K}\overline{z}+L = 0$ je prava ili krug. Ako stavimo $z = \dfrac{1}{w}$ dobijemo $J + \overline{K}w + K\overline{w} + Lw\overline{w} = 0$ a ovo je ponovo jednačina prave ili kruga. □

Tvrđenje 16. *Tačke z i z^* su simetrične u odnosu na krug K akko je svaki krug K' u $\overline{\mathbb{C}}$ koji sadrži z i z^* ortogonalni na K.*

Teorema 6. *Proizvoljno bilinearno preslikavanje M preslikava tačke z i z^*, simetrične u odnosu na krug K u $\overline{\mathbb{C}}$, u tačke $w = M(z)$ i $w^* = M(z^*)$, simetrične u odnosu na krug K_* koji je slika kruga K, odnosno $K_* = M(K)$.*



Slika 19: *Bilinearno preslikavanje čuva simetriju.*

Dokaz. Neka je K_1 proizvoljni krug tako da sadrži w i w^*. Kako $w, w^* \in K_1$ tada je $M^{-1}(K_1)$ krug koji sadrži z i z^* , i kako su z i z^* simetrične u odnosu na krug K onda je krug $M^{-1}(K_1)$ normalni na krug K. Znamo da bilinearno preslikavanje M čuva uglove sledi da je krug K_1 normalni na krug $M(K) = K_*$. Dakle, $w = M(z)$ i $w^* = M(z^*)$ su simetrične u odnosu na krug K_*. □

Zadatak 13. *Odrediti bilinearno preslikavanje koje tačke* $0, i$ *preslikava u tačke* $2, 0$ *tim redom, a krug* $k: \ |z+1| = 1$ *preslikava na krug* $k': \ |w| = 2$.

Rešenje. Neka je $M(z) = w$ bilinearno preslikavanje. Dato nam da $M(0) = 2$ i $M(i) = 0$. Pre svega odredimo simetričnu tačku s u odnosu na krug k tačke i:

$$s = \Psi_{-1,1}(i) = \frac{1^2}{\overline{i+1}} - 1 = \frac{i}{1-i}.$$

Prema teoremi 6 koja kaže da bilinearno preslikavanje čuva simetriju imamo da $M(s) = s'$, gde je s' simetrična tačka u odnosu na krug k' tačke $M(i)$. Dakle, $M(\Psi_{-1,1}(i)) = \Psi_{0,2}(M(i)) = \Psi_{0,2}(0) = \infty$. Dalje, imamo da je $M(0) = 2, M(i) = 0$ i $M\left(\dfrac{i}{1-i}\right) = \infty$ pa prema teoremi 5 sledi:

$$\frac{w-0}{1} : \frac{2-0}{1} = \frac{z-i}{z-\frac{i}{1-i}} : \frac{-i}{-\frac{i}{1-i}},$$

$$w = \frac{2z-2i}{(1-i)z-i} = M(z).$$

Proverom vidimo da važi $M(0) = \dfrac{-2i}{-i} = 2$, $M(i) = \dfrac{2i-2i}{(1-i)i-i} = 0$, pa preslikavanje zadovoljava prva dva uslova zadatka. Treba još da proverimo da li krug $|z+1| = 1$ slika u krug $|w| = 2$. Jednačinu $|z+1| = 1$ možemo da posmatramo i kao $z\overline{z} + z + \overline{z} = 0$. Postavlja se pitanje da li za takvo z važi $\left|\dfrac{2z-2i}{(1-i)z-i}\right| = 2$? Jednostavnim računom ispostavlja se da važi. Dakle, naše preslikavanje zadovoljava sva tri uslova zadatka.

△

6.3 Klasifikacije Mebijusovih transformacija

U ovom odeljku ukratko ćemo napraviti klasifikaciju bilinearnih preslikavanja posmatrajući fiksne tačke. Podsetimo se sada fiksnih tačaka bilinearnog preslikavanja $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

<table>
<tr><td>c</td><td>$c \neq 0$</td><td colspan="3">$c = 0$</td></tr>
<tr><td>a, d</td><td></td><td colspan="2">$\frac{a}{d} = 1$</td><td>$\frac{a}{d} \neq 1$</td></tr>
<tr><td>b</td><td></td><td>$b = 0$</td><td>$b \neq 0$</td><td></td></tr>
<tr><td>Fiksne tačke:</td><td>$\nu_{1,2} = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c}$</td><td>$\overline{\mathbb{C}}$</td><td>$\infty$</td><td>$\frac{b}{d-a}$ i ∞</td></tr>
</table>

Tabela 1: *Fiskne tačke bilinearnog preslikavanja.*

Znamo da ako je ∞ fiksna tačka da je u tom slučaju bilinearno preslikavanje oblika $M(z) = a_1 z + b_1$. Preciznije, ako je ∞ jedina fiksna tačka tada preslikavanje mora biti oblika $M(z) = z + b_1, b_1 \neq 0$ dok ako su jedine fiksne tačke ∞ i 0 u tom slučaju preslikavanje mora biti oblika $M(z) = a_1 z, a_1 \neq 0, a_1 \neq 1$.

Neka su M_1, M_2 dva bilinearna preslikavanja. Za M_1 i M_2 kažemo da su *konjugovana* ako postoji neko bilinearno preslikavanje L takvo da

$$M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L.$$

Tvrđenje 17. *Konjugovanost između bilinearnih preslikavanja je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. Rekli smo da M_1 i M_2 su *konjugovana* ako postoji neko bilinearno preslikavanje L takvo da $M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L$. Sa znakom $\sim$ obeležimo konjugovanost. Dakle, $M_1 \sim M_2$ ako postoji L bilinearno takvo da $M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L$. Da bi $\sim$ bila relacija ekvivalencije, potrebno je da je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

R: $M_1 \sim M_1$,

$$M_1 = L^{-1} \circ M_1 \circ L,$$

$$L \circ M_1 = M_1 \circ L,$$

postoji L i to je za $L(z) = z$.

S: $M_1 \sim M_2 \Rightarrow M_2 \sim M_1$, odnosno imamo $M_1 \sim M_2$ samim tim postoji L bilinearno takvo da $M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L$ a treba da pokažemo da važi i $M_2 \sim M_1$.

$$M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L,$$

$$L \circ M_1 \circ L^{-1} = M_2,$$

obeležimo L^{-1} sa K, tj. neka je $L^{-1} = K$. Pa važi $K^{-1} \circ M_1 \circ K = M_2$. Prema tome, sledi da postoji K bilinearno takvo da $K^{-1} \circ M_1 \circ K = M_2$ pa je $M_2 \sim M_1$.

T: $M_1 \sim M_2$, $M_2 \sim M_3 \Rightarrow M_1 \sim M_3$, odnosno postoji L takvo da je $M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L$ i postoji K takvo da je $M_2 = K^{-1} \circ M_3 \circ K$ i treba pokazati da postoji neko H takvo da je $M_1 = H^{-1} \circ M_3 \circ H$.

$$M_1 = L^{-1} \circ (K^{-1} \circ M_3 \circ K) \circ L$$

$$M_1 = (K \circ L)^{-1} \circ M_3 \circ K \circ L,$$

obeležimo $K \circ L$ sa H, tj. neka je $K \circ L = H$. Pa imamo da je $M_1 = H^{-1} \circ M_3 \circ H$. Prema tome, sledi da postoji H bilinearno takvo da $M_1 = H^{-1} \circ M_3 \circ H$ pa je $M_1 \sim M_3$.

□

Tvrđenje 18. *Ako su M_1 i M_2 konjugovana tada oni imaju isti broj fiksnih tačaka.*

Dokaz. Neka je z fiksna tačka preslikavanja M_1 i dato nam $M_1 = L^{-1} \circ M_2 \circ L$. Prema tome,

$$M_1(z) = z \Leftrightarrow (L^{-1} \circ M_2 \circ L)(z) = z \Leftrightarrow L(z) = M_2(L(z))$$

pa je L(z) fiksna tačka preslikavanja M_2. Prema prethodnom i kako je L bijekcija imamo da M_1 i M_2 imaju isti broj fiksnih tačaka. □

Neka je $M(z)$ bilinearno preslikavanje. Imamo dve situacije :

1. Ako M ima dve različite fiksne tačke tada je M konjugovano sa M_1, gde je $M_1(z) = \lambda_1 z, \lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

   Neka su z_1, z_2 dve fiksne tačke od M. Posmatrajmo $L_1(z) = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ koje je bilinearno preslikavanje, samim tim i bijekcija. Kako je L_1 bijekcija možemo da pronađemo L_1^{-1}. Potražimo sada L_1^{-1} :

$$w = \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

$$(z - z_2)w = z - z_1,$$

$$z(w - 1) = z_2 w - z_1,$$

$$z = \frac{z_2 w - z_1}{w - 1}.$$

Dakle, imamo $L_1^{-1}(z) = \dfrac{z_2 z - z_1}{z - 1}$. Tada je $M_1 = L_1 \circ M \circ L_1^{-1}$. Direktnom zamenom imamo:

$$M_1(0) = L_1(M(L^{-1}(0))) = L_1(M(z_1)) = L_1(z_1) = 0,$$

$$M_1(\infty) = L_1(M(L^{-1}(\infty))) = L_1(M(z_2)) = L_1(z_2) = \infty.$$

Prema tome, postoji $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tako da $M_1(z) = \lambda_1 z$.
Moguće je da pronađemo oblik bilinearnog presikavanja M. Prema teoremi 5 postoji jedinstveno bilinearno preslikavanje $M(z) = w$ takvo da $M(z_j) = w_j,\ w_j \in \overline{\mathbb{C}},\ j = 1, 2, 3$ i uz to važi:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2},$$

u našem slučaju preslikavamo tačke $z_1, z_2, z_3 \mapsto z_1, z_2, w'$, pa je

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = \underbrace{\frac{\frac{w' - z_1}{w' - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}}}_{k} \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2},\ k \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

sada možemo da izrazimo w

$$w = \frac{(z_1 - k z_2) z - z_1 z_2 + k z_1 z_2}{(1 - k) z - z_2 + k z_1}.$$

Proverimo šta se dešava ako je $k = 1$, tj.

$$\frac{\frac{w' - z_1}{w' - z_2}}{\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}} = 1,$$

$$w' z_3 - z_1 z_3 - w' z_2 + z_1 z_2 = w' z_3 - z_2 z_3 - w' z_1 + z_1 z_2,$$

$$(z_2 - z_1) z_3 = (z_2 - z_1) w',$$

$$z_3 = w',$$

vidimo da ako je $k = 1$ da tada imamo tri fiksne tačke. Dakle, bilinearno preslikavanje M koje ima tačno dve fiksne tačke oblika je:

$$M(z) = \frac{(z_1 - kz_2)z - z_1 z_2 + kz_1 z_2}{(1-k)z - z_2 + kz_1}, \ k \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

Direktnim računom ispostaviće se da je $\lambda_1 = k$. Dakle,

$$\lambda_1 z = L_1 \circ M \circ L_1^{-1}(z) = L_1(M(L_1^{-1}(z))) = L_1\left(M\left(\frac{z_2 z - z_1}{z-1}\right)\right) =$$

$$= \frac{M\left(\frac{z_2 z - z_1}{z-1}\right) - z_1}{M\left(\frac{z_2 z - z_1}{z-1}\right) - z_2} = k\frac{\frac{z_2 z - z_1}{z-1} - z_1}{\frac{z_2 z - z_1}{z-1} - z_2} = \ldots = kz,$$

pa je $\lambda_1 = k$.

2. Ako M ima jednu fiksnu tačku tada je M konjugovano sa M_2, gde je $M_2(z) = z + \lambda_2, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   Neka je z_0 fiksna tačka od M. Posmatrajmo $L_1(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ koje je bilinearno preslikavanje, samim tim i bijekcija. Kako je L_1 bijekcija možemo da pronađemo L_1^{-1}. Potražimo sada L_1^{-1} :

$$w = \frac{1}{z - z_0},$$
$$(z - z_0)w = 1,$$
$$z = \frac{1 + z_0 w}{w}.$$

   Dakle, imamo $L_1^{-1}(z) = \dfrac{z_0 z + 1}{z}$.Tada je $M_2 = L_1 \circ M \circ L_1^{-1}$. Direktnom zamenom imamo:

$$M_2(\infty) = L_1(M(L^{-1}(\infty))) = L_1(M(z_0)) = L_1(z_0) = \infty.$$

   Prema tome, postoji $\lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tako da $M_2(z) = z + \lambda_2$.

Sada ćemo napraviti klasifikaciju bilinearnih preslikavanja $M(z)$:

- Ako je $k > 0$, $k \neq 1$ onda preslikavanje M nazivamo ***hiperboličko***.
- Ako je $|k| = 1$, $k \neq 1$ onda preslikavanje M nazivamo ***eliptičko***.
- Ako preslikavanje M ima jednu fiksnu tačku onda se naziva ***paraboličko***.
- Ako preslikavanje M nije ni hiperboličko ni eliptičko ni paraboličko onda ga nazivamo ***loksodromičko***.

Literatura

[1] M. Mateljević, Kompleksna analiza 1, Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

[2] M. Mateljević, Kompleksna analiza 2, Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

[3] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, Analiza sa algebrom 2 udžbenik sa zbirkom zadataka za drugi razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd 1997.

[4] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, Analiza sa algebrom 3 udžbenik sa zbirkom zadataka za treći razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd 2000.

[5] T. Needham, Visual Complex Analysis, Oxford University Press, 1997.

[6] Slađana Babić, Kompleksni brojevi i geometrija, Magistarski rad, Beograd 2009.

[7] Marek Svetlik, Odabrana poglavlja kompleksne analize, beleške sa vežbi, 2016.

[8] Mirjana Đorić, Odabrana poglavlja geomatrije B, beleške sa vežbi, 2016.