УВОД У ЛОГИКУ
други део

Мирјана Борисављевић

Предговор

Ова књига јесте наставак књиге Увод у логику, први део (Саобраћајни факултет, Универзитета у Београду, 2009), и оне, заједно чине један уџбеник за основни курс математичке логике. У првом делу је изложена исказна, а овде, у другом, предикатска логика. Као што је већ написано у предговору првог дела, овај уџбеник се заснива на предавањима проф. Косте Дошена из предмета Логика, која је држао на Одељењу за филозофију Филозофског факултета Универзитета у Београду почевши од 2002. године.

И приликом писања овог другог дела имала сам велику помоћ и подршку проф. Косте Дошена и на томе му најтоплије захваљујем. Захвална сам и студентима, који су слушали курс Логика на Филозофском факултету, а чије белешке сам користила. Велико хвала колеги др Предрагу Јаничићу за уступање његовог програма GCLC за израду слика.

Београд, 7. јануара 2013. године *Аутор*

Најтоплије се захваљујем колеги др Зорану Петрићу што је веома пажљиво прочитао радну верзију књиге и указао ми на неке грешке и пропусте.

15. фебруара 2013. године *Аутор*

Захваљујем се рецензентима, Слободану Вујошевићу редовном професору Математичког факултета у Подгорици и Зорану Петрићу, научном саветнику Математичког института САНУ, на пажљиивом читању текста и на подршци.

Београд, 14. октобра 2015. године *Аутор*

Садржај

Глава 1

Предикатска логика

У првом делу главе представићемо формални језик предикатске логике и дефинисаћемо како се граде предикатске формуле. У другом делу говорићемо о значењу тих формула, другим речима, изучаваћемо семантику предикатске логике. Даћемо дефиницију модела језика предикатске логике и појма интерпретације неке предикатске формуле, а дефинисаћемо и појам њене вредности у датој интерпретацији. Представићемо семантички најважније предикатске формуле, ваљане формуле, и доказаћемо значајне особине тих формула. Осим тога, представићемо једну форму предикатских формула, пренексну нормалну форму. На крају главе, у њеном трећем делу, рећи ћемо нешто и о дефиницијама у оквиру формалног језика предикатске логике.

1.1 Синтакса предикатске логике

1.1.1 Формални језик предикатске логике

Алфабет предикатске логике има свој логички и нелогички део.

> Дефиниција логичког дела алфабета предикатске логике
>
> Логички део алфабета предикатске логике $\mathcal{J}_l$ састоји се од следећа четири скупа:
>
> ⋄ пребројивог скупа индивидуалних променљивих, скупа $\mathcal{V}$, чије елементе ћемо најчешће означавати са $x, y, z, ..., x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n, ...$;

$\diamond$ скупа логичких везника $\{\bot, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$, где је $\bot$ нуларни везник, а $\wedge, \vee$ и $\Rightarrow$ бинарни везници;

$\diamond$ скупа квантификатора $\{\forall, \exists\}$, где је $\forall$ универзални, а $\exists$ егзистенцијални квантификатор;

$\diamond$ скупа помоћних симбола кога чине лева и десна заграда, и запета.

Дефиниција нелогичког дела алфабета предикатске логике

Нелогички део алфабета предикатске логике $\mathcal{J}$ чине следећа три скупа:

$\diamond$ скуп релацијских симбола (предиката), скуп $\mathcal{P}$;

$\diamond$ скуп операцијских (функцијских) симбола, скуп $\mathcal{O}$;

$\diamond$ скуп индивидуалних константи, скуп $\mathcal{C}$.

Скупови $\mathcal{P}$, $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$ су највише пребројиви. Сваком операцијском симболу и сваком релацијском симболу из $\mathcal{J}$ додељен је неки природан број n, $n \geq 1$, дужина тог симбола.

Релацијске симболе означаваћемо најчешће са $\alpha, \beta, \rho, \alpha_1, \beta_1, \rho_1$,..., или $<$, $=$, $\subseteq$, операцијске симболе са f, g, h, f_1, g_1, h_1,..., или $*$, $+$, $\cdot$, $\bullet$, а индивидуалне константе са a, b, c, a_1, b_1, c_1,..., или 0, 1, и слично. Пребројиви скупови релацијских симбола, операцијских симбола и индивидуалних константи могу се представити овако:

$\mathcal{P} = \{\rho_1^1, \rho_1^2, ..., \rho_1^j, ..., \rho_2^1, \rho_2^2, ..., \rho_2^j, ..., \rho_i^1, \rho_i^2, ..., \rho_i^j, ...\}$,

$\mathcal{O} = \{f_1^1, f_1^2, ..., f_1^j, ..., f_2^1, f_2^2, ..., f_2^j, ..., f_i^1, f_i^2, ..., f_i^j, ...\}$ и

$\mathcal{C} = \{c_1, ..., c_i, ...\}$,

где горњи индекси релацијских и операцијских симбола говоре о дужини тих симбола, а доњи разликују различите симболе исте дужине.

Алфабет предикатске логике има фиксиран свој логички део $\mathcal{J}_l$. То значи да алфабет предикатске логике увек има скуп променљивих $\mathcal{V}$, логичке везнике, квантификаторе и помоћне симболе. С друге стране, нелогички део алфабета предикатске логике $\mathcal{J}$, који још зовемо и језик, може се мењати. Наиме, за прављење важних речи[1] предикатске логике (терама и предикатских формула) можемо користити различите скупове релацијских симбола, операцијских симбола и индивидуалних константи, тј. те речи можемо правити над различитим језицима. Рецимо и да језик не мора да има индивидуалне константе или операцијске симболе. Дакле појам терма и појам предикатске формуле увек везујемо за неки одређени језик $\mathcal{J}$ и говоримо о термима и предикатским формулама над тим језиком $\mathcal{J}$.

Представимо прво дефиницију појма терма над неким језиком $\mathcal{J}$.

---

[1] појам речи у [3], прва глава

Дефиниција терма над језиком $\mathcal{J}$

(1) Индивидуалне константе језика $\mathcal{J}$ и индивидуалне променљиве су терми.

(2) Ако су $t_1, ..., t_n$ терми и f операцијски симбол језика $\mathcal{J}$ дужине n, онда је и $f(t_1, ..., t_n)$ терм.

(3) Терми се могу градити само коначном применом делова (1) и (2) ове дефиниције.

Напоменимо да, ако су за неки језик $\mathcal{J}$ скупови $\mathcal{P}$, $\mathcal{O}$ и $\mathcal{C}$ коначни, онда ћемо $\mathcal{J}$ записивати у облику скупа који садржи све њихове елементе. Одмах дајемо примере терама над неким језиком $\mathcal{J}$.

Пример 1 Посматрајмо језик $\mathcal{J} = \{=, +, a, 0\}$, где су $=$ релацијски симбол дужине 2, $+$ операцијски симбол дужине 2 и a и 0 индивидуалне константе. Најједноставнији терми над језиком $\mathcal{J}$ су индивидуалне константе a и 0 и све индивидуалне променљиве скупа $\mathcal{V}$. А сада ево и неколико сложенијих терама над језиком $\mathcal{J}$:

$$+(0, a), \quad +(z, 0), \quad +(x, y) \quad \text{и} \quad +(+(+(x, z), 0), +(+(y, z), +(x, a))).$$

Знамо да у случају познатих бинарних аритметичких операција (сабирања, множења, ...) симбол операције не пишемо испред два терма (алгебарска израза) на који се примењује операција, него између тих терама. Дакле, уместо $+(x, y)$ пишемо $(x + y)$. Користећи овај договор горенаведени сложени терми над датим језиком $\mathcal{J}$ редом се могу записати овако:

$$(0 + a), \quad (z + 0), \quad (x + y) \quad \text{и} \quad (((x + z) + 0) + ((y + z) + (x + a))).$$

Сада дефинишемо појам предикатске формуле над неким језиком $\mathcal{J}$.

Дефиниција предикатске формуле над језиком $\mathcal{J}$

(1) Нуларни логички везник $\perp$ је предикатска формула.

(2) Ако су $t_1, ..., t_n$ терми и ρ релацијски симбол дужине n језика $\mathcal{J}$, онда је и $\rho(t_1, ..., t_n)$ предикатска формула.

(3) Ако су A и B предикатске формуле, онда су $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \Rightarrow B)$ предикатске формуле.

(4) Ако је A предикатска формула и x индивидуална променљива, онда су $\forall x A$ и $\exists x A$ предикатске формуле.

(5) Предикатске формуле се могу градити само коначном применом делова (1), (2), (3) и (4) ове дефиниције.

Најједноставније предикатске формуле, формуле из делова (1) и (2) дефиниције, су елементарне (или атомске) предикатске формуле.

Индивидуалне константе и индивидуалне променљиве зваћемо просто константе и променљиве, а предикатске формуле најчешће само формуле.

Договоримо се да при прављењу сложених терама и формула не пишемо сасвим спољашње заграде. Тако, на пример, терме из **Примера 1** записаћемо редом: $0+a$, $z+0$, $x+y$ и $((x+z)+0)+((y+z)+(x+a))$, а формуле $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \Rightarrow B)$ писаћемо редом $A \wedge B$, $A \vee B$ и $A \Rightarrow B$.

У наредном примеру представићемо један језик $\mathcal{J}$ и неке предикатске формуле над тим језиком.

> **Пример 2** Посматрајмо језик $\mathcal{J} = \{\alpha, *, c\}$, где је α релацијски, а $*$ операцијски симбол дужине 2 и c индивидуална константа. Напоменимо да договор о писању операцијског симбола дужине 2, који смо навели у **Примеру 1**, важи и за сваки релацијски симбол ρ дужине 2, те за нека два терма t_1 и t_2 имамо ова два записа: $\rho(t_1, t_2)$ или $t_1 \ \rho \ t_2$. У зависности од конкретног релацијског симбола користићемо један од њих. Ево неколико предикатских формула над датим језиком $\mathcal{J}$:
>
> $$\alpha(x,c) \qquad \alpha(x*y,(c*z)*x)$$
> $$\forall x \alpha(c,x) \qquad \forall x \exists y \alpha(x,y)$$
> $$\forall y((\alpha(c*x,y) \wedge \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x \alpha(x,y))$$
>
> где су прве две формуле елементарне формуле. Но, следећи низови симбола
>
> $\forall x \exists z \alpha(x,y,z)$, $\forall x \exists y(x*y=c)$ и $\forall x \alpha(x*y*z,c)$
>
> нису формуле над језиком $\mathcal{J}$. У првом низу симбол α је записан као релацијски симбол дужине 3, а α је по дефиницији релацијски симбол дужине 2. Низ симбола $\forall x \exists y(x*y=c)$ није формула над језиком $\mathcal{J}$ јер је у њему коришћен симбол који не припада том језику, симбол $=$. У трећем низу све је у реду са употребом релацијских и операцијских симбола, сви они су симболи језика $\mathcal{J}$ и њихова дужина одговара дефинисаној дужини тих симбола. Међутим, имамо низ симбола $x*y*z$ који може бити терм $(x*y)*z$, али и терм $x*(y*z)$, а та два терма (као низови симбола) нису једнака.

Као и свака исказна формула и свака предикатска формула има потформуле и скуп свих својих потформула. Наиме, и овде је формула једна реч над алфабетом (алфабетом предикатске логике одређеног његовим логичким делом $\mathcal{J}_l$ и неким језиком $\mathcal{J}$), те је свака њена подреч[2], која је и сама предикатска формула, једна потформула те формуле. Све потформуле неке предикатске формуле чине скуп потформула те формуле.

> Дефиниција скупа потформула неке формуле
>
> Скуп свих потформула формуле F, скуп $P_f(F)$, индуктивно дефинишемо на следећи начин:
> (1) сама формула F припада скупу $P_f(F)$;

---

[2] појам подречи у [3], прва глава

(2) ако је $A \wedge B \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$ и $B \in P_f(F)$;
ако је $A \vee B \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$ и $B \in P_f(F)$;
ако је $A \Rightarrow B \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$ и $B \in P_f(F)$;
ако је $\forall x A \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$;
ако је $\exists x A \in P_f(F)$, онда је $A \in P_f(F)$.

Посматрајмо формулу $\forall y((\alpha(c*x,y) \wedge \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x \alpha(x,y))$ из **Примера 2**. Скуп потформула те формуле је скуп:
$\{\forall y((\alpha(c*x,y) \wedge \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x \alpha(x,y)), (\alpha(c*x,y) \wedge \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x \alpha(x,y), \exists x \alpha(x,y), \alpha(x,y), \alpha(c*x,y) \wedge \alpha(c,c), \alpha(c*x,y), \alpha(c,c)\}$.

За неку формулу F важан је и број јављања њених потформула у њој, где се јављање потформуле A у формули F дефинише као јављање подречи[3] A у речи F. И овде, као и у исказној логици, правећи скуп свих потформула неке формуле не бележимо колико пута се нека потформула јавља у тој формули. Погледајмо предикатску формулу у следећем примеру.

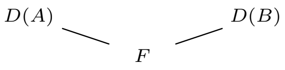
Пример 3 Нека је $\forall y((\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x(\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)))$ једна формула над језиком $\mathcal{J}$ из **Примера 2**, формула F. Свака од потформула $\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)$, $\alpha(x,y)$ и $\alpha(c,c)$ формуле F има два јављања у њој, а скуп свих њених потформула је:
$\{\forall y((\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x(\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c))), \ \alpha(x,y) \vee \alpha(c,c), \ \alpha(x,y), \alpha(c,c), \ (\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)) \Rightarrow \exists x(\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)), \ \exists x(\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c))\}$.

Да бисмо могли да, осим свих потформула неке формуле F, забележимо и сва јављања тих потформула, потребно је, као и у исказној логици, дефинисати дрво[4] формуле F.

Дефиниција дрвета неке формуле

(1) Ако је F елементарна формула, онда је дрво формуле F, $\mathcal{D}(F)$, чвор у коме је сама формула F.

(2) Ако је F облика $A \wedge B$, $A \vee B$, или $A \Rightarrow B$, онда је дрво формуле F, $\mathcal{D}(F)$:



где је $\mathcal{D}(A)$ дрво потформуле A и $\mathcal{D}(B)$ дрво потформуле B.

(3) Ако је F облика $\forall x A$ или $\exists x A$, онда је дрво формуле F, $\mathcal{D}(F)$:

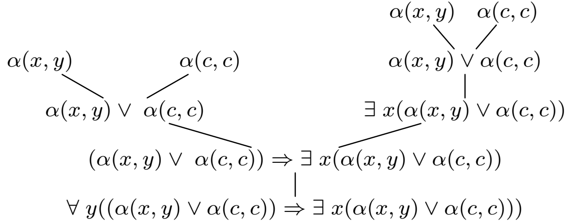
где је $\mathcal{D}(A)$ дрво потформуле A.

---

[3] појам јављања подречи у [3], прва глава

[4] појам дрвета у [3], прва глава

Дрво формуле F из Примера 3 је:



и у том дрвету су забележена сва јављања њених потформула $\alpha(x,y)$, $\alpha(c,c)$ и $\alpha(x,y) \vee \alpha(c,c)$, као и сва јављања свих других потформула те формуле F.

На крају овог одељка подсетимо се да смо у исказној логици дали дефиниције логичких везника $\Leftrightarrow$, $\neg$ и $\top$. Рецимо да и у предикатској логици имамо исте те дефиниције, али се наравно, у њима појављују предикатске формуле. Дакле, за неке предикатске формуле A и B, имамо:

$$A \Leftrightarrow B =_{def} (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
$$\neg A =_{def} A \Rightarrow \bot$$
$$\top =_{def} \bot \Rightarrow \bot.$$

Зато скуп логичких везника у делу $\mathcal{J}_l$ алфабета предикатске логике не мора да буде увек скуп $\{\bot, \wedge, \vee, \Rightarrow\}$, већ било која база логичких везника[5]. Надаље, говорићемо и о предикатским формулама облика $A \Leftrightarrow B$, $\neg A$ и $\top$, и нећемо увек напомињати да су оне начињене коришћењем дефиниција везника $\Leftrightarrow$, $\neg$ и $\top$.

1.1.2 Слободне и везане променљиве, супституција терама

У овом одељку дефинисаћемо важне појмове који се односе на променљиве и квантификаторе једне предикатске формуле. Већ смо рекли да је свака предикатска формула F над неким језиком $\mathcal{J}$ једна реч над алфабетом предикатске логике. Променљиву x, која се јавља у формули F, сматрамо једном подречи речи F. Зато променљива x, као свака подреч, може имати више јављања у тој речи, тј. формули F. Важно је свако јављање променљиве x у формули F.

Када будемо говорили о квантификаторима у некој формули увек ћемо мислити баш на симболе $\forall$ и $\exists$ из њених подречи облика $\forall x$ и $\exists x$, где је x једна променљива из скупа променљивих $\mathcal{V}$. Променљива x из таквих подречи $\forall x$ или $\exists x$ биће променљива уз квантификатор $\forall$ или $\exists$, а за те квантификаторе рећи ћемо да се односе на променљиву x.

Међу променљивима које се јављају у некој формули F разликоваћемо везане и слободне, а њих ћемо дефинисати помоћу појмова везаног и слободног јављања променљиве у формули F. За сада рецимо да за сваку формулу F, јављања променљиве x у њеним потформулама облика $\forall xA$ или $\exists xA$ јесу везана јављања променљиве x у F, а сва друга њена јављања у формули F су слободна. Покажимо то у наредном примеру.

---

[5] дефиниција базе логичких везника у [3], одељак 2.4.1

Пример 4 Имамо језик $\mathcal{J} = \{<, =, +, \circ, 0\}$, где су $<$ и $=$ два релацијска симбола оба дужине 2, $\circ$ и $+$ два операцијска симбола дужине 2 и 0 је константа. Погледајмо прво једну формулу над језиком $\mathcal{J}$ која нема квантификаторе, једну елементарну формулу:

$$0 + (z \circ x) < x + y.$$

Јављање сваке њене променљиве, тј. свако јављање променљивих x, y и z, је слободно јављање тих променљивих. И у општем случају, за било коју елементарну формулу над неким језиком важи да све њене променљиве имају само слободна јављања. Али, када се у формули појављују квантификатори онда променљиве могу имати и везана и слободна јављања. Погледајмо, над датим језиком $\mathcal{J}$, формулу F:

$$(\forall x(x < y)) \wedge z < 0.$$

У њој се јављају променљиве x, y и z и постоји само један квантификатор, универзални квантификатор $\forall$ који се односи на променљиву x. Имамо потформулу формуле F облика $\forall xA$, потформулу $\forall x(x{<}y)$, и сва јављања променљиве x у формули F су ова два везана јављања x у тој њеној потформули. Дакле, x има два везана јављања у формули F: уз квантификатор на почетку потформуле $\forall x(x{<}y)$ и јављање у њеној потформули $x{<}y$. Променљива y има једно јављање у формули F, у њеној потформули $\forall x(x{<}y)$ која је облика $\forall xA$, али квантификатор $\forall$ се не односи на променљиву y, па је то слободно јављање променљиве y у F. Такође, и јављање променљиве z јесте њено слободно јављање у формули F.

А сада ево и дефиниције.

Дефиниција слободних и везаних јављања променљиве у формули

(1) Ако је F елементарна формула, онда је свако јављање променљиве x у F једно слободно јављање променљиве x у формули F.

(2) Ако је F формула облика $A \wedge B$, $A \vee B$ или $A \Rightarrow B$, онда свако слободно јављање променљиве x у формули A или у формули B јесте једно слободно јављање променљиве x у формули F; а свако везано јављање променљиве x у A или у B јесте једно везано јављање променљиве x у формули F.

(3) Ако је F формула облика $\forall xA$ или $\exists xA$, онда

(3.1) за променљиву y различиту од x свако њено слободно јављање у A је једно слободно јављање променљиве y у формули F; а свако везано јављање y у A јесте једно везано јављање променљиве y у формули F;

(3.2) свако слободно јављање x у потформули A јесте једно везано јављање променљиве x у формули F и кажемо да је то јављање променљиве x под дејством квантификатора који је на почетку формуле F; и свако везано јављање x у A јесте једно везано јављање променљиве x у формули F;

(3.3) јављање променљиве x уз квантификатор који је на почетку формуле F јесте једно <u>везано јављање</u> x у формули F.

На основу ове дефиниције и дефиниција $\Leftrightarrow$ и $\neg$, за формуле $A \Leftrightarrow B$ (и $\neg A$) имамо: свако слободно јављање неке променљиве x у A или у B (у A) је слободно јављање x и у формули $A \Leftrightarrow B$ (у формули $\neg A$); а свако везано јављање неке променљиве x у A или у B (у A) је везано јављање x и у формули $A \Leftrightarrow B$ (у формули $\neg A$). Користећи појмове везаног и слободног јављања променљивих у некој формули, дефинишемо њене слободне и везане променљиве.

<u>Дефиниција слободних и везаних променљивих</u>

Променљива x је <u>слободна променљива</u> <u>формуле</u> F ако x има бар једно слободно јављање у F. Променљива x је <u>везана променљива</u> <u>формуле</u> F ако x има бар једно везано јављање у F.

Све променљиве елементарне формуле $0 + (z \circ x) < x + y$ из нашег Примера 4, као и било које друге елементарне формуле, су увек слободне променљиве те формуле. Међутим, формула F из тог примера, формула са квантификаторима, има везану променљиву x, а њене слободне променљиве су y и z. Но, погледајмо и следећи пример.

Пример 5   Одредимо слободне и везане променљиве формуле F:

$$\forall x(0 < (x + y) \wedge \exists y(y < 0))$$

која је формула над језиком $\mathcal{J}$ из Примера 4. У формули F имају јављања променљиве x и y, и то променљива x има два јављања, а y има три јављања. Оба јављања променљиве x у F су везана. Што се тиче јављања променљиве y у F имамо следеће: два њена јављања, она у потформули $\exists y(y < 0)$ су везана, а њено јављање у потформули $0 < (x+y)$ је слободно јављање те променљиве у формули F. Дакле, x је везана, а y је и везана и слободна променљива формуле F.

По дефиницији, а видимо то и из Примера 5, једна променљива неке формуле може бити истовремено њена и везана и слободна променљива. Одмах се намеће питање: да ли то може да се избегне, па да свака променљива буде или само слободна или само везана? Одговор је: ДА. У било којој формули F можемо урадити преименовање њене везане променљиве x тако што у свакој њеној потформули облика $\forall xA$ или $\exists xA$ сва јављања x (која су, наравно, сва везана) заменимо неком другом променљивом која се не јавља у тој формули F. (Полазна формула F и формула која је добијена овим преименовањем су и семантички и синтаксно еквивалентне (видећемо то у Задатку 4 из одељка 1.2.2 и Примеру 5 из одељка 2.1.1).) Зато у потформули $\exists y(y < 0)$ наше формуле F из Примера 5 оба јављања њене везане променљиве y можемо да заменимо неком, потпуно новом променљивом, која се не јавља у формули F, на пример променљивом z. Тако добијамо формулу F':

$$\forall x(0 < (x + y) \wedge \exists z(z < 0))$$

у којој се јављају променљиве x, y и z, и сва јављања променљивих x и z су везана, а сва јављања (постоји само једно) променљиве y су слободна. Дакле, за све променљиве формуле F' важи да су им сва јављања исте врсте, или везана или слободна, па су x и z само везане, а y само слободна променљива те формуле. И увек, за било коју формулу F, ако је нека променљива x њена и слободна и везана променљива, онда у свакој њеној потформули облика $\forall xA$ или $\exists xA$ можемо сва јављања променљиве x да заменимо неком новом променљивом која се не јавља у формули F. На тај начин добијамо формулу којој је променљива x само слободна променљива.

За произвољну предикатску формулу F све њене слободне променљиве и само оне, чине скуп слободних променљивих те формуле, скуп $SP(F)$.

Приметимо да слободне и везане променљиве можемо дефинисати и не користећи појмове слободних и везаних јављања променљивих. Наиме, скуп слободних променљивих неке формуле F, скуп $SP(F)$, можемо дефинисати овако: ако је F елементарна формула, онда све променљиве које се јављају у формули F припадају $SP(F)$; ако је F формула облика $A \wedge B$, $A \vee B$ или $A \Rightarrow B$, онда је $SP(F)$ скуп $SP(A) \cup SP(B)$; ако је F формула облика $\forall xA$ или $\exists xA$, онда је $SP(F)$ скуп $SP(A) \setminus \{x\}$. Из ове дефиниције и уз помоћ дефиниција везника $\Leftrightarrow$ и $\neg$ добијамо још да је $SP(A \Leftrightarrow B) = SP(A) \cup SP(B)$ и $SP(\neg A) = SP(A)$. Сада, користећи ову дефиницију појма скупа слободних променљивих, кажемо: слободна променљива неке формуле F је свака њена променљива која припада скупу $SP(F)$; а ако за променљиву x постоји потформула формуле F облика $\forall xA$ или $\exists xA$ за коју важи $x \in SP(A)$, онда је x везана променљива те формуле F. Овако дефинисане слободне и везане променљиве неке формуле су баш оне и само оне које су одређене нашом дефиницијом помоћу слободних и везаних јављања. Можемо лако проверити да из наше дефиниције скупа слободних променљивих формуле F, $SP(F)$, следе једнакости из ове друге дефиниције тог појма, као особине $SP(F)$ у зависности од облика формуле F.

Скуп слободних променљивих формуле F из Примера 5, скуп $SP(F)$, је $\{y\}$, а њене везане променљиве чине скуп $\{x, y\}$. За формулу F', која је настала преименовањем везаних јављања y у формули F са z, скуп слободних променљивих је $\{y\}$, а скуп њених везаних променљивих је $\{x, z\}$, и видимо да су ти скупови дисјунктни.

Предикатске формуле које немају слободних променљивих зовемо реченице (или затворене формуле). Ако формула F није реченица и $x_1, ..., x_n$ су све њене слободне, међусобно различите, променљиве, онда је реченица $\forall x_1 ... \forall x_n F$ затворење формуле F. Ако је F реченица, онда је она сама своје затворење.

Надаље, за неку формулу F означаваћемо са $F(x_1, ..., x_n)$ да су $x_1, ..., x_n$ њене слободне променљиве. То међутим, неће значити да формула F нема и неке друге слободне променљиве, нити да $x_1, ..., x_n$ нису и везане променљиве формуле F. Одмах истакнимо велики значај слободних променљивих. Када будемо говорили о вредности предикатских формула, односно о семантици предикатске логике, слободне променљиве ће бити у главној улози. Наиме, вредност (истинита или лажна) било које предикатске формуле зависи од вредности њених слободних променљивих. Променом вредности слободне променљиве једне формуле може се променити и вредност те формуле.

Осим тога, слободне променљиве су важне и у синтакси предикатске логике. Користићемо формуле које настају од дате формуле поступком замене неке променљиве једним термом. Тим поступком у датој формули само слободне променљиве (тачније, слободна јављања променљивих) биће замењиване термом. Јер ако је у формули нека променљива z само везана, онда ће нова формула, која настаје заменом те променљиве z неким термом, бити просто сама та формула. Поступак замењивања, видећемо то у дефиницији, захтева и да формула, њена слободна променљива и терм којим замењујемо ту променљиву задовољавају одређени услов. Пре те дефиниције, на примерима замене променљиве разним термима, објаснићемо тај услов, а замене које га испуњавају биће исправне замене.

Пример 6 Имамо језик $\mathcal{J} = \{\alpha, *, c\}$ из **Примера 2** и предикатску формулу над тим језиком, формулу F:

$$\forall y \alpha(y * c, x) \vee \alpha(x, c)$$

са једном слободном променљивом, променљивом x, која има два слободна јављања у F. Замењујемо x неким термом t тако што се сва њена слободна јављања замене тим термом t. Терм t може имати различите облике.

Замена, која то у ствари и није, замена променљиве x термом који је сама та променљива x јесте исправна замена. Формулу коју добијамо том заменом x са x је сама формула F. Даље, ако слободну променљиву заменимо термом који нема променљивих (такве терме зовемо затворени терми) опет вршимо исправну замену. На пример, у посматраној формули F променљиву x замењујемо затвореним термом $(c * c) * c$ и добијамо формулу:

$$\forall y \alpha(y * c, (c * c) * c) \vee \alpha((c * c) * c, c)$$

која је настала исправном заменом. Још једна исправна замена је да се у формули слободна променљива замени термом чија ниједна променљива нема јављања у тој формули. У нашој формули F променљиву x замењујемо термом $z_1 * z_2$, добијамо формулу:

$$\forall y \alpha(y * c, z_1 * z_2) \vee \alpha(z_1 * z_2, c)$$

и она је настала исправном заменом.

А какву замену сматрамо неисправном? Па, неисправна замена је када променљиву x у нашој формули F заменимо, на пример, термом $y * z$. Том заменом добијамо формулу F':

$$\forall y \alpha(y * c, y * z) \vee \alpha(y * z, c)$$

у којој је променљива y терма $y * z$ под дејством квантификатора $\forall$, тј. променљива y терма $y * z$ је везана променљива формуле F'.

Питамо се како се у некој формули F врше исправне замене њене слободне променљиве x? Покажимо то на овој нашој формули F.

> Слободна промењива x формуле F има слободно јављање у њеној потформули $\forall y\alpha(y * c, x)$, потформули облика $\forall yA$. Зато сваки терм t, којим хоћемо да заменимо промењиву x, не сме да има промењиву y, јер би том заменом његова промењива дошла под дејство квантификатора $\forall$ и постала везана промењива формуле која настаје том заменом.

У општем случају за произвољну формулу F, њену слободну промењиву x и неки терм t овај захтев из Примера 6 има следећи облик: ни за једну промењиву y терма t не постоји потформула формуле F облика $\forall yA$ таква да је x слободна промењива формуле A. Ако је овај захтев испуњен, онда кажемо да је терм t слободан за промењиву x у формули F. Баш то, да је један терм t слободан за неку промењиву x у формули F је поменути услов који је потребан, да би та слободна промењива x формуле F могла да буде замењена тим термом t. Дефинишимо прво како у терму замењујемо промењиву неким термом.

Дефиниција терма добијеног заменом промењиве

Терм добијен заменом промењиве x термом s у терму t означава се t^x_s, а индуктивно се дефинише на следећи начин:

(1) (1.1) ако је терм t индивидуална константа c, онда је t^x_s терм c;

(1.2) ако је t индивидуална промењива y, $y \neq x$, онда је t^x_s терм y;

(1.3) ако је терм t индивидуална промењива x, онда је t^x_s терм s;

(2) ако је терм t облика $f(t_1, ..., t_n)$, где су $t_1, ..., t_n$ терми и f операцијски симбол језика $\mathcal{J}$ дужине n, онда је t^x_s терм $f({t_1}^x_s, ..., {t_n}^x_s)$.

А сада ево и поменуте дефиниције о замењивању промењиве неким термом у формули.

Дефиниција формуле добијене заменом промењиве

Формула добијена заменом промењиве x термом t у формули F означава се F^x_t, а индуктивно се дефинише на следећи начин:

(1) ако је F нуларни логички везник $\perp$, онда је $\perp^x_t$ формула $\perp$;

(2) ако је F облика $\rho(t_1, ..., t_n)$, онда је F^x_t формула $\rho({t_1}^x_t, ..., {t_n}^x_t)$;

(3) (3.1) ако је F облика $A \wedge B$, онда је F^x_t формула $A^x_t \wedge B^x_t$;

(3.2) ако је F облика $A \vee B$, онда је F^x_t формула $A^x_t \vee B^x_t$;

(3.3) ако је F облика $A \Rightarrow B$, онда је F^x_t формула $A^x_t \Rightarrow B^x_t$;

(4) (4.1) ако је F облика $\forall xA$ или $\exists xA$, онда је F^x_t формула F;

(4.2) ако је F облика $\forall yA$, промењива x је различита од y и терм t је слободан за x у формули F, онда је F^x_t формула $\forall yA^x_t$;

(4.3) ако је F облика $\exists yA$, промењива x је различита од y и терм t је слободан за x у формули F, онда је F^x_t формула $\exists yA^x_t$.

Када је x само везана променљива формуле F (тј. сва јављања променљиве x у F су везана као у (4.1)) или x нема јављања у F, онда је формула која настаје заменом променљиве x неким термом t у тој формули F просто сама формула F.

1.2 Семантика предикатске логике

У овом поглављу бавићемо се значењем предикатских формула. Као и у случају исказних формула, тако и за сваку предикатску формулу главно питање ће бити која је њена вредност (од две могуће вредности), односно да ли је та формула истинита или лажна (неистинита).

1.2.1 Модели језика и интерпретације формула

У поступку одређивања истиносне вредности неке исказне формуле (на пример у [3]) сва њена исказна слова валуацијама добијају вредност (интерпретирају се) или истинито: 1, или лажно: 0. Затим се, за те валуације исказних слова посматране формуле, помоћу функције интерпретације, рачуна вредност те формуле.

Пут до вредности (истиносне ведности) предикатске формуле (истинита или лажна) је другачији. За неку предикатску формулу F прво треба знати језик $\mathcal{J}$ над којим је та предикатска формула направљена и дати један његов модел, тј. једну интерпретацију свих симбола тог језика. Наиме, прво треба изабрати једну релацијско-операцијску структуру[6] коју чине непразан скуп S, неке релације између његових елемената и операције на његовим елиментима. Та структура ће бити модел језика $\mathcal{J}$. Дакле, прво треба изабрати непразан скуп S, који зовемо носач (или домен). Потом, симболе језика $\mathcal{J}$ интерпретирати овако: сваки релацијски симбол ρ језика $\mathcal{J}$ дужине m интерпретира се тачно једном релацијом исте дужине m над скупом S; сваки операцијски симбол f језика $\mathcal{J}$ дужине n интерпретира се тачно једном операцијом из скупа S^n у скуп S; и на крају свака индивидуална константа језика $\mathcal{J}$ је тачно један елемент из S (тј. интерпретирана је једном нуларном операцијом). Осим тога, све променљиве из скупа променљивих $\mathcal{V}$ биће интерпретиране елементима носача S, тј. свака променљива ће, као своју вредност, добити један елемент из скупа S.

Ево одмах примера.

> **Пример 1** Имамо језик $\mathcal{J}=\{\alpha, *, c\}$, где су α релацијски, а $*$ операцијски симбол, оба дужине 2 и c индивидуална константа. За носач бирамо скуп природних бројева $\mathbf{N}$. То значи да променљиве из скупа $\mathcal{V}$ и константе језика $\mathcal{J}$, константа c, узимају вредности из

---

[6] појам релацијско-операцијске структуре у [3], прва глава

скупа природних бројева. Један модел језика $\mathcal{J}$ направићемо овом интерпретацијом његових симбола: релацијски симбол α интерпретирамо бинарном релацијом једнакости $=$ природних бројева, операцијски симбол $*$ бинарном операцијом сабирање, $+ : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$, а константа c нека је природан број 1. Релацијско-операцијска структура $(\mathbf{N}, =, +, 1)$ је, по дефиницији која следи, један модел нашег језика $\mathcal{J} = \{\alpha, *, c\}$.

Дефиниција модела $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ језика $\mathcal{J}$

Један модел датог језика $\mathcal{J}$ је релацијско-операцијска структура чији носач је неки непразан скуп S, а релације и операције одређене додељивањем (функцијом) $I^{\mathcal{J}}$ дефинисаним на следећи начин:

(1) сваком релацијском симболу (предикату) ρ језика $\mathcal{J}$, чија дужина је m, одговара тачно једна релација дужине m на скупу S, $\rho_I \subseteq \mathrm{S}^m$, тј. $I^{\mathcal{J}}(\rho) = \rho_I$;

(2) сваком операцијском (функцијском) симболу f језика $\mathcal{J}$, чија дужина је n, одговара тачно једна операција (функција) f_I дужине n, f_I:$\mathrm{S}^n \rightarrow \mathrm{S}$, тј. $I^{\mathcal{J}}(f) = f_I$;

(3) свакој индивидуалној константи c језика $\mathcal{J}$ одговара тачно један елемент c_I скупа S, тј. $I^{\mathcal{J}}(c) = c_I$.

Тај модел језика $\mathcal{J}$ означавамо $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$, а скуп S зовемо носач (или домен) модела $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$.

Посебно, ако је језик $\mathcal{J}$ дат скупом $\{\rho_1, ..., \rho_k, f_1, ..., f_m, c_1, ..., c_n\}$, где су k, m и n неки природни бројеви, онда ћемо модел $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ записивати и овако: $(\mathrm{S}, \rho_{1I}, ..., \rho_{kI}, f_{1I}, ..., f_{mI}, c_{1I}, ..., c_{nI})$.

У Примеру 1 дат је један модел језика $\mathcal{J} = \{\alpha, *, c\}$, модел $(\mathbf{N}, =, +, 1)$. Означимо са $\mathbf{Z}$ скуп целих, а са $\mathbf{R}$ скуп реалних бројева. (Те ознаке за целе и реалне бројеве користићемо и надаље.) Онда су релацијско-операцијске структуре $(\mathbf{Z}, \leq, \cdot, -1)$ и $(\mathbf{R}, <, \cdot, 0)$ исто тако модели језика $\mathcal{J} = \{\alpha, *, c\}$. Али, на пример, релацијско-операцијска структура $(\mathbf{R}, =, <, 0)$ није модел језика $\mathcal{J}$ јер је у тој структури операцијски симбол $*$ дужине 2 језика $\mathcal{J}$ интерпретиран бинарном релацијом $<$!

Када за неки језик $\mathcal{J}$ имамо један његов модел $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$, онда, рекли смо то, и елементима скупа променљивих $\mathcal{V}$ додељујемо вредности из носача тог модела, скупа S. Функција $\imath : \mathcal{V} \rightarrow \mathrm{S}$, која свакој променљивој из $\mathcal{V}$ додељује елемент из носача S је једна интерпретација променљивих у носачу S модела $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ и ми ћемо је звати једна п-интерпретација $\imath$. (Најчешће, додељивање вредности из носача модела елементима скупа променљивих нема посебно име. На пример у [13], свако додељивање вредности елементима скупа променљивих $\mathcal{V}$, редом $x_1, x_2, ...$, дато је једним низом $s = (b_1, b_2, ...)$, где је $b_k \in \mathrm{S}$, $k \in \{1, 2, ...\}$.) Ако за п-интерпретацију $\imath$, променљиву x и неки елемент d носача S важи $\imath(x) = d$, онда је d вредност променљиве x у п-интерпретацији $\imath$.

Заједно, један модел $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ неког језика $\mathcal{J}$ и једна п-интерпретација $\imath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, јесу једна интерпретација $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$, интерпретација $I_\imath$.

За одређену интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ можемо одговорити на питање: како се одређује вредност терма или предикатске формуле (над датим језиком $\mathcal{J}$) у тој интерпретацији? Почнимо са интерпретацијом терма. Један терм t над језиком $\mathcal{J}$ чине променљиве и константе повезане операцијским симболима. У интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ вредност сваке променљиве тог терма t је онај елемент из носача S који јој је придружен п-интерпретацијом $\imath$; вредност сваке његове индивидуалне константе и операцијског симбола је редом елемент носача S и конкретна операција над елементима носача S у које су се та константа и операцијски симбол сликали функцијом $I^{\mathcal{J}}$. Према томе, вредност терма у једној интерпретацији $I_\imath$ је резултат одређених операција над елементима носача S, тј. то је неки елемент носача S. Баш то и каже дефиниција која следи, дефиниција вредности терма у некој интерпретацији.

Дефиниција вредности терма у интерпретацији

Вредност(или значење) терма t у интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ одређеној моделом $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ језика $\mathcal{J}$ и п-интерпретацијом $\imath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, означавамо са $I_\imath(t)$ и дефинишемо на следећи начин:

◇ ако је терм t нека променљива x, онда је $I_\imath(t) = \imath(x)$;

◇ ако је терм t нека константа c, онда је $I_\imath(t) = c_I$;

◇ ако је терм t облика $f(t_1, ..., t_n)$, где су $t_1, ..., t_n$ терми и f операцијски симбол језика $\mathcal{J}$ дужине n, онда је $I_\imath(t) = f_I(I_\imath(t_1), ..., I_\imath(t_n))$.

Погледајмо један пример.

Пример 2 Наведимо неколико терама на језику $\mathcal{J} = \{*, c\}$, где је $*$ операцијски симбол дужине 2, а c индивидуална константа:

$$x, \quad c, \quad (c * x) * y \quad \text{и} \quad ((c * x) * c) * y.$$

Потражимо вредност тих терама у интерпретацији $I_\imath$ која је одређена моделом $(\mathbf{N}, +, 1)$ језика $\mathcal{J}$ и п-интерпретацијом $\imath : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$ за коју је $\imath(x) = 3$ и $\imath(y) = 5$. Вредности тих терама су неки елементи носача модела, скупа природних бројева $\mathbf{N}$:

$$I_\imath(x) = \imath(x) = 3, \qquad I_\imath(c) = c_I = 1,$$

$$I_\imath((c*x)*y) = I_\imath(c*x) + I_\imath(y) = (I_\imath(c) + I_\imath(x)) + I_\imath(y) = (1+3)+5 = 9,$$

$$\begin{aligned} I_\imath(((c*x)*c)*y) &= I_\imath((c*x)*c) + I_\imath(y) = ((I_\imath(c) + I_\imath(x)) + I_\imath(c)) + I_\imath(y) \\ &= ((1+3)+1)+5 = 10. \end{aligned}$$

Вредност терма у произвољној интерпретацији није: истинит или неистинит. У свакој интерпретацији истинита или неистинита је предикатска формула. Пре него што дамо дефиницију вредности предикатске формуле у некој интерпретацији, дефинишимо једну релацију између п-интерпретација. Ако за модел $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ језика $\mathcal{J}$, променљиву x из скупа променљивих $\mathcal{V}$ и две п-интерпретације $\imath, \jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$ важи: $\imath(y)$ је једнако $\jmath(y)$ за све променљиве y из скупа $\mathcal{V}$ осим можда када је y баш променљива x, онда су $\imath$ и $\jmath$ у релацији $\simeq_x$, тј. $\imath \simeq_x \jmath$. Јасно је да је $\simeq_x$ једна релација еквиваленције[7] над скупом свих п-интерпретација из скупа променљивих $\mathcal{V}$ у носач S.

Дефиниција вредности предикатске формуле у интерпретацији

Вредност (или истиносну вредност) предикатске формуле F у некој интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ одређеној моделом $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ језика $\mathcal{J}$ и п-интерпретацијом $\imath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, означавамо са $I_\imath(F)$ и дефинишемо овако:

- ◇ ако је F елементарна формула $\perp$, онда је $I_\imath(\perp) = 0$;
- ◇ ако је F елементарна формула облика $\rho(t_1, ..., t_n)$,
  онда је $I_\imath(\rho(t_1, ..., t_n)) = \rho_I(I_\imath(t_1), ..., I_\imath(t_n))$;
- ◇ ако је F формула облика $A \wedge B$,
  онда је $I_\imath(A \wedge B) = min(I_\imath(A), I_\imath(B))$;
- ◇ ако је F формула облика $A \vee B$,
  онда је $I_\imath(A \vee B) = max(I_\imath(A), I_\imath(B))$;
- ◇ ако је F формула облика $A \Rightarrow B$,
  онда је $I_\imath(A \Rightarrow B) = max(1 - I_\imath(A), I_\imath(B))$;
- ◇ ако је F формула облика $\forall x A$, онда је
  $I_\imath(\forall x A) = 1$ када за сваку $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$ важи $I_\jmath(A) = 1$,
  иначе је $I_\imath(\forall x A) = 0$;
- ◇ ако је F формула облика $\exists x A$, онда је
  $I_\imath(\exists x A) = 1$ када постоји $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$ за коју је $I_\jmath(A) = 1$,
  иначе је $I_\imath(\exists x A) = 0$.

Ако за интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ и формулу F важи $I_\imath(F) = 1$, онда кажемо да је формула F истинита у тој интерпретацији $I_\imath$ (или да $I_\imath$ задовољава формулу F). А ако је $I_\imath(F) = 0$, онда је формула F неистинита (лажна) у тој интерпретацији (тј. $I_\imath$ не задовољава формулу F).

Приметимо да вредност сваке од предикатских формула $A \wedge B$, $A \vee B$ и $A \Rightarrow B$ зависи од вредности њених потформула A и B на исти начин као и вредности исказне формуле тог облика од њених одговарајућих потформула (видети 2.2.1 у [3]). Осим тога, дефиниције везника $\top$, $\neg$ и $\Leftrightarrow$ из 1.1.1 дају да из исказне логике преузимамо и начин одређивања вредности формула облика $\top$, $\neg A$ и $A \Leftrightarrow B$, тј. за неку интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ и предикатску формулу F важи:

- ◇ ако је F формула $\top$, онда је $I_\imath(\top) = 1$;
- ◇ ако је F формула облика $\neg A$, онда је $I_\imath(\neg A) = 1 - I_\imath(A)$;

---

[7] појам релације еквиваленције у [3], прва глава

$\diamond$ ако је F формула облика $A \Leftrightarrow B$, онда је $I_\imath(A \Leftrightarrow B) = 1$, када је $I_\imath(A) = I_\imath(B)$; иначе је $I_\imath(A \Leftrightarrow B) = 0$.

Истакнимо да ако је променљива x слободна променљива формуле F, онда за једну интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ вредност $I_\imath(F)$ зависи од вредности $\imath(x)$, тј. $I_\imath(x)$. Наиме, за неку другу интерпретацију $I_\jmath = (\mathcal{I}, \jmath)$ са истим моделом $\mathcal{I}$ језика $\mathcal{J}$, којом слободна променљива x добија вредност $\jmath(x)$ различиту од $\imath(x)$, вредност $I_\jmath(F)$, може бити различита од вредности $I_\imath(F)$. Али, ако је формула F реченица, тј. формула која нема слободних променљивих, онда у свакој интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ вредност $I_\imath(F)$ зависи само од модела $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ језика $\mathcal{J}$, а не и од п-интерпретације $\imath$. У ствари важи следеће својство: за неку интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ и формулу F вредност $I_\imath(F)$ зависи само од вредности слободних променљивих формуле F у п-интерпретацији $\imath$. Ово ћемо доказати у ЛЕМИ 2. Прво на примерима објаснимо одређивање вредности предикатских формула облика $\forall x A$ и $\exists x A$ у некој интерпретацији.

Пример 3 Посматрајмо језик $\mathcal{J} = \{\alpha, *, c\}$ из **Примера 1** и ове три предикатске формуле над тим језиком:

$$\forall x \alpha(c, x) \qquad \exists x \alpha(x, c) \qquad \text{и} \qquad \forall x \alpha(x, x * c).$$

(1) Одредимо вредност посматраних предикатских формула у интерпретацији $I_\imath$ која је дата моделом $(\{0, 1, 2\}, \leq, +, 0)$ језика $\mathcal{J}$ и неком п-интерпретацијом $\imath : \mathcal{V} \to \{0, 1, 2\}$.

Интерпретација $I_\imath$ прве формуле је: $\qquad \forall x \ (0 \leq x)$.

На основу дефиниције вредности формуле облика $\forall x A$ у некој интерпретацији, имамо следеће: ако хоћемо да је $I_\imath(\forall x \alpha(c, x)) = 1$, онда мора бити $I_\jmath(\alpha(c, x)) = 1$ за све п-интерпретације $\jmath$, $\jmath : \mathcal{V} \to \{0, 1, 2\}$, за које важи $\jmath \simeq_x \imath$. За сваку п-интерпретацију $\jmath$, па и сваку од тих п-интерпретација $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$, интерпретација $I_\jmath$ формуле $\alpha(c, x)$ је $0 \leq \jmath(x)$, где је $\jmath(x)$ неки елемент из носача модела $\{0, 1, 2\}$. Зато, ако за све $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$ мора бити $I_\jmath(\alpha(c, x)) = 1$, то значи да мора бити истинито $0 \leq d$ за све $d \in \{0, 1, 2\}$, тј. мора бити истинито: $0 \leq 0$ и $0 \leq 1$ и $0 \leq 2$. Дакле,

$$I_\imath(\forall x \alpha(c, x)) = 1$$

ако и само ако $\quad I_\jmath(\alpha(c, x)) = 1$ за сваку $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$

ако и само ако $\quad 0 \leq 0$ и $0 \leq 1$ и $0 \leq 2$.

Сликовито речено, квантификатор $\forall$ се представља помоћу логичког везника конјункције. Наиме, ако имамо формулу $\forall x A$, онда правимо све могуће интерпретације $I_\jmath$ формуле A тако што променљива x п-интерпретацијама $\jmath$ узима све вредности из носача модела. И формула $\forall x A$ је истинита када су истините све те интерпретације формуле A, тј. када је истинита конјункција тих интерпретација. Јасно је да тих интерпретација формуле A има колико и елемената носача. Када је тај носач коначан скуп, као у овом нашем примеру, онда имамо коначно много њих повезаних конјункцијама, тј. имамо, да то тако назовемо, коначну конјункцију. У овом нашем примеру коначна конјункција, конјункција $0 \leq 0$ и $0 \leq 1$ и $0 \leq 2$, је истинита, стога закључујемо да је формула $\forall x \alpha(c, x)$ истинита у интерпретацији $I_\imath{=}((\{0,1,2\}, \leq, +, 0), \imath)$.

Приметимо да одређивање вредности наше формуле $\forall x \alpha(c, x)$ у интерпретацији $((\{0,1,2\}, \leq, +, 0), \imath)$ није зависило од избора п-интерпретације $\imath$. Наиме, та формула, а и остале формуле из овог примера су реченице, зато вредности тих формула у некој интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ зависе само од избора модела $\mathcal{I}$ језика $\mathcal{J}$. Дакле, за модел $\mathcal{I} = (\{0,1,2\}, \leq, +, 0)$ језика $\mathcal{J}$ вредности тих формула у свим интерпретацијама $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ су једнаке. У делу (2) посматраћемо други модел језика $\mathcal{J}$, али прво, одредимо вредност преостале две формуле у интерпретацији $I_\imath = ((\{0,1,2\}, \leq, +, 0), \imath)$.

Интерпретација $I_\imath$ друге формуле је $\quad \exists x\ (x \leq 0)$.

Ако хоћемо да је $I_\imath(\exists x \alpha(x, c)){=}1$, онда је, по дефиницији вредности формуле облика $\exists x A$ у некој интерпретацији, довољно да нађемо бар једну п-интерпретацију $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$, за коју важи $I_\jmath(\alpha(x, c)) = 1$. За сваку п-интерпретацију $\jmath$ (те и оне са особином $\jmath \simeq_x \imath$) интерпретација $I_\jmath$ формуле $\alpha(x, c)$ је $\jmath(x) \leq 0$, где је $\jmath(x)$ неки елемент из $\{0,1,2\}$. Дакле, да би било $I_\imath(\exists x \alpha(x, c)) = 1$, мора да је за бар један елемент d из $\{0,1,2\}$ истинито $d \leq 0$, тј. мора да је истинито: $0 \leq 0$ или $1 \leq 0$ или $2 \leq 0$. Видимо да, како је квантификатор $\forall$ повезан са конјункцијом, тако је квантификатор $\exists$ повезан са дисјункцијом: формула облика $\exists x A$ је истинита када је истинита бар једна од свих могућих интерпретација формуле A (које добијамо тако што x узима све могуће вредности из носача модела језика $\mathcal{J}$, овде скупа $\{0,1,2\}$), тј. када је истинита њихова дисјункција. У нашем примеру та дисјункција је коначна и само је $0 \leq 0$ истинито. Значи, за неку п-интерпретацију $\jmath_0$, $\jmath_0 {\simeq_x} \imath$, која слика x у 0, имамо $I_{\jmath_0}(\alpha(x, c)){=}1$. Дакле, постоји п-интерпретација $\jmath$, $\jmath {\simeq_x} \imath$, за коју је $I_\jmath(\alpha(x, c)) = 1$, те важи $I_\imath(\exists x \alpha(x, c)) = 1$. Стога формула $\exists x \alpha(x, c)$ јесте истинита у интерпретацији $I_\imath{=}((\{0,1,2\}, \leq, +, 0), \imath)$.

Интерпретација $I_\imath$ треће формуле је $\quad \forall x\ (x \leq x + 0)$.

Као и код прве формуле, да би формула $\forall x \alpha(x, x * c)$ била истинита у интерпретацији $I_\imath$ мора бити истинита ова конјункција: $0{\leq}0+0$ и $1 \leq 1 + 0$ и $2 \leq 2 + 0$, а она јесте истинита. Дакле, добијамо да је $I_\imath(\forall x \alpha(x, x * c)) = 1$ тј. формула $\forall x \alpha(x, x * c)$ је истинита у интерпретацији $I_\imath{=}((\{0,1,2\}, \leq, +, 0), \imath)$.

(2) Одредимо вредност посматраних предикатских формула у интерпретацији $I_\imath$ која је дата моделом $(\mathbf{N}, <, +, 2)$ језика $\mathcal{J}$ и неком п-интерпретацијом $\imath : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$.

За истинитост формуле $\forall x \alpha(c, x)$ у интерпретацији $I_\imath$, потпуно исто као и у (1), мора бити истинито $2 < \jmath(x)$, за све вредности $\jmath(x)$ из носача $\mathbf{N}$, тј. мора бити истинито: $2 < 0$ и $2 < 1$ и $2 < 2$ и $2 < 3$ и ... (Ово је један низ конјункција, и то бесконачан, јер је бесконачан и носач модела.) Имамо да су њена прва три члана неистинита, па закључујемо да је $I_\imath(\forall x\alpha(c,x)) = 0$ тј. формула $\forall x\alpha(c,x)$ није истинита у интерпретацији $I_\imath=((\mathbf{N},<,+,2),\imath)$.

Што се тиче истинитости формуле $\exists x\alpha(x,c)$ у интерпретацији $I_\imath$, као и у делу (1), мора бити истинито: $0<2$ или $1<2$ или $2<2$ или $3<2$ или ... (Сада, у случају квантификатора $\exists$, посматрамо низ дисјункција и он је бесконачан, јер је такав и носач модела.) Имамо да су прва два члана истинита, па за п-интерпретацију $\jmath_0$, $\jmath_0\simeq_x\imath$, која x слика у 0 (или 1) важи $I_{\jmath_0}(\alpha(x,c))=1$. Дакле, постоји п-интерпретација $\jmath$, $\jmath\simeq_x\imath$, за коју је $I_\jmath(\alpha(x,c))=1$, те формула $\exists x\alpha(x,c)$ јесте истинита у интерпретацији $I_\imath=((\mathbf{N},<,+,2),\imath)$.

На крају, интерпретација $I_\imath$ треће формуле је: $\forall x\ (x<x+2)$.

За њену вредност у тој интерпретацији $I_\imath$ потребно је одредити вредност $I_\jmath(\alpha(x,x*c))$ за све п-интерпретације $\jmath:\mathcal{V}\to \mathrm{S}$, $\jmath\simeq_x\imath$. Дакле, потребно је испитати истинитост свих формула $d<d+2$, где је d вредност променљиве x ма којом $\jmath$, $\jmath\simeq_x\imath$ (што значи да d може бити било који природан број). У ствари, потребно испитати истинитост: $0<0+2$ и $1<1+2$ и $2<2+2$ и ... Сваки члан овог низа конјункција је истинит, тј. $I_\jmath(\alpha(x,x*c))=1$ за све п-интерпретације $\jmath$, $\jmath\simeq_x\imath$, стога је и $I_\imath(\forall x\alpha(x,x*c))=1$. Дакле формула $\forall x\alpha(x,x*c)$ је истинита у интерпретацији $I_\imath=((\mathbf{N},<,+,2),\imath)$.

Погледајмо још један пример.

Пример 4 Посматрајмо над језиком $\mathcal{J}=\{\alpha,*,c\}$ из **Примера 3** једну формулу која има слободних променљивих, формулу F:

$$\forall x\alpha(x,x*y)$$

са слободном променљивом y. Нека је познат модел језика $\mathcal{J}$, модел $(\mathbf{Z},<,+,0)$. За сваку, тј. произвољну п-интерпретацију $\imath$, $\imath:\mathcal{V}\to\mathbf{Z}$, интерпретација $((\mathbf{Z},<,+,0),\imath)$ посматране формуле је

$$\forall x\ (x<x+\imath(y)).$$

Да бисмо одредили вредност формуле F у некој интерпретацији $I_\imath=((\mathbf{Z},<,+,0),\imath)$ морамо знати вредност $\imath(y)$. Узмимо прво интерпретацију $I_{\imath_1}=((\mathbf{Z},<,+,0),\imath_1)$, такву да њена п-интерпретација $\imath_1$, $\imath_1:\mathcal{V}\to\mathbf{Z}$, променљиву y слика у 0, $\imath_1(y)=0$. Интерпретација $I_{\imath_1}$ формуле F је $\forall x\,(x<x+0)$. Дакле, наша формула F је неистинита у интерпретацији $I_{\imath_1}$. А сада узмимо $I_{\imath_2}=((\mathbf{Z},<,+,0),\imath_2)$, са п-интерпретацијом $\imath_2$, $\imath_2:\mathcal{V}\to\mathbf{Z}$, $\imath_2(y)=1$. Интерпретација $I_{\imath_2}$ формуле F је $\forall x\,(x<x+1)$, па имамо да је формула F истинита у тој интерпретацији $I_{\imath_2}$. Видимо да посматрана формула $\forall x\alpha(x,x*y)$ за исти модел језика $\mathcal{J}$, модел $(\mathbf{Z},<,+,0)$, а за различите п-интерпретације на скупу променљивих $\mathcal{V}$, тј. за различите вредности своје слободне променљиве y, има различите истиносне вредности.

Јасно је да су за сваку предикатску формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$ значајне оне интерпретације $I_\imath=(\mathcal{I},\imath)=((\mathrm{S},I^{\mathcal{J}}),\imath)$ у којима је она истинита, тј. оне за које важи $I_\imath(F)=1$. Такве интерпретације зваћемо модели за формулу F.

Дефиниција модела за предикатску формулу

> Ако је формула F истинита у интерпретацији $I_\imath=(\mathcal{I},\imath)=((\mathrm{S},I^{\mathcal{J}}),\imath)$, онда је та интерпретација $(\mathcal{I},\imath)$ модел за формулу F и то записујемо $(\mathcal{I},\imath)\models F$.

У нашем Примеру 4 формула $\forall x\alpha(x,x*y)$ је истинита у интерпретацији $I_{\imath_2}=((\mathbf{Z},<,+,0),\imath_2)$ и та интерпретација је модел за формулу $\forall x\alpha(x,x*y)$. Али имамо да та формула није истинита у интерпретацији $I_{\imath_1}=((\mathbf{Z},<,+,0),\imath_1)$ и за ту интерпретацију ћемо рећи да је контрамодел за формулу $\forall x\alpha(x,x*y)$.

Ако имамо језик $\mathcal{J}$ и један његов модел $\mathcal{I}=(\mathrm{S},I^{\mathcal{J}})$, очигледно је да за произвољан терм t над $\mathcal{J}$ и неку интерпретацију $I_\imath=(\mathcal{I},\imath)$ вредност $I_\imath(t)$ зависи само од вредности (у тој интерпретацији $I_\imath$) оних константи и променљивих које се јављају у терму t. Дакле, ако за један модел $\mathcal{I}=(\mathrm{S},I^{\mathcal{J}})$ језика $\mathcal{J}$ имамо две интерпретације $I_\imath=(\mathcal{I},\imath)$ и $I_\jmath=(\mathcal{I},\jmath)$ такве да за сваку променљиву x терма t важи $\imath(x)=\jmath(x)$ (тј. $I_\imath(x)=I_\jmath(x)$), онда је $I_\imath(t)=I_\jmath(t)$. У наредној леми доказаћемо ово својство.

ЛЕМА 1

Нека су $I_\imath=(\mathcal{I},\imath)$ и $I_\jmath=(\mathcal{I},\jmath)$ две интерпретације, где су $\mathcal{I}=(\mathrm{S},I^{\mathcal{J}})$ модел језика $\mathcal{J}$ и $\imath,\jmath\colon\mathcal{V}\to\mathrm{S}$ две п-интерпретације. Ако за сваку променљиву x неког терма t над језиком $\mathcal{J}$ важи $I_\imath(x)=I_\jmath(x)$, онда је:

$$I_\imath(t)=I_\jmath(t).$$

ДОКАЗ

Доказ ће бити индукцијом по сложености терма t, тј. по броју операцијских симбола у терму t.

Најједноставнији терми су константе и променљиве (број операцијских симбола у њима је 0). Ако је терм t нека константа c, онда одмах, на основу дефиниције вредности терма у интерпретацији, имамо $I_\imath(t)=c_I=I_\jmath(t)$. Ако је терм t нека променљива x_1, онда је $I_\imath(t)=I_\imath(x_1)=\imath(x_1)$ и $I_\jmath(t)=I_\jmath(x_1)=\jmath(x_1)$ и како важи особина $I_\imath(x_1)=I_\jmath(x_1)$, то имамо: $I_\imath(t)=I_\jmath(t)$.

Нека је сада терм t облика $f(t_1,...,t_m)$, за било које терме $t_1,...,t_m$ и произвољан операцијски симбол f дужине m језика $\mathcal{J}$. Променљиве терма t су променљиве и терама $t_1,...,t_m$. Зато за сваки тај терм важи да интерпретације $I_\imath$ и $I_\jmath$ (тј. п-интерпретације $\imath$ и $\jmath$) имају једнаке вредности за све њихове променљиве и још, ти терми су мање сложености од терма t (јер t има бар један операцијски симбол (симбол f) више од сваког од њих). Дакле, за њих важи индукцијска претпоставка, тј. имамо:

$$I_\imath(t_l)=I_\jmath(t_l),\ \text{за сваки терм } t_l,\ 1\le l\le m.$$

Тада, на основу тог својства и дефиниције вредности терма у интерпретацији, имамо:

$$I_\imath(t) = f_I(I_\imath(t_1), ..., I_\imath(t_m)) = f_I(I_\jmath(t_1), ..., I_\jmath(t_m)) = I_\jmath(t).$$

Закључујемо да дато својство важи за све терме над језиком $\mathcal{J}$.

◇

А сада ћемо доказати да вредност формуле у некој интерпретацији $I_\imath$ зависи само од вредности њених слободних променљивих у тој интерпретацији $I_\imath$.

ЛЕМА 2

Нека су $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ и $I_\jmath = (\mathcal{I}, \jmath)$ две интерпретације, где су $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ модел језика $\mathcal{J}$ и $\imath, \jmath \colon \mathcal{V} \to \mathrm{S}$ две п-интерпретације. Ако за сваку слободну променљиву x неке формуле F над језиком $\mathcal{J}$ важи $I_\imath(x) = I_\jmath(x)$, онда је:

$$I_\imath(F) = I_\jmath(F).$$

ДОКАЗ

Доказ ће бити индукцијом по сложености формуле F, тј. по броју n, који је збир броја логичких везника и броја квантификатора у тој формули F.

<u>База индукције, $n = 0$</u>, тј. F је нека елементарна формула. Ако је F формула $\perp$, онда одмах, на основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији, имамо $I_\imath(\perp) = 0 = I_\jmath(\perp)$. Ако је F облика $\rho(t_1, ..., t_m)$, где је ρ релацијски симбол дужине m, а $t_1, ..., t_m$ су неки терми, онда су све њене променљиве (ако их има) слободне, па за њих важи да имају једнаке вредности интерпретацијама $I_\imath$ и $I_\jmath$. Међу њима се налазе све променљиве и терама $t_1, ..., t_m$, те, по ЛЕМИ 1, имамо:

$$I_\imath(t_l) = I_\jmath(t_l), \text{ за сваки терм } t_l,\ 1 \le l \le m.$$

Користећи ту особину и дефиницију вредности формуле у интерпретацији, добијамо:

$$I_\imath(F) = \rho_I(I_\imath(t_1), ..., I_\imath(t_m)) = \rho_I(I_\jmath(t_1), ..., I_\jmath(t_m)) = I_\jmath(F).$$

<u>Индукцијска претпоставка</u>: лема важи за сваку формулу F која има мање од n логичких везника и квантификатора.

<u>Доказ да лема важи за формулу са n везника и квантификатора.</u>

Посматрајмо формулу F која има n логичких везника и квантификатора. Формула F може имати један од следећих облика:

$$A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad A \Rightarrow B, \qquad \forall x A \qquad \text{или} \qquad \exists x A.$$

Како је $SP(A \wedge B) = SP(A \vee B) = SP(A \Rightarrow B) = SP(A) \cup SP(B)$, то ако је F облика $A \wedge B$, $A \vee B$ или $A \Rightarrow B$, онда се све слободне променљиве формула A и B налазе у $SP(F)$. Зато за све слободне променљиве формула A и B имамо да су им вредности у интерпретацијама $I_\imath$ и $I_\jmath$ једнаке. Те формуле су мање сложености од F, па за њих важи индукцијска претпоставака: $I_\imath(A) = I_\jmath(A)$ и $I_\imath(B) = I_\jmath(B)$. Стога, по дефиницији вредности формуле у интерпретацији, добијамо:

ако је F облика $A \wedge B$, онда је
$I_\imath(F) = min(I_\imath(A), I_\imath(B)) = min(I_\jmath(A), I_\jmath(B)) = I_\jmath(F)$;

ако је F облика $A \vee B$, онда је
$I_\imath(F) = max(I_\imath(A), I_\imath(B)) = max(I_\jmath(A), I_\jmath(B)) = I_\jmath(F)$;

ако је F облика $A \Rightarrow B$, онда је
$I_\imath(F) = max(1 - I_\imath(A), I_\imath(B)) = max(1 - I_\jmath(A), I_\jmath(B)) = I_\jmath(F)$.

Остаје још да видимо случајеве када формула F има облик $\forall xA$ или $\exists xA$. На основу особине $SP(\forall xA) = SP(\exists xA) = SP(A) \backslash \{x\}$, имамо да скуп слободних променљивих формуле A, скуп $SP(A)$, је $SP(F)$ са можда још променљивом x. Дакле, за сваку слободну променљиву z формуле A различиту од x важи $I_\imath(z) = I_\jmath(z)$.

Нека је формула F облика $\forall xA$.

Ако је $I_\imath(\forall xA) = 0$, онда постоји нека п-интерпретација $\underline{\imath}$, $\underline{\imath} : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$ са својством $\underline{\imath} \simeq_x \imath$ за коју важи $I_{\underline{\imath}}(A)$=0. Посматрамо п-интерпретацију $\underline{\jmath}$, $\underline{\jmath} : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$ са својством $\underline{\jmath} \simeq_x \jmath$ и $\underline{\jmath}(x) = \underline{\imath}(x)$. За формулу A, која је мање сложености од формуле F, сваку њену слободну променљиву z и интерпретације $I_{\underline{\imath}}$ и $I_{\underline{\jmath}}$ имамо $I_{\underline{\imath}}(z)$=$I_{\underline{\jmath}}(z)$ (јер, на основу особине $I_\imath$ и $I_\jmath$ и дефиниције $\simeq_x$, за $z \neq x$ важи $I_{\underline{\imath}}(z) = I_\imath(z) = I_\jmath(z) = I_{\underline{\jmath}}(z)$ и још за $z = x$ имамо $I_{\underline{\imath}}(x) = I_{\underline{\jmath}}(x)$), па за њих важи индукцијска претпоставка: $I_{\underline{\imath}}(A) = I_{\underline{\jmath}}(A)$. Дакле, за интерпретацију $I_{\underline{\jmath}}$ са особином $\underline{\jmath} \simeq_x \jmath$ важи: $I_{\underline{\jmath}}(A) = 0$. Стога, на основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији, имамо $I_\jmath(\forall xA) = 0$. На потпуно исти начин се показује да ако је $I_\jmath(\forall xA) = 0$, онда мора да је $I_\imath(\forall xA) = 0$. Дакле важи:

$$I_\imath(\forall xA) = 0 \qquad \text{акко} \qquad I_\jmath(\forall xA) = 0.$$

Тако смо доказали да ако је F облика $\forall xA$, онда важи: $I_\imath(F)$= $I_\jmath(F)$.

Имамо још случај када је формула F облика $\exists xA$. Поступајући као у случају када је F облика $\forall xA$, може се показати:

$$I_\imath(\exists xA)=1 \qquad \text{акко} \qquad I_\jmath(\exists xA)=1$$

и тиме добијамо да и ако је F облика $\exists xA$ важи: $I_\imath(F)$=$I_\jmath(F)$.

Дакле, закључујемо да тражено својство важи за све предикатске формуле F над неким језиком $\mathcal{J}$.

♢

На крају овог одељка дефинишимо и модел за скуп предикатских формула.

Дефиниција модела за скуп предикатских формула

Ако за интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ и за сваку формулу F из неког скупа предикатских формула Γ важи $I_\imath(F)$=1, онда кажемо да је интерпретација $I_\imath$ модел за тај скуп формула Γ.

1.2.2 Ваљане формуле

Знамо да у семантици исказне логике централно место заузимају таутологије, исказне формуле које су истините за било коју валуацију њихових исказних слова. Својство које можемо захтевати од једне предикатске формуле над датим језиком $\mathcal{J}$, а које личи на својство таутологије, је да та формула буде истинита $\underline{\text{у свакој интерпретацији}}$ $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ $\underline{\text{за један модел}}$ $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ $\underline{\text{језика}}$ $\mathcal{J}$ (тј. да $\underline{\text{за један модел}}$ $\mathcal{I}$ $\underline{\text{језика}}$ $\mathcal{J}$ $\underline{\text{свака интерпретација}}$ $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ буде модел за ту формулу). Можемо тражити и више: да формула буде истинита $\underline{\text{у свакој интерпретацији}}$ $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ $\underline{\text{за сваки модел}}$ $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ $\underline{\text{језика}}$ $\mathcal{J}$. Посматрајмо прво случај када је формула истинита у свим интерпретацијама $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ са истим моделом $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ датог језика $\mathcal{J}$.

$\underline{\text{Дефиниција ваљане формуле у моделу } \mathcal{I}}$

> Ако за формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$, неки модел $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ тог језика $\mathcal{J}$ и сваку п-интерпретацију $\imath$, $\imath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, тј. сваку интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$, важи $I_\imath(F) = 1$, онда кажемо да је $\underline{\text{модел}}$ $\mathcal{I}$ $\underline{\text{модел за формулу}}$ F, тј. формула F је $\underline{\text{ваљана у моделу}}$ $\mathcal{I}$ и пишемо $\overline{\mathcal{I} \models F}$.

Погледајмо одмах један пример.

Пример 5 Имамо језик $\mathcal{J} = \{\alpha, \circ\}$, где су α и $\circ$ редом релацијски и операцијски симбол дужине 2. Посматрајмо предикатску формулу

$$\forall x \exists y \alpha(x, y)$$

над језиком $\mathcal{J}$ и модел $(\mathbf{R}, <, +)$ тог језика. Са тим моделом имамо различите интерпретације $I_\imath = ((\mathbf{R}, <, +), \imath)$ које добијамо помоћу различитих п-интерпретација $\imath$, $\imath : \mathcal{V} \to \mathbf{R}$. За сваку $I_\imath = ((\mathbf{R}, <, +), \imath)$ имамо да је интерпретација посматране формуле

$$\forall x \exists y (x < y).$$

Дакле формула $\forall x \exists y \alpha(x, y)$ је истинита у свим тим интерпретацијама $I_\imath = ((\mathbf{R}, <, +), \imath)$, па је формула $\forall x \exists y \alpha(x, y)$ ваљана у моделу $(\mathbf{R}, <, +)$ и то записујемо овако: $(\mathbf{R}, <, +) \models \forall x \exists y \alpha(x, y)$.

Неко ће рећи: јасно је да вредност ове формуле не зависи од п-интерпретација јер је она реченица и нема слободних промењљивих. Слажемо се са том примедбом и дајемо још један пример. Посматрајмо формулу

$$\forall x \alpha(x, x \circ y)$$

са слободном промењљивом y и модел $\mathcal{I} = (\mathbf{N}, \leq, +)$ језика $\mathcal{J}$. И овде имамо различите п-интерпретације $\imath$, $\imath : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$. Те п-интерпретације слободну промењљиву y сликају у различите природне бројеве и вредности формуле $\forall x \alpha(x, x \circ y)$ у интерпретацијама $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ могу бити различите. Посматрајмо једну одређену интерпретацију $I_{\imath_0} = (\mathcal{I}, \imath_0)$. Интерпретација $I_{\imath_0}$ посматране формуле је:

$$\forall x (x \leq x + \imath_0(y)),$$

за $I_{\imath_0}(y) = \imath_0(y) = c_0$, тј. вредност слободне промењљиве y је неки елемент c_0 из носача модела $\mathcal{I}$ језика $\mathcal{J}$, скупа $\mathbf{N}$. Покажимо да вредност $I_{\imath_0}(\forall x\alpha(x, x\circ y))$ јесте 1. Дакле, покажимо да за сваку п-интерпретацију $\jmath$ са особином $\jmath \simeq_x \imath_0$ важи: $I_\jmath(\alpha(x, x\circ y))=1$, тј. да је истинито $\jmath(x)\leq\jmath(x)+c_0$. Како п-интерпретацијама $\jmath$, $\jmath\simeq_x \imath_0$, променљива x може добијати различите вредности $\jmath(x)$ из скупа природних бројева, онда мора да је истинито $d\leq d+c_0$ за произвољан (тј. сваки) природан број d. То јесте истинито, па имамо да важи $I_{\imath_0}(\forall x\alpha(x, x\circ y))=1$. Значи, формула $\forall x\alpha(x, x\circ y)$ је истинита у интерпретацији $I_{\imath_0}$ са моделом $(\mathbf{N}, \leq, +)$ језика $\mathcal{J}$ у којој је вредност њене слободне променљиве y природан број c_0, тј. $I_{\imath_0}(y)=c_0$. Одмах приметимо да како је истинито $d\leq d+c_0$ за свако d из скупа $\mathbf{N}$, то је истинито и за свако c_0 из $\mathbf{N}$, тј. истинито је $d\leq d+c$ за све елементе d и c носача модела $(\mathbf{N}, \leq, +)$ језика $\mathcal{J}$. На основу тога, ми тврдимо да је $I_\imath(\forall x\alpha(x, x\circ y))=1$ за сваку интерпретацију $I_\imath=((\mathbf{N}, \leq, +), \imath)$ (тј. за сваку интерпретацију добијену од модела $(\mathbf{N}, \leq, +)$ и једне од свих могућих п-интерпретација $\imath$, $\imath:\mathcal{V}\to\mathbf{N}$). Наиме, за сваку другу интерпретацију $I_{\imath_1}=((\mathbf{N}, \leq, +), \imath_1)$, када је вредност слободне променљиве y неки други природан број c_1, $I_{\imath_1}(y)=\imath_1(y)=c_1$, имамо: наша формула $\forall x\alpha(x, x\circ y)$ је истинита у тој интерпретацији ако је за сваки природан број d истинито $d\leq d+c_1$. Дакле, да би вредност $I_\imath(\forall x\alpha(x, x\circ y))$ била 1 у свакој интерпретацији $I_\imath=((\mathbf{N}, \leq, +), \imath)$ то, мора да је истинито $d\leq d+c$, за било која два природна броја c и d. Пошто то важи, ми закључујемо да јесте $I_\imath(\forall x\alpha(x, x\circ y))=1$ за сваку интерпретацију $I_\imath=((\mathbf{N}, \leq, +), \imath)$. Дакле, формула $\forall x\alpha(x, x\circ y)$ је ваљана у моделу $(\mathbf{N}, \leq, +)$, тј.

$$(\mathbf{N}, \leq, +) \models \forall x\alpha(x, x\circ y).$$

Знајући сада шта значи да је формула ваљана у неком моделу језика, погледајмо поново наш Пример 3. За језик $\mathcal{J}$, његове моделе и формуле из тог примера имамо:

$$(\{0,1,2\}, \leq, +, 0) \models \forall x\alpha(c, x)$$

$$(\{0,1,2\}, \leq, +, 0) \models \exists x\alpha(x, c)$$

$$(\{0,1,2\}, \leq, +, 0) \models \forall x\alpha(x, x*c)$$

$$(\mathbf{N}, <, +, 2) \models \exists x\alpha(x, c)$$

$$(\mathbf{N}, <, +, 2) \models \forall x\alpha(x, x*c).$$

Видели смо формуле које су истините у свим интерпретацијама $I_\imath=(\mathcal{I}, \imath)$ са истим моделом $\mathcal{I}=(\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$, тј. видели смо ваљане формуле у једном моделу језика $\mathcal{J}$. Али, као што смо приметили на почетку овог одељка, можемо и нешто више од тога да тражимо. Наиме, можемо да тражимо да нека формула F, над датим језиком $\mathcal{J}$, буде истинита у свакој интерпретацији $I_\imath=(\mathcal{I}, \imath)$, где је $\mathcal{I}=(\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ било који модел језика $\mathcal{J}$, тј. да та формула F буде ваљана у сваком моделу језика $\mathcal{J}$. Да ли постоје такве формуле? Постоје. Ево примера.

Пример 6 Имамо језик $\mathcal{J}=\{\beta\}$, где је β релацијски симбол дужине 1, и посматрамо следећу формулу над тим језиком:

$$\beta(x) \vee \neg\beta(x).$$

За сваки модел $\mathcal{I}=(\mathrm{S},\beta_I)$ језика $\mathcal{J}$ и сваку п-интерпретацију $\imath:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\imath(x)=d$, интерпретација те формуле је

$$\beta_I(d) \vee \neg\beta_I(d).$$

$\beta_I(d)$ може бити или истинито или лажно. У случају да је истинито, онда ће $\neg\beta_I(d)$ бити лажно, и у другом случају, ако $\beta_I(d)$ јесте лажно, онда је $\neg\beta_I(d)$ истинито. Значи, у оба случаја добијамо да је $\beta_I(d)\vee\neg\beta_I(d)$ истинито. Дакле, за сваки модел $\mathcal{I} = (\mathrm{S},\beta_I)$ језика $\mathcal{J}$ и сваку п-интерпретацију $\imath:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$ формула $\beta(x)\vee\neg\beta(x)$ је истинита, тј. она је ваљана у сваком моделу $\mathcal{I} = (\mathrm{S},\beta_I)$ језика $\mathcal{J}$. Формуле које имају ту особину зовемо ваљане формуле.

Дефиниција ваљане формуле

Ако је предикатска формула F над неким језиком $\mathcal{J}$ ваљана у сваком моделу тог језика, онда је та формула F једна ваљана формула и пишемо $\models F$.

Ваљане формуле имају централно место у семантици предикатске логике исто као што таутологије имају централно место у семантици исказне логике. Постоји и важна веза између таутологија и ваљаних формула. Наиме, постоји поступак којим од таутологија правимо ваљане формуле. Одмах ћемо представити тај поступак. Погледајмо ваљану формулу из Примера 6. У тој ваљаној формули је сакривена, нама добро позната, таутологија $p \vee \neg p$. Ваљана формула $\beta(x) \vee \neg\beta(x)$ је добијена тако што је у таутологији $p \vee \neg p$ њено исказно слово p замењено предикатском формулом $\beta(x)$. Намеће се питање: да ли тим поступком, користећи било коју таутологију и предикатске формуле, можемо добити ваљане формуле? Одговор је: ДА. Пре него што то покажемо, договоримо се око неких ознака. Ако су $p_1, ..., p_n$ сва, међусобно различита, исказна слова једне исказне формуле F, онда ћемо ту формулу означавати $F(p_1, ..., p_n)$. Даље, за произвољне међусобно различите предикатске формуле $A_1, ..., A_n$, предикатску формулу, која се добија када се у исказној формули $F(p_1, ..., p_n)$ свако јављање исказног слова p_k замени формулом A_k, за свако k $(1 \leq k \leq n)$, означаваћемо са $F(A_1, ..., A_n)$. Сада можемо формулисати особину која даје поступак за прављење ваљаних формула од таутологија: ако је $F(p_1, ..., p_n)$ таутологија и $A_1, ..., A_n$ произвољне предикатске формуле над неким језиком $\mathcal{J}$, онда је $F(A_1, ..., A_n)$ ваљана формула.

У Примеру 6 исказна формула $F(p)$ (са једним исказним словом p) је таутологија $p\vee\neg p$, предикатска формула која замењује њено једино исказно слово p је елементарна формула $\beta(x)$, па је предикатска формула $F(\beta(x))$ баш предикатска формула $\beta(x) \vee \neg\beta(x)$ за коју смо доказали да је ваљана формула.

На формулама $F(p)$ и $F(\beta(x))$ из нашег Примера 6, формулама $p \vee \neg p$ и $\beta(x)\vee\neg\beta(x)$, показаћемо како је повезано одређивање вредности $v(F(p_1, ..., p_n))$ (за произвољну валуацију v исказних формула) са одређивањем вредности $I_\imath(F(A_1, ..., A_n))$ (за произвољну интерпретацију $I_\imath$ предикатских формула). Подсетимо се поступка одређивања истиносних вредности исказних формула, и одредимо за неку валуацију v вредност $v(F(p)) = v(p \vee \neg p)$. Валуацијом v свако исказно слово формуле $F(p)$ (у случају наше формуле само слово p) је добило неку вредност $v(p)$ и онда рачунамо $v(F(p))$=$v(p \vee \neg p)$ на следећи начин:

$$v(F(p)) = v(p \vee \neg p) = max(v(p), 1 - v(p)).$$

Знамо да неком другом валуацијом $\overline{v}$ исказно слово p може имати другу вредност, тј. може $\overline{v}(p)$ бити различито од $v(p)$, али ће се $\overline{v}(F(p))$ рачунати на исти начин користећи вредност $\overline{v}(p)$: максимум вредности $\overline{v}(p)$ и $1 - \overline{v}(p)$.

Вратимо се у предикатску логику и одредимо $I_\imath(F(\beta(x))) = I_\imath(\beta(x) \vee \neg\beta(x))$ за неку интерпретацију $I_\imath$. У интерпретацији $I_\imath$ потформула $\beta(x)$ има своју вредност $I_\imath(\beta(x))$, а $I_\imath(F(\beta(x))) = I_\imath(\beta(x) \vee \neg\beta(x))$ рачунамо овако:

$$I_\imath(F(\beta(x))) = I_\imath(\beta(x) \vee \neg\beta(x)) = max(I_\imath(\beta(x)), 1 - I_\imath(\beta(x))).$$

За неку другу интерпретацију $I_{\overline{\imath}}$ вредност формуле $\beta(x)$, $I_{\overline{\imath}}(\beta(x))$, ће можда бити различита од $I_\imath(\beta(x))$, али ће се вредност $I_{\overline{\imath}}(\beta(x) \vee \neg\beta(x))$ рачунати у зависности од $I_{\overline{\imath}}(\beta(x))$ по истом закону као у интерпретацији $I_\imath$: максимум вредности $I_{\overline{\imath}}(\beta(x))$ и $1 - I_{\overline{\imath}}(\beta(x))$.

Зависност вредности $v(F(p))$ од $v(p)$ и зависност вредности $I_\imath(F(\beta(x)))$ од $I_\imath(\beta(x))$ дате су истом функцијом, тј. имамо

$$v(F(p)) = \mathbf{h}(v(p)) \qquad \text{и} \qquad I_\imath(F(\beta(x))) = \mathbf{h}(I_\imath(\beta(x))),$$

где је $\mathbf{h} : \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$, $\mathbf{h}(\mathbf{z}) = max(\mathbf{z}, 1 - \mathbf{z})$, а v произвољна валуација исказних формула и $I_\imath$ произвољна интерпретација предикатских формула.

Ова особина важи и за сваку исказну формулу $F(p_1, ..., p_n)$ и предикатску формулу $F(A_1, ..., A_n)$ која је добијена из те исказне формуле на начин који смо већ представили. Наиме, истом функцијом је описана зависност вредности $v(F(p_1, ..., p_n))$ од $v(p_1), ..., v(p_n)$ (за било коју валуацију v исказних формула) и зависност вредности $I_\imath(F(A_1, ..., A_n))$ од $I_\imath(A_1), ..., I_\imath(A_n)$ (за било коју интерпретацију $I_\imath$ предикатских формула), тј. та зависност је описана неком функцијом $\mathbf{h} : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ и важи:

$$v(F(p_1, ..., p_n)) = \mathbf{h}(v(p_1), ..., v(p_n))$$

и

$$I_\imath(F(A_1, ..., A_n)) = \mathbf{h}(I_\imath(A_1), ..., I_\imath(A_n)).$$

А сада ћемо и доказати да је поступак прављења ваљаних формула од таутологија, који смо представили, исправан и при томе ћемо користити ову особину која важи за рачунање вредности формула $F(p_1, ..., p_n)$ и $F(A_1, ..., A_n)$.

ТЕОРЕМА 1

Ако је формула $F(p_1, ..., p_n)$ таутологија и $A_1, ..., A_n$ су неке предикатске формуле, онда је формула $F(A_1, ..., A_n)$ ваљана формула.

ДОКАЗ

> Претпоставимо да су $A_1, ..., A_n$ предикатске формуле над језиком $\mathcal{J}$. Потребно је показати да је у свакој интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$, где је $\mathcal{I} = (\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}})$ модел језика $\mathcal{J}$, вредност $I_\imath(F(A_1, ..., A_n))$ једнака 1.
>
> За исказну формулу $F(p_1, ..., p_n)$ и сваку валуацију v имамо да исказна слова $p_1, ..., p_n$ добијају вредности $v(p_1), ..., v(p_n)$ и нека функција

$\mathbf{h}$:$\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (иста је за све валуације), описује зависност вредности $v(F(p_1,...,p_n))$ од вредности $v(p_1),...,v(p_n)$, тј.

$$v(F(p_1,...,p_n)) = \mathbf{h}(v(p_1),...,v(p_n)).$$

С друге стране, за формулу $F(A_1,...,A_n)$ и сваку интерпретацију $I_\imath$ имамо да је зависност $I_\imath(F(A_1,...,A_n))$ од $I_\imath(A_1),...,I_\imath(A_n)$ описана истом функцијом $\mathbf{h}$ као и зависност $v(F(p_1,...,p_n))$ од вредности $v(p_1),...,v(p_n)$, тј. имамо

$$I_\imath(F(A_1,...,A_n)) = \mathbf{h}(I_\imath(A_1),...,I_\imath(A_n)).$$

Посматрајмо сада произвољну, било коју, интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ и одредимо вредност $I_\imath(F(A_1,...,A_n))$. Том интерпретацијом предикатске формуле $A_1,...,A_n$ добијају редом вредности $I_\imath(A_1),...,I_\imath(A_n)$. Даље, посматрајмо једну валуацију $\overline{v}$ којом исказна слова $p_1,...,p_n$ формуле $F(p_1,...,p_n)$ добијају вредност овако:

$$\overline{v}(p_k) \text{ је једнако } I_\imath(A_k), \text{ за свако } k,\ 1 \leq k \leq n.$$

Како је формула $F(p_1,...,p_n)$ таутологија она је истинита за сваку валуацију својих исказних слова $p_1,...,p_n$, па и за валуацију $\overline{v}$. Дакле,

$$1 = \overline{v}(F(p_1,...,p_n)) = \mathbf{h}(\overline{v}(p_1),...,\overline{v}(p_n)).$$

Коначно, користећи све ове наведене особине, израчунајмо вредност формуле $F(A_1,...,A_n)$ у посматраној произвољној интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$, израчунајмо $I_\imath(F(A_1,...,A_n))$:

$$\begin{aligned} I_\imath(F(A_1,...,A_n)) &= \mathbf{h}(I_\imath(A_1),...,I_\imath(A_n)) \\ &= \mathbf{h}(\overline{v}(p_1),...,\overline{v}(p_n)), \text{ јер је } \overline{v}(p_k) = I_\imath(A_k),\ 1 \leq k \leq n \\ &= \overline{v}(F(p_1,...,p_n)) = 1. \end{aligned}$$

Значи, у произвољној интерпретацији $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ вредност формуле $F(A_1,...,A_n)$ је 1. Стога закључујемо да у свакој интерпретацији вредност формуле $F(A_1,...,A_n)$ јесте 1, тј. да је $F(A_1,...,A_n)$ ваљана формула.

$\diamondsuit$

Наставимо са повезивањем особина исказних и предикатских формула. У исказној логици правило извођења њеног хилбертовског формалног система, правило modus ponens (MP), чува својство исказних формула: *бити таутологија*, тј. важи: ако су A и $A \Rightarrow B$ таутологије, онда је и B таутологија (видети ТЕОРЕМУ 5 (ТЕОРЕМУ MP) у одељку 2.2.4 у [3]). И хилбертовски формални систем предикатске логике има правило извођења modus ponens (MP) (видети одељак 2.1.3 у другој глави) и то правило чува својство предикатских формула: *бити ваљана*, тј. важи: ако су A и $A{\Rightarrow}B$ ваљане формуле, онда је и B ваљана.

ТЕОРЕМА 2 (ТЕОРЕМА MP)

Ако су формуле A и $A \Rightarrow B$ ваљане формуле, онда је и B ваљана формула.

ДОКАЗ

Имамо да су формуле A и $A{\Rightarrow}B$ ваљане формуле, па за сваку интер-

> претацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ важи: $I_\imath(A) = 1$ и $I_\imath(A \Rightarrow B) = 1$. Користећи та својства и дефиницију вредности формуле у интерпретацији, за сваку интерпретацију $I_\imath$ добијамо:
> $1 = I_\imath(A \Rightarrow B) = max(1 - I_\imath(A),\ I_\imath(B)) = max(0,\ I_\imath(B)) = I_\imath(B)$. Дакле, добијамо да је $I_\imath(B)$ једнако 1 за сваку интерпретацију $I_\imath$, тј. формула B је ваљана формула.

♢

Хилбертовски формални систем предикатске логике осим правила *MP* има још једно правило извођења, правило generalizacije (*Gen*) (видети одељак 2.1.3 у другој глави). И за правило *Gen* важи својство да чува ваљаност, дато у теореми која следи.

ТЕОРЕМА 3 (ТЕОРЕМА *Gen*)
Ако је формула A ваљана формула, онда је и $\forall x A$ ваљана формула.
ДОКАЗ

> Посматрајмо произвољну интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$. Имамо да је формула A ваљана, што значи да је формула A истинита у свим интерпретацијама. Стога, и у свим интерпретацијама $I_\jmath$ таквим да је $\jmath \simeq_x \imath$, формула A је истинита, тј. $I_\jmath(A) = 1$. То, на основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији, значи да $I_\imath(\forall x A)$ јесте 1. Дакле, за произвољну интерпретацију $I_\imath$ добијамо $I_\imath(\forall x A){=}1$, те закључујемо да је $\forall x A$ ваљана формула.

♢

У ТЕОРЕМИ 3 је дата веза између правила извођења *Gen* и ваљаности, али јасно је да важи и овај смер: ако је $\forall x A$ ваљана формула, онда је и A ваљана формула. По дефиницији ваљане формуле довољно је да, користећи претпоставку да је $\forall x A$ ваљана формула, за произвољну интерпретацију $I_\imath$ покажемо да важи $I_\imath(A) = 1$. Посматрајмо дакле, произвољну интерпретацију $I_\imath$. Како је $\forall x A$ ваљана формула, то је $I_\imath(\forall x A) = 1$. Стога, на основу дефиниције $I_\imath$, за сваку $\jmath$ са особином $\jmath \simeq_x \imath$ важи $I_\jmath(A){=}1$. Погледајмо једну од таквих п-интерпретација, п-интерпретацију $\jmath_0$, за коју је $\jmath_0(x) = \imath(x)$. На основу дефиниције $\simeq_x$ и својства $\jmath_0(x) = \imath(x)$, имамо да за сваку слободну променљиву y формуле A важи $I_{\jmath_0}(y) = I_\imath(y)$, те по ЛЕМИ 2, добијамо да је $I_\imath(A)$ једнако $I_{\jmath_0}(A)$, тј. $I_\imath(A)$ је 1. Дакле, за произвољну интерпретацију $I_\imath$ добили смо $I_\imath(A) = 1$. Значи, A је ваљана формула. На основу ове особине и ТЕОРЕМЕ 3 (ТЕОРЕМЕ *Gen*), важи следећа лема.

ЛЕМА 3
Формула A је ваљана формула ако и само ако је $\forall x A$ ваљана формула.

У ствари важи ова особина предикатских формула.

ТЕОРЕМА 4

За произвољне, међусобно различите, променљиве x_1,...,x_n и формулу F важи:

F је ваљана формула акко је $\forall x_1 ... \forall x_n F$ ваљана формула.

ДОКАЗ

Доказ ћемо извести индукцијом по броју променљивих $x_1, ..., x_n$.

База индукције, $n = 1$: одмах, на основу ЛЕМЕ 3, имамо:

F је ваљана формула акко је $\forall x_1 F$ ваљана формула.

Индукцијска претпоставка: имамо $n - 1$ променљивих, променљиве $x_1, ..., x_{n-1}$, и важи

F је ваљана формула акко је $\forall x_1 ... \forall x_{n-1} F$ ваљана формула.

Посматрајмо формулу F и n променљивих, променљиве $x_1, ..., x_n$. На основу ЛЕМЕ 3 важи:

F је ваљана формула акко $\forall x_n F$ је ваљана формула.

Још, за формулу $\forall x_n F$ и променљиве x_1,..., x_{n-1}, којих има $n - 1$, важи индукцијска претпоставка:

$\forall x_n F$ је ваљана формула акко $\forall x_1 ... \forall x_{n-1} \forall x_n F$ је ваљана формула.

Дакле: F је ваљана формула акко је $\forall x_1 ... \forall x_n F$ ваљана формула.

♢

Последица ТЕОРЕМЕ 4 је важно својство сваке предикатске формуле F и њеног затворења, које ћемо представити у Задатку 1.

Задатак 1 F је ваљана акко је њено затворење ваљана формула.

Ако је формула F реченица њено затворење је иста та формула F, па ово својство важи. Ако формула F није реченица, и $x_1, ..., x_n$ су све њене, међусобно различите, слободне променљиве, онда на основу ТЕОРЕМЕ 4, имамо:

F је ваљана формула акко је $\forall x_1 ... \forall x_n F$ ваљана формула,

тј. F је ваљана формула акко је њено затворење ваљана формула.

У исказној логици две исказне формуле A и B су семантички еквивалентне ако је формула $A \Leftrightarrow B$ таутологија. Овде ће предикатске формуле A и B бити семантички еквивалентне ако је $A \Leftrightarrow B$ ваљана формула.

Дефиниција еквивалентних предикатских формула

Две предикатске формуле A и B над неким језиком $\mathcal{J}$ су семантички еквивалентне (или краће, еквивалентне) ако је формула $A \Leftrightarrow B$ ваљана, тј. $\models A \Leftrightarrow B$.

Задатак 2 Покажимо следеће својство еквивалентних формула: формуле A и B су еквивалентне ако и само ако за сваку интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$, важи: $I_\imath(A) = I_\imath(B)$.

Претпоставимо да су формуле A и B еквивалентне. Дакле, имамо да је $A\Leftrightarrow B$ ваљана формула, тј. $\models A\Leftrightarrow B$. То значи да за сваку интерпретацију $I_\imath=(\mathcal{I},\imath)$ важи $I_\imath(A\Leftrightarrow B)=1$. Из $I_\imath(A\Leftrightarrow B)=1$, на основу дефиниције вредности формуле облика $A\Leftrightarrow B$ у интерпретацији, добијамо да је $I_\imath(A)$ једнако $I_\imath(B)$: $I_\imath(A)=I_\imath(B)$.
С друге стране, ако за сваку интерпретацију $I_\imath$ јесте $I_\imath(A)=I_\imath(B)$, онда, по дефиницији вредности $I_\imath(A\Leftrightarrow B)$, за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи да је $I_\imath(A\Leftrightarrow B)$једнако 1. Дакле, $A\Leftrightarrow B$ је ваљана формула, тј. формуле A и B су еквивалентне.

На скупу свих предикатских формула над неким језиком $\mathcal{J}$ можемо дефинисати бинарну релацију, релацију $\equiv$, која је аналогна бинарној релацији $\equiv$ на скупу свих исказних формула (2.2.2 у [3]). Значи имамо:

$A \;\equiv\; B$ ако и само ако су формуле A и B еквивалентне.

Доказује се аналогно као и у исказном случају да је релација $\equiv$ једна релација еквиваленције али овде на скупу предикатских формула над датим језиком $\mathcal{J}$.

Задатак 3 Покажимо два својства ваљаних формула, које ће бити коришћена у доказивању других својстава предикатских формула.

(1) Ако је $\models A\Leftrightarrow B$ и $\models B\Leftrightarrow C$, онда је $\models A\Leftrightarrow C$.

Из $\models A\Leftrightarrow B$ и $\models B\Leftrightarrow C$, на основу дефиниције ваљаних формула имамо $I_\imath(A)$=$I_\imath(B)$ и $I_\imath(B)$=$I_\imath(C)$ за сваку интерпретацију $I_\imath$. Дакле важи $I_\imath(A)=I_\imath(C)$ за сваку интерпретацију $I_\imath$, те је $A\Leftrightarrow C$ ваљана формула, тј. $\models A\Leftrightarrow C$.

(2) Ако је $\models A\Leftrightarrow B$, $\models C\Leftrightarrow D$ и $\models A\Rightarrow C$, онда је $\models B\Rightarrow D$.

Дефиниција ваљаних формула даје: $I_\imath(A)=I_\imath(B)$, $I_\imath(C)=I_\imath(D)$ и $I_\imath(A\Rightarrow C)=1$ за сваку интерпретацију $I_\imath$. Користећи те вредности, по дефиницији вредности формуле у интерпретацији, за сваку интерпретацију $I_\imath$ добијамо:
$1{=}I_\imath(A{\Rightarrow}C){=}max(1{-}I_\imath(A),I_\imath(C)){=}max(1{-}I_\imath(B),I_\imath(D)){=}I_\imath(B{\Rightarrow}D)$.
Дакле, формула $B\Rightarrow D$ је ваљана формула.

У наредној теореми показаћемо још неке особине еквивалентних предикатских формула.

ТЕОРЕМА 5

Нека су A и B предикатске формуле над неким језиком $\mathcal{J}$.

(1) Ако је $\models A\Leftrightarrow B$, онда је $\models \neg A\Leftrightarrow\neg B$.

(2) Ако је $\models A\Leftrightarrow B$, онда за произвољну предикатску формулу C над $\mathcal{J}$ важи:

($\wedge$1) $\models (C\wedge A)\Leftrightarrow(C\wedge B)$ и ($\wedge$2) $\models (A\wedge C)\Leftrightarrow(B\wedge C)$;
($\vee$1) $\models (C\vee A)\Leftrightarrow(C\vee B)$ и ($\vee$2) $\models (A\vee C)\Leftrightarrow(B\vee C)$;
($\Rightarrow$1) $\models (C\Rightarrow A)\Leftrightarrow(C\Rightarrow B)$ и ($\Rightarrow$2) $\models (A\Rightarrow C)\Leftrightarrow(B\Rightarrow C)$;
($\Leftrightarrow$1) $\models (C\Leftrightarrow A)\Leftrightarrow(C\Leftrightarrow B)$ и ($\Leftrightarrow$2) $\models (A\Leftrightarrow C)\Leftrightarrow(B\Leftrightarrow C)$.

(3) Ако је $\models A\Leftrightarrow B$, онда је $\models \forall xA\Leftrightarrow\forall xB$.

(4) Ако је $\models A \Leftrightarrow B$, онда је $\models \exists xA \Leftrightarrow \exists xB$.

ДОКАЗ

Делови (1) и (2) доказују се аналогно као делови (1) и (2) ЛЕМЕ 1 (ЛЕМЕ О ЗАМЕНИ ЕКВИВАЛЕНАТА) у исказној логици (из 2.2.2 у [3]).

(3) Из $\models A \Leftrightarrow B$ имамо еквивалентност формула A и B, тј. за сваку интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ важи: $I_\imath(A) = I_\imath(B)$. Покажимо да онда, за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи и $I_\imath(\forall xA) = I_\imath(\forall xB)$. Дакле, посматрамо било коју, потпуно произвољну интерпретацију $I_\imath$ и за њу покажимо ту особину. На основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији, да бисмо одредили вредност $I_\imath(\forall xA)$ и вредност $I_\imath(\forall xB)$ морамо знати редом вредности $I_\jmath(A)$ и вредности $I_\jmath(B)$, за све п-интерпретације $\jmath$, $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, са особином $\jmath \simeq_x \imath$. Како су вредности формула A и B међусобно једнаке за сваку интерпретацију, онда то важи и за сваку интерпретацију $I_\jmath$, чија п-интерпретација $\jmath$ има особину $\jmath \simeq_x \imath$. Дакле, за произвољну интерпретацију $I_\imath$ имамо:

$I_\imath(\forall xA) = 1$

акко за сваку $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(A) = 1$, деф. вр. форм. у инт.

акко за сваку $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(B) = 1$, јер је $I_\jmath(A) = I_\jmath(B)$

акко $I_\imath(\forall xB) = 1$, деф. вр. форм. у инт.

То значи да су формуле $\forall xA$ и $\forall xB$ еквивалентне, тј. да је формула $\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$ ваљана.

(4) Доказује се аналогно као део (3).

◇

У задацима који следе, Задацима 4-9, представићемо неке значајне ваљане формуле, од којих истичемо оне из Задатака 4, 5 и 6.

Задатак 4 Покажимо да су

(1) $\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$

(2) $\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A$

(3) $\forall xA \Leftrightarrow \forall y A^x_y$, где је y променљива која се не јавља у формули A

(4) $\exists xA \Leftrightarrow \exists y A^x_y$, где је y променљива која се не јавља у формули A

ваљане формуле.

(1) Пошто је формула $\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$ облика $C \Leftrightarrow D$, она ће бити ваљана ако су формуле $\forall x \forall y A$ и $\forall y \forall x A$ еквивалентне. Да бисмо то доказали довољно је показати да за сваку интерпретацију важи: $I_\imath(\forall x \forall y A)=0$ ако и само ако $I_\imath(\forall y \forall x A)=0$. Посматрајмо произвољну интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$. Претпоставимо прво, да важи:

$I_\imath(\forall x \forall y A)=0,$

онда постоји $\jmath_0$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, да је $I_{\jmath_0}(\forall yA)$=0, деф. вр. форм. у инт.,
даље постоји ℓ_0, $\ell_0 \simeq_y \jmath_0$, да је $I_{\ell_0}(A)$=0, деф. вр. форм. у инт.,
зато за сваку ℓ, $\ell \simeq_x \ell_0$, јесте $I_{\ell}(\forall xA)$=0, деф. вр. форм. у инт.,
стога посматрамо ℓ_1 такву да је: $\ell_1 \simeq_x \ell_0$ и $\ell_1(x) = \imath(x)$,
имамо да је: $I_{\ell_1}(\forall xA)$=0 и $\ell_1 \simeq_y \imath$, деф. $\simeq_y$ и особ. $\jmath_0, \ell_0, \ell$ и ℓ_1,
дакле, $I_{\imath}(\forall y\forall xA)$=0, деф. вр. форм. у инт.

На потпуно исти начин показује се да

ако је $I_{\imath}(\forall y\forall xA)$=0, онда је $I_{\imath}(\forall x\forall yA)$=0.

Дакле за произвољну интерпретацију $I_{\imath}$=$((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ важи:

$I_{\imath}(\forall x\forall yA)$=0 ако и само ако $I_{\imath}(\forall y\forall xA)$=0,

тј. формуле $\forall x\forall yA$ и $\forall y\forall xA$ су еквивалентне. Стога закључујемо да је формула $\forall x\forall yA \Leftrightarrow \forall y\forall xA$ ваљана.

(2) На исти начин као за формулу (1) показује се да за сваку интерпретацију $I_{\imath}$=$((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ важи:

$I_{\imath}(\exists x\exists yA) = 1$ ако и само ако $I_{\imath}(\exists y\exists xA) = 1$

што даје да су формуле $\exists x\exists yA$ и $\exists y\exists xA$ еквивалентне. Дакле, формула $\exists x\exists yA \Leftrightarrow \exists y\exists xA$ је ваљана.

У доказима да су формуле (3) и (4) ваљане користићемо особину: за неку формулу A и формулу A^x_y, где је y променљива која се не јавља у A, и произвољну интерпретацију $I_{\imath} = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ важи да

за сваку п-интерпретацију $\jmath_0$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, постоји п-интерпретација ℓ_0, таква да је $\ell_0 \simeq_y \imath$ и $I_{\jmath_0}(A)$=$I_{\ell_0}(A^x_y)$, и обрнуто.

Одмах докажимо ову особину. Имамо дакле, једну п-интерпретацију $\jmath_0$, $\jmath_0 {\simeq_x} \imath$. На основу дефиниције $\simeq_x$, п-интерпретација $\jmath_0$ је таква да је $\jmath_0(z) = \imath(z)$ за све променљиве z различите од x, и још се променљива x том п-интерпретацијом слика у неко $s \in \mathrm{S}$, $\jmath_0(x) = s$, које не мора бити једнако $\imath(x)$. Тада посматрамо п-интерпретацију ℓ_0 такву да: $\ell_0 \simeq_y \imath$ (тј. $\ell_0(z) = \imath(z) = \jmath_0(z)$ за сваку променљиву z различиту од x и y и $\ell_0(x) = \imath(x)$) и $\ell_0(y)$=s=$\jmath_0(x)$. За ℓ_0, на основу дефиниције $\simeq_y$ и особине да се променљива y не јавља у A, важи: $I_{\jmath_0}(A)$=$I_{\ell_0}(A^x_y)$. На потпуно исти начин показује се да за сваку п-интерпретацију ℓ_0, $\ell_0 {\simeq_y} \imath$ постоји п-интерпретација $\jmath_0$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, таква да је $I_{\ell_0}(A^x_y)$=$I_{\jmath_0}(A)$.

Сада ћемо, користећи дефиницију вредности формуле у интерпретацији и ову особину, показати да су наше формуле (3) и (4) ваљане.

(3) Као и код формула (1) и (2) потребно је показати да за сваку интерпретацију $I_{\imath} = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ важи $I_{\imath}(\forall xA) = I_{\imath}(\forall yA^x_y)$. За сваку интерпретацију $I_{\imath} = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ имамо да је

$I_{\imath}(\forall xA) = 0$

акко није за сваку $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$: $I_{\jmath}(A)$=1, деф. вр. форм. у инт.

акко постоји $\jmath_0$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, за коју је $I_{\jmath_0}(A){=}0$

акко постоји ℓ_0, $\ell_0 \simeq_y \imath$, за коју је $I_{\ell_0}(A^x_y){=}0$, доказана особ.

акко није за сваку ℓ, $\ell \simeq_y \imath$: $I_\ell(A^x_y){=}1$

акко $I_\imath(\forall y A^x_y) = 0$, деф. вр. форм. у инт.

Дакле показали смо да су, ако се y не јавља у A, формуле $\forall xA$ и $\forall yA^x_y$ еквивалентне, тј. да је, за сваку формулу A у којој се не јавља y, формула $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA^x_y$ ваљана.

(4) На исти начин као код формуле (3) показује се да је за сваку интерпретацију $I_\imath{=}((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ и за формулу A у којој се не јавља y:

$$I_\imath(\exists xA) = 1 \text{ акко } I_\imath(\exists yA^x_y) = 1$$

што значи да је, за сваку формулу A у којој се не јавља y, формула $\exists xA \Leftrightarrow \exists yA^x_y$ ваљана формула.

Ваљане формуле (3) и (4) зваћемо алфабетско преписивање. Сетимо се да смо у одељку 1.1.2 (после Примера 5) говорили о преименовању везаних променљивих произвољне формуле F, тј. замени, у њеним потформулама облика $\forall xA$ или $\exists xA$, свих везаних јављања променљиве x променљивом која се не јавља у F. На основу ваљаних формула алфабетског преписивања и ТЕОРЕМЕ 5, имамо да тим преименовањем добијамо формулу која је еквивалентна формули F.

Задатак 5 У нашем Примеру 3 видели смо да формуле облика $\forall xA$ и $\exists xA$ можемо посматрати као низ одговарајућих формула повезаних редом конјункцијама односно дисјункцијама, или краће речено као низ конјункција, односно дисјункција. Зато очекујемо да су њихове негације, формуле $\neg\forall xA$ и $\neg\exists xA$, редом негације тих низова конјункција и дисјункција, а за њих важе Де Моргánови закони: $\neg(C \wedge D) \Leftrightarrow (\neg C \vee \neg D)$ и $\neg(C \vee D) \Leftrightarrow (\neg C \wedge \neg D)$. То је разлог што формуле

(1) $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$ (2) $\neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A$

зовемо Де Морганови закони за квантификаторе. Покажимо да су те формуле ваљане формуле.

Прво покажимо да је формула $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$ ваљана.

Као у претходном задатку, довољно је показати да је у свакој интерпретацији: $\neg\forall xA$ је истинита акко је истинита $\exists x\neg A$. За сваку интерпретацију $I_\imath{=}((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ имамо да је

$I_\imath(\neg\forall xA) = 1$

акко $I_\imath(\forall xA) = 0$, деф. вр. форм. у инт.

акко није за сваку $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$: $I_\jmath(A){=}1$, деф. вр. форм. у инт.

акко постоји нека $\jmath_0$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, за коју је $I_{\jmath_0}(A){=}0$

акко постоји нека $\jmath_0$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, за коју је $I_{\jmath_0}(\neg A){=}1$, д. вр. ф. у инт.

акко $I_\imath(\exists x\neg A) = 1$, деф. вр. форм. у инт.

Дакле показали смо да су формуле $\neg\forall xA$ и $\exists x\neg A$ еквивалентне, односно да је формула (1), формула $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$, ваљана:

$$\models \neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A.$$

Остаје да покажемо да је и формула (2) ваљана. Истакнимо да је у ваљаној формули (1) формула A произвољна предикатска формула. Значи доказом да је формула $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$ ваљана доказали смо ваљаност свих формула тог облика, где њена потформула A може бити било која формула. Ако је она $\neg A$, онда имамо:

$$\models \neg\forall x\neg A \Leftrightarrow \exists x\neg\neg A.$$

Примењујемо ТЕОРЕМУ 1 на таутологију $\neg\neg p \Leftrightarrow p$ и предикатску формулу A и добијамо ваљану формулу $\neg\neg A \Leftrightarrow A$. Та ваљана формула, на основу дела (4) ТЕОРЕМЕ 5, даје ваљану формулу $\exists x\neg\neg A \Leftrightarrow \exists xA$. Сада користећи то да су $\neg\forall x\neg A \Leftrightarrow \exists x\neg\neg A$ и $\exists x\neg\neg A \Leftrightarrow \exists xA$ ваљане формуле, по делу (1) Задатка 3, добијамо важну ваљану формулу:

$$\models \exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A \qquad (*)$$

Та ваљана формула, на основу дела (1) ТЕОРЕМЕ 5, даје ваљану формулу:

$$\models \neg\exists xA \Leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg A$$

и како је $\neg\neg\forall x\neg A \Leftrightarrow \forall x\neg A$ ваљана формула, онда те две ваљане формуле, на основу дела (1) Задатка 3, дају да је наша формула (2) ваљана формула:

$$\models \neg\exists xA \Leftrightarrow \forall x\neg A.$$

На крају овог задатка представимо још једну важну ваљану формулу. Пошто је $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$ ваљана формула, то на основу дела (1) ТЕОРЕМЕ 5, добијамо ваљану формулу $\neg\neg\forall xA \Leftrightarrow \neg\exists x\neg A$. Та ваљана формула и ваљана формула $\forall xA \Leftrightarrow \neg\neg\forall xA$, на основу дела (1) Задатка 3, дају важну ваљану формулу $\forall xA \Leftrightarrow \neg\exists x\neg A$:

$$\models \forall xA \Leftrightarrow \neg\exists x\neg A \qquad (**)$$

Ваљане формуле $(*)$ и $(**)$ из претходног задатка су нам важне јер нам показују редом, како се квантификатор $\exists$ може представити помоћу квантификатора $\forall$, односно квантификатор $\forall$ помоћу $\exists$. Наиме, ако изаберемо универзални квантификатор као основни, онда егзистенцијални квантификатор дефинишемо на следећи начин:

$$\exists xA =_{def} \neg\forall x\neg A.$$

Ако пак, егзистенцијални квантификатор изаберемо као основни, онда универзални квантификатор дефинишемо овако:

$$\forall xA =_{def} \neg\exists x\neg A.$$

Задатак 6 Погледајмо формулу $\forall xA(x) \Rightarrow A(t)$, где је формула $A(t)$ добијена из формуле $A(x)$ тако што су сва слободна јављања променљиве x у њој замењена датим термом t. Ту формулу читамо „ако је за свако x истинита $A(x)$, онда је истинита и формула $A(t)$ која је добијена из A тако што је променљива x замењена термом t”. Питамо се: да ли то важи у свакој интерпретацији, тј. да ли је формула $\forall x A(x) \Rightarrow A(t)$ ваљана? Одговор је: НЕ. Ево примера. Посматрајмо формулу

$$(\forall x \exists y \alpha(x, y)) \Rightarrow \exists y \alpha(y, y)$$

над неким језиком $\mathcal{J} = \{\alpha\}$, где је α релацијски симбол дужине 2. Та формула је пример формуле $\forall x A(x) \Rightarrow A(t)$, где је A формула $\exists y \alpha(x, y)$, терм t је y, па је $A(t)$ формула $\exists y \alpha(y, y)$. Да ли је формула $(\forall x \exists y \alpha(x, y)) \Rightarrow \exists y \alpha(y, y)$ ваљана? Одговор је: НЕ. Докажимо то тако што ћемо направити један контрамодел $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$ за ту формулу, односно једну интерпретацију у којој ће та формула бити неистинита. На пример, за $((\mathbf{N}, <), \imath)$ (за било коју $\imath : \mathcal{V} \to \mathbf{N}$) интерпретација посматране формуле је

$$(\forall x \exists y\ x < y) \Rightarrow (\exists y\ y < y)$$

и та формула, формула $(\forall x \exists y \alpha(x, y)) \Rightarrow \exists y \alpha(y, y)$, је неистинита у интерпретацији $((\mathbf{N}, <), \imath)$.

Погледајмо пажљивије нашу замену променљиве x термом y у формули $\exists y \alpha(x, y)$. Овом заменом променљива y терма y постаје везана променљива формуле која је резултат те замене, формуле $\exists y \alpha(y, y)$, тј. терм y није слободан за променљиву x у формули $\exists y \alpha(x, y)$.

Питамо се: ако је терм t слободан за променљиву x у формули A, да ли је тада формула $\forall x A(x) \Rightarrow A(t)$ ваљана? Одговор је: ДА. Сада ћемо то и доказати. Треба показати да ако је $A(t)$ формула A^x_t, онда за сваку интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ важи:

$$I_\imath(\forall x A(x) \Rightarrow A^x_t) = 1,$$

тј. да нема интерпретације $I_\imath$ за коју је $I_\imath(\forall x A(x)) = 1$ и $I_\imath(A^x_t) = 0$. Зато, посматрајмо произвољну интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ и покажимо да ако је $I_\imath(\forall x A(x)) = 1$, онда мора бити $I_\imath(A^x_t) = 1$. Имамо прво да том интерпретацијом $I_\imath$ терм t добија неку вредност d_0, $I_\imath(t) = d_0$, где је d_0 један од елемената скупа S. Даље, како је $I_\imath(\forall x A(x)) = 1$, то, на основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији, за сваку п-интерпретацију $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи $I_\jmath(A(x)) = 1$. Стога и за п-интерпретацију $\underline{\jmath}$, $\underline{\jmath} \simeq_x \imath$ за коју је $I_{\underline{\jmath}}(x) = \underline{\jmath}(x) = d_0$ имамо $I_{\underline{\jmath}}(A(x)) = 1$. За интерпретације $I_\imath$ и $I_{\underline{\jmath}}$ и сваку слободну променљиву y формуле A која је различита од x важи $I_\imath(y) = I_{\underline{\jmath}}(y)$ (по дефиницији $\simeq_x$), и још је $I_\imath(t) = I_{\underline{\jmath}}(x)$. Дакле важи да је $I_\imath(A^x_t)$ једнако $I_{\underline{\jmath}}(A(x))$, тј. $I_\imath(A^x_t)$ јесте 1. Значи за произвољну интерпретацију $I_\imath$ добили смо: ако је $I_\imath(\forall x A(x)) = 1$, онда вредност $I_\imath(A^x_t)$ мора бити 1. Закључујемо да је $I_\imath(\forall x A(x) \Rightarrow A^x_t)$ различито од 0 за сваку интерпретацију $I_\imath$, тј. $\forall x A(x) \Rightarrow A^x_t$ је ваљана формула.

На исти начин може се показати да је формула:

$$A^x_t \Rightarrow \exists x A(x),$$

ваљана, где је наравно терм t слободан за x у A. А може и другачије. Наиме, на основу ТЕОРЕМЕ 1, из таутологије $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ и предикатских формула $\forall x \neg A(x)$ и $\neg A_t^x$ добијамо

$$\models (\forall x \neg A(x) \Rightarrow \neg A_t^x) \Leftrightarrow (\neg\neg A_t^x \Rightarrow \neg \forall x \neg A(x))$$

тј. добијамо да је ваљана формула $\forall x \neg A(x) \Rightarrow \neg A_t^x$ еквивалентна формули $\neg\neg A_t^x \Rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$. Дакле, и $\neg\neg A_t^x \Rightarrow \neg \forall x \neg A(x)$ је ваљана формула. Већ знамо да су формуле $\neg\neg A_t^x \Leftrightarrow A_t^x$ и $\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg A(x)$ ваљане, па на основу дела (2) Задатка 3, закључујемо:

$$\models A_t^x \Rightarrow \exists x A(x).$$

Задатак 7 Формуле

(1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$

(2) $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge B), \quad x \notin SP(B)$

(3) $\forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \forall x A(x)), \quad x \notin SP(B)$

(4) $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$

(5) $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \wedge B), \quad x \notin SP(B)$

(6) $\exists x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \exists x A(x)), \quad x \notin SP(B)$

су ваљане.

(1) Довољно је доказати да су $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ и $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ еквивалентне формуле. За сваку интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ имамо да је:

$I_\imath(\forall x(A(x) \wedge B(x))) = 1$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(A(x) \wedge B(x)) = 1$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $min(I_\jmath(A(x)), I_\jmath(B(x))) = 1$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(A(x)) = 1$ и $I_\jmath(B(x)) = 1$

акко $I_\imath(\forall x A(x)) = 1$ и $I_\imath(\forall x B(x)) = 1$

акко $min(I_\imath(\forall x A(x)), I_\imath(\forall x B(x))) = 1$

акко $I_\imath(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)) = 1.$

(2) Довољно је доказати да су $\forall x(A(x) \wedge B)$ и $\forall x A(x) \wedge B$ еквивалентне формуле. За сваку интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ имамо да је:

$I_\imath(\forall x(A(x) \wedge B)) = 1$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(A(x) \wedge B) = 1$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $min(I_\jmath(A(x)), I_\jmath(B)) = 1$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(A(x)) = 1$ и $I_\jmath(B) = 1$

акко $I_\imath(\forall x A(x)) = 1$ и $I_\imath(B) = 1$

акко $min(I_\imath(\forall x A(x)), I_\imath(B)) = 1$

акко $I_\imath(\forall x A(x) \wedge B) = 1.$

(3) Доказ је аналоган доказу за формулу (2). Или можемо, користећи ваљану формулу (2), овако показати да је посматрана формула ваљана. Комутативност за $\wedge$ даје: $\models (B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (A(x) \wedge B)$, а одатле део (4) ТЕОРЕМЕ 5: $\models \forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow \forall x(A(x) \wedge B)$. Још, формула (2) је ваљана: $\models \forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge B)$, па користећи те две ваљане формуле, по делу (1) Задатка 3, закључујемо: $\models \forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge B)$. Опет комутативност за везник $\wedge$ даје $\models (\forall x A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge \forall x A(x))$, и коначно из последње две ваљане формуле, по делу (1) Задатка 3, имамо:

$$\models \forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \forall x A(x)).$$

(4) Довољно је показати да не може да буде $I_\imath(\exists x(A(x) \wedge B(x)))=1$ и $I_\imath(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))=0$ ни за једну интерпретацију $I_\imath$, тј. да ако је за неку интерпретацију $I_\imath$ вредност $I_\imath(\exists x(A(x) \wedge B(x))) = 1$, онда мора бити $I_\imath(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = 1$. За сваку интерпретацију $I_\imath=((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$,

ако је $I_\imath(\exists x(A(x) \wedge B(x))) = 1$,

онда постоји $\jmath_0 : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$ тако да је $I_{\jmath_0}(A(x) \wedge B(x)) = 1$,

тј. постоји $\jmath_0 : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$ да је $min(I_{\jmath_0}(A(x)), I_{\jmath_0}(B(x))) = 1$,

тј. постоји $\jmath_0 : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$ да је $I_{\jmath_0}(A(x)) = 1$ и $I_{\jmath_0}(B(x)) = 1$,

тј. $I_\imath(\exists x A(x)) = 1$ и $I_\imath(\exists x B(x)) = 1$,

значи $min(I_\imath(\exists x A(x)), I_\imath(\exists x B(x))) = 1$,

дакле $I_\imath(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = 1$.

(5) Довољно је доказати да су $\exists x(A(x) \wedge B)$ и $(\exists x A(x)) \wedge B$ еквивалентне. За сваку интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ имамо да је:

$I_\imath(\exists x(A(x) \wedge B)) = 0$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $I_\jmath(A(x) \wedge B) = 0$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: $min(I_\jmath(A(x)), I_\jmath(B)) = 0$

акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath \simeq_x \imath$, важи: или $I_\jmath(B) = 0$;
или $I_\jmath(B) = 1$ и $I_\jmath(A(x)) = 0$

акко или $I_\imath(B) = 0$; или $I_\imath(B) = 1$ и $I_\imath(\exists x A(x)) = 0$

акко $min(I_\imath(\exists x A(x)), I_\imath(B)) = 0$

акко $I_\imath((\exists x A(x)) \wedge B) = 0$.

(6) Доказ је аналоган доказу за формулу (5). Ова формула и формула (5) повезане су законом комутативности за везник $\wedge$ као формуле (2) и (3).

Погледајмо формуле (1) и (4) из Задатка 7. Из формуле (1) видимо да се квантификатор $\forall$, да сликовито кажемо, слаже са везником $\wedge$, тј. имамо еквивалентност формула $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ и $(\forall x A(x) \wedge \forall x B(x))$. Насупрот томе,

за квантификатор $\exists$ и везник $\wedge$ не важи таква веза, тј. немамо еквивалентност формула $\exists x(A(x) \wedge B(x))$ и $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x))$. Оне нису еквивалентне јер формула $(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) \Rightarrow (\exists x(A(x) \wedge B(x)))$ није ваљана, и ево одмах контрамодела за њу. На пример, ако су формуле $A(x)$ и $B(x)$ редом елементарне формуле $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ за неке релацијске симболе α и β дужине 1, онда имамо формуле $(\exists x\alpha(x) \wedge \exists x\beta(x))$ и $\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x))$ над неким језиком $\mathcal{J}$ који има те релацијске симболе. Тада је интерпретација $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$, где је S скуп природних бројева $\mathbf{N}$, а α_I и β_I су редом релације *бити паран* и *бити непаран*, један контрамодел за посматрану формулу. Наиме, истинито је да: *постоји паран број и постоји непаран број*,
стога имамо: $I_\imath(\exists x\alpha(x) \wedge \exists x\beta(x)) = 1$,
али неистинито је: *постоји број који је паран и непаран*,
те је $I_\imath(\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x))) = 0$.
Дакле, имамо да је $I_\imath((\exists x\alpha(x) \wedge \exists x\beta(x)) \Rightarrow (\exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x))))$ једнако 0.

Задатак 8 Формуле

(1) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee \exists x B(x))$

(2) $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \vee B), \quad x \notin SP(B)$

(3) $\exists x(B \vee A(x)) \Leftrightarrow (B \vee \exists x A(x)), \quad x \notin SP(B)$

(4) $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \vee B(x))$

(5) $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \vee B), \quad x \notin SP(B)$

(6) $\forall x(B \vee A(x)) \Leftrightarrow (B \vee \forall x A(x)), \quad x \notin SP(B)$

су ваљане.

(1) Показује се да за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи:
$I_\imath(\exists x(A(x) \vee B(x))) = 0 \quad$ акко $\quad I_\imath(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) = 0$,
као у доказу за формулу (1) из Задатка 7.

(2) Показује се да за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи:
$I_\imath(\exists x(A(x) \vee B)) = 0$ акко $I_\imath((\exists x A(x)) \vee B) = 0$,
као у доказу за формулу (2) из Задатка 7.

(3) Доказ је аналоган доказу за формулу (2). Ова формула и формула (2) повезане су законом комутативности за везник $\vee$ као што су у Задатку 7 формуле (5) и (6) повезане законом комутативности за везник $\wedge$.

(4) Као у доказу за формулу (4) из Задатка 7 показује се да не може бити: $I_\imath(\forall x A(x) \vee \forall x B(x))$=1 и $I_\imath(\forall x(A(x) \vee B(x)))$=0 ни за једну $I_\imath$.

(5) Показује се да за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи:
$I_\imath(\forall x(A(x) \vee B)) = 1$ акко $I_\imath((\forall x A(x)) \vee B) = 1$,
као у доказу за формулу (5) из Задатка 7.

(6) Доказ је аналоган доказу за формулу (5). Ова формула и формула (5) повезане су законом комутативности за везник $\vee$ као формуле (2) и (3).

Формуле (1) и (4) из Задатка 8 нам говоре о вези квантификатора $\forall$ и $\exists$ са везником $\vee$. Квантификатор $\exists$ се слаже са везником $\vee$, тј. имамо еквивалентност формула $\exists x(A(x)\vee B(x))$ и $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$, али не важи да су формула $\forall x(A(x)\vee B(x))$ и формула $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ еквивалентне, јер формула $(\forall x(A(x)\vee B(x)))\Rightarrow(\forall xA(x)\vee\forall xB(x))$ није ваљана. Ако су формуле $A(x)$ и $B(x)$ елементарне формуле редом $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ за неке релацијске симболе α и β дужине 1, онда формула $(\forall x(\alpha(x)\vee\beta(x)))\Rightarrow(\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x))$ има исти контрамодел као и формула $(\exists x\alpha(x)\wedge\exists x\beta(x))\Rightarrow(\exists x(\alpha(x)\wedge\beta(x)))$: интерпретација $I_\imath=((\mathrm{S},I^{\mathcal{J}}),\imath)$, где је S скуп природних бројева $\mathbf{N}$, а α_I и β_I су редом релације *бити паран* и *бити непаран*.

Задатак 9 Формуле

(1) $\forall x(A(x)\Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))$

(2) $\forall x(A(x)\Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists xA(x)\Rightarrow B),\quad x\notin SP(B)$

(3) $\forall x(B\Rightarrow A(x)) \Leftrightarrow (B\Rightarrow\forall xA(x)),\quad x\notin SP(B)$

(4) $\exists x(A(x)\Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall xA(x)\Rightarrow\exists xB(x))$

(5) $\exists x(A(x)\Rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall xA(x)\Rightarrow B),\quad x\notin SP(B)$

(6) $\exists x(B\Rightarrow A(x)) \Leftrightarrow (B\Rightarrow\exists xA(x)),\quad x\notin SP(B)$

(7) $\forall x(A(x)\Rightarrow B(x)) \Rightarrow (\exists xA(x)\Rightarrow\exists xB(x))$

су ваљане.

(1) Довољно је показати да не може да буде $I_\imath(\forall x(A(x)\Rightarrow B(x)))=1$ и $I_\imath(\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))=0$ ни за једну интерпретацију $I_\imath$. Наиме, за сваку интерпретацију $I_\imath=((\mathrm{S},I^{\mathcal{J}}),\imath)$ имамо да:

ако је $I_\imath(\forall x(A(x)\Rightarrow B(x)))=1$ и $I_\imath(\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))=0$,
онда за све $\jmath:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\jmath\simeq_x\imath$, важи: $I_\jmath(A(x)\Rightarrow B(x))=1$,
и $I_\imath(\forall xA(x))=1$ и $I_\imath(\forall xB(x))=0$,
тј. за све $\jmath:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\jmath\simeq_x\imath$, важи: $I_\jmath(A(x)\Rightarrow B(x))=1$ и $I_\jmath(A(x))=1$
и постоји $\jmath_0:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\jmath_0\simeq_x\imath$, за коју је $I_{\jmath_0}(B(x))=0$,
значи постоји $\jmath_0:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\jmath_0\simeq_x\imath$ за коју важи: $I_{\jmath_0}(A(x)\Rightarrow B(x))=1$
и $I_{\jmath_0}(A(x)\Rightarrow B(x))=0$, што је немогуће.

(2) Довољно је доказати да су $\forall x(A(x)\Rightarrow B)$ и $\exists xA(x)\Rightarrow B$ еквивалентне формуле. За сваку интерпретацију $I_\imath=((\mathrm{S},I^{\mathcal{J}}),\imath)$ имамо:

$I_\imath(\forall x(A(x)\Rightarrow B))=0$
акко постоји $\jmath_0:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\jmath_0\simeq_x\imath$ за коју важи: $I_{\jmath_0}(A(x)\Rightarrow B)=0$
акко постоји $\jmath_0:\mathcal{V}\to\mathrm{S}$, $\jmath_0\simeq_x\imath$ за коју важи: $I_{\jmath_0}(A(x))=1$ и $I_{\jmath_0}(B)=0$

акко $I_\imath(\exists x A(x)) = 1$ и $I_\imath(B) = 0$
акко $I_\imath(\exists x A(x) \Rightarrow B) = 0$.

(3) Доказ је сличан доказу за формулу (2).

(4) Довољно је показати да не може да буде $I_\imath(\exists x(A(x)\Rightarrow B(x)))=1$ и $I_\imath(\forall x A(x)\Rightarrow\exists x B(x))=0$. То можемо урадити као у доказу формуле (1), а и тако што ћемо показати да, ако је за неку интерпретацију $I_\imath=((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ вредност $I_\imath(\exists x(A(x) \Rightarrow B(x)))$ једнака 1, онда мора и вредност $I_\imath(\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))$ бити једнака 1. Наиме,

ако је $I_\imath(\exists x(A(x) \Rightarrow B(x))) = 1$,
онда постоји $\jmath_0{:}\mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$ да је $I_{\jmath_0}(A(x) \Rightarrow B(x)) = 1$,
тј. постоји $\jmath_0{:}\ \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, да је $max(1 - I_{\jmath_0}(A(x)), I_{\jmath_0}(B(x)))=1$,
тј. постоји $\jmath_0{:}\ \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, таква да је
бар једна од вредности $1 - I_{\jmath_0}(A(x))$ и $I_{\jmath_0}(B(x))$ једнака 1,
дакле постоји $\jmath_0{:}\ \mathcal{V} \to \mathrm{S}$, $\jmath_0 \simeq_x \imath$, таква да
$I_{\jmath_0}(A(x))$ јесте 0 или $I_{\jmath_0}(B(x))$ јесте 1.

Сада још остаје да покажемо да и када је $I_{\jmath_0}(A(x)) = 0$ и када је $I_{\jmath_0}(B(x))=1$ вредност $I_\imath(\forall x A(x)\Rightarrow\exists x B(x))$ јесте 1. Наиме,
ако је $I_{\jmath_0}(A(x)) = 0$, тада је, на основу дефиниције, $I_\imath(\forall x A(x)) = 0$, те је $I_\imath(\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)) = max(1 - 0, I_\imath(\exists x A(x))) = 1$;
ако је $I_{\jmath_0}(B(x)) = 1$, тада је, на основу дефиниције, $I_\imath(\exists x B(x)) = 1$, те је $I_\imath(\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)) = max(1 - I_\imath(\forall x A(x)), 1) = 1$.

(5) Доказ је сличан доказу за формулу (2).

(6) Доказ је сличан доказу за формулу (2).

(7) Доказ је сличан доказу за формулу (4).

1.2.3 Пренексна нормална форма

Овај одељак о облику предикатских формула који се зове пренексна нормална форма почећемо једним примером.

Пример 7 Посматрајмо формулу F:

$$\exists z \alpha(z) \land \forall x \exists y \beta(x, y),$$

где су α и β неки релацијски симболи редом дужине 1 и 2 језика над којим је формула F. Направимо формулу која је еквивалентна формули F, а у којој су сви квантификатори на њеном почетку. Наша формула F је еквивалентна формули F_1:

$$\forall x(\exists z \alpha(z) \land \exists y \beta(x, y))$$

јер је формула $F_1 \Leftrightarrow F$ ваљана, као један примерак ваљане формуле (3) из Задатка 7, ваљане формуле $\forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \forall x A(x))$, $x \notin SP(B)$. Наредни корак правимо уз помоћ ваљане формуле (5) из Задатка 7, ваљане формуле $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \wedge B)$, $x \notin SP(B)$: потформула формуле F_1, формула $\exists z \alpha(z) \wedge \exists y \beta(x, y)$ еквивалентна је формули $\exists z(\alpha(z) \wedge \exists y \beta(x, y))$. Онда, на основу дела (3) ТЕОРЕМЕ 5, добијамо да је F_1 еквивалентна формули F_2:

$$\forall x \exists z(\alpha(z) \wedge \exists y \beta(x, y)).$$

На крају, користећи ваљану формулу (6) из Задатка 7, ваљану формулу $\exists x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \exists x A(x))$, $x \notin SP(B)$, добијамо да је потформула $\alpha(z) \wedge \exists y \beta(x, y)$ формуле F_2 еквивалентна $\exists y(\alpha(z) \wedge \beta(x, y))$. Сада, на основу редом делова (4) и (3) ТЕОРЕМЕ 5 формула F_2, а тиме и полазна формула F, је еквивалентна формули F_3:

$$\forall x \exists z \exists y(\alpha(z) \wedge \beta(x, y)).$$

Формула F_3 је облика $\forall x \exists z \exists y C$, где је C формула $\alpha(z) \wedge \beta(x, y)$ која нема квантификаторе, те је формула F_3 у пренексној нормалној форми.

Ево и дефиниције формуле у пренексној нормалној форми.

Дефиниција пренексне нормалне форме

Кажемо да је формула у пренексној нормалној форми ако је за неко $n > 0$ она облика

$$Q_1 x_1 ... Q_n x_n A,$$

где је сваки Q_i $(1 \leq i \leq n)$ или квантификатор $\forall$ или квантификатор $\exists$ и формула A не садржи квантификаторе. Посебно, свака формула која нема квантификаторе је у пренексној нормалној форми.

Одмах ћемо доказати теорему о пренексној нормалној форми.

ТЕОРЕМА 6 (ТЕОРЕМА О ПРЕНЕКСНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ)

За било коју формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$ постоји бар једна формула F^{pf} у пренексној нормалној форми таква да је:

$$\models F \Leftrightarrow F^{pf}.$$

ДОКАЗ

Посматрајмо произвољну формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$. Ако се у формули F појављују везници који нису из базе везника $\{\wedge, \vee, \neg\}$, онда користећи познате везе између логичких везника правимо формулу еквивалентну формули F у којој се појављују само везници из тог скупа. Стога смемо да претпоставимо да је формула F већ таквог облика, тј. у формули F се појављују само везници $\wedge$, $\vee$ и $\neg$. Сада доказујемо теорему индукцијом по сложености формуле F, односно по броју n, који је збир броја логичких везника и броја квантификатора у формули F.

База индукције, $n = 0$. Формула F нема логичких везника нити квантификатора, тј. F је нека елементарна формула. Дакле, тражена формула F^{pf} је сама формула F.

Индукцијска претпоставка: теорема важи за сваку формулу F која има мање од n логичких везника и квантификатора, односно постоји формула F^{pf} у пренексној нормалној форми, таква да је:

$$\models F \Leftrightarrow F^{pf}.$$

Доказ да теорема важи за формулу са n везника и квантификатора.

Посматрајмо формулу F која има n логичких везника и квантификатора. Формула F може имати један од следећих облика:

$$A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad \neg A, \qquad \forall x A \qquad \text{или} \qquad \exists x A.$$

Без обзира који од пет наведених облика има формула F, њене потформуле A и B имају бар један везник или квантификатор мање од ње, па за њих важи индукцијска претпоставка: постоје формуле A^{pf} и B^{pf} у пренексној нормалној форми такве да је:

$$\models A \Leftrightarrow A^{pf} \qquad \text{и} \qquad \models B \Leftrightarrow B^{pf}.$$

Пошто су формуле A^{pf} и B^{pf} у пренексној нормалној форми, онда је свака од формула A^{pf} и B^{pf}

$(*)$ или формула која не садржи квантификаторе, тј. формуле A^{pf} и B^{pf} су редом формуле C и D које не садрже квантификаторе;

$(**)$ или формула у којој су сви квантификатори на њеном почетку, тј. формуле A^{pf} и B^{pf} су редом облика $Q_1x_1...Q_lx_lC$ и $P_1y_1...P_my_mD$ за неке $l, m > 0$, где је сваки Q_i $(1 \leq i \leq l)$ и P_j $(1 \leq j \leq m)$ или $\forall$ или $\exists$ и формуле C и D не садрже квантификаторе.

Ако бар једна од формула A^{pf} и B^{pf} има облик $(*)$, онда простим преименовањем њених променљивих можемо постићи да се у формулама C и D не јављају исте променљиве. Ако обе формуле A^{pf} и B^{pf} имају облик $(**)$ и нека слободна променљива формуле D, на пример променљива y, је једна од променљивих $x_1, ..., x_l$, променљива x_k за неко k, $1 \leq k \leq l$, онда је наша формула A^{pf} формула $Q_1x_1...Q_{k-1}x_{k-1}Q_kyQ_{k+1}x_{k+1}...Q_lx_lC$. На основу ваљане формуле алфабетско преписивање, потформула $Q_kyQ_{k+1}x_{k+1}...Q_lx_lC$ формуле A^{pf} еквивалентна је овој формули: $Q_kz(Q_{k+1}x_{k+1}...Q_lx_lC)^y_z$, где је z променљива која се не јавља у формули $Q_{k+1}x_{k+1}...Q_lx_lC$ и још тражимо да је различита и од променљивих $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_m$. На основу ТЕОРЕМЕ 5, добијамо да је A^{pf} еквивалентна формули $Q_1x_1...Q_{k-1}x_{k-1}Q_kz(Q_{k+1}x_{k+1}...Q_lx_lC)^y_z$ која је у пренексној нормалној форми. Исто такво преименовање чинимо ако би нека слободна променљива формуле C била једна од променљивих $y_1, ..., y_m$. Зато можемо претпоставити да слободне променљиве формуле C нису променљиве $y_1, ..., y_m$ нити су слободне променљиве формуле D променљиве $x_1, ..., x_l$. (Приметимо да то даје да су скупови $\{x_1, ..., x_l\}$ и $\{y_1, ..., y_m\}$ дисјунктни.) Дакле, за све могуће облике формула A^{pf}

и B^{pf} и њихове потформуле која не садрже квантификаторе редом формуле C и D можемо да претпоставимо да су скупови $SP(C)$ и $SP(D)$ дисјунктни. Сада користећи формуле A^{pf} и B^{pf} одредимо тражену формулу F^{pf}.

$\lhd$ Претпоставимо да је формула F облика $A \wedge B$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf} и формула B и B^{pf}, тј. из

$$\models A \Leftrightarrow A^{pf} \quad \text{и} \quad \models B \Leftrightarrow B^{pf},$$

на основу делова $(\wedge 1)$ и $(\wedge 2)$ ТЕОРЕМЕ 5 и дела (1) Задатка 3, имамо еквивалентност формула $A \wedge B$ и $A^{pf} \wedge B^{pf}$, односно важи

$$\models (A \wedge B) \Leftrightarrow (A^{pf} \wedge B^{pf}).$$

Ако су обе формуле A^{pf} и B^{pf} облика $(*)$, онда је формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$ у пренексној нормалној форми. Дакле, тражена формула F^{pf} је формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$.

Ако је бар једна од формула A^{pf} и B^{pf} облика $(**)$, онда је $A^{pf} \wedge B^{pf}$:

$$(Q_1x_1 ... Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1 ... P_my_mD)$$

где је $l > 0$ или $m > 0$.

Индукцијом по броју квантификатора формуле $A^{pf} \wedge B^{pf}$, по броју $l + m$, користећи ваљане формуле

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x A(x) \wedge B) \qquad \text{и} \qquad \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x A(x) \wedge B),$$

где x није слободна променљива формуле B (редом ваљане формуле (2) и (5) из Задатка 7) и ваљане формуле

$$\forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \forall x A(x)) \qquad \text{и} \qquad \exists x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \exists x A(x)),$$

где x није слободна променљива формуле B (редом ваљане формуле (3) и (6) из Задатка 7),

показаћемо да је формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$ еквивалентна формули:

$$Q_1x_1 ... Q_lx_lP_1y_1 ... P_my_m(C \wedge D),$$

која је у пренексној нормалној форми.

Ако је $l + m = 1$, онда је једна од формула A^{pf} и B^{pf} облика $(*)$, тј. формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$ је облика или $(Q_1x_1C) \wedge D$ или $C \wedge (P_1y_1D)$, где C и D немају квантификаторе. Ако је облика $(Q_1x_1C) \wedge D$, онда на основу поменутих ваљаних формула из Задатка 7 (или (2) или (5), што зависи од тога да ли је Q_1 редом $\forall$ или $\exists$) формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$ је еквивалентна формули $Q_1x_1(C \wedge D)$. Ако је $A^{pf} \wedge B^{pf}$ пак облика $C \wedge (P_1y_1D)$, онда користећи ваљане формуле из Задатка 7 (или (3) или (6)) добијамо да је еквивалентна формули $P_1y_1(C \wedge D)$.

Индукцијска претпоставка: формула $(Q_1x_1 ... Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1 ... P_my_mD)$ са $l + m$ квантификатора еквивалентна је формули:

$$Q_1x_1 ... Q_lx_lP_1y_1 ... P_my_m(C \wedge D).$$

Посматрајмо сада једну формулу задатог облика која има један квантификатор више. Она може бити или

$$(Q_1x_1...Q_{l+1}x_{l+1}C) \wedge (P_1y_1...P_my_mD)$$

или

$$(Q_1x_1...Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1...P_{m+1}y_{m+1}D).$$

Ако је $l > 0$, онда на основу поменутих ваљаних формула из Задатка 7 (или (2) или (5)), прва формула је еквивалентна формули

$$Q_1x_1((Q_2x_2...Q_{l+1}x_{l+1}C) \wedge (P_1y_1...P_my_mD)),$$

а друга формули

$$Q_1x_1((Q_2x_2...Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1...P_{m+1}y_{m+1}D)).$$

Ове формуле су редом облика $Q_1x_1E_1$ и $Q_1x_1E_2$ где је формула E_1 формула $(Q_2x_2...Q_{l+1}x_{l+1}C) \wedge (P_1y_1...P_my_mD)$, а формула E_2 је формула $(Q_2x_2...Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1...P_{m+1}y_{m+1}D)$. Формуле E_1 и E_2 имају $l + m$ квантификатора, па су по индукцијској претпоставци еквивалентне редом формули E_3:

$$Q_2x_2...Q_{l+1}x_{l+1}P_1y_1...P_my_m(C \wedge D),$$

односно формули E_4:

$$Q_2x_2...Q_lx_lP_1y_1...P_{m+1}y_{m+1}(C \wedge D),$$

које су у пренексној нормалној форми. На основу делова (3) и (4) ТЕОРЕМЕ 5, формуле $Q_1x_1E_1$ и $Q_1x_1E_2$ су еквивалентне редом формулама $Q_1x_1E_3$ и $Q_1x_1E_4$, формулама у пренексној нормалној форми.

Дакле, по делу (1) Задатка 3, формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$, тј. формула $(Q_1x_1...Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1...P_my_mD)$, еквивалентна је једној формули која је у пренексној нормалној форми, формули:

$$Q_1x_1...Q_lx_lP_1y_1...P_my_m(C \wedge D)$$

и то је тражена формула F^{pf}.

У случају да је l=0 доказ би био готово исти само бисмо користили поменуте ваљане формуле (или (3) или (6)) из Задатка 7.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $A \vee B$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf} и формула B и B^{pf}, тј. из

$$\models A \Leftrightarrow A^{pf} \quad \text{и} \quad \models B \Leftrightarrow B^{pf},$$

на основу делова ($\vee$1) и ($\vee$2) ТЕОРЕМЕ 5 и дела (1) Задатка 3, имамо еквивалентност формула $A \vee B$ и $A^{pf} \vee B^{pf}$, значи важи

$$\models (A \vee B) \Leftrightarrow (A^{pf} \vee B^{pf}).$$

Користећи ваљане формуле (2), (3), (5) и (6) из Задатка 8 поступамо аналогно као у случају када је формула F^{pf} облика $A \wedge B$, и добијамо формулу у пренексној нормалној форми, формулу F^{pf}, еквивалентну формули $A \vee B$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\neg A$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf}, тј. из

$$\models A \Leftrightarrow A^{pf},$$

на основу дела (1) ТЕОРЕМЕ 5, имамо еквивалентност формула $\neg A$ и $\neg A^{pf}$, тј. важи

$$\models \neg A \Leftrightarrow \neg A^{pf}.$$

Ако је формула A^{pf} облика $(*)$, онда је формула $\neg A^{pf}$ у пренексној нормалној форми. Дакле, тражена формула F^{pf} је $\neg A^{pf}$.

Ако је формула A^{pf} облика $(**)$, тј. A^{pf} је облика $Q_1x_1...Q_lx_lC$, $l > 0$, онда је формула $\neg A^{pf}$ облика

$$\neg(Q_1x_1...Q_lx_lC).$$

Индукцијом по броју квантификатора Q_i, $1 \leq i \leq l$, користећи Де Моргановe законе за квантификаторе:

$$\neg\forall zE \Leftrightarrow \exists z\neg E \qquad \text{и} \qquad \neg\exists zE \Leftrightarrow \forall z\neg E,$$

показаћемо да је формула $\neg(Q_1x_1...Q_lx_lC)$ еквивалентна формули $\overline{Q}_1x_1...\overline{Q}_lx_l\neg C$ која је у пренексној нормалној форми, где је $\overline{Q}_i$ (и у целом доказу ће то бити) квантификатор различит од Q_i, $1 \leq i \leq l$.
Ако је $l = 1$, онда је формула $\neg A^{pf}$ облика $\neg Q_1x_1C$. На основу Де Моргановиx закона, та формула је еквивалентна формули $\overline{Q}_1x_1\neg C$.
Индукцијска претпоставка: формула облика $\neg(Q_1x_1...Q_lx_lC)$ која има l квантификатора еквивалентна је формули у пренексној нормалној форми, формули $\overline{Q}_1x_1...\overline{Q}_lx_l\neg C$. Посматрајмо сада формулу која има један квантификатор више, формулу $\neg(Q_1x_1...Q_{l+1}x_{l+1}C)$. Де Морганови закони за квантификаторе дају да је та формула еквивалентна формули $\overline{Q}_1x_1\neg(Q_2x_2...Q_{l+1}x_{l+1}C)$. Даље, формула $\neg(Q_2x_2...Q_{l+1}x_{l+1}C)$ има l квантификатора, и по индукцијској претпоставци, еквивалентна је формули $\overline{Q}_2x_2...\overline{Q}_{l+1}x_{l+1}\neg C$ у пренексној нормалној форми, формули C_1^{pf}. Онда је и формула $\overline{Q}_1x_1C_1^{pf}$ у пренексној нормалној форми и на основу делова (3) и (4) ТЕОРЕМЕ 5 важи:

$$\models \overline{Q}_1x_1\neg(Q_2x_2...Q_{l+1}x_{l+1}C) \Leftrightarrow \overline{Q}_1x_1C_1^{pf}$$

Дакле, тражена формула F^{pf} је $\overline{Q}_1x_1\overline{Q}_2x_2...\overline{Q}_{l+1}x_{l+1}\neg C$ и за њу важи:

$$\models F \Leftrightarrow \overline{Q}_1x_1\overline{Q}_2x_2...\overline{Q}_{l+1}x_{l+1}\neg C.$$

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\forall xA$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf}, тј. из

$$\models A \Leftrightarrow A^{pf},$$

на основу дела (3) ТЕОРЕМЕ 5, имамо еквивалентност формула $\forall xA$ и $\forall xA^{pf}$, односно важи

$$\models \forall xA \Leftrightarrow \forall xA^{pf}.$$

Ако је формула A^{pf} облика $(*)$, онда је формула $\forall xA^{pf}$ у пренексној нормалној форми. Дакле, тражена формула F^{pf} је $\forall xA^{pf}$.

Ако је формула A^{pf} облика (∗∗), тј. облика $Q_1x_1...Q_lx_lC$, $l > 0$, онда је формула $\forall xA^{pf}$, тј. $\forall xQ_1x_1...Q_lx_lC$, такође у пренексној нормалној форми. Дакле, добили смо да за формулу F, која је облика $\forall xA$, и формулу $\forall xQ_1x_1...Q_lx_lC$ у пренексној нормалној форми важи:

$$\models F \Leftrightarrow \forall xQ_1x_1...Q_lx_lC,$$

те је формула $\forall xQ_1x_1...Q_lx_lC$ тражена формула F^{pf}.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\exists xA$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf}, тј. из

$$\models A \Leftrightarrow A^{pf},$$

на основу дела (4) ТЕОРЕМЕ 5, имамо еквивалентност формула $\exists xA$ и $\exists xA^{pf}$, дакле важи

$$\models \exists xA \Leftrightarrow \exists xA^{pf}.$$

Аналогно као и у случају када је формула F облика $\forall xA$ закључујемо да је формула $\exists xA^{pf}$ тражена формула F^{pf}.

♢

1.3 Дефиниције

Нешто најосновније о поступку прављења исправних (коректних) дефиниција већ је написано у [3] (прва глава). Сада ћемо у оквиру формалног језика предикатске логике изложити како се исправно дефинишу нови релацијски и операцијски симболи и нове индивидуалне константе.

На почетку овог одељка истакнимо језике предикатске логике који имају релацијски симбол једнакости, $=$, и које зовемо језици са једнакошћу. Важно је рећи да се у свим моделима једног језика са једнакошћу релацијски симбол једнакости $=$ интерпретира уобичајном једнакошћу над елементима носача тих модела.

Прво представимо још неке врсте квантификатора који се дефинишу помоћу квантификатора $\exists$ и $\forall$ и то само у појединим језицима.

У језицима са једнакошћу можемо дефинисати квантификатор $\exists_1 x$ (или $\exists! x$) који читамо: *постоји тачно један* x. Тај квантификатор се дефинише на следећи начин:

$$\exists_1 xA(x) =_{def} \exists x(A(x) \wedge \forall y(A(y) \Rightarrow x = y))$$

У ствари можемо дефинисати квантификатор $\exists_n x$ (*постоји тачно* n x*-ова*), за било који природан број n, $n \geq 1$. Ако је $n = 2$ та дефиниција (уз претпоставку да смо дефинисали везник $\neg$) је:

$$\exists_2 xA(x) =_{def} \exists x_1 \exists x_2 (A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge \neg(x_1 = x_2) \wedge (\forall y(A(y) \Rightarrow (y = x_1 \vee y = x_2)))),$$

а аналогно се дефинише квантификатор $\exists_n x$ за $n > 2$.

Даље, у језицима који садрже неке релацијске симболе ρ дужине 2 (на пример $\leq$, $<$ или $\in$ и који се интерпретирају редом: *мање или једнако*, *мање*, *бити елемент*) можемо дефинисати ограничене квантификаторе $\forall x \rho y$ и $\exists x \rho y$ овако:

$$\forall x \rho y \; A =_{def} \forall x (x \rho y \Rightarrow A)$$

$$\exists x \rho y \; A =_{def} \exists x (x \rho y \wedge A).$$

1. Дефиниција новог релацијског симбола

Посматрајмо један језик $\mathcal{J}$ предикатске логике. Нови релацијски симбол α дужине n, за неки природан број n, $n \geq 1$, дефинишемо овако:

$$\alpha(x_1, ..., x_n) \quad \textsf{AKKO} \quad F(x_1, ..., x_n)$$

где је $F(x_1, ..., x_n)$ једна предикатска формула на језику $\mathcal{J}$ са највише n слободних променљивих. Тај нови релацијски симбол α не припада језику $\mathcal{J}$, већ се овом дефиницијом, као нови релацијски симбол, додаје том језику.

Пример 2 За неки језик $\mathcal{J}$ са једнакошћу и са операцијским симболом $*$ дужине 2, нови релацијски симбол α дужине 2 уводимо следећом дефиницијом:

$$\alpha(x, y) \quad \textsf{AKKO} \quad \exists z \;\; (x * z = y)$$

Ако узмемо такву интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ да је S скуп природних бројева $\mathbf{N}$ и операцијски симбол $*$ интерпретирамо операцијом множење, онда се релацијски симбол α интерпретира познатом релацијом *дели*, $|$, на скупу природних бројева:

$$m \mid n \quad \textsf{AKKO} \quad \exists l \;\; (m \cdot l = n)$$

Пример 3 Ако језик $\mathcal{J}$ има релацијски симбол α дужине 2, онда нови релацијски симбол β дужине 3 уводимо следећом дефиницијом:

$$\beta(y, x, z) \quad \textsf{AKKO} \quad (\alpha(y, x) \wedge \alpha(x, z)) \vee (\alpha(z, x) \wedge \alpha(x, y)).$$

За интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$, где је S скуп реалних бројева $\mathbf{R}$, а релацијски симбол α је интерпретиран релацијом $<$, релацијски симбол β се интерпретира релацијом *између*, $\mathbf{B}$, где $\mathbf{B}(y, x, z)$ читамо *x је између y и z.*

$$\mathbf{B}(y, x, z) \quad \textsf{AKKO} \quad (y < x \wedge x < z) \vee (z < x \wedge x < y).$$

У наредном примеру видећемо једну некоректну дефиницију новог релацијског симбола.

Пример 4 Имамо језик $\mathcal{J}$ са једнакошћу и операцијским симболом $\bullet$ дужине 2, па дефинишемо нови релацијски симбол ρ дужине 2 на следећи начин:

$$\rho(x, y) \quad \textsf{AKKO} \quad y = x \bullet z.$$

Грешку смо направили јер смо релацију ρ дужине 2 дефинисали формулом $y = x \bullet z$ која има три слободне променљиве. Ако за носач узмемо скуп природних бројева $\mathbf{N}$ и $\bullet$ интерпретирамо операцијом $+$, онда за два природна броја, на пример 4 и 7 не можемо да кажемо да ли су у релацију ρ или не, јер не знамо вредност за z. Имамо $\rho(4,7)$ AKKO $7 = 4 + z$, па за $z = 3$ имамо да је $\rho(4,7)$ тачно, а за сваки други природан број различит од 3 имамо да $\rho(4,7)$ није тачно!

2. Дефиниција новог операцијског симбола

Као и при дефинисању новог релацијског симбола тако и при дефинисању новог операцијског симбола тај симбол не сме да се појављује у посматраном језику $\mathcal{J}$. Нови операцијски симбол f дужине n се уводи помоћу неког терма t језика $\mathcal{J}$ са n променљивих $x_1, ..., x_n$, $n \geq 1$, следећом дефиницијом:

$$f(x_1, ..., x_n) =_{def} t(x_1, ..., x_n).$$

Све дефиниције оваквог облика, сликовито речено, дефиниције у облику једнакости, су експлицитне дефиниције операцијског симбола.

Дајемо пример једне такве дефиниције операцијског симбола.

Пример 5 Имамо језик $\mathcal{J}$ који има и константе 4 и 2, а и операцијске симболе $*$ и $/$ дужине 2. Нови операцијски симбол $\circ$ дужине 2 уводимо следећом дефиницијом:

$$x \circ y =_{def} 4 * ((x/2) * y).$$

У наредном примеру упозорићемо на могуће грешке при увођењу новог операцијског симбола.

Пример 6 Као у случају дефинисања новог релацијског симбола који смо представили у Примеру 4, можемо направити грешку око дужине новог операцијског симбола. На пример, ако, помоћу операцијских симбола $+$ и $\cdot$ дужине 2, хоћемо да дефинишемо операцијски симбол $*$ овако

$$x * y =_{def} y \cdot x + z,$$

онда та дефиниција није добра јер операцијски симбол дужине 2 дефинишемо помоћу терма са 3 променљиве.

Рецимо да постоје операцијски симболи које не можемо дефинисати експлицитно, као вредност терма за неке дате вредности његових променљивих. На пример, мањи број од два природна броја дефинишемо овако:

$$min(x, y) = z \quad \text{AKKO} \quad (x \leq y \wedge z = x) \vee (y \leq x \wedge z = y).$$

Имамо, наиме имплицитне дефиниције нових операцијских симбола које су следећег облика

$$f(x_1, ..., x_n) = y \quad \text{AKKO} \quad A(y, x_1, ..., x_n)$$

где је $A(y, x_1, ..., x_n)$ нека предикатска формула, $n \geq 1$, при чему је оваква дефиниција исправна ако и само ако важи:

(1) за сваку n-торку $x_1, ..., x_n$ постоји y тако да важи $A(y, x_1, ..., x_n)$ и

(2) y је јединствен, тј. ако је $A(y_1, x_1, ..., x_n)$ и $A(y_2, x_1, ..., x_n)$, онда је $y_1 = y_2$.

Ова два услова могу се представити једном формулом. Дакле, исправна имплицитна дефиниција је облика

$$f(x_1, ..., x_n) = y \quad \text{AKKO} \quad \forall x_1 ... \forall x_n \exists_1 y A(y, x_1, ..., x_n).$$

> Пример 7 За неки језик $\mathcal{J}$ са једнакошћу и релацијским симболом β дужине 2 дефинишемо нови операцијски симбол дужине 2, симбол h:
>
> $h(x, y) = z$ AKKO $\forall x \forall y \exists_1 z((\beta(x, y) \wedge z = x) \vee (\beta(y, x) \wedge z = y))$
>
> Ако узмемо интерпретацију $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ где је S скуп природних бројева $\mathbf{N}$ и релацијски симбол β интерпретирамо релацијом $\leq$, онда је операција min, коју смо поменули, интерпретација овог новог операцијског симбола h.

На крају овог дела, погледајмо још једанпут дефиницију операцијског симбола $\circ$ из Примера 5 (уз претпоставку да је језик $\mathcal{J}$ из тог примера језик са једнакошћу). Приметимо да ту дефиницију, а и сваку другу експлицитну дефиницију, можемо записати и овако

$$z = x \circ y \quad \text{AKKO} \quad \forall x \forall y \exists_1 z(z = 4 * ((x/2) * y)).$$

3. Дефиниција нове индивидуалне константе

Као и увођење новог операцијског симбола и нова индивидуална константа неког језика $\mathcal{J}$ може се дефинисати екплицитно и имплицитно. Екплицитна дефиниција нове индивидуалне константе c је облика

$$c =_{def} t$$

где је t неки терм језика $\mathcal{J}$ без промењљивих.

Имплицитно увођење нове индивидуалне константе је дефинисање помоћу предикатске формуле са тачно једном слободном промењљивом, формуле $A(x)$, на следећи начин:

$$c = x \quad \text{AKKO} \quad \exists_1 x A(x).$$

Наравно, оваква дефиниција је исправна ако и само ако важи $\exists_1 x A(x)$, односно ако постоји јединствен x за који важи $A(x)$.

Глава 2

Теорије првог реда

У првом делу ове главе представићемо предикатску логику као формалну теорију[1] и то са два формална система: формалним системом природне дедукције $\mathcal{NK}$ и хилбертовским формалним системом $\mathcal{K}$. У оквиру формалних система предикатске логике засноване су теорије првог реда (које се још зову и предикатске теорије), и њихову дефиницију даћемо у другом делу главе. У том делу представићемо и четири теорије првог реда: теорију чисте једнакости, теорију парцијалног уређења и теорије група и комутативних група. Нека важна својства теорија првог реда доказаћемо у трећем делу главе. Осим тога, дефинисаћемо појам модела једне такве теорије и доказати да свака непротивречна теорија првог реда има модел. У последњем, четвртом, делу главе, доказаћемо веома значајно својство предикатске логике, потпуност те логике. Наиме, показаћемо да у предикатској логици за сваку формулу F важи: F је ваљана формула ако и само ако је F теорема.

2.1 Предикатска логика као формална теорија

Као што је исказна логика једна формална теорија (видети поглавље 3.1 у [3]) и предикатска логика јесте једна формална теорија. У овом поглављу представићемо два формална система предикатске логике, систем природне дедукције $\mathcal{NK}$ и хилбертовски систем $\mathcal{K}$. Ти системи $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$ биће на неки начин проширења формалних система исказне логике из [3], редом система

---

[1] дефиниција формалне теорије у [3], одељак 3.1.

$\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$. Одмах рецимо да постоји и веза између теорема исказне логике и теорема предикатске логике. Наиме, за исказну формулу $F(p_1, ..., p_n)$, произвољне предикатске формуле $A_1, ...,$ A_n (над неким језиком $\mathcal{J}$) и предикатску формулу $F(A_1, ..., A_n)$, које су посматране у одељку 1.2.2, важи: ако је формула $F(p_1, ..., p_n)$ теорема исказне логике, онда је формула $F(A_1, ..., A_n)$ теорема предикатске логике. (Доказ ове особине даћемо у 2.1.3, Задатак 8).

2.1.1 Правила за квантификаторе природне дедукције

У природној дедукцији за предикатску логику аксиоматско правило, правила за логичке везнике (за увођење и елиминацију) и Персово правило (и правило јаког свођења на противречност, тј. RAA) су истог облика као у природној дедукцији за исказну логику (видети 3.2.1 у [3]), само су њихове премисе и закључци предикатске формуле. Осим тих правила, и за сваки квантификатор (и $\forall$ и $\exists$) постоје правило увођења и правило елиминације тог квантификатора. Заједно, аксиоматско правило, правила за везнике и за квантификаторе и Персово правило (или RAA), чине природну дедукцију за предикатску логику.

У овом одељку, неформално и преко примера, упознаћемо се са природнодедукцијским правилима за квантификаторе. Одмах рецимо да као што су у природној дедукцији за исказну логику докази без непрецртаних хипотеза давали теореме[2], исто то важи и у предикатској логици: ако за неку предикатску формулу постоји природнодедукцијски доказ без непрецртаних хипотеза, онда је она теорема те логике. Очекујемо, поучени опет исказном логиком (а то ћемо и доказати у 2.4.1), да је свака теорема предикатске логике истинита у свим интерпретацијама, тј. да је ваљана формула. На почетку дајемо четири доказа у систему природне дедукције за предикатску логику у којима се користе само правила за логичке везнике и правило RAA, а она су нам позната.

Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A}^{1} \qquad \dfrac{A \cancel{\Rightarrow \neg} A^{2} \quad \cancel{A}^{1}}{\neg A}\Rightarrow E}{\bot}\neg E}{\neg A}1\neg U}{(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A}2 \Rightarrow U$$

Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow B$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg B}^{1}}{\neg A \Rightarrow \neg B}\Rightarrow U \qquad \neg(\neg A \cancel{\Rightarrow}^{2} \neg B)}{\bot}\neg E}{B}1RAA}{(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow B}2 \Rightarrow U$$

---

[2] дефиниције доказа и теореме у формалној теорији у [3], одељак 3.1.

Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A}^{2} \qquad \cancel{\neg A}^{1}}{\bot}\,\neg E}{\neg B}\,\bot E}{\neg A \Rightarrow \neg B}\,1 \Rightarrow U \qquad \cancel{\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)}^{3}}{\bot}\,\neg E}{\neg A}\,2\neg U}{(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A}\,3 \Rightarrow U$$

А ево и једног доказа у коме има непрецртаних хипотеза, доказ формуле $\neg\forall x A(x) \wedge \neg B$ из хипотезе $\neg(\forall x A(x) \vee B)$, назовимо га доказ $\mathcal{D}'$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x A(x)}^{1}}{\forall x A(x) \vee B}\,\vee U_1 \quad \neg(\forall x A(x) \vee B)}{\bot}\,\neg E}{\neg\forall x A(x)}\,1\neg U \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{B}^{2}}{\forall x A(x) \vee B}\,\vee U_2 \quad \neg(\forall x A(x) \vee B)}{\bot}\,\neg E}{\neg B}\,2\neg U}{\neg\forall x A(x) \wedge \neg B}\,\wedge U$$

1. **Правила за увођење и елиминацију квантификатора** $\forall$

   У овом неформалном представљању природне дедукције за предикатску логику (исто као и за исказну логику), неки доказ $\mathcal{D}$ формуле A записиваћемо на следећи начин:

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \\ A.\end{array}$$

   Интересантно је да и докази из ове књиге могу да послуже као примери који илуструју природнодедукцијска правила.

   > **Пример 1** Подсетимо се како смо доказивали да је нека формула F ваљана, односно како смо доказивали следеће тврђење: „за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи $I_\imath(F) = 1$“.
   > Посматрали смо једну потпуно произвољну интерпретацију $I_{\bar\imath}$. Затим смо, не користећи ниједну њену специфичну особину по којој се она можда разликује од других интерпретација, доказали да важи $I_{\bar\imath}(F) = 1$. Наш крајњи закључак је био: пошто за произвољну интерпретацију $I_{\bar\imath}$ важи $I_{\bar\imath}(F) = 1$, онда за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи $I_\imath(F) = 1$.

   Овакви докази као из нашег **Примера 1** су коректни јер у поступку расуђивања и закључивања није коришћена ниједна особина интерпретације $I_{\bar\imath}$ коју можда нема нека друга интерпретација $I_\imath$, на пример: да је за неку потформулу A формуле F вредност $I_{\bar\imath}(A)$ једнака 1, јер неком другом интерпретацијом та вредност може бити и 0; или да је носач модела $I_{\bar\imath}$ неки посебан скуп, на пример скуп природних бројева са својим специфичним особинама које нема носач неке друге интерпретације; и слично.

Дакле, потпуно произвољну интерпретацију $I_{\bar{\imath}}$, за коју смо показали да има жељену особину (особину: $I_{\bar{\imath}}(F) = 1$), сматрали само једним представником свих могућих интерпретација и наше закључивање је било: када смо показали да та особина важи за произвољног представника свих интерпретација, интерпретацију $I_{\bar{\imath}}$, онда та особина мора да важи за сваку интерпретацију.

Тврђење из нашег **Примера 1** је тврђење типа „за сваки објекат $\mathbf{x}$ неког скупа $\mathbf{X}$ важи особина O“, где је $\mathbf{x}$ интерпретација $I_\imath$, а особина O је $I_\imath(F) = 1$. Доказ тог тврђења састоји се од два корака. Први корак је доказ особине $I_{\bar{\imath}}(F) = 1$ за произвољну интерпретацију $I_{\bar{\imath}}$ и тај доказ испуњава услов да у њему нисмо користили ниједну специјалну особину произвољно изабраног представника интерпретација, интерпретације $I_{\bar{\imath}}$, већ само оне особине које карактеришу појам интерпретације. Други корак је закључивање: када за произвољну интерпретацију $I_{\bar{\imath}}$ важи особина $I_{\bar{\imath}}(F) = 1$, онда за сваку интерпретацију $I_\imath$ важи та особина. Тим закључивањем је представљено природнодедукцијско правило увођења квантификатора $\forall$.

Правило увођења квантификатора $\forall$

Ако је

$$\begin{matrix}\mathcal{D}\\ A\end{matrix}$$

доказ A и променљива x није слободна променљива ниједне непрецртане хипотезе доказа $\mathcal{D}$, онда је

$$\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \dfrac{A}{\forall x A}\ (\forall U)\end{matrix}$$

доказ $\forall x A$ и он има исте непрецртане хипотезе као доказ $\mathcal{D}$.

Истакнимо да услов о променљивој x, који је наведен у правилу $\forall U$ и који мора бити задовољен да би примена правила била исправна, у ствари јесте услов који смо ми поставили за $I_{\bar{\imath}}$ у доказу особине из **Примера 1** да за сваку $I_\imath$ важи $I_\imath(F) = 1$. Наиме, услов да променљива x није слободна ни у једној непрецртаној хипотези доказа $\mathcal{D}$, онемогућава да на основу тога што формула A важи за неко одређено x закључимо да A важи за свако x. Дајемо један пример неисправне примене правила $\forall U$:

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha(x)}^{1}}{\forall x\alpha(x)}\,\forall U}{\alpha(x)\Rightarrow\forall x\alpha(x)}\,1 \Rightarrow U$$

У овом примеру немамо непрецртаних хипотеза, па, по ономе што смо рекли на почетку одељка, формула $\alpha(x)\Rightarrow\forall x\alpha(x)$ треба да буде теорема предикатске логике, а и ваљана формула. Ако поставимо питање истинитости формуле $\alpha(x)\Rightarrow\forall x\alpha(x)$ очигледно је да она није увек истинита. Ево једног контрамодела за ту формулу: интерпретација $I_\imath = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ где је S скуп природних бројева $\mathbf{N}$, α_I је релација *бити паран* и п-интерпретација $\imath:\mathcal{V}\to\mathbf{N}$ таква да је $\imath(x)=2$. Имамо $I_\imath(\alpha(x))=1$ и $I_\imath(\forall x\alpha(x))=0$, те добијамо $I_\imath(\alpha(x)\Rightarrow\forall x\alpha(x))=0$. Стога сумњамо и у то да је та формула теорема, тј. да је то пример једног природнодедукцијског доказа. Где је направљена грешка? У примени правила $\forall U$. Јер, x је слободна променљива непрецртане хипотезе $\alpha(x)$, а ми смо упркос томе применили правило $\forall U$ и наравно направили грешку.

Сада је на реду правило елиминисања квантификатора $\forall$. Овако расуђујемо: ако имамо доказано тврђење „за свако x важи особина O“, онда је јасно да та особина важи и за једно конкретно x_0. Баш такво расуђивање представљено је правилом елиминисања квантификатора $\forall$.

Правило елиминисања квантификатора $\forall$

Ако је

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \forall xA\end{array}$$

доказ $\forall xA$ и t терм слободан за променљиву x у формули A, онда је

$$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \dfrac{\forall xA}{A_t^x}\ (\forall E)\end{array}$$

доказ A_t^x и он има исте непрецртане хипотезе као доказ $\mathcal{D}$.

Ево доказа ваљане формуле $\forall xA(x)\Rightarrow A_t^x$, где је наравно терм t слободан за x у формули A, у коме се користи правило $\forall E$:

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall xA(x)}^{1}}{A_t^x}\ \forall E}{\forall xA(x)\Rightarrow A_t^x}\ 1\Rightarrow U$$

Овај доказ нема непрецртаних хипотеза, и то као што смо већ рекли, значи да је та ваљана формула теорема предикатске логике.

А ево једног доказа у коме се користе оба правила и $\forall U$ и $\forall E$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x(A(x)\Rightarrow B(x))}^{2}}{A_c^x\Rightarrow B_c^x}\forall E \qquad\qquad \dfrac{\cancel{\forall xA(x)}^{1}}{A_c^x}\forall E}{B_c^x}\ \Rightarrow E}{\forall xB(x)}\forall U}{\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x)}1\Rightarrow U}{(\forall x(A(x)\Rightarrow B(x)))\Rightarrow(\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))}2\Rightarrow U$$

2. Правила за увођење и елиминацију квантификатора $\exists$

Пре него што представимо правило за увођење квантификатора $\exists$ погледајмо следећи пример.

Пример 2 Како ћемо доказати тврђење: „постоји цео број који је решење једначине $x+2=0$“. Сматраћемо да смо доказали

> то тврђење ако нађемо конкретан цео број који јесте решење једначине $x+2=0$. Решимо онда ту једначину. На основу особина сабирања целих бројева и једнакости имамо: $x+2=0$ акко $(x+2)-2=0-2$ акко $(x+2)-2=-2$ акко $x+(2-2)=-2$ акко $x+0=-2$ акко $x=-2$.

Доказ из Примера 2 илуструје закључивање које је представљено у правилу увођења квантификатора $\exists$. Наиме, правилом за увођење квантификатора $\exists$ дато је једноставно и очигледно правилно закључивање: ако имамо доказ да нека особина важи за једно конкретно x, онда је то доказ и за својство: постоји x за које важи та особина.

> **Правило увођења квантификатора $\exists$**
>
> Ако је
>
> $$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ A^x_t\end{array}$$
>
> доказ A^x_t и терм t је слободан за променљиву x у формули A, онда је
>
> $$\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \dfrac{A^x_t}{\exists x A}\ (\exists U)\end{array}$$
>
> доказ $\exists x A$, и његове непрецртане хипотезе су непрецртане хипотезе доказа $\mathcal{D}$.

Доказ у коме се појављују правила $\forall E$ и $\exists U$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x(A(x)\Rightarrow B(x))}^{2}}{A^x_c\Rightarrow B^x_c}\forall E \qquad \dfrac{\cancel{\forall x A(x)}^{1}}{A^x_c}\forall E}{B^x_c}\Rightarrow E}{\exists x B(x)}\exists U}{\forall x A(x)\Rightarrow \exists x B(x)}1\Rightarrow U}{(\forall x(A(x)\Rightarrow B(x)))\Rightarrow(\forall x A(x)\Rightarrow \exists x B(x))}2\Rightarrow U$$

Остаје нам још да представимо правило елиминисања квантификатора $\exists$. Можемо рећи да је то најсложеније правило природне дедукције. Главна хипотеза у расуђивању које је дато тим правилом је хипотеза о постојању x са неком особином O, тј. главна хипотеза је: „постоји x са особином O“. У математичкој пракси, ако у неком доказу имамо хипотезу „постоји x са особином O“ одмах је замењујемо са: „нека је (нека се зове, означимо са) x_0 то x које има особину O“. Даље у наставку тог доказа, свако појављивање x_0 је у ствари место у том доказу на коме се користи хипотеза: постоји x са особином O. Које су замке овакве замене? Прво, ни у једној другој хипотези у делу доказа пре места ове замене не сме да се јавља x_0, јер би то значило да на месту замене није узето потпуно ново, дотад у доказу некоришћено x_0, које не зависи од дела доказа пре места замене, и које је само један представник x-ова са особином O. Друго, не сме да постоји могућност да x_0 буде замењено неким другим термом, на пример y^2, јер би то значило и да је x_0 вредност терма y^2 (тј. квадратне функције) за неку одређену вредност y, а то је више но што ми претпостављамо. Јер, ми претпостављамо само постојање (и ништа друго) неког x (назовимо га, озачимо га са x_0) који има особину O. Ево и правила елиминисања квантификатора $\exists$.

Правило елиминисања квантификатора $\exists$

Ако су

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_2 \\ \exists x A & \text{и} & C \end{array}$$

докази редом $\exists x A$ и C и променљива x није слободна променљива формуле C нити и једне непрецртане хипотезе доказа $\mathcal{D}_2$ различите од A, онда је

$$\dfrac{\begin{array}{c} \mathcal{D}_1 \\ \exists x A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cancel{A} \\ \mathcal{D}_2 \\ C \end{array}}{C}\,(\exists E)$$

доказ C, и његове непрецртане хипотезе су непрецртане хипотезе доказа $\mathcal{D}_2$, осим можда A и непрецртане хипотезе доказа $\mathcal{D}_1$.

Напоменимо да је наше x_0 из описа правила елиминације $\exists$ променљива x коју смо истакли у самом правилу $\exists E$, а да су замке замене, о којима смо говорили у том опису, избегнуте условом који је постављен за ту променљиву x.

Пример 3 Погледајмо још један природнодедукцијски доказ:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x(\cancel{A(x)\Rightarrow}^{3} B(x)) \qquad \dfrac{\dfrac{A(x)\cancel{\Rightarrow}^{1} B(x) \qquad \dfrac{\forall x\cancel{A(x)}^{2}}{A(x)}\,\forall E}{B(x)}\,{\Rightarrow}E}{\exists x B(x)}\,\exists U}{\exists x B(x)}\,1\exists E}{\dfrac{\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x)}{(\exists x(A(x) \Rightarrow B(x))) \Rightarrow (\forall x A(x) \Rightarrow \exists x B(x))}\,3{\Rightarrow}U}\,2{\Rightarrow}U$$

Проверимо примену правила $\exists E$. Формула $A(x) \Rightarrow B(x)$ формула A из правила елиминације квантификатора $\exists$ и када примењујемо то правило осим ње непрецртана хипотеза је и формула $\forall x A(x)$. Имамо да x није слободна променљива формуле $\forall x A(x)$, нити закључка тог правила, формуле $\exists x B(x)$; само је слободна променљива формуле $A(x) \Rightarrow B(x)$. Дакле, добро смо применили правило $\exists E$.

Пример 4 Проверимо примену правила $\forall U$ и $\exists E$ у овом доказу:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{2}{\cancel{\exists x\forall y B(x,y)}}$}
\AxiomC{$\overset{1}{\cancel{\forall y B(x,y)}}$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$B(x,y)$}
\RightLabel{$\exists U$}
\UnaryInfC{$\exists x B(x,y)$}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\forall y\exists x B(x,y)$}
\RightLabel{$1\exists E$}
\BinaryInfC{$\forall y\exists x B(x,y)$}
\RightLabel{$2{\Rightarrow}U$}
\UnaryInfC{$\exists x\forall y B(x,y)\Rightarrow\forall y\exists x B(x,y)$}
\end{prooftree}
$$

У нашој примени правила $\forall U$ променљива y не сме да буде слободна променљива непрецртаних хипотеза тог дела доказа, формуле $\forall y B(x,y)$. Значи, добро смо применили правило $\forall U$. За правило $\exists E$ имамо да је x слободна променљива само формуле $\forall y B(x,y)$, која је формула A из правила елиминације квантификатора $\exists$, а није слободна променљива других непрецртаних хипотеза када је оно примењено, (таквих у овом доказу нема), нити закључка тог правила, формуле $\forall y\exists x B(x,y)$. Дакле, добро смо применили правило $\exists E$.

На крају овог упознавања са правилима за квантификаторе природне дедукције дајемо још неколико природнодедукцијских доказа. Наиме, показаћемо да значајне ваљане формуле које смо представили у одељку 1.2.2 (Задаци 4-5 и Задаци 7-8) имају доказе без непрецртаних хипотеза, а то, као што смо већ рекли, значи да су те формуле теореме предикатске логике.

Пример 5 Покажимо да ваљане формуле

(1) $\forall x\forall y A\Leftrightarrow\forall y\forall x A$

(2) $\exists x\exists y A\Leftrightarrow\exists y\exists x A$

(3) $\forall x A\Leftrightarrow\forall y A^x_y$, где је y променљива која се не јавља у A

(4) $\exists x A\Leftrightarrow\exists y A^x_y$, где је y променљива која се не јавља у A

имају доказе без непрецртаних хипотеза.

(1) Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\forall x\forall y A\Leftrightarrow\forall y\forall x A$:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{1}{\cancel{\forall x\forall y A}}$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\forall y A$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\forall x A$}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\forall y\forall x A$}
\RightLabel{$1{\Rightarrow}U$}
\UnaryInfC{$\forall x\forall y A\Rightarrow\forall y\forall x A$}
\AxiomC{$\overset{2}{\cancel{\forall y\forall x A}}$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\forall x A$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{A}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\forall y A$}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\forall x\forall y A$}
\RightLabel{$2{\Rightarrow}U$}
\UnaryInfC{$\forall y\forall x A\Rightarrow\forall x\forall y A$}
\RightLabel{${\Leftrightarrow}U$}
\BinaryInfC{$\forall x\forall y A\Leftrightarrow\forall y\forall x A$}
\end{prooftree}
$$

(2) Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\exists x\exists y A\Leftrightarrow\exists y\exists x A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists x\exists yA}^{3} \quad \dfrac{\cancel{\exists yA}^{2} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{A}^{1}}{\exists xA}\exists U}{\exists y\exists xA}\exists U}{\exists y\exists xA}1\exists E}{\exists y\exists xA}2\exists E}{\exists x\exists yA\Rightarrow\exists y\exists xA}3{\Rightarrow}U \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\exists y\exists xA}^{6} \quad \dfrac{\cancel{\exists xA}^{5} \quad \dfrac{\dfrac{\cancel{A}^{4}}{\exists yA}\exists U}{\exists x\exists yA}\exists U}{\exists x\exists yA}4\exists E}{\exists x\exists yA}5\exists E}{\exists y\exists xA\Rightarrow\exists x\exists yA}6{\Rightarrow}U}{\exists x\exists yA\Leftrightarrow\exists y\exists xA}{\Leftrightarrow}U$$

(3) Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA_y^x$, ако се y не јавља у формули A:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall xA}^{1}}{A_y^x}\forall E}{\forall yA_y^x}\forall U}{\forall xA\Rightarrow\forall yA_y^x}1{\Rightarrow}U \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall yA_y^x}^{2}}{(A_y^x)_x^y}\forall E^*}{\forall xA}\forall U}{\forall yA_y^x\Rightarrow\forall xA}2{\Rightarrow}U}{\forall xA\Leftrightarrow\forall yA_y^x}{\Leftrightarrow}U$$

где је јасно да закључак правила $\forall E^*$, формула $(A_y^x)_x^y$, јесте сама формула A. Приметимо да је правило $\forall U$ са закључком $\forall yA_y^x$ добро примењено, тј. да y није слободна променљива непрецртане хипотезе када је то правило примењено, формуле $\forall xA$, јер се y не јавља у A, па тако ни у тој хипотези $\forall xA$.

(4) Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\exists xA \Leftrightarrow \exists yA_y^x$, ако се y не јавља у формули A:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists xA}^{2} \quad \dfrac{\cancel{A}^{1}}{\exists yA_y^x}\exists U^*}{\exists yA_y^x}1\exists E}{\exists xA\Rightarrow\exists yA_y^x}2{\Rightarrow}U \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\exists yA_y^x}^{4} \quad \dfrac{\cancel{A_y^x}^{3}}{\exists xA}\exists U}{\exists xA}3\exists E}{\exists yA_y^x\Rightarrow\exists xA}4{\Rightarrow}U}{\exists xA\Leftrightarrow\exists yA_y^x}{\Leftrightarrow}U$$

где премиса правила $\exists U^*$, формула A, јесте у ствари формула $(A_y^x)_x^y$. Још, правило $\exists E$ са премисом $\exists yA_y^x$ и закључком $\exists xA$ је добро примењено јер се y не јавља у A.

У **Примерима 6-8** који следе, све формуле чији доказ тражимо су облика $C\Leftrightarrow D$. Зато је довољно да направимо доказе без непрецртаних хипотеза формула $C\Rightarrow D$ и $D\Rightarrow C$, а затим користећи та два доказа и применом правила $(\Leftrightarrow U)$, као у доказима из **Примера 5**, можемо направити доказ формуле $C\Leftrightarrow D$.

Пример 6 Направићемо доказ без непрецртаних хипотеза формула $\neg\exists xA\Leftrightarrow\forall x\neg A$ и $\neg\forall xA\Leftrightarrow\exists x\neg A$, Де Морганове законе за квантификаторе, који су, знамо то, ваљане формуле.

За доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\neg\exists xA\Leftrightarrow\forall x\neg A$ довољно је да направимо такве доказе формуле $\forall x\neg A\Rightarrow\neg\exists xA$ и формуле $\neg\exists xA\Rightarrow\forall x\neg A$. Ево доказа без непрецртаних хипотеза за $\forall x\neg A\Rightarrow\neg\exists xA$, назовимо га доказ $\mathcal{D}_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists xA}^{2} \qquad \dfrac{\cancel{A}^{1} \qquad \dfrac{\cancel{\forall x\neg A}^{3}}{\neg A}\,\forall E}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,1\exists E}{\neg\exists xA}\,2\neg U}{\forall x\neg A\Rightarrow\neg\exists xA}\,3{\Rightarrow}U$$

И формула $\neg\exists xA\Rightarrow\forall x\neg A$ има природнодедукцијски доказ без непрецртаних хипотеза, доказ $\mathcal{D}_2$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A}^{1}}{\exists xA}\,\exists U \qquad \cancel{\neg\exists xA}^{2}}{\bot}\,\neg E}{\neg A}\,1\neg U}{\forall x\neg A}\,\forall U}{\neg\exists xA\Rightarrow\forall x\neg A}\,2{\Rightarrow}U$$

Доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\neg\exists xA\Leftrightarrow\forall x\neg A$ су $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ са применом $(\Leftrightarrow U)$ на њихове последње формуле.

А сада покажимо да и други Де Морганов закон за квантификаторе $\neg\forall xA\Leftrightarrow\exists x\neg A$ има доказ без непрецртаних хипотеза. Ево прво доказа без непрецртаних хипотеза формуле $\exists x\neg A\Rightarrow\neg\forall xA$, доказа $\mathcal{D}_3$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists x\neg A}^{3} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\forall xA}^{2}}{A}\,\forall E \qquad \cancel{\neg A}^{1}}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,1\exists E}{\neg\forall xA}\,2\neg U}{\exists x\neg A\Rightarrow\neg\forall xA}\,3{\Rightarrow}U$$

Доказ друге формуле, формуле $\neg\forall xA\Rightarrow\exists x\neg A$, доказ $\mathcal{D}_4$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\neg A}^{4}}{\exists x\neg A}\,\exists U \qquad \cancel{\neg\exists x\neg A}^{5}}{\bot}\,\neg E}{A}\,4RAA}{\forall xA}\,\forall U \qquad \cancel{\neg\forall xA}^{6}}{\bot}\,\neg E}{\exists x\neg A}\,5RAA}{\neg\forall xA\Rightarrow\exists x\neg A}\,6{\Rightarrow}U$$

Од доказа $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_4$ коришћењем правила $(\Leftrightarrow U)$ прави се доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\neg\forall xA \Leftrightarrow \exists x\neg A$.

На крају направићемо доказ без непрецртаних хипотеза још једне познате ваљане формуле, формуле $\exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A$. Прво правимо доказ без непрецртаних хипотеза за $\exists xA \Rightarrow \neg\forall x\neg A$, назовимо га $\mathcal{D}_5$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\exists xA}^{3} \qquad \dfrac{\cancel{A}^{1} \qquad \dfrac{\cancel{\forall x\neg A}^{2}}{\neg A}\,\forall E}{\bot}\,\neg E}{\bot}\,1\exists E}{\neg\forall x\neg A}\,2\neg U}{\exists xA \Rightarrow \neg\forall x\neg A}\,3{\Rightarrow}U$$

А сада за $\neg\forall x\neg A \Rightarrow \exists xA$ направимо доказ без непрецртаних хипотеза, доказ $\mathcal{D}_6$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A}^{1}}{\exists xA}\,\exists U \qquad \cancel{\neg\exists xA}^{2}}{\bot}\,\neg E}{\neg A}\,1\neg U}{\forall x\neg A}\,\forall U \qquad \cancel{\neg\forall x\neg A}^{3}}{\bot}\,\neg E}{\exists xA}\,2RAA}{\neg\forall x\neg A \Rightarrow \exists xA}\,3{\Rightarrow}U$$

И овде, од доказа $\mathcal{D}_5$ и $\mathcal{D}_6$ коришћењем правила $(\Leftrightarrow U)$ прави се доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A$.

Пример 7 Покажимо да ваљане формуле
(1) $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall xA(x) \wedge B), \quad x \notin SP(B)$
(2) $\forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \forall xA(x)), \quad x \notin SP(B)$
(3) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall xA(x) \wedge \forall xB(x))$
(4) $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow (\forall xA(x) \vee B), \quad x \notin SP(B)$
(5) $\forall x(B \vee A(x)) \Leftrightarrow (B \vee \forall xA(x)), \quad x \notin SP(B)$
имају доказе без непрецртаних хипотеза.

(1) Доказ формуле $\forall x(A(x) \wedge B) \Rightarrow (\forall xA(x) \wedge B)$, ако је $x \notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x(A(x) \wedge B)}^{1}}{A(x) \wedge B}\,\forall E}{A(x)}\,\wedge E_1}{\forall xA(x)}\,\forall U \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{\forall x(A(x) \wedge B)}^{1}}{A(x) \wedge B}\,\forall E}{B}\,\wedge E_2}{\forall xA(x) \wedge B}\,\wedge U}{\forall x(A(x) \wedge B) \Rightarrow (\forall xA(x) \wedge B)}\,1{\Rightarrow}U$$

Доказ формуле $(\forall xA(x) \land B) \Rightarrow \forall x(A(x) \land B)$, ако је $x \notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall xA(x) \land B}^{2}}{\forall xA(x)}\land E_1}{A(x)}\forall E \qquad \dfrac{\cancel{\forall xA(x) \land B}^{2}}{B}\land E_2}{A(x) \land B}\land U}{\forall x(A(x) \land B)}\forall U}{(\forall xA(x) \land B) \Rightarrow \forall x(A(x) \land B)}2{\Rightarrow}U$$

Приметимо да је приликом примене правила $\forall U$ непрецртана хипотеза била формула $\forall xA(x) \land B$, но како важи $x \notin SP(B)$ правило је исправно примењено.

(2) Доказ је аналоган доказу формуле (1).

(3) Доказ је аналоган доказу формуле (1).

(4) Доказ формуле $(\forall xA(x)\lor B)\Rightarrow\forall x(A(x)\lor B)$, ако је $x \notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall xA(x) \lor B}^{2} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\forall xA(x)}^{1}}{A(x)}\forall E}{A(x) \lor B}\lor U_1}{\forall x(A(x) \lor B)}\forall U \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{B}^{1}}{A(x) \lor B}\lor U_2}{\forall x(A(x) \lor B)}\forall U}{\forall x(A(x) \lor B)}1{\lor}E}{(\forall xA(x) \lor B) \Rightarrow \forall x(A(x) \lor B)}2 \Rightarrow U$$

Услов $x \notin SP(B)$ је искоришћен приликом примене правила $\forall U$ са закључком $\forall x(A(x) \lor B)$ када је непрецртана хипотеза била формула B.

За прављење доказа формуле $\forall x(A(x)\lor B) \Rightarrow (\forall xA(x)\lor B)$ користимо следеће доказе: доказ формуле $\neg\forall xA(x)\land\neg B$ из хипотезе $\neg(\forall xA(x) \lor B)$, који смо направили на почетку овог одељка, доказ $\mathcal{D}'$, и доказ $\mathcal{D}_4$ из **Примера 6**, доказ без непрецртаних хипотеза формуле $\neg\forall xA(x)\Rightarrow\exists x\neg A(x)$. Наиме, од тих доказа правимо доказ $\mathcal{D}''$:

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_4\\ \neg\forall xA(x) \Rightarrow \exists x\neg A(x)\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\neg(\forall xA(x) \lor B)\\ \mathcal{D}'\\ \neg\forall xA(x) \land \neg B\end{matrix}}{\neg\forall xA(x)}\land E_1}{\exists x\neg A(x)}\Rightarrow E$$

са једном непрецртном хипотезом $\neg(\forall xA(x)\lor B)$ чија су два јављања у доказу $\mathcal{D}'$, овде забележена једним. Докази $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{D}''$ су делови овог доказа формуле $\forall x(A(x) \lor B) \Rightarrow (\forall xA(x) \lor B)$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\neg(\forall x \cancel{A(x)}^{5}\vee B)\\ \mathcal{D}''\\ \exists x\neg A(x)\end{matrix}\qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(\cancel{A(x)}^{6}\vee B)}{A(x)\vee B}\forall E \quad \dfrac{\cancel{A(x)}^{3}\quad \neg\cancel{A(x)}^{4}}{\bot}\neg E \quad \dfrac{\cancel{B}^{3}\quad \dfrac{\begin{matrix}\neg(\forall x\cancel{A(x)}^{5}\vee B)\\ \mathcal{D}'\\ \neg\forall xA(x)\wedge\neg B\end{matrix}}{\neg B}\wedge E_2}{\bot}\neg E}{\bot}3\vee E}{\bot}4\exists E}{\forall xA(x)\vee B}5RAA}{\forall x(A(x)\vee B)\Rightarrow(\forall xA(x)\vee B)}6\Rightarrow U
$$

који нема непрецртаних хипотеза.

(5) Доказ је аналоган доказу формуле (4).

Пример 8 Покажимо да ваљане формуле

(1) $\exists x(A(x)\wedge B)\Leftrightarrow(\exists xA(x)\wedge B),\quad x\notin SP(B)$

(2) $\exists x(B\wedge A(x))\Leftrightarrow(B\wedge\exists xA(x)),\quad x\notin SP(B)$

(3) $\exists x(A(x)\vee B)\Leftrightarrow(\exists xA(x)\vee B),\quad x\notin SP(B)$

(4) $\exists x(B\vee A(x))\Leftrightarrow(B\vee\exists xA(x)),\quad x\notin SP(B)$

(5) $\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow(\exists xA(x)\vee\exists xB(x))$

имају доказе без непрецртаних хипотеза.

(1) Доказ формуле $\exists x(A(x)\wedge B)\Rightarrow(\exists xA(x)\wedge B)$, $x\notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$
\dfrac{\dfrac{\exists x(\cancel{A(x)}^{2}\wedge B)\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{A(x)\wedge}^{1}B}{A(x)}\wedge E_1}{\exists xA(x)}\exists U \quad \dfrac{\cancel{A(x)\wedge}^{1}B}{B}\wedge E_2}{\exists xA(x)\wedge B}\wedge U}{\exists xA(x)\wedge B}1\exists E}{\exists x(A(x)\wedge B)\Rightarrow(\exists xA(x)\wedge B)}2\Rightarrow U
$$

Доказ формуле $(\exists xA(x)\wedge B)\Rightarrow\exists x(A(x)\wedge B)$, $x\notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\cancel{A(x)}^{4}\wedge B}{\exists xA(x)}\wedge E_1 \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{A(x)}^{3}\quad \dfrac{\exists x\cancel{A(x)}^{4}\wedge B}{B}\wedge E_2}{A(x)\wedge B}\wedge U}{\exists x(A(x)\wedge B)}\exists U}{\exists x(A(x)\wedge B)}3\exists E}{(\exists xA(x)\wedge B)\Rightarrow\exists x(A(x)\wedge B)}4\Rightarrow U
$$

Приметимо да је формула $\exists xA(x)\wedge B$ закључак правила $\exists E$ у првом доказу и непрецртана хипотеза приликом примене правила $\exists E$ у другом доказу, али како важи $x \notin SP(B)$ оба правила су исправно примењена.

(2) Доказ је аналоган доказу формуле (1).

(3) Доказ формуле $\exists x(A(x) \lor B) \Rightarrow (\exists x A(x) \lor B)$, $x \notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x(\cancel{A(x)} \lor B)^{3} \qquad \dfrac{\cancel{A(x) \lor B}^{2} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{A(x)}^{1}}{\exists x A(x)}\exists U}{\exists x A(x) \lor B}\lor U_1 \qquad \dfrac{\cancel{B}^{1}}{\exists x A(x) \lor B}\lor U_2}{\exists x A(x) \lor B}1{\lor}E}{\exists x A(x) \lor B}2\exists E}{\exists x(A(x) \lor B) \Rightarrow (\exists x A(x) \lor B)}3{\Rightarrow}U$$

Доказ формуле $(\exists x A(x) \lor B) \Rightarrow \exists x(A(x) \lor B)$, $x \notin SP(B)$, без непрецртаних хипотеза:

$$\dfrac{\dfrac{\exists x \cancel{A(x)} \lor B^{5} \qquad \dfrac{\exists x \cancel{A(x)}^{4} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{A(x)}^{3}}{A(x) \lor B}\lor U_1}{\exists x(A(x) \lor B)}\exists U}{\exists x(A(x) \lor B)}3\exists E \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{B}^{4}}{A(x) \lor B}\lor U_2}{\exists x(A(x) \lor B)}\exists U}{\exists x(A(x) \lor B)}4\lor E}{(\exists x A(x) \lor B) \Rightarrow \exists x(A(x) \lor B)}5{\Rightarrow}U$$

(4) Доказ је аналоган доказу формуле (3).

(5) Доказ је аналоган доказу формуле (3).

2.1.2 Природна дедукција, систем $\mathcal{NK}$

У овом одељку дефинисаћемо формални систем природне дедукције за предикатску логику, систем $\mathcal{NK}$. Тај систем, као једна формална теорија, има: скуп основних симбола $\mathcal{S}(\mathcal{NK})$, скуп формула $\mathcal{F}(\mathcal{NK})$, скуп аксиома $\mathcal{A}(\mathcal{NK})$ и скуп правила извођења $\mathcal{R}(\mathcal{NK})$.

Скуп основних симбола система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{S}(\mathcal{NK})$

Скуп основних симбола система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{S}(\mathcal{NK})$, чине логички део алфабета предикатске логике $\mathcal{J}_l$, чији скуп помоћних симбола има још и симбол $\vdash$, и неки језик $\mathcal{J}$.

Формуле система $\mathcal{NK}$ су предикатске формуле дефинисане у одељку 1.1.1.

Скуп формула система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{F}(\mathcal{NK})$

Скуп формула система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{F}(\mathcal{NK})$, чине све формуле тог система $\mathcal{NK}$.

Важне форме у систему $\mathcal{NK}$, као и у систему природне дедукције за исказну логику $\mathcal{N}$ (видети одељак 3.2.2 у [3]), су секвенти. Додуше, у секвентима система $\mathcal{NK}$ појављују се његове формуле, предикатске формуле. (Рецимо да ћемо коначне скупове предикатских формула означавати са Γ, Δ, Λ,..., Γ_1, Δ_1, Λ_1,..., Γ', Δ', Λ',...) Дакле, секвент система $\mathcal{NK}$ је форма облика $\Gamma \vdash A$, где је Γ један коначан скуп предикатских формула над неким језиком $\mathcal{J}$ (који може бити и празан) и A је једна предикатска формула над тим језиком. За неки коначан скуп Γ, на пример $\{B, C, D\}$, писаћемо $B, C, D \vdash A$, а ако је Γ празан скуп, онда ћемо писати само $\vdash A$. И у систему $\mathcal{NK}$ имаћемо аксиоматске секвенте, који су схеме облика $A \vdash A$, где је A произвољна предикатска формула.

Скуп аксиома система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{A}(\mathcal{NK})$

Скуп аксиома система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{A}(\mathcal{NK})$, чине аксиоматски секвенти, секвенти облика: $A \vdash A$

где је A произвољна формула система $\mathcal{NK}$.

Четврти део формалног система $\mathcal{NK}$ је скуп правила извођења тог система.

Скуп правила извођења система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{R}(\mathcal{NK})$

Правила извођења у систему $\mathcal{NK}$, као и у систему $\mathcal{N}$, биће релације над секвентима. Скуп правила извођења система $\mathcal{NK}$, скуп $\mathcal{R}(\mathcal{NK})$, је на неки начин проширење скупа правила извођења система $\mathcal{N}$, скупа $\mathcal{R}(\mathcal{N})$. Наиме, у скупу $\mathcal{R}(\mathcal{NK})$ имаћемо правила која су иста као у $\mathcal{R}(\mathcal{N})$, само ће у систему $\mathcal{NK}$ та правила бити примењена на секвенте у којима су предикатске формуле. Та правила су: правила елиминације и правила увођења за сваки од бинарних везника $\wedge$, $\Rightarrow$ и $\vee$; правило елиминације за нуларни везник $\perp$; и Персово правило. Осим тих правила у скупу $\mathcal{R}(\mathcal{NK})$ биће још и правило елиминације и правило увођења за сваки од квантификатора $\forall$ и $\exists$. Ево правила:

правила елиминације   правила увођења

$$(\wedge E_1)\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \quad (\wedge E_2)\ \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \qquad\qquad (\wedge U)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma \cup \Delta \vdash A \wedge B}$$

$$(\Rightarrow E)\ \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Delta \vdash A}{\Gamma \cup \Delta \vdash B} \qquad\qquad (\Rightarrow U)\ \frac{\Gamma_1 \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$$

$$(\vee E)\ \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta_1 \vdash C \qquad \Theta_1 \vdash C}{\Gamma \cup \Delta \cup \Theta \vdash C} \qquad (\vee U_1)\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee U_2)\ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

у правилу $(\Rightarrow U)$ скуп Γ је скуп Γ_1 или скуп $\Gamma_1 \setminus \{A\}$;
у правилу $(\vee E)$ скуп Δ је скуп Δ_1 или скуп $\Delta_1 \setminus \{A\}$, а скуп Θ је скуп Θ_1 или скуп $\Theta_1 \setminus \{B\}$;

$$(\perp E)\ \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A}$$

$$(\forall E)\ \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A^x_t} \qquad\qquad (\forall U)\ \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A} \text{ уз услов}^*$$

$$(\exists E)\ \frac{\Gamma \vdash \exists x A \qquad \Delta_1 \vdash C}{\Gamma \cup \Delta \vdash C} \text{уз услов}^{**} \qquad\qquad (\exists U)\ \frac{\Gamma \vdash A^x_t}{\Gamma \vdash \exists x A}$$

у правилу ($\exists E$) скуп Δ је скуп Δ_1 или скуп $\Delta_1 \setminus \{A\}$;
услов* за правило ($\forall U$): x није слободна променљива ниједне формуле из скупа Γ, тј. за сваку формулу C из скупа Γ важи $x \notin SP(C)$;
услов** за правило ($\exists E$): x није слободна променљива ниједне формуле из скупа $\Delta_1 \setminus \{A\}$ нити формуле C, тј. за сваку D из $\Delta_1 \setminus \{A\}$ важи $x \notin SP(D)$ и $x \notin SP(C)$.

Персово правило

$$(Pers)\ \frac{\Gamma \cup \{A \Rightarrow B\} \vdash A}{\Gamma \vdash A.}$$

Доказ у систему $\mathcal{NK}$ се дефинише на исти начин као и у систему $\mathcal{N}$. Јер, и у систему $\mathcal{NK}$, као и у систему $\mathcal{N}$, доказиваћемо секвенте, али секвенте који су изграђени од предикатских формула.

Дефиниција доказа секвента у систему $\mathcal{NK}$

У систему $\mathcal{NK}$ доказ секвента $\Gamma \vdash F$ је једно коначно дрво у чијем корену је баш тај секвент $\Gamma \vdash F$, на сваком листу је један аксиоматски секвент, а свако гранање је оправдано неким правилом извођења система $\mathcal{NK}$. (Приметимо да је доказ аксиоматског секвента дрво са једним чвором (који је и корен и лист) у коме је сам тај секвент.)

У систему $\mathcal{NK}$ секвент $\Gamma \vdash F$ је доказив ако и само ако постоји доказ у том систему у чијем је корену тај секвент $\Gamma \vdash F$. Доказ $\mathcal{D}$ секвента $\Gamma \vdash F$ записиваћемо $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathcal{D}}{\Gamma \vdash F}$.

Дефиниција теореме система $\mathcal{NK}$

Формула F је теорема система $\mathcal{NK}$ ако је секвент $\vdash F$ доказив у систему $\mathcal{NK}$.

У наредном примеру доказаћемо једну теорему система $\mathcal{NK}$.

Пример 9 **У Примеру 6** из одељка 2.1.1 дали смо доказ без непрецртаних хипотеза ваљане формуле $\exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A$, па знамо да је она теорема предикатске логике. То, на основу дефиниција $\Leftrightarrow$ и $\neg$, значи да је $(\exists xA \Rightarrow ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)) \wedge (((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \exists xA)$ теорема система $\mathcal{NK}$. Сада ћемо то показати и у систему $\mathcal{NK}$, тј. даћемо доказ секвента $\vdash \exists xA \Rightarrow ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)$ и доказ секвента $\vdash ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \exists xA$, редом доказе $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$, а затим применом правила $\wedge U$ на секвенте у корену тих доказа добићемо доказ наше формуле. Доказ $\mathcal{D}_1$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists xA \vdash \exists xA \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(A \Rightarrow \bot) \vdash \forall x(A \Rightarrow \bot)}{\forall x(A \Rightarrow \bot) \vdash A \Rightarrow \bot}\,\forall E \qquad A \vdash A}{\forall x(A \Rightarrow \bot), A \vdash \bot}\,{\Rightarrow}E}{\exists xA, \forall x(A \Rightarrow \bot) \vdash \bot}\,\exists E}{\exists xA \vdash (\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot}\,{\Rightarrow}U}{\vdash \exists xA \Rightarrow ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)}\,{\Rightarrow}U$$

Доказ $\mathcal{D}_2$:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$(\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot \vdash (\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot$}
\AxiomC{$\exists xA{\Rightarrow}\bot \vdash \exists xA{\Rightarrow}\bot$}
\AxiomC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\exists U$}
\UnaryInfC{$A \vdash \exists xA$}
\RightLabel{$\Rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\exists xA{\Rightarrow}\bot, A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\Rightarrow U$}
\UnaryInfC{$\exists xA{\Rightarrow}\bot \vdash A{\Rightarrow}\bot$}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\exists xA{\Rightarrow}\bot \vdash \forall x(A{\Rightarrow}\bot)$}
\RightLabel{$\Rightarrow E$}
\BinaryInfC{$(\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot, \exists xA{\Rightarrow}\bot \vdash \bot$}
\RightLabel{$\bot E$}
\UnaryInfC{$(\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot, \exists xA{\Rightarrow}\bot \vdash \exists xA$}
\RightLabel{$Pers$}
\UnaryInfC{$(\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot \vdash \exists xA$}
\RightLabel{$\Rightarrow U$}
\UnaryInfC{$\vdash ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \exists xA$}
\end{prooftree}$$

Користећи доказе $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ правимо следећи доказ у систему $\mathcal{NK}$:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\mathcal{D}_1$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash \exists xA \Rightarrow ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)$}
\AxiomC{$\mathcal{D}_2$}
\noLine
\UnaryInfC{$\vdash ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \exists xA$}
\RightLabel{$\wedge U$}
\BinaryInfC{$\vdash (\exists xA \Rightarrow ((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot)) \wedge (((\forall x(A \Rightarrow \bot)) \Rightarrow \bot) \Rightarrow \exists xA)$}
\end{prooftree}$$

и он је, на основу дефиниција везника $\Leftrightarrow$ и $\neg$, у систему $\mathcal{NK}$ доказ секвента $\vdash \exists xA{\Leftrightarrow}\neg\forall x\neg A$. Дакле формула $\exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A$ јесте теорема система $\mathcal{NK}$.

А ево још неких доказа у систему $\mathcal{NK}$.

Задатак 1 Ваљана формула $\forall xA(x) \Rightarrow A^x_t$, где је терм t слободан за променљиву x у формули A, је теорема система $\mathcal{NK}$. (Доказ ове теореме дат је и у одељку 2.1.1 после представљања правила ($\forall E$).)

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall xA(x) \vdash \forall xA(x)$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\forall xA(x) \vdash A^x_t$}
\RightLabel{$\Rightarrow U$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall xA(x) \Rightarrow A^x_t$}
\end{prooftree}$$

Задатак 2 Ваљана формула $A^x_t \Rightarrow \exists xA(x)$, где је терм t слободан за променљиву x у формули A, је теорема система $\mathcal{NK}$.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$A^x_t \vdash A^x_t$}
\RightLabel{$\exists U$}
\UnaryInfC{$A^x_t \vdash \exists xA(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow U$}
\UnaryInfC{$\vdash A^x_t \Rightarrow \exists xA(x)$}
\end{prooftree}$$

Задатак 3 Ваљана формула $\forall x(B{\Rightarrow}A(x)){\Rightarrow}(B{\Rightarrow}\forall xA(x))$, $x{\notin}SP(B)$, је теорема система $\mathcal{NK}$.

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x(B \Rightarrow A(x)) \vdash \forall x(B \Rightarrow A(x))$}
\RightLabel{$\forall E$}
\UnaryInfC{$\forall x(B \Rightarrow A(x)) \vdash B \Rightarrow A(x)$}
\AxiomC{$B \vdash B$}
\RightLabel{$\Rightarrow E$}
\BinaryInfC{$\forall x(B \Rightarrow A(x)), B \vdash A(x)$}
\RightLabel{$\forall U$}
\UnaryInfC{$\forall x(B \Rightarrow A(x)), B \vdash \forall xA(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow U$}
\UnaryInfC{$\forall x(B \Rightarrow A(x)) \vdash B \Rightarrow \forall xA(x)$}
\RightLabel{$\Rightarrow U$}
\UnaryInfC{$\vdash \forall x(B \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (B \Rightarrow \forall xA(x))$}
\end{prooftree}$$

Задатак 4 Ваљана формула $\forall x(A(x)\Rightarrow B)\Rightarrow(\exists xA(x)\Rightarrow B)$, $x\notin SP(B)$, је теорема система $\mathcal{NK}$.

$$\dfrac{\dfrac{\exists xA(x)\vdash\exists xA(x) \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(A(x)\Rightarrow B)\vdash\forall x(A(x)\Rightarrow B)}{\forall x(A(x)\Rightarrow B)\vdash A(x)\Rightarrow B}\forall E \qquad A(x)\vdash A(x)}{A(x),\forall x(A(x)\Rightarrow B)\vdash B}\Rightarrow E}{\forall x(A(x)\Rightarrow B),\exists xA(x)\vdash B}\exists E}{\dfrac{\forall x(A(x)\Rightarrow B)\vdash\exists xA(x)\Rightarrow B}{\vdash\forall x(A(x)\Rightarrow B)\Rightarrow(\exists xA(x)\Rightarrow B)}\Rightarrow U}\Rightarrow U$$

Задатак 5 На почетку одељка 2.1.1 дали смо доказ без непрецртаних хипотеза формуле $(A\Rightarrow\neg A)\Rightarrow\neg A$, па знамо да је она теорема предикатске логике. То, на основу дефиниције везника $\neg$, значи да је формула $(A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot))\Rightarrow(A\Rightarrow\bot)$ теорема. Ево доказа у $\mathcal{NK}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot)\vdash A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot) \qquad A\vdash A}{A,A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot)\vdash A\Rightarrow\bot}\Rightarrow E \qquad A\vdash A}{A,A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot)\vdash\bot}\Rightarrow E}{\dfrac{A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot)\vdash A\Rightarrow\bot}{\vdash(A\Rightarrow(A\Rightarrow\bot))\Rightarrow(A\Rightarrow\bot)}\Rightarrow U}\Rightarrow U$$

У **ТЕОРЕМИ 4** из одељка 1.2.2, за произвољне промењљиве x_1, ..., x_n и формулу F, показали смо да важи: F је ваљана формула акко је $\forall x_1...\forall x_nF$ ваљана формула. Овде ћемо, за произвољне промењљиве x_1,...,x_n и формулу F система $\mathcal{NK}$ дати доказ ове особине: формула F је теорема акко је формула $\forall x_1...\forall x_nF$ теорема. У доказу **ТЕОРЕМЕ 4** из одељка 1.2.2 користили смо својство за произвољне x и F: F је ваљана формула акко је $\forall xF$ ваљана формула (доказано у **ЛЕМИ 3**, 1.2.2). Сада ћемо пак, користити ово својство: F је теорема акко је $\forall xF$ теорема, чији доказ ћемо дати у леми која следи.

ЛЕМА 1

За произвољну промењљиву x формула F је теорема акко је формула $\forall xF$ теорема.

ДОКАЗ

Ако је F теорема система $\mathcal{NK}$, онда у $\mathcal{NK}$ постоји доказ секвента $\vdash F$, неки доказ $\overset{\mathcal{D}_1}{\vdash F}$. Користећи доказ $\mathcal{D}_1$ правимо доказ $\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\vdash F}}{\vdash\forall xF}\forall U$, доказ секвента $\vdash\forall xF$, те је формула $\forall xF$ теорема система $\mathcal{NK}$.

Ако је, пак, $\forall xF$ теорема система $\mathcal{NK}$, онда у $\mathcal{NK}$ постоји доказ секвента $\vdash\forall xF$, неки доказ $\overset{\mathcal{D}_2}{\vdash\forall xF}$. Стога имамо и доказ $\dfrac{\overset{\mathcal{D}_2}{\vdash\forall xF}}{\vdash F_t^x}\forall E$, за сваки терм t слободан за x у F, па и за терм x. Значи, секвент $\vdash F$ има доказ, тј. формула F јесте теорема система $\mathcal{NK}$.

◇

Сада се, исто као у доказу ТЕОРЕМЕ 4 из одељка 1.2.2, индукцијом по броју променљивих x_1,..., x_n, где се за доказивање базе индукције користи ЛЕМА 1, доказује поменута особина, дата у наредној теореми.

ТЕОРЕМА 1

За произвољне променљиве x_1,..., x_n и формулу F важи:

формула F је теорема ако и само ако је формула $\forall x_1 ... \forall x_n F$ теорема.

У одељку 1.2.2, као последицу ТЕОРЕМЕ 4, добили смо важно својство за произвољну формулу F и њено затворење (Задатак 1): F је ваљана формула акко је њено затворење ваљана формула. Овде ће последица ТЕОРЕМЕ 1 бити ова особина: формула F је теорема акко је њено затворење теорема.

Задатак 6 Нека је F произвољна предикатска формула, тада у систему $\mathcal{NK}$ за формулу F важи:

формула F је теорема акко је њено затворење теорема.

Као у доказу поменуте особине из Задатка 1 у одељку 1.2.2, прво имамо случај када је формула F реченица. Тада је њено затворење иста та формула F, па тражена особина важи. Затим, посматрамо формулу F која није реченица и све њене различите слободне променљиве x_1,..., x_n за $n \geq 1$. Тада, одмах, на основу ТЕОРЕМЕ 1, добијамо:

F је теорема ако и само ако је формула $\forall x_1 ... \forall x_n F$ теорема,

тј. F је теорема ако и само ако је њено затворење теорема.

2.1.3 Хилбертовски систем, систем $\mathcal{K}$

У овом одељку дефинисаћемо хилбертовски систем за предикатску логику, систем $\mathcal{K}$.

Скуп основних симбола система $\mathcal{K}$, скуп $\mathcal{S}(\mathcal{K})$

Скуп основних симбола система $\mathcal{K}$ чине логички део алфабета предикатске логике $\mathcal{J}_l$ и неки језик $\mathcal{J}$.

Формуле система $\mathcal{K}$ су предикатске формуле дефинисане у одељку 1.1.1.

Скуп формула система $\mathcal{K}$, скуп $\mathcal{F}(\mathcal{K})$

Све формуле система $\mathcal{K}$ чине скуп његових формула, скуп $\mathcal{F}(\mathcal{K})$.

Скуп аксиома система $\mathcal{K}$, скуп $\mathcal{A}(\mathcal{K})$

$(A1)$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$(A2)$ $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

$(A3)$ $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$

$(A4)$ $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$

$(A5)$ $(A \wedge B) \Rightarrow A$

$(A6)$ $(A \wedge B) \Rightarrow B$

$(A7)$ $A \Rightarrow (A \vee B)$

$(A8)$ $B \Rightarrow (A \vee B)$

$(A9)$ $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C))$

$(A10)$ $\bot \Rightarrow A$

$(A11)$ $\forall x A(x) \Rightarrow A^x_t$, где је терм t слободан за x у формули A

$(A12)$ $A^x_t \Rightarrow \exists x A(x)$, где је терм t слободан за x у формули A

$(A13)$ $\forall x(B \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (B \Rightarrow \forall x A(x))$, $x \notin SP(B)$

$(A14)$ $\forall x(A(x) \Rightarrow B) \Rightarrow (\exists x A(x) \Rightarrow B)$, $x \notin SP(B)$

где су A, B и C произвољне формуле система $\mathcal{K}$.

Приметимо да наведене аксиоме у ствари представљају схеме аксиоме.

Скуп правила извођења система $\mathcal{K}$, скуп $\mathcal{R}(\mathcal{K})$

Систем $\mathcal{K}$ има два правила извођења, правило *modus ponens*:

$$\frac{A, \quad A \Rightarrow B}{B} \quad MP$$

и правило *generalizacije*:

$$\frac{A}{\forall x A} \quad Gen$$

Доказ и теорема у систему $\mathcal{K}$ дефинишу се на уобичајен начин као у произвољној формалној теорији $\mathcal{T}$ (видети поглавље 3.1 у [3]).

Дефиниција доказа (извођења, дедукције) у систему $\mathcal{K}$

◇ Доказ (извођење, дедукција) у систему $\mathcal{K}$ је једно коначно дрво, на чијим листовима се налазе аксиоме, а свако гранање тог дрвета је оправдано неким правилом извођења, или MP или Gen, тако што се у горњим чворовима тог гранања налазе премисе правила, а у његовом доњем чвору је закључак тог правила. (Приметимо да је доказ аксиоме дрво са једним чвором (и корен и лист) у коме је сама та аксиома.)

◇ Осим као дрво доказ у систему $\mathcal{K}$ се може дефинисати и као један коначан низ формула $(n \geq 1)$

$$F_1, ..., F_n,$$

где за сваку формулу F_i, $1 \leq i \leq n$, важи
<u>или</u> F_i је аксиома
<u>или</u> F_i је закључак правила или MP или Gen, чије премисе су неке од формула из низа $F_1, ..., F_n$ индекса мањег од i.

Ако имамо неки доказ F_1,...,F_n у систему $\mathcal{K}$ можемо га представити једним коначним дрветом у чијем корену је формула F_n, на листовима су све формуле тог доказа (тј. низа F_1,...,F_n) које су аксиоме, а свако гранање је оправдано:
или правилом извођења MP, тако што се у доњем чвору тог гранања налази закључак правила, нека формула F_i, а у горњим чворовима су премисе тог правила, две формуле из низа $F_1, ..., F_n$ индекса мањег од i;
или правилом извођења Gen тако што се у доњем чвору тог гранања налази закључак правила, нека формула F_i, а у горњем чвору је премиса тог правила, нека формула из низа $F_1, ..., F_n$ индекса мањег од i.

<u>Дефиниција теореме система $\mathcal{K}$</u>

Формула F је <u>теорема</u> система $\mathcal{K}$, и то означавамо са $\vdash_{\mathcal{K}} F$ или просто $\vdash F$ (где је симбол $\vdash$ из метајезика система $\mathcal{K}$), ако постоји бар један доказ у систему $\mathcal{K}$ коме је баш формула F формула у његовом корену (када је доказ дат као дрво) или последња формула (када је доказ дат као низ формула). Тада кажемо да је тај доказ један <u>доказ теореме</u> F у систему $\mathcal{K}$.

Покажимо сада једну особину теорема система $\mathcal{K}$, а то значи теорема предикатске логике. Приметимо да та особина важи и за теореме исказне логике.

Задатак 7 Ако су формуле $C \Rightarrow D$ и $D \Rightarrow E$ теореме система $\mathcal{K}$, онда је и формула $C \Rightarrow E$ теорема система $\mathcal{K}$.
Пошто су $C \Rightarrow D$ и $D \Rightarrow E$ теореме система $\mathcal{K}$, то, у том систему, постоје њихови докази дати низовима, редом доказ C_1,..., C_k за $k \geq 1$, где је C_k формула $C \Rightarrow D$, и доказ E_1,..., E_m за $m \geq 1$, где је E_m формула $D \Rightarrow E$. Користећи те доказе правимо низ: C_1, ..., C_k, E_1, ..., E_m и додајемо следеће формуле:

F_1: $(D \Rightarrow E) \Rightarrow (C \Rightarrow (D \Rightarrow E))$ (аксиома $A1$)
F_2: $C \Rightarrow (D \Rightarrow E)$ (прим. MP на E_m и F_1)
F_3: $(C \Rightarrow (D \Rightarrow E)) \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \Rightarrow (C \Rightarrow E))$ (аксиома $A2$)
F_4: $(C \Rightarrow D) \Rightarrow (C \Rightarrow E)$ (прим. MP на F_2 и F_3)
F_5: $C \Rightarrow E$ (прим. MP на C_k и F_4)

Овај низ формула C_1, ..., C_k, E_1, ..., E_m, F_1, ..., F_5 јесте један доказ у систему $\mathcal{K}$. Јер, све формуле тог низа су или аксиоме или закључци правила MP или Gen (формуле из C_1,...,C_k и E_1,...,E_m то јесу као формуле које чине доказе теорема). Стога, на основу дефиниције теореме, имамо да је последња формула тог низа, формула $C \Rightarrow E$, теорема система $\mathcal{K}$.

У формалним теоријама имамо и доказ из скупа хипотеза Φ (видети поглавље 3.1 у [3]). Наиме, доказ формуле F из скупа хипотеза Φ у систему $\mathcal{K}$ може се дефинисати (и тако се најчешће и дефинише) овако: један доказ формуле F на чијим листовима се осим аксиома система $\mathcal{K}$ могу налазити и формуле скупа Φ и свако гранање је оправдано неким правилом извођења система $\mathcal{K}$. (Ако је доказ низ формула, онда те формуле могу бити аксиоме, формуле из Φ и закључци правила извођења чије премисе су формуле већ наведене у том низу.) А може се дефинисати и другачије, постављањем овог додатног услова: не може се правити гранање оправдано правилом Gen чији закључак је формула облика $\forall xA$, а x је слободна променљива неке формуле из скупа Φ. То ће бити и наша дефиниција доказа из скупа хипотеза.

Дакле, доказ формуле F из скупа хипотеза Φ у систему $\mathcal{K}$ је једно коначно дрво, на чијим листовима се налазе аксиоме или формуле из скупа Φ, а свако гранање тог дрвета је оправдано неким правилом извођења или MP или Gen, тако што се у горњим чворовима тог гранања налазе премисе правила, а у његовом доњем чвору је закључак тог правила, при чему за закључак сваког правила Gen, неку формулу $\forall xA$, важи да променљива x није слободна променљива ниједне формуле из скупа Φ. Ако је доказ дат низом формула $F_1, ..., F_n$, онда је свака формула F_i, $1 \leq i \leq n$, или аксиома, или формула из скупа Φ или је закључак правила MP облика $F_l \Rightarrow F_k$ за неке формуле F_l и F_k, $1 \leq l, k \leq i-1$, или је закључак правила Gen облика $\forall xF_l$ за неку формулу F_l, $1 \leq l \leq i-1$, и променљиву x која није слободна променљива ниједне формуле из скупа Φ. Формуле скупа Φ зовемо хипотезама тог доказа. Да постоји доказ формуле F из скупа хипотеза Φ у систему $\mathcal{K}$ означавамо са $\Phi \vdash_{\mathcal{K}} F$ (или $\Phi \vdash F$) и кажемо да је формула F последица скупа формула Φ.

У наредном задатку показаћемо везу између теорема исказне логике и теорема предикатске логике коју смо поменули у уводу ове главе.

Задатак 8 Подсетимо се да смо у одељку 1.2.2 посматрали исказну формулу $F(p_1, ..., p_n)$, где су $p_1, ..., p_n$ сва њена, међусобно различита, исказна слова и са њом произвољне, међусобно различите, предикатске формуле $A_1, ..., A_n$ над неким језиком $\mathcal{J}$. Правили смо предикатску формулу $F(A_1, ..., A_n)$ тако што смо у формули $F(p_1, ..., p_n)$ свако јављање исказног слова p_i заменили формулом A_i, $1 \leq i \leq n$. Покажимо да за формуле $F(p_1, ..., p_n)$ и $F(A_1, ..., A_n)$ важи особина: ако је формула $F(p_1, ..., p_n)$ теорема система исказне логике $\mathcal{L}$, онда је формула $F(A_1, ..., A_n)$ теорема система предикатске логике $\mathcal{K}$.

Како је $F(p_1, ..., p_n)$ теорема система исказне логике $\mathcal{L}$, то у систему $\mathcal{L}$ постоји доказ формуле $F(p_1, ..., p_n)$, неки доказ $B_1, ..., B_m$, где је B_m формула $F(p_1, ..., p_n)$. Када у свакој формули B_j тога доказа $(1 \leq j \leq m)$ сва јављања исказног слова p_i заменимо предикатском формулом A_i, за свако i $(1 \leq i \leq n)$, добијамо предикатску формулу $\overline{B}_j$, и још имамо да је формула $\overline{B}_m$ формула $F(A_1, ..., A_n)$. Погледајмо сада низ предикатских формула $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_m$. За сваку формулу $\overline{B}_j$, $1 \leq j \leq m$, из тог низа важи да је настала од исказне формуле B_j

описаном заменом, а та формула B_j, на основу дефиниције доказа у систему $\mathcal{L}$, може бити:
(1) или једна аксиома система $\mathcal{L}$, па како аксиомама $\mathcal{L}$ одговарају аксиоме $(A1)-(A10)$ система $\mathcal{K}$, онда је и формула $\overline{B}_j$ аксиома $\mathcal{K}$;
(2) или закључак правила MP чије су премисе неке формуле тог низа B_k и B_l, $k, l < j$, и онда, пошто је MP правило извођења и система $\mathcal{K}$, $\overline{B}_j$ јесте закључак правила MP чије премисе су формуле $\overline{B}_k$ и $\overline{B}_l$.
Дакле, на основу дефиниције доказа у систему $\mathcal{K}$, низ формула $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_m$ је један доказ формуле $\overline{B}_m$ у том систему. Формула $\overline{B}_m$ је $F(A_1, ..., A_n)$, те је $F(A_1, ..., A_n)$ теорема система $\mathcal{K}$.

Ево још једне везе хилбертовског система исказне логике са хилбертовским системом предикатске логике. Подсетимо се да у хилбертовском систему исказне логике, систему $\mathcal{L}$, важи позната теорема дедукције: за произвољне формуле A и B, ако имамо доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$, онда постоји доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ (ТЕОРЕМА 2 (ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИЈЕ) у одељку 3.2.3 у [3]). Покажимо сада да и у хилбертовском систему предикатске логике, у систему $\mathcal{K}$, важи теорема дедукције.

ТЕОРЕМА 2 (ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИЈЕ)
За произвољан скуп формула Φ, произвољне формуле A и B важи:
ако је $\Phi \cup \{B\} \vdash A$, онда је $\Phi \vdash B \Rightarrow A$.

ДОКАЗ

Доказ ове теореме биће веома сличан доказу ТЕОРЕМЕ ДЕДУКЦИЈЕ за исказну логику (видети ТЕОРЕМУ 2 (ТЕОРЕМУ ДЕДУКЦИЈЕ) у одељку 3.2.3 у [3]). Доказаћемо је индукцијом по дужини доказа формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ (када је тај доказ дат у облику низа), где дужину доказа дефинишемо као број формула у том доказу.

<u>База индукције</u>: доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ је дужине 1. То значи да се тај доказ састоји само из једне формуле и то мора бити формула A.

Ако је A из скупа Φ или ако је A аксиома система $\mathcal{K}$, онда користећи тај доказ који чини формула A, и аксиому $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ правимо следећи доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ:

C_1: A	(или хипотеза из скупа Φ или аксиома)
C_2: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	(аксиома $(A1)$)
C_3: $B \Rightarrow A$	(закључак MP из C_1 и C_2)

Ако је A формула B, онда је потребно показати да постоји доказ формуле $B \Rightarrow B$ из скупа хипотеза Φ. Имамо да је исказна формула $p \Rightarrow p$ теорема система $\mathcal{L}$ исказне логике (видети доказ у Примеру 9 одељка 3.2.3 у [3]), па је онда, на основу Задатка 8, предикатска формула $B \Rightarrow B$ теорема система предикатске логике, система $\mathcal{K}$, тј. постоји доказ формуле $B \Rightarrow B$. Јасно је (показује се слично као део (1) ТЕОРЕМЕ 1 из одељка 3.2.3 у [3]) да тај доказ јесте и доказ из скупа хипотеза Φ, тј. да у систему $\mathcal{K}$ важи $\Phi \vdash B \Rightarrow B$.

Индукцијска претпоставка: за произвољне формуле A и B и скуп формула Φ важи да, ако постоји доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ дужине мање од n, онда постоји доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ.

Докажимо да теорема важи и за произвољне формуле A и B, скуп формула Φ и доказ A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ дужине n: ако постоји доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ дужине n, онда постоји доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ.

Нека је C_1,...,C_n један доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ дужине n. Како је то доказ формуле A, онда је формула C_n у ствари A, тј. тај доказ је низ: C_1,...,A. За формулу A, као формулу која се појављује у том доказу, постоје следећих пет могућности:

(1) A је аксиома;

(2) A је нека хипотеза из скупа $\Phi \cup \{B\}$ која није B;

(3) A је хипотеза B из скупа $\Phi \cup \{B\}$;

(4) A је закључак правила MP, тј. постоје формуле C_i и C_j тог доказа $(i, j < n)$ такве да је C_j формула $C_i \Rightarrow A$;

(5) A је закључак правила Gen, тј. A је формула $\forall x C_k$ за неку формулу C_k тог доказа $(1 \leq k < n)$ и променљиву x која није слободна променљива ниједне формуле из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$.

У случајевима (1), (2), (3) и (4) поступамо као у исказној логици, прецизније као редом у случајевима (1), (2), (3) и (4) из доказа ТЕОРЕМЕ ДЕДУКЦИЈЕ исказне логике ТЕОРЕМЕ 2 (ТЕОРЕМЕ ДЕДУКЦИЈЕ) у одељку 3.2.3 у [3].

У случају (5) посматрамо део C_1,...,C_k доказа C_1,...,C_n. Тај низ формула је један доказ формуле C_k из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$, који је дужине k, где је k мање од n. Примењујемо индукцијску претпоставку на формулу C_k и тај њен доказ из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$: постоји доказ формуле $B \Rightarrow C_k$ из скупа хипотеза Φ, неки доказ D_1, ..., D_m, где је D_m баш формула $B \Rightarrow C_k$. Овом доказу додајемо следеће формуле:

D_{m+1}: $\forall x(B \Rightarrow C_k)$

која је закључак правила Gen са премисом D_m, и та примена Gen испуњава услов доказа из скупа хипотеза јер x није слободна променљива ниједне формуле из скупа Φ;

D_{m+2}: $\forall x(B \Rightarrow C_k) \Rightarrow (B \Rightarrow \forall x C_k)$,

која је аксиома $A13$ јер x није слободна променљива формуле B;

D_{m+3}: $B \Rightarrow \forall x C_k$

која је закључак правила MP са премисама D_{m+1} и D_{m+2}.

Дакле, низ формула D_1,..., D_{m+3} јесте један доказ формуле $B \Rightarrow \forall x C_k$ из скупа хипотеза Φ. Како је $\forall x C_k$ у ствари формула A, то је низ D_1,..., D_{m+3} доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ.

♢

У случају (5) доказа ТЕОРЕМЕ 2 (ТЕОРЕМЕ ДЕДУКЦИЈЕ) користили смо карактеристику доказа из скупа хипотеза, услов за примену правила Gen. Да је доказ из скупа хипотеза дефинисан без тог услова (као, на пример, у [13]), тада бисмо у систему $\mathcal{K}$ имали следећу особину доказа из скупа хипотеза, јачу верзију дате ТЕОРЕМЕ ДЕДУКЦИЈЕ:

за произвољан скуп формула Φ, и произвољне формуле A и B, ако постоји доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$ у којем се не користи правило Gen за слободне промењиве формуле B, онда постоји и доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ;

или ову верзију, која се, када је доказ из скупа хипотеза дефинисан без услова за примену правила Gen, и зове ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИЈЕ (видети [13]):

за произвољан скуп формула Φ, произвољну реченицу B и произвољну формулу A важи: ако постоји доказ формуле A из скупа хипотеза $\Phi \cup \{B\}$, онда постоји и доказ формуле $B \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Φ.

2.1.4 Еквивалентност система $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$

У одељку 3.2.4 из [3] доказано је да су формални системи исказне логике, природнодедукцијски систем $\mathcal{N}$ и хилбертовски систем $\mathcal{L}$, еквивалентни. У овом одељку, користећи идеју тог доказа (видети ТЕОРЕМЕ 3 и ТЕОРЕМЕ 4 из одељка 3.2.4 у [3]) доказаћемо да су системи $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$ еквивалентни, тј. показаћемо да све што можемо доказати у систему $\mathcal{NK}$ то можемо доказати и у систему $\mathcal{K}$, и обрнуто. Еквивалентност тих система нам казује да су системи $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$ два еквивалентна начина задавања (представљања) предикатске логике као формалне теорије. Докажимо прво теорему, која је на неки начин проширење ТЕОРЕМЕ 3 из одељка 3.2.4 у [3] на предикатску логику.

ТЕОРЕМА 3

Ако је секвент $\Gamma \vdash A$ доказив у систему $\mathcal{NK}$, онда у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза Γ.

ДОКАЗ

> Теорему ћемо доказати индукцијом по дужини доказа $\mathcal{D}$ секвента $\Gamma \vdash A$ у систему $\mathcal{NK}$, где дужину доказа дефинишемо као број правила извођења у том доказу. Договоримо се да неки доказ из хипотеза у систему $\mathcal{K}$, доказ $\Lambda \vdash C$, посматрамо као коначно дрво чији је корен формула C, сваки лист је хипотеза из скупа Λ или аксиома, и свако гранање је оправдано или правилом извођења modus ponensom, MP, или правилом извођења generelizacije, Gen (уз поштовање услова за слободне промењиве формула из скупа хипотеза). То дрво ћемо графички представљати $\overset{\nabla_\Lambda}{C}$ или $\begin{matrix}\nabla_\Lambda \\ | \\ C\end{matrix}$.

База индукције, секвент $\Gamma \vdash A$ је аксиоматски секвент $A \vdash A$. У систему $\mathcal{K}$ дрво доказа формуле A из скупа хипотеза $\{A\}$ је просто један чвор у коме формула A, који је и лист и корен тог дрвета.

Индукцијска претпоставка: теорема важи за сваки доказив секвент система $\mathcal{NK}$ чији доказ има дужину мању од n.

Покажимо да теорема важи за секвент чији доказ је дужине n.

Посматрамо доказ $\mathcal{D}$ секвента $\Gamma \vdash A$ који је дужине n. Имамо више случајева у зависности од последњег правила тог доказа, које може бити правило за логичке везнике или квантификаторе, или Персово правило. У случајевима када последње правило доказа $\mathcal{D}$ јесте правило за неки логички везник или је Персово правило, градимо доказе у систему $\mathcal{K}$ потпуно исто као у одговарајућим случајевима у исказном систему $\mathcal{L}$ (у доказу ТЕОРЕМЕ 3 из одељка 3.2.4 у [3]), само што доказе овде чине предикатске формуле. Остаје да размотримо случајеве када се доказ у систему $\mathcal{NK}$ завршава правилима увођења и правилима елиминације за квантификаторе.

$\triangleleft$ Претпоставимо да је последње правило извођења доказа секвента $\Gamma \vdash A$ правило увођења $\forall$, правило $\forall U$:

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash \forall xB}\forall U$$

где x није слободна променљива ниједне формуле из скупа Γ, а наш секвент $\Gamma \vdash A$ је облика $\Gamma \vdash \forall xB$. Треба показати да у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле $\forall xB$ из скупа хипотеза Γ. На основу индукцијске претпоставке у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле B из скупа хипотеза Γ. Користећи тај доказ у систему $\mathcal{K}$ правимо дрво:

$$\begin{array}{c} \nabla\Gamma \\ | \\ B \\ | \\ \forall xB \end{array}$$

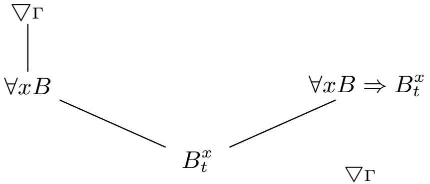
Листови овог дрвета су листови дрвета $\begin{array}{c} \nabla\Gamma \\ | \\ B \end{array}$ на којима су или аксиоме или формуле из скупа Γ. Остали чворови новог дрвета су чворови (који нису листови) дрвета доказа формуле B из скупа хипотеза Γ, дрвета $\begin{array}{c} \nabla\Gamma \\ | \\ B \end{array}$, и чвор у којем је формула $\forall xB$. Према услову за правило $\forall U$, x није слободна променљива ниједне формуле из Γ, тј. ниједне формуле из скупа хипотеза, па последње правило Gen чији је закључак формула $\forall xB$, јесте добро примењено. Дакле, ово ново дрво јесте један доказ формуле $\forall xB$ из скупа хипотеза Γ у систему $\mathcal{K}$.

$\triangleleft$ Претпоставимо да је последње правило извођења доказа секвента $\Gamma \vdash A$ правило елиминације $\forall$, правило $\forall E$:

$$\frac{\Gamma\vdash\forall xB}{\Gamma\vdash B^x_t}\forall E$$

где је терм t слободан за променљиву x у формули B и секвент $\Gamma\vdash A$ је облика $\Gamma\vdash B^x_t$. Треба показати да у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле B^x_t из скупа хипотеза Γ. На основу индукцијске претпоставке у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле $\forall xB$ из скупа хипотеза Γ: $\begin{array}{c}\nabla\Gamma\\ |\\ \forall xB\end{array}$.

Користећи тај доказ у систему $\mathcal{K}$ правимо дрво:

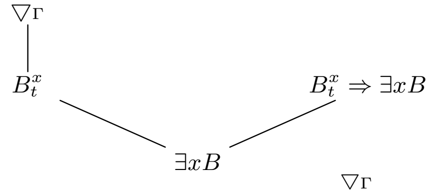


Листови овог дрвета су листови дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Gamma\\ |\\ \forall xB\end{array}$ (на којима су или аксиоме или формуле из скупа Γ) и лист на коме је аксиома $\forall xB\Rightarrow B^x_t$. Остали чворови новог дрвета су чворови (који нису листови) дрвета доказа формуле $\forall xB$ из скупа хипотеза Γ, дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Gamma\\ |\\ \forall xB\end{array}$, и чвор у којем је закључак MP, формула B^x_t. Дакле, ово ново дрво јесте један доказ формуле B^x_t из скупа хипотеза Γ у систему $\mathcal{K}$.

◁ Претпоставимо да је последње правило извођења доказа секвента $\Gamma\vdash A$ правило увођења $\exists$, правило $\exists U$:

$$\frac{\Gamma\vdash B^x_t}{\Gamma\vdash\exists xB}\exists U$$

где је терм t слободан за променљиву x у формули B и секвент $\Gamma\vdash A$ је облика $\Gamma\vdash\exists xB$. Треба показати да у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле $\exists xB$ из скупа хипотеза Γ. На основу индукцијске претпоставке у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле B^x_t из скупа хипотеза Γ. Користећи тај доказ у систему $\mathcal{K}$ правимо дрво:



Листови овог дрвета су листови дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Gamma\\ |\\ B^x_t\end{array}$ (на којима су или аксиоме или формуле из скупа Γ) и лист на коме је аксиома $B^x_t\Rightarrow\exists xB$. Остали чворови новог дрвета су чворови (који нису листови) дрвета доказа формуле B_t^x из скупа хипотеза Γ, дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Gamma\\ |\\ B_t^x\end{array}$, и чвор у којем је закључак MP, формула $\exists xB$. Дакле, ово ново дрво јесте један доказ формуле $\exists xB$ из скупа хипотеза Γ у систему $\mathcal{K}$.

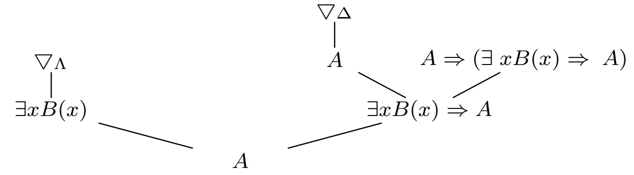
$\triangleleft$ Претпоставимо да је последње правило извођења доказа секвента $\Gamma \vdash A$ правило елиминације $\exists$, правило $\exists E$:

$$\frac{\Lambda \vdash \exists xB(x) \quad \Delta_1 \vdash A}{\Lambda \cup \Delta \vdash A}\exists E$$

где x није слободна променљива ниједне формуле из $\Delta_1 \setminus \{B(x)\}$ нити формуле A, скуп Δ је или Δ_1 или $\Delta_1 \setminus \{B(x)\}$, а наш секвент $\Gamma \vdash A$ је облика $\Lambda \cup \Delta \vdash A$. Треба показати да у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза $\Lambda \cup \Delta$. На основу индукцијске претпоставке у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле $\exists xB(x)$ из скупа хипотеза Λ, доказ $\begin{array}{c}\nabla\Lambda\\ |\\ \exists xB(x)\end{array}$, и доказ формуле A из скупа хипотеза Δ_1.

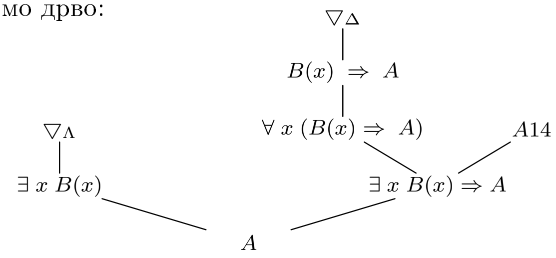
Приметимо да ако формула $B(x)$ не припада скупу Δ_1, онда важи $\Delta_1 = \Delta_1 \setminus \{B(x)\}$ и Δ је у ствари Δ_1; а ако $B(x)$ припада скупу Δ_1, онда је $\Delta_1 \neq \Delta_1 \setminus \{B(x)\}$ и скуп Δ је или Δ_1 или $\Delta_1 \setminus \{B(x)\}$. Дакле имамо два случаја: или $\Delta{=}\Delta_1$, или $\Delta{\neq}\Delta_1$, тј. $\Delta = \Delta_1 \setminus \{B(x)\}$.

Ако је $\Delta{=}\Delta_1$, онда је доказ формуле A из скупа хипотеза Δ_1, који имамо, у ствари доказ формуле A из скупа хипотеза Δ. Користећи њега и доказ формуле $\exists xB(x)$ из скупа хипотеза Λ правимо дрво:



Листови овог дрвета су листови дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Lambda\\ |\\ \exists xB(x)\end{array}$ и дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Delta\\ |\\ A\end{array}$ (на којима су или аксиоме или формуле из скупа $\Lambda \cup \Delta$) и лист на коме је аксиома $(A1)$, аксиома $A \Rightarrow (\exists xB(x) \Rightarrow A)$. Остали чворови новог дрвета су чворови (који нису листови) дрвета доказа формуле $\exists xB(x)$ из скупа хипотеза Λ и доказа формуле A из скупа хипотеза Δ, дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Lambda\\ |\\ \exists xB(x)\end{array}$ и дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Delta\\ |\\ A\end{array}$, и чворови у којима су закључци правила MP, формуле $\exists xB(x) {\Rightarrow} A$ и A. Значи да ово ново дрво јесте један доказ формуле A из скупа хипотеза $\Lambda \cup \Delta$ у систему $\mathcal{K}$.

Ако је $\Delta{\neq}\Delta_1$, тј. $\Delta = \Delta_1 \setminus \{B(x)\}$, онда је доказ формуле A из скупа хипотеза Δ_1, који имамо у систему $\mathcal{K}$, у ствари доказ формуле A из скупа хипотеза $\Delta \cup \{B(x)\}$. Стога, на основу ТЕОРЕМЕ ДЕДУКЦИЈЕ, добијамо да постоји доказ формуле $B(x) \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Δ. Користећи тај доказ и доказ формуле $\exists x B(x)$ из скупа хипотеза Λ, правимо дрво:



где је $A14$ формула $\forall x(B(x) \Rightarrow A) \Rightarrow (\exists x B(x) \Rightarrow A)$.

Листови овог дрвета су листови дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Lambda\\ |\\ \exists x B(x)\end{array}$ и дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Delta\\ |\\ B(x) \Rightarrow A\end{array}$ (на којима су или аксиоме или формуле из скупа $\Lambda \cup \Delta$) и лист на коме је формула $\forall x(B(x) \Rightarrow A) \Rightarrow (\exists x B(x) \Rightarrow A)$, која је аксиома ($A14$), јер по услову за правило $\exists E$ важи $x \notin SP(A)$. Остали чворови новог дрвета су чворови (који нису листови) дрвета доказа формуле $\exists x B(x)$ из скупа хипотеза Λ и доказа формуле $B(x) \Rightarrow A$ из скупа хипотеза Δ, чворови дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Lambda\\ |\\ \exists x B(x)\end{array}$ и дрвета $\begin{array}{c}\nabla\Delta\\ |\\ B(x) \Rightarrow A\end{array}$, и чворови у којима су закључци MP, формуле $\exists x B(x) \Rightarrow A$ и A и чвор у коме је закључак правила Gen, формула $\forall x(B(x) \Rightarrow A)$. Остаје само да проверимо да ли правило Gen са премисом $B(x) \Rightarrow A$ и закључком $\forall x(B(x) \Rightarrow A)$ задовољава услов дефиниције доказа из скупа хипотеза: x није слободна променљива ниједне формуле из скупа хипотеза Δ. Из услова који важи за правило $\exists E$ имамо да x није слободна променљива ниједне формуле из скупа $\Delta_1 \backslash \{B(x)\}$, а то значи и ниједне формуле из скупа Δ, јер је $\Delta = \Delta_1 \backslash \{B(x)\}$. Стога је посматрано правило Gen исправно примењено. Дакле, ово ново дрво јесте један доказ формуле A из скупа хипотеза $\Lambda \cup \Delta$ у систему $\mathcal{K}$.

◇

ТЕОРЕМА 4

Формула F је теорема система $\mathcal{NK}$ ако и само ако F је теорема система $\mathcal{K}$.

ДОКАЗ

ПРВИ ДЕО:

Ако је формула F теорема система $\mathcal{K}$, онда је F теорема система $\mathcal{NK}$.

ДОКАЗ

Као и у доказу еквивалентности система $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}$ (видети ТЕОРЕМУ 4 из одељка 3.2.4 у [3]) потребно је у првом кораку за сваку аксиому система $\mathcal{K}$ показати да је теорема система $\mathcal{NK}$. Докази да су аксиоме

$(A1) - (A10)$ теореме система $\mathcal{NK}$ потпуно су аналогни доказима да су аксиоме система $\mathcal{L}$ теореме система $\mathcal{N}$ (Задаци 8-15 одељка 3.2.2. у [3]). Остаје да се та особина докаже за преостале четири аксиоме система $\mathcal{K}$. То смо ми већ урадили у Задацима 1-4 одељка 2.1.2. Дакле, све аксиоме система $\mathcal{K}$ су теореме система $\mathcal{NK}$. Даље, у следећем кораку, користећи ту особину, покажимо да и произвољна теорема система $\mathcal{K}$ јесте теорема система $\mathcal{NK}$. Нека је формула F једна теорема система $\mathcal{K}$. Тада у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле F. Ако тај доказ представимо као дрво, онда је то коначно дрво у чијем корену је формула F, на сваком листу тог дрвета је једна аксиома система $\mathcal{K}$ и свако гранање је оправдано неким правилом извођења из $\mathcal{K}$, тј. правилом извођења MP или правилом извођења Gen. На том дрвету направимо следеће измене:
(1) на сваком листу затечену аксиому A заменимо дрветом доказа секвента $\vdash A$ из система $\mathcal{NK}$ који смо направили или у Задацима 1-4 из 2.1.2, или направљеним као у Задацима 8-15 одељка 3.2.2. из [3] само са предикатским формулама;
(2) у сваком чвору затечену формулу D заменимо секвентом облика $\vdash D$, па и у корену тог дрвета формулу F заменимо секвентом $\vdash F$. Добили смо ново дрво. Питамо се да ли је то дрво један доказ у систему $\mathcal{NK}$? Прво, сви листови тог дрвета су листови доказа система $\mathcal{NK}$ као из Задатака 8-15 одељка 3.2.2. у [3] или Задатака 1-4 из 2.1.2, а то значи да су на њима аксиоматски секвенти. Остаје још да проверимо чиме су оправдана гранања у том дрвету. Ако је то гранање у делу дрвета који се завршава секвентом $\vdash A$, где је A аксиома система $\mathcal{K}$, онда је оно оправдано неким правилом извођења система $\mathcal{NK}$. Ако је то гранање у делу дрвета које је постојало у дрвету доказа у систему $\mathcal{K}$ (и тамо било оправдано или правилом MP или правилом Gen), онда је у систему $\mathcal{NK}$ то гранање оправдано редом или правилом елиминације везника $\Rightarrow$, правилом $\Rightarrow E$, или правилом увођења квантификатора $\forall$, правилом $\forall U$. (Напоменимо да је правило $\forall U$ исправно примењено јер у горњем секвенту тог правила са леве стране $\vdash$ нема формула, па је тривијално задовољен услов за $(\forall U)$, да променљива x није слободна променљива у формулама лево од $\vdash$.) Дакле то јесте једно дрво доказа у систему $\mathcal{NK}$ у чијем је корену секвент $\vdash F$. Стога, закључујемо да је секвент $\vdash F$ доказив у систему $\mathcal{NK}$, а то значи да формула F јесте теорема система $\mathcal{NK}$.

ДРУГИ ДЕО:

Ако је формула F теорема система $\mathcal{NK}$, онда је F теорема система $\mathcal{K}$.

ДОКАЗ

Како је формула F теорема система $\mathcal{NK}$, имамо да је секвент $\vdash F$ доказив у систему $\mathcal{NK}$. На основу ТЕОРЕМЕ 3, у систему $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле F из скупа хипотеза који је празан скуп. То значи да је формула F теорема система $\mathcal{K}$.

♢

Две предикатске формуле A и B су синтаксно еквивалентне ако је формула $A\Leftrightarrow B$ теорема формалног система предикатске логике, система $\mathcal{NK}$ (тј. система $\mathcal{K}$). У наредној теореми показаћемо особине синтаксно еквивалентних предикатских формула, које су аналогне особинама семантички еквивалентних предикатских формула датих у ТЕОРЕМИ 5 из одељка 1.2.2.

ТЕОРЕМА 5

Нека су A и B предикатске формуле над неким језиком $\mathcal{J}$.

(1) Ако је $\vdash A \Leftrightarrow B$, онда је $\vdash \neg A \Leftrightarrow \neg B$.

(2) Ако је $\vdash A \Leftrightarrow B$, онда за произвољну предикатску формулу C над $\mathcal{J}$ важи:
  ($\wedge$1) $\vdash (C \wedge A) \Leftrightarrow (C \wedge B)$ и ($\wedge$2) $\vdash (A \wedge C) \Leftrightarrow (B \wedge C)$;
  ($\vee$1) $\vdash (C \vee A) \Leftrightarrow (C \vee B)$ и ($\vee$2) $\vdash (A \vee C) \Leftrightarrow (B \vee C)$;
  ($\Rightarrow$1) $\vdash (C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$ и ($\Rightarrow$2) $\vdash (A \Rightarrow C) \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$;
  ($\Leftrightarrow$1) $\vdash (C \Leftrightarrow A) \Leftrightarrow (C \Leftrightarrow B)$ и ($\Leftrightarrow$2) $\vdash (A \Leftrightarrow C) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$.

(3) Ако је $\vdash A \Leftrightarrow B$, онда је $\vdash \forall xA \Leftrightarrow \forall xB$.

(4) Ако је $\vdash A \Leftrightarrow B$, онда је $\vdash \exists xA \Leftrightarrow \exists xB$.

(5) Ако је $\vdash A \Leftrightarrow B$ и $\vdash B \Leftrightarrow C$, онда је $\vdash A \Leftrightarrow C$.

ДОКАЗ

Докази да су формуле из делова (1) и (2) теореме предикатске логике су потпуно аналогни доказима да су исказне формуле тог облика теореме исказне логике (видети ТЕОРЕМУ 9 из одељка 3.2.5 из [3]).

(3) Ову особину ћемо доказати у систему $\mathcal{NK}$. Знамо да је формула $A \Leftrightarrow B$ по дефиницији формула $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Зато, како је $A\Leftrightarrow B$ теорема у систему $\mathcal{NK}$, онда у том систему постоји доказ те формуле, тј. формуле $(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$, неки доказ $\mathcal{D}$. Из тог доказа применом правила $(\wedge E_1)$ и $(\wedge E_2)$ добијамо редом доказе формула $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, доказе $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$. Користећи те доказе, правимо следећи доказ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\vdash A\Rightarrow B} \qquad \dfrac{\forall xA\vdash\forall xA}{\forall xA\vdash A}\,\forall E}{\forall xA\vdash B}\,\Rightarrow E}{\forall xA\vdash\forall xB}\,\forall U}{\vdash\forall xA\Rightarrow\forall xB}\,\Rightarrow U \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_2}{\vdash B\Rightarrow A} \qquad \dfrac{\forall xB\vdash\forall xB}{\forall xB\vdash B}\,\forall E}{\forall xB\vdash A}\,\Rightarrow E}{\forall xB\vdash\forall xA}\,\forall U}{\vdash\forall xB\Rightarrow\forall xA}\,\Rightarrow U}{\vdash(\forall xA\Rightarrow\forall xB)\wedge(\forall xB\Rightarrow\forall xA)}\,\wedge U$$

Дакле, у $\mathcal{NK}$ постоји доказ секвента $\vdash (\forall xA \Rightarrow \forall xB)\wedge(\forall xB \Rightarrow \forall xA)$, тј. формула $\forall xA \Leftrightarrow \forall xB$ је теорема тог система.

(4) Доказ овог дела прави се на сличан начин као доказ дела (3).

(5) Доказ овог дела је потпуно аналоган доказу дела (7) ТЕОРЕМЕ 7 из одељка 3.2.5 у [3].

◇

У одељку 1.2.3 доказали смо ТЕОРЕМУ О ПРЕНЕКСНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ (ТЕОРЕМУ 6): за сваку формулу F постоји бар једна формула у пренексној нормалној форми F^{pf} која је (семантички) еквивалентна тој формули F, тј. $\models F \Leftrightarrow F^{pf}$. Сада ћемо доказати особину да за сваку формулу F постоји бар једна формула у пренексној нормалној форми F^{pf} са којом је та формула F синтаксно еквивалентна. Теорему из одељка 1.2.3 зваћемо и семантичка верзија ТЕОРЕМЕ О ПРЕНЕКСНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ, а теорема која говори о синтаксној еквивалентости формула F и F^{pf} је синтаксна верзија ТЕОРЕМЕ О ПРЕНЕКСНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ. Доказ те теореме, коју ћемо формулисати за систем $\mathcal{K}$, биће аналоган доказу њене семантичке верзије из одељка 1.2.3, тако што се уместо својстава: бити ваљана формула и семантичка еквивалентност користе редом својства: бити теорема и синтаксна еквивалентност.

ТЕОРЕМА 6

У систему $\mathcal{K}$ за сваку формулу F постоји бар једна формула F^{pf} у пренексној нормалној форми таква да је:

$$\vdash F \Leftrightarrow F^{pf}.$$

ДОКАЗ

Посматрајмо произвољну формулу F над неким језиком $\mathcal{J}$. Као и у семантичкој верзији (ТЕОРЕМИ О ПРЕНЕКСНОЈ НОРМАЛНОЈ ФОРМИ (ТЕОРЕМИ 6 из одељка 1.2.3)) смемо да претпоставимо да се у формули F појављују само везници $\wedge$, $\vee$ и $\neg$. Доказујемо теорему индукцијом по сложености формуле F, односно по броју n, који је збир броја логичких везника и броја квантификатора у формули F.

База индукције, $n = 0$. Формула F нема логичких везника нити квантификатора, тј. F је нека елементарна формула. Дакле, тражена формула F^{pf} је сама формула F.

Индукцијска претпоставка: теорема важи за сваку формулу F која има мање од n логичких везника и квантификатора, односно постоји формула F^{pf} у пренексној нормалној форми, таква да је:

$$\vdash F \Leftrightarrow F^{pf}.$$

Доказ да теорема важи за формулу са n везника и квантификатора.

Посматрајмо формулу F која има n логичких везника и квантификатора. Формула F може имати један од следећих облика:

$$A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad \neg A, \qquad \forall x A \qquad \text{или} \qquad \exists x A.$$

Без обзира који од пет наведених облика има формула F, њене потформуле A и B имају бар један везник или квантификатор мање од те формуле F, па за њих важи индукцијска претпоставка: постоје формуле A^{pf} и B^{pf} у пренексној нормалној форми такве да је:

$$\vdash A \Leftrightarrow A^{pf} \qquad \text{и} \qquad \vdash B \Leftrightarrow B^{pf}.$$

Пошто су формуле A^{pf} и B^{pf} у пренексној нормалној форми, онда је свака од формула A^{pf} и B^{pf}

($*$) или формула која не садржи квантификаторе, тј. формуле A^{pf} и B^{pf} су редом формуле C и D које не садрже квантификаторе;

($**$) или формула у којој су сви квантификатори на њеном почетку, тј. формуле A^{pf} и B^{pf} су редом облика $Q_1x_1 ... Q_lx_lC$ и $P_1y_1 ... P_my_mD$

за неке $l, m > 0$, где је сваки Q_i $(1 \leq i \leq l)$ и P_j $(1 \leq j \leq m)$ или $\forall$ или $\exists$ и формуле C и D не садрже квантификаторе.

За било који облик A^{pf} и B^{pf} доказује се, аналогно као у семантичкој верзији теореме, да можемо да претпоставимо да су скупови слободних промењљивих формуле C и слободних промењљивих формуле D дисјунктни. У овом доказу користи се аргумент да су, за сваку формулу A у којој се не јавља y, формуле $\forall xA \Leftrightarrow \forall yA^x_y$ и $\exists xA \Leftrightarrow \exists yA^x_y$ теореме (показано у Примеру 5 из 2.1.1) и то уместо аргумента из семантичке верзије да су те формуле ваљане. Сада за формулу F одредимо тражену формулу F^{pf}.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $A \wedge B$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf} и формула B и B^{pf}, тј. из

$$\vdash A \Leftrightarrow A^{pf} \quad \text{и} \quad \vdash B \Leftrightarrow B^{pf},$$

на основу делова $(\wedge 1)$, $(\wedge 2)$ и (5) ТЕОРЕМЕ 5, имамо синтаксну еквивалентност формула $A \wedge B$ и $A^{pf} \wedge B^{pf}$, односно важи

$$\vdash (A \wedge B) \Leftrightarrow (A^{pf} \wedge B^{pf}).$$

Ако су обе формуле A^{pf} и B^{pf} облика $(*)$, онда је формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$ у пренексној нормалној форми. Дакле, тражена формула F^{pf} је формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$.

Ако је бар једна од формула A^{pf} и B^{pf} облика $(**)$, онда је $A^{pf} \wedge B^{pf}$:

$$(Q_1x_1...Q_lx_lC) \wedge (P_1y_1...P_my_mD)$$

где је $l > 0$ или $m > 0$.

Индукцијом по броју квантификатора у формули $A^{pf} \wedge B^{pf}$, броју $l+m$, аналогно као у делу доказу семантичке верзије када је формула F облика $A \wedge B$, показујемо да је формула $A^{pf} \wedge B^{pf}$ синтаксно еквивалентна формули:

$$Q_1x_1...Q_lx_lP_1y_1...P_my_m(C \wedge D),$$

која је у пренексној нормалној форми.

У том доказу користи се синтаксна еквивалентност, а не семантичка. Наиме, користимо особине да су формуле

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\forall xA(x) \wedge B) \quad \text{и} \quad \exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow (\exists xA(x) \wedge B)$$

за $x \notin SF(B)$ и

$$\forall x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \forall xA(x)) \quad \text{и} \quad \exists x(B \wedge A(x)) \Leftrightarrow (B \wedge \exists xA(x)),$$

за $x \notin SF(B)$

теореме, што је доказано у Примерима 7 и 8 из одељка 2.1.1 (уместо особина да су те формуле ваљане формуле, које су коришћене у семантичкој верзији).

◁ Претпоставимо да је формула F облика $A \vee B$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf} и формула B и B^{pf}, тј. из

$$\vdash A \Leftrightarrow A^{pf} \quad \text{и} \quad \vdash B \Leftrightarrow B^{pf},$$

на основу делова $(\vee 1)$, $(\vee 2)$ и (5) ТЕОРЕМЕ 5, имамо синтаксну еквивалентност формула $A \vee B$ и $A^{pf} \vee B^{pf}$, значи важи

$$\vdash (A \vee B) \Leftrightarrow (A^{pf} \vee B^{pf}).$$

Користећи теореме (4) и (5) из **Примера 7** и (3) и (4) из **Примера 8** из одељка 2.1.1, поступамо аналогно као у случају када је формула F^{pf} облика $A \wedge B$, и добијамо формулу у пренексној нормалној форми, формулу F^{pf}, синтаксно еквивалентну формули $A \vee B$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\neg A$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf}, тј. из

$$\vdash A \Leftrightarrow A^{pf},$$

на основу дела (1) ТЕОРЕМЕ 5, имамо синтаксну еквивалентност формула $\neg A$ и $\neg A^{pf}$, тј. важи

$$\vdash \neg A \Leftrightarrow \neg A^{pf}.$$

Ако је формула A^{pf} облика $(*)$, онда је формула $\neg A^{pf}$ у пренексној нормалној форми. Дакле, тражена формула F^{pf} је $\neg A^{pf}$.

Ако је формула A^{pf} облика $(**)$, тј. A^{pf} је облика $Q_1 x_1 ... Q_l x_l C$, $l > 0$, онда је формула $\neg A^{pf}$ облика

$$\neg(Q_1 x_1 ... Q_l x_l C).$$

Индукцијом по броју квантификатора формуле $\neg A^{pf}$, броју l може се показати да је формула $\neg A^{pf}$ синтаксно еквивалентна формули:

$$\overline{Q}_1 x_1 ... \overline{Q}_l x_l \neg C,$$

која је у пренексној нормалној форми, где је $\overline{Q}_i$ квантификатор различит од Q_i, за све $1 \leq i \leq l$. Тај је доказ аналоган делу доказа семантичке верзије када је формула F облика $\neg A$, само се уместо особине да су Де Морганови закони за квантификаторе

$$\neg \forall z E \Leftrightarrow \exists z \neg E \qquad \text{и} \qquad \neg \exists z E \Leftrightarrow \forall z \neg E$$

ваљане формуле, користи особина да су оне теореме (што смо показали у **Примеру 6** из одељка 2.1.1).

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\forall x A$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf}, тј. из

$$\vdash A \Leftrightarrow A^{pf},$$

на основу дела (3) ТЕОРЕМЕ 5, имамо синтаксну еквивалентност формула $\forall x A$ и $\forall x A^{pf}$, односно важи

$$\vdash \forall x A \Leftrightarrow \forall x A^{pf}$$

и формула $\forall x A^{pf}$ је у пренексној нормалној форми, тј. формула $\forall x A^{pf}$ је тражена формула F^{pf}.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\exists x A$.

Из еквивалентности формула A и A^{pf}, тј. из

$$\vdash A \Leftrightarrow A^{pf},$$

на основу дела (4) ТЕОРЕМЕ 5, имамо синтаксну еквивалентност формула $\exists x A$ и $\exists x A^{pf}$, дакле важи

$$\vdash \exists x A \Leftrightarrow \exists x A^{pf},$$

па је формула $\exists x A^{pf}$ тражена формула F^{pf}.

♢

2.2 Дефиниција и примери теорија првог реда

2.2.1 Дефиниција теорија првог реда

Већ смо у уводу ове главе рекли да су теорије првог реда формалне теорије у оквиру неког формалног система предикатске логике, система $\mathcal{K}$ или $\mathcal{NK}$, или неког трећег формалног система те логике. У грађењу једне теорије првог реда $\mathcal{T}$ полазимо од логичког дела алфабета предикатске логике и неког језика $\mathcal{J}$. Њене формуле су предикатске формуле над тим језиком. Аксиоме и правила извођења теорије $\mathcal{T}$ су све аксиоме и правила извођења (прецизније, схеме тих аксиома и правила) изабраног формалног система предикатске логике и можда још неке специјалне аксиоме и правила извођења. А ево и дефиниције теорије првог реда.

Дефиниција теорије првог реда

Теорија првог реда $\mathcal{T}$ је формална теорија таква да

⋄ њени симболи су симболи алфабета предикатске логике, тј. симболи његовог логичког дела $\mathcal{J}_l$ и неког језика $\mathcal{J}$ (чији скуп индивидуалних константи $\mathcal{C}$ и скуп операцијских симбола $\mathcal{O}$ могу бити празни);

⋄ њене формуле су предикатске формуле над језиком $\mathcal{J}$;

⋄ њене аксиоме су аксиоме неког формалног система предикатске логике над језиком $\mathcal{J}$, и можда још неке специјалне аксиоме које чине скуп $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$;

⋄ правила извођења су правила извођења истог формалног система предикатске логике, и можда још и нека правила извођења која чине коначан скуп $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$.

Приметимо одмах да ако имамо неки језик $\mathcal{J}$, онда сваки формални систем предикатске логике над $\mathcal{J}$ јесте једна теорија првог реда, чији је скуп специјалних аксиома, скуп $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, празан, и који осим својих нема других правила извођења (тј. скуп $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ је празан). Дакле, наши системи $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$ над неким језиком $\mathcal{J}$ су теорије првог реда. Један такав формални систем предикатске логике над неким језиком $\mathcal{J}$ зове се и предикатски рачун првог реда. Ако су још у језику $\mathcal{J}$ скуп индивидуалних константи $\mathcal{C}$ и скуп операцијских симбола $\mathcal{O}$ празни, онда се користи и назив чист предикатски рачун првог реда.

Када хоћемо да дефинишемо једну формалну теорију првог реда $\mathcal{T}$ над неким језиком $\mathcal{J}$, прво бирамо формални систем предикатске логике над тим језиком у оквиру кога ће бити та теорија. У оквиру система $\mathcal{K}$ дефинишемо формалну теорију првог реда $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}$ чији је скуп аксиома, скуп $\mathcal{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}(\mathcal{K}) \cup \mathcal{A}_{\mathcal{T}}$, где $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ је скуп специјалних аксиома, а скуп правила извођења, скуп $\mathcal{R}(\mathcal{T})$, чине само правила извођења система $\mathcal{K}$: MP и Gen. Када теорију првог реда заснивамо у оквиру система $\mathcal{NK}$, онда су елементи скупа $\mathcal{A}_{\mathcal{T}}$ аксиоматски секвенти које додајемо скупу $\mathcal{A}(\mathcal{NK})$ и добијамо $\mathcal{A}(\mathcal{T})$; а скуп правила извођења, скуп $\mathcal{R}(\mathcal{T})$, је $\mathcal{R}(\mathcal{NK}) \cup \mathcal{R}_{\mathcal{T}}$, где је $\mathcal{R}_{\mathcal{T}}$ коначан скуп нових правила извођења. Пошто се теорије првог реда заснивају у оквиру неког система предикатске логике те теорије се још зову и предикатске теорије.

Како је свака теорија првог реда једна формална теорија, то су дефиниције доказа (извођења, дедукције), теореме и доказа формуле из скупа хипотеза за теорије првог реда исте као за сваку формалну теорију (видети 3.1 у [3]). Те дефиниције смо већ навели за посебне теорије, системе $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$. Овде ћемо их представити за једну теорију првог реда $\mathcal{T}$ у оквиру система предикатске логике $\mathcal{NK}$. У тој теорији првог реда $\mathcal{T}$ доказ секвента $\Gamma \vdash F$ је коначно дрво у чијем корену је баш секвент $\Gamma \vdash F$, на сваком листу је један аксиоматски секвент те теорије $\mathcal{T}$, а свако гранање је оправдано неким њеним правилом извођења. Казаћемо да је секвент $\Gamma \vdash F$ доказив у теорији $\mathcal{T}$ ако и само ако постоји доказ у тој теорији у чијем је корену тај секвент $\Gamma \vdash F$. Формула F је теорема теорије $\mathcal{T}$ ако је секвент $\vdash F$ доказив у теорији $\mathcal{T}$, а последица скупа хипотеза Γ ако је секвент $\Gamma \vdash F$ доказив у теорији $\mathcal{T}$. Ознака да је F теорема теорије $\mathcal{T}$ биће уобичајена: $\vdash_{\mathcal{T}} F$ (или само $\vdash F$) и у овој ознаци симбол $\vdash$ је из метајезика теорије $\mathcal{T}$.

У наредним одељцима овог поглавља представићемо четири теорије првог реда.

2.2.2 Чиста теорија једнакости

Важна теорија првог реда, чиста теорија једнакости, је предикатска логика са једнакошћу. Наиме, формуле те теорије се разликују од предикатских формула над језиком $\mathcal{J}$ по томе што оне могу имати и релацијски симбол $=$. Дакле, језик те теорије је језик са једнакошћу $\mathcal{J}_{=}$, где је $\mathcal{J}$ дати језик над којим су прављене предикатске формуле. Тај симбол се, рекли смо то (у поглављу 1.3), увек интерпретира релацијом једнакост, која је неопходна у математици. Зато је чиста теорија једнакости основа многих математичких теорија.

Подсетимо се особина релације једнакости. Она је релација еквиваленције, тј. једнакост је рефлексивна, симетрична и транзитивна. Запишимо те особине формулама над језиком $\mathcal{J}_{=}$:

$(R) \quad \forall x(x = x)$

$(S)\quad \forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$

$(T)\quad \forall x \forall y \forall z ((x = y \land y = z) \Rightarrow x = z)$

Осим ових особина из наше математичке праксе знамо да се једнакост добро слаже са операцијама и релацијама. Наиме, за произвољне вредности $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ и било коју операцију f дужине n и релацију ρ дужине n, где је n било који природан број, већи од 0, важи:

– ако је $x_1 = y_1$ и ... и $x_n = y_n$, онда је $f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n)$

и

– ако је $x_1 = y_1$ и ... и $x_n = y_n$, онда из $\rho(x_1, ..., x_n)$ следи $\rho(y_1, ..., y_n)$.

Те особине можемо представити и формално, формулама над језиком $\mathcal{J}_=$, за природан број n, $n \geq 1$:

$$(E_f^n)\ \forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n ((x_1 = y_1 \land ... \land x_n = y_n) \Rightarrow (f(x_1, ..., x_n) = f(y_1, ..., y_n)))$$

и

$$(E_\rho^n)\ \forall x_1 ... \forall x_n \forall y_1 ... \forall y_n ((x_1 = y_1 \land ... \land x_n = y_n) \Rightarrow (\rho(x_1, ..., x_n) \Rightarrow \rho(y_1, ..., y_n)))$$

где је f произвољан операцијски симбол, а ρ произвољан релацијски симбол језика $\mathcal{J}_=$, оба дужине n. Можемо рећи да су ово најважније особине једнакости. Те особине се просто подразумевају за једнакост и очекујемо да то буду аксиоме које говоре о једнакости.

Међутим, пре него што прецизно кажемо које су специјалне аксиоме чисте теорије једнакости морамо се одлучити у оквиру ког система предикатске логике градимо чисту теорију једнакости. Изаберимо, на пример, систем природне дедукције $\mathcal{NK}$. Чисту теорију једнакости која је заснована у оквиру овог система предикатске логике означаваћемо $\mathcal{NK}_=$. Скуп аксиоматских секвената теорије $\mathcal{NK}_=$ чине само аксиоматски секвенти система $\mathcal{NK}$, али су зато елементи скупа правила извођења те теорије, скупа $\mathcal{R}(\mathcal{NK}_=)$, сва правила из скупа правила извођења система $\mathcal{NK}$, скупа $\mathcal{R}(\mathcal{NK})$, и још два правила, правило увођења и правило елиминације за једнакост:

$$(=U)\ \ \vdash t = t \qquad\qquad (=E)\ \frac{\Gamma \vdash t_1 = t_2 \qquad \Delta \vdash A^x_{t_1}}{\Gamma \cup \Delta \vdash A^x_{t_2}}$$

уз услов да су терми t_1 и t_2 слободни за x у A

Можда на први поглед изгледа да се ова правила која уводе и елиминишу једнакост разликују од већ наведених добро познатих особина једнакости. Зато покажимо да у теорији $\mathcal{NK}_=$ за једнакост важе особине: рефлексивност, симетричност и транзитивност.

Задатак 1 Докажимо да су већ наведене формуле (R), (S) и (T) теореме теорије $\mathcal{NK}_=$.

Доказ формуле $(R)\ \forall x (x = x)$.

$$\frac{\vdash x = x}{\vdash \forall x (x = x)}\forall U$$

Доказ формуле $(S)\ \forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x=y\vdash x=y \qquad \vdash (z=x)^z_x}{x=y\vdash (z=x)^z_y}\,{=}E}{\vdash x=y\Rightarrow y=x}\,{\Rightarrow}U}{\vdash \forall y(x=y\Rightarrow y=x)}\,\forall U}{\vdash \forall x\forall y(x=y\Rightarrow y=x)}\,\forall U$$

где је $\vdash (z=x)^z_x$ правило $(=U)$: $\vdash x=x$.

Доказ формуле $\quad (T)\ \forall x\forall y\forall z((x=y\land y=z)\Rightarrow x=z)$.

Прво из доказа формуле (S) издвојимо његов део који се завршава секвентом $\vdash x=y\Rightarrow y=x$:

$$\cfrac{\cfrac{x=y\vdash x=y \qquad \vdash (z=x)^z_x}{x=y\vdash (z=x)^z_y}\,{=}E}{\vdash x=y\Rightarrow y=x}\,{\Rightarrow}U$$

што је доказ формуле $x=y\Rightarrow y=x$ у теорији $\mathcal{NK}_=$, доказ $\mathcal{D}$. Користећи доказ $\mathcal{D}$ правимо овакав доказ:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\mathcal{D}}{\vdash x=y\Rightarrow y=x} \qquad \cfrac{x=y\land y=z\vdash x=y\land y=z}{x=y\land y=z\vdash x=y}\,\land E_1}{x=y\land y=z\vdash y=x}\,{\Rightarrow}E \qquad \cfrac{x=y\land y=z\vdash x=y\land y=z}{x=y\land y=z\vdash y=z}\,\land E_2}{x=y\land y=z\vdash x=z}\,{=}E}{\vdash (x=y\land y=z)\Rightarrow x=z}\,{\Rightarrow}U}{\vdash \forall z((x=y\land y=z)\Rightarrow x=z)}\,\forall U}{\vdash \forall y\forall z((x=y\land y=z)\Rightarrow x=z)}\,\forall U}{\vdash \forall x\forall y\forall z((x=y\land y=z)\Rightarrow x=z)}\,\forall U$$

Задатак 2

Поменуте формуле (E^n_f) и (E^n_ρ) за сваки операцијски симбол f дужине 1 и сваки релацијски симбол ρ дужине 1 су редом следеће формуле:

$$(E^1_f) \qquad \forall x_1\forall y_1((x_1=y_1)\Rightarrow(f(x_1)=f(y_1)))$$

$$(E^1_\rho) \qquad \forall x_1\forall y_1((x_1=y_1)\Rightarrow(\rho(x_1)\Rightarrow\rho(y_1)))$$

Докажимо да су те формуле теореме теорије $\mathcal{NK}_=$.

Доказ за формулу (E^1_f).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x_1=y_1\vdash x_1=y_1 \qquad \vdash (f(x_1)=f(z))^z_{x_1}}{x_1=y_1\vdash f(x_1)=f(y_1)}\,{=}E}{\vdash x_1=y_1\Rightarrow(f(x_1)=f(y_1))}\,{\Rightarrow}U}{\vdash \forall y_1((x_1=y_1)\Rightarrow(f(x_1)=f(y_1)))}\,\forall U}{\vdash \forall x_1\forall y_1((x_1=y_1)\Rightarrow(f(x_1)=f(y_1)))}\,\forall U$$

где је $\vdash (f(x_1) = f(z))^z_{x_1}$ правило $(=U)$: $\vdash f(x_1) = f(x_1)$.

Доказ за формулу (E^1_ρ).

$$\begin{array}{cl}
x_1 = y_1 \vdash x_1 = y_1 \qquad \rho(x_1) \vdash \rho(x_1) & \\ \cline{1-1}
x_1 = y_1, \rho(x_1) \vdash \rho(y_1) & {=}E \\ \cline{1-1}
x_1 = y_1 \vdash \rho(x_1) \Rightarrow \rho(y_1) & \Rightarrow U \\ \cline{1-1}
\vdash (x_1 = y_1) \Rightarrow (\rho(x_1) \Rightarrow \rho(y_1)) & \Rightarrow U \\ \cline{1-1}
\vdash \forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (\rho(x_1) \Rightarrow \rho(y_1))) & \forall U \\ \cline{1-1}
\vdash \forall x_1 \forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (\rho(x_1) \Rightarrow \rho(y_1))) & \forall U
\end{array}$$

Аналогно се може доказати да су и формуле (E^n_f) и (E^n_ρ), за сваки природан број n већи од 1, теореме теорије $\mathcal{NK}_=$.

Приметимо да елементарне формуле $\rho(x_1)$ и $\rho(y_1)$ из формуле (E^1_ρ) јесу у ствари редом елементарне формуле $\rho(z)^z_{x_1}$ и $\rho(z)^z_{y_1}$. Ако у (E^1_ρ) уместо елементарне формуле $\rho(z)$ ставимо произвољну формулу A добијамо формулу:

$$(E) \qquad \forall x_1 \forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (A^z_{x_1} \Rightarrow A^z_{y_1}))$$

где су наравно x_1 и y_1 као терми слободни за промењиву z у A.

Покажимо да је и формула (E) теорема теорије $\mathcal{NK}_=$.

$$\begin{array}{cl}
x_1 = y_1 \vdash x_1 = y_1 \qquad A^z_{x_1} \vdash A^z_{x_1} & \\ \cline{1-1}
x_1 = y_1, A^z_{x_1} \vdash A^z_{y_1} & {=}E \\ \cline{1-1}
x_1 = y_1 \vdash A^z_{x_1} \Rightarrow A^z_{y_1} & \Rightarrow U \\ \cline{1-1}
\vdash (x_1 = y_1) \Rightarrow (A^z_{x_1} \Rightarrow A^z_{y_1}) & \Rightarrow U \\ \cline{1-1}
\vdash \forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (A^z_{x_1} \Rightarrow A^z_{y_1})) & \forall U \\ \cline{1-1}
\vdash \forall x_1 \forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (A^z_{x_1} \Rightarrow A^z_{y_1})) & \forall U
\end{array}$$

Сада представимо и другу могућност дефинисања чисте теорије једнакости. То је теорија првог реда одређена језиком $\mathcal{J}_=$ и системом $\mathcal{K}$ предикатске логике, теорија $\mathcal{K}_=$. Аксиоме теорије $\mathcal{K}_=$, које се односе на једнакост, су формуле (R) и (E). Што се тиче нових правила извођења, теорија $\mathcal{K}_=$ нема додатних правила извођења, осим правила извођења система $\mathcal{K}$, правила MP и Gen. Ево одмах доказа једне теореме теорије $\mathcal{K}_=$.

Задатак 3 Покажимо да је за x_1 и y_1, који се не јављају у формули B, и терме t и s, који су слободни за промењиву x у B, формула

$$(\forall x_1(\forall y_1((x_1{=}y_1){\Rightarrow}(B^x_{x_1}{\Rightarrow}B^x_{y_1})))){\Rightarrow}((t = s){\Rightarrow}(B^x_t{\Rightarrow}B^x_s))$$

теорема теорије $\mathcal{K}_=$.

Имамо аксиому $(A11)$ теорије $\mathcal{K}_=$: $\forall z A(z){\Rightarrow}A^z_t$, где је терм t слободан за промењиву z у формули A.

Ако је A формула $\forall y_1((x_1{=}y_1){\Rightarrow}(B^x_{x_1}{\Rightarrow}B^x_{y_1}))$, и терм t слободан за промењиву x_1 у тој формули (тиме и за промењиву x у формули B, и још значи и да y_1 не сме да се јавља у t), онда имамо аксиому $(A11)$ теорије $\mathcal{K}_=$, $\forall x_1 A \Rightarrow A^{x_1}_t$, формулу F':

$\forall x_1(\forall y_1((x_1{=}y_1)\Rightarrow(B^x_{x_1}\Rightarrow B^x_{y_1}))) \Rightarrow (\forall y_1((x_1{=}y_1)\Rightarrow(B^x_{x_1}\Rightarrow B^x_{y_1})))^{x_1}_t$, тј.

$\forall x_1(\forall y_1((x_1{=}y_1)\Rightarrow(B^x_{x_1}\Rightarrow B^x_{y_1}))) \Rightarrow (\forall y_1((t{=}y_1)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_{y_1})))$

јер $(B^x_{x_1})^{x_1}_t$ јесте B^x_t и $(B^x_{y_1})^{x_1}_t$ је $B^x_{y_1}$ (x_1 се не јавља у B).

Када је A формула $(t = y_1) \Rightarrow (B^x_t \Rightarrow B^x_{y_1})$ и терм s слободан за променљиву y_1 у тој формули (тиме и за x у формули B), онда је аксиома $(A11)$ теорије $\mathcal{K}_=$ формула F'':

$\forall y_1((t{=}y_1)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_{y_1})) \Rightarrow ((t{=}y_1)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_{y_1}))^{y_1}_s$, тј.

$\forall y_1((t{=}y_1)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_{y_1})) \Rightarrow ((t{=}s)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_s))$

јер $(B^x_t)^{y_1}_s$ јесте B^x_t (y_1 се не јавља у t нити у B) и $(B^x_{y_1})^{y_1}_s$ јесте B^x_s.

Приметимо да је аксиома F' облика $C\Rightarrow D$,

где је C формула $\forall x_1(\forall y_1((x_1{=}y_1)\Rightarrow(B^x_{x_1}\Rightarrow B^x_{y_1})))$

и D је формула $\forall y_1((t{=}y_1)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_{y_1}))$,

и аксиома F'' је облика $D\Rightarrow E$, где је E формула $(t{=}s)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_s)$.

Имамо дакле да су аксиоме F' и F'' формуле истог облика као теореме посматране у Задатку 7 из одељка 2.1.3, редом $C\Rightarrow D$ и $D\Rightarrow E$. Зато F' и F'' заједно са одговарајућим формулама $F_1,\ldots,F_5$ као у том Задатку 7 чине низ формула, који је по дефиницији, доказ формуле $C\Rightarrow E$ у теорији $\mathcal{K}_=$. Стога, добијамо да је наша формула $C \Rightarrow E$, тј. формула

$$(\forall x_1(\forall y_1((x_1{=}y_1)\Rightarrow(B^x_{x_1}\Rightarrow B^x_{y_1}))))\Rightarrow((t = s)\Rightarrow(B^x_t\Rightarrow B^x_s)),$$

где се x_1 и y_1 не јављају у формули B и терми t и s су слободни за променљиву x у B, теорема теорије $\mathcal{K}_=$.

Приметимо да формуле којим се описују симетричност и транзитивност једнакости нису узете за аксиоме теорије $\mathcal{K}_=$. Пошто знамо да те особине важе за једнакост, оне морају бити теореме те теорије. Заиста, у теорији $\mathcal{K}_=$ могу се доказати формуле (S) и (T), али ми то овде нећемо урадити. Ми ћемо то, да су формуле (S) и (T) теореме теорије $\mathcal{K}_=$, добити као последицу следећих својстава: (S) и (T) су теореме теорије $\mathcal{NK}_=$ (што смо показали у Задатку 1), и теорије $\mathcal{NK}_=$ и $\mathcal{K}_=$ су еквивалентне, што ћемо показати у наредном задатку.

Задатак 4 Покажимо да важи:
F је теорема теорије $\mathcal{NK}_=$ ако и само ако F је теорема теорије $\mathcal{K}_=$.

Подсетимо се да смо у одељку 2.1.4 при доказивању еквивалентности система $\mathcal{K}$ и $\mathcal{NK}$ доказали следеће особине:

(1) све аксиоме система $\mathcal{K}$ су теореме система $\mathcal{NK}$;

(2) ако је секвент $\Gamma \vdash A$ доказив у $\mathcal{NK}$, онда у $\mathcal{K}$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза Γ.

Да бисмо доказали један део нашег тврђења, део

ако је F теорема теорије $\mathcal{K}_=$, онда је F теорема теорије $\mathcal{NK}_=$,

прво покажимо да су све аксиоме $\mathcal{K}_=$ теореме теорије $\mathcal{NK}_=$. Како имамо особину (1), остаје да докажемо да су (R) и (E) теореме теорије $\mathcal{NK}_=$. То смо већ урадили у Задатку 1 и Задатку 2, па закључујемо, да су све аксиоме теорије $\mathcal{K}_=$ теореме теорије $\mathcal{NK}_=$.

Користећи то својство, на потпуно исти начин као у првом делу доказа ТЕОРЕМЕ 4 из одељка 2.1.4 показујемо да је и произвољна теорема теорије $\mathcal{K}_=$ теорема и теорије $\mathcal{NK}_=$.

Даље, да бисмо доказали део

ако је F теорема теорије $\mathcal{NK}_=$, онда је F теорема теорије $\mathcal{K}_=$

прво ћемо показати ову особину теорија $\mathcal{NK}_=$ и $\mathcal{K}_=$:

ако је секвент $\Gamma \vdash A$ доказив у $\mathcal{NK}_=$, онда у $\mathcal{K}_=$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза Γ.

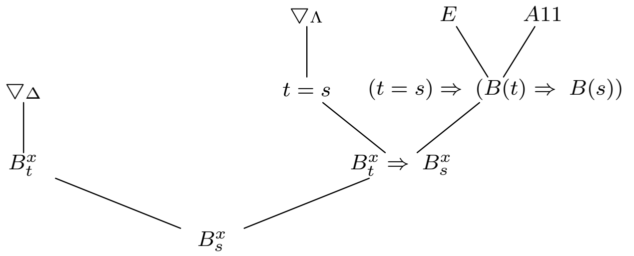
Доказ те особине је потпуно исти као доказ ТЕОРЕМЕ 3 (тј. особине (2), коју смо навели) из одељка 2.1.4. Наиме, посматраћемо доказ секвента $\Gamma \vdash A$ и индукцијом по дужини доказа (тј. броју правила извођења у доказу) показаћемо да у $\mathcal{K}_=$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза Γ. База индукције: доказ секвента $\Gamma \vdash A$ је само један секвент, баш тај секвент. То значи да је он: или аксиоматски секвент $A \vdash A$, и он у теорији $\mathcal{K}_=$ даје доказ са једним чвором у коме је формула A; или правило увођења $=$, $\vdash t = t$, које у теорији $\mathcal{K}_=$ даје следећи доказ:

$$\begin{tikzcd}
\forall\, x\; (x = x) \arrow[dr, dash] & & (\forall\, x\; (x = x)) \Rightarrow (x = x)^x_t \arrow[dl, dash] \\
& t = t &
\end{tikzcd}$$

Индукцијска претпоставка: особина важи за сваки доказив секвент теорије $\mathcal{NK}_=$ чији доказ има дужину мању од n. Затим посматрамо доказ $\mathcal{D}$ секвента $\Gamma \vdash A$ који је дужине n. Имамо више случајева у зависности од последњег правила тог доказа, које може бити: или правило елиминације или увођења за везнике или за квантификаторе, или Персово правило, или правило елиминације једнакости. Случајеви када последње правило доказа $\mathcal{D}$ није правило елиминације једнакости се решавају потпуно исто као у доказу поменуте ТЕОРЕМЕ 3 (из 2.1.4). Остаје још случај када је последње правило доказа секвента $\Gamma \vdash A$ правило елиминације $=$, правило $= E$:

$$\frac{\Lambda \vdash t = s \qquad \Delta \vdash B^x_t}{\Lambda \cup \Delta \vdash B^x_s} = E$$

где су терми t и s слободни за промењљиву x у B, а секвент $\Gamma \vdash A$ је облика $\Lambda \cup \Delta \vdash B^x_s$. Треба показати да у $\mathcal{K}_=$ постоји доказ формуле B^x_s из скупа хипотеза $\Lambda \cup \Delta$. Горњи секвенти правила $=E$, секвенти $\Lambda \vdash t = s$ и $\Delta \vdash B^x_t$, су доказиви у теорији $\mathcal{NK}_=$ и још важи да њихови докази имају мањи број правила извођења него доказ секвента $\Lambda \cup \Delta \vdash B^x_s$. Стога за њих важи индукцијска претпоставка, односно у теорији $\mathcal{K}_=$ постоји доказ формуле $t = s$ из скупа хипотеза Λ и доказ B^x_t из скупа хипотеза Δ. Користећи те доказе правимо доказ B^x_s из скупа хипотеза $\Lambda \cup \Delta$:



где E јесте $\forall x_1 \forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (B^x_{x_1} \Rightarrow B^x_{y_1}))$ за x_1 и y_1 који се не јављају у формули B, а тиме су слободни за x у B;

$A11$ је $(\forall x_1(\forall y_1((x_1 = y_1) \Rightarrow (B^x_{x_1} \Rightarrow B^x_{y_1})))) \Rightarrow ((t = s) \Rightarrow (B^x_t \Rightarrow B^x_s))$, где се x_1 и y_1 не јављају у формули B и терми t и s су слободни за промењиву x у B; и

у формули која је закључак MP са премисама E и $A11$ потформуле $B(t)$ и $B(s)$ су редом B^x_t и B^x_s.

Формула E је аксиома теорији $\mathcal{K}_=$, а $A11$ је теорема теорије $\mathcal{K}_=$ из Задатка 3. У теорији $\mathcal{K}_=$ постоји дрво које је доказ теореме $A11$ и у чијем корену је та формула, а на чијим листовима су само аксиоме. Дакле, ако у нашем дрвету изнад теореме $A11$ ставимо њен доказ добићемо ново дрво које јесте један доказ формуле B^x_s из скупа хипотеза $\Lambda \cup \Delta$ у теорији $\mathcal{K}_=$.

Значи важи особина: ако је секвент $\Gamma \vdash A$ доказив у $\mathcal{NK}_=$, онда у $\mathcal{K}_=$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза Γ.

Сада, ако је формула F теорема теорије $\mathcal{NK}_=$ (тј. секвент $\vdash F$ је доказив у $\mathcal{NK}_=$), на основу те особине имамо, да постоји доказ формуле F из скупа хипотеза који је празан скуп, што значи да је формула F теорема теорије $\mathcal{K}_=$.

Дакле, за теорије $\mathcal{NK}_=$ и $\mathcal{K}_=$ важи:

F је теорема теорије $\mathcal{NK}_=$ ако и само ако F је теорема теорије $\mathcal{K}_=$, тј. теорије $\mathcal{NK}_=$ и $\mathcal{K}_=$ су еквивалентне.

2.2.3 Теорија парцијалног уређења

Представимо још једну теорију првог реда, теорију парцијалног уређења $\mathcal{K}_\leq$. Језик те теорије је $\mathcal{J}_\leq = \{=, \leq\}$, где је $=$ релацијски симбол једнакости и $\leq$ релацијски симбол дужине 2. Осим аксиома теорије $\mathcal{K}_=$ теорија парцијалног уређења $\mathcal{K}_\leq$ има и ове специјалне аксиоме:

$(A_\leq 1)$ $\forall x(x \leq x)$

$(A_\leq 3)$ $\forall x_1 \forall x_2((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_1) \Rightarrow (x_1 = x_2))$

$(A_\leq 3)$ $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3((x_1 \leq x_2 \wedge x_2 \leq x_3) \Rightarrow (x_1 \leq x_3))$

Теорија $\mathcal{K}_\leq$ нема других правила извођења, осим правила извођења система $\mathcal{K}$, правила MP и Gen.

2.2.4 Теорија група

Језик теорије група $\mathcal{G}$ је језик $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}=\{=,*,e\}$, где је $=$ релацијски симбол једнакости, $*$ операцијски симбол дужине 2 и индивидуална константа је e. Осим аксиома теорије $\mathcal{K}_{=}$ теорија група $\mathcal{G}$ има ове специјалне аксиоме:

$(A_{\mathcal{G}}1)\quad \forall x_1\forall x_2\forall x_3((x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3))$

$(A_{\mathcal{G}}2)\quad \forall x(x * e = x)$

$(A_{\mathcal{G}}3)\quad \forall x\exists y(x * y = e)$.

Теорија група $\mathcal{G}$, као и теорије $\mathcal{K}_{=}$ и $\mathcal{K}_{\leq}$, нема других правила извођења, осим правила извођења система $\mathcal{K}$, правила MP и Gen.

Теорија комутативних група $\mathcal{G}_k$, је на језику $\mathcal{J}_{\mathcal{G}}$ и њене аксиоме су већ поменуте $(A_{\mathcal{G}}1)$, $(A_{\mathcal{G}}2)$ и $(A_{\mathcal{G}}3)$ и ова аксиома:

$(A_{\mathcal{G}}4)\quad \forall x_1\forall x_2(x_1 * x_2 = x_2 * x_1)$

2.3 Особине и модели теорија првог реда

2.3.1 Особине теорија првог реда

У наредним задацима показаћемо неке особине теорија првог реда које ћемо касније користити.

Задатак 1 Свака теорема једног система предикатске логике, над неким језиком $\mathcal{J}$, јесте теорема и сваке теорије првог реда $\mathcal{T}$ над тим језиком.

Посматрамо произвољну теорију првог реда, теорију $\mathcal{T}$, у оквиру система $\mathcal{NK}$. Ако је F теорема система предикатске логике, система $\mathcal{NK}$, онда у систему $\mathcal{NK}$ постоји доказ секвента $\vdash F$, неки доказ $\mathcal{D}$. На основу дефиниције доказа у систему $\mathcal{NK}$, доказ $\mathcal{D}$ је једно коначно дрво у чијем корену је баш тај секвент $\vdash F$, на сваком листу тог дрвета је један аксиоматски секвент система $\mathcal{NK}$, а свако његово гранање је оправдано неким правилом извођења система $\mathcal{NK}$. Прво приметимо да све формуле доказа $\mathcal{D}$ јесу формуле и теорије $\mathcal{T}$. Даље, сви аксиоматски секвенти система $\mathcal{NK}$ су аксиоматски секвенти и теорије $\mathcal{T}$, и правила извођења система $\mathcal{NK}$ су правила извођења и теорије $\mathcal{T}$. Дакле, $\mathcal{D}$ јесте доказ секвента $\vdash F$ у теорији $\mathcal{T}$. Стога формула F јесте теорема теорије $\mathcal{T}$.

У одељку 2.2.4. аксиомама теорије група $\mathcal{G}$ додата је аксиома $(A_{\mathcal{G}}4)$ и добијена је теорија комутативних група $\mathcal{G}_k$. То је пример како се од једне теорије првог реда $\mathcal{T}_1$ у оквиру система $\mathcal{K}$, додајући њеном скупу аксиома неке нове аксиоме које чине скуп Γ, прави нова теорија, нека теорија $\mathcal{T}_2$. За те теорије $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$, на основу дефиниција појмова доказа и теореме, важи да је свака теорема теорије $\mathcal{T}_1$ теорема и теорије $\mathcal{T}_2$. Ако је формула A теорема теорије $\mathcal{T}_2$, тј. $\vdash_{\mathcal{T}_2} A$, онда у теорији $\mathcal{T}_1$ постоји доказ формуле A из скупа хипотеза Γ, тј. $\Gamma \vdash_{\mathcal{T}_1} A$.

Задатак 2 За сваку теорију првог реда $\mathcal{T}$ која је заснована на систему предикатске логике $\mathcal{K}$ важи: у теорији $\mathcal{T}$ за произвољан скуп формула Φ, неку реченицу B и произвољну формулу A важи:

ако је $\Phi \cup \{B\} \vdash_{\mathcal{T}} A$, онда је $\Phi \vdash_{\mathcal{T}} B \Rightarrow A$.

Ова особина се доказује на исти начин као ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИЈЕ у систему предикатске логике $\mathcal{K}$ (ТЕОРЕМА 2 из одељка 2.1.3).

Задатак 3 Показаћемо да за сваку теорију првог реда над неким језиком $\mathcal{J}$ важи: сваки скуп чији су елементи коначни низови симбола скупа $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_l$ (тј. алфабета предикатске логике) је пребројив. Како је сваки терм и свака формула предикатске логике у ствари један коначан низ симбола њеног алфабета, то ће значити да наведена особина важи за скуп свих терама, скуп свих формула, скуп свих реченица над неким језиком $\mathcal{J}$, тј. да су сви ти скупови пребројиви. Подсетимо се да за скуп X кажемо да је пребројив ако постоји једна бијекција из скупа природних бројева $\mathbf{N}$ у тај скуп X. Односно, како смо то сликовито представили, ако све елементе скупа X можемо поређати у један низ. Да бисмо показали да се елементи посматраног скупа, кога чине коначни низови симбола алфабета предикатске логике $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_l$, могу поређати у низ дефинишимо прво функцију g која ће сваком симболу тог алфабета доделити један природан број. Та функција g биће 1-1, тј. функцијом g различити симболи алфабета добиће различите природне бројеве. У овом задатку претпоставимо да база везника у логичком делу алфабета, делу $\mathcal{J}_l$, јесте скуп $\{\neg, \Rightarrow\}$ и да имамо само квантификатор $\forall$, а да квантификатор $\exists$ дефинишемо помоћу $\forall$ (као у одељку 1.2.2 после Задатка 5). Ево дефиниције функције g:

помоћни симболи: $g(() = 3$, $g()) = 5$, $g(,) = 7$;

логички везници: $g(\neg) = 9$, $g(\Rightarrow) = 11$;

квантификатор: $g(\forall) = 13$;

променљиве пребројивог скупа $\mathcal{V}$, означимо са $x_1, ..., x_i, ...$, па имамо $g(x_i) = 5 + 8i, \quad i \in \{1, 2, 3, ...\}$;

симболе индивидуалних константи пребројивог скупа $\mathcal{C}$, означимо са $c_1, ..., c_i, ...$, и онда је $g(c_i) = 7 + 8i, \quad i \in \{1, 2, 3, ...\}$;

операцијске симболе пребројивог скупа $\mathcal{O}$, означимо са $f_1^1, f_1^2, ..., f_1^j$, $..., f_2^1, f_2^2, ..., f_2^j, ..., f_i^1, f_i^2, ..., f_i^j, ...$, где горњи индекси говоре о дужини симбола, а доњи разликују различите симболе исте дужине, и онда је $g(f_i^j) = 9 + 8 \cdot (2^j \cdot 3^i), \quad j, i \in \{1, 2, 3, ...\}$;

релацијске символе пребројивог скупа $\mathcal{P}$, означимо са $\rho_1^1, \rho_1^2, ..., \rho_1^j$, $..., \rho_2^1, \rho_2^2, ..., \rho_2^j, ..., \rho_i^1, \rho_i^2, ..., \rho_i^j, ...$, где горњи индекси говоре о дужини символа, а доњи разликују различите символе исте дужине, и онда је $g(\rho_i^j) = 11 + 8 \cdot (2^j \cdot 3^i), \quad j, i \in \{1, 2, 3, ...\}$.

Дакле, функцијом g је сваки символ алфабета предикатске логике добио један природан број. Лако се проверава да су различитим симболима додељени различити бројеви. (Осим тога сви ти бројеви су непарни.) Остаје да било којем коначном низу симбола тог алфабета доделимо један природан број. Нека је $s_1, s_2, ..., s_m$, $m > 1$, један такав низ симбола, тада се њему додељује број $2^{g(s_1)} \cdot 3^{g(s_2)} \cdot ... \cdot p_m^{g(s_m)}$, где је $2, 3, ..., p_m$ низ узастопних простих бројева, тј. p_m је m-ти прост број. На овај начин, дефинисана је функција $\mathbf{g}$ којом сваки коначан низ симбола алфабета $\mathcal{J} \cup \mathcal{J}_l$ добија један природан број. Функција $\mathbf{g}$ јесте 1-1 функција, јер је g 1-1 функција и важи да се сваки природан број n може на јединствен начин представити као производ степена неких простих бројева (тј. за сваки природан број n, $n > 0$, постоје јединствени природни бројеви $j, k_1, ..., k_j$ већи од нуле, и јединствени, међусобно различити, прости бројеви $p_1, ..., p_j$, $p_1 < ... < p_j$, такви да је $n = p_1^{k_1} \cdot ... \cdot p_j^{k_j}$). Дакле функцијом $\mathbf{g}$ се различити елементи скупа, кога чине коначни низови симбола тог алфабета, сликају у различите природне бројеве. Стога елементе тог скупа можемо поређати у један низ овако: први члан тог низа биће онај елемент чија је слика функцијом $\mathbf{g}$ најмањи број; даље ређамо елементе тог скупа, тако да се сваки следећи члан функцијом $\mathbf{g}$ слика у већи природан број него онај пре њега, тј. ређамо елементе тог скупа тако, да бројеви који су слике тих бројева функцијом $\mathbf{g}$ чине растући низ природних бројева.

Задатак 4 Покажимо да за сваку теорију првог реда $\mathcal{T}$ важи:
(1) $\vdash_{\mathcal{T}} A$ и $\vdash_{\mathcal{T}} B$ акко $\vdash_{\mathcal{T}} A \wedge B$;
(2) ако је $\vdash_{\mathcal{T}} A$ или $\vdash_{\mathcal{T}} B$, онда је $\vdash_{\mathcal{T}} A \vee B$;
(3) ако је $\vdash_{\mathcal{T}} A$ и $\vdash_{\mathcal{T}} A \Rightarrow B$, онда је $\vdash_{\mathcal{T}} B$;
(4) ако је $\vdash_{\mathcal{T}} A \Leftrightarrow B$, онда важи: $\vdash_{\mathcal{T}} A$ акко $\vdash_{\mathcal{T}} B$;
(5) ако је $\vdash_{\mathcal{T}} A \Rightarrow B$ и $\vdash_{\mathcal{T}} B \Rightarrow C$, онда је $\vdash_{\mathcal{T}} A \Rightarrow C$;
(6) $\vdash_{\mathcal{T}} A$ акко $\vdash_{\mathcal{T}} \forall x A$;
(7) ако је $\forall x_1 ... \forall x_n A$ затворење A, онда је: $\vdash_{\mathcal{T}} A$ акко $\vdash_{\mathcal{T}} \forall x_1 ... \forall x_n A$.

Све ове особине лакше је доказати ако теорију $\mathcal{T}$ посматрамо у оквиру система $\mathcal{NK}$. Знамо да, по дефиницији, формула C јесте теорема теорије $\mathcal{T}$ акко у $\mathcal{T}$ постоји доказ секвента $\vdash C$.

(1) Ако у $\mathcal{T}$ постоји доказ $\mathcal{D}$ секвента $\vdash A \wedge B$, онда користећи $\mathcal{D}$, правимо: $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\vdash A \wedge B}}{\vdash A} \wedge E_1$ и $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\vdash A \wedge B}}{\vdash B} \wedge E_2$. С друге стране, имамо $\dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\vdash A} \quad \overset{\mathcal{D}_2}{\vdash B}}{\vdash A \wedge B} \wedge U$ ако у теорији $\mathcal{T}$ постоје докази $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ редом секвента $\vdash A$ и $\vdash B$.

(2) Ако у теорији $\mathcal{T}$ постоји доказ $\mathcal{D}$ секвента $\vdash A$, онда користећи тај доказ, правимо следећи доказ: $\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\vdash A}}{\vdash A \vee B}\vee E_1$. На потпуно исти начин из неког доказа $\mathcal{D}$ секвента $\vdash B$ добијамо доказ секвента $\vdash A \vee B$.

(3) Ако у теорији $\mathcal{T}$ постоје докази $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ редом секвента $\vdash A$ и $\vdash A \Rightarrow B$, онда користећи те доказе, правимо следећи доказ:

$$\dfrac{\overset{\mathcal{D}_2}{\vdash A \Rightarrow B} \quad \overset{\mathcal{D}_1}{\vdash A}}{\vdash B.}\Rightarrow E$$

(4) Како је $A \Leftrightarrow B$ у ствари $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, то $\vdash_{\mathcal{T}} A \Leftrightarrow B$ значи да у теорији $\mathcal{T}$ постоји доказ секвента $\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, неки доказ $\mathcal{D}$. Ако је $\vdash_{\mathcal{T}} A$, онда у теорији $\mathcal{T}$ постоји доказ секвента $\vdash A$, неки доказ $\mathcal{D}_1$. Користећи $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}_1$ правимо следећи доказ:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}}{\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}}{\vdash A \Rightarrow B}\wedge E_1 \qquad \overset{\mathcal{D}_1}{\vdash A}}{\vdash B.}\Rightarrow E$$

Ако имамо $\vdash_{\mathcal{T}} B$, онда на потпуно исти начин из доказа $\mathcal{D}$ и неког доказа секвента $\vdash B$ добијамо доказ секвента $\vdash A$.

(5) Ако у теорији $\mathcal{T}$ постоје докази $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ редом секвента $\vdash A \Rightarrow B$ и $\vdash B \Rightarrow C$, онда користећи те доказе, правимо следећи доказ:

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\mathcal{D}_2}{\vdash B \Rightarrow C} \qquad \dfrac{\overset{\mathcal{D}_1}{\vdash A \Rightarrow B} \quad A \vdash A}{A \vdash B}\Rightarrow E}{A \vdash C}\Rightarrow E}{\vdash A \Rightarrow C.}\Rightarrow U$$

Приметимо да ако је $\mathcal{T}$ заснована у оквиру система $\mathcal{K}$, онда ову особину можемо доказати као особину из Задатка 7 у одељку 2.1.3.

(6) Ова особина се доказује као ЛЕМА 1 из одељка 2.1.2.

(7) Ова особина се доказује као Задатак 6 (тј. ТЕОРЕМА 1) из одељка 2.1.2.

Подсетимо се важних својстава која могу имати формалне теорије, а тиме и теорије првог реда: одлучивост, непротивречност и потпуност. Ако постоји ефективан поступак (процедура) помоћу којег за сваку формулу теорије првог реда $\mathcal{T}$ можемо утврдити да ли је она теорема теорије $\mathcal{T}$ или није, онда за теорију првог реда $\mathcal{T}$ кажемо да је одлучива. Теорија првог реда $\mathcal{T}$ је непротивречна ако постоји бар једна формула те теорије која није теорема. У противном, теорија првог реда $\mathcal{T}$ је противречна. Теорија првог реда $\mathcal{T}$ је потпуна ако за сваку реченицу F те теорије важи: F је теорема или је $\neg F$ теорема те теорије, тј. важи $\vdash_{\mathcal{T}} F$ или $\vdash_{\mathcal{T}} \neg F$. Надаље ћемо често уместо теорија првог реда просто говорити, теорија.

Задатак 5 Покажимо да за сваку теорију $\mathcal{T}$ важи:
$\mathcal{T}$ је противречна акко је формула $A \land \neg A$ теорема те теорије $\mathcal{T}$, за неку формулу A теорије $\mathcal{T}$.

Нека је теорија $\mathcal{T}$ дата у оквиру система $\mathcal{NK}$. Ако је $\mathcal{T}$ противречна, онда је свака њена формула теорема, па и формула $A \land \neg A$ за неку формулу A. С друге стране, ако је, за неку формулу A, формула $A \land \neg A$ теорема теорије $\mathcal{T}$, онда у тој теорији постоји неки доказ $\mathcal{D}$ секвента $\vdash A\land\neg A$, тј. секвента $\vdash A\land(A \Rightarrow \bot)$. Користећи тај доказ, у тој теорији $\mathcal{T}$ правимо следећи доказ:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\land(A\Rightarrow\bot)\vdash A\land(A\Rightarrow\bot)}{A\land(A\Rightarrow\bot)\vdash A\Rightarrow\bot}\land E_2 \quad \dfrac{A\land(A\Rightarrow\bot)\vdash A\land(A\Rightarrow\bot)}{A\land(A\Rightarrow\bot)\vdash A}\land E_1}{A\land(A\Rightarrow\bot)\vdash\bot}\Rightarrow E}{\vdash(A\land(A\Rightarrow\bot))\Rightarrow\bot}\Rightarrow U \quad \overset{\mathcal{D}}{\vdash A\land(A\Rightarrow\bot)}}{\vdash\bot}\Rightarrow E}{\vdash F,}\bot E$$

доказ секвента $\vdash F$, где је F произвољна формула. Закључујемо дакле, да су све формуле теореме теорије $\mathcal{T}$, тј. да је $\mathcal{T}$ противречна.

ТЕОРЕМА 1
Ако реченица $\neg F$ није теорема непротивречне теорије $\mathcal{T}$ и теорија $\mathcal{T}'$ се добија из $\mathcal{T}$ додавањем нове аксиоме F, онда је и теорија $\mathcal{T}'$ непротивречна.
ДОКАЗ

Нека је теорија $\mathcal{T}$ у оквиру система $\mathcal{K}$. Претпоставимо супротно, да је теорија $\mathcal{T}'$ противречна. На основу дефиниције противречне теорије, имамо да је свака формула теорема те теорије. Дакле, и реченица $\neg F$ је теорема теорије $\mathcal{T}'$, тј. важи $\vdash_{\mathcal{T}'} \neg F$. Како смо теорију $\mathcal{T}'$ правили проширујући скуп аксиома теорије $\mathcal{T}$ реченицом F, добијамо да је у теорији $\mathcal{T}$ реченица $\neg F$ доказива из скупа хипотеза $\{F\}$, тј. $\{F\} \vdash_{\mathcal{T}} \neg F$. Одавде, на основу Задатка 2, важи $\vdash_{\mathcal{T}} F \Rightarrow \neg F$. У Задатку 5 из одељка 2.1.2 показали смо да је формула $(F \Rightarrow \neg F) \Rightarrow \neg F$ теорема система $\mathcal{NK}$, па је тиме, по Задатку 1, и теорема теорије $\mathcal{T}$. Дакле, имамо $\vdash_{\mathcal{T}} (F \Rightarrow \neg F) \Rightarrow \neg F$. Сада, у теорији $\mathcal{T}$, из $\vdash_{\mathcal{T}} F \Rightarrow \neg F$ и $\vdash_{\mathcal{T}} (F \Rightarrow \neg F) \Rightarrow \neg F$ на основу дела (3) Задатка 4, добијамо да је $\vdash_{\mathcal{T}} \neg F$, тј. да је $\neg F$ теорема теорије $\mathcal{T}$, што је супротно нашој полазној претпоставци да $\neg F$ није теорема теорије $\mathcal{T}$. Дакле, закључујемо да теорија $\mathcal{T}'$ не може бити противречна.

♢

Дефинишимо сада појам проширења неке формалне теорије првог реда: ако имамо две теорије првог реда над језиком $\mathcal{J}$, теорије $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$, и ако је свака теорема теорије $\mathcal{T}$ теорема и теорије $\mathcal{T}'$, онда кажемо да је теорија $\mathcal{T}'$ проширење теорије $\mathcal{T}$.

ТЕОРЕМА 2

Свака непротивречна теорија првог реда $\mathcal{T}$ има непротивречно и потпуно проширење.

ДОКАЗ

Посматрамо једну непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над неким језиком $\mathcal{J}$. На основу Задатка 3 имамо да је скуп свих реченица произвољне теорије, па и теорије $\mathcal{T}$, пребројив, тј. све њене реченице можемо поређати у низ. Нека је низ свих реченица теорије $\mathcal{T}$ низ F_1,...,F_n,... Користећи теорију $\mathcal{T}$ и њене реченице дефинишемо сада низ теорија $\mathcal{F}_0$,...,$\mathcal{F}_n$,... на следећи начин:

(1) $\mathcal{F}_0$ је теорија $\mathcal{T}$;

(2) ако имамо теорију $\mathcal{F}_n$, онда је $\mathcal{F}_{n+1}$ баш $\mathcal{F}_n$ ако важи $\vdash_{\mathcal{F}_n} \neg F_{n+1}$, иначе $\mathcal{F}_{n+1}$ се добија из $\mathcal{F}_n$ додавањем F_{n+1} као нове аксиоме.

Индукцијом по n покажимо да су све $\mathcal{F}_n$, $n \in \mathbf{N}$, непротивречне.

База индукције: теорија $\mathcal{F}_0$ је теорија $\mathcal{T}$ која је непротивречна.

Индукцијска претпоставка: теорија $\mathcal{F}_n$ је непротивречна.

Посматрајмо сада теорију $\mathcal{F}_{n+1}$. Ако важи $\vdash_{\mathcal{F}_n} \neg F_{n+1}$ онда је $\mathcal{F}_{n+1}$ теорија $\mathcal{F}_n$ и одмах имамо да је и $\mathcal{F}_{n+1}$ непротивречна. Ако не важи $\vdash_{\mathcal{F}_n} \neg F_{n+1}$, онда је $\mathcal{F}_{n+1}$ добијена од теорије $\mathcal{F}_n$ додавањем аксиоме F_{n+1}, па на основу ТЕОРЕМЕ 1, имамо да је $\mathcal{F}_{n+1}$ непротивречна. Дакле, све теорије $\mathcal{F}_0$,..., $\mathcal{F}_n$,... су непротивречне.

Сада посматрајмо теорију $\mathcal{T}^*$ над истим језиком $\mathcal{J}$ чије аксиоме су аксиоме свих теорија $\mathcal{F}_0$,..., $\mathcal{F}_n$,... Јасно је да $\mathcal{T}^*$ јесте једно проширење теорије $\mathcal{T}$ (као и теорија $\mathcal{F}_0$,..., $\mathcal{F}_n$,...). Покажимо да је $\mathcal{T}^*$ непротивречна и потпуна. Ако би теорија $\mathcal{T}^*$ била противречна, на основу Задатка 5, имали бисмо да у њој постоји доказ формуле $A \wedge \neg A$, за неку формулу A. Тада би постојала једна од теорија $\mathcal{F}_n$ ($n \in \mathbf{N}$), теорија $\mathcal{F}_{n_0}$, за неко n_0 из $\mathbf{N}$, таква да све аксиоме теорије $\mathcal{T}^*$ које се појављују у том доказу јесу аксиоме те теорије $\mathcal{F}_{n_0}$, тј. поменути доказ формуле $A \wedge \neg A$ био би доказ те формуле и у теорији $\mathcal{F}_{n_0}$. Имали бисмо дакле да је $A \wedge \neg A$ теорема теорије $\mathcal{F}_{n_0}$, тј. да је теорија $\mathcal{F}_{n_0}$ противречна, што је немогуће. Дакле, теорија $\mathcal{T}^*$ мора бити непротивречна. Остаје да покажемо да је теорија $\mathcal{T}^*$ потпуна. Нека је F произвољна реченица над језиком $\mathcal{J}$. Знамо да је свака реченица над језиком $\mathcal{J}$ у ствари једна реченица из низа свих реченица над $\mathcal{J}$, низа $F_1, ..., F_n, ...$ Стога постоји неки природан број l такав да је F баш реченица F_l из тог низа. На основу тога како смо правили теорије $\mathcal{T}^*, \mathcal{F}_0, ..., \mathcal{F}_n ...$, за реченицу F_l имамо да: или важи $\vdash_{\mathcal{F}_{l-1}} \neg F_l$, па како је теорија $\mathcal{T}^*$ проширење теорије $\mathcal{F}_{l-1}$, онда је $\neg F_l$ теорема и $\mathcal{T}^*$; или не важи $\vdash_{\mathcal{F}_{l-1}} \neg F_l$, те је F_l аксиома теорије $\mathcal{F}_l$, а тиме аксиома и теорије $\mathcal{T}^*$. Закључујемо да за сваку реченицу F важи или $\vdash_{\mathcal{T}^*} \neg F$ или $\vdash_{\mathcal{T}^*} F$, што значи да је теорија $\mathcal{T}^*$ потпуна. Дакле, теорија $\mathcal{T}^*$ је тражено потпуно и непротивречно проширење полазне теорије $\mathcal{T}$.

♢

Ако за језике $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ важи да су скуп $\mathcal{P}_{\mathcal{J}}$ релацијских симбола, скуп $\mathcal{O}_{\mathcal{J}}$ операцијских симбола и скуп $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$ индивидуалних константи језика $\mathcal{J}$ подскупови редом, скупа $\mathcal{P}_{\mathcal{J}'}$ релацијских симбола, скупа $\mathcal{O}_{\mathcal{J}'}$ операцијских симбола и скупа $\mathcal{C}_{\mathcal{J}'}$ индивидуалних константи, онда је језик $\mathcal{J}'$ једно проширење језика $\mathcal{J}$. Посебно поменимо да је језик $\mathcal{J}'$ проширење новим константама језика $\mathcal{J}$, ако је $\mathcal{J}'$ добијен само проширењем скупа индивидуалних константи језика $\mathcal{J}$, скупа $\mathcal{C}_{\mathcal{J}}$, додавањем константи $c_1, ..., c_n, ...$, тј. ако је $\mathcal{C}_{\mathcal{J}'} = \mathcal{C}_{\mathcal{J}} \cup \{c_1, ..., c_n, ...\}$, а скупови операцијских и скупови релацијских симбола језика $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}'$ су једнаки: $\mathcal{O}_{\mathcal{J}'} = \mathcal{O}_{\mathcal{J}}$ и $\mathcal{P}_{\mathcal{J}'} = \mathcal{P}_{\mathcal{J}}$. За неку теорију $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}$, свака теорија $\mathcal{T}'$ чији је језик $\mathcal{J}'$ проширење језика $\mathcal{J}$ новим константама, назива се допуна теорије $\mathcal{T}$. За сваку теорију првог реда $\mathcal{T}$ постоје њене, да кажемо, корисне допуне које ћемо представити у наредном примеру.

Пример 1 Посматрајмо једну теорију првог реда $\mathcal{T}$ над неким језиком $\mathcal{J}$ у оквиру система $\mathcal{K}$. Нека је $\mathcal{J}_0$ проширење новим константама $c_1, ..., c_n, ...$ језика $\mathcal{J}$. Елементе скупа промењљивих $\mathcal{V}$, који је пребројив скуп, означимо редом са $x_1, ..., x_n, ...$. Скуп свих формула са једном слободном промењљивом над језиком $\mathcal{J}_0$, дат је овако:

$$\begin{array}{cccccc}
{}^{*_1}F^1(x_1) & {}^{*_2}F^2(x_1) & {}^{*_4}F^3(x_1) & \ldots & F^i(x_1) & \ldots \\
{}^{*_3}F^1(x_2) & {}^{*_5}F^2(x_2) & F^3(x_2) & \ldots & F^i(x_2) & \ldots \\
{}^{*_6}F^1(x_3) & F^2(x_3) & F^3(x_3) & \ldots & F^i(x_3) & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
F^1(x_j) & F^2(x_j) & F^3(x_j) & \ldots & F^i(x_j) & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

где дакле, свака формула $F^i(x_j)$ $(i, j \in \{1, 2, ...\})$ има једну слободну промењљиву x_j, а $*_1, *_2, *_3$,... показујемо како ћемо да елементе ток скупа, који је према **Задатку 3** пребројив, поређамо у низ, те имамо $F^1(x_1)$, $F^2(x_1)$, $F^1(x_2)$, $F^3(x_1)$, $F^2(x_2)$, $F^1(x_3)$,..., $F^l(x_1)$, $F^{l-1}(x_2)$, $F^{l-2}(x_3)$,..., $F^3(x_{l-2})$, $F^2(x_{l-1})$, $F^1(x_l)$,...

за $l \in \{1, 2, , ...\}$ и n-ти члан тог низа ћемо означавати $F_n(x_{i_n})$. Сада, користећи тај низ формула, од нових константи c_i, $i \in \{1, 2, ...\}$, правимо низ c_{j_1},..., c_{j_n},..., на следећи начин:

(1) c_{j_1} је она константа c_i, $i \in \{1, 2, ...\}$, која се не јавља у формули $F_1(x_{i_1})$ и има најмањи индекс од свих таквих c_i;

(2) c_{j_2} је она константа c_i, $i \in \{1, 2, ...\}$, која се не јавља у формулама $F_1(x_{i_1})$, $F_2(x_{i_2})$, разликује се од c_{j_1} и има најмањи индекс од свих таквих c_i;

$\vdots$

(n) c_{j_n} је она константа c_i, $i \in \{1, 2, ...\}$, која се не јавља у формулама $F_1(x_{i_1})$,..., $F_n(x_{i_n})$, разликује се од свих c_{j_1},...,$c_{j_{n-1}}$ и има најмањи индекс од свих таквих c_i;

$\vdots$

Користећи све ово што смо направили, дефинишемо теорију $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ и теорије $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Теорија $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ је допуна теорије $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}_0$, која има следеће аксиоме:

$(AK_n) \quad \neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \Rightarrow \neg F_n(c_{j_n})$,

за $n \in \{1, 2, ...\}$, где, наравно, за свако то n формула $F_n(c_{j_n})$ јесте $F^{x_{i_n}}_{nc_{j_n}}$. Рецимо да ћемо и надаље, за формулу са једном слободном променљивом $F_n(x_{i_n})$, формуле које су од ње добијене заменом променљиве x_{i_n} термом t, формуле $F^{x_{i_n}}_{nt}$, записивати и $F_n(t)$. Теорија $\mathcal{T}_0$ је допуна теорија $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}_0$ без додатних нових аксиома. Дакле, $\mathcal{T}_0$ има аксиоме $(A1) - (A14)$ из одељка 2.1.3, где су A, B и C произвољне формуле над језиком $\mathcal{J}_0$.

Теорија $\mathcal{T}_n$, за свако n, $n \in \{1, 2, ...\}$, је допуна теорије $\mathcal{T}$ таква да су њене аксиоме (AK_1),...,(AK_n), али не и (AK_m), за све $m > n$.

А сада докажимо особине теорија направљених у Примеру 1. У наредним лемама посматраћемо теорије у оквиру система $\mathcal{K}$ предикатске логике.

ЛЕМА 1

За сваку непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}$, неки низ нових константи $c_1, ..., c_n, ...$ које не припадају $\mathcal{J}$ и за допуне теорије $\mathcal{T}$ над $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cup \{c_1, ..., c_n, ...\}$ направљене као у Примеру 1, теорије $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbf{N}$, и теорију $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$, важи:

(1) све теорије $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbf{N}$ су непротивречне;

(2) теорија $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ је непротивречна.

ДОКАЗ

(1) Индукцијом по n докажимо да су све $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbf{N}$ непротивречне. База индукције, $n{=}0$. Ако би $\mathcal{T}_0$ била противречна, онда би у њој, за неку формулу A, постојао доказ формуле $A \wedge \neg A$, неки доказ $B_1, ..., B_m$ $(m \geq 1)$, где је B_m формула $A \wedge \neg A$. На основу дефиниције доказа, за сваку формулу B_i $(1 \leq i \leq m)$ из доказа $B_1, ..., B_m$ имамо: или B_i је аксиома теорије $\mathcal{T}_0$; или B_i је закључак једног правила MP чије премисе су неке формуле B_j и B_l тог низа за $j, l{<}i$; или B_i је закључак једног правила Gen чија премиса је нека формула B_l тог низа за $l{<}i$. Нека је x променљива која се не јавља ни у једној формули тог доказа. Ако се у његовој формули B_i $(1 \leq i \leq m)$ све константе из низа $c_1, ..., c_n, ...$ које се у њој јављају замене променљивом x добија се формула $\overline{B}_i$, и још важи да је $\overline{B}_m$ формула $\overline{A \wedge \neg A}$ тј. $\overline{A} {\wedge} \neg \overline{A}$. Покажимо да је низ формула $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_m$ један доказ формуле $\overline{A} \wedge \neg \overline{A}$ у теорији $\mathcal{T}$. Прво, формуле $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_m$, настале описаном заменом, су формуле над језиком $\mathcal{J}$ теорије $\mathcal{T}$. Даље, за свако i, $1 \leq i \leq m$, ако је B_i аксиома теорије $\mathcal{T}_0$, онда је $\overline{B}_i$ аксиома теорије $\mathcal{T}$; ако је B_i закључак MP чије премисе су B_j и B_l, онда је $\overline{B}_i$ закључак MP чије премисе су $\overline{B}_j$ и $\overline{B}_l$; ако је B_i закључак Gen са премисом B_l, онда је $\overline{B}_i$ закључак Gen са премисом $\overline{B}_l$. Заиста, низ формула $\overline{B}_1, ..., \overline{B}_m$ јесте један доказ формуле $\overline{A} \wedge \neg \overline{A}$ у теорији $\mathcal{T}$.

Дакле, добили смо да је теорија $\mathcal{T}$ противречна, што је супротно нашој претпоставци. Стога закључујемо да теорија $\mathcal{T}_0$ мора бити непротивречна.

Индукцијска претпоставка. Теорија $\mathcal{T}_{n-1}$ је непротивречна.

Посматрајмо сада теорију $\mathcal{T}_n$ и покажимо да је и она непротивречна. Претпоставимо да је $\mathcal{T}_n$ противречна. То би значило да су све њене формуле теореме, па је теорема и формула $\neg A_n$, где је A_n аксиома: $\neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \Rightarrow \neg F_n(c_{j_n})$ тј. било би $\vdash_{\mathcal{T}_n} \neg A_n$. Теорију $\mathcal{T}_n$ смо направили од теорије $\mathcal{T}_{n-1}$ додајући јој нову аксиому A_n, зато бисмо из $\vdash_{\mathcal{T}_n} \neg A_n$ добили да важи: $\{A_n\} \vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \neg A_n$. Још, на основу Задатка 2, из $\{A_n\} \vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \neg A_n$ имамо:

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} A_n \Rightarrow \neg A_n \qquad (1^*)$$

На самом почетку одељка 2.1.1, показали смо да је $(A \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A$ теорема предикатске логике, па по Задатку 1, та формула је теорема и теорије $\mathcal{T}$, а онда и теорије $\mathcal{T}_{n-1}$. Зато ако је A формула A_n имамо:

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} (A_n \Rightarrow \neg A_n) \Rightarrow \neg A_n \qquad (2^*)$$

На основу дела (3) Задатка 4, из (1*) и (2*) добијамо $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \neg A_n$, тј.

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \neg(\neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \Rightarrow \neg F_n(c_{j_n})) \qquad (3^*)$$

У одељку 2.1.1 показали смо и да су и формуле $(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg A$ и $(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow B$ теореме предикатске логике, па тако (по Задатку 1) и теорије $\mathcal{T}$, тј. $\mathcal{T}_{n-1}$. Ако је у тим теоремама A формула $\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})$ и B формула $F_n(c_{j_n})$, онда имамо:

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} (\neg(\neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \Rightarrow \neg F_n(c_{j_n}))) \Rightarrow \neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \qquad \text{и}$$

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} (\neg(\neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \Rightarrow \neg F_n(c_{j_n}))) \Rightarrow F_n(c_{j_n}),$$

одакле користећи (3*), на основу (3) Задатка 4 (тј. применом правила MP) из ових теорема и теореме (3*) добијамо:

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \qquad (4^*)$$

$$\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} F_n(c_{j_n})$$

Сада ћемо, користећи $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} F_n(c_{j_n})$, показати да је $\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})$ теорема теорије $\mathcal{T}_{n-1}$, тј. да важи $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})$. Дакле, имамо $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} F_n(c_{j_n})$, па у теорији $\mathcal{T}_{n-1}$ постоји доказ формуле $F_n(c_{j_n})$, неки доказ $C_1, ..., C_m$, $m \geq 1$, где је C_m формула $F_n(c_{j_n})$. Нека је x_k промењљива која се не појављује у том доказу. Ако се константа c_{j_n} замени са x_k у свим формулама C_l, $1 \leq l \leq m$, онда добијамо нови низ формула који је у тој теорији доказ формуле $F_n(x_k)$, тј. имамо $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} F_n(x_k)$. Та теорема $F_n(x_k)$, на основу дела (6) Задатка 4 (тј. применом Gen) даје $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \forall x_k F_n(x_k)$. Имамо да је терм x_{i_n} слободан за промењљиву x_k у $F_n(x_k)$, па је формула $\forall x_k F_n(x_k) \Rightarrow F_n(x_{i_n})$ аксиома система $\mathcal{K}$ предикатске логике, па и теорије $\mathcal{T}_{n-1}$. Доказ теореме $\forall x_k F_n(x_k)$ у теорији $\mathcal{T}_{n-1}$ и аксиома $\forall x_k F_n(x_k) \Rightarrow F_n(x_{i_n})$ чине доказ формуле $F_n(x_{i_n})$ у тој теорији, тј. добијамо $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} F_n(x_{i_n})$. Коначно, из тог доказа, по делу (6) Задатка 4, добијамо $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})$. Како имамо и теорему (4*), то на основу дела (1) Задатка 4 добијамо $\vdash_{\mathcal{T}_{n-1}} \neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \wedge \forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})$. Закључујемо дакле, на основу Задатка 5, да је теорија $\mathcal{T}_{n-1}$ противречна, што је супротно индукцијској претпоставци. Зато, теорија $\mathcal{T}_n$ мора бити непротивречна. Тако смо добили да су све теорије $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbf{N}$, непротивречне.

(2) Ако претпоставимо да је теорија $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ противречна, онда (на исти начин како смо доказивали да је теорија $\mathcal{T}^*$ непротивречна у доказу ТЕОРЕМЕ 2) добили бисмо противречност неке од теорија $\mathcal{T}_n$, $n \in \mathbf{N}$, што је супротно са особином (1) да су све те теорије непротивречне. Стога закључујемо да је теорија $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ непротивречна.

◇

ЛЕМА 2

Ако је теорија $\mathcal{T}$ непротивречна, онда постоји њена допуна $\mathcal{T}'$, која је такође непротивречна и за коју важи: ако је $A(x)$ формула са само једном слободном променљивом, променљивом x, и ако је формула $\neg\forall x A(x)$ теорема теорије $\mathcal{T}'$, онда у тој теорији $\mathcal{T}'$ постоји терм t, такав да је формула $\neg A^x_t$ теорема те теорије.

ДОКАЗ

За посматрану непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}$ узмимо неки низ нових константи $c_1, ..., c_n, ...$ које не припадају $\mathcal{J}$ и направимо језик $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cup \{c_1, ..., c_n, ...\}$. Затим, на начин описан у Примеру 1 направимо теорију $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ над $\mathcal{J}_0$, која је допуна посматране теорије $\mathcal{T}$. На основу дела (2) ЛЕМЕ 1, имамо да је теорија $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ непротивречна. Покажимо да теорија $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ има тражену особину. Наиме, свака формула $A(x)$ која има само једну слободну променљиву, променљиву x, је једна од формула из нашег низа формула $F_n(x_{i_n})$, $n \in \{1, 2, ...\}$, направљеног у Примеру 1, тј. $A(x)$ је $F_l(x_{i_l})$ за неко l из $\{1, 2, ...\}$. Дакле, ако за теорију $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ имамо да је $\neg(\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l}))$ њена теорема, онда у $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ важи:

$\vdash_{\mathcal{T}_\mathbf{N}} \neg(\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l}))$ и

$\vdash_{\mathcal{T}_\mathbf{N}} \neg(\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l})) \Rightarrow \neg F_l(c_{j_l})$ као њена аксиома, аксиома (AK_l),

па из тих теорема, по делу (3) Задатка 4 (тј. применом правила MP), добијамо $\vdash_{\mathcal{T}_\mathbf{N}} \neg F_l(c_{j_l})$. Дакле, константа c_{j_l} је тражени терм t такав да је формула $\neg A^x_t$ теорема те теорије $\mathcal{T}_\mathbf{N}$.

◇

2.3.2 Модели теорија првог реда

У одељку 1.2.1 дефинисали смо појам модела за један скуп Γ предикатских формула над неким језиком $\mathcal{J}$. Сада ћемо тај појам користити да бисмо дефинисали модел за теорију првог реда. Наиме, свака теорија првог реда над неким језиком $\mathcal{J}$ одређена је својим аксиомама. Зато ће модел за теорију $\mathcal{T}$ бити она интерпретација $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ која је модел за скуп формула сачињен од аксиома те теорије $\mathcal{T}$. Дакле, модел за теорију $\mathcal{T}$ првог реда над неким језиком $\mathcal{J}$ је свака интерпретација $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ у којој су све аксиоме те теорије $\mathcal{T}$ истините. Модел $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath) = ((\mathrm{S}, I^{\mathcal{J}}), \imath)$ за теорију $\mathcal{T}$ првог реда је пребројив модел ако је носач модела језика $\mathcal{J}$, скуп S, пребројив.

У наредном примеру показаћемо како да за сваку непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}$ направимо један, да кажемо, посебан модел $\mathcal{I}_\mathcal{T} = (\mathrm{S}_\mathcal{T}, I_\mathcal{T})$ њеног језика $\mathcal{J}$. Модел $\mathcal{I}_\mathcal{T} = (\mathrm{S}_\mathcal{T}, I_\mathcal{T})$ је специфичан по томе што су елементи његовог носача, скупа $\mathrm{S}_\mathcal{T}$, затворени терми једне допуне дате теорије $\mathcal{T}$, теорије $\mathcal{T}_0$ направљене као у Примеру 1 из 2.3.1.

Пример 2 Посматрајмо произвољну непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над неким језиком $\mathcal{J}$. Прво дефинишимо једно проширење језика $\mathcal{J}$ новим индивидуалним константама $c_1, ..., c_n, ...$, језик $\mathcal{J}_0$. (Подсетимо се да то значи да језици $\mathcal{J}$ и $\mathcal{J}_0$ имају исте скупове релацијских и операцијских симбола.) Даље, нека су теорије $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ допуне теорије $\mathcal{T}$ направљене као у Примеру 1 из 2.3.1: $\mathcal{T}_0$ је теорија над језиком $\mathcal{J}_0$ чије аксиоме су аксиоме теорије $\mathcal{T}$; и $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ је теорија над језиком $\mathcal{J}_0$ која осим аксиома $\mathcal{T}$ има и ове аксиоме:

$$(AK_n) \qquad \neg(\forall x_{i_n} F_n(x_{i_n})) \Rightarrow \neg F_n(c_{j_n}), \qquad n \in \{1, 2, ...\}$$

где су, наравно, $F_n(x_{i_n})$ формуле из низа формула са једном слободном промењивом дефинисаног у Примеру 1 и индивидуалне константе c_{j_n}, $n \in \{1, 2, ...\}$ су изабране из скупа $\{c_1, ..., c_n, ...\}$ на начин описан у том примеру. На основу дела (2) ЛЕМЕ 1 из одељка 2.3.1, имамо да је теорија $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ непротивречна. Зато, на основу ТЕОРЕМЕ 2 из истог одељка, теорија $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ има потпуно непротивречно проширење, теорију $\mathcal{T}^*_\mathbf{N}$.

Користећи теорије $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_\mathbf{N}$ и $\mathcal{T}^*_\mathbf{N}$ направићемо модел $\mathcal{I}_\mathcal{T} = (\mathrm{S}_\mathcal{T}, I_\mathcal{T})$ језика $\mathcal{J}_0$ (а тиме и $\mathcal{J}$). Носач тог модела, скуп $\mathrm{S}_\mathcal{T}$, је скуп свих затворених терама теорије $\mathcal{T}_0$, тј. скуп свих терама теорије $\mathcal{T}_0$ који не садрже промењиве. Дакле, елементи носача нашег модела $\mathcal{I}_\mathcal{T}$ су све константе језика $\mathcal{J}_0$ и терми који се граде помоћу операцијских симбола језика $\mathcal{J}_0$ (тј. $\mathcal{J}$) и затворених терама теорије $\mathcal{T}_0$. Други део модела $\mathcal{I}_\mathcal{T}$, функција $I_\mathcal{T}$, слика константе, операцијске и релацијске симболе језика $\mathcal{J}_0$ у неке, редом, елементе скупа $\mathrm{S}_\mathcal{T}$, операције и релације над елементима тог скупа. Та функција $I_\mathcal{T}$ дефинише се на следећи начин:

(1) за сваку индивидуалну константу c језика $\mathcal{J}_0$ елемент $I_\mathcal{T}(c)$ је терм c из скупа $\mathrm{S}_\mathcal{T}$, тј. баш та иста константа c;

(2) за сваки операцијски симбол f језика $\mathcal{J}_0$ дужине n, $I_{\mathcal{T}}(f)$ је операција f_I, $f_I : \mathrm{S}^n_{\mathcal{T}} \to \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, која је дефинисана овако: за сваки елемент $(t_1, ..., t_n)$ скупа $\mathrm{S}^n_{\mathcal{T}}$

$$f_I(t_1, ..., t_n) =_{def} f(t_1, ..., t_n),$$

тј. за произвољне елементе $t_1, ..., t_n$ носача $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ (подсетимо се да су то затворени терми теорије $\mathcal{T}_0$) резултат операције $f_I(t_1, ..., t_n)$ је елемент $f(t_1, ..., t_n)$ из $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, који је у ствари затворни терм теорије $\mathcal{T}_0$ направљен од баш тог операцијског симбола f из језика $\mathcal{J}_0$ и тих затворених терама $t_1, ..., t_n$;

(3) за сваки релацијски симбол ρ језика $\mathcal{J}_0$ дужине m, $I_{\mathcal{T}}(\rho)$ је релација ρ_I дужине m на скупу $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, $\rho_I \subseteq \mathrm{S}^m_{\mathcal{T}}$, дефинисана овако: за сваки елемент $(t_1, ..., t_m)$ скупа $\mathrm{S}^m_{\mathcal{T}}$

$$\rho_I(t_1, ..., t_m) = 1 \quad \text{акко по деф.} \quad \vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \rho(t_1, ..., t_m).$$

На овај начин смо, користећи дату непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над језиком $\mathcal{J}$ и неке нове индивидуалне константе $c_1, ..., c_n, ...$, дефинисали један модел језика $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cup \{c_1, ..., c_n, ...\}$ (а тиме и језика $\mathcal{J}$), модел $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = (\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}})$.

Истакнимо да се користећи било коју непротивречну теорију $\mathcal{T}$ над неким језиком $\mathcal{J}$, може направити модел тог језика $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = (\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}})$ из Примера 2. У наредној теореми, ТЕОРЕМИ 3, показаћемо да за произвољну непротивречну теорију $\mathcal{T}$ важи: свака интерпретација са моделом $\mathcal{I}_{\mathcal{T}} = (\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}})$, тј. свака интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath)$, је модел теорије $\mathcal{T}$, и то њен пребројив модел. Пре тога покажимо неке особине једне непротивречне теорије $\mathcal{T}$ и интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath)$.

Задатак 6 Нека је $\mathcal{T}$ произвољна непротивречна теорија над неким језиком $\mathcal{J}$. Језик $\mathcal{J}_0$ је $\mathcal{J} \cup \{c_1, ..., c_n, ...\}$, где су $c_1, ..., c_n, ...$ нове индивидуалне константе које не припадају $\mathcal{J}$. Теорије $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ су теорије над језиком $\mathcal{J}_0$ направљене за теорију $\mathcal{T}$ као у Примеру 1. Теорија $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ је потпуно непротивречно проширење теорије $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$, које постоји на основу ТЕОРЕМЕ 2 из 2.3.1. Посматрамо произвољну интерпретацију $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath) = ((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath)$, где је $(\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}})$ модел језика $\mathcal{J}_0$ направљен, користећи теорију $\mathcal{T}$, као у Примеру 2. Покажимо да за произвољну реченицу $\forall x A$ теорије $\mathcal{T}_0$ важи:

(1) $I_{\mathcal{T}\imath}(\forall x A) = 1$ акко за све $t \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ важи $I_{\mathcal{T}\imath}(A^x_t) = 1$;

(2) $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall x A$ акко за све $t \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ важи $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A^x_t$.

(1) Ако је формула A реченица, онда очигледно важи ова особина. Погледајмо зато случај када формула A није реченица. Тада, како је $\forall x A$ реченица, формула A има само једну слободну променљиву. Значи, формула A је једна од формула са једном слободном променљивом из низа који је направљен као у Примеру 1 из одељка 2.3.1, формула $F_l(x_{i_l})$, за неко l из $\{1, 2, ...\}$ тј. $\forall x A$ је формула $\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l})$. На основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији имамо:

$I_{\mathcal{T}\imath}(\forall xA) = 1$ акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, $\jmath \simeq_x \imath$ важи $I_{\mathcal{T}\jmath}(A) = 1$.
То значи да за било коју п-интерпретацију $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$, тј. за било коју вредност $\jmath(x)$ из носача $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ имамо $I_{\mathcal{T}\jmath}(A) = 1$. У моделу $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}$ носач $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ је скуп затворених терама на језику $\mathcal{J}_0$, па је $\jmath(x)$ увек неки затворени терм на језику $\mathcal{J}_0$, тј. за све $\jmath \simeq_x \imath$ важи: $I_{\mathcal{T}\jmath}(A) = I_{\mathcal{T}\imath}(A^x_{\jmath(x)})$.
Дакле,
$I_{\mathcal{T}\imath}(\forall xA) = 1$ акко за све $\jmath : \mathcal{V} \to \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, $\jmath \simeq_x \imath$ важи $I_{\mathcal{T}\imath}(A^x_{\jmath(x)}) = 1$,
а како п-интерпретацијама $\jmath$, $\jmath \simeq_x \imath$, вредност $\jmath(x)$ може бити било који елемент из $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, то имамо:
$I_{\mathcal{T}\imath}(\forall xA) = 1$ акко за све $t \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ важи $I_{\mathcal{T}\imath}(A^x_t) = 1$.

(2) Ако је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$, онда се показује, као у доказу ЛЕМЕ 1 из 2.1.2, да за све терме слободне за x у формули A, па тиме и за све терме t из скупа $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, важи: $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A^x_t$. Покажимо још да ако за све $t \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$ јесте $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A^x_t$, онда мора да је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$. Имамо два случаја. Ако је формула A реченица, онда је A^x_t просто формула A и јасно је да важи $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$. Погледајмо сада случај када формула A није реченица. Тада, као и у делу (1) формула A је формула $F_l(x_{i_l})$, за неко l из $\{1, 2, ...\}$, тј. реченица $\forall xA$ је реченица $\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l})$. Претпоставимо да није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$, тј. није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall x_{i_l} F_l(x_{i_l})$. Тада, пошто је теорија $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ потпуна, важи $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg(\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l}))$. Још имамо да је $\neg(\forall x_{i_l} F_l(x_{i_l})) \Rightarrow \neg F_l(c_{j_l})$ аксиома теорије $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$, па зато по делу (3) Задатка 4 из 2.3.1 добијамо $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg F_l(c_{j_l})$. А како је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ непротивречна, то онда није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} F_l(c_{j_l})$, тј. није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A^x_{c_{j_l}}$. Али то је супротно полазној претпоставци јер је константа c_{j_l}, као један затворени терм на језику $\mathcal{J}_0$, елемент скупа $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$. Дакле, мора бити $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$.

ТЕОРЕМА 3

Свака непротивречна теорија првог реда $\mathcal{T}$ има пребројив модел.

ДОКАЗ

Посматрајмо произвољну непротивречну теорију првог реда $\mathcal{T}$ над датим језиком $\mathcal{J}$. Правимо једно проширење језика $\mathcal{J}$, језик $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J} \cup \{c_1, ..., c_n, ...\}$, где су $c_1, ..., c_n, ...$ нове индивидуалне константе, које не припадају $\mathcal{J}$. Посматрамо произвољну интерпретацију $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath) = ((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath)$, где је $(\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}})$ модел језика $\mathcal{J}_0$ направљен, користећи теорију $\mathcal{T}$ и одговарајуће теорије $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ и $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$, као у Примеру 2.

Показаћемо да је интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath) = ((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath)$ један модел за теорију $\mathcal{T}$. У ствари, то ћемо добити као последицу следећег својства: за сваку реченицу F теорије $\mathcal{T}_0$ важи
интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за F акко је F теорема теорије $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ (*)
тј. $((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath) \models F$ акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} F$.

Ево како уз помоћ својства (*) добијамо да је $I_{\mathcal{T}\imath}$ модел за теорију $\mathcal{T}$, тј. да је свака аксиома теорије $\mathcal{T}$ истинита у $I_{\mathcal{T}\imath}$.

За сваку аксиому A теорије $\mathcal{T}$ важи да је она теорема те теорије, а тако и теорема теорије $\mathcal{T}_0$ (као једне допуне $\mathcal{T}$). Онда је, на основу дела (7) Задатка 4 из 2.3.1, и затворење те аксиоме A теорема теорије $\mathcal{T}_0$. Како је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ проширење теорије $\mathcal{T}_{\mathbf{N}}$ (а тиме и $\mathcal{T}_0$) имамо да је затворење аксиоме A теорема и теорије $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$. Сада користимо својство (*), које нам даје да је затворење аксиоме A истинито у интерпретацији $I_{\mathcal{T}\imath}$. На крају, на основу Задатка 1 из 1.2.2, добијамо да је онда и аксиома A истинита у интерпретацији $I_{\mathcal{T}\imath}$. Значи, $I_{\mathcal{T}\imath} = ((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath)$ јесте модел за нашу теорију $\mathcal{T}$. И још, како је скуп $\mathrm{S}_{\mathcal{T}}$, као један скуп терама, пребројив (на основу Задатка 3 из 2.3.1), то је $I_{\mathcal{T}\imath} = ((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath)$ један пребројив модел за теорију $\mathcal{T}$.

Остаје нам још да докажемо наведено својство (*). Доказ ће бити индукцијом по сложености реченице F, односно по броју n, који је збир броја логичких везника и броја квантификатора у реченици F.

База индукције, $n = 0$. Реченица F нема логичких везника нити квантификатора. Формула F не може бити $\bot$, па је F нека елементарна формула $\rho(t_1, ..., t_m)$, за неки релацијски симбол ρ дужине m и неке терме без промењљивих $t_1, ..., t_m$. На основу дефиниције интерпретације $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath)$ имамо:

$$I_{\mathcal{T}\imath}(F) = I_{\mathcal{T}\imath}(\rho(t_1, ..., t_m)) = \rho_I(t_1, ..., t_m) = 1 \text{ акко } \vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \rho(t_1, ..., t_m),$$

тј. интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за F акко је F теорема теорије $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$.

Индукцијска претпоставка: особина (*) важи за сваку реченицу F која има мање од n логичких везника и квантификатора.

Доказ да (*) важи за реченицу F са n везника и квантификатора.

Посматрајмо реченицу F која има n логичких везника и квантификатора. Реченица F може имати један од следећих облика:

$$A \wedge B, \qquad A \vee B, \qquad A \Rightarrow B, \qquad \forall x A \qquad \text{или} \qquad \exists x A.$$

Приметимо да ако F има један од прва три облика, онда су и формуле A и B реченице; а ако је облика $\forall x A$ или $\exists x A$, онда формула A има највише једну слободну промењљиву, промењљиву x. Но без обзира који од пет наведених облика има формула F њене потформуле A и B имају бар један везник или квантификатор мање од F, па ако су реченице, за њих важи индукцијска претпоставка:

интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за A акко је A теорема теорије $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$
и интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за B акко је B теорема теорије $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $A \wedge B$.

Имамо следеће:

интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за $A \wedge B$
акко $I_{\mathcal{T}\imath}(A \wedge B) = 1$
акко $min(I_{\mathcal{T}\imath}(A), I_{\mathcal{T}\imath}(B)) = 1$, деф. вр. форм. у инт.
акко $I_{\mathcal{T}\imath}(A) = 1$ и $I_{\mathcal{T}\imath}(B) = 1$

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за A и $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за B

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A$ и $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} B$, индук. прет.

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \wedge B$, део (1) Задатка 4 из 2.3.1.

Дакле, интерпретација $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за $A \wedge B$ акко је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \wedge B$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $A \vee B$.

Имамо следеће:

интерпретација $I_{\mathcal{T}_\imath}$ није модел за $A \vee B$

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}(A \vee B) = 0$

акко $max(I_{\mathcal{T}_\imath}(A), I_{\mathcal{T}_\imath}(B)) = 0$, деф. вр. форм. у инт.

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}(A) = 0$ и $I_{\mathcal{T}_\imath}(B) = 0$

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}$ није модел за A и $I_{\mathcal{T}_\imath}$ није модел за B

акко није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A$ и није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} B$, индук. прет.

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg A$ и $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg B$, јер је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ потпуна

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg A \wedge \neg B$, део (1) Задатка 4 из 2.3.1

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg(A \vee B)$, део (4) Задатка 4 из 2.3.1

јер је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} (\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow (\neg(A \vee B))$

акко није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \vee B$, јер је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ непротивречна.

Дакле, интерпретација $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за $A \vee B$ акко је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \vee B$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $A \Rightarrow B$.

Имамо следеће:

интерпретација $I_{\mathcal{T}_\imath}$ није модел за $A \Rightarrow B$

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}(A \Rightarrow B) = 0$

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}(A) = 1$ и $I_{\mathcal{T}_\imath}(B) = 0$, деф. вр. форм. у инт.

акко $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за A и $I_{\mathcal{T}_\imath}$ није модел за B

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A$ и није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} B$, индук. прет.

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A$ и $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg B$, јер је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ потпуна

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \wedge \neg B$, део (1) Задатка 4 из 2.3.1

акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg(A \Rightarrow B)$, део (4) Задатка 4 из 2.3.1

јер је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$

акко није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \Rightarrow B$, јер је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ непротивречна.

Дакле, интерпретација $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за $A \Rightarrow B$ акко је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A \Rightarrow B$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\forall x A$.

Имамо следеће:

интерпретација $I_{\mathcal{T}_\imath}$ је модел за $\forall x A$

акко $I_{\mathcal{T}\imath}(\forall xA) = 1$
акко за сваки терм $t \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$: $I_{\mathcal{T}\imath}(A^x_t) = 1$, део (1) Задатка 6
акко за сваки терм $t \in \mathrm{S}_{\mathcal{T}}$: $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} A^x_t$, инд. прет. за речен. A^x_t
акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$, део (2) Задатка 6.
Дакле, интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за $\forall xA$ акко је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall xA$.

◁ Претпоставимо да је формула F облика $\exists xA$.

Прво приметимо да за формуле $\exists xA$ и $\neg\forall x\neg A$
на основу Задатка 5 из 1.2.2 важи:

$\exists xA \equiv \neg\forall x\neg A$, тј. $I_{\mathcal{T}\imath}(\exists xA) = 1$ акко $I_{\mathcal{T}\imath}(\neg\forall x\neg A) = 1$ (о1)

а на основу Примера 6 из 2.1.1, и Задатака 1 и дела (4) Задатака 4 из 2.3.1 важи:

$\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \exists xA \Leftrightarrow \neg\forall x\neg A$, тј. $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \exists xA$ акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg\forall x\neg A$ (о2).

Зато имамо:

интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ није модел за $\exists xA$
акко $I_{\mathcal{T}\imath}(\exists xA) = 0$
акко $I_{\mathcal{T}\imath}(\neg\forall x\neg A) = 0$, (о1)
акко $I_{\mathcal{T}\imath}(\forall x\neg A) = 1$, деф. вр. форм. у инт.
акко $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \forall x\neg A$, по случ.: F је облика $\forall xA$
акко није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \neg\forall x\neg A$, јер је $\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}$ непротивречна
акко није $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \exists xA$, (о2).
Дакле, интерпретација $I_{\mathcal{T}\imath}$ је модел за $\exists xA$ акко је $\vdash_{\mathcal{T}^*_{\mathbf{N}}} \exists xA$.

◇

2.3.3 Још неке особине теорија првог реда

ТЕОРЕМА 4
Теорија првог реда је непротивречна ако и само ако та теорија има модел.
ДОКАЗ

Посматрајмо неку теорију $\mathcal{T}$ у оквиру система $\mathcal{K}$ предикатске логике. Ако је теорија $\mathcal{T}$ непротивречна, онда, на основу ТЕОРЕМЕ 3 из одељка 2.3.2, та теорија има модел, модел $I_{\mathcal{T}\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{T}}, \imath) = ((\mathrm{S}_{\mathcal{T}}, I_{\mathcal{T}}), \imath)$. Претпоставимо сада да теорија $\mathcal{T}$ има један модел, неку интерпретацију $I_\imath = (\mathcal{I}, \imath)$. У тој интерпретацији $I_\imath$ све аксиоме теорије $\mathcal{T}$ су истините, па за неку њену аксиому A имамо $I_\imath(A){=}1$. Ако би теорија $\mathcal{T}$ била противречна, онда би произвољна формула, на пример негација аксиоме A, формула $\neg A$, била теорема те теорије. То би значило да постоји доказ формуле $\neg A$ у теорији $\mathcal{T}$ у чијем корену је формула $\neg A$. Формуле на листовима тог доказа су аксиоме, које су истините у интерпретацији $I_\imath$. Све остале његове формуле добијене су почев од тих аксиома, као закључци правила извођења MP или Gen, те су истините у $I_\imath$, јер та правила чувају истинитост (на основу ТЕОРЕМЕ 2 (ТЕОРЕМЕ MP) и ТЕОРЕМЕ 3 (ТЕОРЕМЕ Gen) из 1.2.2). Дакле, тада би важило и $I_\imath(\neg A)=1$. Значи, важило би $I_\imath(A)=1$ и $I_\imath(\neg A)=1$, што је, на основу дефиниције вредности формуле у интерпретацији, немогуће. Зато теорија $\mathcal{T}$ мора бити непротивречна.

♢

ТЕОРЕМА 5

Ако теорија првог реда $\mathcal{T}$ има модел, онда теорија $\mathcal{T}$ има и пребројив модел.

ДОКАЗ

Ако теорија $\mathcal{T}$ има модел, онда је, на основу ТЕОРЕМЕ 4, та теорија $\mathcal{T}$ непротивречна. Дакле, на основу ТЕОРЕМЕ 3 из одељка 2.3.2, теорија $\mathcal{T}$, као једна непротивречна теорија, има пребројив модел.

♢

2.4 Потпуност и друге особине предикатске логике

2.4.1 Потпуност предикатске логике

Сетимо се да за најважније формуле семантике исказне логике, таутологије, и за теореме те логике, важи:

исказна формула F је теорема исказне логике акко је F таутологија.

У семантици предикатске логике главну улогу имају ваљане формуле, па се намеће питање да ли за ваљане формуле и теореме предикатске логике важи иста веза? Одговор је: ДА. У овом одељку ћемо то показати, тј. показаћемо: формула F је теорема предикатске логике ако и само ако је F ваљана формула односно, за сваку формулу F предикатске логике важи:

$$\vdash F \text{ ако и само ако } \models F.$$

Као и у исказној логици, особину:

$$\text{ако је } \vdash F, \quad \text{онда је } \models F$$

тј. ако је формула F теорема предикатске логике, онда је F и ваљана формула, називамо ваљаност, а особина

$$\text{ако је } \models F, \quad \text{онда је } \vdash F$$

тј. ако је формула F ваљана формула, онда је F и теорема предикатске логике, је потпуност, тј. потпуност у ужем смислу.

Доказ особине ваљаности за предикатску логику је аналоган доказу те особине за исказну логику (видети ТЕОРЕМУ 5 из одељка 3.2.5 у [3]).

ТЕОРЕМА 1 (ВАЉАНОСТ)
Ако је формула F теорема предикатске логике, онда је F и ваљана формула.
ДОКАЗ

У овом доказу предикатску логику ћемо представити системом $\mathcal{K}$.

(1) Прво је потребно показати да су све аксиоме система $\mathcal{K}$, аксиоме $(A1) - (A14)$, ваљане формуле. Искористићемо Задатак 3 из одељка 2.2.3 у [3] у коме је за десет исказних формула показано да су таутологије. Наиме, свака од аксиома $(A1) - (A10)$ система $\mathcal{K}$ добија се од једне од тих формула на начин описан у нашем одељку 1.2.2, тј. заменом исказних слова те формуле неким предикатским формулама. Како су те исказне формуле таутологије, то на основу ТЕОРЕМЕ 1 из одељка 1.2.2 добијамо да су аксиоме $(A1) - (A10))$ система $\mathcal{K}$ ваљане формуле. Даље, у одељку 1.2.2, Задатку 6 и деловима (3) и (2) Задатка 9, показали смо да су и аксиоме $(A11) - (A14)$ ваљане формуле. Дакле, све аксиоме система $\mathcal{K}$ су ваљане формуле.

(2) У одељку 1.2.2 доказали смо ТЕОРЕМУ 2 (ТЕОРЕМУ MP), која нам показује да правило MP чува својство ваљаности, тј. да важи: ако су A и $A \Rightarrow B$ ваљане формуле, онда је и B ваљана формула; и ТЕОРЕМУ 3 (ТЕОРЕМУ Gen), које нам показује да правило Gen чува својство ваљаности, тј. да важи: ако је A ваљана формула, онда је и $\forall x A$ ваљана формула.

Из ових резултата следи особина ваљаности. Наиме, ако је формула F теорема предикатске логике, тј. система $\mathcal{K}$, онда у том систему постоји доказ у облику дрвета на чијим листовима су аксиоме система $\mathcal{K}$, а у свим осталим чворовима су закључци или MP или Gen. Из (1) имамо да су на свим листовима тог дрвета ваљане формуле, а из (2) да су и у свим осталим чворовима ваљане формуле. Дакле, у свим чворовима доказа формуле F су ваљане формуле, па и формула у његовом корену, формула F. Закључујемо да свака теорема предикатске логике мора бити ваљана формула, тј. да важи:

$$\text{ако је} \quad \vdash F, \quad \text{онда је} \quad \models F.$$

◊

Остаје још да докажемо да важи особина потпуности. Приметимо да је довољно ту особину доказати за реченице јер смо у Задатку 1 из 1.2.2 и Задатку 6 из 2.1.2 показали редом да за предикатске формуле важе следеће особине:

(1) формула F је ваљана акко је њено затворење ваљана формула;
(2) формула F је теорема акко је њено затворење теорема.

ТЕОРЕМА 2 (ПОТПУНОСТ)
Ако је формула F ваљана, онда је формула F и теорема предикатске логике.
ДОКАЗ

У доказу особине потпуности предикатску логику ћемо представити системом $\mathcal{K}$. На основу наведених особина (1) и (2) можемо да посматрамо ваљану формулу F која је реченица. Потребно је доказати да је реченица F теорема предикатске логике. Претпоставимо

> супротно, да реченица F није теорема система $\mathcal{K}$. Тада, ако додамо формулу $\neg F$ аксиомама система $\mathcal{K}$, добијамо теорију $\mathcal{K}'$ која је, на основу ТЕОРЕМЕ 1 из одељка 2.3.1, непротивречна. Дакле, теорија $\mathcal{K}'$, на основу ТЕОРЕМЕ 3 из одељка 2.3.2, има модел, неку интерпретацију $I_{\mathcal{K}'\imath} = (\mathcal{I}_{\mathcal{K}'}, \imath) = ((\mathrm{S}_{\mathcal{K}'}, I_{\mathcal{K}'}), \imath)$. Како је $\neg F$ аксиома теорије $\mathcal{K}'$ она је истинита у тој интерпретацији $I_{\mathcal{K}'\imath}$, а с друге стране и реченица F, као ваљана формула, је истинита у тој интерпретацији. Значи, добили смо да су и $\neg F$ и F истините у интерпретацији $I_{\mathcal{K}'\imath}$, што је, по дефиницији вредности формуле у интерпретацији, немогуће. Зато закључујемо, реченица F мора бити теорема система $\mathcal{K}$.

♢

2.4.2 Непротивречност предикатске логике

Исказна логика је непротивречна. Особина да је свака теорема исказне логике и таутологија користи се у доказу непротивречности исказне логике (видети ТЕОРЕМУ 15 из одељка 3.2.6 у [3]).

И предикатска логика је непротивречна, а у доказивању тог својства кључна је особина да је свака теорема ваљана формула. Еквивалентност система $\mathcal{NK}$ и $\mathcal{K}$ предикатске логике нам омогућава да особину непротивречности покажемо само за један од њих, на пример систем $\mathcal{K}$.

ТЕОРЕМА 3
Систем предикатске логике $\mathcal{K}$ су непротивречан.
ДОКАЗ

> Ако би систем $\mathcal{K}$ био противречан, онда би произвољна формула F и њена негација, формула $\neg F$, биле теореме тог система, а тиме, на основу ТЕОРЕМЕ 1, и ваљане формуле, што је, по дефиницији вредности формуле у интерпретацији, немогуће. Закључујемо да је систем $\mathcal{K}$ непротивречан.

♢

Исказна логика има још једну важну особину, она је одлучива (видети ТЕОРЕМУ 14 из одељка 3.2.6 у [3]). Наиме, потпуност исказне логике и постојање ефективних поступака одређивања да ли је нека формула таутологија (на пример, метода чишћења (видети одељак 2.2.3 у [3])) дају ефективан поступак којим за сваку исказну формулу можемо да утврдимо да ли је теорема или није. У предикатској логици пак, не постоји ефективни поступак за одређивање да ли је нека предикатска формула ваљана формула. Овде само рецимо, без доказа тог својства, да предикатска логика није одлучива.

Литература

[1] Баркер, С. *Филозофија математике*, Нолит, Београд, 1973.

[2] Божић, М., Вујић, С. *Математичка логика са елементима опште логике*, Научна књига, Београд, 1980.

[3] Борисављевић, М. *Увод у логику, први део*, Саобраћајни факултет Универзитета у Београду, Београд, 2009.

[4] Вујошевић, С. *Математичка логика*, ЦИД, Подгорица, 1996.

[5] Ковијанић-Вукићевић, Ж., Вујошевић, С. *Увод у логику*, Универзитет Црне Горе, Подгорица, 2009.
http://elibrary.matf.bg.ac.rs/Uvod Logiku.pdf

[6] Gentzen, G. Untersuchungen über das logische Schließen. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210, 405-431 (English translation in *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, Szabo, M.E. (ed.), North-Holland, 1969)

[7] Дошен, К. *Logic*, у: The Language of Science, Polimetrica, Monza.
(http://www.mi.sanu.ac.rs/ kosta/Logic.pdf)

[8] Дошен, К. *Основна логика*
http://www.mi.sanu.ac.rs/ kosta/Osnovna logika.pdf

[9] Zach, R. *Completeness before Post: Bernays, Hilbert, and the development of propositional logic*, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 5, no. 3, (1999), pp. 331-366.

[10] Икодиновић, Н. *Увод у математичку логику*
http://www.matf.bg.ac.rs/p/files/43-Logika.pdf

[11] Јаничић, П. *Математичка логика у рачунарству*, Математички факултет у Београду (Skripta Internacional), Београд, 2004.
http://poincare.matf.bg.ac.rs/ janicic//books/mlr.pdf.

[12] Крон, А. *Логика*, Универзитет у Београду (Завод за графичку технику Технолошко-металуршког факултета), Београд, 1998.

[13] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand Reinho Co., 1964.

[14] Мијајловић, Ж., Марковић, З. и Дошен, К. *Хилбертови проблеми и логика*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1986.

[15] Петровић, З., Мијајловић, Ж. *Математика логика - елементи теорије скупова*, Завод за удбенике, Београд, 2012.

[16] Prawitz, D. *Natural Deduction*, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1965.

[17] Прешић, С. *Елементи математичке логике*, Научна књига, Београд, 1980.

[18] Прешић, С. и М. *Увод у математичку логику*, Математички институт, Београд, 1979.

[19] Frege, G. *The Foundations of Arithmetic*, translated by Austin, J. L., Harper and Brothers, New York 1953.

[20] Chiswell, I. and Hodges, W. *Mathematical Logic*, Oxford University Press, 2007.