Математички факултет
Универзитет у Београду

Аксиома избора – за и против

Мастер рад

ментор:
др Предраг Тановић,
ванредни професор

студент:
Милена Кликовац
1032/2016

Београд,
2018.

Садржај

1 Увод

Аксиому избора увео је Цермело[1] на самом почетку XX века у теорију скупова коју је изградио са Френкелом[2] (такозвана Цермело-Френкелова (ZF) теорија скупова). Простим речима, ова аксиома каже да, какву год фамилију (непразних) скупова имали, из сваког скупа те фамилије можемо изабрати по један елемент. На први поглед, овакав исказ делује прилично наивно. Управо због тога он се поткрадао неким математичарима скоро све до краја XIX века; они су олако и без размишљања претпостављали да је он тачан и уз помоћ њега добијали врло захвалне и корисне резултате. Тек када се открила тежина и значај ,,алата“ који је по среди, а имајући у виду шта он математици доноси, наметнула се потреба да се он експлицитно издвоји и нагласи, те да се математичари запитају да ли је заиста тривијално претпоставити овакву тврдњу. У неким случајевима, тј. за неке фамилије скупова, тврдити овако нешто потпуно је оправдано. Пре него што дамо неколико примера, прецизније ћемо описати шта значи *изабрати* елемент из неког скупа. То ће нам омогућити увођење тзв. *функције избора*.

Дефиниција 1 *Нека је X било која непразна фамилија непразних скупова.* ***Функција избора*** *за фамилију X јесте свака функција $f : X \to \bigcup X$ таква да за свако $x \in X$ важи*

$$f(x) \in x.$$

Наведимо сада примере које смо најавили.

Пример 1 *Нека је X фамилија чији су сви елементи синглтони, тј. скупови облика $\{a\}$. Тада је за фамилију X функција избора јединствено одређена и очигледна.*

Пример 2 *Нека је X фамилија неких скупова облика $\{a, b\}$, где су $a, b \in \mathbb{R}$. Тада је, на пример, функција*

$$f(\{a, b\}) = \min(a, b)$$

функција избора за фамилију X.

Пример 3 *Показаћемо да свака коначна непразна фамилија непразних скупова има функцију избора. Доказ ћемо извести математичком индукцијом по броју елемената те фамилије. Најпре, нека је X једночлана фамилија, тј. $X = \{Y\}$ за неко $Y \neq \varnothing$. Тада је $\bigcup X = Y$, па је свака функција $f : X \to Y$ функција избора за фамилију X. Заиста, за свако $x \in X$ важи $f(x) \in x$, јер $x \in X \iff x = Y$. Претпоставимо сада да за све n-точлане фамилије непразних скупова постоји функција избора, где је n неки природан број већи од 1. Нека је X фамилија од $(n + 1)$ непразних скупова, $X = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+1}\}$. Тада X можемо записати у облику $X = Z \cup \{Y_{n+1}\}$, где је $Z = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\}$. Јасно је да је $Z \cap \{Y_{n+1}\} = \varnothing$, јер, у супротном, фамилија X не би била n-точлана. Како је $|Z| = n$, то постоји функција избора за фамилију Z. Означимо је са g. Тада $g : Z \to \bigcup Z$, а $\bigcup Z = Y_1 \cup \ldots \cup Y_n$. Такође, $g(Y_1) \in Y_1, \ldots, g(Y_n) \in Y_n$. Како је $Y_{n+1} \neq \varnothing$, изаберимо произвољан елемент $y \in Y_{n+1}$. Дефинишимо функцију $f : X \to \bigcup X$ са*

$$\begin{cases} f(Y) = g(Y) \quad \text{за} \quad Y \in Z, \\ f(Y_{n+1}) = y. \end{cases}$$

Функција f је добро дефинисана, јер је $Z \cap \{Y_{n+1}\} = \varnothing$. Очигледно је да је f функција избора за фамилију X.

[1]Ernst Zermelo (1871–1953), немачки математичар.

[2]Adolf Abraham Halevi Fraenkel (1891–1965), немачки математичар.

Пример 4 *Нека је* $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})\backslash\{\varnothing\}$ *скуп свих непразних подскупова скупа природних бројева. Тада, како је скуп* $\mathbb{N}$ *добро уређен*[3]*, постоји природна функција избора* f *дата са*

$$f(S) = \min(S)$$

за свако $S \subseteq \mathbb{N}, S \neq \varnothing$.

Видимо, дакле, да се за неке фамилије скупова лако може наћи функција избора – практично се сама намеће. Међутим, постоје случајеви где постојање функције избора уопште није очигледно. Штавише, на пример, нико до сада није успео да ефективно нађе функцију избора за фамилију $\mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash\{\varnothing\}$ свих непразних подскупова скупа $\mathbb{R}$, а постоје и врло убедљиви аргументи да се таква функција ни не може наћи.

Формално, аксиома избора гласи овако:

Аксиома избора. *За сваку непразну фамилију непразних скупова постоји функција избора.*

Цермело је 1904. године начинио врло значајан корак уводећи овај исказ као посебну аксиому ZF теорије, а тек 1963. године Коен[4] је показао да је ова аксиома независна од остатка ZF теорије.

Аксиома избора је умногоме обогатила разне математичке дисциплине и заслужна је за математику какву данас познајемо и изучавамо. Неке од њених доприноса приказаћемо у овом раду. Међутим, аксиома избора има и неке неповољне особине; пре свега, она представља принцип конструисања скупова који није *ефективан* – она гарантује да неки скуп (тачније, функција избора) постоји, али не описујући га као *колекцију неких објеката који имају одређено својство.* Осим тога, аксиома избора, иако звучала интуитивно врло прихватљиво, испоставило се да доводи до неких резултата који су све само не интуитивни (њих ћемо у овом раду такође приказати). Управо због оваквих особина аксиома избора је изазвала највеће дискусије, расправе и неслагања међу математичарима још од петог Еуклидовог постулата.

[3]За појам *доброг уређења* видети одељак 3.

[4]Paul Joseph Cohen (1934–2007), амерички математичар и добитник Филдсове медаље.

2 Различите формулације аксиоме избора

Начин на који смо формулисали аксиому избора у претходном поглављу само је један од могућих и, рекло би се, најједноставнији. На овом месту приказаћемо и неке друге начине за њено формулисање и доказаћемо да су све те формулације међусобно еквивалентне.

Пре тога, наведимо дефиниције неких појмова које ћемо овде користити.

Дефиниција 2 *Нека је A скуп и $S \subseteq \mathcal{P}(A)$. Кажемо да је S* ***партиција*** *на A ако задовољава следеће услове:*

1. $\varnothing \notin S$,
2. *Ако $x, y \in S$ и $x \neq y$, онда $x \cap y = \varnothing$,*
3. $\bigcup S = A$.

Дефиниција 3 *Нека је E релација еквиваленције на скупу A. Скуп $T \subseteq A$ зовемо* ***трансверзала*** *еквиваленције E ако је за свако $a \in A$ скуп $[a]_E \cap T$ једночлан (где је $[a]_E$ E-класа елемента a).*

Дефиниција 4 *Нека је I неки индексни скуп и X било која функција чији је домен скуп I. Нека је X_i ознака за $X(i)$, за свако $i \in I$. Скуп*

$$\langle X_i \,|\, i \in I \rangle = (X_i)_{i \in I}$$

зовемо ***индексирана фамилија скупова****.*

Наредном теоремом уводимо и остале формулације аксиоме избора.

Теорема 1 *Следећа тврђења су еквивалентна:*

(1) (Аксиома избора) За сваку непразну фамилију непразних скупова постоји функција избора.

(2) Свака партиција има трансверзалу.

(3) Ако је $\langle X_i \,|\, i \in I \rangle$ индексирана фамилија непразних скупова, онда постоји функција $f : I \to \bigcup X[I]$ таква да $f(i) \in X_i$ за свако $i \in I$.

Доказ.
(1) $\Rightarrow$ (2):

Нека је S произвољна партиција. Како важи аксиома избора, постоји функција избора за S; означимо је са f. Тада је управо $\mathrm{ran}(f)$ трансверзала за S.
(2) $\Rightarrow$ (3):

Нека је $\langle X_i \,|\, i \in I \rangle$ индексирана фамилија непразних скупова. Нека је $C_i = \{i\} \times X_i$, за свако $i \in I$. Јасно је да је $C_i \neq \varnothing$ за свако i. Такође, ако је $i \neq j$, онда је очигледно $C_i \cap C_j = \varnothing$. Закључујемо да је скуп $S = \{C_i \,|\, i \in I\}$ једна партиција. Како претпостављамо (2), то S има трансверзалу. Нека је f трансверзала за S. Тада је f скуп уређених парова, и за свако $i \in I$ постоји јединствено x тако да $(i, x) \in f \cap C_i$. Међутим, то управо значи да је f функција на I и $f(i) \in X_i$ за свако $i \in I$.
(3) $\Rightarrow$ (1):

Нека је S произвољна непразна фамилија непразних скупова. За сваки скуп $C \in S$ дефинишимо $X_C = C$. На тај начин формирали смо индексирану фамилију непразних скупова $\langle X_C \,|\, C \in S \rangle$. Због претпоставке (3) постоји функција f таква да $f(C) \in X_C$ за свако $C \in S$, тј. за свако $C \in S$ важи $f(C) \in C$. Дакле, f је функција избора за фамилију S. ■

Приметимо да услов (3) из претходне теореме заправо значи да је директан производ[5] произвољно много непразних скупова непразан скуп.

[5]Видети одељак 8.

3 Цорнова лема

У многим доказима у којима се претпоставља аксиома избора, уместо саме ове аксиоме користи се неки од њених еквивалената. Њих има више, а у овом одељку ће бити приказан онај најзначајнији, који ће се често примењивати у даљим доказима.

Реч је о леми која је добила име по математичару Максу Цорну[6], познатој као Цорнова лема, премда се често може наћи и под називом Куратовски-Цорнова лема, јер први који ју је, 1922. године, доказао (наравно, уз претпоставку аксиоме избора) био је пољски математичар и логичар Куратовски[7], док је Цорн ово тврђење поново открио и применио 1935. године.

Пре него што формулишемо Цорнову лему, осврнимо се на неке појмове које ћемо користити.

Дефиниција 5 *Нека је S произвољан скуп парцијално уређен релацијом поретка $\preccurlyeq$.*

- *Кажемо да је скуп $L \subseteq S$ један* ***ланац*** *у S ако је L потпуно уређен релацијом поретка $\preccurlyeq$, тј. ако за свака два елемента $a, b \in L$ важи или $a \preccurlyeq b$ или $b \preccurlyeq a$.*
- ***Горње ограничење (мајоранта)*** *неког скупа $A \subseteq S$ јесте било који елемент $a \in S$ такав да је за свако $x \in A$ испуњено $x \preccurlyeq a$.*
- *Нека је $B \subseteq S$. Кажемо да је елемент $b \in B$* ***највећи елемент*** *скупа B у односу на $\preccurlyeq$ ($\preccurlyeq$-најмањи елемент скупа B) ако за свако $x \in B$ важи $x \preccurlyeq b$.*
- *Нека је $B \subseteq S$. Кажемо да је елемент $b \in B$* ***максималан елемент*** *скупа B ако је $b \preccurlyeq x$ ($b \in B$) могуће само за $x = b$.*

Формулишимо сада Цорнову лему.

Лема 1 *Ако сваки ланац у парцијално уређеном скупу има горње ограничење, онда тај скуп има максималан елемент.*

Као што је речено, Цорнова лема је еквивалентна аксиоми избора. У наставку ћемо то и доказати.

Пре свега, увешћемо један нови „алат" који ћемо у једном смеру доказа користити.

Најпре, за неки скуп A кажемо да је **добро уређен** релацијом $\preccurlyeq$ ако сваки непразан подскуп од A има најмањи елемент у односу на $\preccurlyeq$. Тада кажемо и да је $(A, \preccurlyeq)$ **добро уређење**.

Дефиниција 6 *Нека је скуп S парцијално уређен са $\preccurlyeq$. За ланац L скупа S кажемо да је* ***добар*** *ако је L добро уређен са $\preccurlyeq$.*

Нека је L ланац у S и $a \in L$. Скуп $L[a]$ дефинисан са

$$L[a] = \{x \in L \mid x \prec a\}$$

зовемо ***почетни комад од L одређен елементом*** *a.*

Ознаком $\mathcal{L}_S$ обележаваћемо скуп свих ланаца у S.

Нека је $f : \mathcal{L}_S \to S$ нека функција. Кажемо да је ланац L ***добар у односу на*** *f ако важе следећи услови:*

- *L је добар ланац,*

[6] Max August Zorn (1906–1993), амерички математичар немачког порекла.

[7] Kazimierz Kuratowski (1896–1980).

- *за свако $a \in L$ важи $f(L[a]) = a$.*

Сада ћемо видети неке особине појмова које смо увели.

Лема 2 *Нека је $(S, \preccurlyeq)$ уређење, A, B ланци у S и $f : \mathcal{L}_S \to S$. Ако су ланци A и B добри у односу на f и $A \neq B$, онда важи тачно један од следећа два исказа:*

(1) Постоји $a \in A$ тако да је $B = A[a]$.

(2) Постоји $b \in B$ тако да је $A = B[b]$.

Доказ. Претпоставимо да важи и (1) и (2). Тада је

$$B = A[a] \subsetneq A = B[b] \subsetneq B,$$

јер ако би било $A[a] = A$, онда би било $A = B$, што по претпоставци не важи. Добили смо $B \subsetneq B$, што је немогуће. Дакле, важи тачно једно од (1) и (2).

Како је $A \neq B$, претпоставимо, на пример, да је $A \backslash B \neq \varnothing$ (случај $B \backslash A \neq \varnothing$ ради се аналогно). $A \backslash B$ је прави подскуп од A, па, како је ланац A добар, то $A \backslash B$ има најмањи елемент. Означимо га са a. Циљ нам је да докажемо да је $B = A[a]$.

Нека је $x \in A[a]$. То значи да $x \in A$ и $x \prec a$. Желимо да докажемо да $x \in B$. Претпоставимо да $x \notin B$. Тада $x \in A \backslash B$ и $x \prec a$. Међутим, то је немогуће, јер a је најмањи у $A \backslash B$. Закључујемо да мора бити $x \in B$, чиме смо доказали да је $A[a] \subseteq B$.

Претпоставимо, супротно ономе што желимо да докажемо, да је $A[a] \subsetneq B$. Тада је $B \backslash A[a]$ непразан подскуп од B, па, како је B добар, $B \backslash A[a]$ има најмањи елемент b.

Приметимо да је $B[b] \subseteq A[a]$. Заиста, нека је $x \in B[b]$. Тада $x \in B$ и $x \prec b$. Одатле следи да $x \in A[a]$, јер у супротном би важило $x \in B \backslash A[a]$ и $x \prec b$, што се коси са чињеницом да је b најмањи у $B \backslash A[a]$. Ако би било $B[b] = A[a]$, онда, како је f функција, важило би $f(B[b]) = f(A[a])$, па, како су ови ланци добри у односу на f (јер су A и B добри у односу на f), следи $b = a$. Међутим, ово не важи, јер $a \in A \backslash B$, док $b \in B$. Дакле, $B[b] \subsetneq A[a]$.

$A[a] \backslash B[b]$ је непразан подскуп од $A[a]$ (а самим тим и од A), па, како је A добар, то скуп $A[a] \backslash B[b]$ има најмањи елемент. Означимо га са c. Како $c \in A[a]$ и $A[a] \subseteq B$, то $c \in B$.

Нека је $x \in A[c]$. Тада $x \in A$ и $x \prec c$. $c \in A[a]$, па $c \prec a$. Сада, из транзитивности релације $\prec$ следи $x \prec a$, па како $x \in A$, то $x \in A[a]$. Добили смо $x \in A[a]$ и $x \prec c$. Како је c најмањи у $A[a] \backslash B[b]$, то $x \in B[b]$. Доказали смо $A[c] \subseteq B[b]$.

Из $c \in B$ и $c \notin B[b]$ следи да $c \not\prec b$, па, како је B ланац, мора бити $b \preccurlyeq c$.

Сада ћемо доказати да важи и $B[b] \subseteq A[c]$. Нека је $x \in B[b]$. Тада $x \in B$ и $x \prec b$, па, како је $b \preccurlyeq c$, због транзитивности важи $x \prec c$. Затим, из $x \in B[b]$ и $B[b] \subseteq A[a]$ следи $x \in A[a]$, па $x \in A$. Добили смо $x \prec c$ и $x \in A$, одакле следи $x \in A[c]$.

Из претходног следи $A[c] = B[b]$. Одатле је $f(A[c]) = f(B[b])$, тј. $c = b$. Онда, како $c \in A[a]$, то $b \in A[a]$, што је у контрадикцији са чињеницом да $b \in B \backslash A[a]$. Закључујемо да није $A[a] \subsetneq B$, па, због $A[a] \subseteq B$, мора бити $A[a] = B$. ■

Лема 3 *Нека је $(S, \preccurlyeq)$ уређење и $f : \mathcal{L}_S \to S$. Ако је ланац A скупа S добар у односу на f и $a \in A$, онда за свако $x \prec a$ важи тачно једно од следећа два исказа:*

- *$x \in A$,*

- *x не припада ниједном ланцу који је добар у односу на f.*

Доказ. Нека је $a \in A$ и $x \prec a$. Претпоставимо да $x \notin A$, али да $x \in B$, где је B неки ланац у S који је добар у односу на f, а различит од A. Тада $x \in B \backslash A$, па је $B \backslash A \neq \varnothing$. Из леме 2 следи да тада постоји $b \in B$ тако да је $A = B[b]$. Онда, како $a \in A$, то $a \in B[b]$, па $a \in B$ и $a \prec b$. Из $x \prec a$ и $a \prec b$ следи $x \prec b$, па, како $x \in B$, то $x \in B[b]$, тј. $x \in A$. Контрадикција. ■

Лема 4 *Нека је $(S, \preccurlyeq)$ уређење и $f : \mathcal{L}_S \to S$. Нека је $\mathcal{D}$ скуп свих ланаца у S који су добри у односу на f. Тада је $\bigcup \mathcal{D}$ ланац добар у односу на f.*

Доказ. Најпре треба да докажемо да је $\bigcup \mathcal{D}$ ланац. Нека су $x, y \in \bigcup \mathcal{D}$. То значи да постоје $A, B \in \mathcal{D}$ тако да $x \in A$, $y \in B$. Ако је $A = B$, онда $x, y \in A$, па, како је A ланац, то важи $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$. Претпоставимо да $A \neq B$, и нека је, на пример, $A \backslash B \neq \varnothing$ (аналогно за случај $B \backslash A \neq \varnothing$). Ланци A и B су добри у односу на f, па из леме 2 следи да постоји $a \in A$ тако да је $B = A[a]$. Имамо $x \in A$ и $y \in A[a] \subseteq A$, па $x, y \in A$, па важи $x \preccurlyeq y$ или $y \preccurlyeq x$. Дакле, $\bigcup \mathcal{D}$ јесте ланац.

Треба још да докажемо да је ланац $\bigcup \mathcal{D}$ добар у односу на f. Ради једноставнијег записа уведимо ознаку $D = \bigcup \mathcal{D}$, и докажимо најпре да је D добар ланац.

Нека је $X \subseteq D$ непразан подскуп од D. Треба да докажемо да X има најмањи елемент. Изаберимо $a \in X$ произвољно. Ако је a баш најмањи елемент од X, онда је готово. Претпоставимо да a није најмањи у X. Тада постоји $x \in X$ тако да је $x \prec a$. Из $x \in X \subseteq D$ и $x \prec a$ следи $x \in D[a]$. Имамо $x \in X$ и $x \in D[a]$, одакле закључујемо да је скуп $D[a] \cap X$ непразан.

Из $a \in D = \bigcup \mathcal{D}$ следи да $a \in A$ за неко $A \in \mathcal{D}$. Доказаћемо да је $A[a] = D[a]$.

Ако $x \in A[a]$, онда $x \in A$ и $x \prec a$, па, због $A \subseteq D$ (што следи из $A \in \mathcal{D}$), имамо $x \in D$ и $x \prec a$, што значи да $x \in D[a]$.

Да бисмо доказали и обрнуту инклузију, претпоставимо да $x \in D[a]$. Тада $x \in D = \bigcup \mathcal{D}$ и $x \prec a$. То значи да је $x \prec a$ и x припада неком елементу скупа $\mathcal{D}$, тј. неком ланцу који је добар у односу на f. Како $a \in A$, то према леми 3 следи да $x \in A$. Из $x \prec a$ и $x \in A$ следи да $x \in A[a]$.

Доказали смо да је $A[a] = D[a]$. Одатле следи $A[a] \cap X = D[a] \cap X$, па из $D[a] \cap X \neq \varnothing$ следи $A[a] \cap X \neq \varnothing$. Дакле, $A[a] \cap X$ је непразан подскуп од $A[a]$, па, како је A добар ланац, то $A[a] \cap X$ има најмањи елемент. Међутим, X мора имати најмањи елемент баш у $A[a]$, јер за све $x \in X \cap A[a]^C$ важи $x \succcurlyeq a \in X$, па такво x свакако не може бити најмањи у X. Дакле, овај најмањи елемент скупа $A[a] \cap X$ управо је најмањи елемент скупа X.

Нека је $a \in D$ произвољан елемент. Тада $a \in A$ за неко $A \in \mathcal{D}$. На исти начин као у претходном делу закључујемо да је $A[a] = D[a]$, па, како је f функција, $f(A[a]) = f(D[a])$, а како је A добар у односу на f, то је $f(A[a]) = a$. Добили смо $a = f(D[a])$, одакле следи да је D добар у односу на f. ■

Приметимо да нам претходна лема гарантује постојање највећег (у смислу инклузије) ланца који је добар у односу на f: то је $\bigcup \mathcal{D}$, јер сваки ланац који је добар у односу на f припада $\mathcal{D}$, па је садржан у $\bigcup \mathcal{D}$.

Докажимо сада да уз претпоставку аксиоме избора важи Цорнова лема.

Претпоставимо, супротно тврђењу, да је $(S, \preccurlyeq)$ парцијално уређење у коме сваки ланац има горње ограничење, али S нема максималан елемент.

Нека је L произвољан ланац у S и нека је l' његово горње ограничење. Дакле, за свако $x \in L$ важи $x \preccurlyeq l'$. Елемент l' није максималан у S, па постоји $l \in S$ тако да је $l' \prec l$. Следи да за свако $x \in L$ важи $x \prec l$. Дакле, l је строго горње ограничење за L. Овиме смо доказали да сваки ланац у S има строго горње ограничење.

Нека је L произвољан ланац у S, и нека је $U_L = \{l \in S \mid l$ је строго горње ограничење за $L\}$. Из претходног следи $U_L \neq \varnothing$. Посматрајмо фамилију

$$\mathcal{F} = \{U_L \mid L \in \mathcal{L}_S\}.$$

$\mathcal{F}$ је непразна фамилија непразних скупова, па за њу постоји функција избора. Нека је то f. Тада $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ и за свако $U_L \in \mathcal{F}$ важи $f(U_L) \in U_L$. Дефинишимо функцију $g : \mathcal{L}_S \to \bigcup \mathcal{F}$ са

$$g(L) = f(U_L).$$

Ова функција је добро дефинисана, јер ако је $L_1 = L_2$, онда је очигледно $U_{L_1} = U_{L_2}$, па је $f(U_{L_1}) = f(U_{L_2})$ (јер је f функција), тј. $g(L_1) = g(L_2)$.

Важи да $g(L) \in U_L$, па је $g(L)$ строго горње ограничење за L.

Нека је D највећи ланац који је добар у односу на функцију g, и нека је $g(D) = d$. Тада је d строго горње ограничење за D, тј. за свако $x \in D$ важи $x \prec d$, па $d \notin D$ (јер би у супротном важило $d \prec d$). Нека је $D' = D \cup \{d\}$. Јасно је да је D' добар ланац. Нека је $a \in D'$ произвољан елемент. Ако је $a \in D$, онда је $D'[a] = \{x \in D' \mid x \prec a\} = \{x \in D \mid x \prec a\} = D[a]$, па је $g(D'[a]) = g(D[a]) = a$ (јер је D добар у односу на g). Ако је, пак, $a = d$, онда је $D'[a] = D'[d] = \{x \in D' \mid x \prec d\} = D$, па је $g(D'[a]) = g(D) = d = a$. Дакле, D' је добар у односу на g. Међутим, $D' \supsetneq D$, а D је највећи добар у односу на g. Контрадикција.

Да бисмо доказали и други смер еквиваленције, тј. да Цорнова лема повлачи аксиому избора, потребан нам је појам *компатибилне фамилије функција* и чињеница да је унија компатибилне фамилије функција такође функција.

Дефиниција 7 *Кажемо да су функције f и g* ***компатибилне*** *ако за свако $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ важи*

$$f(x) = g(x).$$

Лема 5 *Функције f и g су компатибилне ако и само ако је $f \cup g$ функција.*

Доказ.
$\Longrightarrow$:

Претпоставимо да су функције f и g компатибилне. Треба да докажемо да је $f \cup g$ функција. Нека су $(x, y_1), (x, y_2) \in f \cup g$. Тада долазе у обзир следећи случајеви:

1) $(x, y_1), (x, y_2) \in f$. Тада, пошто је f функција, мора бити $y_1 = y_2$.

2) $(x, y_1), (x, y_2) \in g$. Тада, пошто је g функција, мора бити $y_1 = y_2$.

3) $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in g$. Из $(x, y_1) \in f$ следи $x \in \mathrm{dom}(f)$ и $y_1 = f(x)$. Слично, из $(x, y_2) \in g$ следи $x \in \mathrm{dom}(g)$ и $y_2 = g(x)$. Тада $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, па, како су f и g компатибилне, имамо
$$y_1 = f(x) = g(x) = y_2.$$

4) $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in f$. Овај случај је аналоган случају 3).

$\Longleftarrow$:

Нека је $f \cup g$ функција и нека је $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$. Треба да докажемо да је $f(x) = g(x)$.

Из $x \in \mathrm{dom}(f)$ следи да постоји y_1 тако да $(x, y_1) \in f$. Слично, из $x \in \mathrm{dom}(g)$ следи да постоји y_2 тако да $(x, y_2) \in g$. Тада $(x, y_1), (x, y_2) \in f \cup g$, па, како је $f \cup g$ функција, то је $y_1 = y_2$, одакле следи $f(x) = g(x)$. Како је x бирано произвољно из $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, следи да су f и g компатибилне функције. ■

Дефиниција 8 *Нека је $\mathcal{F}$ скуп функција. Кажемо да је $\mathcal{F}$* ***компатибилна фамилија функција*** *ако су сваке две функције у $\mathcal{F}$ компатибилне.*

Теорема 2 *Нека је $\mathcal{F}$ компатибилна фамилија функција. Тада је $\bigcup \mathcal{F}$ функција и важи*

$$\operatorname{dom}\Big(\bigcup \mathcal{F}\Big) = \bigcup\{\operatorname{dom}(f) \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Доказ. Докажимо, најпре, да је $\bigcup \mathcal{F}$ функција. Изаберимо произвољне елементе $(x, y_1), (x, y_2) \in \bigcup \mathcal{F}$. Тада постоје функције f и g из $\mathcal{F}$ такве да $(x, y_1) \in f, (x, y_2) \in g$. Самим тим, $(x, y_1), (x, y_2) \in f \cup g$. Како је $\mathcal{F}$ компатибилна фамилија функција, то су функције f и g компатибилне, па је, према леми 2, $f \cup g$ функција. Зато мора да важи $y_1 = y_2$, што доказује да је $\bigcup \mathcal{F}$ функција.

Други део теореме доказаћемо низом следећих еквивалентних чињеница.

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{dom}\Big(\bigcup \mathcal{F}\Big) &\iff (x, y) \in \bigcup \mathcal{F} \textit{ za neko } y \\
&\iff (x, y) \in f \textit{ za neko } f \in \mathcal{F} \\
&\iff x \in \operatorname{dom}(f) \textit{ za neko } f \in \mathcal{F} \\
&\iff x \in \bigcup\{\operatorname{dom}(f) \mid f \in \mathcal{F}\} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Сада можемо доказати и други смер поменуте еквиваленције.

Претпоставимо да важи Цорнова лема. Нека је S произвољна непразна фамилија непразних скупова, и нека је $\mathcal{F}$ фамилија свих функција f таквих да је $\operatorname{dom}(f) \subseteq S$ и за свако $X \in \operatorname{dom}(f)$ важи $f(X) \in X$. Скуп $\mathcal{F}$ је уређен релацијом инклузије $\subseteq$. Нека је $\mathcal{F}_0$ произвољан ланац у $\mathcal{F}$, и нека је $f_0 = \bigcup \mathcal{F}_0$. Приметимо да је $\mathcal{F}_0$ компатибилна фамилија функција – то следи из чињенице да за сваке две функције $f, g \in \mathcal{F}_0$ важи или $f \subseteq g$ или $g \subseteq f$. Према теореми 2, f_0 је функција и $\operatorname{dom}(f_0) = \bigcup\{\operatorname{dom}(f) \mid f \in \mathcal{F}_0\}$. Следи да је $\operatorname{dom}(f_0) \subseteq S$. Такође, ако је $X \in \operatorname{dom}(f_0)$ произвољан елемент, онда постоји $f \in \mathcal{F}_0$ тако да $X \in \operatorname{dom}(f)$, па је $f_0(X) = f(X) \in X$. Закључујемо да $f_0 \in \mathcal{F}$. Такође, f_0 је горње ограничење за $\mathcal{F}_0$ у $\mathcal{F}$, јер $f_0 = \bigcup \mathcal{F}_0$, па за свако $f \in \mathcal{F}_0$ важи $f \subseteq f_0$. Овиме смо доказали да сваки ланац у $\mathcal{F}$ има горње ограничење. Према Цорновој леми, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ има максималан елемент f'. Доказ је завршен уколико покажемо да је $\operatorname{dom}(f') = S$.

Претпоставимо да то не важи, тј. да је $\operatorname{dom}(f') \subsetneq S$. Изаберимо неко $X \in S \backslash \operatorname{dom}(f')$ и нека је $x \in X$ произвољан елемент. Тада функција $f'' = f' \cup \{(X, x)\}$ припада фамилији $\mathcal{F}$, што је немогуће, јер $f'' \supsetneq f'$, а f' је максималан елемент фамилије $\mathcal{F}$. Закључујемо да мора бити $\operatorname{dom}(f') = S$. Онда за свако $X \in S$ важи $f'(X) \in X$, одакле закључујемо да је f' функција избора за S.

3.1 Хауздорфов принцип максималности

Навешћемо и један једноставан еквивалент Цорнове леме, који ће се користити у једном доказу у даљем тексту.

Лема 6 *(Хауздорфов принцип максималности) Сваки непразан парцијално уређен скуп има бар један максималан ланац. Прецизније, ако је $(S, \preccurlyeq)$ произвољно непразно парцијално уређење, онда скуп $\mathcal{L}_S$ има максималан елемент.*

Претпоставимо да важи Цорнова лема. Нека је $(S, \preccurlyeq)$ произвољно непразно парцијално уређење. Скуп свих ланаца $\mathcal{L}_S$ парцијално је уређен у односу на инклузију. Нека је $\mathcal{L}$ ланац у $\mathcal{L}_S$, тј. $(\mathcal{L}, \subseteq)$ је линеарно уређење. Означимо $L = \bigcup \mathcal{L}$. Нека су $a, b \in L$. Тада постоје $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ тако да $a \in L_1, b \in L_2$. Како је $\mathcal{L}$ ланац, то је $L_1 \subseteq L_2$ или $L_2 \subseteq L_1$. Претпоставимо, на пример, $L_1 \subseteq L_2$ (аналогно за $L_2 \subseteq L_1$). Тада $a, b \in L_2$, па, како је L_2 ланац у S, то $a \preccurlyeq b$ или $b \preccurlyeq a$.

Дакле, L је ланац у S. Како је за свако $L' \in \mathcal{L}$ испуњено $L' \subseteq L$, то је L неки максималан ланац у S.

Докажимо сада да из Хауздорфовог принципа максималности следи Цорнова лема.

Нека је $(S, \preccurlyeq)$ парцијално уређење у коме је сваки ланац ограничен одозго. Нека је L неки максималан (у односу на инклузију) ланац у S, и $l \in S$ горње ограничење за L. Тврдимо да је l максималан елемент скупа S.

Претпоставимо да то не важи. Тада постоји $x \in S$ тако да је $l \prec x$. Како је x упоредив са свим елементима из L (због транзитивности релације $\preccurlyeq$), то је $L \cup \{x\}$ ланац у S. Међутим, $L \cup \{x\} \supsetneq L$, а L је максималан ланац у S. Контрадикција. Дакле, l мора бити максималан елемент од S.

Аргументи у корист аксиоме избора

У овом поглављу показаћемо неке од доприноса аксиоме избора у различитим гранама математике.

4 Аксиома избора у реалној анализи

У реалној анализи аксиома избора има бројне примене. У овом одељку приказаћемо неке од њих.

4.1 Тачка нагомилавања скупа

Појам тачке нагомилавања неког скупа може да се уведе на два начина.

Дефиниција 9 *Кажемо да је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа $A \subseteq \mathbb{R}$ ако постоји низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ елемената из A такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Дефиниција 10 *Кажемо да је $a \in \mathbb{R}$ тачка нагомилавања скупа $A \subseteq \mathbb{R}$ ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $x \in A$ тако да је $|x - a| < \varepsilon$.*

Може се рећи да је интуитивно јасно да су ове две дефиниције међусобно еквивалентне. Међутим, то не би могло да се докаже без аксиоме избора.

Претпоставимо дефиницију 9, и изаберимо $\varepsilon > 0$ произвољно. Треба да нађемо елемент x скупа A за који важи $|x - a| < \varepsilon$. Дефиниција 9 гарантује нам да постоји низ x_n елемената из A који тежи ка a. Дакле, постоји природан број n_0 такав да за све $n \geqslant n_0$ важи $|x_n - a| < \varepsilon$. Специјално, $|x_{n_0} - a| < \varepsilon$ и $x_{n_0} \in A$, па можемо узети $x = x_{n_0}$.

Обрнуто, претпоставимо дефиницију 10. Тада за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $x \in A$ тако да је $|x - a| < \frac{1}{n}$, то јест скуп $X_n = \{x \in A \mid |x - a| < \frac{1}{n}\}$ јесте непразан, па је фамилија $X = \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ непразна фамилија непразних скупова. За њу постоји функција избора, тј. из сваког скупа X_n можемо изабрати неки елемент x_n. Дакле, постоји низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у A такав да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Како је $\frac{1}{n}$ нула низ, то $x_n \to a$ $(n \to \infty)$.

4.2 Вајерштрасова и Кошијева дефиниција граничне вредности функције

Дефиниција 11 *Нека је $f : A \to \mathbb{R}$ функција реалне промењљиве и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A (тј. у свакој околини тачке a постоји бесконачно много елемената скупа A). Кажемо да је $b \in \overline{\mathbb{R}}$* ***гранична вредност (лимес) функције** f **у тачки*** *a ако за сваку околину $V(b)$ тачке b постоји околина $U(a)$ тачке a тако да је $f[\mathring{U}(a)] \subseteq V(b)$ (где је $\mathring{U}(a)$ ознака за тзв. пробушену околину тачке a, тј. за скуп $U(a)\backslash\{a\}$). Тада пишемо*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Ова дефиниција приписује се Вајерштрасу[8], и зове се још дефиниција ,,на језику околина“. Следеће тврђење доказује еквиваленцију ове дефиниције са дефиницијом лимеса функције коју је користио Коши[9], такозваном дефиницијом ,,на језику низова“.

Теорема 3 *Гранична вредност функције реалне променљиве $f : A \to \mathbb{R}$ у тачки $a \in \overline{\mathbb{R}}$ једнака је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ ако и само ако за сваки низ $(x_n) \subseteq A \backslash \{a\}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.*

Доказ.
$\Longrightarrow$:
Претпоставимо да је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Нека је (x_n) произвољан низ за који важи следеће:

(1) $x_n \in A\backslash\{a\}$ за свако $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Треба да докажемо да је гранична вредност низа $(f(x_n))$ једнака b. Нека је $V(b)$ произвољна околина тачке b. Тада, због претпоставке, постоји околина $U(a)$ тачке a таква да је $f[\mathring{U}(a)] \subseteq V(b)$. Уочимо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ важи $x_n \in \mathring{U}(a)$ (услов (2) нам гарантује да такво n_0 постоји, а услов (1) нам гарантује да је $x_n \neq a$ за свако $n \in \mathbb{N}$). Тада је $f(x_n) \in V(b)$ за свако $n > n_0$, што значи да је $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
$\Longleftarrow$:
Претпоставимо супротно, тј. да није $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, а да важи други део у исказу теореме. Тада постоји околина $V(b)$ тачке b таква да за сваку околину $U(a)$ тачке a важи $f[\mathring{U}(a)] \nsubseteq V(b)$. Претпоставимо да је $a \in \mathbb{R}$ (за $a \in \{-\infty, +\infty\}$ доказ је сличан). Уочимо низ $\left(U_{\frac{1}{n}}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ $\frac{1}{n}$-околина тачке a. Како $f[\mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a)] \nsubseteq V(b)$ за све $n \in \mathbb{N}$, то је $\{f[\mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a)]\backslash V(b) \mid n \in \mathbb{N}\}$ непразна фамилија непразних скупова, па за њу постоји функција избора, тј. постоји низ елемената $y_n \in f[\mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a)]\backslash V(b)$, $n \in \mathbb{N}$. Отуда за свако $n \in \mathbb{N}$ постоје оригинали $x_n \in \mathring{U}_{\frac{1}{n}}(a)$ такви да $f(x_n) \notin V(b)$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, и очигледно је за све $n \in \mathbb{N}$ испуњено $x_n \in A\backslash\{a\}$. Међутим, не важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$. Контрадикција. ∎

Приметимо да смер ,,слева надесно“ у доказу претходне теореме важи независно од аксиоме избора, али са супротним смером то није случај.

Претходна теорема доказује једно врло слично тврђење, које се тиче непрекидности функције у тачки. Подсетимо се да за функцију $f : A \to \mathbb{R}$ кажемо да је *непрекидна* у тачки $a \in A$ ако за сваку околину V тачке $f(a)$ постоји околина U тачке a тако да је $f[U] \subseteq V$.

Теорема 4 *Нека је $f : A \to \mathbb{R}$ функција реалне променљиве и $a \in A$ тачка нагомилавања скупа A. Функција f је непрекидна у тачки a ако и само ако за сваки низ $(x_n) \subseteq A$ за који је $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Доказ. Тврђење следи непосредно из теореме 3 и чињенице да је функција f непрекидна у тачки a ако и само ако је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. ∎

[8]Karl Weierstrass (1815−1897), немачки математичар, за кога се каже и да је ,,отац модерне анализе“.
[9]Augustin Louis Cauchy (1789−1857), француски математичар.

5 Постојање базе векторског простора

Чињеница да сваки векторски простор коначне димензије[10] има базу важи у ZF теорији без аксиоме избора. Међутим, када је реч о произвољном векторском простору, постојање његове базе не би могло да се докаже без ове аксиоме.

Да бисмо доказали да, уз претпостављање аксиоме избора, сваки векторски простор има базу, потребна су нам нека помоћна тврђења.

Лема 7 *(лема о продужењу линеарно независних система) Ако је V векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ и $E = [e_1, \ldots, e_n]$ било који линеарно независан систем вектора из V, онда је то и систем $F = [e_1, \ldots, e_n, v]$ ако и само ако вектор v није линеарна комбинација вектора из E.*

Доказ.
$\Longrightarrow$:

Нека је $F = [e_1, \ldots, e_n, v]$ линеарно независан систем вектора из V. Претпоставимо супротно, тј. да v јесте линеарна комбинација вектора из E. То значи да постоје скалари $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ тако да важи

$$v = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Тада је

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + (-1)v = 0.$$

Како су вектори $e_1, \ldots, e_n$ и v линеарно независни, између осталог мора бити коефицијент уз v једнак нули, што није случај. Дакле, v не може бити линеарна комбинација вектора из E.
$\Longleftarrow$:

Претпоставимо да вектор v није линеарна комбинација вектора из E. Самим тим, ако за неке скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и α важи

$$\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n + \alpha v = 0,$$

мора бити $\alpha = 0$, а тиме и $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = 0$. Како је систем E линеарно независан, то је $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Дакле, систем $F = [e_1, \ldots, e_n, v]$ је линеарно независан. ■

Лема 8 *Ако су A и B било који скупови или системи вектора из датог векторског простора V, и ако са $\Omega(A)$ и $\Omega(B)$ означимо њихове линеарне омотаче, онда из $A \subseteq B \subseteq \Omega(A)$ следи*

$$\Omega(A) = \Omega(B).$$

Доказ. Најпре, како је $\Omega(A)$ потпростор од V, то је $\Omega(\Omega(A)) = \Omega(A)$. Затим, из $A \subseteq B$ јасно је да важи $\Omega(A) \subseteq \Omega(B)$. Зато, из $A \subseteq B \subseteq \Omega(A)$ следи $\Omega(A) \subseteq \Omega(B) \subseteq \Omega(A)$, па мора бити $\Omega(A) = \Omega(B)$. ■

Теорема 5 *Нека је V векторски простор над пољем $\mathbb{K}$. Тада је E једна база простора V ако и само ако је E нека максимална линеарно независна фамилија вектора из V.*

Доказ.
$\Longrightarrow$:

Нека је E база простора V, и нека је $F \subseteq V$ произвољна права надфамилија базе E, тј. $F \supsetneq E$. Како је E генератриса, сваки од вектора из $F \backslash E$ јесте линеарна комбинација

[10] За векторски простор кажемо да је *коначне димензије* ако има бар једну коначну генератрису.

преосталих вектора из F. Према леми 7, то управо значи да фамилија F мора бити линеарно зависна. Дакле, база E нема правих линеарно независних надфамилија, тј. E је максимална линеарно независна фамилија вектора из V.

$\Longleftarrow$:

Нека је E максимална линеарно независна фамилија вектора из V. Претпоставимо да E није генератриса простора V. Тада постоји вектор u у простору V који није линеарна комбинација вектора из E, па, према леми 7, фамилија $F = E \cup \{u\}$ јесте линеарно независна. Међутим, $F \supsetneq E$, а E је максимална линеарно независна фамилија. Контрадикција. Дакле, E је генератриса простора V. ■

Сада можемо доказати најављивано тврђење.

Теорема 6 *Сваки векторски простор има базу.*

Доказ. Нека је V неки векторски простор над пољем $\mathbb{K}$. Посматрајмо скуп $\mathcal{E}$ свих линеарно независних фамилија вектора простора V. Скуп $\mathcal{E}$ је (парцијално) уређен релацијом инклузије $\subseteq$. Нека је $\mathcal{E}_0$ произвољан ланац у $\mathcal{E}$. Тврдимо да је $\bigcup \mathcal{E}_0$ горње ограничење за $\mathcal{E}_0$ у $\mathcal{E}$. Доказаћемо, најпре, да је $\bigcup \mathcal{E}_0$ линеарно независна фамилија вектора из V. Присетимо се да за произвољну фамилију кажемо да је линеарно независна ако је то и свака њена коначна подфамилија. Нека је $G = [g_1, \ldots, g_n]$ произвољна подфамилија фамилије $\bigcup \mathcal{E}_0$, и претпоставимо да за неке скаларе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ важи

$$\alpha_1 g_1 + \ldots + \alpha_n g_n = 0. \tag{1}$$

Како $g_1, \ldots, g_n \in \bigcup \mathcal{E}_0$, то постоје фамилије $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{E}_0$ такве да $g_1 \in G_1, \ldots, g_n \in G_n$. $\mathcal{E}_0$ је ланац, па је једна од ових фамилија надскуп свих осталих. На пример, нека је то G_n, тј. $G_1, \ldots, G_{n-1} \subseteq G_n$. Одатле је $g_1, \ldots, g_n \in G_n$. Фамилија G_n је линеарно независна, па из релације (1) следи $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Дакле, $\bigcup \mathcal{E}_0$ је линеарно независна фамилија вектора из V, па $\bigcup \mathcal{E}_0 \in \mathcal{E}$. Такође, за свако $F \in \mathcal{E}_0$ очигледно важи $F \subseteq \bigcup \mathcal{E}_0$, па је $\bigcup \mathcal{E}_0$ заиста горње ограничење за $\mathcal{E}_0$ у $\mathcal{E}$.

Дакле, сваки ланац у $\mathcal{E}$ има горње ограничење. Према леми 1, $\mathcal{E}$ има максималан елемент $\tilde{E}$. Дакле, $\tilde{E}$ је максимална линеарно независна фамилија вектора из V. Према теореми 5, $\tilde{E}$ је једна база простора V. ■

6 Аксиома избора у функционалној анализи

Један од камена темељаца функционалне анализе представља чувена Хан-Банахова теорема о продужењу линеарне функционеле. Ову теорему први пут је доказао аустријски математичар Едвард Хели[11] 1912. године, док су је математичари по којима теорема и носи име[12] десетак година касније поново ,,открили". Ова теорема, међутим, без аксиоме избора не би важила.

Пре него што формулишемо Хан-Банахову теорему и докажемо је, направићемо осврт на неке појмове који ће нам требати.

Дефиниција 12 *Нека је X векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ (где $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Уколико постоји функција $x \mapsto ||x||$, $x \in X$, таква да за свако $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{K}$ важи*

(1) $||x|| \geqslant 0$ *и* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(2) $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$,

(3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$,

*онда за простор X кажемо да је један **нормиран векторски простор**, док уочену функцију $|| \cdot ||$ зовемо **нормом** произвољног вектора $x \in X$.*

Ако је $Z \subseteq X$ произвољан потпростор нормираног векторског простора X, јасно је да је и он сам један нормиран векторски простор, са нормом наслеђеном са простора X.

Дефиниција 13 *Нека су X, Y нормирани векторски простори над истим пољем $\mathbb{K}$. Било које пресликавање $A : X \to Y$ зовемо **оператором**. Притом, оператор $A : X \to Y$ који има особину да за било које векторе $x, y \in X$ и скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ важи*

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

*зовемо **линеарни оператор**. Скуп свих линеарних оператора простора X у простор Y означавамо са $\mathcal{L}(X, Y)$.*

Како је $A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0)$, то је $A(0) = 0$ (тачније, $A(0_X) = 0_Y$).

Дефиниција 14 *Кажемо да је линеарни оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ **ограничен** уколико постоји бар један број $M \geqslant 0$ такав да за свако $x \in X$ важи*

$$||A(x)|| \leqslant M||x||. \tag{2}$$

*Уколико ниједан такав број M не постоји, кажемо да је оператор A **неограничен**.*

Дефиниција 15 *Нека је $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ ограничен линеарни оператор и $\mathcal{M}$ скуп свих бројева $M \in [0, +\infty)$ таквих да за свако $x \in X$ важи (2). **Норму оператора** A дефинишемо са*

$$||A|| := \inf \mathcal{M}.$$

(Приметимо да је $\mathcal{M}$ непразан скуп и да је ограничен одоздо – на пример, бројем 0. Према теореми о инфимуму, $\inf \mathcal{M}$ постоји.)

Уколико је оператор A неограничен, дефинишемо његову норму са

$$||A|| := +\infty.$$

[11] Eduard Helly (1884–1943).

[12] Hans Hahn (1879–1934), аустријски математичар; Stefan Banach (1892–1945), пољски математичар.

Став 1 *За сваки ограничен линеаран оператор $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, где је X нетривијалан нормиран векторски простор, важи једнакост*

$$\begin{aligned} ||A|| &= \sup\big\{||A(x)|| \mid ||x|| = 1\big\} \\ &= \sup\bigg\{\frac{||A(x)||}{||x||} \mid x \neq 0\bigg\}. \end{aligned}$$

Доказ. Како је $A(0) = 0$, то је за $x = 0$ испуњена неједнакост (2). Како је $X \neq \{0\}$, то (2) важи за све $x \in X$ ако и само ако важи за све $x \in X \backslash \{0\}$. Зато је неједнакост (2) еквивалентна са

$$\frac{||A(x)||}{||x||} \leqslant M, \quad x \in X \backslash \{0\},$$

одакле је, очигледно,

$$||A|| = \sup\bigg\{\frac{||A(x)||}{||x||} \mid x \neq 0\bigg\}.$$

Даље, за произвољан вектор $x \in X \backslash \{0\}$ важи

$$\frac{||A(x)||}{||x||} = \bigg|\bigg|\frac{1}{||x||}A(x)\bigg|\bigg| = \bigg|\bigg|A\Big(\frac{x}{||x||}\Big)\bigg|\bigg|.$$

Када вектор x описује скуп $X \backslash \{0\}$, тада вектор $\dfrac{x}{||x||}$ описује јединичну сферу

$$S = \{e \in X \mid ||e|| = 1\}$$

простора X. Зато очигледно важи

$$||A|| = \sup\big\{||A(e)|| \mid ||e|| = 1\big\} = \sup\big\{||A(x)|| \mid ||x|| = 1\big\}. \quad \blacksquare$$

Дефиниција 16 *Нека је X нормиран векторски простор над пољем $\mathbb{K}$. Произвољно линеарно пресликавање $f : X \to \mathbb{K}$ зовемо **линеарна функционела**.*

Скуп свих линеарних функционела на простору X означавамо са X^*. Дакле,

$$X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K}).$$

*Скуп свих ограничених линеарних функционела на простору X означавамо са X' и зовемо **дуалним простором** простора X.*

Норма функционеле *$f \in X'$ дефинисана је са*

$$||f|| := \sup\big\{|f(x)| \mid x \in X, \, ||x|| = 1\big\}.$$

(Дефиниција је коректна, због претходног става.)

Хан-Банахова теорема, слободним речима, тврди да се ограничена линеарна функционела са векторског потпоростора може продужити на цео простор без увећања норме. Пре него што је формално искажемо, докажимо једно помоћно тврђење, иначе познато и као *мала Хан-Банахова теорема*.

Лема 9 *Нека је E произвољан прави потпростор нормираног векторског простора X над пољем $\mathbb{R}$, и g ограничена линеарна функционела на потпростору E. Тада постоји бар један потпростор F простора X такав да $E \subsetneq F$ и ограничена линеарна функционела f на простору F која продужава функционелу g (тј. $f \restriction_E = g$) и таква да је $||f||_F = ||g||_E$.*

Доказ. Нека је $x_0 \in X \backslash E$ произвољан фиксиран вектор. Јасно је да је тада $x_0 \neq 0$. Дефинишимо потпростор F са

$$F = \{e + \lambda x_0 \mid e \in E,\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Означимо $M = ||g||_E$. Тада за произвољне векторе $e_1, e_2 \in E$ важи

$$\begin{aligned} |g(e_1) - g(e_2)| &= |g(e_1 - e_2)| \\ &\leqslant M||e_1 - e_2|| \\ &= M||e_1 + x_0 - (e_2 + x_0)|| \\ &\leqslant M||e_1 + x_0|| + M||e_2 + x_0||. \end{aligned}$$

Одатле следи

$$g(e_1) - g(e_2) \leqslant M||e_1 + x_0|| + M||e_2 + x_0||,$$

то јест

$$-M||e_2 + x_0|| - g(e_2) \leqslant M||e_1 + x_0|| - g(e_1).$$

Тада, ако уведемо ознаке

$$\begin{aligned} k &= \sup\big\{ -M||e + x_0|| - g(e) \mid e \in E\big\}, \\ l &= \inf\big\{M||e + x_0|| - g(e) \mid e \in E\big\}, \end{aligned}$$

закључујемо да су бројеви k и l коначни и да важи $k \leqslant l$. Изаберимо и фиксирајмо произвољан број r за који је $k \leqslant r \leqslant l$. Тада за произвољан вектор $e \in E$ важи

$$-M||e + x_0|| - g(e) \leqslant r \leqslant M||e + x_0|| - g(e). \tag{3}$$

Нека је $x \in F$ произвољно. Тада је $x = e + \lambda x_0$ за неко $e \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Дефинишимо функционелу f на F са

$$f(x) = g(e) + \lambda r.$$

Лако се види да је f линеарно пресликавање. Наиме, нека су $x_1 = e_1 + \lambda_1 x_0$ и $x_2 = e_2 + \lambda_2 x_0$ произвољни вектори простора F. Тада је, за произвољне $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, испуњено

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= f\big(\alpha_1(e_1 + \lambda_1 x_0) + \alpha_2(e_2 + \lambda_2 x_0)\big) \\ &= f\big((\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)x_0\big) \\ &= g(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2)r \\ &= \alpha_1 g(e_1) + \alpha_2 g(e_2) + \alpha_1(\lambda_1 r) + \alpha_2(\lambda_2 r) \\ &= \alpha_1(g(e_1) + \lambda_1 r) + \alpha_2(g(e_2) + \lambda_2 r) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \end{aligned}$$

јер је g линеарно, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \in E$ и $\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Затим, f се поклапа са g на E, јер ако је $x = e \in E$, онда је $\lambda = 0$, па је $f(e) = g(e) + 0 \cdot r$, тј. $f(e) = g(e)$.

Дакле, f је линеарна функционела која продужава функционелу g на F. Остаје још да се докаже да је f ограничена на F и да је $||f||_F = ||g||_E = M$. Да бисмо то доказали, довољно је да докажемо да је

$$|f(x)| \leqslant M||x||$$

за све векторе $x \in F \backslash E$, тј. за све векторе облика $x = e + \lambda x_0$, где је $\lambda \neq 0$.

У неједнакости (3) заменимо вектор e са $\dfrac{1}{\lambda}e$. Тада, користећи да је $\dfrac{|\lambda|}{\lambda} = \mathrm{sgn}\lambda$, добијамо

$$-M\Big|\Big|\frac{1}{\lambda}e + x_0\Big|\Big| - g\Big(\frac{1}{\lambda}e\Big) \leqslant r \leqslant M\Big|\Big|\frac{1}{\lambda}e + x_0\Big|\Big| - g\Big(\frac{1}{\lambda}e\Big),$$

то јест

$$-\frac{M}{|\lambda|}||e + \lambda x_0|| - \frac{1}{\lambda}g(e) \leqslant r \leqslant \frac{M}{|\lambda|}||e + \lambda x_0|| - \frac{1}{\lambda}g(e). \tag{4}$$

Помножимо сада (4) са $|\lambda|$. Добијамо

$$-M||e + \lambda x_0|| - \mathrm{sgn}\lambda \cdot g(e) \leqslant |\lambda| r \leqslant M||e + \lambda x_0|| - \mathrm{sgn}\lambda \cdot g(e),$$

па је

$$-M||e + \lambda x_0|| \leqslant \mathrm{sgn}\lambda \cdot g(e) + |\lambda| r \quad \wedge \quad M||e + \lambda x_0|| \geqslant \mathrm{sgn}\lambda \cdot g(e) + |\lambda| r,$$

то јест

$$-M||e + \lambda x_0|| \leqslant \mathrm{sgn}\lambda\big(g(e) + \lambda r\big) \leqslant M||e + \lambda x_0||.$$

Међутим, како је $x = e + \lambda x_0$, последњи ред еквивалентан је са

$$-M||x|| \leqslant \mathrm{sgn}\lambda \cdot f(x) \leqslant M||x||,$$

што је еквивалентно са

$$|\mathrm{sgn}\lambda \cdot f(x)| \leqslant M||x||,$$

то јест

$$|f(x)| \leqslant M||x||,$$

чиме смо доказали оно што смо желели. ■

Сада можемо формулисати и доказати саму Хан-Банахову теорему.

Теорема 7 *Нека је E произвољан прави потпростор нормираног векторског простора X над пољем $\mathbb{R}$, и g ограничена линеарна функционела на потпростору E. Тада постоји бар једна ограничена линеарна функционела f на простору X која продужава функционелу g (тј. $f\restriction_E = g$) и таква да је $||f||_X = ||g||_E$.*

Напомена. Приметимо да смо у претходној леми доказали да се линеарна функционела може продужити са произвољног потпростора на (пот)простор који је за једну димензију већи. Онда бисмо могли на исти начин да наставимо и да продужавамо функционелу на простор који је за још једну димензију већи, па за још једну, и тако даље. Међутим, не знамо за колико димензија је цео простор X „удаљен“ од тог свог почетно уоченог потпростора. Зато је за доказ Хан-Банахове теореме потребна нешто „моћнија“ техника.

Доказ. Нека је E произвољан прави потпростор од X и g на њему дефинисана функционела која задовољава услове теореме.

Ако је $E = \{0\}$, онда је, тривијално, $g = 0$, па је функционела $f = 0$ тражено продужење са E на цео простор X.

Претпоставимо сада да је E нетривијалан прави потпростор од X. Означимо са $\mathcal{N}$ скуп свих могућих продужења f функционеле g на неки произвољан потпростор F простора X, $F \supseteq E$, за која важи $||f||_F = ||g||_E$. Тада је, дакле, $f(x) = g(x)$ за свако $x \in E$.

Скуп $\mathcal{N}$ је непразан, јер, тривијално, $g \in \mathcal{N}$. Дефинишимо релацију $\preccurlyeq$ на $\mathcal{N}$ са

$$f_1 \preccurlyeq f_2 \quad\Longleftrightarrow\quad F_1 \subseteq F_2 \ \wedge\ (\forall x \in F_1)\, f_1(x) = f_2(x).$$

Другим речима, $f_1 \preccurlyeq f_2$ ако и само ако је f_2 продужење функционеле f_1. Лако се види да је на овај начин дефинисана једна релација поретка на $\mathcal{N}$. Дакле, $(\mathcal{N}, \preccurlyeq)$ је једно непразно парцијално уређење. На овом месту употребићемо лему 13 (Хауздорфов принцип максималности). Она нам гарантује да постоји бар један максималан ланац $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{N}$.

Уочимо, даље, скуп
$$\hat{F} = \bigcup \{F \mid f \in \mathcal{C}\}.$$
(Притом је F потпростор на коме је функционела f дефинисана.) Доказаћемо да је $\hat{F}$ векторски потпростор од X.

Нека су $x, y \in \hat{F}$. Тада постоје потпростори F_1, F_2 простора X такви да $x \in F_1, y \in F_2$, при чему функционеле f_1, f_2 на њима дефинисане припадају ланцу $\mathcal{C}$. Због тога важи $f_1 \preccurlyeq f_2$ или $f_2 \preccurlyeq f_1$. Претпоставимо, на пример, да је $f_1 \preccurlyeq f_2$ (за други случај ради се аналогно). Тада је $F_1 \subseteq F_2$, па $x, y \in F_2$. Како је F_2 векторски потпростор, то за произвољне скаларе $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи
$$\alpha x + \beta y \in F_2.$$
Међутим, $F_2 \subseteq \hat{F}$, па $\alpha x + \beta y \in \hat{F}$. Дакле, $\hat{F}$ је потпростор од X.

Дефинишимо пресликавање $\hat{f} : \hat{F} \to \mathbb{R}$ са
$$\hat{f}(x) = f(x)$$
за $f \in \mathcal{C}$ и $x \in F = \mathrm{dom}(f)$. Проверимо да ли је $\hat{f}$ коректно дефинисано. Претпоставимо да важи
$$\hat{f}(x_1) \neq \hat{f}(x_2) \tag{5}$$
за неке $x_1, x_2 \in \hat{F}$. Тада постоје потпростори F_1, F_2 такви да $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$, при чему $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$. Нека важи, на пример, $f_1 \preccurlyeq f_2$. Тада је $F_1 \subseteq F_2$, одакле следи да $x_1, x_2 \in F_2$. Онда, по дефиницији $\hat{f}$, важи $\hat{f}(x_1) = f_2(x_1)$ и $\hat{f}(x_2) = f_2(x_2)$, што са релацијом (5) даје $f_2(x_1) \neq f_2(x_2)$, па, због добре дефинисаности пресликавања f_2, важи
$$x_1 \neq x_2.$$
Дакле, пресликавање $\hat{f}$ је коректно дефинисано.

Доказаћемо да је $\hat{f}$ линеарна функционела на потпростору $\hat{F}$. Наиме, ако су $x, y \in \hat{F}$, онда постоје потпростори F_1, F_2 такви да $x \in F_1, y \in F_2$, при чему $f_1, f_2 \in \mathcal{C}$. Претпоставимо, на пример, да је $f_1 \preccurlyeq f_2$. Тада је $F_1 \subseteq F_2$, па $x, y \in F_2$, па, како је F_2 векторски потпростор, важи $\alpha x + \beta y \in F_2$ за било које $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је
$$\begin{aligned} \hat{f}(\alpha x + \beta y) &= f_2(\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha f_2(x) + \beta f_2(y) \\ &= \alpha \hat{f}(x) + \beta \hat{f}(y), \end{aligned}$$
јер је f_2 линеарно. Дакле, $\hat{f}$ је заиста линеарна функционела на $\hat{F}$.

Није тешко видети да $\hat{f}$ продужава функционелу g. Наиме, претпоставимо да функционела g не припада ланцу $\mathcal{C}$. Тада, како $g \in \mathcal{N}$, то је $\mathcal{C} \cup \{g\}$ ланац у $\mathcal{N}$ и $\mathcal{C} \cup \{g\} \supsetneq \mathcal{C}$. Међутим, ово је у контрадикцији са чињеницом да је $\mathcal{C}$ максималан ланац у $\mathcal{N}$. Дакле, мора бити $g \in \mathcal{C}$. То значи да је $E \subseteq \hat{F}$, па је $\hat{f}(x) = g(x)$ за све $x \in E$.

Даље, докажимо да је $||\hat{f}||_{\hat{F}} = ||g||_E$. По дефиницији функције $\hat{f}$ очигледно важи

$$\begin{aligned}
||\hat{f}||_{\hat{F}} &= \sup\big\{|f(x)| \mid f \in \mathcal{C},\, x \in F,\, ||x|| = 1\big\} \\
&= \sup_{f\in\mathcal{C}}\big(\sup\big\{|f(x)| \mid x \in F,\, ||x|| = 1\big\}\big) \\
&= \sup_{f\in\mathcal{C}}\big(||f||_F\big) \\
&= \sup_{f\in\mathcal{C}}\big(||g||_E\big) \\
&= ||g||_E.
\end{aligned}$$

Најзад, доказали смо да $\hat{f} \in \mathcal{N}$. Уколико би било $\hat{F} = X$, онда би управо функционела $\hat{f}$ била једно тражено продужење за g на цео простор X.

Претпоставимо да то не важи, тј. да је $\hat{F}$ прави потпростор од X. Према леми 9, постоји потпростор F_0 простора X такав да је $\hat{F} \subsetneq F_0 \subseteq X$, и постоји нека ограничена линеарна функционела f_0 дефинисана на потпростору F_0 таква да важи $||f_0||_{F_0} = ||\hat{f}||_{\hat{F}} = ||g||_E$ и $f_0 \succ f$. Закључујемо да $f_0 \in \mathcal{N}$. Даље, $f_0 \notin \mathcal{C}$, јер би у супротном било $F_0 \subseteq \hat{F}$. Уочимо ланац $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cup \{f_0\}$. $\mathcal{C}'$ је ланац у $\mathcal{N}$ и очигледно $\mathcal{C}' \supsetneq \mathcal{C}$, што је у контрадикцији са чињеницом да је $\mathcal{C}$ максималан у $\mathcal{N}$.

Дакле, $\hat{F}$ не може бити прави потпростор од X, па је $\hat{F} = X$. ■

Напомена. Постоји варијанта Хан-Банахове теореме која се односи на комплексне векторске просторе, позната као *теорема Сухомлинова* (њен доказ се ослања на теорему 7).

7 Аксиома избора у алгебри и теорији скупова

Постоји више тврђења у вези са кардиналном моћи скупова која су интуитивно потпуно очекивана и природна, а која, међутим, без аксиоме избора не би могла да важе. У овом одељку приказаћемо нека од њих.

7.1 Постојање инјекције и сурјекције између произвољна два скупа

Уколико за нека два скупа A и B постоји *1-1* функција A у B, интуитивно је јасно да је скуп B на неки начин ,,већи“ (прецизније, *не мањи*) од скупа A, тј. да има довољно елемената да сви елементи скупа A могу да се различито пресликају. С друге стране, уколико постоји *на* функција B на A, опет скуп B замишљамо на неки начин ,,већим“ од скупа A, јер су сви елементи скупа A ,,погођени“ при том пресликавању. Другим речима, интуитивно је потпуно прихватљиво да је постојање *1-1* функције A у B еквивалентно постојању *на* функције B на A. Међутим, иако очекивана, за произвољне скупове A и B ова еквиваленција не би важила без аксиоме избора.

Теорема 8 *Нека су A и B непразни скупови. Постоји инјекција A у B ако и само ако постоји сурјекција B на A.*

Доказ. Смер ,,слева надесно“ важи независно од аксиоме избора, па докажимо прво њега. Претпоставимо да је $f : A \to B$ *1-1* функција. Ако је f и *на*, доказ је завршен, јер је онда f^{-1} тражена сурјекција. Претпоставимо да f није *на*. Тада је $\mathrm{ran}(f) \subsetneq B$. Изаберимо произвољан елемент $a_0 \in A$. Дефинишимо функцију $g : B \to A$ са

$$g(b) = \begin{cases} a_0\,, & \textit{ако} \;\; b \notin \mathrm{ran}(f), \\ f^{-1}(b)\,, & \textit{ако} \;\; b \in \mathrm{ran}(f). \end{cases}$$

Приметимо да је g заиста функција, јер f је *1-1*, па је f^{-1} функција. Лако се види да је g *на*.

Да бисмо доказали супротан смер, потребан нам је појам *језгра функције* и неке његове особине.

Дефиниција 17 *Нека су A и B скупови и $f : A \to B$ нека функција. Релацију $\mathrm{Ker}(f)$ дефинисану на скупу A са*

$$(a_1, a_2) \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(a_1) = f(a_2)$$

зовемо ***језгро функције*** *f.*

Лако се види да је овако дефинисано $\mathrm{Ker}(f)$ релација еквиваленције на скупу A. Количнички скуп ове релације, тј. скуп $A/\mathrm{Ker}(f)$, представља једну партицију скупа A.

Докажимо сада и смер ,,здесна налево“. Нека је $g : B \to A$ *на* функција. Тада је $B/\mathrm{Ker}(g)$ партиција скупа B, па, према делу (2) теореме 1, следи да $B/\mathrm{Ker}(g)$ има трансверзалу T. Посматрајмо функцију $g \restriction_T : T \to A$. Ова функција је *1-1*, јер скуп T садржи по један елемент из сваке класе еквиваленције, а у класи се налазе сви елементи чија је слика при функцији g иста. Зато се различити елементи скупа T сликају у различите елементе скупа A. Међутим, ова функција је и *на*, јер је g *на*, па је сваки елемент скупа A слика неког елемента (или неких елемената) скупа B, односно слика неког (прецизније, тачно једног) елемента скупа T. Дакле, функција $g \upharpoonright_T : T \to A$ јесте бијекција, па је њена инверзна функција $f = (g \upharpoonright_T)^{-1} : A \to T$ такође бијекција, а како је $T \subseteq B$, то је $f : A \to B$ инјекција. ■

7.2 Карактеризација бесконачних скупова

Резултат који следи приписује се немачком математичару Дедекинду[13].

Теорема 9 *Скуп је бесконачан ако и само ако је у бијекцији са неким својим правим подскупом.*

Доказ ове теореме следиће из неколико помоћних тврђења.

Лема 10 *Ниједан природан број није у бијекцији са својим правим подскупом.*

Доказ. Доказ вршимо математичом индукцијом по n.

Нека је $n = 0$. Тада, како је $0 = \varnothing$, тврђење тривијално важи, јер празан скуп нема правих подскупова.

Даље, претпоставимо да тврђење важи за неко $n \in \mathbb{N}$ и докажимо да важи за $n+1$.

Претпоставимо супротно, тј. да постоји бијекција $f : n+1 \to A$, где је $A \subsetneq n+1$. Разликујемо два случаја.

1. $n \notin A$. Тада је $A \subseteq n$. Нека је $f(n) = k$, где је $k < n$. Тада је

$$f \upharpoonright_n : n \to A \backslash \{k\}$$

   бијекција, што је у контрадикцији са индуктивном хипотезом, јер $A \backslash \{k\}$ је, очигледно, прави подскуп од n.

2. $n \in A$. Можемо опет разликовати два случаја.

   (а) $f(n) = n$. Сада је, слично случају 1, $f \upharpoonright_n : n \to A \backslash \{n\}$ бијекција између n и његовог правог подскупа, што се коси са индуктивном хипотезом.

   (б) $f(n) = k$, за неко $k < n$. Дефинишимо функцију $g : n+1 \to n+1$ са

$$g(x) = \begin{cases} k, & x = n, \\ n, & x = k, \\ x, & x \in (n+1) \backslash \{k, n\}. \end{cases}$$

   Приметимо да је сада функција $(f \circ g) \upharpoonright_n$ бијекција између n и $A \backslash \{n\}$, то јест овај случај смо свели на 2.(а).

Најзад, закључујемо да претпоставка да постоји бијекција између $n+1$ и неког његовог правог подскупа не може бити тачна, тј. да тврђење важи за $n+1$. ■

Из претходне леме лако следи наредно тврђење.

Лема 11 *Ниједан коначан скуп X није у бијекцији са својим правим подскупом.*

[13] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916).

Доказ. Нека је X коначан скуп. Претпоставимо супротно, тј. да постоји прави подскуп A скупа X и бијекција $f : X \to A$. Скуп X је коначан, па постоји природан број n и бијекција $g : X \to n$. Нека је
$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}.$$
Уочимо скуп $Y = \{k \mid x_k \in A\}$. Очигледно је да постоји бијекција $h : A \to Y$. Тада је функција $h \circ f \circ g^{-1}$ бијекција између n и Y. Међутим, из $A \subsetneq X$ следи $Y \subsetneq n$, што значи да смо добили бијекцију између n и његовог правог подскупа. Према леми 10, ово је немогуће. ■

Приметимо да смо овиме доказали смер „здесна налево“ теореме 9. За други смер је неопходна аксиома избора, и њега ћемо доказати следећим тврђењем.

Лема 12 *Ако је X бесконачан скуп, онда постоји бијекција између X и неког правог подскупа од X.*

Доказ. Претпоставимо да је скуп X бесконачан. Према аксиоми избора, постоји функција избора за фамилију свих (непразних) подскупова од X, тј. постоји функција
$$F : \mathcal{P}(X) \to \bigcup \mathcal{P}(X) = X$$
која сваком непразном подскупу од X додељује неки његов елемент. Дефинишимо функцију $f : \mathbb{N} \to X$ са
$$(Rec) \begin{cases} f(0) = F(X), \\ f(n+1) = F(X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}). \end{cases}$$
Функција f је, дакле, један низ у X, па можемо означити
$$f(n) =: x_n,$$
$n \in \mathbb{N}$. Посматрајмо скуп X' свих вредности овог низа,
$$X' = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Дефинишимо функцију $h : X \to X \backslash \{x_0\}$ на следећи начин:
$$h(x) = \begin{cases} x_{n+1}, & \text{ако је } x = x_n \text{ за неко } n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{ако } x \notin X'. \end{cases}$$
Лако се види да је овиме дефинисана једна бијекција између скупова X и $X \backslash \{x_0\}$. ■

Напоменимо да уколико бисмо за тренутак заборавили дефиницију коначних и бесконачних скупова и дефинисали бесконачан скуп по угледу на теорему 9, а коначан скуп дефинисали као онај који није (у таквом смислу) бесконачан, и притом не претпоставили аксиому избора, добили бисмо врло незахвалне резултате. На пример, могао би да се нађе модел ZF теорије у коме би коначна унија коначних скупова била бесконачан скуп, или у коме би партитивни скуп коначног скупа био бесконачан.

7.3 Бернштајнова теорема

Дефиниција 18 *Нека су A и B скупови. Кажемо да је скуп A* ***мање или једнаке моћи (кардиналности)*** *од скупа B, и пишемо*
$$|A| \leqslant |B|,$$
ако постоји 1-1 функција A у B.

Став 2 *Нека су* A, B *и* C *скупови. Тада важи следеће:*

(1) $|A| \leqslant |A|$,

(2) ако је $|A| \leqslant |B|$ *и* $|B| \leqslant |C|$, *онда је* $|A| \leqslant |C|$.

Доказ. Део (1) очигледно важи, јер идентичка функција $id_A : A \to A$ јесте *1-1*. Што се тиче дела (2), и за њега се лако види да важи, јер ако је $f : A \to B$ *1-1* и $g : B \to C$ *1-1*, онда је функција $g \circ f : A \to C$ такође *1-1*. ■

Уколико бисмо $\leqslant$ из претходне дефиниције посматрали као релацију на неком скупу, из претходног тврђења следило би да је та релација рефлексивна и транзитивна; њену антисиметричност даје чувена Кантор-Бернштајнова теорема[14], па би следило да је та релација једна релација поретка. Можемо се запитати да ли је тај поредак линеаран; другим речима, да ли су било која два скупа ,,упоредива по кардиналности". Интуитивно, очекујемо да одговор буде потврдан. То, међутим, не би важило без аксиоме избора.

Другим речима, захваљујући аксиоми избора важи следећа теорема, која се приписује Бернштајну[15].

Теорема 10 *За свака два скупа* X *и* Y *важи* $|X| \leqslant |Y|$ *или* $|Y| \leqslant |X|$.

Доказ. Претпоставимо да не важи $|X| \leqslant |Y|$, тј. да не постоји *1-1* функција X у Y. Циљ нам је да докажемо постојање *1-1* функције Y у X.

Уочимо фамилију

$$\mathcal{F} = \{(Z, f) \mid Z \subseteq Y, f : Z \to X \text{ је } \textit{1-1}\}.$$

Дефинишимо на $\mathcal{F}$ релацију $\preccurlyeq$ са

$$(Z_1, f_1) \preccurlyeq (Z_2, f_2) \quad \Longleftrightarrow \quad Z_1 \subseteq Z_2 \ \wedge \ f_2 \restriction_{Z_1} = f_1.$$

Лако се може видети да је $\preccurlyeq$ релација поретка на $\mathcal{F}$, тј. да је $(\mathcal{F}, \preccurlyeq)$ једно парцијално уређење.

Нека је $\mathcal{L} = \{(Z_i, f_i) \mid i \in I\}$ произвољан ланац у $\mathcal{F}$. Означимо

$$Z = \bigcup_{i \in I} Z_i, \quad f = \bigcup_{i \in I} f_i.$$

Приметимо да је f функција, јер је $\mathcal{L}$ ланац, па је $\{f_i \mid i \in I\}$ компатибилна фамилија функција.

Доказаћемо да је (Z, f) горње ограничење за $\mathcal{L}$ у $\mathcal{F}$.

Најпре, за свако $i \in I$ важи $Z_i \subseteq Y$, па је и $Z = \bigcup\limits_{i \in I} Z_i \subseteq Y$. Затим, докажимо да је $f : Z \to X$ *1-1*. Нека су $u, v \in Z$, $u \neq v$, произвољни елементи. Тада постоје $i, j \in I$ тако да $u \in Z_i, v \in Z_j$. $\mathcal{L}$ је ланац, па је или $Z_i \subseteq Z_j$ или је $Z_j \subseteq Z_i$. Нека је, на пример, $Z_i \subseteq Z_j$ (за други случај аналогно). Тада $u, v \in Z_j = \mathrm{dom}(f_j)$, па је $f(u) = f_j(u)$ и $f(v) = f_j(v)$. Функција f_j је *1-1*, па $f_j(u) \neq f_j(v)$. Дакле, $f(u) \neq f(v)$, одакле следи да је f *1-1*.

Најзад, за произвољно $i \in I$ важи $Z_i \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} Z_i = Z$, тј. $Z_i \subseteq Z$. На основу овога и претходног важи да је (Z, f) заиста горње ограничење за $\mathcal{L}$ у $\mathcal{F}$.

[14] Видети, на пример, [3], стр. 66.

[15] Felix Bernstein (1878–1956), немачки математичар.

Дакле, сваки ланац у $\mathcal{F}$ има горње ограничење у $\mathcal{F}$, па, према Цорновој леми, $\mathcal{F}$ има максималан елемент (W, h). Тада је $W \subseteq Y$ и функција $h : W \to X$ је *1-1*. Уколико бисмо доказали да је $W = Y$, доказ би био завршен, јер би тада управо функција h била тражена инјекција Y у X.

Претпоставимо да је $W \subsetneq Y$ и изаберимо произвољан елемент $w \in Y \backslash W$. Уколико би функција h била *на*, значило би да је она бијекција, па би и њена инверзна функција $h^{-1} : X \to W$ била бијекција, а како је функција *утапања* $i : W \to Y$, дата са $i(w) = w$ за $w \in W$, *1-1* функција, то је композиција $i \circ h^{-1} : X \to Y$ такође *1-1* функција, што је у контрадикцији са полазном претпоставком да не постоји *1-1* функција X у Y. Дакле, h није *на*. Зато је $\operatorname{ran}(h) \subsetneq X$.

Изаберимо произвољан елемент $x \in X \backslash \operatorname{ran}(h)$. Уведимо ознаке

$$W' = W \cup \{w\}, \quad h' = h \cup \{(w, x)\}.$$

Није тешко видети да $(W', h') \in \mathcal{F}$, као и да је $(W', h') \succ (W, h)$. Међутим, ово се коси са чињеницом да је (W, h) максималан у $\mathcal{F}$.

Дакле, случај $W \subsetneq Y$ није могућ, па, како је $W \subseteq Y$, мора бити $W = Y$. ■

8 Аксиома избора у топологији

За било која два компактна тополошка простора важи да је и њихов тополошки производ компактан тополошки простор, и доказ те чињенице потпуно је независан од аксиоме избора[16]. Даље се ово тврђење лако проширује и на случај коначно много тополошких простора. Међутим, када је реч о произвољном броју тополошких простора, ако бисмо желели исти, очекивани резултат, аксиома избора неминовно мора ,,ући у игру“. Такво тврђење познато је као теорема Тихонова, и у њему се огледа највећи допринос аксиоме избора у топологији.

Пре свега, осврнимо се на појмове базе, предбазе и компактности тополошког простора, као и на појам тополошког производа и пројекције.

Дефиниција 19 *Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор.*

1) *Фамилију $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ зовемо* ***база топологије*** *$\mathcal{T}$ (или* ***база простора*** *X) ако је сваки члан фамилије $\mathcal{T}$ унија чланова фамилије $\mathcal{B}$.*

2) *Фамилију $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ зовемо* ***предбаза топологије*** *$\mathcal{T}$ (или* ***предбаза простора*** *X) ако је фамилија свих коначних пресека фамилије $\mathcal{S}$ база топологије $\mathcal{T}$.*

Дефиниција 20 *Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. Фамилију $\{U_i \,|\, i \in I\}$ која задовољава услове*

(1) $(\forall i \in I)\, U_i \in \mathcal{T}$,

(2) $\bigcup\{U_i \,|\, i \in I\} = X$

зовемо ***отворени покривач*** *простора X.*

Дефиниција 21 *Кажемо да је тополошки простор $(X, \mathcal{T})$* ***компактан*** *ако сваки отворени покривач простора X има коначан потпокривач.*

Дефиниција 22 *Нека су $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ тополошки простори. Кажемо да је функција $f : X \to Y$* ***непрекидна*** *ако је за свако $V \in \mathcal{T}_Y$ испуњено $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}_X$.*

Став 3 *Нека су X и Y тополошки простори и функција $f : X \to Y$ непрекидна и* на. *Ако је простор X компактан, онда је и простор Y компактан.*

Доказ. Претпоставимо да је простор X компактан. Нека је $\mathcal{V} = \{V_i \,|\, i \in I\}$ произвољан отворен покривач простора Y. Како је f непрекидно, то је $\{f^{-1}[V_i] \,|\, i \in I\}$ отворен покривач простора X. Због компактности простора X, овај покривач има коначан потпокривач

$$\{f^{-1}[V_{i_1}], \ldots, f^{-1}[V_{i_n}]\}.$$

Дакле,

$$f^{-1}[V_{i_1}] \cup \ldots \cup f^{-1}[V_{i_n}] = X.$$

Узмемо ли директну слику при функцији f скупова са обе стране једнакости, уз чињеницу да је f *на*, добијамо

$$V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n} = Y.$$

Дакле, добили смо коначан покривач за Y. ■

[16]Видети, на пример, [8], стр. 92.

Дефиниција 23 *Нека је $\{X_i \,|\, i \in I\}$ фамилија непразних скупова.* ***Директни производ*** *ове фамилије је скуп*

$$\prod\{X_i \,|\, i \in I\}$$

чији су елементи пресликавања

$$x : I \to \bigcup\{X_i \,|\, i \in I\},$$

при чему важи

$$(\forall i \in I)\, x(i) \in X_i.$$

За фиксирано $j \in I$ пресликавање

$$p_j : \prod\{X_i \,|\, i \in I\} \to X_j$$

дефинисано са

$$p_j(x) = x(j)$$

називамо ***пројекција на координатни скуп*** *X_j.*

Приметимо да је за свако $j \in I$ функција p_j *на*.

Дефиниција 24 *Нека је $\{(X_i, \mathcal{T}_{X_i}) \,|\, i \in I\}$ фамилија тополошких простора.* ***Тополошки производ*** *ове фамилије је тополошки простор $(X, \mathcal{T})$, где је X директан производ фамилије $\{X_i \,|\, i \in I\}$,*

$$X = \prod\{X_i \,|\, i \in I\},$$

а $\mathcal{T}$ топологија генерисана предбазом коју чине скупови

$$\left\{p_i^{-1}[U] \,|\, i \in I,\, U \in \mathcal{T}_{X_i}\right\},$$

а коју зовемо ***предбаза Тихонова****.*

Следи најављивана теорема, која је добила име по руском математичару Тихонову[17].

Теорема 11 *Нека је $\{X_i \,|\, i \in I\}$ фамилија тополошких простора. Тополошки простор $X = \prod\{X_i \,|\, i \in I\}$ је компактан ако и само ако је за свако $i \in I$ простор X_i компактан.*

Математичари су пронашли више различитих доказа за теорему Тихонова, односно доказивали су нека друга тврђења која би скратила доказ ове теореме. Једно од таквих тврђења, а које користи аксиому избора[18], јесте тзв. лема Александера, чији доказ следи.

Лема 13 *Нека је $(X, \mathcal{T})$ тополошки простор. Уколико постоји предбаза простора X таква да сваки покривач простора X члановима те предбазе има коначан потпокривач, онда је простор X компактан.*

Доказ. Доказаћемо контрапозицију овог тврђења, тј. да ако простор X није компактан, онда за сваку његову предбазу постоји покривач члановима те предбазе који нема коначан потпокривач.

Претпоставимо да X није компактан. Тада постоји отворен покривач простора X који нема коначан потпокривач. Означимо са γ_X колекцију свих таквих покривача $\mathcal{V}$. Тада је

[17] Andrey Nikolayevich Tikhonov, (1906–1993).

[18] Теорема Тихонова, у сваком случају, не може да важи без претпостављања аксиоме избора; чак ни нека њена слабија варијанта, нпр. ако је фамилија тополошких простора пребројива, не важи у самој ZF теорији без аксиоме избора.

γ_X парцијално уређен скуп у односу на инклузију. Уочимо било који ланац $\{\mathcal{V}_i \,|\, i \in I\}$ у γ_X. Нека је

$$\mathfrak{V} = \bigcup \{\mathcal{V}_i \,|\, i \in I\}.$$

Очигледно је $\mathfrak{V}$ покривач за X. Тврдимо да $\mathfrak{V}$ припада колекцији γ_X. Наиме, претпоставимо да то не важи. Тада постоји коначан покривач $\{V_1, \ldots, V_n\}$ покривача $\mathfrak{V}$, па $V_1 \in \mathcal{V}_{i_1}, \ldots, V_n \in \mathcal{V}_{i_n}$ за неке покриваче $\mathcal{V}_{i_1}, \ldots, \mathcal{V}_{i_n}$ из ланца $\{\mathcal{V}_i \,|\, i \in I\}$. Међутим, тада је неки од ових покривача највећи у односу на инклузију, тј. надскуп је свих осталих. Нека је то, на пример, $\mathcal{V}_{i_1}$. Тада скупови $V_1, \ldots, V_n$ представљају коначан потпокривач од $\mathcal{V}_{i_1}$, што је у контрадикцији са његовим припадањем колекцији γ_X.

Дакле, $\mathfrak{V} \in \gamma_X$. Такође, јасно је да је $\mathfrak{V}$ надскуп сваког покривача колекције γ_X, па следи да је $\mathfrak{V}$ горње ограничење ланца $\{\mathcal{V}_i \,|\, i \in I\}$ у γ_X.

Према Цорновој леми, колекција γ_X има максималан елемент $\overline{\mathcal{V}}$. Дакле, за било које $U \in \mathcal{T}$ важи $U \notin \overline{\mathcal{V}}$ ако и само ако $\{U\} \cup \overline{\mathcal{V}}$ има коначан потпокривач.

Нека је

$$\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{T} \,|\, U \notin \overline{\mathcal{V}}\}.$$

Тривијално, $X \in \mathcal{U}$, па је фамилија $\mathcal{U}$ непразна. Доказаћемо да $\mathcal{U}$ има следећа својства:

(а) $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \implies U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$,

(б) $U \in \mathcal{U} \wedge U \subseteq U' \in \mathcal{T} \implies U' \in \mathcal{U}$.

Што се тиче својства (а), претпоставимо да $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$. Тада $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ и покривачи $\{U_1\} \cup \overline{\mathcal{V}}$ и $\{U_2\} \cup \overline{\mathcal{V}}$ имају коначне потпокриваче, тј. постоје $V_{11}, \ldots, V_{1n}$ и $V_{21}, \ldots, V_{2n}$ у $\overline{\mathcal{V}}$ тако да је

$$U_1 \cup V_{11} \cup \ldots \cup V_{1n} = X \quad \wedge \quad U_2 \cup V_{21} \cup \ldots \cup V_{2n} = X.$$

Онда је $(U_1 \cap U_2) \cup \bigcup\limits_{i,j} V_{ij} = X$, па фамилија $\{U_1 \cap U_2\} \cup \overline{\mathcal{V}}$ има коначан потпокривач, па $U_1 \cap U_2 \notin \overline{\mathcal{V}}$, одакле следи $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ (јер $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$).

Својство (б) се лако доказује. Наиме, ако покривач $\{U\} \cup \overline{\mathcal{V}}$ има коначан потпокривач $U, V_1, \ldots, V_n$, онда је $U', V_1, \ldots, V_n$ такође потпокривач, и зато $U' \notin \overline{\mathcal{V}}$, тј. $U' \in \mathcal{U}$.

Нека је $\mathcal{S}$ било која предбаза простора X. Уочимо фамилију

$$\mathcal{U}_{\mathcal{S}} = \{V \,|\, V \in \overline{\mathcal{V}} \wedge V \in \mathcal{S}\}.$$

Докажимо да је $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ покривач простора X. Нека је $x \in X$ произвољан елемент. $\overline{\mathcal{V}}$ је покривач за X, па постоји $V_0 \in \overline{\mathcal{V}}$ тако да $x \in V_0$. Међутим, $\mathcal{S}$ је предбаза за X, па сви коначни пресеци елемената из $\mathcal{S}$ чине базу за X, па се V_0 може представити као унија неких елемената те базе. Зато из $x \in V_0$ следи да постоје $S_1, \ldots S_n \in \mathcal{S}$ тако да

$$x \in S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq V_0.$$

Ако би за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ важило $S_i \in \mathcal{U}$, онда би из (а) следило $S_1 \cap \ldots \cap S_n \in \mathcal{U}$. Тада $S_1, \ldots, S_n \notin \overline{\mathcal{V}}$, па би постојао коначан покривач

$$S_1 \cap \ldots \cap S_n, V_1, \ldots, V_k,$$

где $V_1, \ldots, V_k \in \overline{\mathcal{V}}$. Међутим, како је $S_1 \cap \ldots \cap S_n \subseteq V_0$, то би, због својства (б), $\{V_0, V_1, \ldots, V_k\}$ био коначан потпокривач покривача $\overline{\mathcal{V}}$, што је немогуће. Зато постоји индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ такав да $S_i \notin \mathcal{U}$, па $S_i \in \overline{\mathcal{V}}$, што са $S_i \in \mathcal{S}$ даје $S_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$. Сада, из $x \in S_i \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ следи $x \in \bigcup \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$. Дакле, доказали смо $X \subseteq \bigcup \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$. Обрнута инклузија је тривијална, па је $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ заиста покривач за X.

Како је $\mathcal{U}_{\mathcal{S}} \subseteq \overline{\mathcal{V}}$, то $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ нема коначан потпокривач. Дакле, $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ је покривач простора X елементима предбазе $\mathcal{S}$ који нема коначан потпокривач, а $\mathcal{S}$ смо бирали произвољно. Овиме је тврђење у потпуности доказано. ■

Сада можемо доказати теорему Тихонова.

$\Longrightarrow$:

Претпоставимо да је $\prod\{X_i \,|\, i \in I\}$ компактан. Тада је за свако $j \in I$ скуп

$$X_j = p_j\Big[\prod\{X_i \,|\, i \in I\}\Big],$$

према ставу 3, компактан, јер је p_j непрекидно и *на* пресликавање.

$\Longleftarrow$:

Претпоставимо да је за свако $i \in I$ простор X_i компактан. Да бисмо применили претходну лему, треба да нађемо предбазу простора $\prod\{X_i \,|\, i \in I\}$ чији сваки покривач има коначан потпокривач. Посматрајмо произвољан покривач чији чланови припадају предбази Тихонова:

$$\mathcal{U} = \big\{p_i^{-1}[U_{(i,\eta)}] \,|\, i \in I_0 \subseteq I,\, \eta \in H(i)\big\}.$$

Доказаћемо да је за бар један индекс i испуњено

$$\bigcup\{U_{(i,\eta)} \,|\, \eta \in H(i)\} = X_i\,.$$

Наиме, претпоставимо да ово не важи. Тада за свако $i \in I$ постоји x_i тако да

$$x_i \notin \bigcup\{U_{(i,\eta)} \,|\, \eta \in H(i)\}.$$

Међутим, онда елемент $x_0 \in \prod\{X_i \,|\, i \in I\}$, $(\forall i \in I)\, x_0(i) = x_i$, не припада ниједном члану покривача $\mathcal{U}$, што није могуће.

Нека је $i_0 \in I$ тај индекс за који важи

$$\bigcup\{U_{(i_0,\eta)} \,|\, \eta \in H(i_0)\} = X_{i_0}.$$

Простор X_{i_0} је компактан, па покривач $\{U_{(i_0,\eta)} \,|\, \eta \in H(i_0)\}$ има коначан потпокривач

$$U_{(i_0,\eta_1)}, U_{(i_0,\eta_2)}, \ldots, U_{(i_0,\eta_k)},$$

па је

$$\prod\{X_i \,|\, i \in I\} = \bigcup\big\{p_i^{-1}[U_{(i_0,\eta_j)}] \,|\, j \in \{1, \ldots, k\}\big\}.$$

Дакле, покривач $\mathcal{U}$ има коначан потпокривач, па, према леми Александера, простор $\prod\{X_i \,|\, i \in I\}$ је компактан.

Аргументи против аксиоме избора

И поред тога што је аксиома избора донела математици врло природне и очекиване резултате, нису све њене последице биле добродошле. У наставку следе озбиљни аргументи због којих су се неки математичари противили коришћењу ове аксиоме.

9 Цермелов принцип доброг уређења

Занимљиво је да се тек у каснијој фази развијања ZF теорије поставило питање који се скупови могу добро уредити. На питање да ли се сваки скуп може добро уредити, Кантор[19] је 1883. године одговорио потврдно, аргументујући то као *темељни закон мишљења*[20]. Иако је овај одговор наишао на неодобравање међу његовим савременицима, Кантор је био прилично сигуран да је у праву. Међутим, десетак година касније он је сâм покушавао да нађе доказ ове тврдње. Године 1904. појавио се математичар Кениг[21] са доказом да тврђење о коме је реч није тачно. Он је, наиме, пред математичарима из разних земаља изнео доказ да не постоји релација уређења која би добро уредила скуп $\mathbb{R}$. Међутим, на (његову) жалост, убрзо затим установило се да је овај доказ био фаличан. Тиме је питање остало отворено. Решење је, најзад, нашао Цермело, доказавши да се одговор *да* или *не* не може дати, већ се тврђење о коме је реч може или прихватити као тачно или одбацити. Тачније, Цермело је доказао да је ово тврђење управо еквивалентно аксиоми избора.

Цермелов принцип доброг уређења (ПДУ). *За сваки скуп X постоји добро уређење $\leqslant$ на X.*

Врло лако се види да ПДУ повлачи аксиому избора (приметимо да је пример 4 управо специјалан случај за то). Наиме, нека је X произвољна непразна фамилија непразних скупова. Како претпостављамо да за сваки скуп постоји уређење које је на том скупу добро, постоји и за скуп $\bigcup X$: нека је то $\preccurlyeq$. Дефинишимо функцију $f : X \to \bigcup X$ са

$$f(x) \text{ је } \preccurlyeq\text{-најмањи елемент од } x.$$

Очигледно је f функција избора за фамилију X.

Докажимо сада ПДУ под претпоставком аксиоме избора. Нека је X произвољан скуп. Дефинишимо фамилију $\mathcal{F}$ са

$$\mathcal{F} = \big\{(Y, \leqslant) \mid Y \subseteq X \ \wedge \ \leqslant \ \textit{је добро уређење на } Y\big\}.$$

Приметимо да је фамилија $\mathcal{F}$ непразна, јер се сваки једночлан подскуп од X може, очигледно, добро уредити. Уочимо на $\mathcal{F}$ парцијално уређење дефинисано на следећи начин:

$$(Y_1, \leqslant_1) \preccurlyeq (Y_2, \leqslant_2) \ \textit{акко}\ Y_1 \subseteq Y_2 \ \textit{и} \leqslant_2 \cap Y_1^2 = \leqslant_1 \ \textit{и}\ (Y_1, \leqslant_1) \ \textit{је почетни комад од}\ (Y_2, \leqslant_2).$$

[19] Georg Cantor (1845–1918), немачки математичар.
[20] *fundamental law of thought*, енг.
[21] Julius König (1849–1913), немачки математичар.

Нека је $\mathcal{C} = \{(Y_i, \leqslant_i) \mid i \in I\}$ било који ланац у $\mathcal{F}$. Означимо

$$Y := \bigcup \{ Y_i \mid i \in I \}, \quad \leqslant := \bigcup \{ \leqslant_i \mid i \in I \}.$$

Докажимо да $(Y, \leqslant)$ припада фамилији $\mathcal{F}$.

Најпре, лако се види да је $\leqslant$ линеарно уређење на Y: ако $y_1, y_2 \in Y$, онда постоје $i, j \in I$ тако да $y_1 \in Y_i, y_2 \in Y_j$; међутим, $(Y_i, \leqslant_i)$ и $(Y_j, \leqslant_j)$ су елементи ланца, па је један садржан у другом, на пример, $Y_i \subseteq Y_j$; међутим, уређење $\leqslant_j$ је линеарно на Y_j (јер је добро), па су y_i и y_j $\leqslant_j$-упоредиви; како је $\leqslant_j \subseteq \leqslant$, то су y_i и y_j $\leqslant$-упоредиви, па је $\leqslant$ заиста линеарно уређење на Y.

Дакле, има смисла проверавати да ли је ово уређење добро. Нека је $S \subseteq Y$ произвољан непразан скуп и $a \in S$ било који елемент. Ако је a најмањи елемент у S, доказ је завршен. Претпоставимо, онда, да постоји бар један елемент у S који је мањи од a, тј. да је скуп S' свих елемената у S који су мањи од a непразан. Како $a \in S \subseteq Y$, то постоји $i \in I$ тако да $a \in Y_i$. Доказаћемо да је $S' \subseteq Y_i$.

Нека је $x \in S'$ произвољно. Тада $x \in S$ и $x \leqslant a$. Ако $x \in Y_i$, доказ је завршен. Претпоставимо, онда, $x \notin Y_i$. Из $x \in S$ следи да постоји $j \in I$ тако да $x \in Y_j$. Тада $Y_j \nsubseteq Y_i$, па, како су $(Y_i, \leqslant_i)$ и $(Y_j, \leqslant_j)$ елементи ланца, мора бити $Y_i \subseteq Y_j$. Онда и $a \in Y_j$, па из $x \leqslant a$ следи $x \leqslant_j a$. Како је $(Y_i, \leqslant_i)$ почетни комад од $(Y_j, \leqslant_j)$ и $a \in Y_i$, мора бити $x \in Y_i$, што је контрадикција. Дакле, скуп S' свих елемената скупа S мањих од a јесте један подскуп од Y_i. Како је $\leqslant_i$ добро уређење на Y_i, то S' има најмањи елемент. Он је, очигледно, најмањи елемент скупа S.

Дакле, $\leqslant$ је добро уређење на Y, па $(Y, \leqslant) \in \mathcal{F}$. Лако се види да је Y горње ограничење за ланац $\mathcal{C}$ у $\mathcal{F}$. Међутим, како је $\mathcal{C}$ произвољан ланац у $\mathcal{F}$, закључујемо да сваки ланац у $\mathcal{F}$ има горње ограничење. Како важи аксиома избора, важи и Цорнова лема, па фамилија $\mathcal{F}$ има максималан елемент. Нека је то $(M, \leqslant)$. Ако је $M = X$, доказ је завршен, тј. скуп X је добро уређен са $\leqslant$. Претпоставимо, онда, $M \subsetneq X$. Тада можемо изабрати елемент $x \in X \backslash M$. Нека је $M' = M \cup \{x\}$. Уочимо уређење $\leqslant'$ на M' које се слаже са $\leqslant$ на M и у коме је x највећи елемент. Тада је $(M', \leqslant') \in \mathcal{F}$, тј. добили смо у $\mathcal{F}$ строго већи елемент од M (у односу на $\preccurlyeq$), што се коси са максималношћу M у $\mathcal{F}$.

Цермелов принцип доброг уређења можда најбоље илуструје тежину аксиоме избора. Он јасно показује ону неконструктивност и неефективност који карактеришу ову аксиому: за сваки скуп *постоји* добро уређење. Постоји, али како је оно дато? Примера ради, може ли се установити како би изгледало добро уређење скупа $\mathbb{R}$? Због оваквих примера конструктивисти одбацују ПДУ, односно саму аксиому избора.

10 Проблем мере

У анализи се појавила природна потреба да се појам дужине интервала уопшти на неке компликованије подскупове скупа $\mathbb{R}$. Идеално би било наћи функцију $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ са следећим својствима:

(1) $\mu([a, b]) = b - a$ за све $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$,

(2) $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu(\mathbb{R}) = +\infty$,

(3) Ако су $A_1, A_2, A_3 \dots$ међусобно дисјунктни подскупови скупа $\mathbb{R}$, онда је

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(4) Ако су $x \in \mathbb{R}$ и $A \subseteq \mathbb{R}$, и ако означимо $A+x = \{a+x \mid a \in A\}$, онда је $\mu(A+x) = \mu(A)$.

Приметимо да из својстава (2) и (3) следи својство

(5) Ако је $A \subseteq B$, онда је $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Наиме, скуп B можемо записати као пребројиву унију међусобно дисјунктних скупова:

$$B = A \cup (B \backslash A) \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \dots .$$

Сада, примењујући својства (2) и (3), имамо

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A) + 0 + 0 + \dots ,$$

а како је $\mu(B \backslash A) \geqslant 0$, то је $\mu(B) \geqslant \mu(A)$.

На жалост, из аксиоме избора следи да функција μ са наведеним својствима не постоји. То ћемо и доказати.[22]

Нека је $A = [0, 1]$. Дефинишимо релацију $\sim$ на A на следећи начин:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}\,.$$

Лако се види да је $\sim$ релација еквиваленције: $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$; ако је $x - y \in \mathbb{Q}$, онда је $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q}$; ако је $x - y \in \mathbb{Q}$ и $y - z \in \mathbb{Q}$, онда је $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q}$.

Класа елемента $x \in A$ јесте скуп $[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}$, па је количнички скуп $A/_\sim = \{[x]_\sim \mid x \in A\}$. Ово је и једна партиција еквиваленције $\sim$, па, према теореми 1, постоји трансверзала B количничког скупа $A/_\sim$. Дакле, скуп B садржи по тачно једног представника сваке класе еквиваленције.

Ако су $x, y \in A$, онда је $x - y \in [-1, 1]$. Скуп $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ је пребројив, па га можемо записати у облику

$$\mathbb{Q} \cap [-1, 1] = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Приметимо да су за $m \neq n$ скупови $B + r_m$ и $B + r_n$ међусобно дисјунктни. Наиме, ако то не би важило, онда би постојао неки елемент $x \in (B + r_m) \cap (B + r_n)$. Међутим,

[22] За овај доказ заслужан је италијански математичар Витали (Giuseppe Vitali (1875–1932)), док је амерички математичар Соловеј (Robert Solovay (1938)) доказао да без аксиоме избора доказ не би био изводљив.

то значи да постоје елементи $b_1, b_2 \in B$ такви да важи $x = b_1 + r_m$, односно $x = b_2 + r_n$. Одатле следи да је $b_1 + r_m = b_2 + r_n$, тј. $b_1 - b_2 = r_n - r_m$. Међутим, како је $r_n - r_m \in \mathbb{Q}$, то $b_1 \sim b_2$, што са чињеницом да $b_1, b_2 \in B$ даје $b_1 = b_2$, одакле и $r_m = r_n$. Међутим, то не може важити, јер смо претпоставили да $m \neq n$.

Затим, доказаћемо да $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B + r_n) \supseteq A$. Нека је $x \in A$ произвољан елемент. Тада постоји $b \in B$ тако да $b \sim x$. Дакле, $x - b \in \mathbb{Q}$. Прецизније, $x - b \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Дакле, постоји $n \in \mathbb{N}$ тако да је $x - b = r_n$, тј. $x = b + r_n \in B + r_n$. Добили смо $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B + r_n)$.

Такође, тривијално, важи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(B + r_n) \subseteq [-1, 2]$.

Дакле, доказали смо

$$[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(B + r_n) \subseteq [-1, 2].$$

Из својства (5) функције μ следи

$$\mu([0, 1]) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B + r_n)\right) \leqslant \mu([-1, 2]),$$

одакле, примењујући својство (1) и (3), добијамо

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B + r_n) \leqslant 3,$$

односно, примењујући својство (4), имамо

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B) \leqslant 3.$$

Лева неједнакост гарантује да је $\mu(B) \neq 0$, тј. $\mu(B) > 0$. Зато ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(B)$ дивергира, па десна неједнакост не може да важи.

11 Адитивне функције

Дефиниција 25 *Кажемо да је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **адитивна** ако за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи*

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Лако се покаже да је свака реална адитивна функција реалне променљиве $\mathbb{Q}$-линеарна, тј. облика $f(x) = qx$ за неки рационалан број q. Наиме, $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, одакле следи да је $f(0) = 0$. Затим, за $x \in \mathbb{R}$ произвољно имамо $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, одакле следи да је $f(-x) = -f(x)$. Математичком индукцијом по $n \in \mathbb{N}$ лако се покаже да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи $f(nx) = nf(x)$. Сада, због непарности функције f, важи $f(nx) = nf(x)$ за свако $n \in \mathbb{Z}$. Даље, нека је $q \in \mathbb{Q}$. Можемо изабрати $n \in \mathbb{N}$ тако да је $nq \in \mathbb{Z}$. Тада за све $x \in \mathbb{R}$ важи

$$n \cdot f(qx) = f(n \cdot qx) = f(nq \cdot x) = n \cdot qf(x),$$

одакле следи $f(qx) = qf(x)$, што је и требало доказати.

Уколико ставимо $f(1) =: a$, имамо $f(q) = f(q \cdot 1) = q \cdot f(1) = q \cdot a$, тј. за свако $q \in \mathbb{Q}$ важи

$$f(q) = aq.$$

Ако бисмо знали да је f непрекидна, онда би из чињенице да је $\mathbb{Q}$ свуда густ у $\mathbb{R}$ следило $f(x) = ax$ за све $x \in \mathbb{R}$. Међутим, аксиома избора повлачи постојање адитивних функција за које ова једнакост не важи. (Штавише, такве функције су далеко бројније од оних које задовољавају ову једнакост, тј. које су $\mathbb{R}$-линеарне.) У наставку ћемо ову чињеницу и доказати.

За почетак, како је $\mathbb{Q}$ потпоље поља $\mathbb{R}$, можемо $\mathbb{R}$ посматрати као векторски простор над пољем $\mathbb{Q}$. Овај векторски простор је бесконачнодимензионалан. Заиста, ако би овај простор био коначнодимензионалан, онда би он имао бар једну коначну генератрису, тј. постојао би коначан подскуп $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ такав да за свако $x \in \mathbb{R}$ постоје скалари $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ такви да

$$x = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n.$$

Одавде следи да је функција $\phi : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{R}$, дефинисана са

$$\phi(q_1, \ldots q_n) = q_1x_1 + \ldots + q_nx_n,$$

сурјекција, тј. $|\mathbb{Q}^n| \geqslant |\mathbb{R}|$, што је немогуће, јер је $\mathbb{Q}^n$ пребројив, а $\mathbb{R}$ непребројив. Дакле, векторски простор $\mathbb{R}$ над пољем $\mathbb{Q}$ не може бити коначне димензије.

Видели смо да аксиома избора гарантује постојање базе за сваки векторски простор, па зато и овај векторски простор има бар једну базу. Сваку базу простора $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ зовемо и **Хамелова база**. Из претходног следи да свака Хамелова база има бар $\aleph_0$ елемената (заправо, она има тачно $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ елемената, што овде нећемо доказивати, јер није од суштинске важности за наставак текста).

Теорема 12 *Постоји адитивна функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да је $f \neq f_a$ за све $a \in \mathbb{R}$, где је $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax$.*

Доказ. Нека је $\mathcal{H}$ Хамелова база. Изаберимо и фиксирајмо $\overline{x} \in \mathcal{H}$. Дефинишимо функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ са

$$f(x) := \begin{cases} q_i, & \text{ако је } x = q_1x_1 + \ldots + q_ix_i + \ldots + q_nx_n \text{ и } x_i = \overline{x}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лако се види да је f добро дефинисана (због јединствености репрезентације) и да је адитивна. Знамо да база $\mathcal{H}$ садржи бесконачно много вектора, као и да нула-вектор не може бити у $\mathcal{H}$. Јасно је да је $f(\overline{x}) = 1$, и да за свако $\overline{\overline{x}} \in \mathcal{H}$, $\overline{\overline{x}} \neq \overline{x}$, важи $f(\overline{\overline{x}}) = 0$ (јер су вектори $\overline{x}$ и $\overline{\overline{x}}$ линеарно независни).

Претпоставимо да постоји $a \in \mathbb{R}$ такво да је $f = f_a$. Тада је $f(\overline{x}) = 1 = a \cdot \overline{x}$, из чега следи да $a \neq 0$. С друге стране, за $\overline{\overline{x}} \in \mathcal{H}$, $\overline{\overline{x}} \neq \overline{x}$, важи $f(\overline{\overline{x}}) = 0 = a \cdot \overline{\overline{x}}$, па, како $\overline{\overline{x}}$ не може бити нула-вектор, мора бити $a = 0$. Контрадикција. ■

Аксиома избора, дакле, може довести до оваквих ,,непријатних" резултата. У некој литератури се ове адитивне функције које нису непрекидне називају *ружне*[23] функције. Такво име нису добиле случајно; може се доказати да је график сваке ружне функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ свуда густ у $\mathbb{R}^2$, као и да ружне функције нису Лебег-мерљиве.[24]

[23] *ugly*, енг.

[24] Видети, нпр, [2], стр. 119.

12 Парадокс Банаха и Тарског

Резултат о коме ће у овом одељку бити речи могло би се рећи да представља најизненађујући резултат теоријске математике. Он тврди да за било која два ограничена подскупа $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ простора $\mathbb{R}^3$ чија је унутрашњост непразна важи да се скуп $\mathcal{A}$ може разложити на коначно много делова који се затим могу прегруписати (крутим померањима) тако да оформе тачно скуп $\mathcal{B}$.

Идеја о тзв. *парадоксалним разлагањима* почела је на самом почетку XX века са формалним увођењем појма мере од стране Лебега[25]. Витали је свега неколико година након тога пронашао подскуп скупа $\mathbb{R}$ који није Лебег-мерљив, и тиме дао први пример парадоксалног разлагања. После десетак година немачки математичар Хауздорф[26] доказао је један прилично невероватан резултат у вези са парадоксалним разлагањем сфере (који ће у наставку бити приказан), показавши тиме да немерљиви скупови не постоје само у $\mathbb{R}$, већ и у $\mathbb{R}^3$. Недуго након тога пољски математичари Банах и Тарски[27] надовезали су се на Хауздорфов парадокс и доказали да парадоксално разлагање у $\mathbb{R}^3$ постоји и за лопту, а затим и да важи још општије, тј. управо тврђење наведено у другој реченици овог одељка.

За доказ најпре Хауздорфовог парадокса, а затим и парадокса Банаха и Тарског, биће нам потребан појам *слободне групе*.

Дефиниција 26 *За групу $(G, *)$ кажемо да је* ***слободна*** *ако постоји скуп $X \subseteq G$ такав да се сваки елемент скупа G може написати у облику $*$-производа коначно много елемената скупа X и њихових инверза. Скуп X зовемо* ***генеришући скуп****, а његове елементе* ***генераторима групе*** *G.*

За наставак приче размотрићемо слободну групу са два генератора и нека њена својства.

Нека је $\mathfrak{F}(x, y)$ слободна група са операцијом надовезивања. Дакле, x и y су генератори групе $\mathfrak{F}(x, y)$, па елементи групе $\mathfrak{F}(x, y)$ су све могуће ниске састављене од симбола x, x^{-1}, y, y^{-1}, при чему важи

$$x^{-1}x = xx^{-1} = y^{-1}y = yy^{-1} = 1, \tag{6}$$

где је 1 празна ниска. Притом, приметимо да је свака ниска еквивалентна (у односу на релације (6)) тачно једној *редукованој ниски*, тј. ниски у којој су изостављени сви парови који су једнаки 1. Зато, ради једноставности, претпоставићемо да се група $\mathfrak{F}(x, y)$ састоји само из редукованих ниски.

Означимо са $\mathfrak{W}(i)$ скуп свих елемената групе $\mathfrak{F}(x, y)$ који почињу симболом i, где је $i \in \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$. Јасно је да тада скупови $\{1\}, \mathfrak{W}(x), \mathfrak{W}(x^{-1}), \mathfrak{W}(y)$ и $\mathfrak{W}(y^{-1})$ чине једну партицију од $\mathfrak{F}(x, y)$, тј. да важи

$$\mathfrak{F}(x, y) = \{1\} \sqcup \mathfrak{W}(x) \sqcup \mathfrak{W}(x^{-1}) \sqcup \mathfrak{W}(y) \sqcup \mathfrak{W}(y^{-1}). \tag{7}$$

Нека је $x^{-1}\mathfrak{W}(x) = \{x^{-1}\mathfrak{v} \mid \mathfrak{v} \in \mathfrak{W}(x)\}$. Доказаћемо да је

$$x^{-1}\mathfrak{W}(x) = \{1\} \sqcup \mathfrak{W}(x) \sqcup \mathfrak{W}(y) \sqcup \mathfrak{W}(y^{-1}).$$

[25] Henri Lebesgue (1875–1941), француски математичар.
[26] Felix Hausdorff (1868–1942).
[27] Alfred Tarski (1901–1983).

$\subseteq$: Нека је $\mathfrak{v} \in x^{-1}\mathfrak{W}(x)$ произвољан елемент. Како сваки елемент скупа $\mathfrak{W}(x)$ почиње са x, он не може почињати са xx^{-1} (јер су у $\mathfrak{F}(x,y)$ све ниске редуковане), па зато $\mathfrak{v}$ не може почињати са x^{-1}. Дакле, скупови $\mathfrak{W}(x^{-1})$ и $x^{-1}\mathfrak{W}(x)$ су дисјунктни, па из (7) следи

$$x^{-1}\mathfrak{W}(x) \subseteq \{1\} \sqcup \mathfrak{W}(x) \sqcup \mathfrak{W}(y) \sqcup \mathfrak{W}(y^{-1}). \tag{8}$$

$\supseteq$: Нека је $\mathfrak{v} \in \{1\} \sqcup \mathfrak{W}(x) \sqcup \mathfrak{W}(y) \sqcup \mathfrak{W}(y^{-1})$ произвољан елемент. Тада или $\mathfrak{v} \in \{1\}$, или $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}(x)$, или $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}(y)$, или $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}(y^{-1})$. Претпоставимо, на пример, $\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}(y)$ (за остале случајеве доказ је аналоган). Тада $\mathfrak{v}$ почиње са y, па $x\mathfrak{v}$ почиње са x, тј. $x\mathfrak{v} \in \mathfrak{W}(x)$. Отуда $\mathfrak{v} = x^{-1}x\mathfrak{v} \in x^{-1}\mathfrak{W}(x)$.

Дакле,

$$x^{-1}\mathfrak{W}(x) \supseteq \{1\} \sqcup \mathfrak{W}(x) \sqcup \mathfrak{W}(y) \sqcup \mathfrak{W}(y^{-1}). \tag{9}$$

Из релација (8) и (9) следи тражена једнакост.

Добијени резултат заједно са (7) даје доказ следећег тврђења.

Став 4 $\mathfrak{F}(x,y) = x^{-1}\mathfrak{W}(x) \sqcup \mathfrak{W}(x^{-1})$ *и* $\mathfrak{F}(x,y) = y^{-1}\mathfrak{W}(y) \sqcup \mathfrak{W}(y^{-1})$. ■

Приметимо да смо пошли од петочлане партиције групе $\mathfrak{F}(x,y)$; два члана те партиције смо променили тако што смо једном слева додали x^{-1}, а другом y^{-1}, и тиме смо добили две групе $\mathfrak{F}(x,y)$. Видећемо да се на овом запажању темељи доказ Хауздорфовог парадокса, а самим тим и парадокса Банаха и Тарског.

Следи још једно запажање које ће нам бити потребно.

Став 5 *Скуп $\mathfrak{F}(x,y)$ је пребројив.*

Доказ. Нека је *дужина ниске* број симбола који ту ниску чине. Означимо са $\mathfrak{F}_n$ скуп свих ниски из $\mathfrak{F}(x,y)$ које су дужине n. Очигледно је тада

$$\mathfrak{F}(x,y) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{F}_n.$$

Јасно је да је за свако $n \in \mathbb{N}$ скуп $\mathfrak{F}_n$ коначан. Значи, $\mathfrak{F}(x,y)$ је пребројива унија коначних скупова, дакле, пребројив скуп. ■

Пре свега, доказаћемо већ поменути Хауздорфов парадокс, који се тиче јединичне сфере.

Означимо са $\mathbf{S}^2$ јединичну сферу у $\mathbb{R}^3$, тј.

$$\mathbf{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Теорема 13 *(Хауздорфов парадокс) Постоји пребројив скуп $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{S}^2$ такав да се $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ може поделити на 5 делова који се, затим, могу заротирати и дати две копије од $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$.*

Интересоваће нас, дакле, ротације јединичне сфере $\mathbf{S}^2$. Посматрајмо групу SO_3 ротација простора $\mathbb{R}^3$ око координатног почетка. Покушаћемо да нађемо неку слободну подгрупу ове групе са два генератора.

Најпре, групу SO_3 можемо поистоветити са групом $SO(3,\mathbb{R})$ свих ортогоналних матрица реда 3 чија је детерминанта једнака 1. Посматраћемо природно дејство групе SO_3

на скуп $\mathbf{S}^2$: $\rho \cdot p = \rho(p)$ је слика тачке p при ротацији ρ, где $\rho \in SO_3$, $p \in \mathbf{S}^2$. Конкретно, ако је ρ дато својом матрицом A, а тачка p има координате (x, y, z), онда је

$$\rho(p) = A \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Нека је $\varphi \in SO_3$ ротација у позитивном смеру око x-осе за угао $\arccos \frac{1}{3}$, а $\psi \in SO_3$ ротација у позитивном смеру око z-осе за исти угао. Доказаћемо да φ и ψ генеришу слободну подгрупу групе SO_3.

Лако се види да су матрице ротација $\varphi, \varphi^{-1}, \psi$ и ψ^{-1} (у односу на стандардну базу простора $\mathbb{R}^3$) дате са

$$[\varphi^{\pm 1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mp 2\sqrt{2} \\ 0 & \pm 2\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$[\psi^{\pm 1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \mp 2\sqrt{2} & 0 \\ \pm 2\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Став 6 *$\mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ је слободна подгрупа групе SO_3.*

Доказ. Најпре ћемо доказати да ниједна ротација која представља неку композицију ротација $\varphi, \varphi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$, а различита од 1, није идентичка ротација. Нека је ρ било која ротација која представља композицију ове четири ротације. Посматрајмо тачку $(0, 1, 0)$. Доказаћемо, најпре, да ако је ρ дужине $n \geq 0$, онда је $\rho(0, 1, 0)$ облика

$$\frac{1}{3^n}(a\sqrt{2}, b, c\sqrt{2}) \tag{10}$$

за неке целе бројеве a, b, c. Доказ ћемо извести математичком индукцијом по n.

Нека је $n = 0$. Тада је ρ ротација дужине 0, тј. $\rho = 1$, па је $\rho(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$, што има тражени облик. Претпоставимо, затим, да је свака ротација ρ дужине $k < n$ облика $\frac{1}{3^k}(a\sqrt{2}, b, c\sqrt{2})$ за неке целе бројеве a, b, c. Нека је ρ ротација дужине n. Тада ρ можемо видети у једном од следећа 4 облика:

$$\varphi\rho', \quad \varphi^{-1}\rho', \quad \psi\rho', \quad \psi^{-1}\rho',$$

где је ρ' нека композиција ротација $\varphi, \varphi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$ дужине $n-1$. Тада, на основу индуктивне хипотезе, за неке целе бројеве a, b, c важи

$$\rho'(0, 1, 0) = \frac{1}{3^{n-1}}(a\sqrt{2}, b, c\sqrt{2}).$$

Тада је $\rho(0, 1, 0)$ једна од следеће 4 тачке:

$$\begin{aligned} \varphi\rho'(0, 1, 0) = \varphi\Big(\frac{1}{3^{n-1}}(a\sqrt{2}, b, c\sqrt{2})\Big) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a\sqrt{2} \\ b \\ c\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3^n}(3a\sqrt{2}, b - 4c, (2b + c)\sqrt{2}), \end{aligned}$$

$$\varphi^{-1}\rho'(0,1,0)=\varphi^{-1}\Big(\frac{1}{3^{n-1}}(a\sqrt{2},b,c\sqrt{2})\Big)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2\sqrt{2}}{3}\\0&-\frac{2\sqrt{2}}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\sqrt{2}\\b\\c\sqrt{2}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3^n}(3a\sqrt{2},b+4c,(-2b+c)\sqrt{2}),$$

$$\psi\rho'(0,1,0)=\psi\Big(\frac{1}{3^{n-1}}(a\sqrt{2},b,c\sqrt{2})\Big)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\begin{bmatrix}1&-2\sqrt{2}&0\\2\sqrt{2}&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\sqrt{2}\\b\\c\sqrt{2}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3^n}((a-2b)\sqrt{2},4a+b,3c\sqrt{2}),$$

$$\psi^{-1}\rho'(0,1,0)=\psi^{-1}\Big(\frac{1}{3^{n-1}}(a\sqrt{2},b,c\sqrt{2})\Big)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}\begin{bmatrix}1&2\sqrt{2}&0\\-2\sqrt{2}&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\sqrt{2}\\b\\c\sqrt{2}\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{3^n}((a+2b)\sqrt{2},-4a+b,3c\sqrt{2}).$$

Примећујемо да је свака од добијене 4 тачке траженог облика. Тиме је доказ индукцијом завршен.

Претпоставимо да је $\rho(0,1,0)=(0,1,0)$, за неку ротацију ρ која није идентичка, а која је композиција n ротација $\varphi,\varphi^{-1},\psi,\psi^{-1}$. Тада је $\frac{1}{3^n}(a\sqrt{2},b,c\sqrt{2})=(0,1,0)$, одакле закључујемо да мора бити $a=c=0$ и $b=3^n$. Специјално, како је $\rho\neq 1$, то је $n\geqslant 1$ и

$$a\equiv b\equiv c\equiv 0 \pmod 3. \tag{11}$$

Међутим, доказаћемо да ово не може да важи.

За произвољну ротацију $\rho\in\mathfrak{F}(\varphi,\psi)$ нека је $N(\rho)$ уређена тројка (a,b,c), где су a,b,c из (10) и $a,b,c\in\mathbb{Z}_3$. Циљ нам је да докажемо да је $N(\rho)\neq(0,0,0)$ за било коју ротацију ρ која није идентичка.

Како је $N(\rho)=(a,b,c)$, из претходног рачуна добијамо

$$\begin{aligned}N(\varphi\rho)&=(3a,b-4c,2b+c)\quad=(0,b-c,c-b),\\N(\varphi^{-1}\rho)&=(3a,b+4c,-2b+c)=(0,b+c,b+c),\\N(\psi\rho)&=(a-2b,4a+b,3c)\quad=(a+b,a+b,0),\\N(\psi^{-1}\rho)&=(a+2b,-4a+b,3c)=(a-b,b-a,0).\end{aligned}$$

Даље, $N(\varphi^2\rho)=N(\varphi(\varphi\rho))=(0,(b-c)-(c-b),(c-b)-(b-c))=(0,2b-2c,2c-2b)=(0,c-b,b-c)$. Затим, $N(\varphi^3\rho)=(0,(c-b)-(b-c),(b-c)-(c-b))=(0,b-c,c-b)$, и тако даље. Видимо да $N(\varphi^n\rho)$ наизменично узима вредности $(0,c-b,b-c)$ и $(0,b-c,c-b)$. На аналоган начин налазимо $N(\varphi^{-n}\rho),N(\psi^n\rho)$ и $N(\psi^{-n}\rho)$ за било које $n\in\mathbb{N}$ и за њих увиђамо сличну законитост. Дакле,

$$N(\varphi^n\rho)=\begin{cases}(0,b-c,c-b), & n \text{ непарно},\\(0,c-b,b-c), & n \text{ парно};\end{cases}$$
$$N(\varphi^{-n}\rho)=\begin{cases}(0,b+c,b+c), & n \text{ непарно},\\(0,-b-c,-b-c), & n \text{ парно};\end{cases}$$
$$N(\psi^n\rho)=\begin{cases}(a+b,a+b,0), & n \text{ непарно},\\(-a-b,-a-b,0), & n \text{ парно};\end{cases}$$
$$N(\psi^{-n}\rho)=\begin{cases}(a-b,b-a,0), & n \text{ непарно},\\(b-a,a-b,0), & n \text{ парно}.\end{cases}$$

Нека је ρ било која неидентичка ротација добијена као композиција ротација $\varphi, \varphi^{-1}, \psi$ и ψ^{-1}. Претпоставимо, најпре, да се ρ завршава степеном од φ, тј. да је облика

$$\ldots \varphi^{n_3}\psi^{n_2}\varphi^{n_1},$$

$n_i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, i \in \{1,2,3,\ldots\}$. Тада је $N(\varphi^{n_1}) = N(\varphi^{n_1} \cdot 1)$ (1 је идентичка ротација), $N(1) = (0,1,0)$, па је

$$N(\varphi^{n_1}) \in \{(0,1,2),(0,2,1),(0,1,1),(0,2,2)\}.$$

Затим се лако провери да је

$$N(\psi^{n_2}\varphi^{n_1}) \in \{(1,1,0),(2,2,0),(0,1,1),(0,2,2)\}.$$

Даље,

$$N(\varphi^{n_3}\psi^{n_2}\varphi^{n_1}) \in \{(0,1,2),(0,2,1),(0,1,1),(0,2,2)\},$$

исто као $N(\varphi^{n_1})$, и тако даље. Дакле, колика год да је дужина од ρ, свакако неће важити $N(\rho) = (0,0,0)$.

Слично, ако се ρ завршава степеном од ψ, тј. $\rho = \ldots \psi^{n_3}\varphi^{n_2}\psi^{n_1}$, имамо

$$\begin{aligned} N(\psi^{n_1}) &\in \{(1,1,0),(2,2,0),(2,1,0),(1,2,0)\}, \\ N(\varphi^{n_2}\psi^{n_1}) &\in \{(0,1,2),(0,2,1),(0,1,1),(0,2,2)\}, \\ N(\psi^{n_3}\varphi^{n_2}\psi^{n_1}) &\in \{(1,1,0),(2,2,0),(2,1,0),(1,2,0)\}, \end{aligned}$$

и тако даље. Дакле, никада неће бити $N(\rho) = (0,0,0)$.

Закључујемо да не може бити $\rho(0,1,0) = (0,1,0)$ ни за једну ротацију која није дужине 0, тј. која није идентичка ротација. ■

Сада, нека група $\mathfrak{F}(\varphi,\psi)$ дејствује на скуп $\mathbf{S}^2$. Орбите при том дејству чине једну партицију од $\mathbf{S}^2$. Нека је $\mathcal{M}_0$ трансверзала те партиције. Тада је

$$\mathbf{S}^2 = \mathfrak{F}(\varphi,\psi)\mathcal{M}_0 = \{\rho(p) \mid \rho \in \mathfrak{F}(\varphi,\psi),\ p \in \mathcal{M}_0\}. \tag{12}$$

Затим, како је

$$\mathfrak{F}(\varphi,\psi) = \{1\} \sqcup \mathfrak{W}(\varphi) \sqcup \mathfrak{W}(\varphi^{-1}) \sqcup \mathfrak{W}(\psi) \sqcup \mathfrak{W}(\psi^{-1}),$$

то са (12) даје

$$\mathbf{S}^2 = \mathcal{M}_0 \cup \mathfrak{W}(\varphi)\mathcal{M}_0 \cup \mathfrak{W}(\varphi^{-1})\mathcal{M}_0 \cup \mathfrak{W}(\psi)\mathcal{M}_0 \cup \mathfrak{W}(\psi^{-1})\mathcal{M}_0. \tag{13}$$

Међутим, ове уније више не морају бити дисјунктне. На пример, ако би било $(1,0,0) \in \mathcal{M}_0$, онда, како је $\varphi(1,0,0) = (1,0,0)$, то $(1,0,0) \in \mathfrak{W}(\varphi)\mathcal{M}_0$, тј. пресек скупова $\mathcal{M}_0$ и $\mathfrak{W}(\varphi)\mathcal{M}_0$ би био непразан. И уопште, ако је p фиксна тачка било које ротације $\rho \in \mathfrak{F}(\varphi,\psi)$, онда ће $\rho(p)$ лежати у нека два скупа која учествују у разлагању (13).

Постоји врло једноставно решење овог проблема: уклонићемо са сфере скуп свих тачака које су фиксне при некој нетривијалној ротацији $\rho \in \mathfrak{F}(\varphi,\psi)$. Означимо тај скуп са $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \{p \in \mathbf{S}^2 \mid (\exists \rho \in \mathfrak{F}(\varphi,\psi))\,(\rho \neq 1 \,\wedge\, \rho(p) = p)\}.$$

Како свака нетривијална ротација фиксира баш своју осу и ништа осим тога, скуп $\mathcal{D}$ сачињавају само тачке које припадају осама ротација групе $\mathfrak{F}(\varphi,\psi)$. Међутим, свакој од ових ротација одговараће само две такве тачке, а како ротација има пребројиво много (јер је $\mathfrak{F}(\varphi,\psi)$ пребројив скуп), то је скуп $\mathcal{D}$ пребројив.

Посматрајмо дејство групе $\mathfrak{F}(\varphi,\psi)$ сада на скуп $\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{D}$. Докажимо, најпре, да је то дејство добро дефинисано, тј. да за свако $p \in \mathbf{S}^2\backslash\mathcal{D}$ важи $\rho(p) \in \mathbf{S}^2\backslash\mathcal{D}$ за свако $\rho \in \mathfrak{F}(\varphi,\psi)$.

Нека је $p \in \mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ и нека постоји $\rho \in \mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ такво да $\rho(p) \notin \mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$. Тада $\rho(p) \in \mathcal{D}$, па постоји нетривијална ротација $\sigma \in \mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ таква да је $\sigma(\rho(p)) = \rho(p)$. Међутим, тада је $\rho^{-1}\sigma\rho(p) = p$, и $\rho^{-1}\sigma\rho$ није идентичка ротација, јер σ није идентичка. Закључујемо да $p \in \mathcal{D}$, што је у контрадикцији са претпоставком да $p \in \mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$.

Сада скуп свих орбита при дејству групе $\mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ на скуп $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ представља једну партицију скупа $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$, па нека је $\mathcal{M}$ трансверзала те партиције. Уочимо директну слику скупа $\mathcal{M}$ при било којој ротацији $\rho \in \mathfrak{F}(\varphi, \psi)$:

$$\rho[\mathcal{M}] = \{\rho(p) \mid p \in \mathcal{M}\}.$$

Тврдимо да су за сваке две различите ротације $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ скупови $\rho_1[\mathcal{M}]$ и $\rho_2[\mathcal{M}]$ међусобно дисјунктни.

Заиста, нека су $\rho_1, \rho_2 \in \mathfrak{F}(\varphi, \psi)$ произвољни елементи. Претпоставимо $\rho_1[\mathcal{M}] \cap \rho_2[\mathcal{M}] \neq \varnothing$. Тада постоји бар једна тачка $p \in \mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ таква да $p \in \rho_1[\mathcal{M}]$ и $p \in \rho_2[\mathcal{M}]$. Одатле следи да постоје тачке $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$ такве да је $p = \rho_1(p_1)$ и $p = \rho_2(p_2)$. Тада је $\rho_1^{-1}\rho_2(p_2) = p_1$, па се тачке p_1 и p_2 налазе у истој орбити. Међутим, како је $p_1, p_2 \in \mathcal{M}$, мора бити $p_1 = p_2$, јер скуп $\mathcal{M}$ садржи по тачно један елемент сваке орбите. Отуда је $\rho_1^{-1}\rho_2(p_1) = p_1$, тј. p_1 је фиксна тачка ротације $\rho_1^{-1}\rho_2$. Како $p_1 \notin \mathcal{D}$, мора бити $\rho_1^{-1}\rho_2 = 1$, тј. $\rho_1 = \rho_2$. Дакле, за различите ρ_1 и ρ_2 је $\rho_1[\mathcal{M}] \cap \rho_2[\mathcal{M}] = \varnothing$.

Захваљујући овом резултату, аналогно са (12) добијамо партицију од $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$:

$$\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} = \mathcal{M} \sqcup \mathfrak{W}(\varphi)\mathcal{M} \sqcup \mathfrak{W}(\varphi^{-1})\mathcal{M} \sqcup \mathfrak{W}(\psi)\mathcal{M} \sqcup \mathfrak{W}(\psi^{-1})\mathcal{M}.$$

Међутим, став 4 омогућава нам да скуп $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ видимо на још два начина:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} &= \varphi^{-1}[\mathfrak{W}(\varphi)\mathcal{M}] \sqcup \mathfrak{W}(\varphi^{-1})\mathcal{M}, \\
\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} &= \psi^{-1}[\mathfrak{W}(\psi)\mathcal{M}] \sqcup \mathfrak{W}(\psi^{-1})\mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Сада, уколико уведемо ознаке

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_{\varphi} &:= \mathfrak{W}(\varphi)\mathcal{M}, \\
\mathcal{W}_{\varphi^{-1}} &:= \mathfrak{W}(\varphi^{-1})\mathcal{M}, \\
\mathcal{W}_{\psi} &:= \mathfrak{W}(\psi)\mathcal{M}, \\
\mathcal{W}_{\psi^{-1}} &:= \mathfrak{W}(\psi^{-1})\mathcal{M},
\end{aligned}$$

можемо записати:

$$\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} = \mathcal{M} \sqcup \mathcal{W}_{\varphi} \sqcup \mathcal{W}_{\varphi^{-1}} \sqcup \mathcal{W}_{\psi} \sqcup \mathcal{W}_{\psi^{-1}}, \tag{14}$$

$$\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} = \varphi^{-1}\mathcal{W}_{\varphi} \sqcup \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}, \tag{15}$$

$$\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} = \psi^{-1}\mathcal{W}_{\psi} \sqcup \mathcal{W}_{\psi^{-1}}. \tag{16}$$

Дакле, скуп $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ смо поделили на 5 делова; два дела смо заротирали, и као резултат смо добили две копије скупа $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$. Тиме је теорема 13 доказана.

Искористићемо добијени резултат да бисмо добили сличан резултат, али овога пута на целој сфери $\mathbf{S}^2$. Пре свега, размотримо неке особине дисјунктне уније које ћемо у наставку користити.

Нека су I и J неки индексни скупови.

1) Ако је $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ и за свако $i \in I$ је $\mathcal{A}_i = \bigsqcup_{j \in J} \mathcal{A}_{ij}$, онда је

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in I,\, j \in J} A_{ij}.$$

2) Ако је $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ и $\rho \in SO_3$ било која ротација, онда је

$$\rho[\mathcal{A}] = \bigsqcup_{i \in I} \rho[\mathcal{A}_i].$$

3) Ако је $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{S}^2$ било који скуп, онда је

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \bigsqcup_{i \in I} (\mathcal{A}_i \cap \mathcal{B}).$$

Даље, треба на неки начин да од $\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}$ дођемо до целог $\mathbf{S}^2$. Пример који следи илустроваће у $\mathbb{R}^2$ оно што нам је циљ да урадимо у $\mathbb{R}^3$.

Пример 5 *Нека је $\mathbf{S}^1$ јединични круг у $\mathbb{R}^2$ и ℓ интервал $(0,1)$ на x-оси. Нека је, даље, ρ ротација у позитивном смеру око координатног почетка за $\frac{1}{10}$ радијана. Како је број 2π ирационалан, а број $\frac{1}{10}$ рационалан, колико год пута применили ротацију ρ на скуп ℓ, добијени скуп се никада неће поклопити са ℓ, тј.*

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1)\, \rho^n[\ell] \neq \ell.$$

Дефинишимо скуп

$$\mathcal{C} = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \rho^n[\ell]$$

и посматрајмо скуп $\mathbf{S}^1 \sqcup \mathcal{C}$. Приметимо да је овај скуп дисјунктан са скупом $\rho^{-1}[\ell]$, јер из $\rho^n[\ell] \neq \ell$ за свако $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$, следи $\rho^{n-1}[\ell] \neq \rho^{-1}[\ell]$ за све $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. Зато, важи следећа једнакост:

$$\mathbf{S}^1 \sqcup \rho^{-1}[\mathcal{C}] = \mathbf{S}^1 \sqcup \mathcal{C} \sqcup \rho^{-1}[\ell].$$

Дакле, кренули смо од скупа $\mathbf{S}^1 \sqcup \mathcal{C}$. Скуп $\mathcal{C}$ смо, затим, на „погодан“ начин заротирали и као резултат добили полазни скуп $\mathbf{S}^1 \sqcup \mathcal{C}$ и још један додатни скуп, тј. отворену дуж $\rho^{-1}[\ell]$.

Покушаћемо да идеју из претходног примера искористимо за случај сфере. У том циљу, изаберимо неку праву ℓ која садржи координатни почетак, а не сече скуп $\mathcal{D}$ (то је могуће урадити, јер је $\mathcal{D}$ само пребројив, а тачака на сфери има непребројиво много). Нека је $\ell_\theta \in SO_3$ ротација у позитивном смеру око праве ℓ за угао θ. Дефинишимо скуп T на следећи начин:

$$T = \{\theta \in [0, 2\pi) \mid (\exists p \in \mathcal{D})(\exists n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1)\, \ell_{n\theta}(p) \in \mathcal{D}\}.$$

Како је скуп $\mathcal{D}$ пребројив, углова θ који задовољавају услов скупа T има највише пребројиво много, па је скуп T највише пребројив. Према томе, како је скуп $[0, 2\pi)$ непребројив, можемо изабрати неки угао $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ такав да $\theta_0 \notin T$. Означимо

$$\sigma = \ell_{\theta_0}.$$

Тада је

$$\sigma^n[\mathcal{D}] \cap \mathcal{D} = \varnothing$$

за све $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. Онда је

$$\sigma^{n+m}[\mathcal{D}] \cap \sigma^m[\mathcal{D}] = \varnothing \tag{17}$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ и $m < n$. Сада, уколико у (17) уместо n ставимо $n - m$, добијамо

$$\sigma^n[\mathcal{D}] \cap \sigma^m[\mathcal{D}] = \varnothing$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ и $m < n$.

Дефинишимо скуп $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{S}^2$ на следећи начин:

$$\mathcal{E} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n[\mathcal{D}].$$

Сада скуп $\mathbf{S}^2$ можемо разложити као

$$\mathbf{S}^2 = (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E}) \sqcup \mathcal{E}.$$

Како је

$$\begin{aligned}
\sigma[\mathcal{E}] &= \sigma\left[\bigsqcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n[\mathcal{D}]\right] \\
&= \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+1}[\mathcal{D}] \\
&= \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \sigma^n[\mathcal{D}] \\
&= \mathcal{E} \backslash \mathcal{D},
\end{aligned}$$

то је

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D} &= (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E}) \sqcup (\mathcal{E} \backslash \mathcal{D}) \\
&= (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E}) \sqcup \sigma[\mathcal{E}].
\end{aligned}$$

Даље, како је, очигледно, $\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{E}$, то је $(\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E}) \subsetneq (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D})$, па је

$$\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E} = (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}) \cap (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E}).$$

Такође,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \sigma^{-1}[\sigma[\mathcal{E}]] \\
&= \sigma^{-1}[\mathcal{E} \backslash \mathcal{D}] \\
&= \sigma^{-1}[(\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}) \cap \mathcal{E}].
\end{aligned}$$

Сада, узимајући све у обзир, имамо

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^2 &= (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E}) \sqcup \mathcal{E} \\
&= \big((\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}) \cap (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E})\big) \sqcup \sigma^{-1}[(\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{D}) \cap \mathcal{E}].
\end{aligned}$$

Ова релација, заједно са (14), (15) и (16), даје нам следеће:

$$\mathbf{S}^2 = \big((\mathcal{M} \sqcup \mathcal{W}_\varphi \sqcup \mathcal{W}_{\varphi^{-1}} \sqcup \mathcal{W}_\psi \sqcup \mathcal{W}_{\psi^{-1}}) \cap (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E})\big) \sqcup \sigma^{-1}[(\mathcal{M} \sqcup \mathcal{W}_\varphi \sqcup \mathcal{W}_{\varphi^{-1}} \sqcup \mathcal{W}_\psi \sqcup \mathcal{W}_{\psi^{-1}}) \cap \mathcal{E}] \tag{18}$$

$$\mathbf{S}^2 = \big((\varphi^{-1}\mathcal{W}_\varphi \sqcup \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}) \cap (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E})\big) \sqcup \sigma^{-1}[(\varphi^{-1}\mathcal{W}_\varphi \sqcup \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}) \cap \mathcal{E}] \tag{19}$$

$$\mathbf{S}^2 = \big((\psi^{-1}\mathcal{W}_\psi \sqcup \mathcal{W}_{\psi^{-1}}) \cap (\mathbf{S}^2 \backslash \mathcal{E})\big) \sqcup \sigma^{-1}[(\psi^{-1}\mathcal{W}_\psi \sqcup \mathcal{W}_{\psi^{-1}}) \cap \mathcal{E}]. \tag{20}$$

Да би било јасније шта смо добили, уведимо следеће ознаке:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^0 &:= \mathcal{M}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\\
\mathcal{W}^0_{\varphi} &:= \mathcal{W}_{\varphi}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\\
\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}} &:= \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\\
\mathcal{W}^0_{\psi} &:= \mathcal{W}_{\psi}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\\
\mathcal{W}^0_{\psi^{-1}} &:= \mathcal{W}_{\psi^{-1}}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\\
\mathcal{M}^1 &:= \mathcal{M}\cap\mathcal{E}\\
\mathcal{W}^1_{\varphi} &:= \mathcal{W}_{\varphi}\cap\mathcal{E}\\
\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}} &:= \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}\cap\mathcal{E}\\
\mathcal{W}^0_{\psi} &:= \mathcal{W}_{\psi}\cap\mathcal{E}\\
\mathcal{W}^0_{\psi^{-1}} &:= \mathcal{W}_{\psi^{-1}}\cap\mathcal{E}.
\end{aligned}
$$

Тада (18) можемо записати на следећи начин:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^2 &= (\mathcal{M}^0\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi}\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}}\sqcup\mathcal{W}^0_{\psi}\sqcup\mathcal{W}^0_{\psi^{-1}})\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{M}^1\sqcup\mathcal{W}^1_{\varphi}\sqcup\mathcal{W}^1_{\varphi^{-1}}\sqcup\mathcal{W}^1_{\psi}\sqcup\mathcal{W}^1_{\psi^{-1}}]\\
&= \mathcal{M}^0\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{M}^1]\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\varphi^{-1}}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\psi}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\psi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\psi^{-1}}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\psi^{-1}}]
\end{aligned}
$$

Да бисмо могли да напишемо и разлагања (19) и (20) на једноставнији начин, уведимо нове ознаке:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{W}^{00}_{\varphi} &:= \mathcal{W}^0_{\varphi}\cap\varphi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\varphi}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\cap\varphi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{01}_{\varphi} &:= \mathcal{W}^0_{\varphi}\cap\varphi[\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\varphi}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\cap\varphi[\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{10}_{\varphi} &:= \mathcal{W}^1_{\varphi}\cap\varphi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\varphi}\cap\mathcal{E}\cap\varphi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{11}_{\varphi} &:= \mathcal{W}^1_{\varphi}\cap\varphi[\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\varphi}\cap\mathcal{E}\cap\varphi[\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{00}_{\psi} &:= \mathcal{W}^0_{\psi}\cap\psi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\psi}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\cap\psi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{01}_{\psi} &:= \mathcal{W}^0_{\psi}\cap\psi[\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\psi}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\cap\psi[\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{10}_{\psi} &:= \mathcal{W}^1_{\psi}\cap\psi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\psi}\cap\mathcal{E}\cap\psi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}]\\
\mathcal{W}^{11}_{\psi} &:= \mathcal{W}^1_{\psi}\cap\psi[\mathcal{E}] &&= \mathcal{W}_{\psi}\cap\mathcal{E}\cap\psi[\mathcal{E}].
\end{aligned}
$$

Сада, са новим ознакама, (12) постаје

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^2 = \mathcal{M}^0&\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{M}^1]\sqcup\mathcal{W}^{00}_{\varphi}\sqcup\mathcal{W}^{01}_{\varphi}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^{10}_{\varphi}]\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^{11}_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\varphi^{-1}}]\\
&\sqcup\mathcal{W}^{00}_{\psi}\sqcup\mathcal{W}^{01}_{\psi}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^{10}_{\psi}]\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^{11}_{\psi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\psi^{-1}}\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\psi^{-1}}],
\end{aligned}
$$

(18) постаје

$$
\begin{aligned}
\mathbf{S}^2 &= \big((\varphi^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}_{\varphi^{-1}})\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\big)\sqcup\sigma^{-1}\big[(\varphi^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}_{\varphi^{-1}})\cap\mathcal{E}\big]\\
&= \Big(\big(\varphi^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi}]\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\big)\sqcup\big(\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\big)\Big)\sqcup\sigma^{-1}\Big[\big(\varphi^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi}]\cap\mathcal{E}\big)\sqcup\big(\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}\cap\mathcal{E}\big)\Big]\\
&= \Big(\varphi^{-1}\big[\mathcal{W}_{\varphi}\cap\varphi[\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E}]\big]\sqcup\big(\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}\cap(\mathbf{S}^2\backslash\mathcal{E})\big)\Big)\sqcup\sigma^{-1}\Big[\varphi^{-1}\big[\mathcal{W}_{\varphi}\cap\varphi[\mathcal{E}]\big]\sqcup\big(\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}\cap\mathcal{E}\big)\Big]\\
&= \big(\varphi^{-1}[\mathcal{W}^{00}_{\varphi}\sqcup\mathcal{W}^{10}_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}}\big)\sqcup\sigma^{-1}\big[\varphi^{-1}[\mathcal{W}^{01}_{\varphi}\sqcup\mathcal{W}^{11}_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}^1_{\varphi^{-1}}\big]\\
&= \varphi^{-1}[\mathcal{W}^{00}_{\varphi}]\sqcup\varphi^{-1}[\mathcal{W}^{10}_{\varphi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\varphi^{-1}}\sqcup\sigma^{-1}\varphi^{-1}[\mathcal{W}^{01}_{\varphi}]\sqcup\sigma^{-1}\varphi^{-1}[\mathcal{W}^{11}_{\varphi}]\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\varphi^{-1}}],
\end{aligned}
$$

и, слично, (19) постаје

$$
\mathbf{S}^2 = \psi^{-1}[\mathcal{W}^{00}_{\psi}]\sqcup\psi^{-1}[\mathcal{W}^{10}_{\psi}]\sqcup\mathcal{W}^0_{\psi^{-1}}\sqcup\sigma^{-1}\psi^{-1}[\mathcal{W}^{01}_{\psi}]\sqcup\sigma^{-1}\psi^{-1}[\mathcal{W}^{11}_{\psi}]\sqcup\sigma^{-1}[\mathcal{W}^1_{\psi^{-1}}]
$$

Да бисмо могли да усагласимо ознаке у сва три разлагања сфере $\mathbf{S}^2$, уведимо још једне нове ознаке:

$$\begin{array}{rclrcl}
\mathcal{A}_1 & := & \mathcal{M}^0 & \mathcal{A}_2 & := & \sigma^{-1}[\mathcal{M}^1] \\
\mathcal{A}_1 & := & \mathcal{W}_{\varphi}^{00} & \mathcal{A}_4 & := & \sigma^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi}^{10}] \\
\mathcal{A}_5 & := & \mathcal{W}_{\varphi}^{01} & \mathcal{A}_6 & := & \sigma^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi}^{11}] \\
\mathcal{A}_7 & := & \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}^{0} & \mathcal{A}_8 & := & \sigma^{-1}[\mathcal{W}_{\varphi^{-1}}^{1}] \\
\mathcal{A}_9 & := & \mathcal{W}_{\psi}^{00} & \mathcal{A}_{10} & := & \sigma^{-1}[\mathcal{W}_{\psi}^{10}] \\
\mathcal{A}_{11} & := & \mathcal{W}_{\psi}^{01} & \mathcal{A}_{12} & := & \sigma^{-1}[\mathcal{W}_{\psi}^{11}] \\
\mathcal{A}_{13} & := & \mathcal{W}_{\varphi^{-1}}^{0} & \mathcal{A}_{14} & := & \sigma^{-1}[\mathrm{W}_{\psi^{-1}}^{1}].
\end{array}$$

Најзад,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}^2 = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \sqcup \mathcal{A}_3 \sqcup \mathcal{A}_4 \sqcup \mathcal{A}_5 \sqcup \mathcal{A}_6 \sqcup \mathcal{A}_7 \sqcup \mathcal{A}_8 \sqcup \mathcal{A}_9 \sqcup \mathcal{A}_{10} \sqcup \mathcal{A}_{11} \sqcup \mathcal{A}_{12} \sqcup \mathcal{A}_{13} \sqcup \mathcal{A}_{14}, \\
&\mathbf{S}^2 = \varphi^{-1}[\mathcal{A}_3] \sqcup \varphi^{-1}\sigma[\mathcal{A}_4] \sqcup \sigma^{-1}\varphi^{-1}[\mathcal{A}_5] \sqcup \sigma^{-1}\varphi^{-1}\sigma[\mathcal{A}_6] \sqcup \mathcal{A}_7 \sqcup \mathcal{A}_8, \\
&\mathbf{S}^2 = \psi^{-1}[\mathcal{A}_9] \sqcup \psi^{-1}\sigma[\mathcal{A}_{10}] \sqcup \sigma^{-1}\psi^{-1}[\mathcal{A}_{11}] \sqcup \sigma^{-1}\psi^{-1}\sigma[\mathcal{A}_{12}] \sqcup \mathcal{A}_{13} \sqcup \mathcal{A}_{14}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Овиме смо доказали парадокс Банаха и Тарског за сферу $\mathbf{S}^2$, исказан у следећој теореми.

Теорема 14 *Сфера $\mathbf{S}^2$ се може разложити на коначан број делова који, заротирани, дају две копије од $\mathbf{S}^2$.* ■

Парадокс Банаха и Тарског важи не само за сферу, већ и за лопту, тј. сферу са својом унутрашњом облашћу.

Наиме, нека је $\mathbf{B}^3$ јединична лопта у $\mathbb{R}^3$. Идеја је да добијену конструкцију са $\mathbf{S}^2$ пренесемо на $\mathbf{B}^3$. Уведимо следеће ознаке:

$$\begin{array}{llllll}
\rho_3 := \varphi^{-1}, & \rho_4 := \varphi^{-1}\sigma, & \rho_5 := \sigma^{-1}\varphi^{-1}, & \rho_6 := \sigma^{-1}\varphi^{-1}\sigma, & \rho_7 := 1, & \rho_8 := 1, \\
\rho_9 := \psi^{-1}, & \rho_{10} := \psi^{-1}\sigma, & \rho_{11} := \sigma^{-1}\psi^{-1}, & \rho_{12} := \sigma^{-1}\psi^{-1}\sigma, & \rho_{13} := 1, & \rho_{14} := 1.
\end{array}$$

Сада (21) постаје

$$\mathbf{S}^2 = \bigsqcup_{i=1}^{14} \mathcal{A}_i = \bigsqcup_{i=3}^{8} \rho_i[\mathcal{A}_i] = \bigsqcup_{i=9}^{14} \rho_i[\mathcal{A}_i].$$

Проширивање на целу лопту извршићемо тако што проширимо свако $\mathcal{A}_i$ ка унутра правцем полупречника. За свако $i \in \{1, 2, \ldots, 14\}$ дефинишимо скупове $\mathcal{B}_i \subseteq \mathbf{B}^3$ на следећи начин:

$$\mathcal{B}_i := \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \mid (x, y, z) \in \mathcal{A}_i,\ 0 < \lambda \leqslant 1\}.$$

На овај начин добијамо партицију лопте $\mathbf{B}^3$ без координатног почетка:

$$\mathbf{B}^3 \backslash \{O\} = \bigsqcup_{i=1}^{14} \mathcal{B}_i = \bigsqcup_{i=3}^{8} \rho_i[\mathcal{B}_i] = \bigsqcup_{i=9}^{14} \rho_i[\mathcal{B}_i]. \tag{22}$$

Међутим, нама треба партиција читаве лопте $\mathbf{B}^3$, па треба да на неки начин уклонимо ову „сметњу“. Послужићемо се суштински истим триком као што смо користили за скуп $\mathcal{D}$.

Изаберимо неку тачку блиску координатном почетку, нпр. $(\frac{1}{10}, 0, 0)$. Уочимо праву која садржи ову тачку, а паралелна је y-оси. Нека је τ ротација око ове праве за 1 радијан. Очигледно је $\tau^n(O) \in \mathbf{B}^3$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је број 2π ирационалан, то је $\tau^n(O) \neq (O)$ за све $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$. Зато можемо доказати

$$\tau^n(O) \neq \tau^m(O)$$

за све $m, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, m \leqslant n$, што је еквивалентно са

$$\{\tau^n(O)\} \cap \{\tau^m(O)\} = \varnothing$$

за $m, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, m \leqslant n$. Дефинишимо

$$\mathcal{F} := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} \{\tau^n(O)\}.$$

Тада је $\tau[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \backslash \{O\}$. Онда, како је

$$\mathbf{B}^3 = (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \sqcup \mathcal{F},$$

то је

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3 \backslash \{O\} &= (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \sqcup (\mathcal{F} \backslash \{O\}) \\ &= (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \sqcup \tau[\mathcal{F}]. \end{aligned}$$

Онда је

$$\mathbf{B}^3 = \big((\mathbf{B}^3 \backslash \{O\}) \cap (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \sqcup \tau^{-1}\big[(\mathbf{B}^3 \backslash \{O\}) \cap \mathcal{F}\big],$$

што заједно са (22) даје

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3 &= \left(\bigsqcup_{i=1}^{14} \mathcal{B}_i \cap \big(\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}\big) \right) \sqcup \tau^{-1} \left[\bigsqcup_{i=1}^{14} \mathcal{B}_i \cap \mathcal{F} \right] \\ &= \left(\bigsqcup_{i=3}^{8} \rho_i \big[\mathcal{B}_i\big] \cap \big(\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}\big) \right) \sqcup \tau^{-1} \left[\bigsqcup_{i=3}^{8} \rho_i \big[\mathcal{B}_i\big] \cap \mathcal{F} \right] \\ &= \left(\bigsqcup_{i=9}^{14} \rho_i \big[\mathcal{B}_i\big] \cap \big(\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}\big) \right) \sqcup \tau^{-1} \left[\bigsqcup_{i=9}^{14} \rho_i \big[\mathcal{B}_i\big] \cap \mathcal{F} \right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Уведимо ознаке

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i^0 &:= \mathcal{A}_i \cap (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \\ \mathcal{B}_i^1 &:= \mathcal{A}_i \cap \mathcal{F} \end{aligned}$$

за $i \in \{1, 2\}$, као и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i^{00} &:= \mathcal{B}_i \cap (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \cap \rho_i^{-1}[\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}] \\ \mathcal{B}_i^{01} &:= \mathcal{B}_i \cap (\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}) \cap \rho_i^{-1}[\mathcal{F}] \\ \mathcal{B}_i^{10} &:= \mathcal{B}_i \cap \mathcal{F} \cap \rho_i^{-1}[\mathbf{B}^3 \backslash \mathcal{F}] \\ \mathcal{B}_i^{10} &:= \mathcal{B}_i \cap \mathcal{F} \cap \rho_i^{-1}[\mathcal{F}] \end{aligned}$$

за $i \in \{3, 4, \ldots, 14\}$. Сада се (23) своди на

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3 = \mathcal{B}_1^0 \sqcup \tau^{-1}[\mathcal{B}_1^1] \sqcup \mathcal{B}_2^0 \sqcup \tau^{-1}[\mathcal{B}_2^1] \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{14} \mathcal{B}_i^{00} \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{14} \mathcal{B}_i^{01} \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{14} \tau^{-1}[\mathcal{B}_i^{10}] \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{14} \tau^{-1}[\mathcal{B}_i^{11}] \\ = \bigsqcup_{i=3}^{8} \rho_i[\mathcal{B}_i^{00}] \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{8} \rho_i[\mathcal{B}_i^{10}] \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{8} \tau^{-1} \rho_i[\mathcal{B}_i^{01}] \sqcup \bigsqcup_{i=3}^{8} \tau^{-1} \rho_i[\mathcal{B}_i^{11}] \\ = \bigsqcup_{i=9}^{14} \rho_i[\mathcal{B}_i^{00}] \sqcup \bigsqcup_{i=9}^{14} \rho_i[\mathcal{B}_i^{10}] \sqcup \bigsqcup_{i=9}^{14} \tau^{-1} \rho_i[\mathcal{B}_i^{01}] \sqcup \bigsqcup_{i=9}^{14} \tau^{-1} \rho_i[\mathcal{B}_i^{11}]. \end{aligned}$$

Овиме смо добили тражено разлагање лопте $\mathbf{B}^3$. Наравно, $\mathbf{B}^3$ се ни по чему суштински не разликује од било које друге лопте у $\mathbb{R}^3$; користећи ротације око оса које не садрже координатни почетак добијамо разлагање за било коју лопту. Овиме је доказана наредна теорема.

Теорема 15 *(Парадокс Банаха и Тарског за лопту) Било која лопта* $\mathbf{B}$ *у простору* $\mathbb{R}^3$ *може се разложити на коначан број делова који, заротирани, дају две копије од* $\mathbf{B}$. ■

Остаје још да помоћу добијеног резултата докажемо уопштени парадокс Банаха и Тарског, исказан на самом почетку овог одељка.

Пре свега, осим ротација сада ће нам бити потребне и транслације, па нека је $\mathbf{M}_3$ група свих ротација и транслација простора $\mathbb{R}^3$.

Дефиниција 27 *Нека су* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *подскупови од* $\mathbb{R}^3$. *Кажемо да су скупови* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ ***разложиво једнаки****, и пишемо* $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, *ако постоје партиције скупова* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$ *на једнак број делова,*

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i, \quad \mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i,$$

и за свако $i \in \{1, \dots, n\}$ *постоје пресликавања* $g_i \in \mathbf{M}_3$ *таква да важи*

$$g_i[\mathcal{A}_i] = \mathcal{B}_i.$$

Грубо говорећи, кажемо да су скупови $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ разложиво једнаки ако се скуп $\mathcal{A}$ може поделити на коначан број делова које је могуће прегруписати тако да они оформе тачно скуп $\mathcal{B}$. Наредно тврђење, зато, представља директну последицу теореме 15.

Последица 1 *Нека је* $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ *лопта полупречника* r. *Тада постоји подскуп* $\mathbf{B}_0 \subseteq \mathbf{B}$ *такав да је скуп* $\mathbf{B} \backslash \mathbf{B}_0$ *разложиво једнак са дисјунктном унијом две лопте полупречника* r.

Доказ. Узмимо $\mathbf{B}_0 = \mathcal{B}_1^0 \sqcup \tau^{-1}[\mathcal{B}_1^1] \sqcup \mathcal{B}_2^0 \sqcup \tau^{-1}[\mathcal{B}_2^1]$. ■

Став 7 *Релација* $\sim$ *је релација еквиваленције на скупу* $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$.

Доказ. За сваки скуп $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ важи $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}$, јер можемо узети тривијалну партицију $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$ и идентичко пресликавање $g = 1$; тада је $g[\mathcal{A}_1] = \mathcal{A}_1$. Дакле, релација $\sim$ је рефлексивна.

Нека је $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, за нека два подскупа $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$. Тада је $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$, $\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$, и за свако $i \in \{1, \dots, n\}$ постоји $g_i \in \mathbf{M}_3$ такво да важи

$$g_i[\mathcal{A}_i] = \mathcal{B}_i.$$

Међутим, g_i је бијекција, па је

$$\mathcal{A}_i = g_i^{-1}[\mathcal{B}_i]$$

за свако i, одакле следи $\mathcal{B} \sim \mathcal{A}$. Дакле, релација $\sim$ је симетрична.

Да бисмо доказали рефлексивност, претпоставимо $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$ за неке скупове $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$. Тада

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i, \ \mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i = \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{B}'_j, \ C = \bigsqcup_{j=1}^{n'} C_j$$

и за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n'\}$ постоје пресликавања $g_i, g'_j \in \mathbf{M}_3$ таква да важи

$$g_i\big[\mathcal{A}_i\big] = \mathcal{B}_i,\ g'_j\big[\mathcal{B}'_j\big] = \mathcal{C}_j.$$

Нека је $\mathcal{A}_{ij} := g_i^{-1}\big[\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}'_j\big]$. Тада је

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{i,j} \mathcal{A}_{ij} &= \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{A}_{ij} \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{n} \bigsqcup_{j=1}^{n'} g_i^{-1}\big[\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}'_j\big] \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}\Big[\mathcal{B}_i \cap \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{B}'_j\Big] \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}\big[\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}\big] \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i^{-1}\big[\mathcal{B}_i\big] \\
&= \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \\
&= \mathcal{A}.
\end{aligned}$$

Дакле, $\big\{\mathcal{A}_{ij} \mid i \in \{1, \ldots, n\},\ j \in \{1, \ldots, n'\}\big\}$ је једна партиција од $\mathcal{A}$.

Такође,

$$\begin{aligned}
\bigsqcup_{i,j} g'_j g_i\big[\mathcal{A}_{ij}\big] &= \bigsqcup_{i,j} g'_j g_i g_i^{-1}\big[\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}'_j\big] \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n'} \bigsqcup_{i=1}^{n} g'_j\big[\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}'_j\big] \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j\Big[\mathcal{B}'_j \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\Big] \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j\Big[\mathcal{B}'_j \cap \mathcal{B}\Big] \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j\big[\mathcal{B}'_j\big] \\
&= \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{C}_j \\
&= \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Дакле, $\mathcal{A} \sim \mathcal{C}$. ■

Став 8 *Ако је $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, онда постоји бијекција $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ таква да за свако $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ важи*

$$\mathcal{C} \sim \alpha\big[\mathcal{C}\big].$$

Доказ. Из $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ следи $\mathcal{A} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i$, $\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ и за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ постоји $g_i \in \mathbf{M}_3$ тако да је $g_i\big[\mathcal{A}_i\big] = \mathcal{B}_i$. Даље, свака тачка скупа $\mathcal{A}$ налази се у тачно једном скупу партиције $\big\{\mathcal{A}_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}\big\}$, тј.

$$(\forall p \in \mathcal{A})(\exists_1 i_p \in \{1, \ldots, n\})\, p \in \mathcal{A}_{i_p}.$$

Дефинишимо функцију $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ са

$$\alpha(p) := g_{i_p}(p).$$

Функција α је коректно дефинисана, јер су за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ скупови $g_i\big[\mathcal{A}_1\big], \ldots, g_i\big[\mathcal{A}_n\big]$ међусобно дисјунктни. Како је g_i бијекција за свако i, то је и α бијекција.

Нека је $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ произвољан скуп. Тада је

$$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \big(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{C}\big), \tag{24}$$

па је

$$\alpha\big[\mathcal{C}\big] = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i\big[\mathcal{A}_i \cap \mathcal{C}\big]. \tag{25}$$

Најзад, из (24) и (25) следи $\mathcal{C} \sim \alpha\big[\mathcal{C}\big]$. ■

Став 9 *Ако је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' = \varnothing$, и ако је $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ и $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$, онда је $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sim \mathcal{A}' \sqcup \mathcal{B}'$.*

Доказ. Из $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ и $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}'$ следи

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i,\ \mathcal{A}' = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}'_i,\ \mathcal{B} = \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{B}_j,\ \mathcal{B}' = \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{B}'_j$$

и за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, n'\}$ постоје пресликавања $g_i, g'_j \in \mathbf{M}_3$ таква да је $g_i\big[\mathcal{A}_i\big] = \mathcal{A}'_i$ и $g'_j\big[\mathcal{B}_j\big] = \mathcal{B}'_j$. Тада је

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} &= \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{B}_j, \\ \mathcal{A}' \sqcup \mathcal{B}' &= \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}'_i \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n'} \mathcal{B}'_j = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i\big[\mathcal{A}_i\big] \sqcup \bigsqcup_{j=1}^{n'} g'_j\big[\mathcal{B}_j\big]. \end{aligned}$$

Дакле, $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sim \mathcal{A}' \sqcup \mathcal{B}'$. ■

Сада ћемо на основу релације $\sim$ дефинисати једну нову релацију над подскуповима од $\mathbb{R}^3$.

Дефиниција 28 *Нека су $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$. Дефинишимо релацију $\preccurlyeq$ на $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ са*

$$\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B} \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}\big)\, \mathcal{A} \sim \mathcal{B}'.$$

Одмах ћемо навести и неке особине уведене релације.

Став 10 *Релација $\preccurlyeq\ \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ има следећа својства:*

1) $\preccurlyeq$ је рефлексивна,

2) $\preccurlyeq$ је транзитивна,

3) Ако је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{C}$, онда је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{C}$,

4) Ако је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, онда је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{C}$.

Доказ.

1) Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^3$ произвољан скуп. Из рефлексивности релације $\sim$ следи $\mathcal{A} \sim \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, па је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{A}$.

3) Нека је $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{C}$. Тада постоји подскуп $\mathcal{C}'$ скупа $\mathcal{C}$ такав да је $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}'$. Одатле следи

$$\mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i,\, \mathcal{C}' = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{C}'_i$$

и за свако $i \in \{1, \ldots, n\}$ постоје пресликавања $g_i \in \mathbf{M}_3$ таква да је $g_i\big[\mathcal{B}_i\big] = \mathcal{C}'_i$.

Из $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ следи да постоје индекси $m_1, \ldots, m_k \in \{1, \ldots, n\}$, $k \leqslant n$, такви да је $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_{m_j} \neq \varnothing$ за све $j \in \{1, \ldots, k\}$. Сваки скуп $\mathcal{B}_i$ можемо записати као

$$\mathcal{B}_i = \big(\mathcal{B}_i \backslash \mathcal{A}\big) \sqcup \big(\mathcal{B}_i \cap \mathcal{A}\big),$$

па је

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}'_{m_j} &= g_{m_j}\big[\mathcal{B}_{m_j}\big] \\
&= g_{m_j}\big[\big(\mathcal{B}_{m_j} \backslash \mathcal{A}\big) \sqcup \big(\mathcal{B}_{m_j} \cap \mathcal{A}\big)\big] \\
&= g_{m_j}\big[\mathcal{B}_{m_j} \backslash \mathcal{A}\big] \sqcup g_{m_j}\big[\mathcal{B}_{m_j} \cap \mathcal{A}\big],
\end{aligned}$$

$j \in \{1, \ldots, k\}$. Нека је $\mathcal{C}'' = \bigsqcup_{j=1}^{k} g_{m_j}\big[\mathcal{B}_{m_j} \cap \mathcal{A}\big]$. Очигледно је $\mathcal{C}'' \subseteq \mathcal{C}$, а како је $\mathcal{A} = \bigsqcup_{j=1}^{k} \big(\mathcal{B}_{m_j} \cap \mathcal{A}\big)$, то је $\mathcal{A} \sim \mathcal{C}''$. Дакле, $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{C}$.

2) Нека су $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^3$ такви да $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{C}$. Тада постоји $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ тако да

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}'. \tag{26}$$

Из $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$, према делу 3), следи $\mathcal{B}' \preccurlyeq \mathcal{C}$. Дакле, постоји $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ тако да

$$\mathcal{B}' \sim \mathcal{C}'. \tag{27}$$

Сада из (26) и (27) и транзитивности релације $\sim$ следи $\mathcal{A} \sim \mathcal{C}'$. Дакле, релација $\preccurlyeq$ је транзитивна.

4) Нека је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Тада постоји $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ тако да

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}'. \tag{28}$$

Из $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ следи $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C}$, што са (28) даје $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{C}$. ■

Сада смо ,,припремили терен“ за доказ уопштене верзије парадокса Банаха и Тарског. Он се односи на ограничене подскупове од $\mathbb{R}^3$ чија је унутрашњост непразна.

За скуп $A \subseteq \mathbb{R}^3$ кажемо да има непразну унутрашњост ако A садржи (као свој подскуп) неку лопту позитивног полупречника. Кажемо да је скуп A ограничен ако је садржан у некој лопти коначног полупречника.

Став 11 *Нека су $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ ограничени подскупови од $\mathbb{R}^3$ непразних унутрашњости. Тада је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.*

Доказ. Изаберимо лопте $\mathbf{B}^{\mathcal{A}}$ и $\mathbf{B}_{\mathcal{B}}$ такве да је $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}^{\mathcal{A}}$ и $\mathbf{B}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}$. Изаберимо довољно велики природан број n такав да се $\mathbf{B}^{\mathcal{A}}$ може покрити са n (не нужно дисјунктних) копија од $\mathbf{B}_{\mathcal{B}}$. Нека је $\mathcal{S}$ дисјунктна унија тих n копија од $\mathbf{B}_{\mathcal{B}}$. Тада можемо померити делове скупа $\mathcal{S}$ тако да они прекрију $\mathbf{B}^{\mathcal{A}}$. Узимајући одговарајуће подскупове од ових делова можемо дисјунктно прекрити $\mathbf{B}^{\mathcal{A}}$, па је $\mathbf{B}^{\mathcal{A}} \preccurlyeq \mathcal{S}$.

Даље, према теореми 15, можемо узастопно да дуплирамо неки подскуп од $\mathbf{B}_{\mathcal{B}}$ тако да добијемо било који коначан број копија од $\mathbf{B}_{\mathcal{B}}$. Специјално, можемо добити n копија од $\mathbf{B}_{\mathcal{B}}$, па је $\mathcal{S} \preccurlyeq \mathbf{B}_{\mathcal{B}}$. Дакле,

$$\mathcal{A} \subseteq \mathbf{B}^{\mathcal{A}} \preccurlyeq \mathcal{S} \preccurlyeq \mathbf{B}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B},$$

па, из дела 3) и 4) става 10, следи $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$. ■

Скупови $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из претходног става се ни по чему суштински не разликују, па како смо закључили $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$, могли смо исто тако да закључимо $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$. Дакле, за било која два ограничена скупа $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$ чије су унутрашњости непразне важи

$$\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B} \ \ \textit{и} \ \ \mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}.$$

Зато доказ завршава следеће тврђење.

Теорема 16 *(Банах-Шредер-Бернштајн) Нека је $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ и $\mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{A}$. Тада је $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$.*

Доказ. Можемо изабрати $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ и $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ тако да $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}'$ и $\mathcal{A}' \sim \mathcal{B}$. Нека су $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}'$ и $\beta : \mathcal{A}' \to \mathcal{B}$ бијекције чије постојање гарантује став 8. Дефинишимо скупове $\{\mathcal{C}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ на следећи начин:

$$(Rec) \begin{cases} \mathcal{C}_0 = \mathcal{A} \backslash \mathcal{A}', \\ \mathcal{C}_n = \beta^{-1}\alpha\big[\mathcal{C}_{n-1}\big]. \end{cases}$$

Очигледно је $\mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{A}$ за свако $n \in \mathbb{N}$, па је и

$$\mathcal{C} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n \subseteq \mathcal{A}.$$

Како је $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{A}' = \varnothing$, то је

$$\mathcal{A} \backslash \mathcal{C} = \mathcal{A}' \setminus \big(\mathcal{C} \cap \mathcal{A}'\big) = \mathcal{A}' \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

Како су α и β бијекције, то је

$$\begin{aligned}\beta[\mathcal{A}\backslash\mathcal{C}] &= \beta\left[\mathcal{A}'\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n\right]\\ &= \beta[\mathcal{A}']\setminus\beta\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\beta^{-1}\alpha[\mathcal{C}_{n-1}]\right]\\ &= \mathcal{B}\setminus\alpha\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_{n-1}\right]\\ &= \mathcal{B}\setminus\alpha\left[\bigcup_{n=0}^{\infty}\mathcal{C}_{n}\right]\\ &= \mathcal{B}\setminus\alpha[\mathcal{C}].\end{aligned}$$

Став 8 нам сада даје

$$\mathcal{A}\backslash\mathcal{C}\sim\mathcal{B}\setminus\alpha[\mathcal{C}], \tag{29}$$

као и

$$\mathcal{C}\sim\alpha[\mathcal{C}]. \tag{30}$$

Најзад, примењујући став 9 на (29) и (30), добијамо

$$(\mathcal{A}\backslash\mathcal{C})\sqcup\mathcal{C}\sim(\mathcal{B}\setminus\alpha[\mathcal{C}])\sqcup\alpha[\mathcal{C}],$$

тј. $\mathcal{A}\sim\mathcal{B}$. ■

Последица 2 *(Уопштени парадокс Банаха и Тарског) Било која два ограничена подскупа од $\mathbb{R}^3$ чије су унутрашњости непразне јесу разложиво једнака.* ■

Парадокс Банаха и Тарског људском уму звучи прилично апсурдно. Међутим, нико не би могао да оспори тачност његовог доказа, па једино преостаје да критикује неке претпоставке које се у доказу користе. Аксиома избора се ту сматра кривцем број један, с обзиром на то да без ње овакво тврђење не би било могуће. Зато овај парадокс важи за јак аргумент против аксиоме избора. Међутим, није аксиома избора једина у коју овде треба ,,упирати прстом"; видели смо шта заправо лежи у основи доказа – то је појам слободне групе, а она сама има ,,парадоксална" својства.

13 Закључак

Од самог почетка откако је уведена, аксиома избора проузроковала је разна опречна мишљења и до данас важи за најконтроверзнију аксиому у математици. Без ње би математика остала ускраћена за бројне лепе и корисне резултате (у овом раду приказани су само неки од њих, они најпознатији). Такође, неке нове математичке теорије родиле су се као последица ове аксиоме (на пример, теорија великих кардинала). Међутим, због оне њене ,,друге стране", постојао је (а и даље постоји) један број математичара који се противи њеном коришћењу. Ту спадају, пре свега, конструктивисти. Они одбијају постојање било ког појма који се не може ,,конструисати". Они би рекли:

Формални систем у коме је формула $\exists x\, G(x)$ *доказива, али који не пружа никакав метод за налажење тог* x *о коме је реч, јесте систем у коме егзистенцијални квантификатор не испуњава своју предвиђену улогу.*[28]

Сматрали су, такође, да је *опасно* тврдити постојање нечега што нико не може да опише. Расел се држао става да је најбоље избегавати коришћење аксиоме избора управо због њених, како је он рекао, *запањујућих* последица. Лебег је, такође, жустро одбијао да прихвати аксиому избора. Занимљиво је, међутим, да је он приликом доказивања да је пребројива унија мерљивих подскупова скупа $\mathbb{R}$ мерљив скуп користио ову аксиому, а да тога није ни био свестан. Он чак и није био једини: Харди[29] је приметио да је Борел[30], који је, иначе, приговарао на аксиому избора, користио аксиому приликом доказивања једног свог резултата.

Неки математичари нису били сигурни да ли да прихвате аксиому избора или не. На пример, ван дер Варден[31] је у свом првом издању књиге *Модерна алгебра* 1930. године представио неке занимљиве примене аксиоме избора. За друго издање 1937. године његове колеге су успеле да га убеде да одстрани аксиому. Међутим, тадашњи математичари који су се бавили алгебром били су тим чином врло незадовољни, јер је тиме апстрактна алгебра постала прилично ограничена, па је аутор у трећем издању 1950. решио да врати аксиому избора са свим њеним последицама.

Данас је аксиома избора већином прихваћена и углавном се слободно користи. Неки математичари, додуше, користе неке ослабљене верзије аксиоме избора, или чак њену негацију, што такође има смисла, јер је Коен 1963. године доказао да је негација аксиоме избора релативно конзистентна са остатком ZF теорије, исто као што је то и сама аксиома избора.

Постојале су (а можда и даље постоје) извесне тенденције да аксиому избора замени њена ,,алтернатива" – тзв. *аксиома извесности*[32], чији корени припадају теорији игара, с обзиром на то да аксиома избора у овој теорији има неке врло ,,незгодне" последице. Ове две аксиоме нису компатибилне, тј. међусобно се искључују. Међутим, аксиома извесности се чини погодном заменом, јер задржава многе добре особине аксиоме избора, а поправља оне неке њене мање пожељне особине. Једино је преостало да се у потпуности докаже да ова нова аксиома није у контрадикцији са првобитном ZF теоријом, на чему се и даље ради.

Било како било, аксиома избора је, и поред својих несавршености, ушла у темеље савремене математике, и математика какву данас познајемо и изучавамо без ове аксиоме свакако не би била иста.

---

[28] [2], стр. 6, превод са енглеског мој.

[29] Godfrey Harold "G. H." Hardy (1877–1947), енглески математичар.

[30] Emil Borel (1871–1956), француски математичар.

[31] Bartel Leendert van der Waerden (1903–1996), холандски математичар.

[32] *Axiom of determinateness*, енг.

Литература

[1] Д. Аднађевић, З. Каделбург: *Математичка анализа 1*, Круг, девето издање, Београд, 2010.

[2] H. Herrlich: *Axiom of Choice*, Springer, Bremen, 2006.

[3] K. Hrbacek, T. Jech: *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, third edition, New York, 1999.

[4] T. Jech: *The Axiom of Choice*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam/London, 1973.

[5] Г. Калајџић: *Линеарна алгебра*, Математички факултет, Београд, 2009.

[6] Д. Кечкић, *Функционална анализа*, скрипта.

[7] А. Липковски: *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, Завод за уџбенике, Београд, 2007.

[8] М. Марјановић, С. Врећица: *Топологија*, Завод за уџбенике, Београд, 2011.

[9] Славко Моцоња, белешке

[10] А. Торгашев: *Функционална анализа*, Београд, 1995. (издавач: аутор)

[11] S. Wagon: *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[12] `https://math.berkeley.edu/~kpmann/Well-ordering.pdf`

[13] `https://people.math.umass.edu/~weston/oldpapers/banach.pdf`

[14] `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/studnatj/sn_Hamel.pdf`