



UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

Krive u ravni i prostoru izvedene od krivih u ravni

Autor:
Kristina Bošković
1037/2016

Mentor:
dr Mirjana Đorić

Beograd, 2018.

Sadržaj

Uvod	1
1 Osnovni pojmovi diferencijalne geometrije krivih	2
2 Epicikloide	10
2.1 Parametarska jednačina epicikloide	10
2.2 Poznate epicikloide	12
3 Krive u ravni izvedene od krivih u ravni	15
3.1 Evolute	15
3.2 Involute	23
3.3 Paralelne krive	27
3.4 Podnožnice	30
4 Krive u prostoru izvedene od krivih u ravni	37
4.1 Sferne krive	37
4.2 Krive konstantnog nagiba	41
4.3 Nove sferne krive konstantnog nagiba	46
4.4 Primeri novih sfernih krivih konstantnog nagiba koji su izvedeni od ravanskih epicikloida	48
Zaključak	53
Literatura	54

Uvod

U ovom radu prikazano je nekoliko načina izvođenja novih krivih u ravni i prostoru nastalih od poznatih ravanskih krivih. Korišćenjem nekih osobina ravanskih krivih definisane su nove krive u ravni i prostoru i prikazane njihove osobine. Vizuelizacija krivih koje prate rad je urađena u programu *Mathematica*. Krive u ravni od kojih se izvode nove krive odgovaraju krivama koje su u plavoj boji, dok su nove izvedene krive u crvenoj boji.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U prvom poglavlju predstavljeni su osnovni pojmovi diferencijalne geometrije krivih koji su od značaja za rad. U drugom poglavlju detaljnije je prikazana poznata ravanska kriva epicikloida. Izvedena je njena parametarska jednačina i ilustrovane su neke poznate epicikloide. Ova kriva je od većeg značaja za rad jer su upravo od epicikloida izvedene nove krive u prostoru. Treće i četvrto poglavlje je posvećeno krivama u ravni i prostoru koje su izvedene od krivih u ravni. Specijalno, u trećem poglavlju razmatrane su evolute, involute, paralelne krive i podnožnice. Sve je to ilustrovano kroz razne primere poznatih ravanskih krivih. U četvrtom poglavlju su prikazani uslovi koje kriva treba da zadovolji da bi bila sferna kriva i obrnuto, ako je kriva sferna koje osobine zadovoljavaju njena krivina i torzija. Prikazane su i osobine krivih koje su konstantnog nagiba. Izvedene su nove krive koje upravo leže na sferi i imaju konstantan nagib. Pokazano je da se ovakve nove prostorne krive izvode od ravanskih epicikloida.

Zahvaljujem se svom mentoru dr Mirjani Đorić na velikoj pomoći tokom pisanja ovog rada, savetima, razumevanju i podršci. Takođe, zahvaljujem se članovima komisije dr Miroslavi Antić i dr Tijani Šukilović na sugestijama i primedbama.

1 Osnovni pojmovi diferencijalne geometrije krivih

Definicija 1.1. Parametrizovana kriva u \mathbb{R}^n , $n > 1$, je deo po deo diferencijabilno preslikavanje $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gde je (a, b) otvoren interval u \mathbb{R} .

Kriva se definiše kao preslikavanje, a ne skup tačaka. Direktnu sliku ovog preslikavanja, tj. skup $\alpha((a, b))$ zovemo tragom krive α .

Definicija 1.2. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 1$, kriva data sa $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$. Vektor brzine krive α u tački t_0 je vektor $\alpha'(t_0) = (\alpha'_1(t_0), \dots, \alpha'_n(t_0))$. Brzina krive α u tački t_0 je intezitet vektora brzine u tački t_0 , tj. $\|\alpha'(t_0)\|$. Brzina krive α je funkcija $v(t) = \|\alpha'(t)\|$.

Definicija 1.3. Za krivu $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n > 1$, kažemo da je regularna kriva ako je diferencijabilna i $\alpha'(t) \neq 0$ za sve $t \in (a, b)$.

U radu ćemo se baviti samo regularnim krivama u prostorima \mathbb{R}^2 i \mathbb{R}^3 . Fizička interpretacija krive se može predstaviti na sledeći način. Ako je sa t označeno vreme, preslikavanje α opisuje kretanje neke čestice u prostoru \mathbb{R}^n u zavisnosti od vremena t . Prema tome, $\alpha(t)$ je položaj čestice u vremenu t , a $\alpha'(t)$ je vektor brzine kretanja čestice. Uslovom regularnosti je obezbeđeno da se čestica stalno kreće jer je brzina kretanja čestice uvek različita od nule. Geometrijski, $\alpha'(t)$ je tangenti vektor na krivu α u tački $\alpha(t)$.

Definicija 1.4. Neka su $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\beta: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dve regularne parametrizovane krive. One su ekvivalentne ako postoji difeomorfizam $\phi: (c, d) \rightarrow (a, b)$ tako da je $\beta = \alpha \circ \phi$.

Za β iz Definicije 1.4 kažemo da je reparametrizacija krive α . Ukoliko je $\phi' > 0$ kažemo da je β pozitivna reparametrizacija krive α , a negativna reparametrizacija krive α ukoliko je $\phi' < 0$.

Lema 1.1. Neka je β reparametrizacija krive α . Tada je

$$\beta'(u) = \alpha'(\phi(u))\phi'(u), \quad (1.1)$$

pri čemu je $\beta = \alpha \circ \phi$, $\phi: (c, d) \rightarrow (a, b)$, $c < u < d$.

Definicija 1.5. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Dužina luka krive α na segmentu $[a, b]$ jednaka je

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

Dužina luka krive je geometrijsko svojstvo krive jer ne zavisi od parametrizacije.

Definicija 1.6. Funkcija dužine luka s_α sa početkom u c krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je definisana sa

$$s_\alpha(t) = \int_c^t \|\alpha'(u)\| du, \quad (1.2)$$

za fiksirano $c \leq t \leq b$.

Iz definicije se vidi da je $s(a) = 0$ i $s(b) = L(\alpha)$. Funkcija dužine luka krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jedinične brzine data je sa

$$s_\alpha(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du = \int_c^t du = t - a.$$

Teorema 1.1. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva. Tada postoji njena reparametrizacija β čija je brzina jedinična.

Definicija 1.7. Krivu α čiji je vektor brzine u svakoj tački jedinični, tj. $\|\alpha'(t)\| = 1$ za sve $t \in (a, b)$ zovemo prirodno parametrizovana kriva ili kriva parametrizovana dužinom luka.

U fizičkoj interpretaciji to znači da je brzina kretanja čestice konstantna. Parametar t kod prirodno parametrizovanih krivih se najčešće označava sa s . Iako prirodna parametrizacija uvek postoji, najčešće nije moguće izraziti prirodni parametar preko prvobitno zadanog korišćenjem elementarnih funkcija.

Definicija 1.8. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ kriva. Vektorsko polje duž krive α je preslikavanje $V : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ koje svakom $t \in (a, b)$ dodeljuje vektor $V(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$.

Lema 1.2. Ako je V vektorsko polje jediničnog inteziteta duž krive $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, tada je $V' \cdot V = 0$.

Dokaz. Kako je V vektorsko polje jediničnog inteziteta važi jednakost $V(t) \cdot V(t) = 1$. Diferenciranjem ove jednakosti dobijamo $2(V(t) \cdot V'(t)) = 0$ odakle sledi dokaz leme. ■

Specijalno, za regularnu krivu definišemo tangentno vektorsko polje duž krive.

Definicija 1.9. Tangentno vektorsko polje na regularnu krivu $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ je polje vektora dato sa

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}.$$

Tangentno vektorsko polje T je dobro definisano za regularnu krivu α jer je $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ za svako $t \in (a, b)$. Intezitet tangentsnog vektora $T(t)$ jednak je $\|T(t)\| = \left\| \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \|\alpha'(t)\| = 1$.

Vektor brzine duž krive nije nula vektor ni u jednoj tački pa u svakoj tački krive α imamo tangentu. Za prirodno parametrizovane krive tangentsni vektor se poklapa sa vektorom brzine, tj. $T(s) = \alpha'(s)$.

Dalje ćemo pretpostaviti da je svaka kriva klase C^k za neko $k \geq 2$ koje je dovoljno veliko tako da svi izvodu budu definisani.

Definicija 1.10. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna kriva klase C^2 . Vektor ubrzanja krive u tački t_0 je vektor $\alpha''(t_0)$, tj. izvod vektora brzine u tački t_0 .

Kod prirodno parametrizovanih krivih je $T'(s) = \alpha''(s)$. Na osnovu Leme 1.2 imamo da je $T' \cdot T = 0$. Zaključujemo da su kod prirodno parametrizovanih krivih, vektor brzine i vektor ubrzanja u proizvoljnoj tački s_0 ortogonalni.

U nastavku posmatramo krive u prostoru \mathbb{R}^3 .

Definicija 1.11. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva. Krivina krive α je

$$\kappa[\alpha](s) = \|T'(s)\| = \|\alpha''(s)\|.$$

Krivina krive meri odstupanje krive od toga da kriva bude prava linija. Prema tome je krivina prave konstantna i jednaka nuli. Posmatraćemo samo one krive čija je krivina različita od nule, tj. one krive koje nisu deo prave. Ukoliko je krivina različita od nule, tada imamo jedinstveno određen jedinični vektor $N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$. Na osnovu Leme 1.2 vektori $T(s)$ i $N(s)$ su ortogonalni.

Zbog toga vektor $N(s)$ zovemo vektorom normale. Kako bismo u svakoj tački krive imali ortonormiranu bazu, uvodimo vektor $B(s) = T(s) \times N(s)$. Prema definiciji vektorskog proizvoda u \mathbb{R}^3 ovaj vektor je ortogonalan na vektore $T(s)$ i $N(s)$ i $\|B(s)\| = 1$. Vektor $B(s)$ nazivamo vektorom binormale. Shodno tome, uvodimo sledeće definicije.

Definicija 1.12. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa[\alpha](s) \neq 0$ za $\forall s \in (a, b)$.

Vektorsko polje glavnih normala krive α je

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\kappa[\alpha](s)}.$$

Vektorsko polje binormala krive α je

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Frene-Sereov¹ reper krive α je ortonormirani reper $[T, N, B]$.

Prema Definiciji 1.12 vektor ubrzanja $\alpha''(s)$ i vektor normale $N(s)$ u tački s krive α su kolinearni sa koeficijentom kolinearnosti $\kappa[\alpha](s)$, tj.

$$\alpha''(s) = \kappa[\alpha](s)N(s).$$

Definicija 1.13. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa[\alpha](s) \neq 0$ za $\forall s \in (a, b)$. Torzija krive α je funkcija $\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s)$.

Torzija krive meri odstupanje krive od toga da kriva leži u ravni. Torzija ravanske krive je nula.

Teorema 1.2 (Frene-Sereove formule). *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva i $\kappa[\alpha](s) \neq 0$ za $\forall s \in (a, b)$. Tada je*

$$\begin{aligned} T'(s) &= k(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned}$$

za sve $s \in (a, b)$.

Definicija 1.14. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva i neka je $\tilde{\alpha}: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana kriva α . Naime, $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(s(t))$, pri čemu je $s(t)$ dužina luka. Ako su $\tilde{\kappa}, \tilde{\tau}$ i $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ redom krivina, torzija i Frene-Sereova ortonormirana baza krive $\tilde{\alpha}$, onda su krivina, torzija, tangentno vektorsko polje, vektorsko polje normala i vektorsko polje binormala krive α dati sa $\kappa(t) = \tilde{\kappa}(s(t))$, $\tau(t) = \tilde{\tau}(s(t))$, $T(t) = \tilde{T}(s(t))$, $N(t) = \tilde{N}(s(t))$ i $B(t) = \tilde{B}(s(t))$.

¹Jean Frederic Frenet (1816-1890), Joseph Alfred Serret (1819-1885) francuski matematičari

Teorema 1.3 (Uopštene Frene-Sereove formule). *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva sa brzinom $v(t) = \|\alpha'(t)\|$ i $\kappa[\alpha](t) \neq 0$ za $\forall t \in (a, b)$. Tada je*

$$\begin{aligned} T'(t) &= v(t)\kappa(t)N(t) \\ N'(t) &= -v(t)\kappa(t)T(t) + v(t)\tau(t)B(t) \\ B'(t) &= -v(t)\tau(t)N(t) \end{aligned}$$

za sve $s \in (a, b)$.

Lema 1.3. *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva. Vektor brzine i vektor ubrzanja krive α dati su formulama*

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= v(t)T(t), \\ \alpha''(t) &= v'(t)T(t) + v^2(t)\kappa(t)N(t). \end{aligned}$$

Kako je prirodnu parametrizaciju kriva često nemoguće eksplicitino izraziti, sledeća teorema prikazuje kako možemo izračunati Frene-Sereov reper, krivinu i torziju proizvoljne krive bez njene prirodne reparametrizacije.

Teorema 1.4. *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ regularna kriva i $\kappa[\alpha](t) \neq 0$ za $\forall t \in (a, b)$. Tada je:*

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}, \\ N(t) &= B(t) \times T(t), \\ \kappa(t) &= \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \\ \tau(t) &= \frac{[\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)]}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Dalje ćemo se baviti ravanskim krivama i za diferencijalnu geometriju ravnanskih krivih od značaja je linearno preslikavanje $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definisano kao:

$$J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1).$$

Geometrijski, preslikavanje J predstavlja rotaciju za ugao $\frac{\pi}{2}$ u smeru suprotnom od kazaljke na satu. Preslikavanje J ima sledeće osobine:

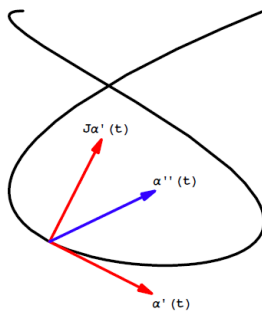
$$J^2 = -Id$$

$$Jp \cdot Jq = p \cdot q$$

$$Jp \cdot p = 0$$

za $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravanska kriva data sa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Tada je oznakom $J\alpha'$ dato $J\alpha' = (-y'(t), x'(t))$.



Slika 1: Geometrijska interpretacija preslikavanja J

Za krive u ravni, osim Definicije 1.11, moguće je dati novu definiciju za krivinu krive.

Definicija 1.15. Neka je $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravanska kriva. Tada je krivina krive α data sa

$$\kappa_z[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}. \quad (1.3)$$

Ovako definisana krivina se naziva označena krivina kako bi se razlikovala od krivine date Definicijom 1.11. Označena krivina može biti i pozitivna i negativna. Motivacija za definisanje označene krivine ravanskih kriva je sledeća. Neka je α kriva čiji je vektor brzine α' u svakoj tački jedinični. Postoje dva vektora koja su normalna na vektor brzine i paralelna sa vektorom ubrzanja. Te vektore dobijamo rotacijom vektora brzine za ugao $\frac{\pi}{2}$ u pozitivnom

i negativnom smeru. U zavisnosti od toga koji od ta dva vektora izaberemo za vektor normale, menja se i koeficijent kolinearnosti vektora normale i vektora ubrzanja. Koeficijent kolinearnosti je upravo označena krivina. Za vektor normale ćemo izabrati vektor koji dobijamo rotacijom vektora brzine za ugao $\frac{\pi}{2}$ u smeru suprotnom od kazaljke na satu. Taj vektor normale označavamo sa N_z .

Lema 1.4. *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravanska kriva data sa $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Formula za krivinu ravanske krive je*

$$\kappa_z[\alpha](t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}. \quad (1.4)$$

Dokaz. Zamenom $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t))$, $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$ i $J\alpha'(t) = (-y'(t), x'(t))$ u formulu (1.3) za krivinu ravanske krive dobijamo

$$\kappa_z[\alpha](t) = \frac{(x''(t), y''(t)) \cdot (-y'(t), x'(t))}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}} = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}.$$

■

Lema 1.5. *Neka je β prirodno parametrizovana ravanska kriva. Tada je*

$$\beta'' = \kappa_z[\beta]J\beta'. \quad (1.5)$$

Dokaz. Diferenciranjem jednakosti $\beta' \cdot \beta' = 1$ dobijamo $2(\beta'' \cdot \beta') = 0$. Odatle sledi da je β'' ortogonalno na β' . Kako je i $J\beta'$ ortogonalno na β' sledi da su vektori β'' i $J\beta'$ kolinearni vektori. Krivina krive β iznosi $\kappa_z[\beta] = \beta'' \cdot J\beta'$ odakle se vidi da je upravo krivina koeficijent kolinearnosti vektora β'' i $J\beta'$. ■

Krivina je kao i dužina krive geometrijsko svojstvo krive, tj. ne zavisi od parametrizacije krive. Međutim, za označenu krivinu ovo je samo delimično tačno. Znak označene krivine zavisi od parametrizacije krive.

Teorema 1.5. *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna ravanska kriva i $\beta: (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^2$ reparametrizacija krive α , tj. $\beta = \alpha \circ h$, gde je $h: (c, d) \rightarrow (a, b)$ difeomorfizam. Krivina ravanske krive je nezavisna od parametrizacije do na znak, tj.*

$$\kappa_z[\beta](u) = (\text{sign } h'(u))\kappa_z[\alpha](h(u)), \quad (1.6)$$

kad god je $h'(u) \neq 0$.

Dokaz. Važi $\beta' = (\alpha' \circ h)h'$ pa je $J\beta' = J(\alpha' \circ h)h'$ i $\beta'' = (\alpha'' \circ h)h'^2 + (\alpha' \circ h)h''$. Kada to zamenimo u formulu (1.3) dobijamo

$$\begin{aligned} \kappa_z[\beta] &= \frac{((\alpha'' \circ h)h'^2 + (\alpha' \circ h)h'') \cdot J(\alpha' \circ h)h'}{\|(\alpha' \circ h)h'\|^3} = \\ &= \left(\frac{h'^3}{|h'|^3} \right) \frac{(\alpha'' \circ h) \cdot J(\alpha' \circ h)}{\|(\alpha' \circ h)\|^3} = (\text{sign } h'(u))\kappa_z[\alpha](h(u)). \end{aligned}$$

■

Krivinu ravanske krive sada možemo računati na dva načina. Prvi način je dat Definicijom 1.11 za specijalni slučaj $n = 2$. Drugi način je dat Definicijom 1.3. Veza između ove dve krivine je data sledećom lemom.

Lema 1.6. *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva. Tada je*

$$\kappa[\alpha] = |\kappa_z[\alpha]|.$$

Dokaz. Na osnovu Definicije 1.11 i Leme 1.5 imamo

$$\kappa[\alpha] = \|\alpha''\| = \|\kappa_z[\alpha]J\alpha'\| = |\kappa_z[\alpha]| \|J\alpha'\| = |\kappa_z[\alpha]| \|\alpha'\| = |\kappa_z[\alpha]|.$$

■

2 Epicikloide

Od značaja za rad su krive epicikloide. U ovom delu ćemo reći nesto više o ovim krivama.

Neka su u ravni date dve kružnice $k_0 = k_0(O, a)$ i $k_1 = k_1(O_1, b)$. Kružnice se dodiruju u jednoj tački i kružnica k_1 se kotrlja po kružnici k_0 . Kružnicu k_1 ćemo zvati pokretna kružnica. Kriva epicikloida (hipocikloida) je kriva čiji je trag geometrijsko mesto tačaka koje opisuje proizvoljna tačka pokretne kružnice. Ukoliko se kružnice k_0 i k_1 dodiruju spolja, kriva je epicikloida. U suprotnom, ako se kružnice k_0 i k_1 dodiruju iznutra, kriva je hipocikloida. Dalje će biti razmatrane samo epicikloide. Za poluprečnike krugova k_0 i k_1 kod epicikloida važi da je $a \geq b$. Poluprečnike a i b ćemo zvati parametrima epicikloide.

Pod jednim svodom epicikloide podrazumevamo deo krive koji opiše tačka sa pokretne kružnice prilikom jednog obrtaja pokretne kružnice k_1 oko kružnice k_0 .

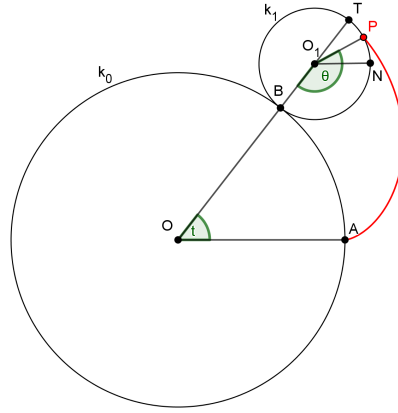
2.1 Parametarska jednačina epicikloide

U ovom delu je izvedena parametarska jednačina epicikloide.

Date su dve kružnice $k_0 = k_0(O, a)$ i $k_1 = k_1(O_1, b)$, pri čemu je $a > b$. Kružnica k_0 je sa centrom u koordinatnom sistemu i dodiruje spolja kružnicu k_1 na osi Ox u tački A . Tačka $P(x, y)$ koja opisuje trag epicikloide i čije koordinate želimo da odredimo se nalazi na pokretnoj kružnici i pre početka kotrljanja kružnice k_1 imala je početni položaj u tački A . Nakon kotrljanja kružnice se dodiruju u tački B .

Uvodimo oznake $\angle AOB = t$ i $\angle OO_1P = \angle BO_1P = \theta$. Centar kružnice k_1 ima koordinate $((a + b) \cos t, (a + b) \sin t)$. Kako kod ovog kretanja nema klizanja kružni lukovi \widehat{AB} i \widehat{BP} su jednaki. Iz formule za dužinu kružnog luka sledi $\widehat{AB} = \frac{at\pi}{180^\circ}$ i $\widehat{BP} = \frac{b\theta\pi}{180^\circ}$. Odatle je $at = b\theta$ i $\theta = \frac{at}{b}$.

Za položaj tačke P potrebno je još odrediti ugao koji prava O_1P zaklapa sa osom Ox . Tačka N je tačka sa kružnice k_1 takva da je O_1N paralelno sa osom Ox , pri čemu su $\angle NO_1P$ i ugao koji O_1P zaklapa sa osom Ox uglovi iste veličine kao uglovi sa paralelnim kracima. Tačka T je presek prave BO_1 i kružnice k_1 .



Slika 2: Parametarska jednačina epicikloide

Prema prethodnom važi $\angle NO_1T = \angle AOB = t$ i $\angle BO_1N = \pi - t$.

Traženi ugao je $\angle NO_1P = \angle BO_1P - \angle BO_1N = \theta - (\pi - t) = \theta + t - \pi$.

Na osnovu adicionih formula i $\theta = \frac{at}{b}$ važi

$$\cos(\theta + t - \pi) = -\cos(\theta + t) = -\cos\left(\frac{(a+b)t}{b}\right) \text{ i}$$

$$\sin(\theta + t - \pi) = -\sin(\theta + t) = -\sin\left(\frac{(a+b)t}{b}\right).$$

Konačno, koordinate tačke P su

$$x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{(a+b)t}{b}\right) \text{ i } y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{(a+b)t}{b}\right).$$

Prema tome, parametarska jednačina epicikloide sa parametrima a i b je

$$\text{epicycloid}[a, b](t) = (x(t), y(t)) \quad (2.1)$$

pri čemu je

$$x(t) = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{(a+b)t}{b}\right), \quad (2.2)$$

$$y(t) = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{(a+b)t}{b}\right). \quad (2.3)$$

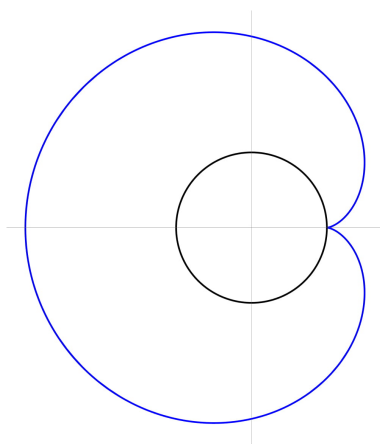
Epicikloida je zatvorena ako se tačka P nakon kotrljanja vrati u početni položaj. To će se desiti u slučaju kada je odnos poluprečnika a i b racionalan broj. Ako je odnos ceo broj epicikloida će podsećati na cvet sa brojem latica čiji je broj odnos poluprečnika a i b . Ako je odnos poluprečnika iracionalan broj, onda se epicikloida nikada neće zatvoriti i kotrljanjem tačke P do beskonačnosti dobili bismo kružni prsten.

2.2 Poznate epicikloide

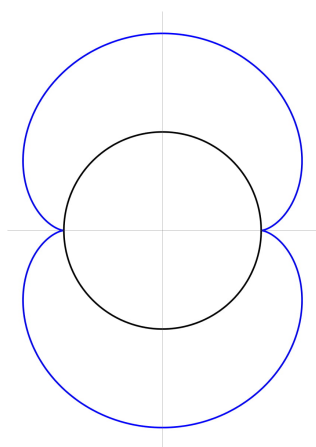
Kardioida

Najpoznatija epicikloida je kardioida. Kod kardioida je poluprečnik pokretne kružnice jednak poluprečniku kružnice po kojoj se kotrlja, tj. $a = b$. Tačka sa pokretne kružnice koja opisuje kardioidu zatvori krivu nakon jednog obrtaja pokretne kružnice, pa je prema tome kardioida epicikloida sa jednim svodom. Ime je dobila po srčanom obliku krive. Njena parametarska jednačina je

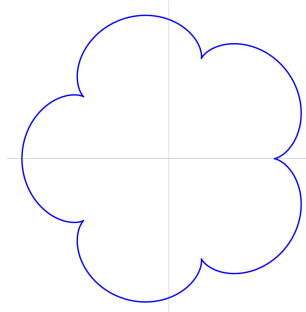
$$\text{epicycloid}[a, a](t) = a(2 \cos t - \cos(2t), 2 \sin t - \sin(2t)). \quad (2.4)$$



Slika 3: Kardioida



Slika 4: Nefroida



Slika 5: Ranunkloida

Nefroida

Sledeća poznata epicikloida je nefroida. Kod nefroide je poluprečnik kružnice po kojoj se kotrlja pokretna kružnica dva puta veći od poluprečnika pokretne kružnice, tj. $a = 2b$. Nefroida je epicikloida koja se zatvori nakon dva obrtaja pokretne kružnice. Njena parametarska jednačina je

$$\text{epicycloid}[2b, b](t) = b(3 \cos t - \cos(3t), 3 \sin t - \sin(3t)). \quad (2.5)$$

Ranunkloida

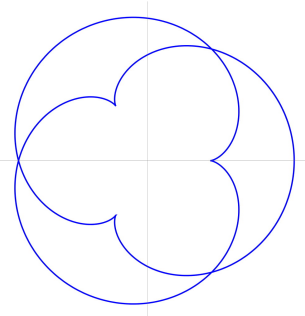
Ranunkloida je epicikloida kod koje je poluprečnik kružnice po kojoj se kotrlja pokretna kružnica pet puta veći od poluprečnika pokretne kružnice, tj. $a = 5b$. Izgled ove krive nas podseća na cvet sa 5 latica. Njena parametarska jednačina je

$$\text{epicycloid}[5b, b](t) = b(6 \cos t - \cos(6t), 6 \sin t - \sin(6t)). \quad (2.6)$$

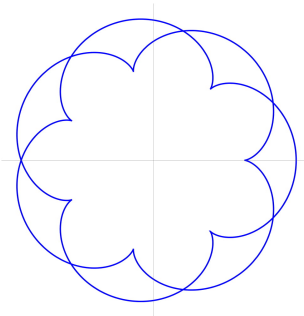
U nastavku su ilistrovane epicikloide kod kojih je odnos poluprečnika racionalan broj, ali nije ceo.

Epicikloida čiji je odnos poluprečnika $\frac{3}{2}$ ima parametarsku jednačinu

$$\text{epicycloid}[3, 2](t) = \left(5 \cos t - 2 \cos\left(\frac{5}{2}t\right), 5 \sin t - 2 \sin\left(\frac{5}{2}t\right) \right). \quad (2.7)$$



Slika 6: $\text{epicycloid}[3,2](t)$



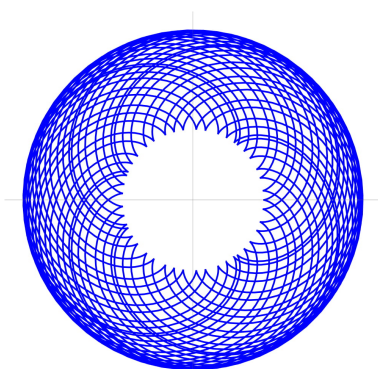
Slika 7: $\text{epicycloid}[7,2](t)$

Epicikloida čiji je odnos poluprečnika $\frac{7}{2}$ ima parametarsku jednačinu

$$\text{epicycloid}[7,2](t) = \left(9 \cos t - 7 \cos \left(\frac{9}{2}t \right), 9 \sin t - 7 \sin \left(\frac{9}{2}t \right) \right). \quad (2.8)$$

Epicikloida čiji je odnos poluprečnika iracionalan biće kružni prsten ako broj obrtaja pokretne kružnice teži beskonačno. Jedna takva epicikloida je

$$\text{epicycloid}[\sqrt{2},1](t) = \left((\sqrt{2} + 1) \cos t - \cos \left((\sqrt{2} + 1) t \right), \right. \\ \left. (\sqrt{2} + 1) \sin t - \sin \left((\sqrt{2} + 1) t \right) \right). \quad (2.9)$$



Slika 8: $\text{epicycloid}[\sqrt{2},1](t)$

3 Krive u ravni izvedene od krivih u ravni

U ovom poglavlju ćemo prikazati četiri načina za izvođenje novih ravninskih krivih od date ravnanske krive. Nove krive kojima ćemo se baviti su evolute, involute, paralelne krive i podnožnice.

3.1 Evolute

Definicija 3.1. Tačka $p \in \mathbb{R}^2$ se naziva centar krivine u tački q krive $\alpha : (a, b) \mapsto \mathbb{R}^2$ ako postoji kružnica γ sa centrom p koja ima zajedničku tangentu sa krivom α u tački q tako da su krivine isto orijentisanih krivih α i γ jednake u tački q .

Prema Definiciji 3.1 krivina kružnice γ jednaka je $\kappa_z[\alpha]$. Kako je krivina kružnice jednaka recipročnoj vrednosti poluprečnika kružnice, to znači da je uvek $\kappa_z[\alpha] \neq 0$. Dalje sledi da postoji prava l koja sadrži p i normalna je na krivu α u tački q , pri čemu rastojanje između tačaka p i q iznosi $\frac{1}{|\kappa_z[\alpha]|}$. Centri krivine krive α kreiraju novu ravnansku krivu koja se naziva evoluta krive α i čije precizna definicija sledeća.

Definicija 3.2. Evoluta regularne ravnanske krive α je kriva definisana sa

$$evolute[\alpha](t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa_z[\alpha](t)} \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (3.1)$$

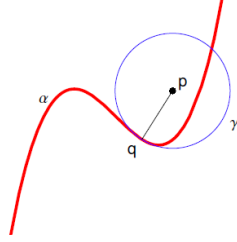
Kružnica sa centrom $evolute[\alpha](t_0)$ i poluprečnikom $\frac{1}{|\kappa_z[\alpha](t_0)|}$ i kriva α imaju istu tangentu, normalu i krivinu u tački $\alpha(t_0)$. Ovu kružnicu zovemo oskulatorna kružnica.

Kako važi da je $\kappa_z[\alpha](t) = \frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3}$, sledi da jednačinu evolute možemo kraće zapisati kao

$$evolute[\alpha](t) = \alpha(t) + \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)} J\alpha'(t). \quad (3.2)$$

Lema 3.1. Definicija evolute krive α je nezavisna od parametrizacije krive α , odnosno za bilo koji difeomorfizam $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ važi

$$evolute[\alpha \circ h] = evolute[\alpha] \circ h.$$



Slika 9: Centar krivine i osculatorna kružnica krive

Dokaz. Na osnovu Definicije 3.1 imamo

$$evolute[\alpha \circ h](t) = (\alpha \circ h)(t) + \frac{1}{\kappa_z[\alpha \circ h](t)} \frac{J(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|},$$

pa iz formule (1.6) dalje sledi

$$evolute[\alpha \circ h](t) = (\alpha \circ h)(t) + \frac{1}{(\text{sign } h'(t))\kappa_z[\alpha](h(t))} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)h'(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)h'(t)\|}.$$

Kako je krivina krive proizvoljne parametrizacije data sa

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{\alpha''(t) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad \text{i} \quad h'(t) = |h'(t)| \text{sign } h'(t) \text{ sledi}$$

$$\begin{aligned} evolute[\alpha \circ h](t) &= (\alpha \circ h)(t) + \frac{\|\alpha'(h(t))\|^3}{\alpha''(h(t)) \cdot J\alpha'(h(t))} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)}{\|\alpha'(h(t))\|} \\ &= (\alpha \circ h)(t) + \frac{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^3}{(\alpha'' \circ h)(t) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)} \frac{J(\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|} \\ &= \left(\alpha(t) + \frac{1}{\kappa[\alpha](t)} \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \right) \circ h = (evolute[\alpha] \circ h)(t) \end{aligned}$$

za sve $t \in (c, d)$ što je trebalo pokazati. ■

Definicija 3.3. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferencijabilno preslikavanje. Tačke u kojima je $\alpha'(t) = 0$ zovemo singularne tačke.

Definicija 3.4. Tangenta i normala na krivu $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ u proizvoljnoj tački $\alpha(t)$ krive α su prave koje prolaze kroz $\alpha(t)$ sa pravicima $\alpha'(t)$ i $J\alpha'(t)$ redom.

Sledeća teorema daje karakterizaciju evolute krive pomoću tangenti, normala i singularne tačke evolute.

Teorema 3.1. *Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna prirodno parametrizovana kriva. Tada:*

(1) *Evoluta krive α je jedinstvena kriva oblika $\gamma = \alpha + fJ\alpha'$ za neku funkciju f za koju se tangenta na krivu γ u svakoj tački $\gamma(t)$ poklapa sa normalom na krivu α u tački $\alpha(t)$.*

(2) *Pretpostavimo da $\kappa_z[\alpha]$ nigde nije nula. Evoluta krive α ima singularne tačke za one vrednosti t za koje je $\kappa_z[\alpha]'(t) = 0$.*

Dokaz. Kako je α prirodno parametrizovana kriva, tj. $\|\alpha'(s)\| = 1$ na osnovu Definicije 3.1 sledi

$$\text{evolute}[\alpha] = \alpha + \frac{J\alpha'}{\kappa_z[\alpha]}.$$

Diferenciranjem dobijemo

$$\text{evolute}[\alpha]' = \alpha' + \frac{J\alpha'' \cdot \kappa_z[\alpha] - \kappa_z[\alpha]' \cdot J\alpha'}{\kappa_z[\alpha]^2} = \alpha' + \frac{J\alpha''}{\kappa_z[\alpha]} - \frac{\kappa_z[\alpha]' \cdot J\alpha'}{\kappa_z[\alpha]^2}. \quad (3.3)$$

Na osnovu Leme 1.5 je $J\alpha'' = -\kappa_z[\alpha]\alpha'$ pa formula (3.3) postaje

$$\text{evolute}[\alpha]' = -\frac{\kappa_z[\alpha]'}{\kappa_z[\alpha]^2}J\alpha'. \quad (3.4)$$

Sledi da se tangenta na $\text{evolute}[\alpha]$ u tački $\text{evolute}[\alpha](s)$ poklapa sa normalom na krivu α u tački $\alpha(s)$ na osnovu Definicije 3.4.

Obratno, pretpostavimo $\gamma = \alpha + fJ\alpha'$. Na osnovu Leme 1.5 dobijamo

$$\gamma' = (1 - f\kappa_z[\alpha])\alpha' + f'J\alpha'.$$

Ako se tangenta na krivu γ u svakoj tački $\gamma(s)$ poklapa sa normalom na krivu α u tački $\alpha(s)$, onda je $f = \frac{1}{\kappa_z[\alpha]}$, pa je kriva γ evoluta krive α .

Drugi deo teoreme je direktna posledica formule (3.4). ■

Primer 3.1. Dokazati da je evoluta elipse kriva astroida.

Rešenje:

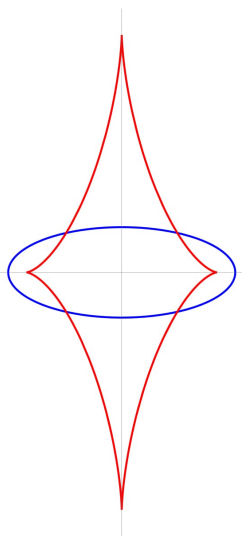
Neka je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ parametrizovana sa $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Na osnovu formule (3.2) imamo

$$\text{evolute}[\alpha](t) = (a \cos t, b \sin t) + \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)(-b \cos t, -a \sin t)}{(-a \cos t, -b \sin t) \cdot (-b \cos t, -a \sin t)}.$$

Dalje dobijemo:

$$\begin{aligned} \text{evolute}[\alpha](t) &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}{ab \cos^2 t + ab \sin^2 t} (-b \cos t, -a \sin t) \\ &= (a \cos t, b \sin t) + \left(\frac{a}{b} \sin^2 t + \frac{b}{a} \cos^2 t \right) (-b \cos t, -a \sin t) \\ &= \left(a \cos^3 t - \frac{b^2}{a} \cos^3 t, -\frac{a^2}{b} \sin^3 t + b \sin^3 t \right) \\ &= \left(\frac{(a^2 - b^2) \cos^3 t}{a}, \frac{(b^2 - a^2) \sin^3 t}{b} \right). \end{aligned}$$

Dobijena kriva je upravo astroida.



Slika 10: Evoluta elipse

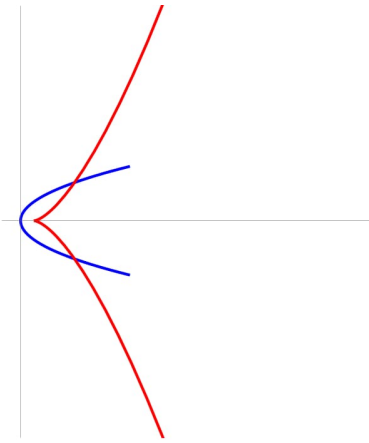
Primer 3.2. Dokazati da je semikubna parabola evoluta parabole.

Rešenje:

Neka je parabola parametrizovana sa $\alpha(t) = (t^2, t)$ za $t \geq 0$. Na osnovu formule (3.2) sledi:

$$\begin{aligned} \text{evolute}[\alpha](t) &= (t^2, t) + \frac{1 + 4t^2}{(2, 0) \cdot (-1, 2t)}(-1, 2t) \\ &= (t^2, t) + \frac{1 + 4t^2}{-2}(-1, 2t) \\ &= (t^2, t) + \left(\frac{1 + 4t^2}{2}, -t - 4t^3\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + 3t^2, -4t^3\right). \end{aligned}$$

Dobijena kriva je semikubna parabola.



Slika 11: Evoluta parabole

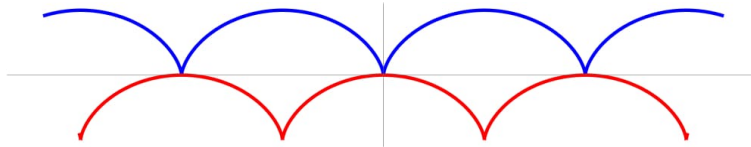
Primer 3.3. Cikloida je kriva čiji je trag geometrijsko mesto tačaka koje opisuje proizvoljna tačka sa kružnice koja se kotrlja bez klizanja po pravoj. Dokazati da je evoluta cikloide druga cikloida.

Rešenje:

Parametrizacija cikloide je $\alpha(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$. Na osnovu formule (3.2) sledi:

$$\begin{aligned} \text{evolute}[\alpha](t) &= (t - \sin t, 1 - \cos t) + \frac{2(1 - \cos t)(-\sin t, 1 - \cos t)}{(\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, 1 - \cos t)} \\ &= (t - \sin t, 1 - \cos t) + \frac{2(1 - \cos t)}{-\sin^2 t - \cos^2 t + \cos t}(-\sin t, 1 - \cos t) \\ &= (t - \sin t, 1 - \cos t) + \frac{2(1 - \cos t)}{-1 + \cos t}(-\sin t, 1 - \cos t) \\ &= (t + \sin t, \cos t - 1). \end{aligned}$$

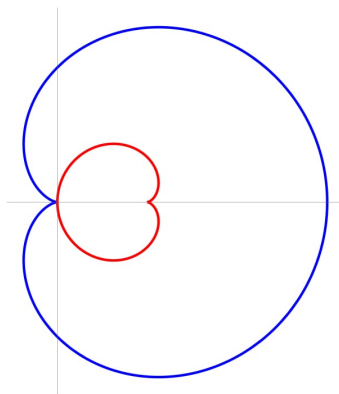
Evoluta cikloide je opet cikloida, koja se od prvobitne može dobiti translacijom.



Slika 12: Evoluta cikloide

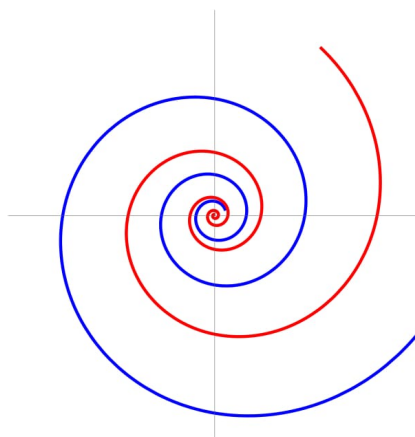
U nastavku su dati primeri nekih kriva i njihovih evoluta bez izvođenja parametarskih jednačina evoluta. Jednačine evoluta su izračunate pomoću programa *Mathematica*.

Primer 3.4. Evoluta kardioide je tri puta manja kardioida.



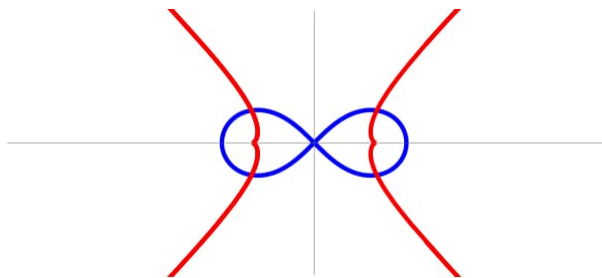
Slika 13: Evoluta kardioide

Primer 3.5. Evoluta logaritamske spirale je logaritamska spirala.



Slika 14: Evoluta logaritamske spirale

Primer 3.6. Evoluta Bernulijeve lemniskate je kriva čiji trag podseća na trag hiperbole.



Slika 15: Evoluta lemniskate

3.2 Involute

Involuta je geometrijski inverzna preslikavanju $\alpha \mapsto \text{evolute}[\alpha]$ koje krivoj pridružuje njenu evolutu. Ovo svojstvo će biti dokazano u Teoremi 3.2. Evoluta je vezana za involutu kao što je diferenciranje vezano sa neodređenim integralom. Pronalaženje involute zavisi od proizvoljne konstante koja je analogon integracionoj konstanti kod neodređenog integrala. Pokazaćemo da je evoluta involute krive α ponovo kriva α , što je analogon tome da je izvod neodređenog integrala funkcije f ponovo funkcija f .

Definicija 3.5. Neka je $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva i neka je $a < c < b$. Involuta krive β sa početkom u tački $\beta(s)$ je kriva data sa

$$\text{involute}[\beta, c](s) = \beta(s) + (c - s)\beta'(s). \quad (3.5)$$

Lema 3.2. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva. Tada je involuta krive α sa početkom u c za $a < c < b$ data sa

$$\text{involute}[\alpha, c](t) = \alpha(t) + (s(c) - s(t)) \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (3.6)$$

gde $t \mapsto s(t)$ označava dužinu luka krive α merenu iz proizvoljne tačke.

Dokaz. Neka je $\beta = \alpha \circ s^{-1}$ odgovarajuća reparametrizacija krive dužinom luka gde je $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$ i važi $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$. Kako je $\alpha = \beta \circ s$, dobijamo da je $\alpha'(t) = \beta'(s)s'(t) = \beta'(s)\|\alpha'(t)\|$. Ako ovo uvrstimo u Definiciju 3.5 dobijamo formulu (3.6) za involutu proizvoljne regularne krive. ■

Lema 3.3. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ regularna kriva i $a < c < b$. Rastojanje od tačke $\alpha(s_0)$ do tačke $\alpha(c)$ mereno duž krive α jednako je rastojanju od tačke $\text{involute}[\alpha, c](s_0)$ do $\alpha(s_0)$ mereno duž tangente na krivu α u tački $\alpha(s_0)$.

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je kriva α prirodno parametrizovana kriva. Tada je na osnovu formule (3.5)

$$\text{involute}[\alpha, c](s) - \alpha(s) = (c - s)\alpha'(s),$$

pa sledi

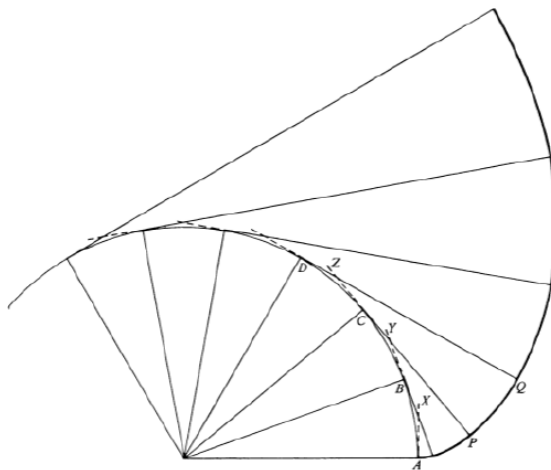
$$\|\text{involute}[\alpha, c](s) - \alpha(s)\| = |c - s|.$$

Desna strana $|s - c|$ je rastojanje od tačke $\alpha(s)$ do tačke $\alpha(c)$ mereno duž krive α , dok je leva strana rastojanje od $\text{involute}[\alpha, c](s)$ do $\alpha(s)$ mereno duž tangente na krivu α u tački $\alpha(s)$. ■

Lema 3.3 se fizički može predstaviti na sledeći način. Involuta regularne ravnanske krive α dobija se kao putanja zategnute žice odmotane sa krive α . Ova osobina je ilustrovana na primeru involute kružnice. Involuta kružnice je jedna od najpoznatijih involuta. Kružnica parametrizovana sa $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t)$ ima sledeću involutu:

$$\begin{aligned} involute[\alpha, c](t) &= (a \cos t, a \sin t) + (c - t)(-a \sin t, a \cos t) \\ &= a(\cos t - (c - t) \sin t, \sin t + (c - t) \cos t). \end{aligned}$$

Dobijena kriva ima trag koji podseća na Arhimedovu spiralu. Involuta kružnice se može skicirati sledećim postupkom. Podelimo kružnicu na 12 jednakih kružnih lukova tačkama A_1, A_2, \dots, A_{12} . U tim tačkama konstruišemo tangente t_1, t_2, \dots, t_{12} na kružnicu. Konstruišemo kružni luk ograničen tangentama t_1 i t_2 sa centrom u preseku ovih tangenata i koji prolazi kroz A_1 . Konstruišemo sledeći kružni luk ograničen tangentama t_2 i t_3 sa centrom u preseku ovih tangenata i koji se nadovezuje na prethodni kružni luk. Postupak ponovljamo i za ostale parove tangenti. Greška u ovakvom skiciranju se može smanjiti podelom kružnice na što veći broj jednakih kružnih lukova.



Slika 16: Skiciranje involute kružnice²

²Slika je preuzeta iz knjige Lockwood E.H., A book of curves

Sledeća lema prikazuje vezu između krivine početne krive i krivine njene involute.

Lema 3.4. *Neka je $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva i neka je γ involuta krive β sa početkom u c za $a < c < b$. Tada je krivina involute γ data sa*

$$\kappa_z[\gamma](s) = \frac{\text{sign}(\kappa_z[\beta](s))}{|s - c|}. \quad (3.7)$$

Dokaz. Na osnovu Definicije 3.5 i Leme 1.5 imamo

$$\gamma'(s) = \beta'(s) - \beta'(s) + (c - s)\beta''(s) = (c - s)\kappa_z[\beta](s)J\beta'(s), \quad (3.8)$$

$$\gamma''(s) = -\kappa_z[\beta](s)J\beta'(s) + (c - s)\kappa_z[\beta]'(s)J\beta'(s) + (c - s)\kappa_z[\beta](s)J\beta''(s),$$

$$\gamma''(s) = (-\kappa_z[\beta](s) + (c - s)\kappa_z[\beta]'(s))J\beta'(s) - (c - s)(\kappa_z[\beta](s))^2\beta'(s). \quad (3.9)$$

Iz prethodnog dobijamo:

$$\begin{aligned} \gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) &= -(c - s)\kappa_z[\beta](s)(-\kappa_z[\beta](s) + \\ &+ (c - s)\kappa_z[\beta]'(s))J\beta'(s) \cdot \beta'(s) + (c - s)^2(\kappa_z[\beta](s))^3\beta'(s) \cdot \beta'(s). \end{aligned}$$

Kako je $\beta'(s) \cdot \beta'(s) = 1$ i vektori $J\beta'(s)$, $\beta'(s)$ su normalni, sledi

$$\gamma''(s) \cdot J\gamma'(s) = (c - s)^2(\kappa_z[\beta](s))^3. \quad (3.10)$$

Ako se (3.10) zameni u formulu (1.3) dobijamo

$$\kappa_z[\gamma](s) = \frac{(c - s)^2(\kappa_z[\beta](s))^3}{|c - s|^3|\kappa_z[\beta](s)|^3 \|J\beta'(s)\|^3} = \frac{(\text{sign}(\kappa_z[\beta](s)))^3}{|c - s|} = \frac{\text{sign}(\kappa_z[\beta](s))}{|s - c|}.$$

Ovime je dokaz završen. ■

Teorema 3.2. *Neka je $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana kriva i neka je γ involuta krive β sa početkom u c za $a < c < b$. Tada je β evoluta krive γ .*

Dokaz. Prema definiciji evoluta krive γ je kriva ζ data sa

$$\zeta(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa_z[\gamma](s)} \frac{J\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}. \quad (3.11)$$

Zamenom formula (3.5), (3.7) i (3.8) u formulu (3.11) dobijamo

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \beta(s) + (c-s)\beta'(s) + \frac{|s-c|}{\text{sign}(\kappa_z[\beta](s))} \frac{-(c-s)\kappa_z[\beta](s)\beta'(s)}{|c-s||\kappa_z[\beta](s)||J\beta'(s)||} \\ &= \beta(s) + (c-s)\beta'(s) + \frac{1}{\text{sign}(\kappa_z[\beta](s))} (-(c-s)\text{sign}(\kappa_z[\beta](s))\beta'(s)) \\ &= \beta(s) + (c-s)\beta'(s) - (c-s)\beta'(s) = \beta(s).\end{aligned}$$

Prema prethodnom, β i ζ su ista preslikavanja i sledi da je β evoluta krive γ . ■

Primer 3.7. Dokazati da je involuta lančanice kriva traktrisa.

Rešenje:

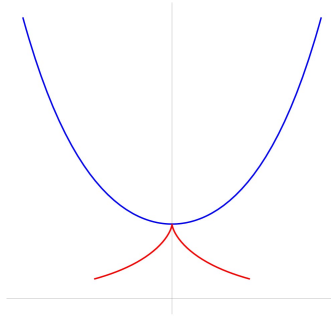
Neka je lančanica parametrizovana sa $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ovako datom parametrizacijom kriva α nije prirodno parametrizovana kriva, pa prema Lemi 3.2 prvo treba pronaći funkciju dužine luka $t \mapsto s(t)$ krive α .

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{1 + \sinh^2 u} du = \int_0^t \cosh u du = \sinh u \Big|_0^t = \sinh t.$$

Dalje na osnovu Leme 3.2 za $c = 0$ važi:

$$\begin{aligned}\text{involute}[\alpha, 0](t) &= (t, \cosh t) - \sinh t \frac{(1, -\sinh t)}{\cosh t} \\ &= \left(t - \tanh t, \frac{\cosh^2 t - \sinh^2 t}{\cosh t} \right) = \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t} \right).\end{aligned}$$

Dobijena kriva je traktrisa.



Slika 17: Involuta lančanice

3.3 Paralelne krive

Definisaćemo novu krivu γ koja je fiksnom rastojanju $r > 0$ od date krive α , kada r nije previše veliko. Motivacija za definisanje ovih krivih je pronalaženje krivih koje su u odnosu koji nas podseća na koncentrične krugove i paralelne prave. Neka su krive α i γ definisane na intervalu (a, b) i neka važi:

$$\gamma(t) - \alpha(t) = r \quad \text{i} \quad (\gamma(t) - \alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = 0$$

za $a < t < b$.

Definicija 3.6. Paralelna kriva regularne ravanske krive α na rastojanju r je ravanska kriva definisana sa

$$\text{parcurve}[\alpha, r](t) = \alpha(t) + \frac{rJ\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \quad (3.12)$$

Lema 3.5. Neka je $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ravanska kriva i neka je $h: (a, b) \rightarrow (c, d)$ difeomorfizam. Tada je

$$\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = \text{parcurve}[\alpha, r \text{ sign } h'](h(u)).$$

Dokaz. Na osnovu Definicije 3.6 važi

$$\begin{aligned} \text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) &= (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha \circ h)'(u)}{\|(\alpha \circ h)'(u)\|} \\ &= (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha' \circ h)(u)h'(u)}{\|(\alpha' \circ h)(u)h'(u)\|} \\ &= (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha' \circ h)(u)h'(u)}{|h'(u)|\|(\alpha'(h(u)))\|}. \end{aligned}$$

Kako je $h'(u) = |h'(u)| \text{ sign } h'(u)$, sledi

$$\begin{aligned} \text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) &= (\alpha \circ h)(u) + r \frac{J(\alpha' \circ h)(u) \text{ sign } h'(u)}{\|(\alpha'(h(u)))\|} \\ &= (\alpha \circ h)(u) + r \text{ sign } h'(u) \frac{J(\alpha' \circ h)(u)}{\|(\alpha'(h(u)))\|} \\ &= (\alpha(u) + r \text{ sign } h'(u) \frac{j\alpha'(u)}{\|(\alpha'(u))\|}) \circ h. \end{aligned}$$

Dakle, važi $\text{parcurve}[\alpha \circ h, r](u) = \text{parcurve}[\alpha, r \text{ sign } h'](h(u))$. ■

Lema 3.6. *Neka je α regularna ravanska kriva. Tada je kriva $\text{parcurve}[\alpha, r]$ regularna za one vrednosti t za koje je $1 - r\kappa_z[\alpha](t) \neq 0$. Takođe, njena krivina je data sa:*

$$\kappa_z[\text{parcurve}[\alpha, r]](t) = \frac{\kappa_z[\alpha](t)}{|1 - r\kappa_z[\alpha](t)|}.$$

Dokaz. Uvodimo oznaku $\beta(t) = \text{parcurve}[\alpha, r](t)$. Možemo pretpostaviti da je kriva α prirodno parametrizovana. Tada je $\beta = \alpha + rJ\alpha'$. Kriva β je regularna za sve t za koje je $\beta' \neq 0$. Na osnovu Leme 1.5 sledi da je

$$\beta' = \alpha' + rJ\alpha'' = \alpha' + rJ^2\kappa_z[\alpha]\alpha' = (1 - r\kappa_z[\alpha])\alpha'.$$

Da bi bio ispunjen uslov regularnosti, neophodno je da je $1 - r\kappa_z[\alpha](t) \neq 0$.

Dalje je

$$\beta'' = (1 - r\kappa_z[\alpha])\kappa_z[\alpha]J\alpha' - r\kappa_z[\alpha]'\alpha'.$$

Za označenu krivinu krive β dobijamo

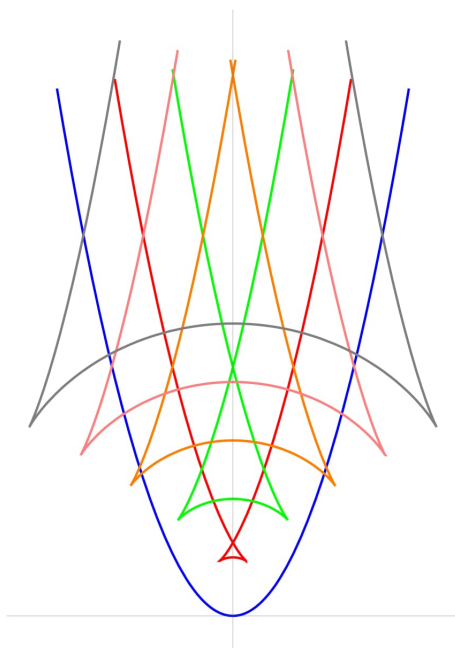
$$\kappa_z[\beta] = \frac{\beta'' \cdot J\beta'}{\|\beta'\|^3} = \frac{((1 - r\kappa_z[\alpha])\kappa_z[\alpha]J\alpha' - r\kappa_z[\alpha]'\alpha')(1 - r\kappa_z[\alpha])J\alpha'}{|1 - r\kappa_z[\alpha]|^3 \|\alpha'\|^3}.$$

Kako je $J\alpha' \cdot J\alpha' = 1$, a vektori α' , $J\alpha'$ su normalni pa je $\alpha' \cdot J\alpha' = 0$, sledi da važi

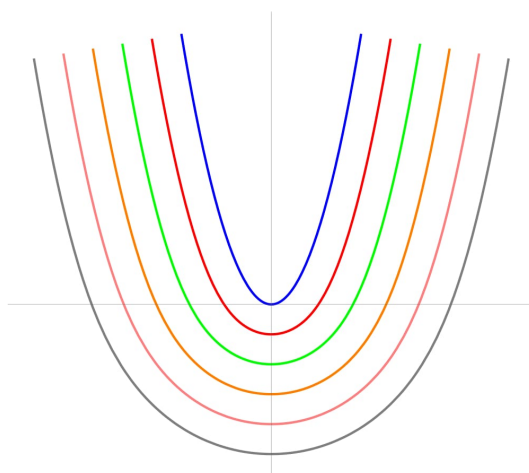
$$\kappa_z[\beta] = \frac{(1 - r\kappa_z[\alpha])^2\kappa_z[\alpha]}{|1 - r\kappa_z[\alpha]|^3} = \frac{\kappa_z[\alpha]}{|1 - r\kappa_z[\alpha]|}.$$

■

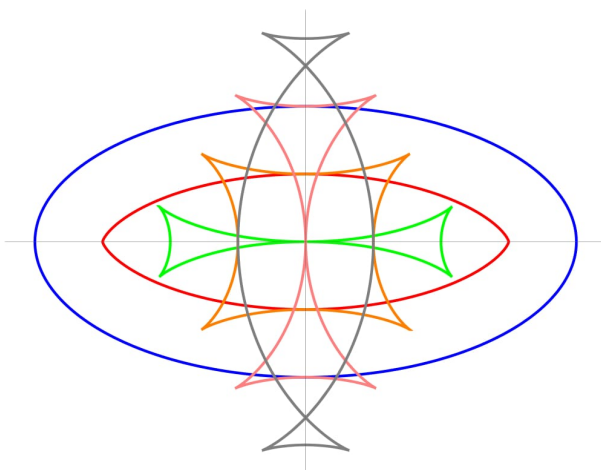
U nastavku slede primeri krivih i njihovih paralelnih kriva za različite vrednosti r koje može biti i pozitivno i negativno. Krive su ilustrovane u programu *Mathematica*.



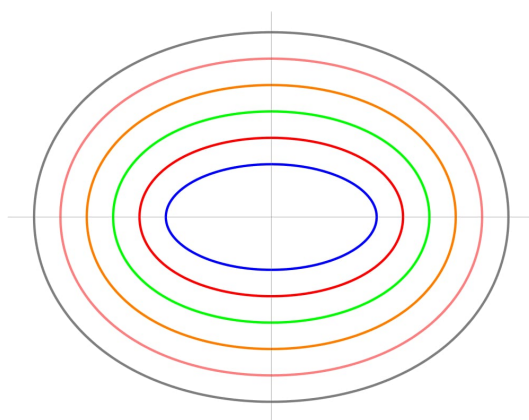
Slika 18: Paralelne krive parabole za $r > 0$



Slika 19: Paralelne krive parabole za $r < 0$



Slika 20: Paralelne krive elipse za $r > 0$



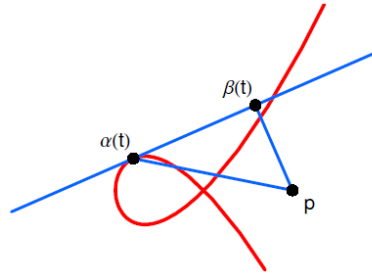
Slika 21: Paralelne krive elipse za $r < 0$

3.4 Podnožnice

Neka je α ravanska kriva i neka je tačka $p \in \mathbb{R}^2$. Trag preseka normale spuštene iz fiksirane tačke p koju zovemo pedalna tačka, sa tangentom krive α u tački $\alpha(t)$ se naziva podnožnica krive α u odnosu na tačku p . Ovako definisan trag označićemo sa $\beta(t)$. Sledi da je vektor $\beta(t) - p$ projekcija vektora $\alpha(t) - p$ u pravcu vektora normale $J\alpha'(t)$.

Definicija 3.7. Podnožnica regularne krive $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ u odnosu na fiksiranu tačku $p \in \mathbb{R}^2$ je kriva data sa

$$\text{pedal}[\alpha, p](t) = p + \frac{(\alpha(t) - p) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} J\alpha'(t).$$



Slika 22: Definicija podnožnice

Lema 3.7. Definicija podnožnice krive α je nezavisna od parametrizacije krive α , odnosno

$$\text{pedal}[\alpha \circ h] = \text{pedal}[\alpha] \circ h,$$

za bilo koji difeomorfizam $h: (c, d) \rightarrow (a, b)$.

Dokaz. Na osnovu Definicije 3.7 sledi

$$\text{pedal}[\alpha \circ h, p](t) = p + \frac{((\alpha \circ h)(t) - p) \cdot J(\alpha \circ h)'(t)}{\|(\alpha \circ h)'(t)\|^2} J(\alpha \circ h)'(t).$$

Dalje na osnovu definicije izvoda složene funkcije i homogenosti skalarnog proizvoda važi sledeće:

$$\begin{aligned}
 \text{pedal}[\alpha \circ h, p](t) &= p + \frac{((\alpha \circ h)(t) - p) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)h'(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)h'(t)\|^2} J(\alpha' \circ h)(t)h'(t) \\
 &= p + \frac{h'(t)((\alpha \circ h)(t) - p) \cdot J(\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^2 |h'(t)|^2} J(\alpha' \circ h)(t)h'(t) \\
 &= p + \frac{((\alpha \circ h)(t) - p) \cdot (J\alpha' \circ h)(t)}{\|(\alpha' \circ h)(t)\|^2} (J\alpha' \circ h)(t) \\
 &= \left(p + \frac{(\alpha(t) - p) \cdot J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|^2} J\alpha'(t)\right) \circ h \\
 &= (\text{pedal}[\alpha, p] \circ h)(t),
 \end{aligned}$$

za svako $t \in (c, d)$. Ovime je dokaz završen. ■

Primer 3.8. Naći podnožnicu hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ako je pedalna tačka koordinatni početak $(0, 0)$ i ako je pedalna tačka fokus hiperbole.

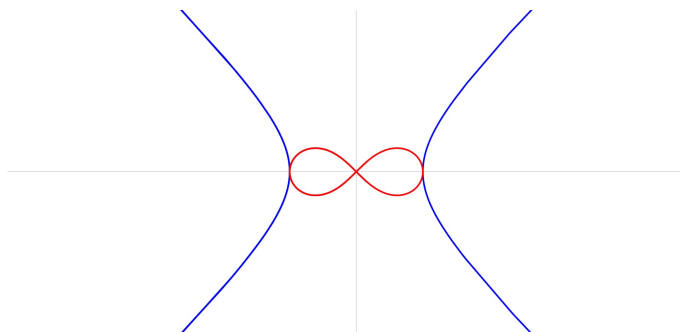
Rešenje:

Neka je hiperbola parametrozovana sa $\alpha(t) = (a \sec t, a \tan t)$. Prema Definiciji 3.7 za pedalnu tačku $(0, 0)$ važi:

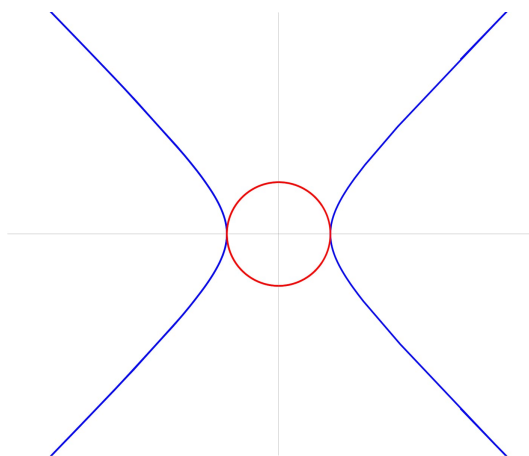
$$\begin{aligned}
 \text{pedal}[\alpha, (0, 0)](t) &= (0, 0) + \\
 &\quad \frac{\left(\left(\frac{a}{\cos t}, a \tan t\right) - (0, 0)\right) \cdot \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right)}{\frac{a^2 \sin^2 t}{\cos^4 t} + \frac{a^2}{\cos^4 t}} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right) \\
 &= \frac{\left(\frac{a}{\cos t}, a \tan t\right) \cdot \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right)}{\frac{a^2(\sin^2 t + 1)}{\cos^4 t}} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right) \\
 &= \frac{-\frac{a^2}{\cos^3 t} + \frac{a^2 \sin^2 t}{\cos^3 t}}{\frac{a^2(\sin^2 t + 1)}{\cos^4 t}} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right) \\
 &= -\frac{\cos^3 t}{\sin^2 t + 1} \left(-\frac{a}{\cos^2 t}, \frac{a \tan t}{\cos t}\right) \\
 &= \left(\frac{a \cos t}{\sin^2 t + 1}, -\frac{a \sin t \cos t}{\sin^2 t + 1}\right).
 \end{aligned}$$

Dobili smo da je podnožnica hiperbole lemniskata.

Fokus hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ je tačka $F(a\sqrt{2}, 0)$. Analognim računom koji je prikazan za pedalnu tačku $(0, 0)$ dobićemo da je podnožnica u slučaju kada je pedalna tačka fokus hiperbole kružnica poluprečnika a sa centrom u tački $(0, 0)$.



Slika 23: Podnožnica hiperbole čija je pedalna tačka koordinatni početak



Slika 24: Podnožnica hiperbole čija je pedalna tačka fokus hiperbole

Primer 3.9. Naći podnožnicu jedinične kružnice parametrizovane sa $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ u odnosu na pedalnu tačku (x_0, y_0) .

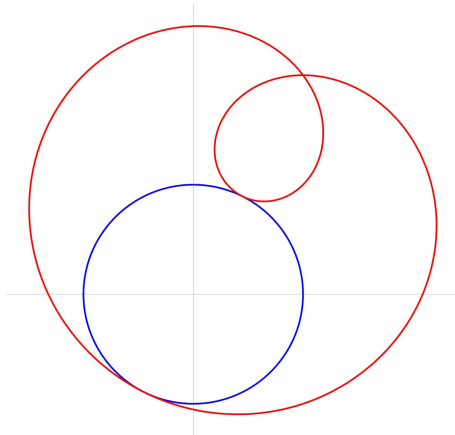
Rešenje:

Prema Definiciji 3.7 važi:

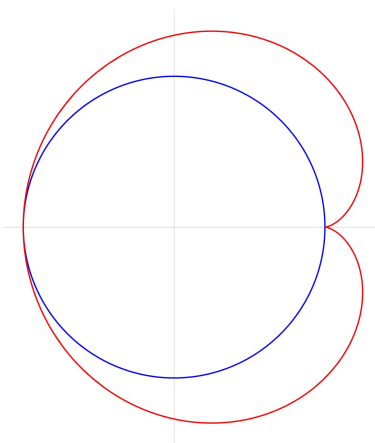
$$\begin{aligned}
 \text{pedal}[\alpha, (x_0, y_0)](t) &= \\
 &= (x_0, y_0) + \frac{((\cos t, \sin t) - (x_0, y_0)) \cdot (-\cos t, -\sin t)}{1} (-\cos t, -\sin t) \\
 &= (x_0, y_0) + \frac{(\cos t - x_0, \sin t - y_0) \cdot (-\cos t, -\sin t)}{1} (-\cos t, -\sin t) \\
 &= (x_0, y_0) + (x_0 \cos t + y_0 \sin t - 1)(-\cos t, -\sin t) \\
 &= (x_0 - x_0 \cos^2 t - y_0 \sin t \cos t + \cos t, y_0 - y_0 \sin^2 t - x_0 \cos t \sin t + \sin t) \\
 &= (x_0 \sin^2 t - y_0 \sin t \cos t + \cos t, y_0 \cos^2 t - x_0 \cos t \sin t + \sin t).
 \end{aligned}$$

Podnožnica kružnice je dakle upravo Paskalov puž. Specijalno, ako pedalna tačka pripada kružnici, podnožnica kružnice je kardioida.

Ako je pedalna tačka centar date kružnice sledi da je podnožnica kruga isti ta kružnica, tj. $\text{pedal}[\alpha, (0, 0)](t) = (\cos t, \sin t)$.



Slika 25: Podnožnica kružnice čija pedalna tačka ne pripada kružnici



Slika 26: Podnožnica kružnice čija je pedalna tačka na kružnici

Primer 3.10. Naći podnožnicu parabole ako je pedalna tačka teme parabole ili fokus parabole.

Rešenje:

Neka je parabola parametrizovana sa $\alpha(t) = (t^2, t)$, $t \geq 0$. Prema Definiciji 3.7 za proizvoljnu pedalnu tačku (x_0, y_0) važi:

$$\begin{aligned} \text{pedal}[\alpha, (x_0, y_0)](t) &= (x_0, y_0) + \frac{((t^2, t) - (x_0, y_0)) \cdot (-1, 2t)}{1 + 4t^2} (-1, 2t) \\ &= (x_0, y_0) + \frac{t^2 + x_0 - 2y_0t}{1 + 4t^2} (-1, 2t) \\ &= (x_0, y_0) + \frac{t^2 + x_0 - 2y_0t}{1 + 4t^2} (-1, 2t) \\ &= \left(\frac{(4x_0 - 1)t^2 + 2y_0t}{1 + 4t^2}, \frac{2t^3 - 2x_0t + y_0}{1 + 4t^2} \right). \end{aligned}$$

Dobili smo podnožnicu parabole čija je pedalna tačka proizvoljna tačka. Teme parabole je tačka $(0, 0)$ pa na osnovu prethodnog sledi:

$$\text{pedal}[\alpha, (0, 0)](t) = \left(\frac{t^2}{1 + 4t^2}, \frac{2t^3}{1 + 4t^2} \right).$$

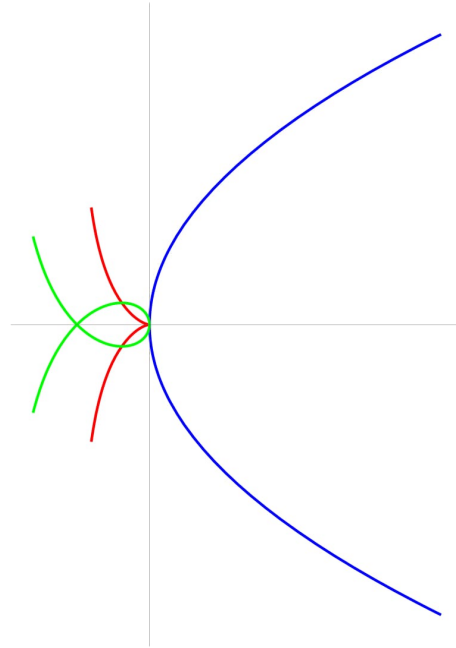
Dobijena podnožnica predstavlja krivu koja se zove Dioklesova cisoida.

Fokus parabole je tačka $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ pa na osnovu prethodnog sledi da je podnožnica prava $x = 0$, tj. $pedal\left[\alpha, \left(\frac{1}{4}, 0\right)\right](t) = \left(0, \frac{2t^2 - \frac{1}{2}t}{1 + 4t^2}\right)$.

U ostalim slučajevima podnožnica parabole je kriva strofoida. Specijalno, ako je pedalna tačka $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, tj. tačka preseka direktrise i x-ose, za podnožnicu dobijamo desnu strofoidu

$$pedal\left[\alpha, \left(-\frac{1}{4}, 0\right)\right](t) = \left(\frac{-2t^2}{1 + 4t^2}, \frac{2t^3 + \frac{1}{2}}{1 + 4t^2}\right).$$

Na slici 3.4 crvenom bojom je naslikana Dioklesova cisoida, a zelenom strofoida.



Slika 27: Podnožnice parabole

4 Krive u prostoru izvedene od krivih u ravni

Ovo poglavlje je posvećeno novim krivama u prostoru koje su izvedene od krivih u ravni, konkretno od krivih epicikloida. Nove krive su krive čiji trag leži na sferi i koje imaju konstantan nagib.

4.1 Sferne krive

U ovom poglavlju ćemo pokazati koje osobine je potrebno i dovoljno da kriva zadovoljava da bi njen trag pripadao sferi i obrnuto, koje osobine kriva zadovoljava ako trag krive već pripada sferi.

Teorema 4.1. *Neka je $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana prostorna kriva sa krivinom κ i torzijom τ . Pretpostavimo da β leži na sferi poluprečnika $c > 0$ sa centrom $q \in \mathbb{R}^3$. Tada:*

1. $\kappa \geq \frac{1}{c}$;

2. κ i τ su u relaciji

$$\tau^2 \left(c^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2; \quad (4.1)$$

3. Ako je $\kappa'(t_0) = 0$ onda je $\tau(t_0) = 0$ ili $\kappa(t_0) = \frac{1}{c}$;

4. $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)'$;

5. Ako je $\kappa'(t_0) = \kappa''(t_0) = 0$ onda je $\tau(t_0) = 0$;

6. $\kappa \equiv \frac{1}{a}$ ako i samo ako je β kružnica poluprečnika a koja je u preseku sfere i neke ravni.

Dokaz. Pretpostavimo da trag krive β leži na sferi poluprečnika $c > 0$. Tada je $\|\beta - q\| = c$. Diferenciranjem ove jednakosti i korišćenjem Frene-Sereovih formula datih Teoremom 1.2 dobijamo

$$(\beta - q) \cdot T = 0. \quad (4.2)$$

Ako ponovimo diferenciranje dobijamo

$$1 + (\beta - q) \cdot T' = 0.$$

Dalje je

$$1 + (\beta - q) \cdot (\kappa N) = 0. \quad (4.3)$$

Kako je $|(\beta - q) \cdot (\kappa N)| = 1$, na osnovu Koši-Švarcove nejednakosti dobijamo

$$1 = |(\beta - q) \cdot (\kappa N)| \leq \kappa \|\beta - q\| \|N\| = \kappa c.$$

Konačno $1 \leq \kappa c$ čime je prvi deo teoreme dokazan.

Diferenciranjem jednakosti (4.3) i korišćenjem Frene-Sereovih formula dobije se

$$\begin{aligned} 0 &= T \cdot (\kappa N) + (\beta - q) \cdot (\kappa' N + \kappa(-\kappa T + \tau B)) \\ 0 &= \kappa'(\beta - q) \cdot N + \kappa\tau(\beta - q) \cdot B \\ 0 &= -\frac{\kappa'}{\kappa} + \kappa\tau(\beta - q) \cdot B. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\tau(\beta - q) \cdot B = \frac{\kappa'}{\kappa^2}. \quad (4.4)$$

Iz (4.3) direktno sledi

$$(\beta - q) \cdot N = -\frac{1}{\kappa}. \quad (4.5)$$

U Frene-Sereovoj bazi $\tau(\beta - q)$ možemo zapisati

$$\tau(\beta - q) = (\tau(\beta - q) \cdot T)T + (\tau(\beta - q) \cdot N)N + (\tau(\beta - q) \cdot B)B. \quad (4.6)$$

Na osnovu formula (4.2), (4.4) i (4.5), formula (4.6) dalje je

$$\tau(\beta - q) = -\frac{\tau}{\kappa}N + \frac{\kappa'}{\kappa^2}B. \quad (4.7)$$

Normiranjem jednakosti (4.7) sledi

$$\tau^2 \|\beta - q\|^2 = \tau^2 c^2 = \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2.$$

Konačno sređivanjem izraza dobijamo $\tau^2 \left(c^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2$.

Treći deo teoreme je direktna posledica drugog dela teoreme.

Iz $\tau(\beta - q) \cdot B = \frac{\kappa'}{\kappa^2}$ diferenciranjem dobijamo

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)' = \tau'(\beta - q) \cdot B + \tau(T \cdot B + (\beta - q) \cdot (-\tau N)) = \frac{\tau'}{\tau} \tau(\beta - q) \cdot B - \tau^2(\beta - q) \cdot N.$$

Na osnovu formula (4.4) i (4.5) dalje je

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)' = \frac{\kappa' \tau'}{\kappa^2 \tau} + \frac{\tau^2}{\kappa}. \quad (4.8)$$

Iz jednakosti $\left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' = \left(\frac{1}{\tau} \right)' \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right) + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)'$ i formule (4.8) dalje je

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)' = -\frac{\tau'}{\tau^2} \frac{\kappa'}{\kappa^2} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{\kappa' \tau'}{\kappa^2 \tau} + \frac{\tau^2}{\kappa} \right) = -\frac{\tau'}{\tau^2} \frac{\kappa'}{\kappa^2} + \frac{\kappa' \tau'}{\tau^2 \kappa^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\tau^2}{\kappa} = \frac{\tau}{\kappa}.$$

Ovime je četvrti deo teoreme dokazan. Peti deo teoreme je direktna posledica četvrtog dela teoreme. Dokazaćemo sada šesti deo teoreme.

Ako važi $\kappa = \frac{1}{a}$ jednakost (4.5) postaje $(\beta - q) \cdot N = -a$. Diferenciranjem i primenom Frene-Sereovih formula dobijamo

$$T \cdot N + (\beta - q) \cdot N' = (\beta - q) \cdot (\kappa T + \tau \cdot B) = \tau(\beta - q) \cdot B = 0.$$

Razmotrimo jednakost $\tau(\beta - q) \cdot B = 0$ u dva slučaja.

U prvom slučaju pretpostavimo da važi $\tau \neq 0$. Dalje sledi $(\beta - q) \cdot B = 0$. Odatle diferenciranjem dobijamo $-\tau(\beta - q) \cdot N = 0$. To znači da je $(\beta - q) \cdot N = 0$, što je kontradikcija sa formulom (4.5).

U drugom slučaju pretpostavimo da važi $\tau = 0$. Iz pretpostavke direktno sledi da je β ravanska kriva. Kako je β ujedno i sferna kriva, to znači da je β kriva koja je u preseku sfere i neke ravni. ■

Teorema 4.2. *Neka je $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana prostorna kriva sa krivinom κ i torzijom τ koje zadovoljavaju (4.1). Pretpostavimo da su κ , τ i κ' različiti od nule. Tada β leži na sferi poluprečnika c sa centrom $q \in \mathbb{R}^3$.*

Dokaz. Neka je kriva γ data u terminima krive β parametrizacijom

$$\gamma(t) = \beta(t) + \frac{1}{\kappa(t)}N(t) - \frac{\kappa'(t)}{\tau(t)\kappa^2(t)}B(t). \quad (4.9)$$

Diferenciranjem (4.9) i korišćenjem Frene-Sereovih formula sledi da je

$$\gamma' = T - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T + \tau B) - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' B + \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right) \tau N.$$

Odnosno to je,

$$\gamma' = \left(\frac{\tau}{\kappa} - \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'\right) B. \quad (4.10)$$

Ako jednakost (4.1) koju zadovoljavaju krivina i torzija zapišemo u drugačijem obliku $\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} = c^2$ i potom je diferenciramo, dobijamo sledeće

$$2\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' - 2\frac{\kappa\kappa'}{\kappa^4} = 0.$$

Odatle je

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' = \frac{\kappa'}{\kappa^3}. \quad (4.11)$$

Iz jednakosti (4.10) i (4.11) dobijamo

$$\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\gamma' = \left(\frac{\tau}{\kappa} \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} - \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'\right) B = \left(\frac{\tau}{\kappa} \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2} - \frac{\kappa'}{\kappa^3}\right) B = 0.$$

Kako je $\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)\gamma' = 0$ sledi da je $\kappa'\gamma' = 0$. To znači da je $\gamma'(t) = 0$ za svako t jer je pretpostavljeno da je $\kappa' \neq 0$. Tada je $\gamma(t)$ konstantno preslikavanje i postoji $q \in \mathbb{R}^3$ tako da je $\gamma(t) = q$ za svako t . Konačno dobijamo

$$\beta(t) - q = -\frac{1}{\kappa(t)}N(t) - \frac{\kappa'(t)}{\tau(t)\kappa^2(t)}B(t). \quad (4.12)$$

Normiranjem (4.12) i na osnovu formule (4.1) sledi $\|\beta(t) - q\|^2 = c^2$. Ovime je pokazano da β leži na sferi sa centrom q i poluprečnikom c . ■

4.2 Krive konstantnog nagiba

Kružni heliks je prostorna kriva parametrizovana sa $\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \in [0, 2\pi)$. To je kriva konstantne krivine $\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$ i konstantne torzije $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$. Prema tome, odnos torzije i krivine je konstantan i $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{b}{a}$. Zanima nas da li postoji još krivih sa ovom osobinom. Pokazaćemo da ukoliko je odnos torzije i krivine konstantan, onda je ugao između krive i nekog fiksiranog vektora takođe konstantan. To je motivacija za sledeću definiciju.

Definicija 4.1. Kriva $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ je kriva konstantnog nagiba u odnosu na jedinični vektor $u \in \mathbb{R}^3$ ako je ugao $\phi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, ugao između vektora u i jediničnog tangentnog vektora T krive γ konstantan. Odnosno, važi

$$T \cdot u = \cos \phi$$

i $\text{ctg } \phi$ zovemo nagibom krive γ .

Lema 4.1. Neka kriva $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ima konstantan nagib u odnosu na neki jedinični vektor u i neka je $\kappa \neq 0$. Tada $\frac{\tau}{\kappa}$ ima konstantnu vrednost $\pm \text{ctg } \phi$.

Dokaz. Bez gubitka opštosti možemo pretpostaviti da je γ prirodno parametrizovana kriva. Diferenciranjem jednakosti $T \cdot u = \cos \phi$ dobijamo $(\kappa N) \cdot u = 0$. Odatle sledi da je vektor u normalan na vektor normale krive γ pa je

$$u = T \cos \phi \pm B \sin \phi.$$

Kada diferenciramo ovu jednakost dobijemo

$$0 = N(\kappa \cos \phi \mp \tau \sin \phi).$$

Dalje sledi $\kappa \cos \phi \mp \tau \sin \phi = 0$. Odatle je $\frac{\tau}{\kappa} = \pm \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \pm \text{ctg } \phi$. ■

Lema 4.2. Neka je $\beta: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ prirodno parametrizovana ravanska kriva i $\beta(s) = (b_1(s), b_2(s))$. Definišemo novu prostornu krivu γ sa

$$\gamma(s) = (b_1(s), b_2(s), s \cos \psi),$$

gde je ψ konstantno. Tada je γ konstantne brzine $\sqrt{1 + \cos^2 \psi}$ i konstantnog nagiba $\cos \psi$ u odnosu na vektor $u = (0, 0, 1)$.

Dokaz. Brzina krive γ je $\|\gamma'\| = \sqrt{b_1'^2 + b_2'^2 + \cos^2 \psi}$. Kako je $\|\beta'\| = 1$, sledi da je $\|\gamma'\| = \sqrt{1 + \cos^2 \psi}$.

Prema Definiciji 4.1

$$\cos \phi = T \cdot u = \frac{\gamma'(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|\gamma'\|} = \frac{\cos \psi}{\sqrt{1 + \cos^2 \psi}}.$$

Dalje je $\cos^2 \phi = \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos^2 \psi}$ i $\sin^2 \phi = \frac{1}{1 + \cos^2 \psi}$.

Kako je $\operatorname{ctg}^2 \phi = \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi} = \frac{\frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos^2 \psi}}{\frac{1}{1 + \cos^2 \psi}} = \cos^2 \psi$, konačno dobijamo $\operatorname{ctg} \phi = \cos \psi$ što je i trebalo dokazati. ■

Lema 4.3. *Neka je $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana prostorna kriva konstantnog nagiba $\operatorname{ctg} \phi$ u odnosu na vektor $u \in \mathbb{R}^3$. Neka je β projekcija krive γ na ravan koja je normalna na vektor u tj,*

$$\beta(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot u)u, \quad (4.13)$$

za $a < s < b$. Tada β ima konstantnu brzinu $|\sin \phi|$. Krivina krive γ i označena krivina krive β su u sledećoj relaciji

$$\kappa[\gamma] = \pm \kappa_z[\beta] \sin^2 \phi. \quad (4.14)$$

Dokaz. Neka su T_β i T_γ jedinični tangentni vektori krivih β i γ redom. Tada je $T_\beta = \frac{\beta'}{\|\beta'\|}$ i $T_\gamma = \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$. Dalje na osnovu formule (4.13) i činjenice da je γ konstantnog nagiba $\operatorname{ctg} \phi$ u odnosu na vektor u , važi

$$\|\beta'\| T_\beta = \beta' = T_\gamma - (T_\gamma \cdot u)u = T_\gamma - (\cos \phi)u.$$

Prema prethodnom je

$$T_\gamma = \|\beta'\| T_\beta + (\cos \phi)u. \quad (4.15)$$

Iz formule (4.15) i činjenice da je γ prirodno parametrizovana kriva, dobijamo

$$1 = \|T_\gamma\|^2 = \|\beta'\|^2 + \cos^2 \phi.$$

Odatle sledi $||\beta'|| = |\sin \phi|$, prema čemu je β konstantne brzine $|\sin \phi|$.

Intezitet vektora N_γ je $||N_\gamma|| = \left| \left| \frac{T'\gamma}{\kappa[\gamma]} \right| \right| = \frac{\kappa[\gamma]}{\kappa[\gamma]} = 1$. Takođe je intezitet vektora JT_β jednak $||JT_\beta|| = ||T_\beta|| = 1$.

Diferenciranjem formule (4.15) i primenom uopštenih Frene-Sereovih formula dobijamo

$$\kappa[\gamma]N_\gamma = T'_\gamma = ||\beta'|| T'_\beta = ||\beta'|| ||\beta'|| \kappa[\beta]N_\beta = \pm(\sin^2 \phi)\kappa_z[\beta]JT_\beta. \quad (4.16)$$

Sledi da su vektori N_γ i JT_β kolinearni. Dalje normiranjem jednakosti (4.16) dobijamo $\kappa[\gamma] = \pm(\sin^2 \phi)\kappa_z[\beta]$ čime je dokaz završen. ■

Lema 4.4. *Neka je $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ prirodno parametrizovana prostorna kriva koja ima konstantan nagib $\text{ctg} \phi$ u odnosu na vektor $u \in \mathbb{R}^3$, za $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Takođe neka γ leži na sferi poluprečnika $c > 0$.*

1. *Krivina i torzija krive γ su date sledećim formulama*

$$\kappa[\gamma](s)^2 = \frac{1}{c^2 - s^2 \text{ctg}^2 \phi}, \quad (4.17)$$

$$\tau[\gamma](s)^2 = \frac{1}{c^2 \text{tg}^2 \phi - s^2}. \quad (4.18)$$

2. *Neka je β projekcija krive γ na ravan koja je normalna na vektor u . Tada je označena krivina krive β data sa*

$$\kappa_z[\beta](s_1)^2 = \frac{1}{c^2 \sin^4 \phi - s_1^2 \cos^2 \phi}, \quad (4.19)$$

gde je $s_1 = s \sin \phi$ funkcija dužine luka krive β .

3. *Neka je poluprečnik sfere $c = a+2b$ i ugao ϕ dat sa $\cos \phi = \frac{a}{a+2b}$. Tada je kriva β projekcija krive γ na ravan normalnu na vektor u epicikloida $\text{epicycloid}[a, b](t)$ čija je parametrizacija data formulom (2.1).*

Dokaz. Kako je γ sferna kriva, prema Lemi 4.1 za torziju krive γ važi $\tau = \kappa \operatorname{ctg} \phi$. Kada vrednost torzije zamenimo u formulu (4.1) iz Teoreme 4.1 dobijemo

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 = \tau^2 \left(c^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = (\kappa^2 c^2 - 1) \operatorname{ctg}^2 \phi.$$

Sređivanjem izraza dobijemo

$$\frac{\kappa'}{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 c^2 - 1}} = \pm \operatorname{ctg} \phi.$$

Integraljenjem sledi

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 c^2 - 1} = \pm s \operatorname{ctg} \phi.$$

Sređivanjem izraza po κ dobijamo $\frac{\kappa^2 c^2 - 1}{\kappa^2} = s^2 \operatorname{ctg}^2 \phi$ pri čemu sledi tražena

relacija $\kappa^2 = \frac{1}{c^2 - s^2 \operatorname{ctg}^2 \phi}$.

Iz formule (4.17) i $\tau = \kappa \operatorname{ctg} \phi$ sledi formula (4.18)

$$\tau^2 = \frac{\operatorname{ctg}^2 \phi}{c^2 - s^2 \operatorname{ctg}^2 \phi} = \frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \phi}}{c^2 - \frac{s^2}{\operatorname{tg}^2 \phi}} = \frac{1}{c^2 \operatorname{tg}^2 \phi - s^2}.$$

Drugi deo leme je direktna posledica Leme 4.3 i formule (4.17) prvog dela

Leme 4.4. Iz Leme 4.3 imamo $\kappa_z[\beta](s_1)^2 = \frac{\kappa[\gamma](s_1)^2}{\sin^4 \phi}$. Prema formuli (4.17)

to je dalje $\kappa_z[\beta](s_1)^2 = \frac{\frac{1}{c^2 - s_1^2 \operatorname{ctg}^2 \phi}}{\sin^4 \phi} = \frac{1}{\sin^4 \phi (c^2 - s_1^2 \frac{\cos^2 \phi}{\sin^2 \phi})} = \frac{1}{c^2 \sin^4 \phi - s^2}$.

Ostalo je dokazati još treći deo leme. Kako prema iskazu leme ϕ dato sa $\cos \phi = \frac{a}{a + 2b}$ sledi da je

$$\sin^4 \phi = (1 - \cos^2 \phi)^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(a + 2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a + b)^2}{(a + 2b)^4}.$$

Označena krivina krive β data formulom (4.19) sada postaje

$$\kappa_z[\beta](s_1) = \frac{1}{(a+2b)^2 \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4} - s_1^2 \frac{a^2}{(a+2b)^2}} = \frac{(a+2b)^2}{16b^2(a+b)^2 - s_1^2 a^2}.$$

Dalje je

$$\frac{1}{\kappa_z[\beta](s_1)} = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{s_1^2 a^2}{(a+2b)^2}. \quad (4.20)$$

Formulom (4.20) je data prirodna jednačina epicikloide. Kako je epicikloida određena ovom jednačinom do na izometriju, sledi da je kriva β epicikloida *epicycloid* $[a, b]$ data parametrizacijom (2.1). ■

4.3 Nove sferne krive konstantnog nagiba

Sada ćemo definisati neke nove krive koje imaju konstantan nagib i čiji trag leži na sferi. Nove krive ćemo zvati sfernim heliksima sa parametrima a i b . Za nove krive su od značaja epicikloide o kojima je više rečeno u poglavlju 2. Izvedena parametarska jednačina epicikloide je $epicycloid[a, b](t)$ pri čemu je

$$epicycloid[a, b](t) = (x(t), y(t)),$$

za

$$\begin{aligned} x(t) &= (a + b) \cos t - b \cos \left(\frac{(a + b)t}{b} \right), \\ y(t) &= (a + b) \sin t - b \sin \left(\frac{(a + b)t}{b} \right). \end{aligned}$$

Definicija 4.2. Neka je data epicikloida $epicycloid[a, b](t) = (x(t), y(t))$. Sferni heliks sa parametrima a i b je kriva

$$sphericalhelix[a, b](t) = \left(x(t), y(t), 2\sqrt{ab + b^2} \cos \frac{at}{2b} \right). \quad (4.21)$$

Lema 4.5. Prostorna kriva $sphericalhelix[a, b]$ čija je parametrizacija data formulom (4.21) ima konstantan nagib u odnosu na vektor $(0, 0, 1)$ i leži na sferi poluprečnika $a + 2b$ sa centrom u koordinatnom početku.

Dokaz. Prema Definiciji 4.1 sferni heliks ima konstantan nagib u odnosu na vektor $u(0, 0, 1)$ ako je ugao ϕ između vektora u i jediničnog tangentnog vektora T sfernog heliksa konstantan. Pokazaćemo da je $\cos^2 \phi = \frac{(T \cdot u)^2}{\|T\|^2}$ konstantan.

Tangentni vektor sfernog heliksa je

$$\begin{aligned} T &= \left(- (a + b) \sin t + (a + b) \sin \left(\frac{(a + b)t}{b} \right), (a + b) \cos t - (a + b) \cos \left(\frac{(a + b)t}{b} \right), \right. \\ &\quad \left. - \frac{a\sqrt{ab + b^2}}{b} \sin \frac{at}{2b} \right). \end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned} \|T\|^2 &= 2(a+b)^2 \left(1 - \left(\sin t \sin \left(\frac{(a+b)t}{b} \right) + \cos t \cos \left(\frac{(a+b)t}{b} \right) \right) \right) + \\ &\quad + \frac{a^2(ab+b^2)}{b^2} \sin^2 \frac{at}{2b} \end{aligned}$$

Korišćenjem adicionih formula i funkcije polovine ugla, dalje se dobije

$$\|T\|^2 = 2(a+b)^2 \left(1 - \cos \frac{at}{b} \right) + \frac{a^2(ab+b^2)}{b^2} \sin^2 \frac{at}{2b}$$

$$\|T\|^2 = 2(a+b)^2 2 \sin^2 \frac{at}{2b} + \frac{a^2(ab+b^2)}{b^2} \sin^2 \frac{at}{2b}$$

$$\|T\|^2 = \left(\frac{4(a+b)^2 b^2 + a^2(ab+b^2)}{b^2} \right) \sin^2 \frac{at}{2b}.$$

$$\text{Sledi da je } \cos^2 \phi = \frac{\frac{a^2(ab+b^2)}{b^2} \sin^2 \frac{at}{2b}}{\left(\frac{4(a+b)^2 b^2 + a^2(ab+b^2)}{b^2} \right) \sin^2 \frac{at}{2b}} = \frac{\frac{a^2(ab+b^2)}{b^2}}{\frac{4(a+b)^2 b^2 + a^2(ab+b^2)}{b^2}}.$$

Kako je $\cos^2 \phi = \frac{a^2(ab+b^2)}{4(a+b)^2 b^2 + a^2(ab+b^2)}$, odnosno $\cos \phi$ je konstantan, odatle sledi da je sferni heliks kriva konstantnog nagiba u odnosu na vektor $(0, 0, 1)$.

Deo leme prema kojoj ovako definisan sferni heliks leži na sferi poluprečnika $a + 2b$ sa centrom u koordinatnom početku sledi direktno iz

$$x^2(t) + y^2(t) + \left(2\sqrt{ab+b^2} \cos \frac{at}{2b} \right)^2 = (a+2b)^2.$$

■

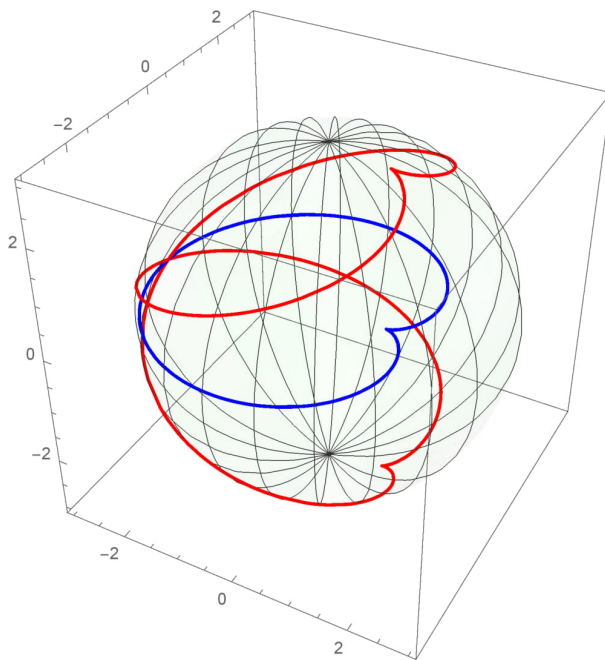
4.4 Primeri novih sfernih krivih konstantnog nagiba koji su izvedeni od ravanskih epicikloida

Ovaj deo rada je posvećen primerima novih sfernih krivi konstantnog nagiba koji su izvedeni od ravanskih epicikloida sa različitim parametrima a i b . Kao što je prethodno napomenuto, ove krive ćemo zvati sfernim heliksima sa parametrima a i b .

Sferna kardioida

Sferna kardioida je sferni heliks sa parametrima a i b za koje važi $a = b$. Nastaje od ravanske epicikloide kardioida čija je parametarska jednačina data formulom (2.4). Parametarska jednačina je

$$sphericalhelix[a, a](t) = \left(x(t), y(t), 2a\sqrt{2} \cos \frac{t}{2} \right).$$

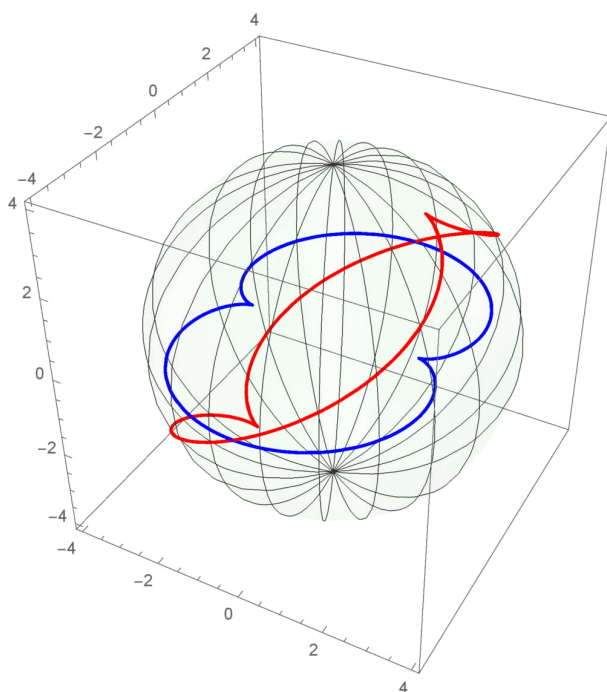


Slika 28: Sferna kardioida

Sferna nefroida

Sferna nefroida je sferni heliks sa parametrima a i b za koje važi $a = 2b$. Nastaje od ravanske epicikloide nefroide čija je parametarska jednačina data formulom (2.5). Parametarska jednačina je

$$\text{sphericalhelix}[2b, b](t) = (x(t), y(t), 2b\sqrt{3} \cos t).$$

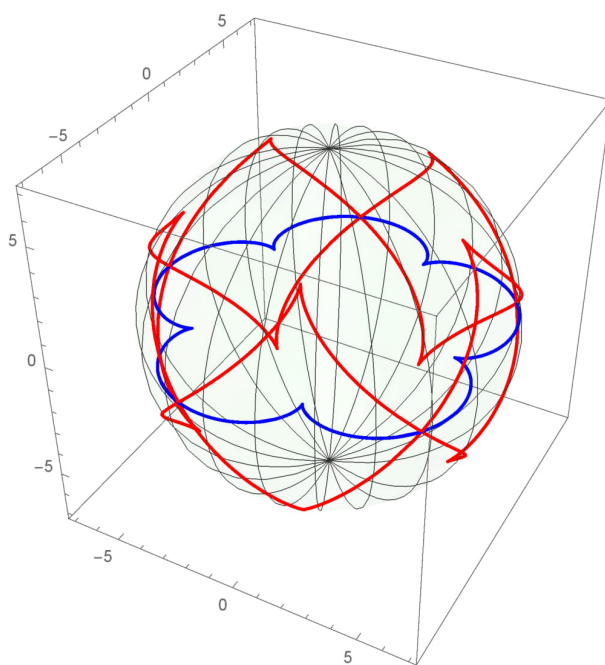


Slika 29: Sferna nefroida

Sferna ranunkloida

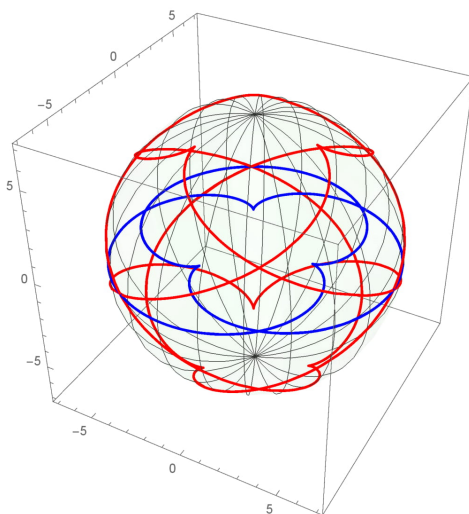
Sferna ranunkloida je sferni heliks sa parametrima a i b za koje važi $a = 5b$. Nastaje od ravanske epicikloide ranunkloide čija je parametarska jednačina data formulom (2.6). Parametarska jednačina je

$$sphericalhelix[5b, b](t) = \left(x(t), y(t), 2b\sqrt{6} \cos \frac{5t}{2} \right).$$

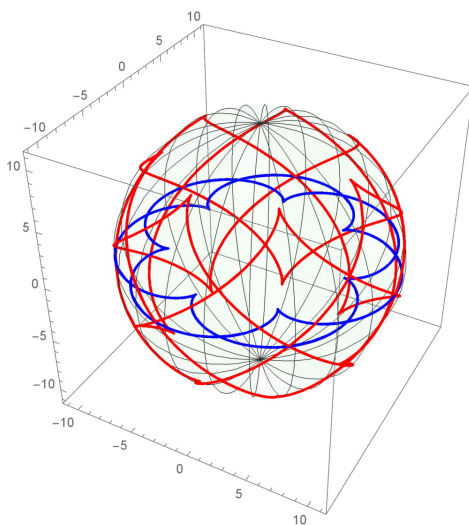


Slika 30: Sferna ranunkloida

Sferni heliksi kod kojih je odnos parametara a i b racionalan broj, ali nije ceo

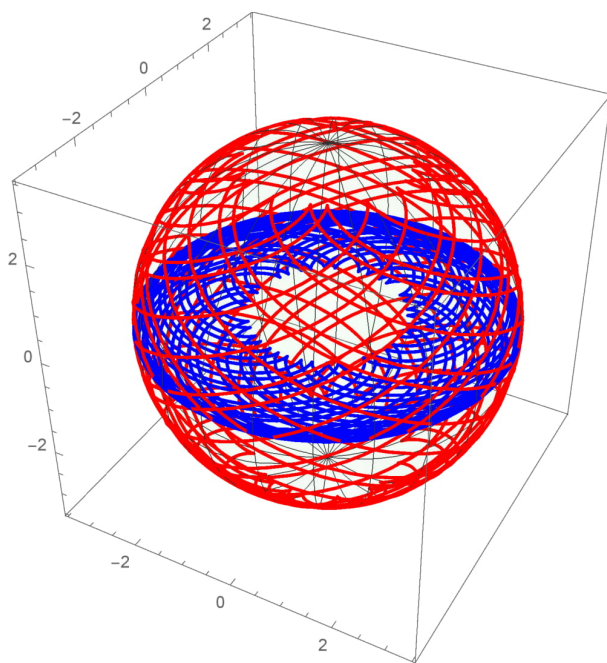


Slika 31: $\text{sphericalhelix}[3,2](t)$



Slika 32: $\text{sphericalhelix}[7,2](t)$

Sferni heliksi kod kojih je odnos parametara a i b iracionalan broj



Slika 33: $\text{sphericalhelix}[\sqrt{2},1](t)$

Zaključak

U radu je predstavljeno nekoliko načina izvođenja novih krivih u ravni i prostoru nastalih od ravanskih krivih. Definisane su nove krive i prikazane neke njihove osobine. Od novih ravanskih krivih razmatrane su specijalno evolute, involute, paralelne krive i podnožnice. Od novih krivih u prostoru izabrane su za razmatranje sferne krive konstantog nagiba koje su izvedene od ravanskih epicikloida. Nove krive su ilustrovane kroz primere nekih poznatih ravanskih krivih u programu *Mathematica*. U radu je izvođenje novih krivih ograničeno na nekoliko slučajeva. Dalja razmatranja novih sfernih krivih koja nisu opisana u ovom radu se mogu proširiti posmatranjem primera krivih koje su izvedene od hipocikloida. Takođe, može se posmatrati još jedan način izvođenja novih sfernih krivih kao što je stereografska projekcija. Stereografskom projekcijom logaritamska spirala se preslikava u sfernu loksodromu, pa bi bilo interesantno ispitati šta se dešava u slučaju drugih poznatih krivih.

Literatura

- [1] Audin Michèle, *Geometry*, Springer, 2002.
- [2] Đorić Mirjana, *Materijali za studente-Geometrija 3*
- [3] Gray Alfred, Abbena Elsa, Salamon Simon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Third edition, Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [4] Janjić Milan, *Krive i površi*, Prirodno-matematički fakultet u Banjoj Luci, 2005.
- [5] Lockwood E.H., *A book of curves*, Cambridge University Press, 1961.
- [6] Pressley Andrew, *Elementary Differential Geometry*, Second edition, Springer-Verlag London, 2010.