

**Univerzitet u Beogradu**

**Matematički fakultet**



## **Nastava verovatnoće u osnovnim školama**

**MASTER RAD**

**autor: Bojana Milivojević**

**mentor: Nebojša Ikodinović**

**Beograd, 2018.**

# Sadržaj

Predgovor .....	1
Uvod - Šta je verovatnoća? .....	3
<b>1. VEROVATNOĆA U MATEMATIČKOM OBRAZOVANJU.....</b>	<b>4</b>
1.1. Kada početi sa učenjem verovatnoće?.....	5
1.2. Učenje verovatnoće u svetu .....	8
1.3. Verovatnoća u školskim programima .....	9
1.4. Sadržaji teorije verovatnoće nastavnih programa u svetu .....	10
1.5. Verovatnoća u programu internacionalnog PISA testiranja .....	13
<b>2. O RAZUMEVANJU POJMA VEROVATNOĆE .....</b>	<b>15</b>
2.1. Ogledi Pijažea i Inheldera.....	15
2.1.1. Ogled broj 1 .....	15
2.1.2. Ogled broj 2 .....	16
2.2. Istraživanje: Probalističko mišljenje kod dece - razvoj pojma šanse .....	17
2.3. Istraživanje u Sloveniji .....	24
2.4. Rezultati mog istraživanja .....	30
Predmet i ciljevi istraživanja .....	30
Rezultati i analiza istraživanja.....	35
Diskusija i zaključak.....	37
<b>3. OBRADA VEROVATNOĆE U OSNOVNOJ ŠKOLI .....</b>	<b>39</b>
3.1. Elementarni uvod u verovatnoću .....	39
Zadaci.....	44
Zanimljivosti .....	46
Test .....	48
3.2. Priprema i analiza časova.....	50
3.2.1. Peti razred .....	50

3.2.2.	Šesti razred .....	57
3.2.3.	Sedmi razred .....	61
3.2.4.	Osmi razred.....	66
	Zaključak.....	72
	Literatura.....	73
	Prilozi .....	74

## **Predgovor**

U ovom master radu je izvršeno poređenje nastavnog plana matematike osnovnog obrazovanja u Srbiji sa ostalim državama širom sveta. Konkretno, fokus je stavljen na pojam verovatnoće sa kojima se učenici osnovnih škola u Srbiji gotovo nikada ne susreću. Razmotrene su kognitivne sposobnosti dece da usvoje osnovne pojmove verovatnoće. Takođe je priložen nastavni materijal koji bi se mogao koristiti za upoznavanje sa slučajnim fenomenima i obradu verovatnoće. Date su i pripreme časova za svaki viši razred osnovne škole, kao i detaljna analiza održanih časova. Sprovedeno je istraživanje u Osnovnoj školi "Dušan Jerković" u Užicu, na osnovu koga je izvršena analiza i obrada dobijenih podataka.

***Matematička pismenost je kapacitet pojedinca da identifikuje i razume ulogu koju matematika igra u savremenom svetu, da izvede dobro zasnovane matematičke procene i da se anganžuje u matematici tako da zadovolji svoje sadašnje i buduće potrebe kao konstruktivnog, zainteresovanog i refleksivnog građanina. (OECD<sup>1</sup> 1999.)***

---

<sup>1</sup> Organisation for Economic Co-operation and Development – organizacija za ekonomsku saradnju i razvoj

## Uvod - Šta je verovatnoća?

Ljudi često proveravaju vremensku prognozu kada se pitaju da li će padati kiša. Prate stanje na putevima ako žele da izbegnu gužvu. Proveravaju kamatnu stopu za stambeni kredit ili auto. Dete nasleđuje neke osobine od roditelja, a neke ne (kao što su boja kose ili povećan rizik od nastanka neke bolesti). Neizvesnost je deo svakodnevnice. Teorija verovatnoće je matematička disciplina koja analizira neizvesnost [6]. Ona proučava i objašnjava zakonitosti koje nastaju pri istovremenom uticaju velikog broja slučajnih faktora. Ova grana matematike je osnova matematičke statistike, teorije slučajnih procesa, teorije masovnog opsluživanja, teorije pouzdanosti, itd. Primenjuje se u raznim oblastima, kao što su: statistička fizika, geodezija (račun izravnjanja), stohastička hidrologija, biologija (zakoni nasleđivanja), medicina, meteorologija (prognoziranje vremena), astronomija, demografija, ekonomija, politika, sport, itd.

Prvi radovi evropskih matematičara koji su sadržali osnovne ideje teorije verovatnoće pojavili su se u 16. i 17. veku i bili su u vezi sa određivanjem šansi dobitaka u igrama na sreću [5]. Početkom teorije verovatnoće smatramo 1654. godinu kada je francuski plemić i uspešni kockar Antoni Gombald, pitao svog prijatelja matematičara Bleza Paskala<sup>2</sup> zašto je obično zarađivao jednim ulogom (klađenjem), a gubio drugim za koji je smatrao da je sličan prvom. Paskal je napisao pismo o ovome Pjeru de Fermi<sup>3</sup>. Ova diskusija je pokrenula teoriju verovatnoće. Više od sto godina pre ovog događaja, 1545. godine, Đirolamo Kardano<sup>4</sup> koristio je verovatnoću za smišljanje strategija za češće pobeđe u kockanju. Njegova *Knjiga o igrama na sreću (Liber de ludo aleae)* je bila prva knjiga o verovatnoćama i kockanju. Takođe je sadržala poglavlje o efikasnim metodama varanja. Duže vreme teorija verovatnoće nije bila posmatrana kao ozbiljna grana matematike zbog ranijih povezivanja sa kockanjem. Ovo je krenulo da se menja kada je Jakob Bernuli<sup>5</sup>, napisao *Umetnost pogađanja (Ars Conjectandi)*, koja je objavljena osam godina nakon njegove smrti 1713. godine. U njoj je Bernuli razvio matematičku teoriju verovatnoće. Prvi put se pominju teoreme, dokazi i danas poznat *Zakon velikih brojeva* [6].

---

<sup>2</sup> Blaise Pascal (1623-1662) – francuski matematičar, fizičar i filozof

<sup>3</sup> Pierre de Fermat (1601-1665) – francuski matematičar i pravnik

<sup>4</sup> Gerolamo Cardano (1501-1576) – italijanski fizičar, matematičar i kockar

<sup>5</sup> Jacob Bernoulli (1654-1705) – švajcarski matematičar i naučnik

# 1. VEROVATNOĆA U MATEMATIČKOM OBRAZOVANJU

Uvođenje verovatnoće je savremeni trend reformi matematičkog obrazovanja u mnogim zemljama sveta. Danas postoji potreba da se teorija verovatnoće primenjuje mnogo šire nego u samoj učionici, najčešće u predviđanju i donošenju odluka u nesigurnim situacijama. Tako se pojam slučajnosti prenosi iz matematičkog sveta u biološki, metereološki, politički, ekonomski, društveni (igre i sport)... Verovatnoća u velikoj meri doprinosi razvoju kritičkog mišljenja. Većina zemalja smatra da je elementarni nivo teorije verovatnoće deo osnovne pismenosti u matematici koju svi građani u društvu treba da imaju. U Srbiji učenici se prvi put susreću sa pojmovima verovatnoće tek u 4. godini srednje škole, i to ne u svim obrazovnim profilima. Mnogi naučnici su istakli koliko je verovatnoća važna kako u matematičkom, tako i u opštem obrazovanju učenika. Prednosti uvođenja verovatnoće u osnovne škole su:

1. razvoj intuitivnog razmišljanja
2. poboljšanje veštine rešavanja problema
3. razvoj kritičkog mišljenja
4. povećanje motivacije i zainteresovanosti
5. zanimljive aktivnosti tokom učenja
6. podsticanje učenika na aktivan odnos prema učenju

Prema Fišbejnu<sup>6</sup> razlozi za uvođenje verovatnoće su analiziranje neizvesnih situacija, predviđanje, rešavanje problema i razvijanje sposobnosti razmišljanja koje nije determinističko. Gal, Franklin i Džons navode da su razlozi za uključivanje verovatnoće u škole povezani sa korisnošću verovatnoće u svakodnevnom životu, njenom ulogom u drugim disciplinama, kao i potrebom za osnovnim stohastičnim znanjem u mnogim profesijama. Kao što je očigledno, nastavni sadržaji na temu verovatnoće imaju brojne prednosti, koje nemaju druge matematičke discipline. Kroz sagledavanje pomenutog sadržaja deca se susreću sa činjenicom da se mogu naći i negativne situacije, koje se ne mogu precizno predvideti. Jedino što treba učiniti jeste da kritički tumačimo sve mogućnosti i izaberemo onu koja će se najverovatnije dogoditi. Na taj način deca stiču iskustva u stvarnim životnim situacijama, u kojima je neophodno svakodnevno odlučiti o najboljoj opciji od mnogih.

---

<sup>6</sup> Efraim Fishbein (1920-1998) – rumunski profesor koji je izučavao psihologiju učenja matematike

U isto vreme deca treba da prihvate činjenicu da su neki događaji nemogući [14]. Uvođenjem verovatnoće u nastavni program osnovnih škola postavlja se niz pitanja [2]:

1. Koji koncepti verovatnoće su podobni za različite uzraste dece?
2. Kako i na koji način bi se koncepti mogli primeniti?
3. Koji je odnos između intuitivnog/subjektivnog shvatanja i onog formalnog koncepta koji je zastupljen u školama?
4. Da li postoji optimalan uzrast kada treba formalno uvesti verovatnoću?
5. Da li postoji način učenja, nastave i tehnike koje doprinose razvoju i boljem razumevanju formalnog znanja verovatnoće?

### **1.1. Kada početi sa učenjem verovatnoće?**

Prirodno se nameće pitanje da li postoji optimalan uzrast kada treba početi sa učenjem verovatnoće? Da li je to povezano sa kognitivnim razvojem deteta?

Kada govorimo o kogniciji, obično mislimo na sve što je povezano sa znanjem. Drugim rečima, prikupljanje podataka koje dobijamo putem učenja ili iskustva. Najšire prihvaćena definicija kognicije je sposobnost obrade podataka putem percepcije (stimulus koji dobijamo putem različitih čula), znanje koje dobijamo kroz iskustvo, i naše subjektivne karakteristike koje nam omogućavaju da spojimo sve ove informacije da bismo mogli da shvatimo i tumačimo svet koji nas okružuje. Drugim rečima, kognicija je sposobnost koju imamo da primimo i obradimo podatke koje dobijamo iz različitih izvora (percepcija, iskustvo, uverenja...) i da ih pretvorimo u znanje. Kognicija uključuje različite kognitivne procese, kao što je učenje, pažnja, memorija, jezik, rasuđivanje, donošenje odluka itd., koji predstavljaju deo našeg intelektualnog razvoja i iskustva. Svaka od ovih kognitivnih funkcija rade zajedno na sticanju novog znanja i utiču na tumačenje i shvatanje sveta koji nas okružuje [15].

Mnoga naučna istraživanja se bave ispitivanjem kognitivnih sposobnosti dece različitih uzrasta da razumeju slučajne fenomene i usvoje elementarne pojmove verovatnoće. Faze dečijeg razvoja izdvojene su posmatranja njihovog ponašanja i odgovora, i analiziranjem njihovog predviđanja i snalaženja u eksperimentima. Osnovno sredstvo za istraživanje u ovoj oblasti je izvođenje korektnih zaključaka na osnovu verovatnoće nesigurnih događaja. Postoje mnoge psihološke teorije i dokazi koji ukazuju da je čovek u stanju da koristi veštine verovatnosnog rasuđivanja od najranijih faza kognitivnog razvoja.

Po teoriji Žana Pijažea<sup>7</sup> i Berbela Inheldera<sup>8</sup> [11] postoji šest intelektualnih razvojnih stadijuma deteta:

1. stadijum refleksa
2. stadijum prvih motornih navika i organizovanih opažaja
3. stadijum senzo-motorne ili praktične inteligencije (inteligencija koja prethodi pojavi govora)
4. stadijum intuitivne inteligencije (2-7. godine)
5. stadijum konkretnih intelektualnih operacija (početak logike) i moralnih i socijalnih osećanja saradnje (od 7. do 11-12. godine)
6. stadijum apstraktnih intelektualnih (formalnih) operacija, obrazovanja ličnosti i afektivnog i intelektualnog uključivanja u svet odraslih (adolescencija)

Deca uzrasta od četiri do sedam godina ne umeju da definišu pojmove koje upotrebljavaju, i ograničavaju se na pokazivanje odgovarajućih predmeta. Tu možemo razlikovati dva slučaja: slučaj praktične inteligencije i slučaj mišljenja koje teži saznanju, ali u eksperimentalnom području. Do sedme godine dete nadoknađuje nedostatak logike mehanizmom intuicije, ali još uvek ne dostiže nivo čisto racionalnih koordinacija. Na uzrastima posle 7-8. godine dete razmišlja pre nego što *dela* tj. počinje da osvaja postupak refleksije (tj. rasparava sa samim sobom). Dete tada rukuje isključivo konkretnim operacijama. Adolescencija, uzrast 11-12 godina, koji obeležava početak formalnog mišljenja u današnjim civilizovanim društvima je relativan, zbog uticaja socijalne sredine. Za razliku od deteta, adolescent reflektuje svoje mišljenje i konstruiše teorije. Iako su one kratkotrajne,

---

<sup>7</sup> Jean Piaget (1896 -1980) - švajcarski psiholog i filozof, osnivač teorije kognitivnog razvoja

<sup>8</sup> Bärbel Elisabeth Inhelder (1913 – 1997) - švajcarski psiholog

nevešte i najčešće neoriginalne. U formalnim operacijama dolazi do transformacije misli: oslobađaju se realnog, sadržinskog i počinju sa upotrebom mogućeg, propozicija i hipoteza.

Pijaže ističe da se formalne operacije izvode na verbalnim iskazima (propozicijama), vodeći računa o formi, a ne sadržaju mišljenja. Odvajanjem forme od sadržaja osoba postaje sposobna da pravilno razmišlja polazeći od hipoteza (iskaza u koje ne veruje, ili za koje još ne zna da li su istiniti), pa se zbog toga to naziva hipotetičko-deduktivnim mišljenjem.

Tipovi intelektualnih zadataka čije rešavanje omogućavaju formalne operacije su:

1. kombinovanje objekata - dete na ovom nivou radi sistematski, dok je na nivou konkretnih operacija uspevalo da dođe do rešenja metodom pokušaja.
2. kombinatorika iskaza - osoba na stadijumu formalnih operacija je sposobna da kombinuje ideje, ili hipoteze, u obliku afirmacija, ili negacija i da tako upotrebljava logiku iskaza: operacije kao što su implikacija (ako...onda...), disjunkciju (ili...ili... Ili oba), ekskluzivna disjunkcija (ili...ili...) itd.
3. proporcije - prvo se javlja u kvalitativnom, logičkom obliku, a zatim i u kvantitativnom.
4. pojmovi verovatnoće - osobe na stadijumu formalnih operacija postaju sposobne da procene verovatnoću da se iz kutije koja sadrži npr. 3 crvene, 2 plave i 4 žute kuglice izvuku dve kuglice iste boje. Ovo je moguće na osnovu kombinatorike koja pruža uvid u sve moguće asocijacije datih elemenata i shvatanja proporcija (shvatanje da je npr. verovatnoća  $3/6$  jednaka  $2/4$ ).
5. eksperimentalno mišljenje itd.

Jasno je da adolescenti sami otkrivaju osnove kombinatorike u praksi, ali prirodno, bez teorije. To zahteva formalne operacije koje počinju tek oko 11-12. godine. Saznajno polje se proširuje sa domena realnosti na domen mogućnosti. Najistaknutije obeležje ove faze jeste da subjekt više nije prinuđen da rasuđuje neposredno na konkretnim objektima ili manipulišući tim objektima (operacije sa klasama, relacijama, brojevima i operacije koje se tiču vremena i prostora) već je u stanju da operaciono dedukuje na osnovu jednostavnih, rečima iskazanih hipoteza (logika iskaza) [11].

## 1.2. Učenje verovatnoće u svetu

Stavovi različitih istraživača o sposobnostima dece u pogledu rešavanja verovatnosnih zadataka mnogo se razlikuju. Kao što je istaknuto, Pijaže, kao i Inhelder (1951), tvrde da dete u konkretnom operativnom periodu nije u stanju da uočava razliku između određenih i slučajnih predviđanja niti formuliše predviđanja, uzimajući u obzir svoja iskustva iz prethodnih sličnih situacija. Po njihovim mišljenjima dete prvo susreće koncept verovatnoće na nivou njegovih konkretnih operacija, pri čemu počinje da uočava razliku između sigurnog i mogućeg događaja. Oni takođe primećuju da razumevanje verovatnoće počinje 9-12 godina, pa čak i tokom tog perioda deca rešavaju probleme intuitivno, a ne na osnovu formalnih razloga [14].

Mnogi istraživači su suprotstavili svoje zaključke o sposobnostima dece u vezi s njihovom percepcijom sadržaja verovatnoće. Fišbejn (1984) i Dejvis (1965) kritikovali su Pijažeovo istraživanje uglavnom zato što je zasnovano na verbalnim sposobnostima deteta. Razvili su "metod donošenja odluka", koji nije bio zasnovan na verbalnim sposobnostima. Fišbejn i njegove brojne kolege su takođe razrađivali nastavu i učenje koncepta verovatnoće, čime su zaključili da je moguće učiti verovatnoću bez ikakvih velikih napora (Fišbejn, Gazit, 1984, Fišbejn, Pampu, Manzat, 1970). U poslednje vreme Gurbuz i ostali su se bavili poučavanjem verovatnoće i učenjem. Pokušavali su utvrditi efikasnost nastavničkog pristupa zasnovanog na aktivnom učešću učenika, pri čemu su učenici izvodili brojne eksperimente koji se odnose na verovatnoću i diskutovali o njihovim nalazima. U kontrolnoj grupi učenici su lišeni ove mogućnosti na časovima. U istraživanju u kojem je učestvovalo 50 dece utvrđeno je da su se deca koja su imala nastavni pristup zasnovan na diskusiji između učenika i nastavnika bolje snašla od dece koja su imala samo predavanja (Gurbuz, 2010). Takođe Andrev (2009) naglašava važnost konkretnog iskustva, jer smatra da učenici bolje razumeju sadržaje verovatnoće ako izvode eksperimente vezane za verovatnoću. Izvođenje eksperimenata ohrabruje učenike da razviju razumevanje verovatnoće zasnovane na stvarnim događajima, nasuprot samo računanju odgovora zasnovanih na formulama. Andrev (2009) dalje navodi da učenici koji su stekli konkretno iskustvo o verovatnoći, razvijaju svoje razumevanje na ovoj osnovi i žele da definišu polazne tačke za izračunavanje verovatnoće pojedinih događaja [14]. Sigel, Jost i Endrjus (1962) i Goldberg (1966) su produžili neka istraživanja Pijažea i Inheldera i došli

do zaključka da su predškolska deca, u situacijama koje zahtevaju izvođenje zaključaka u stanju da donesu tačne sudove probabilističke prirode. Dejvis (1965), koristeći druge tehnike, bavio se u stvari istim problemom, ali samo kod dece 3-9 godina. Zaključio je da se mogućnost shvatanja verovatnoće postepeno razvija i da probabilističko neverbalno ponašanje prethodi verbalnom [1]. Osim istraživača, mnoge institucije, poput Unesco (1972)<sup>9</sup> i Ceeb (1958)<sup>10</sup>, prepoznali su važnu ulogu koju verovatnoća igra u društvu i predlažu da se uključi u nastavni plan osnovnih škola [14].

### **1.3. Verovatnoća u školskim programima**

Verovatnoća je u nastavne programe matematike u zapadnom svetu uvedena kao deo "novih matematičkih" promena u 1960-im. Ali tek krajem sedamdesetih godina postao je očigledan obrazovni značaj verovatnoće u osnovnoj i srednjoj školi. Ovo se dogodilo zbog činjenice da se do tada osnova njihovog uvođenja zasnivala više na praktičnim i akademskim razlozima, a ne na nekim obrazovnim uverenjima koja se odnose na njihov značaj kao deo ukupnog obrazovanja. Fišbejn je 1975. objavio značajan rad o intuiciji i verovatnoći koji se zasniva na istraživanjima koja su obavljena tokom mnogo godina. Tako je oko 1975. godine učenje verovatnoće počelo interesovati istraživače (Truran, 2001) [14]. Verovatnoća je najpre uvedena u srednje škole, a zatim kasnije i u osnovne. Međutim, od devedesetih godina prošlog veka čini se da verovatnoća zauzima integralni deo matematičkog nastavnog plana i programa nižih razreda osnovnih škola na međunarodnom nivou. Uvedena je u školske lekcije kao deo nove matematike i obavezan segment matematičke pismenosti.

Nedavni nastavni planovi i programi iz SAD-a i Kanade (NCTM, 2000), Engleske (DFEE - Odsek za obrazovanje i zapošljavanje, 2001), Kipra (CIE, 1997) i Grčke (1987 i 1998) su prepoznali važnost da svi učenici razviju svesnost verovatnosnih konstrukcija i aplikacija. Konkretno, oni napominju da učenici treba da razumeju i primenjuju osnovne koncepte verovatnoće koristeći prilagođeni rečnik u zavisnosti od uzrasta.

---

<sup>9</sup> United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization - organizacija Ujedinjenih nacija za obrazovanje, nauku i kulturu

<sup>10</sup> College Entrance Examination Board – neprofitna organizacija za napredovanje višeg obrazovanja

Trenutna tendencija čak i za osnovnu školu je usmerena na proučavanje verovatnoće orijentisane prema podacima, gde se očekuje da učenici izvode eksperimente ili simulacije, formulišu pitanja ili predviđanja, sakupljaju i analiziraju podatke iz ovih eksperimenata, predlažu i opravdavaju zaključke i predviđanja (Carmen & Carmen, 2012). Na osnovu stavova koje održavaju istaknuti naučnici i sugestija raznih istraživačkih centara, postaje očigledno da je uvođenje verovatnoće u osnovno obrazovanje neophodno i izvodljivo [3].

#### **1.4. Sadržaji teorije verovatnoće nastavnih programa u svetu**

Međunarodna asocijacija za ocenjivanje i evaluaciju obrazovnog uspeha IEA<sup>11</sup> je skup nacionalnih istraživačkih institucija, vladinih istraživačkih agencija, naučnika i analitičara koji rade na ocenjivanju, razumevanju i unapređenju obrazovanja širom sveta. Više od 60 zemalja je aktivno uključeno u IEA mrežu, a više od 100 obrazovnih sistema učestvuje u studijama.

Međunarodni studijski centri TIMSS & PIRLS u IEA koji se nalaze na koledžu u Bostonu sprovode redovne međunarodne komparativne ocene učeničkih dostignuća iz matematike. Od 1995. godine TIMSS prati trendove u oblasti matematike i nauka svake četiri godine, u četvrtom i osmom razredu. U sledećoj tabeli su dati sadržaji teorije verovatnoće u četvrtom i osmom razredu nekih od zemalja učesnica.

---

<sup>11</sup> International Association for the Evaluation of Educational Achievement - neprofitno međunarodno naučno društvo licencirano radi pedagoških istraživanja širom sveta

**Tabela 1. Sadržaji teorije verovatnoće nekih država**

DRŽAVA	SADRŽAJI TEORIJE VEROVATNOĆE	
	4. RAZRED	8. RAZRED
<b>FLORIDA (USA)</b>	/	-Izvlačenje zaključaka, predviđanja i procena vrednosti. -Suđenje i određivanje šansi za ostvarivanje mogućih ishoda.
<b>HRVATSKA</b>	/	-Određivanje broja mogućih i povoljnih ishoda u jednostavnim situacijama. -Primena terminologije verovatnoće: frekvencija izvlačenja i relativna frekvencija histograma. -Izračunavanje verovatnoće slučajnih događaja.
<b>MAĐARSKA</b>	-Određivanje učestalosti događaja vršenjem eksperimenata. -Generisanje i identifikovanje objekata koji ispunjavaju date uslove. -Pronalazak svih događaja koji ispunjavaju date uslove. -Razumevanje značenja i razlikovanja između sigurnih, mogućih i nemogućih događaja. -Sprovođenje igara verovatnoće, eksperimenata i posmatranja.	-Razlikovanje između sigurnih, mogućih i nemogućih događaja. -Procena verovatnoće, frekvencija, relativna frekvencija i osobine frekvencije. -Prikupljanje, organizovanje i prikazivanje podataka.
<b>ONTARIO(KANADA)</b>	-Upravljanje podacima i verovatnoćama. -Prikupljanje i prikazivanje diskretnih podataka, tumačenje	-Prikupljanje i organizovanje podataka. -Istraživanje odnosa podataka i korišćenje modela verovatnoće za predviđanje događaja u stvarnom životu

	<p>podataka i predviđanje u vezi sa jednostavnim eksperimentima verovatnoće.</p> <p>-Izvođenje eksperimenata, upoređivanje predviđanja rezultata.</p>	
<b>VELIKA BRITANIJA</b>	/	<p>-Beleženje, opisivanje i analiziranje učestalosti rezultata jednostavnih eksperimenata koji uključuju slučajnost, pravičnost, jednako i nejednako verovatne ishode, koristeći odgovarajući jezik i skalu verovatnoće od 0 do 1.</p> <p>-Shvatanje da je zbir verovatnoće svih mogućih ishoda jednak 1.</p> <p>-Generisanje teoretskih prostora za uzorke za pojedinačne i kombinovane događaje sa jednako verovatnim, međusobno isključivim rezultatima i koristiti ih za izračunavanje teorijskih verovatnoća.</p>
<b>NEMAČKA</b>	<p>-Opisivanje verovatnoće jednostavnih događaja (koristeći izraze kao što su: sigurni, mogući, nemogući, uvek, često, retko, nikad).</p> <p>-Beleženje broja različitih mogućnosti u jednostavnim kombinatornim zadacima.</p>	<p>-Primena jednostavnih eksperimenata u svrhu opisivanja stohastičkih događaja u svakodnevnim situacijama</p> <p>-Primena relativne frekvencije od ponovljenih eksperimenata za procenu verovatnoće.</p> <p>-Primena Laplasovog pravila za utvrđivanje verovatnoće u jednostavnim eksperimentima.</p> <p>-Procena šanse, rizika i frekvencija.</p>
<b>SRBIJA</b>	/	/

Kao što je prikazano u tabeli, učenici u Srbiji ne susreću se sa pojmovima verovatnoće i slučajnih događaja u osnovnoj školi. Plan i program obrazovanja u Srbiji to inicira tek u 4. godini nekih srednjih škola.

Prvi put se u istoriji nastavnog plana osnovnih škola u Srbiji, u predlogu koji je bio na uvidu javnosti za 5. razred osnovnog obrazovanja 2017. godine pominje pojam verovatnoće [16]. U oblasti *Razlomci* u okviru primene razlomaka navode se: procenti, aritmetička sredina, razmera i *verovatnoća*. U ishodima se ističe da će učenik biti u stanju da odredi verovatnoću događaja u jednostavnom eksperimentu (bacanje kockice, novčića i slično), već u 5. razredu osnovnog obrazovanja. U realizaciji nastavnih tema jasno se navodi da pojam verovatnoće treba ilustrovati kao mogućnost pojave nekog konkretnog događaja u datom eksperimentu (bacanja novčića, izvlačenja kuglica i sl.). Na ovom uzrastu dovoljno je da učenici razumeju da je verovatnoća odnos broja povoljnih i mogućih događaja u eksperimentu i da je to broj između 0 i 1. Takođe se ističe da je ova oblast pogodna za razvijanje raznih drugih kompetencija kroz zadatke koji bi od učenika iziskivali različite vrste istraživanja. Ovaj predlog je u poslednjim koracima ipak izostavljen, što dovodi do zaključka da su učenici u Srbiji jedni od retkih u svetu koji uz uvođenje pojmova razmere i razlomaka i dalje neće učiti i o osnovama verovatnoće.

### **1.5. Verovatnoća u programu internacionalnog PISA testiranja**

Međunarodni program procene obrazovnih postignuća učenika PISA (Programme for International Student Assessment), osnovan je sa ciljem da prati kvalitet obrazovanja u pojedinačnim zemljama učesnicama kako bi se na osnovu dobijenih podataka razvile politike koje će obezbediti stalno unapređivanje. U mnogim zemljama rezultati PISA studije su predmet ozbiljnih javnih i stručnih debata na osnovu kojih se donose strateške odluke u oblasti obrazovne politike. U okviru njega se sistematski prati nivo funkcionalne pismenosti koji dostižu petnaestogodišnjaci u oblasti matematike, prirodnih nauka i razumevanja pročitano. Odlika PISA programa je što ona ne ispituje u kojoj meri učenici mogu da reprodukuju naučeno u školama, već u kojoj meri su oni osposobljeni da razumeju i koriste date informacije prilikom rešavanja problema iz svakodnevnog života.

PISA testiranje pokriva većinu tema iz tipičnog nastavnog plana osnovnog obrazovanja. Kada se matematički sadržaji definisani u PISA uporede sa sadržajima iz nastavnih programa u Srbiji, takođe se dobija relativno visoko poklapanje. Matematički sadržaji podeljeni su u četiri oblasti: prostor i oblik, transformacije i relacije, brojevi i mere, neizvesnost. Poslednja oblast pokriva verovatnoću kao i statističke fenomene i odnose [10]. Na osnovu odluke Ministarstva prosvete i sporta, Srbija učestvuje u PISA programu od 2001. godine. Nažalost Srbija se nalazi ispod OECD proseka kada je u pitanju oblast Neizvesnost i podaci, što i nije iznenađujuće kada se u obzir uzme činjenica da se učenici ne susreću sa pojmovima neizvesnosti u osnovnom obrazovanju [9],[10].

**Tabela 2. Program PISA testiranja i zastupljenost odgovarajućih tematskih celina u nastavnom programu matematike u Srbiji**

PISA	Zastupljenost oblasti	Tematske celine u nastavnom programu matematike u Srbiji (osnovno obrazovanje)	Zastupljenost oblasti
Prostor i oblik	27,1%	Algebra	3,5%
Transformacije i relacije	25,9%	Diskretna matematika	5,9%
Brojevi i mere	23,5%	Funkcije	10,6%
Neizvesnost	23,5%	Brojevi	21,2%
		Verovatnoća	5,9%
		Statistika	21,2%

## 2. O RAZUMEVANJU POJMA VEROVATNOĆE

Sprovedena su vrlo intenzivna istraživanja o razumevanju sadržaja verovatnoće ranih 70-ih i 80-ih godina prošlog veka. Ovi istraživački radovi, koji će biti detaljno predstavljeni u nastavku, bili su ključne tačke i našeg istraživanja. Neki od istraživačkih radova su [14]:

1. Gelman i Glickman (2000) istraživali su značaj eksperimenata i konkretnog iskustva u učenju verovatnoće i utvrdili da deca bolje razumeju teže koncepte ako su aktivno učestvovali u odgovarajućim eksperimentima.
2. Mills (2007) se upustio u stavove nastavnika prema sadržaju verovatnoće, utvrđivanja njihovog pozitivnog odnosa prema statističkim sadržajima i verovatnoći, kao i njihovoj želji da se ponudi mogućnost adekvatne dodatne obuke.
3. Ešlin i Franc (2009) su se bavili vezom između sadržaja proporcionalnosti i verovatnoće.
4. Klik (2010) se bavio igrama na temu verovatnoće na časovima.
5. Van Duren (2003) je bio zainteresovan za zablude učenika koje se odnose na sadržaj verovatnoće.

U nastavku je detaljno prikazano nekoliko primera istraživanja, ogleđa, različitih pristupa i perspektiva, kao i njihovih zaključaka na ovu temu.

### 2.1. Ogledi Pijažea i Inheldera

#### 2.1.1. Ogled broj 1

Osvrnimo se kako Pijaže i Inhelder u [11] tumače operacije koje se tiču slučaja. Igra *grb ili pismo* (sa žetonima koji sa jedne strane imaju znak X, a na drugoj krug) omogućava nam da utvrdimo da 50% dece do 5-6. godine, veruje da se može predvideti rezultat bacanja jednog žetona, dva žetona, čak i pune šake žetona. Ako krišom zamenimo prvobitne žetone vrećicom *lažnih* žetona koje sa obe strane imaju X i bacimo jednu šaku takvih žetona, polovina ispitanika mlađih od 7-8 godina ne vidi

u tome ništa neobično, dok počevši od 8. godine, deca smatraju da to *nije normalno* ili sumnjaju na trik. U narednoj tabeli su dati rezultati ovog ogleda u kome je učestvovalo 182 ispitanika.

**Tabela 3. Reakcije na bacanje žetona**

Uzrasti(godine)	5-6	7	8	9	10	11	12
<b>PREDVIĐANJE</b>							
<b>Moguće</b>	47%	27%	12%	20%	17%	9%	3%
<b>Neizvesno</b>	34%	12%	0%	0%	0%	0%	0%
<b>Nemoguće</b>	19%	9%	88%	88%	83%	100%	97%
<b>TRIK-ŽETONI</b>							
<b>Nenormalno</b>	23%	47%	58%	88%	68%	64%	68%
<b>Otkrivanje trika</b>	16%	27%	34%	42%	58%	71%	88%

### 2.1.2. Ogled broj 2

Postavimo pred ispitanika na sto 30 žetona u četiri različite boje, od kojih je 15 žutih, 8 crvenih, 5 plavih i 2 zelena. Detetu kažemo da se u vrećici nalazi isti broj žetona odgovarajuće boje. Tražimo od njega da predvidi koji par ima najviše šansi da bude izvučen ako slučajno uzmemo dva žetona iz vrećice. Izvučene žetone ne vraćamo i tražimo od ispitanika da predvidi rezultate osam sledećih izvlačenja žetona iz vrećica. Na 138 ispitanika, uzrasta od 9 do 12 godina, dobijeni su sledeći rezultati.

**Tabela 4. Slučajno izvlačenje parova**

<b>Uzrast (broj ispitanika)</b>	<b>9(30)</b>	<b>10(40)</b>	<b>11(38)</b>	<b>12(30)</b>
<b>Uspešno formiran pojam verovatnoće</b>	23%	42,5%	87%	97%
<b>Početak formiranja pojma verovatnoće</b>	67%	42,5%	13%	3%
<b>Odsustvo pojma verovatnoće</b>	10%	15%	0%	0%

Iz date tabele vidimo da se sa uzrastom povećava procenat dece koji iz prvog pokušaja pogađaju verovatnoću izvlačenja žetona iz vrećica. Vidimo da se problem rešava tek oko 11. godine, tj. na uzrastu na kome počinju da se obrazuju formalne operacije. Razlog za to je što rešenje iziskuje kombinatoriku, a ona predstavlja jedno od glavnih obeležja viših operacija.

## **2.2. Istraživanje: Probalističko mišljenje kod dece - razvoj pojma šanse**

Fišbejn, Pampu i Manzat su u eksperimentu koji sledi koristili tehniku donošenja odluke da bi ispitali razvoj sa uzrastom. Kako su Jost i ostali i Goldberg bili zainteresovani samo za predškolsku decu, a Dejvis takođe nije išao preko uzrasta od devet godina, odlučeno je da se ispituju tri glavna razvojna stadijuma: preoperacionalni period, stadijum konkretnih operacija i stadijum formalnih operacija.

U toku eksperimenata koje su izvodili, realizatori su došli do rezultata koji je izgledao važan. Neka  $a$  i  $b$  budu brojevi dve vrste klikera u prvom kompletu, a  $c$  i  $d$  u drugom. Verovatnoće izvlačenja jedne vrste klikera iz jednog od kompleta su  $P_1 = \frac{a}{a+b}$  i  $P_2 = \frac{c}{c+d}$ . Subjekt treba da odluči koja je od dve vrednosti verovatnoće veća. On može doći do tačnog odgovora čak i u slučaju da ne razume verovatnoću kao matematički pojam, jednostavno upoređujući odnose  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{c}{d}$ . Lako se može pokazati

da je  $\frac{a}{a+b} > \frac{c}{c+d}$ , ako je  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ . To znači da subjekt može dati tačan odgovor samo ako uporedi odnose  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{c}{d}$ . Tačnost ili netačnost odgovora ne govori nam o tome koji je metod subjekt upotrebio. To postaje jasno tek kad zamolimo subjekta da nam objasni razlog svog izbora. Skoro svi ispitanici biraju intuitivniji, direktiniji i psihološki jednostavniji metod upoređivanja razlomaka  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{c}{d}$ . Ideja verovatnoće u svom matematičkom aspektu ovde ne postoji. Nju je lako izbeći u rešavanju ovakvih zadataka. Subjekti, posebno predškolska deca, obično se suprotstavljaju svakom naporu istraživača da ih navede da se oslone na odnos  $\frac{a}{a+b}$ . Kako je Pijaže pokazao, već na nivou preoperacionalnog mišljenja, detetova nesposobnost da tačno uporedi celinu i njene delove (ako je  $A \cup A' = B$ , poređenje između  $B$  i  $A$ , odnosno poređenje između  $B$  i  $A'$ ) objašnjava ovakvo ponašanje. Istraživači su mislili da se daljim insistiranjem na ovom problemu samo maskira jedna suštinska i specifična pojava, koja se ispoljava pri formiranju pojma verovatnoće. Jednostavno poređenje između  $a$  i  $b$ , kao i poređenje između  $\frac{a}{b}$  i  $\frac{c}{d}$ , pružajući metode predviđanja i donošenja odluke u uslovima stohastičkog eksperimenta, elementarniji su oblici koji vode shvatanju verovatnoće. Po mišljenju istraživača, proučavanje razvitka probalističkih pojmova treba se najpre baviti gore opisanim domenom. Tek kada se dođe do rezultata ovakvih istraživanja, može se početi sa rešavanjem problema u kojima shvatanje verovatnoće ne bi moglo da bude izbegnuto ili u kojima bi se koristile metode koje vode pretvaranju odnosa  $\frac{a}{b}$  u odnos  $\frac{a}{a+b}$  (relativna učestalost). Iz pomenutih razloga istraživači se nisu bavili idejom verovatnoće, nego idejom *šanse*, koja tačnije izražava psihološke procese subjekata u eksperimentu.

## Metod

Subjekti su odabrani sa tri uzrasna nivoa: predškolska deca, učenici trećeg razreda i učenici šestog razreda koji su bili birani iz različitih škola i obdaništa u Bukureštu. U svakoj od ove tri grupe je bilo po 60 subjekata, koje su stavljene pod tri različita eksperimentalna uslova  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ , koji će kasnije biti opisani. U svakoj je podjednak broj dečaka i devojčica. U pogledu školskih ocena, grupe su bile reprezentativne.

## Instrument

Subjekti, koji su ispitivani individualno, trebalo je da reše listu od sledećih 18 zadataka.

**Tabela 5. Zadaci istraživanja**

	Mali komplet	Veliki komplet
C <sub>1</sub>	1) 1/2:5/2	2) 2/4:10/4
	3) 3/1:3/2	4) 6/2:6/4
	5) 2/2:6/3	6) 4/4:12/6
C <sub>2</sub>	7) 6/2:10/5	8) 12/4:20/10
	9) 2/1:5/2	10) 4/2:10/4
	11) 4/2:5/3	12) 8/4:10/6
C <sub>3</sub>	13) 2/4:1/2	14) 4/8:2/4
	15) 3/1:6/2	16) 6/2:12/4
	17) 4/2:2/1	18) 8/4:4/2

Pri sastavljanju zadataka, postojao je izvestan broj kriterijuma. Postoje devet osnovnih pitanja (mali komplet, leva grupa) i ostalih devet pitanja dobijenih množenjem sa dva svih njihovih komponenti (veliki komplet, desna grupa). Šest (C<sub>1</sub>) od osamnaest zadataka su: broj klikera u istoj boji je jednak u svakom kompletu (zadaci 1, 2, 3, 4), ili broj klikera svake vrste u jednoj od dve kutije je isti (zadaci 5 i 6); za šest zadataka (C<sub>2</sub>) nema specifičnih grupisanja broja klikera i njihovih boja; u šest zadataka (C<sub>3</sub>) su iste proporcije. U šest zadataka pravilan odgovor zahteva da desna kutija bude pokazana, u drugih šest leva kutija, a za ostalih šest zadataka (C<sub>3</sub>) postojala je jednaka verovatnoća. U prvih 12 zadataka broj klikera određene boje treba da uporedimo sa brojem klikera u drugoj boji iz iste kutije. Nakon toga poredimo ih sa brojem klikera iste boje iz druge kutije da bi se odredilo kakve će boje biti nasumice izvučen kliker. Na ovaj način se otklanja mogućnost sistematskog davanja odgovora baziranih na pokušajima subjekata da izostave poređenje proporcija. Koristili su crne (C) i bele (B) klikere koji su bili smešteni u cilindrične kutije prečnika 8 cm.

## Postupak

Za svaki uzrasni nivo bile su predviđene tri eksperimentalne promenljive. U sve tri varijante, objašnjenje je bilo isto: *Ovde ćemo se igrati jedne lepe igre sa crnim i belim klikerima koja se sastoji u pogađanju. Najpre treba pažljivo da pogledaš ove dve kutije. Onda ćemo ih zatvoriti. Ti ćeš da zavučeš jednu ruku i da izvadiš kliker. Mi hoćemo da ti izvadiš beli (ili crni, u zavisnosti od modela). Ali pre nego što zatvorimo kutije, treba da odlučiš koju ćeš izabrati, desnu ili levu kutiju, da bismo bili sigurni da ćeš bez gledanja unutra izabrati beli kliker. Možda ćeš biti podjednako siguran, jer znaš da imaš podjednake šanse da izvučeš beli kliker iz obe kutije.* Potom su bile davane instrukcije, specifične za svaku od tri varijante.

U eksperimentalnim uslovima  $I_1$ , instrukcija se sastojala iz ilustracije tri moguće situacije. Kompleti 10C/2B i 3C/8B su smešteni u dve kutije. Dok odnosi ostaju isti, boje se menjaju u zavisnosti od uputstva koje se daje subjektu. Kada subjekti treba da izvuku beli kliker, na primer, kutija sadrži 10B/2C i 3B/8C. Subjekt odabira jednu od kutija. Kutija se otvara i on vadi kliker. U slučaju tačnog izbora, eksperimentator kaže da je subjekt stvarno pronašao beli kliker. Ako je izbor pogrešan izvlačenje se poništava. Eksperimentator nastavlja: *Tvoj izbor je bio pogrešan, on je u kutiji levo.* ili ako su u pitanju jednake verovatnoće: *U ovom slučaju, mi ne bismo jednu od kutija, nego kažemo svejedno je, nije važno iz koje kutije izvlačimo.* U ovoj varijanti subjekti se upoznaju sa problemom i njegova tri moguća rešenja, ali im se ne daje uputstvo kako da donose odluke. Posle ove pripreme, subjekt prolazi kroz 18 zadataka.

U uslovima  $I_2$  deca se upoznaju sa pojmom proporcije, uzorka i šanse, ali na praktičan način, putem ponavljanja izvlačenja. Subjektu se pokaže kutija u kojoj se nalaze 4C/1B kliker. On treba da kaže koliko je puta broj crnih klikera veći od broja belih. Kasnija se pita: *Ako izvedeš 20 izvlačenja sa zatvorenim očima, kakve klikere ćeš češće izvlačiti? Koliko puta češće ćeš izvlačiti crne klikere nego bele?* Subjekt izvodi 20 izvlačenja iz zatvorene kutije. Podešeno je da odnos u ovom slučaju bude 4 prema 1. *Dakle, 4 puta više crnih klikera nego belih,* kaže eksperimentator, *ali kada bi izvukao 40 puta i 100 puta?* U ovom slučaju eksperimentator navodi subjekta na zaključak da u svim slučajevima mi izvlačimo oko 4 puta češće crne klikere nego bele. To znači, da bilo da bismo iz ove ili one kutije, šansa da izvučemo crni kliker je potpuno ista. Tada eksperimentator sređuje klikere iz druge kutije u dve grupe od kojih svaka sadrži 4C/1B. *Šta smo sada prikazali? Na svaki beli kliker*

dolaze po četiri crna. Zato, da bismo imali istu šansu, neophodno je da možemo da grupišemo na isti način klikere u obe kutije.

Uslovi  $I_3$  takođe pomažu ispitanicima da shvate ideju šanse i proporcije, ali strategija koju ovde koristimo počiva na grupisanju klikera. Kutija sa 2C/1B klikerom predstavlja početnu tačku. Pokazalo se, pošto su crni klikeri brojniji od belih, da je mnogo lakše i mnogo češće i mnogo sigurnije njihovo izvlačenje. Slede poređenja 2C/1B:2C/1B i 2C/1B:4C/1B. Sledi zaključak da je lakše izvući crni kliker u desnoj kutiji. Dodavanjem belog klikera u desnu kutiju dobijamo 2C/1B i 4C/2B. Ovde treba istaći činjenicu da je broj crnih dva puta veći od broja belih klikera u obe kutije (i u vezi s tim verovatnoća izvlačenja crnog klikera je dva puta veća), mada je broj klikera u kutijama nejednak. Nameće se zaključak da dodavanjem ili oduzimanjem klikera određene boje remetimo jednakost broja klikera, jer više nije moguće njihovo deljenje u grupe 2C/1B. Svaka seansa je trajala 30-60 minuta, a kod male dece su vršena dva prekida u ispitivanju. U sva tri eksperimentalna uslova ( $I_1, I_2, I_3$ ) subjekti su bili obavešteni još od samog početka da će, ako sakupe zadovoljavajući broj poena, biti nagrađeni.

## Rezultati i analiza

Podaci dati u tabeli pokazuju prosečan broj tačnih odgovora u svakoj eksperimentalnoj grupi, dečaka i devojčica, odvojeno i zajedno.

**Tabela 6. Broj tačnih odgovora prema uzrastu, polu i instrukciji**

	$I_1$		$I_2$		$I_3$	
	Dečaci	Devojčice	Dečaci	Devojčice	Dečaci	Devojčice
<b>Predškolska deca zajedno</b>	8,00	7,90	9,00	9,30	8,30	8,60
	7,95		9,15		8,45	
<b>Treći razred zajedno</b>	10,70	10,60	14,80	12,90	14,60	12,00
	10,65		13,85		13,30	
<b>Šesti razred zajedno</b>	14,90	15,30	17,20	16,50	17,60	16,90
	15,10		16,85		17,25	

Faktor pola se pokazao kao statistički neznačajan i u svim daljim analizama je eliminisan. Podaci su organizovani u zavisnosti od instrukcije, uzrasta i kategorije zadataka. Sledeća tabela prikazuje prosečan broj tačnih odgovora.

**Tabela 7. Zavisnost prosečnog broja tačnih odgovora od instrukcije, uzrasta i kategorije zadataka**

Instrukcija		I <sub>1</sub>			I <sub>2</sub>			I <sub>3</sub>		
Kategorija zadataka		C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
Uzrasti	Predškolski uzrast	4,25	2,70	1,00	4,35	2,70	2,10	3,90	2,80	1,75
	Treći razred	5,05	2,65	2,95	5,35	4,00	4,50	5,45	3,50	4,35
	Šesti razred	5,65	4,55	4,90	5,85	5,35	5,65	5,70	5,65	5,90

Faktor uzrasta se pokazao kao najznačajniji. Prethodne dve tabele prikazuju da se povećanje tačnih odgovora povećava iz godine u godinu. Faktor instrukcije je takođe visoko statistički značajan. Rezultati u uslovima I<sub>2</sub> i I<sub>3</sub> su bolji od rezultat pod uslovima I<sub>1</sub>. Takođe je i visoko značajan i treći faktor kategorija zadataka. Podaci iz *Tabele 7* pokazuju značajne razlike, posebno kod predškolske dece i kod dece trećeg razreda, između rezultata u svakoj od tri kategorije zadataka. Nasuprot očekivanju, interakcija između uzrasta i instrukcije nije dala značajne razlike, što znači da je u stvari ono što su subjekti uspevali da shvate iz instrukcija bilo za sve uzraste.

Može se zaključiti da sudovi predškolske dece uzimaju u obzir samo jedan odnos (apsolutni broj klikera jedne boje u dve kutije), dok učenici šestog razreda svoju odluku donose na osnovu eksplicitnog i tačnog upoređivanja odnosa razlomaka. Instrukcija ne izaziva značajne razlike na ovom uzrastu. Kod učenika trećeg razreda spontani odgovori su bili često istog tipa kao kod predškolske dece, ali je instrukcija dovela kod njih do promena, tako da su se približavali ponašanju koje se sreće kod učenika šestog razreda.

## Diskusija i zaključak

Deca ne baziraju svoje shvatanje verovatnoće na relativnoj učestalosti, nego na poređenju prostih odnosa. Međutim, činjenica da razumeju problem i daju tačne odgovore, pokazuje da ona, uključujući i predškolsku decu, intuitivno shvataju pojam šanse. Ovi rezultati potvrđuju podatke Josta, Sigela, Endrjusa i Goldberga o postojanju ovakve intuicije na ranom predškolskom uzrastu. Podaci iz ovog istraživanja pokazuju da suđenje predškolske dece ne ide dalje od onih situacija, gde postoje dva jednaka elementa, tako da se suđenje svodi na jednostavno poređenje dva niza elemenata. Njihovi sudovi počivaju na poređenju dva niza elemenata i ostaju na tom nivou. Efekat instrukcije je praktično neznatan na tom uzrastu. U slučaju jednakih odnosa, rezultati koji su ispod slučajnih očekivanja, mogu se objasniti sistematskom greškom koju ispitanici čine. Dva kompleta sa jednakim šansama su bila perceptivno nejednaka i dečije reakcije su bile u skladu sa ovim nejednakostima. Instrukcija nije povećala moć razumevanja, nego je samo potisnula izvesne strukture i dovela odgovor do slučajnog izbora. Na uzrastu od devet godina, reakcije koje su zahtevale poređenje dva odnosa, prelazile su za malo nivo slučajnosti. Ovi podaci potvrđuju rezultate Pijažea i Inheldera u pogledu spontanog procenjivanja jednakosti šanse (spontanom shvatanju proporcija). Ovi podaci se razlikuju od pomenutih autora u pogledu efekata instrukcije. Deca od 9-10 godina uspevaju da shvate dvostruke odnose i pojam proporcije, uz pomoć instrukcije. Njihov način rešavanja je čisto intuitivan pošto se oni koriste formalnim numeričkim odnosima.

Ako diskutujemo o teorijskim aspektima problema, i pozabavimo se spontananim odgovorima ( $I_1$ ) stvari izgledaju jasne i u skladu sa Pijaževim shvatanjem: proporcije i poređenje dva odnosa uopšte, postaju mogući tek na nivou formalnih operacija. Možemo ih smatrati operacijama koje zahtevaju misaone strukture specifične za ovaj stadijum. Međutim, tehnika instrukcije, menja potpuno situaciju. Deca stara 9-10 godina, čim shvate smisao ovih operacija direktno prelaze na formalno zaključivanje pomoću numeričkih odnosa. Učenici trećeg razreda jasno ističu: *Ja ću izabrato ovu kutiju zato što u njoj ima tri puta više crnih klikera nego belih, a u drugoj ih ima samo dva puta više.* Istraživači postavljaju pitanje: Zar ne bi bilo lakše stvoriti na stadijumu konkretnih operacija, pomoću instrukcije, strukture slične formalnim operacijama i sa relativno stabilnim

efektom, nego ubrzavati prelaz iz preoperacionalne faze u operacionalnu. Činjenica je da bi ovakva hipoteza imala ogromne posledice za obučavanje.

Najvažniji podatak ovog istraživanja je da deca od 9-11 godina daju spontane odgovore u vezi sa pojmovima šanse i proporcije, koji ne prelaze nivo dece od 5-6 godina. Oni su u stanju da pomoću pogodne instrukcije dostignu nivo odgovora koje daju ispitanici od 13-14 godina. Ova činjenica je od ogromnog značaja za formiranje probalističkih pojmova, jer ona inicira optimalni uzrast na kome treba početi sa vežbanjem ove sposobnosti u školama [9].

### **2.3. Istraživanje u Sloveniji**

Univerzitet u Ljubljani, u Sloveniji, sproveo je istraživanje na temu razumevanja pojmova verovatnoće kod dece predškolskog uzrasta i nižih razreda osnovne škole. Realizatori su Tatjana Hodnik Čadež i Maja Škrbec. Kao razlog navode činjenicu da se u slovenačkom nacionalnom matematičkom planu i programu verovatnoća prvi put pominje u devetom razredu osnovne škole (14 godina), i to neformalno, samo u nekim udžbenicima. Cilj je bio utvrditi u kom uzrastu su učenici sposobni da razlikuju sigurne, moguće i nemoguće događaje i predvide verovatnoću raznih događaja. Ispitati koliko su deca različitih starosnih grupa uspešna u rešavanju zadataka iz verovatnoće, kao i njihovom poređenju. Istražiti da li se pojavljuju značajne statističke razlike među zadacima, polovima ili starosnim grupama.

#### **Metod**

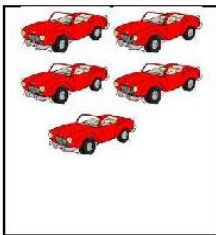
U istraživanju je učestvovalo 623 dece iz 16 škola i obdaništa u Sloveniji (gradske i seoske škole), kao i 141 nastavnik i vaspitač iz 18 škola i vrtića. Od ukupnog broja ispitanika 58% su činili dečaci.

## Instrument

Test 1 (Prilog 1) obuhvata 6 zadataka koji su dati u nastavku.

1. U kutijama se nalaze medvedići i automobili. Zamisli da zatvoriš oči i izvučeš jednu igračku iz svake kutije .

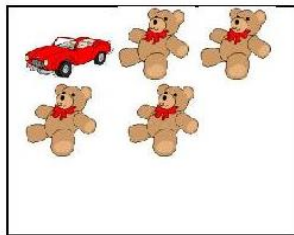
A) Da li možeš izvući automobil? ( Zaokruži tačan odgovor ispod svake slike.)



SIGURNO

MOGUĆE

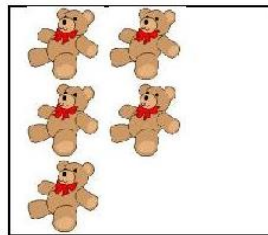
NEMOGUĆE



SIGURNO

MOGUĆE

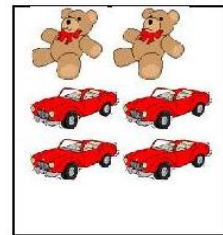
NEMOGUĆE



SIGURNO

MOGUĆE

NEMOGUĆE



SIGURNO

VEROVATNO

NEMOGUĆE

B) U kojoj kutiji je više verovatno da izvučeš automobil, u drugoj ili četvrtoj?

2. Kockica za igru se baca jedanput. Na njoj su obeleženi brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pored svake rečenice zaokruži odgovor.

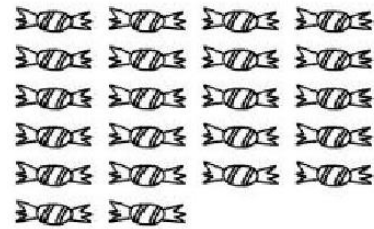
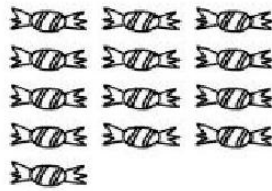
- |   |         |        |          |
|---|---------|--------|----------|
| A) Kockica će pokazati broj 6.          | SIGURNO | MOGUĆE | NEMOGUĆE |
| B) Kockica će pokazati broj manji od 7. | SIGURNO | MOGUĆE | NEMOGUĆE |
| C) Kockica će pokazati broj 7.          | SIGURNO | MOGUĆE | NEMOGUĆE |
| D) Kockica će pokazati broj veći od 7.  | SIGURNO | MOGUĆE | NEMOGUĆE |
| E) Kockica će pokazati broj 3.          | SIGURNO | MOGUĆE | NEMOGUĆE |

3. Mojka ima 6 marama u svojoj torbi, od kojih su 2 žute, 2 plave, 1 bela i 1 zelene boje. Uzela je jednu maramu iz ranca, ne gledajući. Dovrši date rečenice.

A) Moguće da je izvukla: \_\_\_\_\_.

B) Nije moguće da je izvukla: \_\_\_\_\_.

4. Gregor ima 3 kesice bombona. U svakoj ima po 1 čokoladna, a ostale su voćne bombone. Bez gledanja, on je pokušao da izvuče čokoladnu bombonu. Zaokruži tačan odgovor.



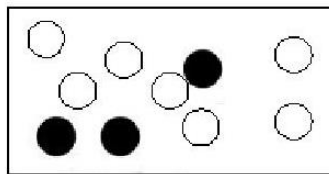
- A) Da li Gregor već u prvom pokušaju može da izvuče čokoladnu bombonu iz bilo koje kesice? DA NE  
 B) Da li je moguće da Gregor izvuče karamelu iz treće kesice? DA NE  
 C) Da li je verovatnije da izvuče voćnu ili čokoladnu bombonu iz druge kesice? VOĆNA ČOKOLADNA  
 D) U kojoj kesici je najverovatnije da će Gregor izvući čokoladnu bombonu? PRVA DRUGA TREĆA  
 E) U kojoj kesici je najverovatnije da će izvući voćnu bombonu? PRVA DRUGA TREĆA

5. Mađioničar je u svoju kutiju stavio 10 zečeva kako bi ih preobrazio u golubove. Sedam zečeva su se preobrazila u goluba, a tri nisu. Jaka je izvukao jednu životinju iz kutije. Dovrši započete rečenice.

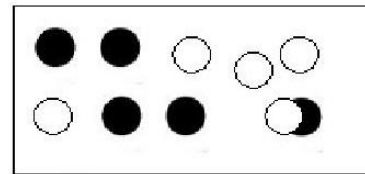
A) Veća je verovatnoća da će Jaka izvući \_\_\_\_\_.

B) Manja je verovatnoća da će Jaka izvući \_\_\_\_\_.

6. A) U prvoj kutiji je 7 bele i 3 crne kuglice, dok su u drugoj 5 bele boje i 5 crne boje. Sabina će dobiti poklon ako izvuče belu kuglicu. Iz koje kutije bi trebala Sabina da izvlači kuglicu da bi dobila poklon?



A) iz prve kutije

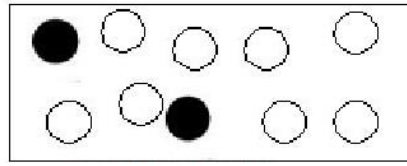
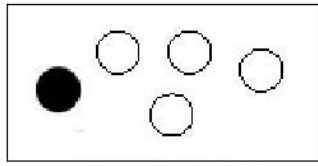


B) iz druge kutije

C) svejedno je, iz obe kutije je isto

Zašto? \_\_\_\_\_

- B) U prvoj kutiji je 5 kuglica, od kojih su 4 bele i 1 crne boje. U drugoj kutiji je 10 kuglica, od kojih su 8 bele i 2 crne boje. Sabina će dobiti poklon ako izvuče belu kuglicu. Iz koje kutije bi trebala Sabina da izvlači kuglicu da bi dobila poklon?



A) iz prve kutije

B) iz druge kutije

C) svejedno je, iz obe kutije je isto

Zašto? \_\_\_\_\_

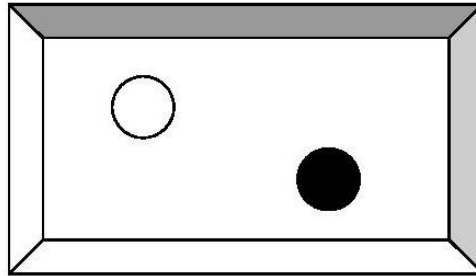
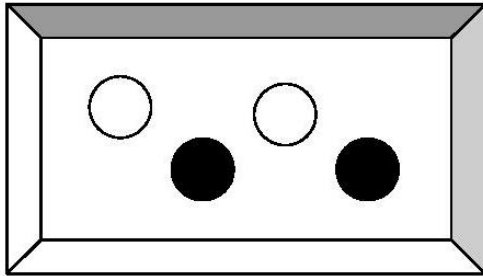
Većina zadataka zahtevala je da se zaokruži tačan odgovor. U trećem i petom zadatku bilo je potrebno dopuniti datu rečenicu, dok je u zadnjem zadatku potrebno obrazložiti odgovore. Drugi, treći i šesti zadatak su bili različiti za mlađe učenike zbog nedostatka znanja o brojevima i bojama. Umesto toga navedene su različite vrste životinja i voća. Nastavnici i vaspitači su popunili upitnik koliko su saglasni sa zadacima i pitanjima u testu, kao i da li su zadaci u skladu sa postavljenim ciljevima. Učenik treba da razlikuje sigurne, moguće i nemoguće događaje, upoređuje različite verovatnoće događaja uz grafičku prezentaciju. Utvrđeno je da je test zaista ispunjavao ciljeve.

Test 2 (Prilog 2) se bazira na jednakim verovatnoćama. Sastoji se od sledeća četiri zadatka.

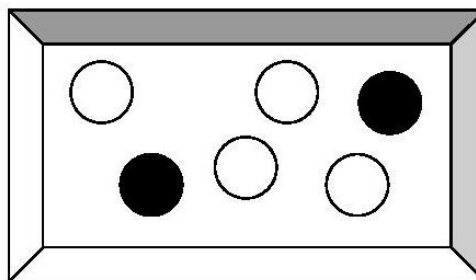
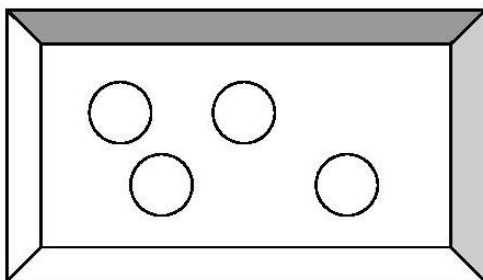
TEST 2

Zaokruži kutiju iz koje dečak treba da izvlači kuglicu, a da ona bude crna.

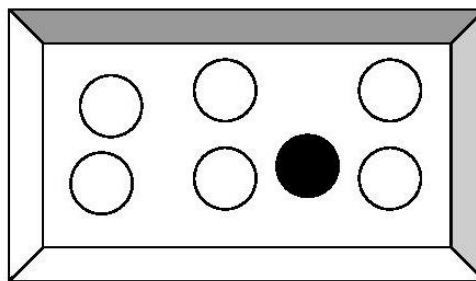
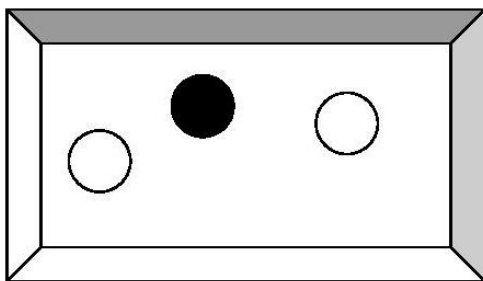
Task 1



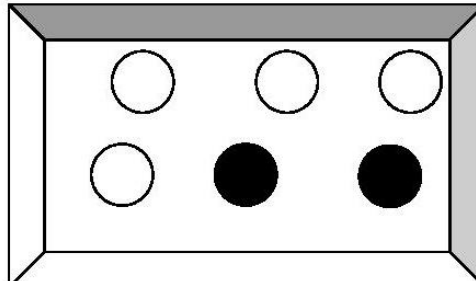
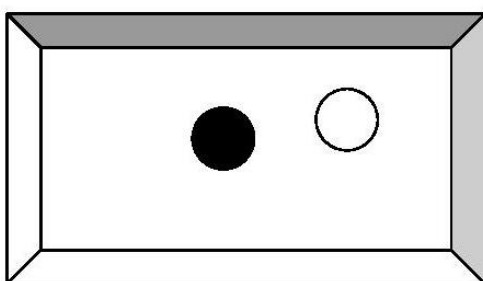
Task 2



Task 3



Task 4



Ispitivanje treba da pokaže da li je efikasno razvijen pedagoški okvir podučavanja jednakih verovatnoća. Obučena su dva nastavnika prvog razreda da primene ovaj pristup među učenicima.

## Rezultati i analiza

Skoro svi zadaci koji se odnose na razlikovanje sigurnih, mogućih i nemogućih događaja su uspešno rešeni (više od polovine ispitanika). Između ostalog utvrđeno je da su deca od 4-5 godina najviše poteškoća imala sa pojmom "sigurno". Ove teškoće su primećene i u drugim starosnim grupama, ali ne u tolikoj meri. Takođe o zadacima koji se odnose na poređenje verovatnoće različitih događaja deca su se dobro snalazila. Prilično težak zadatak za svaku starosnu grupu bio je poslednji koji se odnosio na predviđanje ishoda sa jednakim verovatnoćama. Deca su takođe morala opravdati odgovore za šesti zadatak. Ispostavilo se da su gotovo svi koji su odgovorili tačno na pitanje uspeali to samo pogađajući, jer je samo 1,8% ispitanih zaista i opravdalo tačan odgovor. Prosečna uspešnost svih ispitanika na prvom testu je 69,1%, što opet dokazuje sposobnost dece da rešavaju zadatke iz verovatnoće.

Čak 36,7% nastavnika i vaspitača smatra da deca mogu da razlikuju sigurne, moguće i nemoguće događaje, i uporede verovatnoću događaja posle osme godine, 29,6% ispitanika tvrdi da se to može postići sa sedam godina. Na pitanje koje se odnosi na uzrast dece koja su sposobna da uporede verovatnoće različitih događaja 41,6% tvrdi da je to osam godina, a 22% da je to sedam godina. Međutim, rezultati ovog istraživanja ipak pokazuju da su deca uspela postići oba cilja mnogo ranije. Učenici se bolje snalaze u razlikovanju između sigurnih, mogućih i nemogućih događaja nego na poređenju različitih verovatnoća. Zadatak sa jednakim verovatnoćama najteže je rešiti. Realizatori tvrde da su njihovi rezultati slični onima kao što su Fišbejn i drugi (1984), Dejvis (1965), Goldberg (1966), Jost i drugi (1962), koji veruju da deca mogu da reše određene zadatke iz verovatnoće već u dobi od 4-5 godina. Pošto deca u školi ne uče o ovim temama (nastavnici ih ne upoznaju direktno), zaključeno je da su zadaci verovatno rešavani intuitivno, na osnovu iskustva dece sa predviđanjem događaja. Rešavanje je zasnovano na nekoj informaciji, ili nekom iskustvu koje dete poseduje iz svakodnevnog života. Deca su pokazala neko predznanje o verovatnoći pre upisa u školu. Što su učenici mlađi, oni dosežu prvi nivo razumevanja verovatnoće, koji se zasniva na subjektivnom razmišljanju. Učenici su pokazali mnogo veću zainteresovanost za sadržaj verovatnoće kada im se obezbedi konkretan materijal za rešavanje problema, tj. kada aktivno učestvuju u rešavanju zadataka. Preporučuje se da se mlađoj deci obezbede korisna iskustva, gde će nastavnici birati odgovarajuću motivaciju i prilagoditi je aktivnostima učenika.

## **Diskusija i zaključak**

U istraživanju je utvrđeno da deca u prva tri razreda osnovne škole mogu da razlikuju sigurne, moguće i nemoguće događaje i upoređuje verovatnoće različitih događaja, dok samo polovina dece starosti od 4-5 godina su bila u stanju da to učine. U nekim zadacima mlađa deca su se bolje pokazala od starijih, jer su oni imali prilagođene testove zbog nepoznavanja čitanja, pisanja i odedenih pojmova. Pored toga, mlađi su usmeno odgovarali, dok su stariji pismeno. Važno je insistirati da učenik opravda svoje odgovore. U zadacima treba navoditi situacije koje su povezane sa svakodnevnim životom, predstavljene na različite načine, uključuju matematičke koncepte. Ponuditi deci puno mogućnosti za diskusiju i procenu verovatnoće. Sve to nesumnjivo doprinosi razvoju onih kompetencija koje savremeni čovek treba da poseduje da bi se brzo prilagodio svetu. Potrebno je podstaći kritički stav prema "numeričkim informacijama", koje distribuiraju mediji. Ako želimo da čovek razvije način razmišljanja koji bi bio drugačiji od determinističkih šema mišljenja, trebalo bi početi sa učenjem verovatnoće na nivou konkretnih operacija, ako ne i ranije, i to u fazi tranzicije iz nivoa konkretnih operacija do nivoa formalnih [3].

## **2.4. Rezultati mog istraživanja**

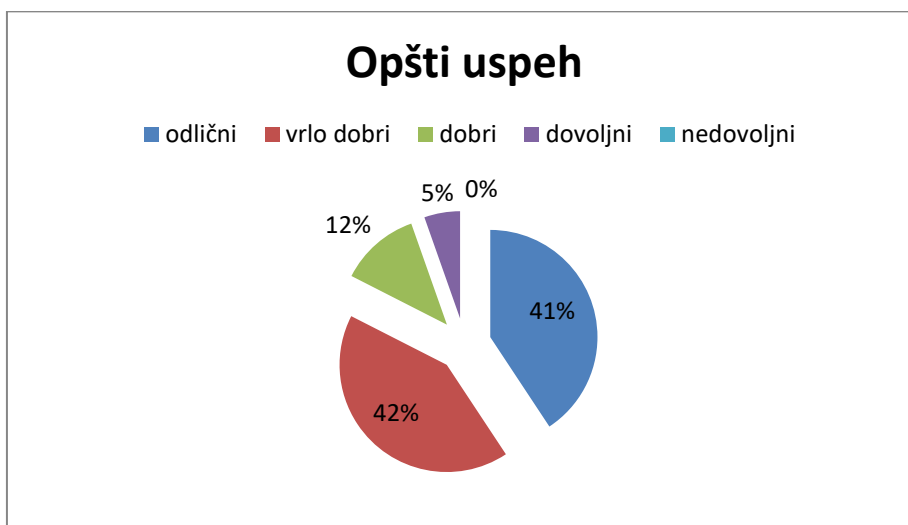
### **Predmet i ciljevi istraživanja**

Na osnovu rezultata prikazanih istraživanja, većina pokazuje da su učenici sposobni za izučavanje probalističkih pojmova u periodu formalnih operacija, tj. posle 11-12 godine. Razumevanje slučajnih fenomena i neizvesnosti, koje je zastupljeno u planovima i programima širom sveta, kao i u internacionalnim testiranjima, bilo je polazni motiv za sprovedeno istraživanje. Predmet ovog istraživanja je ispitivanje spremnosti učenika starijih razreda osnovne škole da usvoje elementarne pojmove verovatnoće. Kako se učenici nisu susreli sa pojmovima slučajnosti i verovatnoće u formalnom osnovnom obrazovanju, cilj je ispitati kako se oni snalaze sa zadacima koji kroz konkretne i njima bliske situacije iz života obuhvataju pojam šanse i verovatnoće. Ciljevi istraživanja su da se ispita da li postoje razlike u razumevanju slučajnih događaja među učenicima starijih razreda osnovne škole.

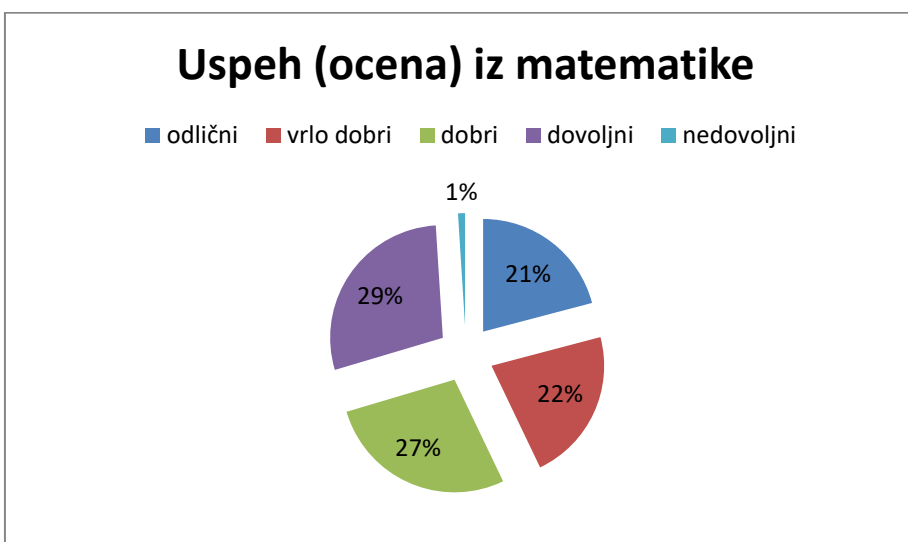
## Metod

Ispitivanje je sprovedeno u novembru 2017. godine, u Osnovnoj školi "Dušan Jerković" u Užicu.

U ispitivanju je učestvovalo ukupno 100 učenika od petog do osmog razreda. I to 26 učenika petog razreda, 25 učenika šestog, 25 učenika sedmog i 24 učenika osmog razreda. Devojčice su činile 54,9%, a dečaci 45,1%. Naredni grafikoni prikazuju opšti uspeh ispitanika i ocenu iz matematike na kraju prethodnog razreda.



**Grafikon 1. Grafički prikaz opšteg uspeha uzorka**




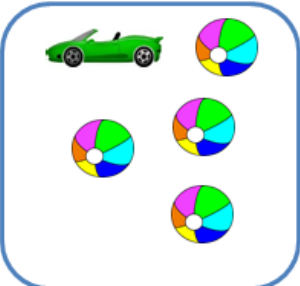
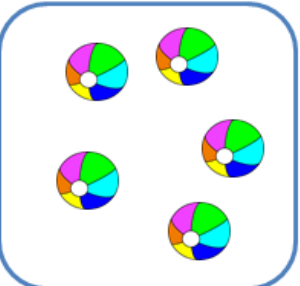
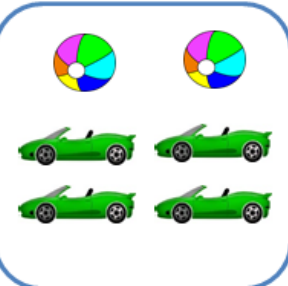
**Grafikon 2. Grafički prikaz ocene iz matematike uzorka**

## Instrument

Instrument ispitivanja je upitnik (Prilog 3) koji se sastoji od šest zadataka. Vreme trajanja je ograničeno na 15 minuta. Svi učenici su testirani u svojim učionicama. Upitnik je anoniman. Na početku je potrebno zaokružiti pol, razred, uspeh iz matematike na kraju prethodnog razreda, kao i opšti uspeh.

Prvim zadatkom se proverava da li učenici na osnovu date slike razumeju pojmove: nemoguće, moguće, sigurno, verovatno. Potrebno je zaokružiti jedan od ponuđena tri odgovora.

1. U kutijama se nalaze igračke – automobili i loptice. Zamisli da zatvoriš oči i izvučeš jednu igračku iz svake kutije .  
a) Da li možeš izvući automobil? ( Zaokruži tačan odgovor ispod svake slike.)

			
SIGURNO	SIGURNO	SIGURNO	SIGURNO
MOGUĆE	MOGUĆE	MOGUĆE	VEROVATNO
NEMOGUĆE	NEMOGUĆE	NEMOGUĆE	NEMOGUĆE

b) U kojoj kutiji je više verovatno da izvučeš automobil, u drugoj ili četvrtoj?

Slika 1. Prvi zadatak

Drugi zadatak je sličan prethodnom, ali nema vizuelnog prikaza, već samo iskazi. Potrebno je zaokružiti jedan od ponuđena tri odgovora.

2. Kockica za igru se baca jedanput. Na njoj su obeleženi brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pored svake rečenice zaokruži odgovor.

a) Kockica će pokazati broj 6.	SIGURNO	MOGUĆE	NEMOGUĆE
b) Kockica će pokazati broj manji od 7.	SIGURNO	MOGUĆE	NEMOGUĆE
v) Kockica će pokazati broj veći od 7.	SIGURNO	MOGUĆE	NEMOGUĆE
g) Kockica će pokazati broj 3.	SIGURNO	MOGUĆE	NEMOGUĆE

Slika 2. Drugi zadatak

Treći zadatak je otvorenog tipa. Od učenika se traži da napiše šta je moguć ishod datog eksperimenta, kao i da navede šta je nemoguć ishod datog eksperimenta.

3. Ana ima 6 flomastera u svojoj torbi, od kojih su 2 žuta, 2 plava, 1 beo i 1 zelene boje. Uzela je jedan flomaster iz ranca, ne gledajući. Dovrši date rečenice.

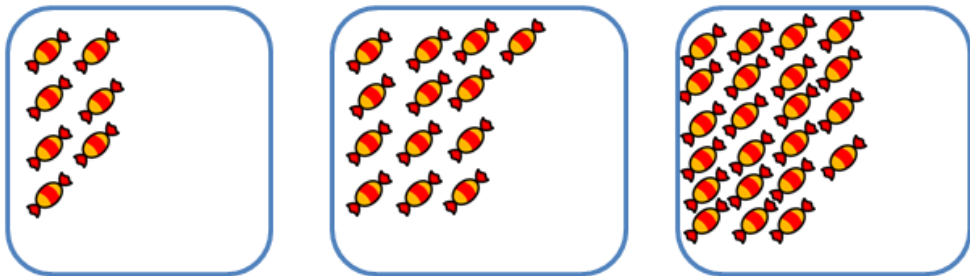
a) Moguće da je izvukla: \_\_\_\_\_

b) Nije moguće da je izvukla: \_\_\_\_\_

**Slika 3. Treći zadatak**

Četvrti zadatak je složeniji jer učenik dobija nekoliko informacija iz kojih treba da izvede korektan zaključak. Cilj je ispitati poređenje verovatnoća različitih događaja.

4. Marko ima 3 kesice bombona. U svakoj ima po 1 čokoladna, a ostale su voćne bombone. Bez gledanja, on je pokušao da izvuče čokoladnu bombonu. Zaokruži tačan odgovor.



a) Da li Marko već u prvom pokušaju može da izvuče čokoladnu bombonu iz bilo koje kesice? DA NE

b) Da li je moguće da Marko izvuče karamelu iz treće kesice? DA NE

v) Da li je verovatnije da izvuče voćnu ili čokoladnu bombonu iz druge kesice? VOĆNA ČOKOLADNA

g) U kojoj kesici je najverovatnije da će Marko izvući čokoladnu bombonu? PRVA DRUGA TREĆA

d) U kojoj kesici je najverovatnije da će izvući voćnu bombonu? PRVA DRUGA TREĆA

**Slika 4. Četvrti zadatak**

Peti zadatak indirektno proverava razumevanje klasične definicije verovatnoće.

5. Mađioničar je u svoju kutiju stavio 10 zečeva kako bi ih preobrazio u golubove. Sedam zečeva su se preobrazila u goluba, a tri nisu. Mađioničar je izvukao jednu životinju iz kutije. Dovrši započete rečenice.

a) Veća je verovatnoća da će izvući \_\_\_\_\_.


b) Manja je verovatnoća da će izvući \_\_\_\_\_.

**Slika 5. Peti zadatak**

U šestom zadatku se zahteva razumevanje jednako verovatnih događaja. U istraživanjima koja su prikazana u radu, ovakav tip zadataka je predstavljao najveći problem kod učenika.

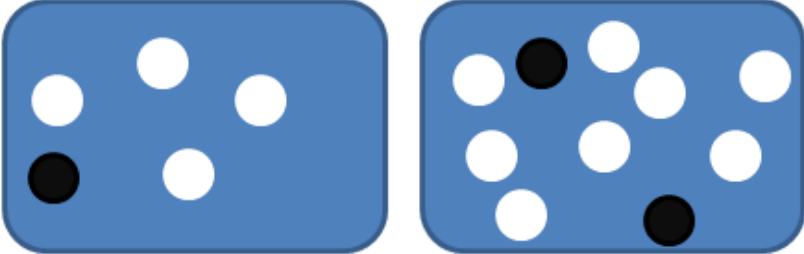
6. a) U prvoj kutiji je 7 belih i 3 crne kuglice, dok su u drugoj 5 bele boje i 5 crne boje. Petar će dobiti poklon ako izvuče belu kuglicu. Iz koje kutije bi trebao Petar da izvlači kuglicu da bi dobio poklon?

1) iz prve kutije      2) iz druge kutije      3) svejedno je, iz obe kutije je isto



b) U prvoj kutiji je 5 kuglica, od kojih su 4 bele i 1 crne boje. U drugoj kutiji je 10 kuglica, od kojih su 8 bele i 2 crne boje. Petar će dobiti poklon ako izvuče belu kuglicu. Iz koje kutije bi trebao Petar da izvlači kuglicu da bi dobio poklon?

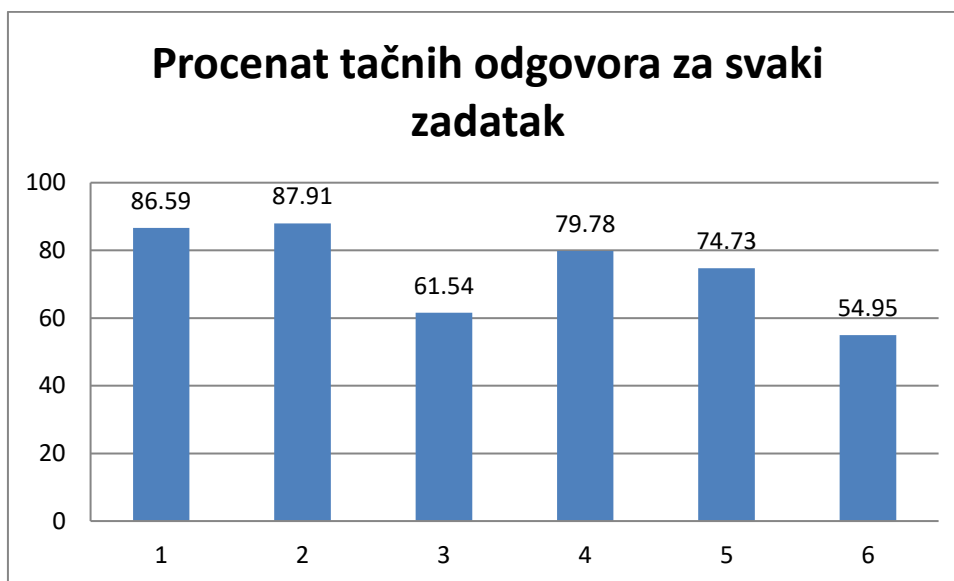
1) iz prve kutije      2) iz druge kutije      3) svejedno je, iz obe kutije je isto



Slika 6. Šesti zadatak

## Rezultati i analiza istraživanja

Više od polovine ispitanika je tačno odgovorilo na sve zadatke. Pored toga, većina zadataka je ispravno rešena za više od 75% učenika svih razreda. Na testu je bilo moguće ukupno osvojiti 20 bodova. Prosečan broj bodova koji su ispitanici ostvarili je 15,66. U nastavku je dat grafikon koji predstavlja procenat tačnih odgovora za svaki zadatak.



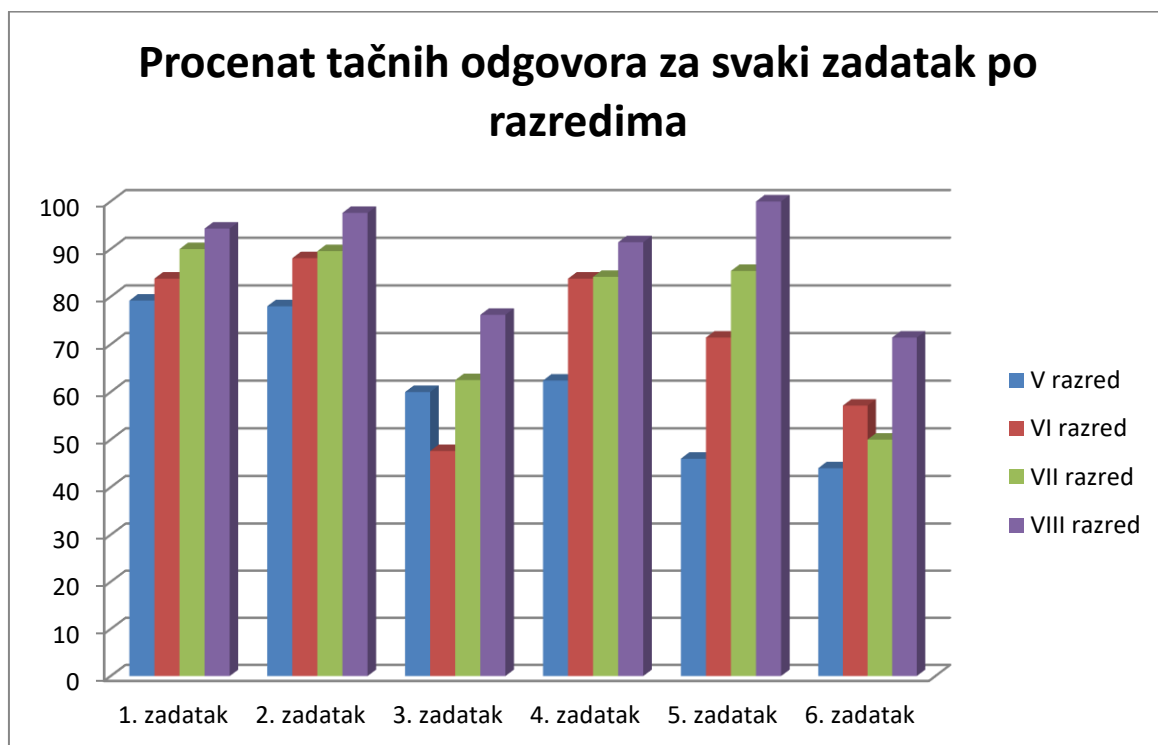
**Grafikon 3. Rezultati testa po zadacima**

Učenici su se najbolje snašli u prva dva zadatka gde je trebalo da prepoznaju siguran, moguć i nemoguć događaj. Treći zadatak pod b) je tačno uradilo samo 34,07% ispitanika, što je uticalo na procenat tačnih odgovora ovog zadatka. Veliki broj učenika je ovaj zadatak ostavio neurađen, dok su drugi za nemoguć događaj izvlačenja određene boje flomastera navodili boju flomastera koja se nalazi u torbi. Odavde možemo zaključiti da nisu razumeli zahtev zadatka ili pojam nemogućeg događaja. Četvrti i peti zadatak su uspešno savladali. Poslednji zadatak je najlošije urađen. U drugom delu ovog zadatka koji se odnosio na jednake verovatnoće tačno je uradilo samo četvrtina ispitanika tj. 25,27%.

Sledeća tabela i grafik prikazuju procenat tačnih odgovora za svaki zadatak po razredima.

**Tabela 8. Procenat tačnih odgovora za svaki zadatak po razredima**

	V razred	VI razred	VII razred	VIII razred
1. zadatak	79.2%	83.81%	90%	94.3%
2. zadatak	78%	88.1%	89.58%	97.6%
3. zadatak	60%	47.62%	62.5%	76.2%
4. zadatak	62.4%	83.81%	84.17%	91.43%
5. zadatak	46%	71.43%	85.42%	100%
6. zadatak	44%	57.14%	50%	71.43%



**Grafik 4. Rezultati testa po razredima**

## Diskusija i zaključak

Učenici koji su učestvovali u istraživanju nisu se nikada susreli sa elementarnim pojmovima iz teorije verovatnoće na školskim časovima. Ovim istraživanjem želeli smo da ispitamo koliko su učenici spremni da uče o verovatnoći. Zadaci su pokrivali elementarno razumevanje verovatnoće. Ovim testiranjem vidimo da učenici bez prethodnog formalnog učenja o slučajnim događajima i verovatnoći (šansi) intuitivno osećaju i razumeju elementarne pojmove ove matematičke discipline. Učenici svih razreda uspešno su savladali uglavnom sve zadatke. Najveći problem je predstavljao poslednji zadatak koji se odnosio na jednako verovatne događaje. Iako je u zadatku jedan od ponuđenih odgovora bio da je svejedno iz koje kutije će se izvući kuglica, samo 25,27% učenika je tačno odgovorilo, i to su uglavnom bili učenici osmog razreda. Ovi rezultati potvrđuju iste probleme na koje su naišli učenici u Sloveniji u istraživanju koje je detaljno prikazano. Ovo potvrđuje podatak da su mnogi profesori i istraživači tragali za adekvatnom i efikasnom metodom za učenje jednakih verovatnoća u ranom školskom uzrastu. Poteškoće su se javile i u 4. zadatku pod a) koji postavlja pitanje da li je već u prvom pokušaju moguće da se eksperiment uspešno završi. Ovde je samo polovina učenika tačno odgovorila.

Procenat ostvarenih rezultata je najveći kod učenika 8. razreda. Oni su najbolje savladali sve zadatke, što je i očekivano jer su oni već u periodu adolescencije u kome su formalne operacije znatno razvijene. Pretpostavljeno je da se razlog krije u zrelosti i intuiciji učenika da razume praktične situacije i najbolje proceni mogući ishod. Oni takođe imaju manje predrasuda od mlađih učenika i objektivnije posmatraju situacije koje su im date. Učenici 8. razreda imaju više znanja i iskustva u zaključivanju i donošenju odluka.

Rezultati pokazuju da svi učenici razumeju pojmove: *sigurno*, *nemoguće*, *moguće*, *verovatnije je*, *manje je verovatno*, *najverovatnije*. Više od 85% ukupnog broja ispitanika je tačno odgovorilo na ovakav tip zadataka.

Radovi i istraživanja Pijažea i njegovih kolega pokazuju da dete na nivou formalnih operacija 11-12. godine može da razume verovatnoću. Rezultati ovog istraživanja su takođe pokazali da su učenici sposobni da prepoznaju različite događaje i kategorišu ih u zavisnosti od njihove verovatnoće. Na osnovu toga smatram da treba uvesti verovatnoću u školske programe osnovnog obrazovanja sa

naglaskom na aktivno učešće deteta u raspravama o situacijama koje su moguće, nemoguće, izvesne ili čak i jednako verovatne. Deci se ovako pruža puno mogućnosti za diskusiju, procenu i raspravu o verovatnoći događaja koji se odnose na svakodnevni život. To je, zapravo, glavna tačka uvođenja verovatnoće na časove matematike. Do ovih zaključaka su došli istraživači iz Grčke, Slovenije, Amerike, Engleske,... Važan uslov za uvođenje koncepta verovatnoće u osnovnu školu je korišćenje odgovarajućih probabilističkih izraza i rečnika za različite starosne grupe dece. Takođe je bitna angažovanost i motivisanost nastavnika da učenici uspešno savladaju verovatnoću.

### 3. OBRADA VEROVATNOĆE U OSNOVNOJ ŠKOLI

U nastavku je prikazan predlog nastavnog materijala za obradu osnovnih pojmova na temu *verovatnoće* u osnovnim školama.

#### 3.1. Elementarni uvod u verovatnoću

Verovatnoća se prvobitno javila kao potreba za proučavanjem igara na sreću, a od 17. veka postala je predmet interesovanja mnogih naučnika širom sveta.

Često se u prirodi pojave i događaji dešavaju po tačno određenim zakonima i uvek kada su ispunjeni određeni uslovi (Njutnov zakon gravitacije). Ti zakoni se nazivaju deterministički. Međutim, u prirodi i društvu ima pojava i događaja koji se pod određenim uslovima nekada realizuju, a nekada ne. Ovakve pojave i događaji se nazivaju *slučajnim*. Proučavanje slučajnih pojava predmet je dela matematike koji se zove *teorija verovatnoća* [8].

Teorija verovatnoće proučava zakonitosti koje važe za slučajne pojave (eksperimente) kod kojih se tok i ishod ne mogu sa sigurnošću predvideti. Slučajne pojave su, na primer, kretanje temperature vazduha u nekom mestu tokom godine, promena cene neke robe u određenom vremenskom periodu, padanje meteorita na Zemlju itd. Primeri slučajnih eksperimenata predstavljaju: bacanje metalnog novčića, izvlačenje dobitaka u igri na sreću, gađanje u metu itd. Osnovni pojmovi koje ćemo koristiti pri savladavanju verovatnoće su:

*Slučajni eksperiment* – svaka radnja koju možemo ponoviti pod istim uslovima neograničen broj puta i čiji ishod (rezultat) se ne može predvideti.

*Slučajni događaj* – događaj koji u datom slučajnom eksperimentu može da se desi ili ne. Obeležavaju se velikim latiničnim slovima A, B, C itd.

*Prostor ishoda (skup ishoda)* – skup svih mogućih ishoda eksperimenta. Obeležava se velikim grčkim slovom  $\Omega$ <sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup> Omega (veliko  $\Omega$ , malo  $\omega$ , grč.  $\Omega\mu\acute{\epsilon}\gamma\alpha$ ) je 24. slovo grčkog alfabeta

*Elementarni događaj* - podskup prostora ishoda koji ima samo jedan element.

Ako je slučajni eksperiment bacanje kockice za igru, događaji su: pojavljivanje broja 4 na gornjoj strani kockice, pojavljivanje neparnog broja, pojavljivanje broja manjeg od 3 itd. Prilikom bacanja novčića pojavljivanje pisma i pojavljivanje grba su slučajni događaji, pri rađanju deteta rođenje ženskog deteta, pri gađanju u metu pogodak, u igri loto bar 3 pogođena broja, pri praćenju temperature vazduha zadržavanje temperature 15-20 stepeni itd. Pre nego što počnemo sa ponavljanjem eksperimenta važno je dogovoriti se o pravilima kako ćemo to raditi, tj. koja se neće menjati pri svakom novom izvođenju. Treba odrediti i kako će se beležiti rezultati eksperimenta.

**Primer 1:** Kod eksperimenata bacanja novčića skup elementarnih ishoda (događaja) je  $\Omega = \{P, G\}$ , gde simbolom P označavamo da je palo pismo, a simbolom G označavamo ishod da je pao grb.

**Primer 2:** Novčić se baca dva puta. Skup ishoda će biti  $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$ , gde je jednoznačno određen rezultat i u prvom i u drugom bacanju novčića.

**Primer 3:** Kocka čije su strane numerisane brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6 baca se dva puta. Skup elementarnih događaja se sastoji od sledećih 36 ishoda:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\ & (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\ & (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\ & (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\ & (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\ & (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}. \end{aligned}$$

**Primer 4:** Kocka za igru se baca dva puta. Ako nas interesuje samo zbir registrovanih brojeva, tada ovakvom eksperimentu možemo pridružiti sledeći skup ishoda:

$$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

**Primer 5:** Bacaju se novčić i kocka za igru. Skup ishoda je:

$$\Omega = \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, G1, G2, G3, G4, G5, G6\}.$$

**Primer 6:** Novčić se baca tri puta. Prostor ishoda je:

$$\Omega = \{PPP, PPG, PGP, GPP, PGG, GPG, GGP, GGG\}.$$

Događaj da će pasti bar dva pisma je  $A = \{PPP, PPG, PGP, GPP\}$ , a događaj da će pasti samo jedna strana je  $B = \{PPP, GGG\}$ .

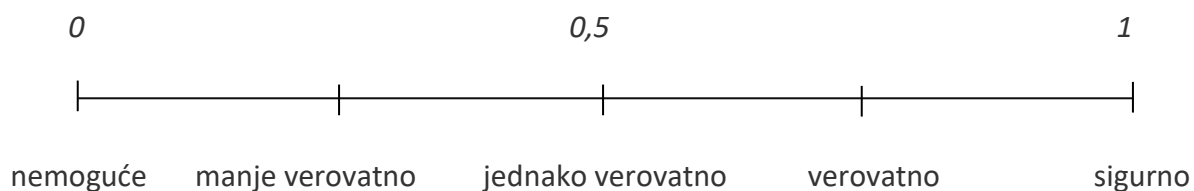
**Primer 7:** Kocka za igru baca se jedanput. Ako je pao broj manji od 3 baca se još jednom. Odredi prostor elementarnih ishoda.

$$\Omega = \{3, 4, 5, 6, (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

Prva četiri ishoda predstavljaju jedno bacanje kockice u slučaju kada je pao broj koji nije manji od 3, a ostali beleže mogućnosti kada je u prvom bacanju pao broj manji od 3, a u drugom bilo koji broj od mogućih 6 koji se nalaze na kockici.

Verovatnoća nekog događaja  $A$  označava se sa  $P(A)$  i mora da zadovolji uslov

$$0 \leq P(A) \leq 1$$



Postoje događaji koji se uvek realizuju. Događaji koji su rezultat ovakvih procesa nazivaju se *sigurni događaji* i obeležavaju se sa  $\Omega$ . Verovatnoća dešavanja ovakvih događaja je 1.

**Primer 8:** U kutiji se nalazi 8 crnih kuglica. Kolika je verovatnoća da će osoba, izvlačenjem jedne kuglice iz kutije, držeći pri tome zatvorene oči, izvući crnu kuglicu?

Pošto su sve kuglice crne, jedino je moguće izvući crnu kuglicu. Prema tome, verovatnoća da će iz kutije biti izvučena crna kuglica je 1.

Ako kao rezultat procesa ne može da se desi određeni događaj, kažemo da je to *nemoguć događaj*, tj. oni se nikada ne realizuju, i obeležavaju se sa  $\emptyset$ . Verovatnoća dešavanja nemogućeg događaja je 0.

**Primer 9:** U kutiji se nalazi 8 crnih kuglica. Kolika je verovatnoća da će izvlačenjem jedne kuglice iz kutije, držeći pri tome zatvorene oči, biti izvučena ljubičasta kuglica?

Kako su sve kuglice crne, slučajnim biranjem jedne od njih sigurno će biti izvučena crna kuglica. Prema tome, verovatnoća da će iz kutije biti izvučena ljubičasta kuglica je 0.

Verovatnoća slučajnog događaja koji nije siguran ili nemoguć se nalazi između 0 i 1 i ima različite interpretacije. Na primer, ako je  $P(E)=0.0001$ , tada smatramo da je izuzetno mala verovatnoća da će se desiti događaj E. Nasuprot tome, ako je  $P(E)=0.9999$ , tada je veoma verovatno da će se desiti događaj E.

Prema klasičnom pristupu, verovatnoća proizvoljnog događaja A jednaka je količniku broja ishoda povoljnih za događaj A i broja svih mogućih ishoda.<sup>13</sup> Može se izraziti formulom

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

gde je:

**$P(A)$**  - verovatnoća događaja A,

**$k$**  - broj "povoljnih" ishoda, tj. broj ishoda koji zadovoljavaju postavljeni uslov

**$n$**  - ukupan broj ishoda eksperimenta.

---

<sup>13</sup> Klasičnu definiciju verovatnoće uveo je francuski matematičar i astronom Laplas (1749-1827.)

**Primer 10:** Odredi verovatnoću da je pri bacanju novčića palo pismo.

Neka je događaj  $A$  – palo je pismo. Tada je sup svih ishoda  $\Omega = \{P, G\}$ . Kako je  $k = 1$ ,  $n = 2$ , tada je po formuli  $P(A) = \frac{1}{2}$ .

**Primer 11:** Baca se kocka za igru. Kolika je verovatnoća da je pao broj deljiv sa 3?

Neka je događaj  $A$  – pao je broj deljiv sa 3. Skup svih ishoda  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , brojevi deljivi sa 3 su 3 i 6, pa je broj povoljnih ishoda  $k = 2$ , a ukupan broj ishoda  $n = 6$ , tada je po formuli  $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ .

**Primer 12:** Kolika je verovatnoća da se iz špila od 52 karte izvuče kralj?

Ukupan broj mogućih ishoda je 52, jer se izvlači jedna karta iz špila od 52 karte. Pošto špil ima 4 kralja, broj povoljnih ishoda je 4. Koristeći se gornjom formulom dobijamo da je verovatnoća događaja –izvučen je kralj ,  $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$  . Prema tome, šanse da se iz špila od 52 karte izvlačenjem jedne karte izvuče kralj su 1:13.

Osobine verovatnoće:

1.  $0 \leq P(A) \leq 1$
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $P(\emptyset) = 0$

**Primer 13:** Posmatrajmo eksperiment bacanja novčića, koji predstavlja najjednostavniji model u teoriji verovatnoće jer je skup svih ishoda dvočlan  $\{P, G\}$ . Zamislimo da je novčić fer (savršeni valjak) tj. da je šansa da padne pismo 0,5. Ponavljamo bacanje novčića i registrujmo šta pada. Sa  $m$  obeležimo broj pojavljivanja pisma u  $n$  bacanja. Količnik  $\frac{m}{n}$  naziva se relativna učestalost pojavljivanja pisma u  $n$  bacanja novčića. U datoj tabeli su prikazani neki rezultati bacanja novčića [7]. Šta zaključuješ?

**Tabela 9. Rezultati bacanja novčića**

Ispitivač	n – broj bacanja fer novčića	$\frac{m}{n}$ – relativna učestalost pojave pisma
Bifon	4040	0,507
de Morgan	4092	0,5005
Romanovski	80640	0,4923
Pirson	24000	0,5005
Feler	10000	0,4979

## Zadaci

### Osnovni nivo:

1. Baca se kockica za igru numerisana brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6. Regstruje se broj koji se nalazi na gornjoj strani kocke. Odredi prostor mogućih ishoda.
2. Deset kuglica je numerisano brojevima 1, 2, ..., 10. Bira se jedna kuglica. Odredi prostor ishoda (elementarnih događaja).
3. Bacaju se dva novčića i jedna kocka za igru. Odredi prostor elementarnih događaja.
4. Ana je menadžer restorana koji zapošljava nove radnike i to 6 konobara i 6 kuvara. Kolika je verovatnoća da je prvi kandidat konkurisao za posao konobara?
5. Tijana je od sestre dobila CD sa muzikom na kojoj su 4 pesme od Riblje Čorbe i 1 pesma Zdravka Čolića. Ako njen muzički uređaj reprodukuje pesme slučajnim redosledom, kolika je verovatnoća da će prva pesma biti pesma Zdravka Čolića?
6. Nataša se prijavljuje u hotel koji ima slobodne 3 sobe s pogledom na jezero i 1 s pogledom na planinu. Kolika je verovatnoća da će dobiti sobu s pogledom na jezero?
7. Biljana ima 3 karte za pozorište i 9 karata za bioskop u torbi. Ako ne gledajući izvlači jednu kartu, kolika je verovatnoća da će izvući kartu za pozorište?

8. Zoran u istoj fioci ima 5 pari čarapa crne boje i 5 pari teget boje. Ako čarape uzima ne gledajući, kolika je verovatnoća da će izvući crne čarape?
9. Biljana je za put spakovala 4 sendviča sa piletinom i 2 sa tunjevinom. Kolika je verovatnoća da će prvi sendvič koji izvuče biti sa piletinom?

**Srednji nivo:**

10. Novčić se baca tri puta. Odredi prostor ishoda i sledeće događaje: A – pala su tačno dva pisma, B – pala su bar 2 pisma, C – u sva tri bacanja pala je ista strana.
11. Kocka za igru baca se dva puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:
  - a) u prvom bacanju je pao paran broj
  - b) u oba bacanja pali su parni brojevi
  - c) u prvom bacanju pao je manji broj nego u drugom bacanju.
12. U kutiji se nalazi 20 kuglica numerisanih brojevima 1, 2,..., 20. Slučajno se bira jedna kuglica. Kolika je verovatnoća da će biti izabrana kuglica koja je numerisana prostim brojem (1 nije ni prost ni složen broj)?
13. Novčić se baca četiri puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:
  - a) pao je paran broj pisama
  - b) pala su bar dva pisma
14. Strane prve kocke označene su brojevima 1, 1, 3, 3, 3, 3, a strane druge kocke označene su brojevima 2, 2, 2, 2, 4, 4. Eksperiment se sastoji u bacanju te dve kocke i registrovanju palih brojeva. Odredi prostor ishoda.

**Napredni nivo:**

15. Novčić se baca do prve pojave pisma, a najviše 4 puta. Odredi skup elementarnih događaja i događaj A da je izveden paran broj bacanja.

16. Kocka za igru se baca dva puta. Odrediti prostor ishoda i sledeće događaje:

A – u oba bacanja pao je paran broj

B – pala je bar jedna 6

C – u drugom bacanju pala je 3

D – zbir palih brojeva je manji od 5

E – u prvom bacanju je pao broj manji nego u drugom.

17. Kocka za igru se baca dva puta. Kolika je verovatnoća da je zbir palih brojeva deljiv sa 3?

18. Baca se kocka za igru. Ako padne jedinica ili dvojka, onda se kocka baca još jedanput. Ako padne broj veći od dva, baca se novčić. Odredi prostor elementarnih događaja.

### Zanimljivosti

1. *Paradoks rođendana* - U prostoriji se nalaze 23 osobe. Odrediti kolika je verovatnoća da bar dve među njima imaju isti rođendan.

*Rešenje.* Zamislimo kalendar na kome svako ko ulazi u prostoriju zaokruži svoj rođendan. U godini imamo 365 dana (pretpostavimo da je godina prosta) tj. 365 različitih mogućnosti. Kada druga osoba uđe u prostoriju, verovatnoća da se njen rođendan neće poklopiti sa rođendanom prve osobe iznosi  $\frac{364}{365}$ . Kada treća osoba uđe u prostoriju, postojaće 363 nezaokružena dana, pa će verovatnoća da se rođendan treće osobe ne poklopi sa rođendanima prve dve iznositi  $\frac{363}{365}$ . Dakle, za 23 osobe, verovatnoća da se rođendani nikome neće poklopiti iznosi  $\prod_{i=343}^{364} \frac{i}{365} \approx 0,492703$ . Verovatnoća da će se rođendani barem dve osobe poklopiti iznosi približno  $1 - 0,492703 = 0,507297$ , dakle više od 50%. Za 57 ili više osoba, ova verovatnoća je veća od 99%. Ovo nije paradoks koji podrazumeva logičku kontradikciju, već je paradoks zbog toga što matematička istina protivreči zdravorazumskoj proceni ljudi (većina bi u ovom slučaju pretpostavila da je tražena verovatnoća mnogo manja od 50%).

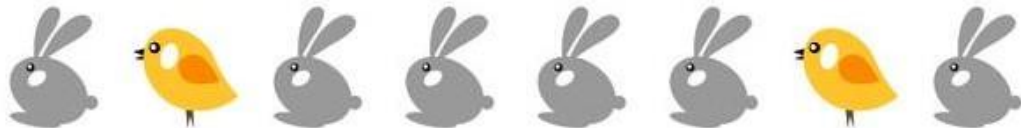
2. *Paradoks de Merea* – De Mere je igrajući mnogo puta igru koja se sastoji u bacanju tri kocke za igru i sabiranju brojeva na njima, konstatovao da se češće javlja zbir 11 nego 12. Ako kao ishode opita posmatramo trojke brojeva koji se pojavljuju, zbir 11 dobija se u sledećih 6 slučajeva 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3, a zbir 12 u 6 slučajeva. 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4. Smatrajući da su ti ishodi jednako verovatni de Mere je zaključio da događaji zbir 11 i zbir 12 moraju imati jednake verovatnoće. O tome je de Mere napisao ljutito pismo Paskalu<sup>14</sup>. Paskal je rešio paradoks ukazujući da svi pomenuti ishodi nisu jednako verovatni, jer treba uzeti u obzir i na kojoj kocki se pojavljuje koji broj. Kombinacija 6-4-1 je moguća u 6 slučajeva, dok je kombinacija 5-5-1 moguća u 3 slučaja. Dakle, jednako verovatnih ima 216 ishoda, od kojih za događaj zbir je 11 ima povoljnih 27, a za zbir 12 povoljnih 25. Primitimo da se verovatnoće  $P\{\text{zbir je } 11\} = \frac{27}{216} = 0,125$  i  $P\{\text{zbir je } 12\} = \frac{25}{216} = 0,116$  malo razlikuju. To i objašnjava da je de Mere morao da registruje relativne učestalosti ovih događaja u velikim serijama bacanja tri kocke, kada je primetio da češće pada zbir 11 od zbira 12 [4].
3. Matematičar J. Kerih je u zarobljeništvu za vreme Drugog svetskog rata izveo 10 serija od po 1000 bacanja novčića i dobio sledeće verovatnoće pojavljivanja grba [8]:
- 0,502 0,511 0,497 0,529 0,504 0,476 0,507 0,528 0,504 0,529 .

---

<sup>14</sup> Blaise Pascal (1623-1662) – francuski matematičar, fizičar i filozof, jedan od osnivača teorije verovatnoće

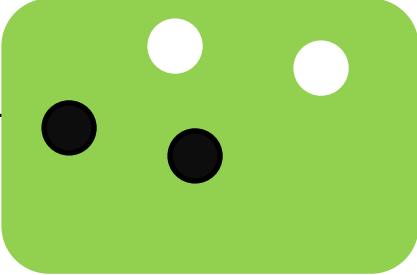
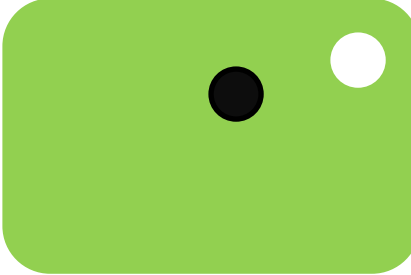
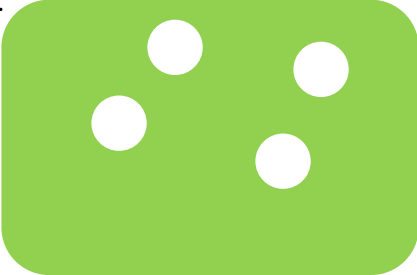
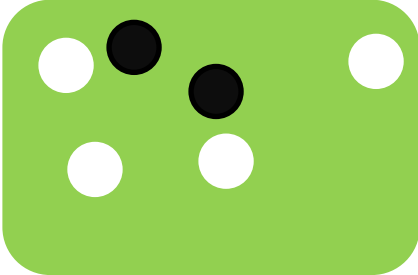
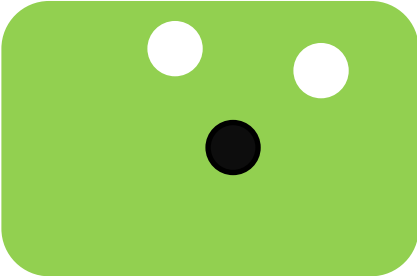
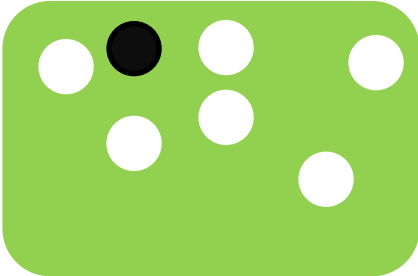
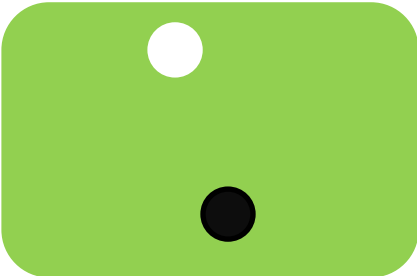
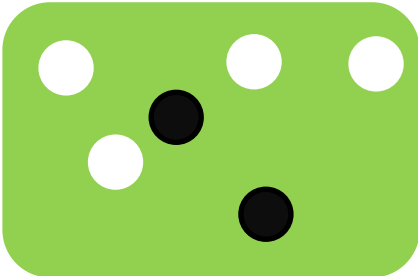
## Test

1. Razmera broja povoljnih ishoda i broja svih mogućih ishoda nekog eksperimenta naziva se \_\_\_\_\_.
2. Maksimalna vrednost verovatnoće je \_\_\_\_\_, a minimalna \_\_\_\_\_.
3. Kolika je verovatnoća da pri bacanju kockice za igru padne neparan broj?  
a)  $\frac{1}{2}$    b)  $\frac{1}{3}$    c)  $\frac{2}{3}$    d)  $\frac{2}{6}$
4. Kolika je verovatnoća da iz špila od 52 karte izvučete herc kartu?  
a)  $\frac{14}{52}$    b)  $\frac{1}{13}$    c)  $\frac{5}{52}$    d)  $\frac{1}{4}$
5. U porodilištu je u toku dana rođeno pet beba muškog pola. Kolika je verovatnoća da će šesta beba takođe biti muškog pola?  
a) 1   b) 0   c) 0,5   d)  $\frac{1}{3}$
6. U vreći postoji 6 plavih kocki, 3 žute i 1 crna. Ako izvlačimo jednu kocku bez gledanja, da li je događaj da će se izvući plava kocka:  
a) verovatan  
b) neverovatan  
v) siguran  
g) nemoguć
7. Koja od navedenih reči najbolje opisuje verovatnoću slučajnog izbora ribe?



- a) verovatno
  - b) manje verovatno
  - v) sigurno
  - g) nemoguće
8. Baca se prvo novčić, pa kockica za igru. Napiši skup mogućih ishoda. Izračunaj verovatnoću događaja da padne broj deljiv sa 2 i pismo.
  9. Novčić se baca do prve pojave pisma, a najviše četiri puta. Odredi prostor ishoda i događaj da je izveden paran broj bacanja.

10. Zaokruži kutiju iz koje je verovatnije da izvučemo crnu kuglicu.

1.		
2.		
3.		
4.		

## 3.2. Priprema i analiza časova

U prilogu su date pripreme za čas (dvočas) viših razreda osnovne škole na temu verovatnoće.

Održani časovi su detaljno analizirani. Nastavne jedinice su birane u odnosu na razrede:

1. 5. razred - Mogući, nemogući i sigurni događaji.
2. 6. razred - Verovatnoća kroz igru - Vrste elementarnih događaja. Verovatnoća događaja. (E-kurs na MOODLE platformi)
3. 7. razred - Verovatnoća kroz zadatke.
4. 8. razred - Poređenje teorijske i eksperimentalne verovatnoće kroz eksperimente (novčić, kockica za igru i spinner)

### 3.2.1. Peti razred

<b>Razred/odeljenje:</b>	5/4
<b>Datum realizacije:</b>	5.12.2017.
<b>Nastavnik:</b>	Bojana Milivojević
<b>Škola:</b>	Osnovna škola „Dušan Jerković“, Užice



### **PRIPREMA ZA ČAS**

<b>Nastavna tema:</b>	Razlomci
<b>Nastavna jedinica:</b>	Mogući, nemogući i sigurni događaji.
<b>Tip časa:</b>	Obrada
<b>Cilj časa:</b>	Upoznavanje i poređenje slučajnih događaja.
<b>Ishod časa:</b>	Učenici umeju da prepoznaju moguće, nemoguće i sigurne događaje.
<b>Obrazovni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"><li>• usvoje pojam slučajnog događaja</li><li>• razumeju siguran i nemoguć događaj</li></ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• poredi događaje na skali od 0 do 1</li> </ul>
<b>Funkcionalni zadaci:</b>	<p>Učenici treba da:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• razviju takmičarski duh</li> <li>• razviju naviku tačnog i brzog rešavanja</li> <li>• stiču sposobnost izražavanja matematičkim jezikom, jasno i precizno</li> <li>• razviju logičko, analitičko i proceduralno mišljenje</li> </ul>
<b>Vaspitni zadaci:</b>	<p>Učenici treba da razvijaju:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• koncentraciju</li> <li>• sposobnost za uporan i predan rad</li> <li>• postupnost i sistematičnost u radu</li> <li>• tačnost, preciznost i urednost u radu</li> <li>• samopouzdanje i poverenje u vlastite matematičke sposobnosti</li> <li>• timski duh i kooperativnost</li> </ul>
<b>Ključni pojmovi:</b>	Nemoguć događaj, siguran događaj, moguć događaj, „verovatnije je“ ...
<b>Oblici rada:</b>	Frontalni, individualni, rad u grupi
<b>Nastavne metode:</b>	Dijaloška, monološka
<b>Nastavna sredstva:</b>	Tabla, marker, stikeri u boji, nastavni listovi, flip čart
<b>Mesto izvođenja nastave:</b>	Kabinet za matematiku
<b>Korelacija:</b>	Unutar predmeta
<b>Napomene:</b>	Učenici petog razreda još uvek nisu počeli da obrađuju oblast Razlomci, pa je na samom času prilagođen rečnik pojmova.



## PLAN TOKA ČASA

aktivnosti tok časa	nastavnik	učenici
<b>Uvodni deo časa:</b> 5 min.	<ul style="list-style-type: none"><li>• evidentira čas</li><li>• jasno ističe naziv nastavne jedinice i cilj časa</li><li>• ističe praktične situacije iz života gde svakodnevno koristimo verovatnoću</li><li>• pokreće učenike na aktivnost</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• pripremaju se za čas</li><li>• učestvuju u razgovoru</li></ul>
<b>Glavni deo časa:</b> 35 min.	<ul style="list-style-type: none"><li>• deli učenike u grupe po petoro (grupe su formirane kao heterogene, tako da se u svakoj grupi nalazi bar po jedan učenik koji dobro vlada matematičkim sadržajima i u stanju je da rešava složenije zadatke)</li><li>• daje kratko objašnjenje i smernice za dalji rad</li><li>• deli list sa prvim zadatkom</li><li>• kada sve grupe završe prvi zadatak sledi diskusija.</li><li>• deli učenicima list sa drugim zadatkom</li><li>• učenici dobijaju papir gde je data slika i pored nje rečenice; oni treba da oboje sliku tako da date rečenice opisuju datu sliku.</li><li>• crta skalu gde će slikovno predstaviti siguran događaj, nemoguć događaj, jednako verovatan događaj, manje ili više verovatan.</li><li>• prati rad pojedinih grupa i pojedinačno svakog učenika u okviru njih</li><li>• pomaže u otklanjanju nedoumica i</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>• pišu, prate i pažljivo slušaju uputstva nastavnika</li><li>• postavljaju pitanja kada im nije jasno</li><li>• pristupaju izradi zadataka</li><li>• timski prevazilaze eventualne poteškoće na koje naiđu pojedinci u grupi</li><li>• ukoliko neke grupe rade bržim tempom dobijaju dodatne zadatke na listu</li><li>• učenici koji sporije napreduju prate</li></ul>

	<p>pravazilaženju problema na nivou grupe, ako oni postoje</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• pomaže učenicima koji sporije napreduju</li> <li>• usmerava učenike</li> <li>• prati rad i zainteresovanost celog odeljenja</li> <li>• pohvaljuje učenike i daje smernice kada je to potrebno</li> </ul>	<p>savete nastavnika, dolaze do rešenja uz pomoć drugih članova grupe ili uz pomoć nastavnika</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• aktivno učestvuju u radu i razgovoru</li> <li>• trude se da izvrše svoja zaduženja</li> <li>• prate smernice koje im daje nastavnik i pokušavaju da ih primene</li> <li>• poštuju dogovorena pravila rada</li> </ul>
<p><b>Završni deo časa:</b> 5 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• osvrće se na značaj verovatnoće i njenu primenu u matematici, statistici, medicini, biologiji, meteorologiji, ekonomiji, sportu, bankarstvu...</li> <li>• zajedno sa učenicima izvodi zaključke</li> <li>• proverava da li je ostvaren cilj časa</li> <li>• deli evaluacione listiće</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pitaju ako ima nejasnoća</li> <li>• popunjavaju evaluacione listiće</li> <li>• diskutuju o času</li> </ul>

### **Materijal (nastavni listovi) za čas:**

1. Tabla je podeljena na četiri kolone u kojima će pisati: moguće, nemoguće, manje verovatno, više verovatno. Svaka grupa dobija koverat sa stikerima na kojima su napisani neki događaji. Predstavnik svake grupe nakon diskusije sa ostalim članovima izlazi i lepi listić u odgovarajuću kolonu na tabli.

Rečenice na stikerima:

- 1) Videćeš psa.
- 2) Imaćeš dobar dan danas.
- 3) Nacrtaćeš sliku.
- 4) Gledaćeš film.
- 5) Postaće hladnije vreme.
- 6) Videćeš direktora danas.
- 7) Ići ćemo da plivamo u jezeru.
- 8) Ići ćemo u biblioteku.
- 9) Posle ne idemo da se kupamo u moru.
- 10) Imaćeš domaći.
- 11) Padaće sneg.
- 12) Imaćeš picu za večeru.
- 13) Ići ćeš sutra u školu.
- 14) Poješćeš nešto danas.
- 15) Leći ćeš da spavaš večeras.
- 16) Videćeš auto.
- 17) Obučićeš se.
- 18) Disaćeš.
- 19) Mi smo u učionici.
- 20) Mi smo odeljenje 5. Razreda.
- 21) Danas će biti 19h.
- 22) Kornjača će dobiti krila i poleteti danas.
- 23) Sutra će biti nedelja.
- 24) Svi okeani će postati ljubičasti.
- 25) Pričaćemo na kineskom ceo dan.
- 26) Sagrađićeš kuću danas.
- 27) Živećemo u Italiji.
- 28) Ovo će biti prvi čas u prvoj smeni.

2. Kockica za igru se baca jedanput. Na njoj su obeleženi brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pored svake rečenice napiši: *moгуće, nemoguće, sigurno*.

- 1) Kockica će pokazati broj 4.
- 2) Kockica će pokazati broj veći od 8.
- 3) Kockica će pokazati broj manji od 7.
- 4) Kockica će pokazati prost broj.
- 5) Kockica će pokazati broj deljiv sa 2.

3. Zamisli da izvlačiš bombonu iz tegle bez gledanja. Oboj bombone u svakoj tegli tako da rečenice budu tačne.

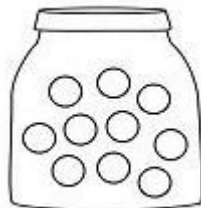
- 1) Veća je verovatnoća da izvučem crvenu bombonu, a manja da izvučem zelenu.



- 2) Sigurno ću izvući žutu bombonu.



- 3) Nemoguće je da izvučem plavu bombonu.



4. Na tabli je prikazana skala od 0% do 100%. Zajedno sa odeljenjem i u okviru grupe treba predstaviti što više događaja na datoj skali. Diskutovati koji događaji su nemogući, sigurni, manje verovatni, više verovatni.

## Analiza časa

Treba napomenuti da učenici petog razreda još uvek nisu učili oblast *Razlomci* iz matematike. Čas je koncipiran da se kroz priču, igru i rad u grupi razvije osećaj za pojmove: sigurno, nemoguće, moguće, manje verovatno, više verovatno. Učenici su sami počeli da koriste termine: *to je moguće 100%, to je nemoguće 0%, to bi bilo nekih 75%...* Skoro svi učenici su koristili procenete u izražavanju, što je i očekivano jer se svakodnevno susreću sa njima (u medijima, u razgovoru, u tabelama, grafikonima...), iako ih još uvek nisu učili u školi. Zaključujemo da oni već sa 12 godina zaista imaju osećaj o verovatnoći, i još više – mogu da izraze verovatnoću ne samo rečima već i brojem intuitivno. Manje poteškoće su se javile kod nemogućeg događaja, gde je jedan učenik kao primer naveo da je nemoguće da čovek skoči iz aviona, ne otvori mu se padobran i on padne na seno ili u more i preživi. Drugi su počeli da se bune, otvorila se diskusija da treba razlikovati ako je nešto verovatno 1% i 0%. U prvoj igri gde su im podeljeni stikeri u boji koje treba razvrstati u zavisnosti od vrste događaja, poprilično su se dobro snašli. Sa namerom su nemogući događaji bili crveni, mogući žuti, a sigurni zeleni. Sledila je kratka diskusija svake grupe. Radni list na kome su se nalazila sledeća dva zadatka su svih šest grupa uspešno savladale. Naredni zadatak ih je najviše zainteresovao. Na flip čartu je grafički predstavljen interval od 0 do 1 (u njihovom uzrastu od 0% do 100%). Nastavnik označi zvezdicu na datom intervalu. Zadatak učenika je da daju što više primera događaja koji bi se našli na tom mestu po njihovoj pretpostavci. Učenici su bili kreativni i nisu ponavljali primere drugih.

Na osnovu samo jednog održanog časa može se zaključiti da učenici u 5. razredu itekako mogu da razumeju pojam verovatnoće. Takođe su izdvojili da je ovo bio najzanimljiviji čas, da im se 100% svidelo. Takođe su pitali da li bi mogli još o tome da nauče u budućnosti.

### 3.2.2. Šesti razred

<b>Razred/odeljenje:</b>	6/2
<b>Datum realizacije:</b>	29.11.2017.
<b>Nastavnik:</b>	Bojana Milivojević
<b>Škola:</b>	Osnovna škola „Dušan Jerković“, Užice



#### PRIPREMA ZA ČAS

<b>Nastavna tema:</b>	Razlomci
<b>Nastavna jedinica:</b>	Verovatnoća kroz igru - Vrste elementarnih događaja. Verovatnoća događaja.
<b>Tip časa:</b>	Obrada
<b>Cilj časa:</b>	Upoznavanje sa pojmom verovatnoće, elementarnim događajima i njihovim vrstama na MOODLE <sup>15</sup> platformi
<b>Ishod časa:</b>	Učenici umeju da odrede vrstu elementarnog događaja i izračunaju verovatnoću događaja jednostavnog eksperimenta.
<b>Obrazovni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"><li>• usvoje osnovne pojmove i vrste slučajnih događaja</li><li>• razumeju ekperiment i prostor ishoda</li><li>• računaju verovatnoće elementarnih događaja</li></ul>
<b>Funkcionalni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"><li>• razviju naviku tačnog i brzog rešavanja</li><li>• stiču sposobnost izražavanja matematičkim jezikom, jasno i precizno</li><li>• razviju logičko, analitičko i proceduralno mišljenje</li></ul>
<b>Vaspitni zadaci:</b>	Učenici treba da razvijaju: <ul style="list-style-type: none"><li>• koncentraciju</li><li>• sposobnost za uporan i predan rad</li></ul>

<sup>15</sup>MOODLE - plantforma za on-line edukaciju

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• postupnost i sistematičnost u radu</li> <li>• tačnost preciznost i urednost u radu</li> <li>• samopouzdanje i poverenje u vlastite matematičke sposobnosti</li> <li>• timski duh i kooperativnost</li> </ul>
<b>Ključni pojmovi:</b>	Verovatnoća, eksperiment, nemoguć događaj, siguran događaj, prostor ishoda...
<b>Oblici rada:</b>	Frontalni, idividualni, rad u paru
<b>Nastavne metode:</b>	Dijaloška, monološka
<b>Nastavna sredstva:</b>	Računari, video bim
<b>Mesto izvođenja nastave:</b>	Kabinet za informatiku
<b>Korelacija:</b>	Unutar predmeta
<b>Napomene:</b>	Učenici se prvi put susreću sa MOODLE platformom.



## PLAN TOKA ČASA

aktivnosti tok časa	nastavnik	učenici
<b>Uvodni deo časa:</b> 5 min.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• evidentira čas</li> <li>• jasno ističe naziv nastavne jedinice i cilj časa</li> <li>• deli učenike u parove</li> <li>• objašnjava učenicima čemu služi moodle platforma i kako se koristi</li> <li>• daje username i password za svaki par</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pripremaju se za čas</li> <li>• učestvuju u razgovoru</li> <li>• pažljivo slušaju uputstva nastavnika</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pokreće učenike na aktivnost</li> <li>• daje kratko objašnjenje i smernice za rad</li> </ul>	
<p><b>Glavni deo časa:</b> 35 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• prati rad parova i celog odeljenja</li> <li>• pomaže u otklanjanju nedoumica i pravazilaženju problema ako oni postoje</li> <li>• pomaže učenicima koji sporije napreduju</li> <li>• pohvaljuje parove koji se ističu</li> <li>• podstiče i usmerava učenike da samostalno rade</li> <li>• prati rad i zainteresovanost celog odeljenja</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• postavljaju pitanja kada im nije jasno</li> <li>• pristupaju izradi zadataka</li> <li>• aktivno učestvuju u radu</li> <li>• trude se da izvrše svoja zaduženja</li> <li>• prate smernice koje im daje nastavnik i pokušavaju da ih primene</li> <li>• poštuju dogovorena pravila rada</li> </ul>
<p><b>Završni deo časa:</b> 5 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• učestvuje online na MOODLE platformi u diskusiji, komentaranju i zaključcima o samom času i gradivu</li> <li>• proverava da li je ostvaren cilj časa</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pitaju ako ima nejasnoća</li> <li>• popunjavaju evaluacione forme koje su date na MOODLE platformi</li> <li>• online diskutuju o času na MOODLE platformi</li> </ul>

E-kurs na MOODLE platformi je organizovan na sledeći način:

1. Pristupanje forumu gde učenici diskutuju o primeni verovatnoće u svakodnevnom životu.
2. Savladavanje prve lekcije *Moguć, nemoguć i siguran događaj* kroz igricu:
  - 1) Učenici na ekranu dobijaju sliku vrećice u kojoj se nalaze određeni predmeti koji su im vidljivi. Potrebno je čekirati da li je ponuđen iskaz siguran, manje verovatan, više verovatan, nemoguć ili jednako moguć.

Online igrici pristupljeno 28.11.2017. <https://www->

[k6.thinkcentral.com/content/hsp/math/hspmath/ca/common/itools\\_int\\_9780153616334/probability.html](https://www-k6.thinkcentral.com/content/hsp/math/hspmath/ca/common/itools_int_9780153616334/probability.html)

2) Dat je bubanj sa kuglicama različite boje, potrebno je svaku kuglicu (boju) staviti na odgovarajuće mesto u zavisnosti od mogućnosti njenog izvlačenja. Ponuđeno je: nemoguće, manje verovatno, jednako verovatno, više verovatno i nemoguće.

Online igrici pristupljeno 28.11.2017.

<http://www.kidsmathgamesonline.com/numbers/probability.html>

3. Prelazak na drugu lekciju *Izračunavanje verovatnoće događaja*.

Nastavnik uvodi klasičnu definiciju verovatnoće. (materijal za predavanje dat na 42. strani)

Nakon toga učenici pokreću treću igricu.

Učenici se nalaze u cirkusu gde klovn vrti spinere i nudi im nekoliko različito obojenih spinera. Na sredini ekrana se nalazi konkretan zahtev npr. *Čekiraj spinner kod koga je verovatnoća da pokazivač stane na ljubičastu boju  $\frac{3}{5}$* . U slučaju da pogrešno čekiraju, klovn ih navodi da ponovo razmisle i urade zadatak, kako bi prešli na sledeći.

Igrici pristupljeno 28.11.2017.

[http://www.hbschool.com/activity/probability\\_circus/](http://www.hbschool.com/activity/probability_circus/)

4. Online grupna diskusija.

5. Online popunjavanje evalucionog dela.

## **Analiza časa**

Na času je prisustvovalo 26 učenika šestog razreda koji su bili podeljeni u 13 parova. Svaki par je imao svoj računar. Učenici su bili ushićeni i zainteresovani za čas jer se do sada nisu susreli sa on-line učenjem i pojmovima iz oblasti verovatnoće. Učenici su se odlično snašli. Pomagali su jedni drugima. Snalaženje na platformi nije predstavljao problem. Uz ove igrice naučili su i ključne reči iz ove lekcije na engleskom jeziku. U prvoj lekciji uglavnom su grešili šta je to nemoguć, a šta siguran događaj. U drugoj lekciji, pri izračunavanju verovatnoća, neki od njih nisu skratili razlomke, pa su se javljale greške u čekiranju tačnih odgovora. Treba istaći da je domaći na temu verovatnoće koji se nalazio na MOODLE platformi urađen od strane svih učenika, sa veoma zadovoljavajućim rezultatima. Domaći nije bio obavezan. Učenici smatraju da je verovatnoća korisna, zanimljiva i primenljiva. Tvrde da je to *drugačija* matematika o kojoj bi voleli više da nauče.

### 3.2.3. Sedmi razred

<b>Razred/odeljenje:</b>	Sedmi – napredni učenci iz tri odeljenja sedmoga razreda
<b>Datum realizacije:</b>	15.12.2017.
<b>Nastavnik:</b>	Bojana Milivojević
<b>Škola:</b>	Osnovna škola „Dušan Jerković“, Užice



### PRIPREMA ZA DVOČAS

<b>Nastavna tema:</b>	Razlomci
<b>Nastavna jedinica:</b>	Eksperiment. Prostor ishoda. Verovatnoća događaja.
<b>Tip dvočasa:</b>	Obrada/Utvrđivanje
<b>Cilj dvočasa:</b>	Upoznavanje sa pojmom verovatnoće i prostorom ishoda. Rešavanje odabranih zadataka.
<b>Ishod dvočasa:</b>	Učenici umeju da odrede prostor ishoda nekog eksperimenta i odrede verovatnoće događaja.
<b>Obrazovni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"> <li>• usvoje osnovne pojmove verovatnoće i eksperimenata</li> <li>• savladaju zadatke osnovnog, srednjeg i naprednog nivoa</li> </ul>
<b>Funkcionalni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"> <li>• razviju naviku tačnog i brzog rešavanja</li> <li>• stiču sposobnost izražavanja matematičkim jezikom, jasno i precizno</li> <li>• razviju logičko, analitičko i proceduralno mišljenje</li> </ul>
<b>Vaspitni zadaci:</b>	Učenici treba da razvijaju: <ul style="list-style-type: none"> <li>• koncentraciju</li> <li>• sposobnost za uporan i predan rad</li> <li>• postupnost i sistematičnost u radu</li> <li>• tačnost preciznost i urednost u radu</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• samopouzdanje i poverenje u vlastite matematičke sposobnost</li> </ul>
<b>Ključni pojmovi:</b>	Verovatnoća, eksperiment, događaj, prostor ishoda...
<b>Oblici rada:</b>	Frontalni, idividualni
<b>Nastavne metode:</b>	Dijaloška, monološka
<b>Nastavna sredstva:</b>	Tabla, marker, nastavni listovi
<b>Mesto izvođenja nastave:</b>	Kabinet za matematiku
<b>Korelacija:</b>	Unutar predmeta



### PLAN TOKA DVOČASA

<b>aktivnosti</b> <b>tok dvočasa</b>	<b>nastavnik</b>	<b>učenici</b>
<b>Uvodni deo časa:</b> 5 min.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• evidentira čas</li> <li>• jasno ističe naziv nastavne jedinice i cilj časa</li> <li>• ističe i navodi učenike na praktične situacije iz života gde svakodnevno koristimo verovatnoću</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pripremaju se za čas</li> <li>• učestvuju u razgovoru</li> </ul>
<b>Glavni deo časa:</b> 75 min.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• uvodi pojam eksperimenta i prostora ishoda</li> <li>• kroz razne primere ističe prostor ishoda ( novčić, kockica za igru, dva novčića, karte,...)</li> <li>• uvodi pojam verovatnoće i klasičnu definiciju verovatnoće</li> <li>• daje zadatke po nivoima</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pišu, prate i pažljivo slušaju uputstva nastavnika</li> <li>• postavljaju pitanja kada im nije jasno</li> <li>• pristupaju izradi zadataka</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pita učenike da daju primere</li> <li>• usmerava učenike</li> <li>• pomaže učenicima koji sporije napreduju, a pohvaljuje učenike koji se ističu</li> <li>• podstiče učenike da samostalno rade</li> <li>• rešava zadatak ako niko od učenika ne zna da uradi</li> <li>• daje dodatne zadatke za učenike koji brže rade</li> <li>• prati rad i zainteresovanost učenika</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• učenici koji sporije napreduju prate savete nastavnika</li> <li>• aktivno učestvuju u radu i razgovoru</li> <li>• trude se da izvrše svoja zaduženja</li> <li>• prate smernice koje im daje nastavnik i pokušavaju da ih primene</li> <li>• poštuju dogovorena pravila rada</li> </ul>
<p><b>Završni deo časa:</b> 10 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• osvrće se na značaj verovatnoće i njenu primenu u matematici, statistici medicini, biologiji, meteorologiji, ekonomiji, sportu, bankarstvu...</li> <li>• zajedno sa učenicima izvodi zaključke</li> <li>• proverava da li je ostvaren cilj časa</li> <li>• deli evaluacione listiće</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pitaju ako ima nejasnoća</li> <li>• popunjavaju evaluacione listiće</li> <li>• diskutuju o času</li> </ul>

## Zadaci:

### *osnovni nivo:*

1. Deset kuglica je numerisano brojevima 1, 2,..., 10. Bira se jedna kuglica. Kolika je verovatnoća da se izabere neparan broj?
2. Novčić se baca tri puta. Odredi prostor ishoda i verovatnoću da su pale sva tri pisma.
3. Bacaju se dva novčića i jedna kocka za igru. Odredi prostor elementarnih događaja.

### *srednji nivo*

4. Kocka za igru baca se dva puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:
  - a) u prvom bacanju je pao paran broj
  - b) u oba bacanja pali su parni brojevi
  - c) u prvom bacanju pao je manji broj nego u drugom bacanju.
5. U kutiji se nalazi 20 kuglica numerisanih brojevima 1, 2,...,20. Slučajno se bira jedna kuglica. Kolika je verovatnoća da će biti izabrana kuglica koja je numerisana prostim brojem (1 nije ni prost ni složen broj)?
6. Novčić se baca četiri puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:
  - a) pao je paran broj pisama
  - b) pala su bar dva pisma
7. Strane prve kocke označene su brojevima 1, 1, 3, 3, 3, 3, a strane druge kocke označene su brojevima 2, 2, 2, 2, 4, 4 . Eksperiment se sastoji u bacanju te dve kocke i registrovanju palih brojeva. Odredi prostor ishoda.

### *napredni nivo*

8. Novčić se baca do prve pojave pisma. Odredi skup elementarnih događaja.
9. Kocka za igru se baca dva puta. Kolika je verovatnoća da je u prvom bacanju pao paran broj i da je zbir palih brojeva veći od 5?
10. Kocka za igru se baca tri puta. Kolika je verovatnoća da je zbir palih brojeva deljiv sa 3?
11. Baca se homogena kocka za igru. Ako padne jedinica ili dvojka, onda se kocka baca još jedanput. Ako padne broj veći od dva, baca se novčić. Odredi prostor elementarnih događaja.

### **Analiza dvočasa**

Učenici su aktivno učestvovali u nastavi. U početku su pri davanju odgovora bili suzdržani, dok se nisu bliže upoznali sa temom. Dok su diskutovali o jednostavnim eksperimentima i verovatnoćama elementarnih događaja, sami su došli do klasične definicije verovatnoće. Ubrzo nakon toga je usledio zaključak da je to broj između 0 i 1. Na pitanje da navedu primer događaja čija je verovatnoća 0 odnosno 1, bili su manje kreativni za razliku od učenika 5. razreda kojima je postavljeno isto pitanje. Sve zadatke su uglavnom samostalno savladali. Posebno je skrenuta pažnja pri zapisivanju skupa ishoda koji ima više elemenata da pronađu neku svoju "logiku" kako ne bi izostavili neki elementaran događaj. Ono što je važno je da su shvatili kako funkcioniše nezavisnost. Na pitanje ako 20 puta bacimo novčić i svih 20 puta je palo pismo, kolika je verovatnoća da će u 21. bacanju pasti glava? Svi su odgovorili 0,5. Takođe je nekoliko učenika u prvim zadacima uvek rešenje pretvaralo u procenat, verovatno zbog činjenice da se sam oblik procenta mnogo češće sreće u medijima, udžbenicima i svakodnevnici. Sami su pitali šta znači homogena kocka. Takođe su uspešno savladali i one primere gde je prostor ishoda imao beskonačno mnogo elemenata. Uspešno su napravili paralelu između eksperimentalne i teorijske verovatnoće i da se pri povećavanju broja ponavljanja eksperimenta verovatnoća sve više približava teorijskoj pretpostavci.

### 3.2.4. Osmi razred

<b>Razred/odeljenje:</b>	8/6
<b>Datum realizacije:</b>	30.11.2017.
<b>Nastavnik:</b>	Bojana Milivojević
<b>Škola:</b>	Osnovna škola „Dušan Jerković“, Užice



### PRIPREMA ZA ČAS

<b>Nastavna tema:</b>	Verovatnoća
<b>Nastavna jedinica:</b>	Teorijska/ Eksperimentalna verovatnoća
<b>Tip časa:</b>	Obrada
<b>Cilj časa:</b>	Upoređivanje i diskutovanje teorijske i eksperimentalne verovatnoće
<b>Ishod časa:</b>	Učenici umeju da izvrše određeni eksperiment, analiziraju dobijene rezultate i izvedu zaključak
<b>Obrazovni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"> <li>• usvoje osnovne pojmove verovatnoće i primene ih kroz eksperimente</li> </ul>
<b>Funkcionalni zadaci:</b>	Učenici treba da: <ul style="list-style-type: none"> <li>• razviju takmičarski duh</li> <li>• razviju naviku tačnog i brzog rešavanja</li> <li>• stiču sposobnost izražavanja matematičkim jezikom, jasno i precizno</li> <li>• razviju logičko, analitičko i proceduralno mišljenje</li> </ul>
<b>Vaspitni zadaci:</b>	Učenici treba da razvijaju: <ul style="list-style-type: none"> <li>• koncentraciju</li> <li>• sposobnost za uporan i predan rad</li> <li>• postupnost i sistematičnost u radu</li> <li>• tačnost preciznost i urednost u radu</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• samopouzdanje i poverenje u vlastite matematičke sposobnosti</li> <li>• timski duh i kooperativnost</li> </ul>
<b>Ključni pojmovi:</b>	Verovatnoća, frekvencija, relativna frekvencija, eksperiment
<b>Oblici rada:</b>	Frontalni, idividualni, rad u grupi
<b>Nastavne metode:</b>	Dijaloška, monološka
<b>Nastavna sredstva:</b>	Tabla, marker, kocka za igru, novčić, spiner, nastavni listovi
<b>Mesto izvođenja nastave:</b>	Kabinet za matematiku
<b>Korelacija:</b>	Unutar predmeta




### PLAN TOKA ČASA

<b>aktivnosti</b> <b>tok časa</b>	<b>nastavnik</b>	<b>učenici</b>
<b>Uvodni deo časa:</b> 5 min.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• evidentira čas</li> <li>• jasno ističe naziv nastavne jedinice i cilj časa</li> <li>• ističe praktične situacije iz života gde svakodnevno koristimo verovatnoću</li> <li>• pokreće učenike na aktivnost</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pripremaju se za čas</li> <li>• učestvuju u razgovoru</li> </ul>
<b>Glavni deo časa:</b> 35 min.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• uvodi klasičnu definiciju verovatnoće, pojam frekvencije i relativne frekvencije i daje nekoliko primera</li> <li>• deli učenike u grupe po petoro ( grupe su formirane kao heterogene, tako da se u svakoj</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pišu, prate i pažljivo slušaju uputstva nastavnika</li> <li>• postavljaju pitanja kada im nije jasno</li> <li>• pristupaju izradi</li> </ul>

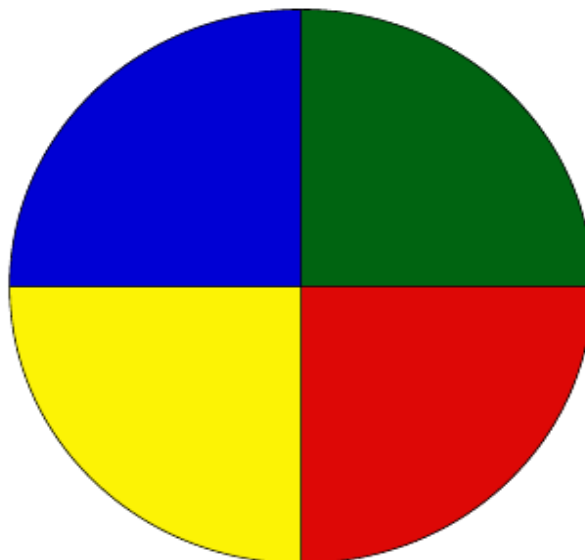
	<p>grupi nalazi bar po jedan učenik koji dobro vlada matematičkim sadržajima i u stanju je da rešava složenije zadatke)</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• daje kratko objašnjenje i smernice za dalji rad</li> <li>• deli list sa zadacima, kocku za igru, novčić i spinner</li> <li>• prati rad pojedinih grupa i pojedinačno svakog učenika u okviru njih</li> <li>• pomaže u otklanjanju nedoumica i pravazilaženju problema na nivou grupe, ako oni postoje</li> <li>• pomaže učenicima koji sporije napreduju</li> <li>• pohvaljuje učenike koji se ističu</li> <li>• usmerava učenike</li> <li>• podstiče učenike da samostalno rade</li> <li>• prati rad i zainteresovanost celog odeljenja</li> </ul>	<p>zadataka</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• timski prevazilaze eventualne poteškoće na koje naiđu pojedinci u grupi</li> <li>• ukoliko neke grupe rade bržim tempom dobijaju dodatne zadatke na listu</li> <li>• učenici koji sporije napreduju prate savete nastavnika, dolaze do rešenja uz pomoć drugih članova grupe ili uz pomoć nastavnika</li> <li>• aktivno učestvuju u radu i razgovoru</li> <li>• trude se da izvrše svoja zaduženja</li> <li>• prate smernice koje im daje nastavnik i pokušavaju da ih primene</li> <li>• poštuju dogovorena pravila rada</li> </ul>
<p><b>Završni deo časa:</b> 5 min.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• zajedno sa učenicima izvodi zaključke</li> <li>• proverava da li je ostvaren cilj časa</li> <li>• deli evaluacione listiće</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pitaju ako ima nejasnoća</li> <li>• diskutuju o času</li> <li>• popunjavaju evaluacione listiće</li> </ul>

**Materijal (nastavni list)**

<b>Bacanje novčića</b>			
	Ishod	Očekivana frekvencija	Očekivana relativna frekvencija
Pretpostavimo da novčić bacamo 40 puta. Koliko puta očekuješ da će se pojaviti glava, a koliko pismo?			
Baci novčić 40 puta. Upiši rezultate u tablicu.	Ishod	Frekvencija	Relativna frekvencija

<b>Bacanje kockice</b>							
	Ishod	1	2	3	4	5	6
Pretpostavimo da kockicu za igru bacamo 60 puta. Koliko puta očekuješ da će se pojaviti pojedini broj?	Očekivana frekvencija						
	Očekivana relativna frekvencija						
Baci kockicu za igru 60 puta. Upiši rezultate u tablicu.	Ishod	1	2	3	4	5	6
	Frekvencija						
	Relativna frekvencija						

## Spinner



<p>Na slici je prikazan krug koji je podeljen na 4 jednaka dela obojena u plavu, zelenu, žutu i crvenu boju.</p> <p>Pretpostavimo da postavimo spinner u središte kruga i da smo ga zavrtili 80 puta.</p> <p>Koliko puta očekujes da će spinner pokazati određenu boju?</p>	Ishod	Zelena	Plava	Crvena	Žuta
	Očekivana frekvencija				
	Očekivana relativna frekvencija				
<p>Postavi spinner u središte kruga i zavrtili ga 80 puta. Upiši dobijene rezultate u tablicu.</p>	Ishod	Zelena	Plava	Crvena	Žuta
	Frekvencija				
	Relativna frekvencija				

## Analiza časa:

Na času je prisustvovalo 27 učenika koji su ravnopravno podeljeni u šest grupa. Svaka grupa je dobila radni list, novčić, spiner i kockicu za igru. Učenicima je prvo objašnjeno šta znači vršiti eksperiment, koji su ishodi eksperimenta, pojam frekvencije i relativne frekvencije. Takođe im je rečeno da obrate pažnju šta se dešava pri povećanju broja izvođenja eksperimenta i da uporede dobijeni rezultat sa očekivanim koje su napisali pre izvođenja eksperimenta.

Tokom celog časa učenici su bili motivisani, posvećeni i fokusirani na sam zadatak. Svi članovi grupe su učestvovali. Kada bi se dešavali rezultati koji im deluju *nemogući*, zvali bi ostale učenike i nastavnika da vidi šta se dešava (jedna grupa je dobila na eksperimentu spiner da su relativne frekvencije svih ishoda jednake, i to po 0,25). Često su se konsultovali sa ostalim grupama. Pri beleženju rezultata bili su snalažnjivi i brzi. Sami su zaključili da je relativna frekvencija broj između 0 i 1, kao i da pri povećanju broja izvođenja eksperimenta pri istim uslovima relativne frekvencije se sve više približavaju jedna drugoj. Na pitanje nastavnika da li je moguće da pri 40 bacanja novčića svih 40 puta padne pismo, učenici su prvo rekli nemoguće. Na pitanje zašto, nekoliko minuta su razmišljali i posle diskusije su došli do zaključka da to nije nemoguće, ali da je svakako malo verovatno.

Učenici o času:

- *Najzanimljiviji čas u školskoj godini. Voleli bismo više ovakvih časova.*
- *Bilo bi veoma zanimljivo da postoji više ovakvih časova. Mnoga deca bi možda nekim delom više zavolela matematiku. Čas nam se dopao.*
- *Ovaj čas je bio najbolji do sada. Kroz ovu igru smo se zabavili i kroz zabavu naučili nove stvari. Zahvaljujemo se nastavnicima koja nam omogućava ovako zabavan čas.*

## Zaključak

U ovom radu istaknut je značaj verovatnoće, kao i njene primene u svakodnevnom životu. Ona je osnova mnogih naučnih disciplina kao što su: statistika, medicina, biologija, ekonomija, demografija, fizika, meteorologija... Motiv za izučavanje ove teme nalazi se u činjenici da se učenici u Srbiji sa pojmom verovatnoće susreću tek u 4. godini srednje škole. Njihovi vršnjaci širom sveta stiču osnovno znanje iz ove oblasti mnogo ranije, još u nižim razredima osnovne škole.

Prikazano je nekoliko istraživanja na ovu temu, koja pokazuju da su deca sposobna i spremna da usvoje elementarne pojmove verovatnoće oko dvanaeste godine, kada počinje formiranje formalnih operacija. Nastavne metode koje treba koristiti su sve one koje zahtevaju aktivno učestvovanje učenika u procesu učenja i zaključivanja. Izvršeno je istraživanje u osnovnoj školi "Dušan Jerković" u Užicu. Dobijeni podaci su analizirani, na osnovu kojih su izvedeni zaključci.

U radu su prikazani sadržaji teorije verovatnoće u zemljama čiji nastavni planovi to predviđaju.

Dat je nastavni materijal *Uvod u verovatnoću*, koji bi se mogao koristiti za obradu verovatnoće u osnovnim školama.

Prikazane su pripreme časova obrade verovatnoće u višim razredima osnovne škole. Održani časovi su detaljno analizirani.

Istraživanje ove teme otvorilo je nekoliko pitanja za buduće istraživače. Zašto učenici u Srbiji ne uče o verovatnoći u osnovnim školama? Kada i kako korigovati nastavni plan osnovnog obrazovanja?

Da li je deci uskraćena zanimljiva i praktična nastava?

## Literatura

- [1] Časopis društva psihologa SR Srbije, Psihologija, godina 2, broj 1, Beograd, 1969.
- [2] Anne S. Hawkins and Ramesh Kapadia Source: Educational Studies in Mathematics, Children's Conceptions of Probability: A Psychological and Pedagogical Review, Springer, 2009.
- [3] Tatjana Hodnik Čadež, Maja Škrbec, Understanding the Concepts in Probability of Pre-School and Early School Children, Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 2011.
- [4] Zoran Ivković, Dragan Banjević, Verovatnoća i statistika za III razred srednjeg usmerenog obrazovanja, Naučna knjiga, Beograd, 1979.
- [5] Vesna Jevremović, Verovatnoća i statistika, Univerzitet u Beogradu – Matematički fakultet, Beograd, 2009.
- [6] David Johnson, Thomas Mowry, Mathematics a practical odyssey, Brooks/Cole, Cengage Learning, USA, 2010.
- [7] Pavle Mladenović, Elementarni uvod u verovatnoću i statistiku, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 1998.
- [8] Milutin Obradović, Dušan Georgijević, Matematika za 4. razred srednje škole, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 2003.
- [9] OECD, Pisa 2012 Results, What Students Know and Can Do, 2014.
- [10] D. Pavlović Babić, A. Baucal, Matematička pismenost PISA 2003 i PISA 2006, Ministarstvo prosvete republike Srbije, Beograd, 2009.
- [11] Ž. Pijaže, B. Inhelder, Intelektualni razvoj deteta, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1982.
- [12] Ž. Pijaže, Poreklo saznanja, Nolit, Beograd, 1983.
- [13] Ž. Pijaže, Psihologija inteligencije, Nolit, Beograd, 1968.
- [14] Helen Tsakiridou, Eleni Vavyla, Probability Concepts in Primary School, Department of Primary Education, University of Western Macedonia, Florina, Greece, 2015.
- [15] <https://www.cognifit.com/sr/cognition> pristupljeno: 21.11.2017.
- [16] <http://www.mpn.gov.rs/novi-nastavni-programi-za-petake/> pristupljeno: 9.11.2017.

# Prilozi

## Prilog 1. Test 1 istraživanja u Sloveniji

T. Hodnik-Cadež & M. Skerbec

### Appendix 1: Test 1

Circle

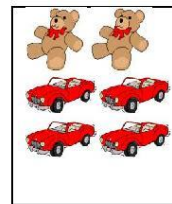
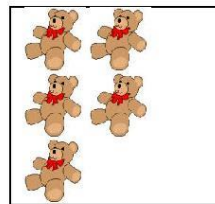
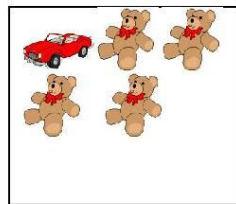
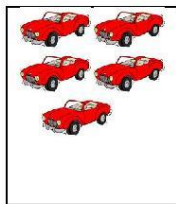
Grade 2  
I Am A Boy

Grade 3  
I Am A Girl

#### Probability

1. In The Boxes There Are Teddy Bears And Cars. Imagine That You Close Your Eyes And Extract One Toy From Each Box.

A) Could You Extract A Car? Circle The Correct Answer.



Certainly

Ceratinly

Certainly

Certainly

Possibly

Possibly

Possibly

Probably

Impossibly

Impossibly

Impossibly

Impossibly

B) In Which Box Would You Reach, In The Second Or The Fourth One In Order To More Probably Extract A Car?

The Second

The Fourth

2. Domen Is Throwing The Die, Containing Numbers From 1 To 6. Circle The Suitable Word For Each Sentence.

- |  |           |          |            |
|--|-----------|----------|------------|
| A) The Die Will Display The Number 6.        | Certainly | Possibly | Impossibly |
| B) The Die Will Display The Number Below 7.. | Certainly | Possibly | Impossibly |
| C) The Die Will Display The Number 7.        | Certainly | Possibly | Impossibly |
| D) The Die Will Display The Number Above 7.  | Certainly | Possibly | Impossibly |
| E) The Die Will Display The Number 3.        | Certainly | Possibly | Impossibly |

3. Mojca Has Six Coloured Kerchiefs In Her Bag, Of Which Two Are Of Yellow, Two Of Blue, One Of White And One Of Green Colour. She Extracted One Kerchief From The Bag Not Looking At Its Colour.



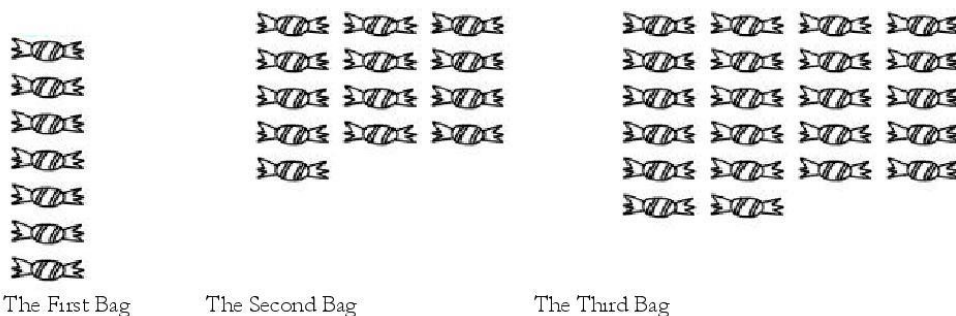
What Can You Say About The Kerchief That Mojca Extracted?

Continue The Sentences:

- A) It Is Possible That She Extracted \_\_\_\_\_
- B) It Is Impossible That She Extracted \_\_\_\_\_

**Appendix 1 cont.**

4. Gregor Has Three Bags With Candies. In Each Of Them There Is One Chocolate Candy, Whereas The Other Ones Are Fruit Candies. Without Looking He Is Trying To Extract The Chocolate Candy From The Bag. Circle The Correct Answer.



The First Bag                      The Second Bag                      The Third Bag

A) Can He Extract The Chocolate Candy From Any Bag Already In His First Tnal?

**Yes**                                      **No**

B) Is It Possible For Him To Extract The Milk Candy From The Thurd Bag?

**Yes**                                      **No**

C) Is It More Probable For Him To Extract The Chocolate Or A Fruit Candy From The Second Bag?

**The Chocolate One**                      **A Fruit One**

D) In Which Bag Will He Reach In Order To Most Probably Extract The Chocolate Candy?

**The First**                      **The Second**                      **The Third**

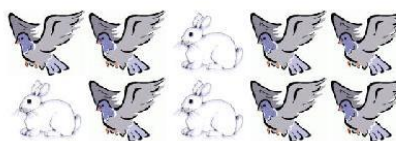
E) In Which Bag Will He Reach In Order To Most Probablx Extract A Fruit Candy ?

**The First**                      **The Second**                      **The Third**

5. The Magician Put 10 Rabbits In His Hat Bewitching Them Into Pigeons. Seven Rabbits Were Tuned Into Pigeons, Whereas Three Rabbits Remained The Same.

Jaka Randomly Extracted One Animal.

Finish The Sentences.

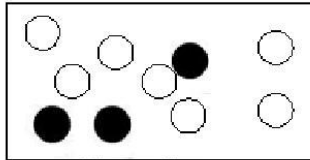


A) Jaka Will Most Probably Extract \_\_\_\_\_.

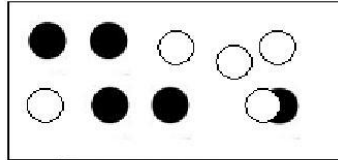
B) Jaka Will Least Probably Extract \_\_\_\_\_.

**Appendix 1 cont.**

6. a) In The First Box There Are 7 White And 3 Black Balls, Whereas In The Second Box There Are 5 White And 5 Black Balls. Sabina Will Get A Present If She Extracts A White Ball. From Which Box Should Sabina Extract The Ball? Circle The Correct Answer.



THE FIRST BOX

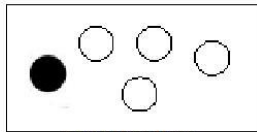


THE SECOND BOX

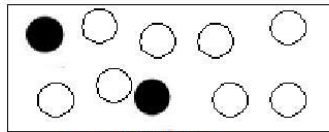
- A) From The First Box.
- B) It Is All The Same
- C) From The Second Box.

Why? \_\_\_\_\_

B) In The First Box There Are 5 Balls, Of Which 4 Are White And 1 Is Black. In The Second Box There Are 10 Balls, Of Which 8 Are Of White And 2 Of Black Colour. Sabina Will Get A Present If She Extracts A White Coloured Ball. From Which Box Should Sabina Extract A Ball? Circle The Correct Answer.



THE FIRST BOX



THE SECOND BOX

- A) From The First Box.
- B) It Is All The Same.
- C) From The Second Box.

Why? \_\_\_\_\_

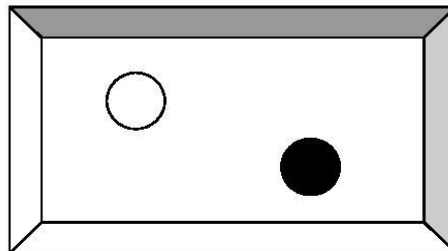
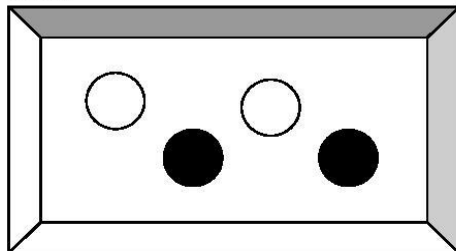
Appendix 2: Test 2

Exercise

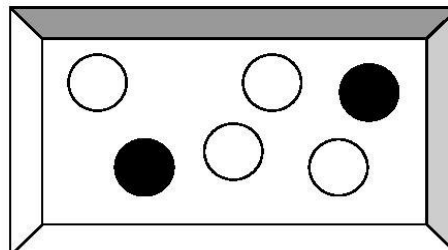
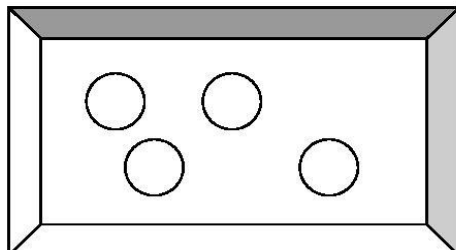


Circle The Box In Which The Boy Should Reach In Order To Extract A Black Ball.

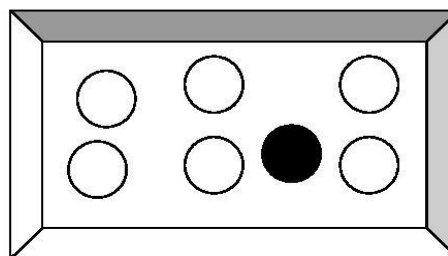
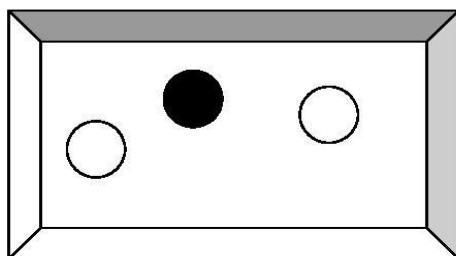
Task 1



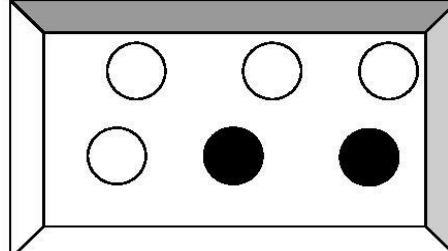
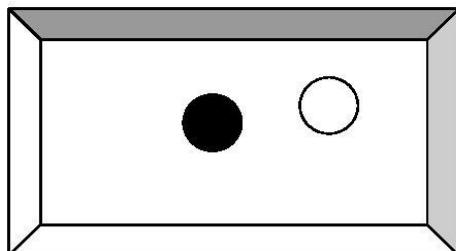
Task 2



Task 3



Task 4



### Prilog 3. Anketni list za moje istraživanje

pol:      ženski              muški

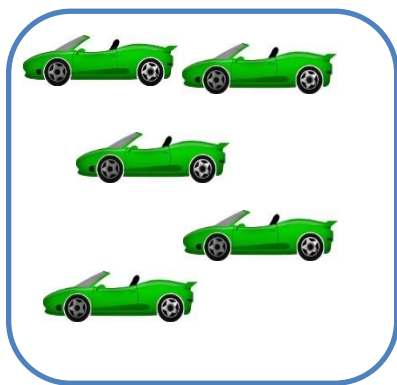
razred:      5.      6.      7.      8.

opšti uspeh:    odličan      vrlo dobar      dobar      dovoljan      nedovoljan

ocena iz matematike na kraju prethodnog razreda:    5      4      3      2      1

1. U kutijama se nalaze igračke – automobili i loptice. Zamisli da zatvoriš oči i izvučeš jednu igračku iz svake kutije .

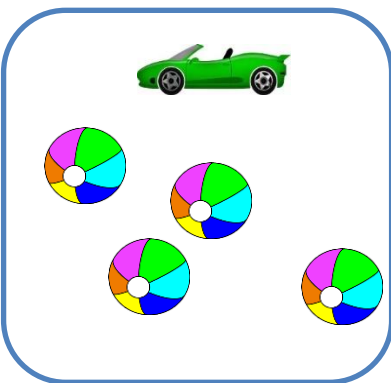
a) Da li možeš izvući automobil? ( Zaokruži tačan odgovor ispod svake slike.)



SIGURNO

MOGUĆE

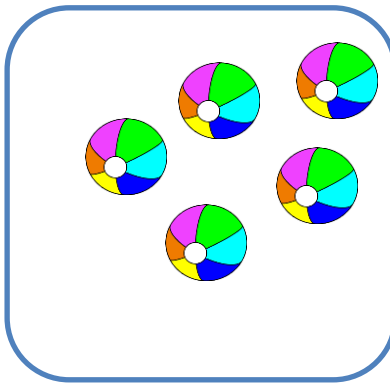
NEMOGUĆE



SIGURNO

MOGUĆE

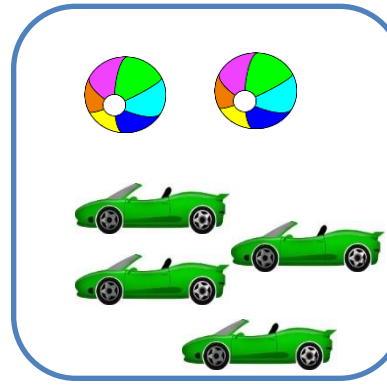
NEMOGUĆE



SIGURNO

MOGUĆE

NEMOGUĆE



SIGURNO

VEROVATNO

NEMOGUĆE

b) U kojoj kutiji je više verovatno da izvučeš automobil, u drugoj ili četvrtoj?

2. Kockica za igru se baca jedanput. Na njoj su obeleženi brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pored svake rečenice zaokruži odgovor.

a) Kockica će pokazati broj 6.              SIGURNO              MOGUĆE              NEMOGUĆE

b) Kockica će pokazati broj manji od 7.    SIGURNO              MOGUĆE              NEMOGUĆE

v) Kockica će pokazati broj veći od 7.    SIGURNO              MOGUĆE              NEMOGUĆE

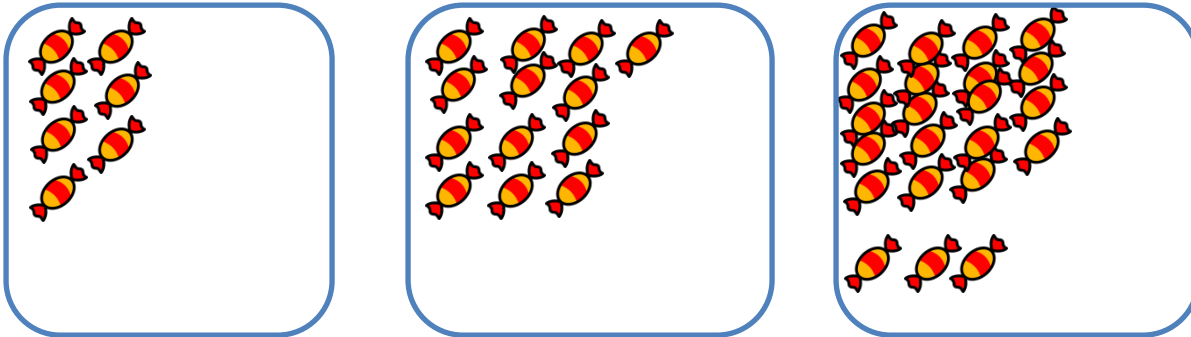
g) Kockica će pokazati broj 3.              SIGURNO              MOGUĆE              NEMOGUĆE

3. Ana ima 6 flomastera u svojoj torbi, od kojih su 2 žuta, 2 plava, 1 beo i 1 zelene boje. Uzela je jedan flomaster iz ranca, ne gledajući. Dovrši date rečenice.

a) Moguće da je izvukla: \_\_\_\_\_

b) Nije moguće da je izvukla: \_\_\_\_\_

4. Marko ima 3 kesice bombona. U svakoj ima po 1 čokoladna, a ostale su voćne bombone. Bez gledanja, on je pokušao da izvuče čokoladnu bombonu. Zaokruži tačan odgovor.



A) Da li Marko već u prvom pokušaju može da izvuče čokoladnu bombonu iz bilo koje kesice? DA NE

b) Da li je moguće da Marko izvuče karamelu iz treće kesice? DA NE

v) Da li je verovatnije da izvuče voćnu ili čokoladnu bombonu iz druge kesice? VOĆNA ČOKOLADNA

g) U kojoj kesici je najverovatnije da će Marko izvući čokoladnu bombonu? PRVA DRUGA TREĆA

d) U kojoj kesici je najverovatnije da će izvući voćnu bombonu? PRVA DRUGA TREĆA

5. Mađioničar je u svoju kutiju stavio 10 zečeva kako bi ih preobrazio u golubove. Sedam zečeva su se preobrazila u goluba, a tri nisu. Mađioničar je izvukao jednu životinju iz kutije. Dovrši započete rečenice.

a) Veća je verovatnoća da će izvući \_\_\_\_\_.

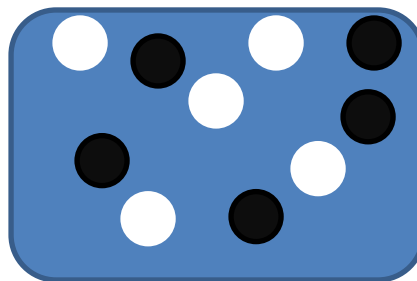
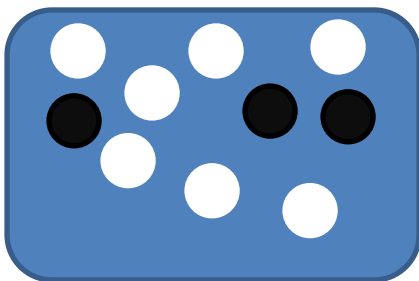
b) Manja je verovatnoća da će izvući \_\_\_\_\_.

6. a) U prvoj kutiji je 7 belih i 3 crne kuglice, dok su u drugoj 5 bele boje i 5 crne boje. Petar će dobiti poklon ako izvuče belu kuglicu. Iz koje kutije bi trebao Petar da izvlači kuglicu da bi dobio poklon?

1) iz prve kutije

2) iz druge kutije

3) svedjedno je, iz obe kutije je isto



B) U prvoj kutiji je 5 kuglica, od kojih su 4 bele i 1 crne boje. U drugoj kutiji je 10 kuglica, od kojih su 8 bele i 2 crne boje. Petar će dobiti poklon ako izvuče belu kuglicu. Iz koje kutije bi trebao Petar da izvlači kuglicu da bi dobio poklon?

1) iz prve kutije

2) iz druge kutije

3) svedjedno je, iz obe kutije je isto

