Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

# Опције са баријером и одређивање цене у биномном и Блек–Шолсовом моделу

*Студент:*
Аница Стаменић, 1033/2017.

*Ментор:*
др Бојана Милошевић

Београд, јун 2018.

# Садржај

# Поглавље 1

# Теоријски увод

## 1.1 Основни концепти теорије вероватноћа

Нека је $\Omega$ простор исхода посматраног експеримента. Поједине подскупове $\Omega$ називамо догађајима.

**Дефиниција 1.1.1.** *Класа $\mathcal{A}$ подскупова простора исхода $\Omega$ која поседује следећа својства:*

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. *Ако* $A \in \mathcal{A}$, *тада* $\overline{A} \in \mathcal{A}$.
3. *Ако* $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$, *тада* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

*назива се $\sigma$-алгебра догађаја дефинисана на простору исхода $\Omega$.*

Приметимо да је $\sigma$-алгебра догађаја затворена у односу на пребројиву примену операција пресека, уније и комплемента.

**Дефиниција 1.1.2.** *Пресек свих $\sigma$-алгебри које садрже скупове из неке колекције $\mathcal{K}$ назива се минимална $\sigma$- алгебра генерисана колекцијом $\mathcal{K}$.*

Уколико је колекција $\mathcal{K} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, минимална $\sigma$-алгебра која је садржи назива се Борелова $\sigma$-алгебра подскупова реалне праве, а њени елементи су Борелови скупови.

**Дефиниција 1.1.3.** *Функција $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ је вероватносна мера на мерљивом простору $(\Omega, \mathcal{A})$ ако има следећа својства:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $P(A) \geq 0$ *за сваки догађај* $A \in \mathcal{A}$;
3. *Ако су догађаји $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ такви да за $i \neq j$ важи $A_i \cap A_j = \emptyset$, важи једнакост:*

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

**Дефиниција 1.1.4.** *Уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ назива се простор вероватноћа.*

**Дефиниција 1.1.5.** *Нека је дат простор вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и пар* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *кога чине скуп реалних бројева и Борелова* $\sigma$*-алгебра подскупова тог скупа.*

*Функција* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *назива се случајна величина ако је мерљива у односу на* $\sigma$*-алгебре* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{B}$*, тј. ако за сваки Борелов скуп* $B \in \mathcal{B}$ *важи*

$$X^{-1}(B) = \{\omega : X(\omega) \in B\} \in A.$$

**Теорема 1.1.** *Нека је* $X$ *случајна величина дефинисана на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*. Тада је фамилија*

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

$\sigma$*-алгебра и назива се* $\sigma$*-алгебра генерисана случајном величином* $X$*.*

*Доказ.* Треба показати да важе својства наведена у дефиницији $\sigma$-алгебре:

1. $\Omega = X^{-1}(\mathbb{R}) \in \sigma(X)$.

2. Нека $A \in \sigma(X)$. Тада постоји скуп $B \in \mathbb{B}$ такав да важи $A = X^{-1}(B)$, одакле и $\overline{A} = \overline{X^{-1}(B)} = X^{-1}(\overline{B}) \in \sigma(X)$.

3. Нека је $A_n$ низ елемената $\sigma(X)$. Тада постоји низ Борелових скупова $B_n$ такав да за сваки индекс $n \in N$ важи $A_n = X^{-1}(B_n)$. Како је Борелова $\sigma$- алгебра затворена за пребројиве уније, тј. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{B}$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(B_n) = X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \sigma(X).$$

□

**Дефиниција 1.1.6.** *Условно математичко очекивање ненегативне случајне величине* $X$ *у односу на* $\sigma$*- алгебру* $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$ *је ненегативна проширена случајна величина која има следећа својства:*

1. $E(X|\mathcal{F})$ *је случајна величина која је* $\mathcal{F}$*-мерљива.*

2. *За сваки догађај* $A \in \mathcal{F}$ *важи једнакост:*

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{F}) dP.$$

**Напомена 1.** *Појам проширене случајне величине се односи на функцију* $Y : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *за коју је* $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *за сваки Борелов скуп* $B \in \mathcal{B}$*.*

**Дефиниција 1.1.7.** *Ако важи* $E(X^-|\mathcal{F}) < \infty$ *с.с. или* $E(X^+|\mathcal{F}) < \infty$ *с.с., условно математичко очекивање* $E(X|\mathcal{F})$ *случајне величине* $X$ *у односу на* $\sigma$*-алгебру* $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$ *дефинисано је формулом*

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X^+|\mathcal{F}) - E(X^-|\mathcal{F}),$$

*где је* $X^+ = \max(X, 0)$ *позитивни односно* $X^- = \max(-X, 0)$ *негативни део случајне величине* $X$*.*

*При том се на скупу догађаја вероватноће 0 на ком важи* $E(X^+|\mathcal{F}) = E(X^-|\mathcal{F}) = \infty$ *ова разлика дефинише произвољно, рецимо, 0.*

**Дефиниција 1.1.8.** *Нека је $X$ случајна величина и $\sigma_Y$ $\sigma$-алгебра генерисана случајном величином $Y$. Уколико је дефинисано условно математичко очекивање $E(X|\sigma_Y)$, означава се као $E(X|Y)$ и назива се условно математичко очекивање случајне величине $X$ у односу на $Y$.*

Наредна теорема даје неке од важних особина условног математичког очекивања.

**Теорема 1.2.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, $\mathcal{F}$ $\sigma$-подалгебра $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$, $X$ и $Y$ случајне величине које имају очекивање $E(X)$, односно $E(Y)$. Тада важи:*

1. $E(X|\mathcal{A}) = X$, $E(X|\mathcal{F}_0) = E(X)$, *где је* $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ *тривијална* $\sigma$-*алгебра.*

2. $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$ *с.с. где* $a, b \in \mathbb{R}$.

3. *Ако су* $\mathcal{F}_1$ *и* $\mathcal{F}_2$ $\sigma$-*алгебре такве да је* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{A}$, *с.с. важи једнакост:*
$$E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1).$$

4. $E(E(X|\mathcal{F})) = EX$.

5. *Нека случајна величина* $X$ *не зависи од* $\sigma$-*алгебре* $\mathcal{F}$, *тј. не зависи од индикатора* $I_B$ *за* $B \in \mathcal{F}$. *Тада с.с. важи једнакост*
$$E(X|\mathcal{F}) = EX.$$

**Теорема 1.3.** *Нека је $Y$ $\mathcal{F}$-мерљива случајна величина и нека је $E|X| < \infty$ и $E|XY| < \infty$. Тада скоро сигурно важи једнакост*
$$E(XY|\mathcal{F}) = YE(X|\mathcal{F}).$$

## 1.2 Основни концепти теорије случајних процеса

**Дефиниција 1.2.1.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа и $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ мерљив простор.*

*Функција $X : \Omega \to \mathcal{S}$ која је мерљива у односу на $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ и $\mathcal{S}$ назива се случајни елемент у простору $\mathcal{S}$.*

**Дефиниција 1.2.2.** *Фамилија случајних елемената $\{X_t, t \in T\}$ дефинисаних на истом простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, где је $T$ бесконачан скуп, назива се случајни процес.*

Ако сви случајни елементи имају исти фазни простор $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$, онда је он фазни простор случајног процеса. Када је $(\mathcal{S}, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, говоримо о реалном случајном процесу.

Скуп $T$ се назива индексни или параметарски скуп. У зависности од тога да ли је $T$ дискретан или непрекидан, разликујемо случајне процесе са дискретним (случајне низове) и непрекидним временом.

За фиксирано $t \in T$, $X(t, w) : \Omega \to \mathbb{R}$ је случајна величина, док се за фиксирано $\omega \in \Omega$ функција $X(t, w) : T \to \mathbb{R}$ назива трајекторијом случајног процеса.

**Дефиниција 1.2.3.** *Фамилија $\sigma$-алгебри $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ је филтрација на простору $(\Omega, \mathcal{F})$ ако важе следећа два услова:*

1. *за свако* $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$.

2. $\sigma\left(\bigcup_{t\in T}\mathcal{F}_t\right) \subset \mathcal{F}$.

**Дефиниција 1.2.4.** *Природна филтрација случајног процеса $\{X_t, t \in T\}$ је $\sigma$-алгебра генерисана случајним величинама $X(s)$, $0 \le s \le t$.*

**Дефиниција 1.2.5.** *Случајни процес $\{X_t, t \in T\}$ је адаптиран у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ ако је за свако фиксирано $t \in T$, случајна величина $X(t)$ мерљива у односу на $\sigma$-алгебру $\mathcal{F}_t$.*

Сваки случајни процес је адаптиран у односу на своју природну филтрацију.

**Дефиниција 1.2.6.** *Случајни процес са непрекидним временом $\{X(t), t \in T\}$ је мартингал у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_t, t \in T)$ ако важе следећи услови:*

1. $\{X(t), t \in T\}$ *је адаптиран у односу на филтрацију* $(\mathcal{F}_t, t \in T)$.
2. $E|X(t)| < \infty$, $\forall t \in T$.
3. $E(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$ *с.с.* $0 \le s \le t$, $s, t \in T$.

**Дефиниција 1.2.7.** *Случајни низ $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ је мартингал у односу на филтрацију $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ако важе следећи услови:*

1. $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ *је адаптиран у односу на филтрацију* $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$.
2. $E|X_n| < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$.
3. $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}$ *скоро сигурно* $\forall n \in \mathbb{N}$.

### 1.2.1 Брауново кретање

**Дефиниција 1.2.8.** *Случајни процес $\{W(t), t \ge 0\}$ дефинисан на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ је стандардни Винеров процес (или Брауново кретање) ако важе следећи услови:*

1. $W(0) = 0$ *скоро сигурно.*
2. $\{W(t), t \ge 0\}$ *има независне прираштаје*
3. *Прираштај* $W(t) - W(s)$ *има нормалну расподелу* $\mathcal{N}(0, t-s)$ *за* $0 \le s < t$.

Филтрација Брауновог кретања је колекција $\sigma$-алгебри $\{\mathcal{F}_t, t \ge 0\}$ која поседује следеће особине:

- Акумулација информација: За $0 \le s < t$ важи $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, односно у каснијем временском тренутку $t$ има бар онолико информација колико их је било у ранијем временском тренутку $s$.
- Адаптираност: За $t > 0$, Брауново кретање $W(t)$ је $\mathcal{F}_t$-мерљиво, тј. на основу информација доступних у тренутку $t$ можемо одредити вредност Брауновог кретања у том тренутку.
- Независност од будућих прираштаја: Прираштај $W(t) - W(s)$ за $0 \le s < t$ је независан од $\mathcal{F}_s$, односно сваки прираштај Брауновог кретања након неког тренутка је независан од информација доступних до тог тренутка.

Приметимо још да прве две особине обезбеђују то да је информација доступна у тренутку $t$ барем оnолика која се могла добити опсервацијом Брауновог кретања до тренутка $t$, док трећа особина даје то да та информација нема никаквог утицаја на предвиђање будућег кретања.

**Теорема 1.4.** *Брауново кретање је мартингал.*

*Доказ.* Јасно је да важе прва два својства дефиниције 1.2.6.
Треба још показати да $E(W(t)|\mathcal{F}_s) = W(s)$ с.с. за $0 \leq s < t$.

$$\begin{aligned} E(W(t)|\mathcal{F}_s) &= E(W(t) - W(s) + W(s)|\mathcal{F}_s) \\ &= E(W(t) - W(s)|\mathcal{F}_s) + E(W(s)|\mathcal{F}_s) \\ &= E(W(t) - W(s)) + W(s) = W(s) \end{aligned}$$

на основу линеарности условног математичког очекивања и независности будућих прираштаја Брауновог кретања од информација из прошлости. Овим је тврђење показано. □

### 1.2.2 Особине трајекторија Брауновог кретања

Кажемо да је случајни процес $X$ скоро сигурно непрекидан (или непрекидан са вероватноћом 1) на неком интервалу ако су му скоро све трајекторије непрекидне функције, тј. ако за интервал $S$ важи

$$P\{\omega|X(t,w) \text{ има прекид на } S\} = 0$$

Да бисмо показали да су скоро све трајекторије Винеровог процеса непрекидне, користимо критеријум Колмогорова.

**Теорема 1.5.** *Ако постоје $p, q, K > 0$ такви да*

$$E|X(t_1) - X(t_2)|^p \leq K|t_1 - t_2|^{1+q}, t_1, t_2 \in S,$$

*тада је случајан процес $X$ с.с. непрекидан на интервалу $S$.*

**Теорема 1.6.** *Винеров процес $\{W(t), t \geq 0\}$ је скоро сигурно непрекидан на сваком сегменту $[0, T]$, за $T > 0$.*

**Напомена 2.** *Лако се показује да критеријум Колмогорова важи за $p = 4, q = 1, K > 3$, $0 \leq t_1 < t_2$, тј. да је*

$$E(W(t_2) - W(t_1))^4 = 3(t_2 - t_1)^2.$$

**Теорема 1.7.** *Скоро све трајекторије стандардног Брауновог кретања су нигде диференцијабилне.*

Доказ овог тврђења се може наћи у [4].

**Теорема 1.8.** *Скоро све трајекторије Брауновог кретања имају неограничену варијацију на свим коначним интервалима.*

Како је функција варијације скоро свуда диференцијабилна и може се представити као збир једне растуће и једне опадајуће функције, ово својство трајекторија Брауновог кретања наводимо као директну последицу претходне теореме.

Сада нам је од интереса да покажемо да је квадратна варијација трајекторија Брауновог кретања ограничена.

**Теорема 1.9.** *Нека је* $\{W(t), t \geq 0\}$ *Брауново кретање* , $T > 0$ *и* $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = T\}$ *подела интервала* $[0, T]$.
*Тада* $Q_\Pi = \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1} - W(t_i))^2 \to T$ *у средње квадратном, када* $n \to \infty$.

*Доказ.* Означимо са $||\Pi|| = \max_{0<i<n-1} (t_{i+1} - t_i)$ параметар поделе, дужину најдужег подеоног сегмента који тежи 0, када $n \to \infty$. Квадратна варијација $Q_\Pi$ је случајна величина (зависна од избора трајекторије) дефинисана као сума независних случајних величина.

$$\begin{aligned} EQ_\Pi &= \sum_{i=0}^{n-1} E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} D(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DQ_\Pi &= \sum_{i=0}^{n-1} D(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 - (E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} 3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2 = 2\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i)^2 \\ &\leq 2||\Pi|| \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 2||\Pi||T \end{aligned}$$

Одавде $\lim_{||\Pi|| \to 0} DQ_\Pi = 0$, па $\lim_{||\Pi|| \to 0} Q_\Pi = EQ_\Pi = T$. □

**Теорема 1.10.** *Нека је* $\{W_t, t \geq 0\}$ *стандардно Брауново кретање и нека је* $\tau_a = \inf\{t \in \mathbb{R} : W_t = a\}$ *тренутак првог достизања нивоа* $a$. *Тада је случајни процес* $\{W_t^*, t \geq 0\}$ *дефинисан са:*

$$W_t^* = \begin{cases} W_t, & t \leq \tau_a \\ 2a - W_t, & t > \tau_a \end{cases}$$

*стандардно Брауново кретање.*

У овом поглављу је коришћена литература [6], [9], [7] и [4].

# Поглавље 2

# Теорија стохастичке интеграције

## 2.1 Итов интеграл

Наведена својства трајекторија као што су ненула квадратна варијација и недиференцијабилност онемогућавају приступ класичне анализе. Јавља се потреба за дефинисањем стохастичког интеграла облика:

$$I(T) = \int_0^T G(t)dW(t), \tag{2.1}$$

у којем поред Брауновог кретања са одговарајућом филтрацијом фигурише и случајни процес $\{G(t), t > 0\}$ адаптиран у односу на ту филтрацију.
За диференцијабилну функцију $F$ важи једнакост

$$\int_0^T G(t)dF(t) = \int_0^T G(t)F'(t)dt$$

у којој се на десној страни јавља обичан Лебегов интеграл по $t$. Међутим, за Брауново кретање, то није случај.

Идеја за конструкцију интеграла Ита је заснована на конструкцији тог интеграла за класу елементарних (простих) подинтегралних случајних процеса, а потом апроксимацији произвољног подинтегралног процеса низом елементарних. На основу тога, одговарајући интеграл Ита за произвољни случајни процес биће дефинисан као гранична вредност низа интеграла за одговарајући низ елементарних процеса.

Означимо са $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = T\}$ поделу интервала $[0, T]$ и претпоставимо да процес $G(t)$ узима константну вредност на сваком подинтервалу $[t_i, t_{i+1}]$, односно

$$G(t) = G(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Овако дефинисан случајни процес називамо прост (елементарни). Кроз следећи итеративни поступак долазимо до Итовог интеграла овог процеса:

$$\begin{aligned}
I(t) &= G(t_0)(W(t) - W(t_0) = G(0)W(t), \quad 0 \leq t < t_1, \\
I(t) &= G(0)W(t_1) + G(t_1)(W(t) - W(t_1), \quad t_1 \leq t < t_2, \\
I(t) &= G(0)W(t_1) + G(t_1)(W(t_2) - W(t_1) + G(t_2)(W(t) - W(t_2), \quad t_2 \leq t < t_3, \\
&\vdots \\
I(t) &= \sum_{i=0}^{k-1} G(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + G(t_k)(W(t) - W(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Случајни процес $\{I(t), t > 0\}$ дефинисан на основу једнакости (2.2) је Итов стохастички интеграл за просте процесе и може се записати и као

$$I(t) = \int_0^t G(s)dW(s), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Уколико је $t = T$ у једнакости (2.2), долазимо до дефиниције интеграла (2.1) за елементарни случајни процес. Штавише, дефинисали смо интеграл за произвољно изабрану горњу границу интеграције из интервала $[0, T]$.

На основу дефиниције Итовог интеграла за елементарни случајни процес и мартингалног својства Брауновог кретања важи следећа теорема.

**Теорема 2.1.** *Итов интеграл је мартингал.*

*Доказ.* Нека је $0 \leq s \leq t \leq T$, при чему $s, t$ припадају различитим подинтервалима поделе $\Pi$, тј. постоје подеоне тачке $t_l < t_k$, $s \in [t_l, t_{l+1}]$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$ (случај да $s, t$ припадају истом подеоном интервалу је поједностављен).
Тада се (2.2) може записати као:

$$\begin{aligned}
I(t) = &\sum_{i=0}^{l-1} G(t_i)[W(t_{i+1} - W(t_i)] + G(t_l)[W(t_{l+1}) - W(t_l)] \\
&+ \sum_{i=l+1}^{k-1} G(t_i)[W(t_{i+1} - W(t_i)] + G(t_k)[W(t) - W(t_k)].
\end{aligned}$$

Треба показати да важи $E[I(t)|\mathcal{F}_s] = I(s)$. Разматрамо појединачно чланове претходног израза и рачунамо одговарајуће условно математичко очекивање.

Како је $t_l < s$, случајне величине у првој суми су $\mathcal{F}_s$-мерљиве, па важи

$$E\left[\sum_{i=0}^{l-1} G(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \middle| \mathcal{F}_s\right] = \sum_{i=0}^{l-1} G(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)].$$

Други члан се може израчунати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
E[G(t_l)(W(t_{l+1}) - W(t_l))|\mathcal{F}_s] &= G(t_l)(E[W(t_{l+1})|\mathcal{F}_s] - W(t_l)) \\
&= G(t_l)(W(s) - W(t_l))
\end{aligned}$$

на основу теореме 1.3 и мартингалног својства Брауновог кретања 1.4.

Општи члан друге суме се на основу претходно наведених аргумената и својства 3 теореме 1.2 рачуна као

$$\begin{aligned}E[G(t_i)(W(t_{i+1})-W(t_i))|\mathcal{F}_s] &= E[E[G(t_i)(W(t_{i+1})-W(t_i))|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s]\\ &= E[G(t_i)(EW(t_{i+1})|\mathcal{F}_{t_i}]-W(t_i))|\mathcal{F}_s]\\ &= E[G(t_i)(W(t_i)-W(t_i))|\mathcal{F}_s]=0,\end{aligned}$$

,

одакле та сума има вредност 0.

Коначно, остаје да израчунамо четврти члан. На основу аргумената из претходна два случаја важи:

$$\begin{aligned}E[G(t_k)(W(t)-W(t_k))|\mathcal{F}_s] &= E[E[G(t_k)(W(t)-W(t_k))|\mathcal{F}_{t_k}]|\mathcal{F}_s]\\ &= E[G(t_k)(E[W(t)|\mathcal{F}_{t_k}]-W(t_k))|\mathcal{F}_s]\\ &= E[G(t_k)(W(t_k)-W(t_k))|\mathcal{F}_s]=0.\end{aligned}$$

Сумирањем претходних резултата добијамо:

$$E[I(t)|\mathcal{F}_s]=\sum_{i=0}^{l-1}G(t_i)[W(t_{i+1})-W(t_i)]+G(t_l)(W(s)-W(t_l))=I(s),$$

што је и требало показати. □

$I(t)$ је мартингал и $I(0)=0$, па је $EI(t)=0$, за $t\geq 0$.
Вредност дисперзије Итовог процеса $DI(t)=EI^2(t)$ је дата као следећи теоријски резултат.

**Теорема 2.2.** *(Итова изометрија) За Итов интеграл дефинисан са* (2.2) *важи следећа формула:*

$$EI^2(t)=E\int_0^t G^2(u)du.$$

*Доказ.* Са циљем поједностављења нотације, уводимо ознаке:

$$\begin{aligned}D_j &= W(t_{j+1})-W_{t_j}, \quad j=0,1,\ldots,k-1,\\ D_k &= W(t)-W(t_k).\end{aligned}$$

Тада је $I(t)=\sum_{j=0}^{k}G(t_j)D_j$, а одатле и

$$I^2(t)=\sum_{j=0}^{k}G^2(t_j)D_j^2+2\sum_{0\leq i<j\leq k}G(t_i)G(t_j)D_iD_j.$$

Прво разматрамо квадратне чланове облика $G^2(t_j)D_j^2$: $G^2(t_j)$ је $\mathcal{F}_{t_j}$-мерљива, $D_j$ је независна од $\mathcal{F}_{t_j}$, па је математичко очекивање суме квадрата

$$\begin{aligned} E\sum_{j=0}^{k} G^2(t_j)D_j^2 &= \sum_{j=0}^{k} EG^2(t_j)D_j^2 = \sum_{j=0}^{k} EG^2(t_j)ED_j^2 = \sum_{j=0}^{k} EG^2(t_j)DD_j \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} EG^2(t_j)(t_{j+1}-t_j) + EG^2(t_k)(t-t_k) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} E(G^2(t_j)(t_{j+1}-t_j)) + E(G^2(t_k)(t-t_k)). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Како је $G(t)$ елементаран процес, узима константну вредност на сваком подеоном интервалу, тј. $G(s) = G(t_j), s \in [t_j, t_{j+1}), j = 0, 1, \ldots, k-1$ и $G(s) = G(t_k), s \in [t_k, t)$,

$$G^2(t_j)(t_{j+1}-t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} G^2(u)du, \quad \text{и слично} \quad G^2(t_k)(t-t_k) = \int_{t_k}^{t} G^2(u)du.$$

Користећи наведено, (2.3) постаје

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} E\int_{t_j}^{t_{j+1}} G^2(u)du + E\int_{t_k}^{t} G^2(u)du &= E\int_{0}^{t_k} G^2(u)du + E\int_{t_k}^{t} G^2(u)du \\ &= E\int_{0}^{t} G^2(u)du. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Слично разматрање следи за мешовите чланове: случајна величина $G(t_i)G(t_j)D_i$ је $\mathcal{F}_{t_j}$-мерљива, $D_j$ је независна од $\mathcal{F}_{t_j}$, $0 \leq i < j \leq k$. Како је $ED_j = 0$, математичко очекивање друге суме је:

$$E\sum_{0\leq i<j\leq k} G(t_i)G(t_j)D_iD_j = \sum_{0\leq i<j\leq k} EG(t_i)G(t_j)D_iED_j = 0. \tag{2.5}$$

Сумирањем (2.4) и (2.5), долазимо до наведеног тврђења. □

Дефиницију Итовог интеграла за елементарни случајни процес ћемо проширити до дефиниције за произвољни случајни процес. Надаље, као и до сада, претпостављамо адаптираност тог процеса у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$. Такође, подразумевамо да важи услов $\mathbb{L}^2$- интеграбилности,

$$E\int_0^T G^2(t)dt < \infty.$$

На почетку поглавља смо идејно представили проширење дефиниције. Сада ћемо конструисати одговарајући низ елементарних процеса за произвољно одабрану поделу $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 \ldots < t_n = T\}$ интервала $[0, T]$

$$G_n(t) = G(t_j), \quad t_j < t < t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Када параметар поделе тежи 0, $n \to \infty$, добијамо све бољу апроксимацију произвољног процеса $G(t)$, па интеграл Ита за овај процес дефинишемо као граничну вредност одговарајућег низа интеграла за елементарне процесе, при чему говоримо о средње-квадратној конвергенцији. Прецизније,

$$I(t) = \int_0^T G(s)dW(s) = \lim_{n\to\infty} \int_0^T G_n(s)dW(s), \quad 0 \le t \le T. \tag{2.6}$$

Својства претходно дефинисаног интеграла произилазе као последица дефиниције и својстава интеграла за елементарни случајни процес и формулисана су у следећој теореми.

**Теорема 2.3.** *Нека је* $\{G(t), 0 \le t \le T\}$ $\mathcal{L}^2$*- интеграбилан случајни процес, адаптиран у односу на филтрацију* $\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$*. Тада Итов интеграл дефинисан са* (2.6) *има следећа својства:*

- *Непрекидност: Трајекторије* $I(t)$ *су непрекидне функције.*
- *Адаптираност: Случајна променљива* $I(t)$ *је* $\mathcal{F}_t$*-мерљива, за свако* $t \ge 0$.
- *Линеарност: Нека су* $I(t) = \int_0^T G(s)dW(s)$, $J(t) = \int_0^T H(s)dW(s)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Тада*

$$\alpha I(t) + \beta J(t) = \int_0^T (\alpha G(s) + \beta H(s))dW(s).$$

- $I(t)$ *је мартингал.*
- *Важи Итова изометрија.*

Због наведене недиференцијабилности трајекторија Брауновог кретања, потребно је увести "алат" за израчунавање Итовог интеграла и решавање стохастичких диференцијалних једначина. Најпре, од интереса ће бити увести правило за диференцирање израза $f(W(t))$, и то нешто општије, у ком $f$ може бити функција две променљиве, $f(x,t)$.

**Теорема 2.4.** *Нека је функција* $f(x,t)$ *два пута непрекидно - диференцијабилна по* $x$ *и непрекидно - диференцијабилна по* $t$*. Тада за свако* $T > 0$ *важи следећа формула*

$$\begin{aligned} f(W(t),t) = f(W(0),0) &+ \int_0^T f_t(W(t),t)dt \\ &+ \int_0^T f_x(W(t),t)dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(W(t),t)dt. \end{aligned}$$

*Скица доказа.* Посматрамо произвољну поделу интервала $[0,T], T > 0, \Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T\}$. На основу Тејлорове формуле за функцију две променљиве $f(x,t)$ важи

$$\begin{aligned} f(x_{j+1},t_{j+1}) - f(x_j,t_j) &= f_x(x_j,t_j)(x_{j+1}-x_j) + f_t(x_j,t_j)(t_{j+1}-t_j) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(x_j,t_j)(x_{j+1}-x_j)^2 + f_{xt}(x_j,t_j)(x_{j+1}-x_j)(t_{j+1}-t_j) \\ &+ \frac{1}{2}f_{tt}(x_j,t_j)(t_{j+1}-t_j)^2 + \text{чланови вишег реда}. \end{aligned}$$

Најпре ћемо показати да формула важи у специјалном случају $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Тада Тејлорова формула поприма следећи облик:

$$f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2}f''(x_j)(x_{j+1} - x_j)^2. \tag{2.7}$$

Увођењем смене $x_j = W(t_j)$ и $x_{j+1} = W(t_{j+1})$ у једнакости (2.7) и сумирањем по индексу $j = 0, 1, \ldots, n-1$ долазимо до

$$f(W(t),t) - f(W(0),0) = \sum_{j=0}^{n-1}[f(W(t_{j+1})) - f(W(t_j))]$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f'(W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f''(W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2,$$

а потом за $f(x) = \frac{x^2}{2}, f'(x) = x, f''(x) = 1$ до

$$\begin{aligned} f(W(t),t) - f(W(0),0) = &\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + \\ &\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Преласком на лимес када $||\Pi|| \to 0$ у једнакости (2.8) добијамо:

$$\begin{aligned} f(W(t),t) - f(W(0),0) &= \int_0^T W(t)dW(t) + \frac{1}{2}T \\ &= \int_0^T f'(W(t))dW(t) + \int_0^T f''(W(t))dt. \end{aligned}$$

Овим је формула доказана у специјалном случају $f(x) = \frac{x^2}{2}$.
Сада ћемо показати да она важи за произвољну функцију две променљиве $f(x,t)$. Поново, на основу Тејлоровог развоја те функције, имамо

$$f(W(T),T) - f(W(0),0) = \sum_{j=0}^{n-1} f(W(t_{j+1}), t_{j+1}) - f(W(t_j), t_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f_x(W(t_j), t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) \tag{2.9}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} f_t(W(t_j), t_j)(t_{j+1} - t_j) \tag{2.10}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(W(t_j), t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} f_{xt}(W(t_j), t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j) \tag{2.12}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}(W(t_j), t_j)(t_{j+1} - t_j)^2 + \text{чланови вишег реда.} \tag{2.13}$$

Разматрамо засебно понашање сваког члана преласком на лимес када $||\Pi|| \to 0$. Члан (2.9) тежи Итовом интегралу,

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_x(W(t_j), t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \int_0^T f_x(W(t), t)dW(t).$$

Члан (2.10) тежи интегралу,

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_t(W(t_j), t_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_0^T f_t(W(t), t)dt.$$

На основу теореме 1.9, члан (2.11) тежи интегралу

$$\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(W(t_j), t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = \int_0^T f_x x(W(t), t)dt.$$

Преостала два члана ћемо проценити и на основу те процене показати да теже 0.

$$\begin{aligned}
&\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{xt}(W(t_j), t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))(t_{j+1} - t_j)| \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{xt}(W(t_j), t_j)||(W(t_{j+1}) - W(t_j))|(t_{j+1} - t_j) \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} |(W(t_{k+1}) - W(t_k))| \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{xt}(W(t_j), t_j)|(t_{j+1} - t_j) \\
&= 0 \cdot \int_0^T |f_{xt}(W(t), t)|dt = 0, \quad \text{јер је} \int_0^T |f_{xt}(W(t), t)|dt < \infty.
\end{aligned}$$

Сличним разматрањем добијамо и:

$$\begin{aligned}
&\lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(W(t_j), t_j)(t_{j+1} - t_j)^2| \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(W(t_j), t_j)|(t_{j+1} - t_j)^2 \\
&\leq \lim_{||\Pi||\to 0} \max_{0\leq k\leq n-1} (t_{k+1} - t_k) \lim_{||\Pi||\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(W(t_j), t_j)|(t_{j+1} - t_j) \\
&= 0 \cdot \int_0^T |f_{tt}(W(t), t)|dt = 0, \quad \text{јер је} \int_0^T |f_{tt}(W(t), t)|dt < \infty.
\end{aligned}$$

Остало је још размотрити понашање чланова вишег реда. Приметимо да ти чланови садрже $[W(t_{j+1}) - W(t_j)]^3$, па искористимо следећу процену:

$$\sum_{j=0}^{n-1} |(W(t_{j+1}) - W(t_j))|^3 \leq \max_{0\leq k\leq n-1} |(W(t_{k+1}) - W(t_k))| \sum_{j=0}^{n-1} |(W(t_{j+1}) - W(t_j))|^2 \to 0$$

На овај начин смо показали да чланови реда већег или једнаког 3 теже 0, када $||\Pi|| \to 0$, чиме је доказ завршен. □

Овај резултат се може уопштити применом формуле на читаву класу случајних процеса који се називају процеси Ита.

**Дефиниција 2.1.1.** *Нека је $\{W(t), t > 0\}$ Брауново кретање и $\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$ одговарајућа филтрација. Случајни процес $\{X(t), t > 0\}$ који се може представити у облику*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F(u)du + \int_0^t G(u)dW(u), \tag{2.14}$$

*за адаптиране процесе $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$, $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$, назива се процес Ита.*

**Напомена 3.** *Нека је $\{W(t), t > 0\}$ Брауново кретање и $\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$ одговарајућа филтрација. Реалан случајни процес $\{G(t), t > 0\}$ адаптиран у односу на филтрацију $\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$*

1. *припада простору $\mathbb{L}^2(0,T)$ ако*

$$P\bigg(\int_0^T G^2(u)du < \infty \quad \text{за свако} \quad 0 \le t < T\bigg) = 1.$$

2. *припада простору $\mathbb{L}^1(0,T)$ ако*

$$P\bigg(\int_0^T |G(u)|du < \infty \quad \text{за свако} \quad 0 \le t < T\bigg) = 1.$$

Процес Ита може се представити и у диференцијалном облику:

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t). \tag{2.15}$$

**Теорема 2.5.** *Квадратна варијација процеса Ита у тренутку $T$ износи $\int_0^T G^2(u)du$.*

*Доказ.* Посматрамо произвољну поделу интервала $[0,T], T > 0$, $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T\}$. Ради појадностављења нотације, уводимо следеће ознаке:

$$R(t) := \int_0^t F(u)du, \quad I(t) := \int_0^t G(u)dW(u).$$

Додатно, претпостављамо да су уведени процеси непрекидни по горњој граници интеграције.
Узорачка квадратна варијација процеса Ита је једнака

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}[X(t_{j+1}) - X(t_j)]^2 &= \sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2 + \sum_{j=0}^{n-1}[R(t_{j+1}) - R(t_j)]^2 \\ &+ 2\sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)][R(t_{j+1}) - R(t_j)].\end{aligned}$$

Преласком на лимес $\lim\limits_{||\Pi||\to 0}$, приметимо да први члан на десној страни тежи квадратној варијацији Итовог интеграла $\int_0^T G^2(u)du$.
Преостала два члана ћемо проценити по апсолутној вредности и показати да теже 0.

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{n-1}[R(t_{j+1})-R(t_j)]^2\right| &\leq \max_{0\leq k\leq n-1}|(R(t_{k+1})-R(t_k))|\sum_{j=0}^{n-1}|R(t_{j+1})-R(t_j)|\\ &\leq \max_{0\leq k\leq n-1}|(R(t_{k+1})-R(t_k))|\sum_{j=0}^{n-1}|\int_{t_j}^{t_{j+1}}F(u)du|\\ &\leq \max_{0\leq k\leq n-1}|(R(t_{k+1})-R(t_k))|\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}|F(u)|du\\ &= \max_{0\leq k\leq n-1}|(R(t_{k+1})-R(t_k))|\int_0^T|F(u)|du.\end{aligned}$$

Преласком на лимес $\lim\limits_{||\Pi||\to 0}$, уз претпоставку о непрекидности процеса $R(t)$, добијамо да овај члан тежи ка $0\cdot\int_0^T|F(u)|du=0$.

Мешовити члан је по апсолутној вредности ограничен одозго са:

$$\begin{aligned}&2\left|\sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1})-I(t_j)][R(t_{j+1})-R(t_j)]\right|\leq\\ &2\max_{0\leq k\leq n-1}|(I(t_{k+1})-I(t_k))|\sum_{j=0}^{n-1}|R(t_{j+1})-R(t_j)|\leq\\ &2\max_{0\leq k\leq n-1}|(I(t_{k+1})-I(t_k))|\int_0^T|F(u)|du.\end{aligned}$$

На основу непрекидности $I(t)$, закључујемо да и овај члан тежи $0\cdot\int_0^T|F(u)|du=0$, чиме је доказ комплетиран. □

**Дефиниција 2.1.2.** *Нека је $\{X(t),t\geq 0\}$ процес Ита дефинисан са (2.14), и нека је $H\in\mathbb{L}^2(0,T)$ адаптиран случајан процес. Итов интеграл дефинисан је у односу на Итов процес на следећи начин*

$$\int_0^t H(u)dX(u)=\int_0^t H(u)dF(u)+\int_0^t H(u)G(u)dW(u).$$

**Теорема 2.6.** *Нека је $\{X(t),t\geq 0\}$ процес Ита дефинисан са (2.14) и нека је $f(x,t)$ неслучајна функција две променљиве која је два пута непрекидно- диференцијабилна по $x$ и једном непрекидно- диференцијабилна по $t$. Тада је $f(X(T),T)$ такође Итов процес и за свако $T>0$ важи следећа формула:*

$$\begin{aligned}f(X(T),T)=f(X(0),0)&+\int_0^T f_t(X(t),t)dt+\int_0^T f_x(X(t),t)F(t)dt\\ &+\int_0^T f_x(X(t),t)G(t)dW(t)+\frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(X(t),t)G^2(t)dt.\end{aligned}$$

Доказ се изводи слично као доказ Итове формуле за Брауново кретање која је дата у теореми 2.4, применом дефиниције процеса Ита и резултата теореме за његову квадратну варијацију.

Итова формула у диференцијалном облику је дата са

$$\begin{aligned} df(X(t),t) &= f_t(X(t),t)dt + f_x(X(t),t)F(t)dt \\ &\quad + f_x(X(t),t)G(t)dW(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X(t),t)G^2(t)dt, \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

## 2.2 Стохастичке диференцијалне једначине

Увођење случајности у обичне диференцијалне једначине доводи до појаве две различита типа једначина. Први и једноставнији тип настаје када се коефицијенти обичне диференцијалне једначине задају случајним променљивим или оне фигуришу у почетним условима.

Други тип једначина настаје увођењем случајности изазване понашањем неког случајног процеса, рецимо Гаусовог белог шума. Формалан запис овог типа једначина је

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \tag{2.17}$$

где је $\{W(t), t \geq 0\}$ означено стандардно Брауново кретање, док су $a(t, X_t)$, $b(t, X_t)$ неслучајне функције. Решење ове једначине, уколико постоји, је случајни процес $\{X(t), t \geq 0\}$.

Ове једначине се још и називају стохастичке диференцијалне једначине и као што видимо, формалан запис је у форми стохастичких диференцијала, али имају и формалну интерпретацију у интегралном облику. Случајне процесе који представљају решења овог типа једначина карактерише недиференцијабилност трајекторија индукована Брауновим кретањем из Итовог стохастичког интеграла.

## 2.3 Промена вероватносне мере

До сада смо увели важне појмове и корисне алате потребне за стохастичку анализу. Међутим, од интереса нам је још једна корисна техника, која се назива промена вероватносне мере. Изложићемо основну идеју, изостављајући формалне доказе теорије мере и интеграције.

**Дефиниција 2.3.1.** *Нека су $P$ и $Q$ вероватносне мере дефинисане на $\mathcal{F}$. Ако постоји ненегативна функција $f_1$ таква да важи*

$$Q(A) = \int_A f_1(\omega)dP(\omega), \quad A \in \mathcal{F},$$

*кажемо да је $f_1$ функција густине за $Q$ у односу на $P$ и да је $Q$ апсолутно непрекидна у односу на $P$.*

Слично можемо дефинисати функцију густине $f_2$ за $P$ у односу на $Q$.

**Лема 2.3.1.** *Ако је $P$ апсолутно непрекидна вероватносна мера у односу на $Q$ и $Q$ апсолутно непрекидна вероватносна мера у односу на $P$, кажемо да су $P$ и $Q$ еквивалентне вероватносне мере.*

Нека је $\{W_t, t \geq 0\}$ раније дефинисано стандардно Брауново кретање. Посматрамо вероватноћу $P(W_t \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$, у којој фигурише нормално расподељена случајна величина $W_t \in \mathcal{N}(0,t)$ у вероватносној мери $P$. Међутим, ако уместо $P$ посматрамо ову случајну величину у некој другој вероватносној мери, њена расподела не мора бити иста.

Посматрамо случајни процес дефинисан са

$$\tilde{W}_t = W_t + qt, \quad t \in [0,T], q \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

За $q \neq 0$, овај процес није стандардно Брауново кретање у вероватносној мери $P$. Може се показати да заменом вероватносне мере $P$ одговарајућом вероватносном мером $Q$, ово кретање ће имати особине стандардног Брауновог кретања.

Следећа тврђења се у литератури могу наћи као резултат теореме Гирсанова.

**Теорема 2.7.** *Нека је $\{W_t, t \geq 0\}$ стандардно Брауново кретање. Тада важе следећа тврђења:*

- *Случајни процес $\{M_t, t \geq 0\}$ дефинисан на следећи начин*

  $$M_t = e^{-qW_t - \frac{1}{2}q^2 t}, t \in [0,T]$$

  *је мартингал у односу на природну филтрацију Брауновог кретања у вероватносној мери $P$.*

- *Релација*

  $$Q(A) = \int_A M_T(\omega) dP(\omega), \quad A \in \mathcal{F}$$

  *дефинише вероватносну меру $Q$ на $\mathcal{F}$ еквивалентну са $P$.*

- *У вероватносној мери $Q$, процес $\tilde{W}$ дефинисан са (2.18) је стандардно Брауново кретање и адапатиран је у односу на своју природну филтрацију.*

Промена вероватносне мере служи за елиминацију помераја из стохастичке диференцијалне једначине што ћемо учинити у неком од наредних поглавља.

У овом поглављу је коришћена литература [12] и [8].

# Поглавље 3

# Опције

## 3.1 Стандардне опције

Опције су вредносни папири који припадају класи финансијских деривата. Карактеристика ове класе јесте да вредност деривата зависи од вредности неких других вредносних папира на које се односе. Посебна врста финансијских деривата су опције и оне се могу односити на било шта што има вредност на тржишту (обвезнице, форвард и фјучерс уговори, валуте, берзански индекси итд.). Ипак, њихова подлога (енг. *underlying asset*) су махом акције.

**Дефиниција 3.1.1.** *Опција је финансијски уговор који даје право, али не и обавезу да се купи (куповна опција, енг. call option) или прода (продајна опција, енг. put option) вредносни папир по уговореној цени $K$ (енг. strike, exercise price) током уговореног времена до истека опције $T$ (енг. time to maturity).*

Цену вредносног папира на који се односи опција у тренутку $t$ означавамо са $S_t$, $0 < t \leq T$.

У самој дефиницији видимо да у зависности од тога како је дефинисан уговор, разликујемо две врсте опција:

- кол (куповна) опција даје право, али не и обавезу да се вредносни папир купи по уговореној цени.
- пут (продајна) опција даје право, али не и обавезу да се вредносни папир прода по уговореној цени.

**Напомена 4.** *Надаље, претпостављамо да се опције односе на акције, у складу са чињеницом да су управо акције њихова најчешћа подлога.*

Као што је наглашено, купац опције не купује акције, већ право на куповину или продају истих. Ако посматрамо време у ком је могуће то право искористити, тј. опцију "активирати", јављају се две основне врсте опција:

- европске - могу се активирати само у уговорено време $T$.
- америчке - могу се активирати у било ком временском тренутку пре тренутка истека $T$.

**Напомена 5.** *Цена европске кол опције стандардно се обележава са $c$, америчке кол опције са $C$, док се цене одговарајућих пут опција обележавају са $p$, односно $P$, респективно.*

Вредности европских опција у тренутку истека су:

- Европска кол опција
  Ако је у тренутку истека $T$, $S_T > K$, власник опције може купити вредносни папир по цени $K$, продати га на берзи по цени $S_T$ и остварити профит $S_T - K$. У супротном, ако је $S_T \leq K$, неће активирати опцију. Дакле, вредност опције у тренутку истека је:

$$c = \max(S_T - K, 0). \tag{3.1}$$

- Европска пут опција
  Ако је у тренутку истека $T$, $S_T < K$, власник опције може купити вредносни папир на берзи по цени $S_T$, активацијом опције, продати га по цени $K$ и остварити профит $K - S_T$. У случају да је $S_T \geq K$, неће активирати опцију. Дакле, вредност опције у тренутку истека је:

$$p = \max(K - S_T, 0). \tag{3.2}$$

У преосталом делу рада подразумевамо да на тржишту

1. не постоје трошкови новчаних трансакција.
2. све подлеже истој каматној стопи, тј. важећа каматна стопа је константна.
3. позајмице и улози у банку имају исту каматну стопу и увек можемо да купимо или продамо акцију или опцију коју желимо, по тржишној цени.
4. не постоји могућност арбитраже, тј. прављења сигурног профита без ризика.

За вредновање и одређивање цена опција користе се разни математички модели. Неки од параметара који утичу на цену опција свакако су:

1. Цена одговарајућег вредносног папира, $S_t$, $0 \leq t \leq T$
   Јасно је да промене цене вредносног папира на који се односи утичу на вредност саме опције. Притом, утицај на цену кол опције је супротан од утицаја на цену пут опције, тј. са порастом цене акције, расте вредност кол опције, док опада вредност пут опције, и обратно.
2. Време до истека опције
   Када говоримо о америчким опцијама, с обзиром на могућност активације у било ком временском тренутку пре доспећа, вредност, а самим тим и цена ових опција расте са порастом времена. Међутим, то не мора важити код европских опција. Један од фактора утицаја на цену су очекиване исплате дивиденди.
3. Волатилност акције $\sigma$
   Параметар волатилности представља меру неодређености будућег кретања акција. У складу са тим, вредности пут и кол опција расту са порастом волатилности. Вредност пут опције на доспећу је ограничена, док вредност кол опције није.

4. Безризична каматна стопа, $r$
   Утицај каматних стопа на цену опција се не може разматрати изоловано од осталих и променљив је као и утицај претходно наведених фактора. Са порастом каматних стопа на тржишту, расте и добит од акција, али се смањују садашње вредности будућих токова новца. Обједињени ефекат је смањење вредности пут опција и повећање вредности кол опција.
   Претпоставимо сада да каматне стопе расту, док остали фактори остају непромењени, што није реалистична претпоставка. Са порастом каматних стопа, цене акција падају и обратно, што може довести до пада цена кол опција и раста цена пут опција.

5. Дивиденде
   Уколико постоје дивиденде током трајања опције, оне такође утичу на цену и то на следећи начин: дан након исплате дивиденди, цене акција су у паду, па цене кол опција опадају, док цене пут опција расту.

## 3.2 Пут–кол паритет

Пут–кол паритет представља везу између цена (вредности) европских пут и кол опција са истим карактеристикама (уговореном ценом, временом до доспећа и чињеницом да се односе на исту акцију). На основу ње, уколико је позната цена једне врсте опција, почетна и уговорена цена акције, важећа каматна стопа и време до доспећа, може се наћи цена друге врсте опције.

Пут–кол паритет се исказује кроз две различите формулације, у зависности од тога да ли су у питању опције са или без дивиденди.

**Теорема 3.1** (Пут–кол паритет за европске опције без дивиденди)**.** *За европске пут и кол опције без дивиденди које имају исту уговорену цену, исто време до доспећа, каматну стопу и одмосе се на исту акцију, важи:*

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

**Теорема 3.2** (Пут–кол паритет за европске опције са дивидендама)**.** *За европске пут и кол опције са дивидендом које имају исту уговорену цену, исто време до доспећа, каматну стопу и одмосе се на исту акцију, важи:*

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0.$$

## 3.3 Опције са баријером

Опције чија се вредност не одређује на стандардан начин као код европских пут и кол опција често се називају и егзотичне опције. Када говоримо о опцијама чија вредност зависи од кретања цена акција, имамо у виду оне чија вредност у тренутку истека на нетривијалан начин зависи од претходних промена цена акција као и цене акција у тренутку истека. Приметимо да у ову групу не спада стандардна европска опција која би се могла окарактерисати као "независна од кретања цена акција", јер њена вредност зависи само од уговорене цене и цене акција у тренутку истека. Ми ћемо разматрати следећи тип зависности: вредност опције зависиће и од тога да ли је цена акције досегла тзв. "баријерну цену".

Опције са баријером у неком погледу личе на америчке опције, али су једноставније за израчунавање, с обзиром на то да је баријерна цена унапред одређена и дефинисана уговором. Трговина овим опцијама остварује се на берзама, али и између банака и корпорација.

Такође, опције са баријером имају нижу цену од стандардних опција, управо због постојања баријере која пружа флексибилност при склапању уговора. Инвеститор може одредити вредност баријере у складу са сопственим предвиђањима ситуације на берзи, што овај тип опција чини додатно атрактивним.

### 3.3.1 Дефиниција и поделе опција са баријером

**Дефиниција 3.3.1.** *Опције са баријером су оне чија вредност зависи од тога да ли је цена акције досегла одређену вредност током временског интервала до доспећа.*

- Излазне (енг. $knock-out$) опције се у почетку понашају као регуларне пут и кол опције и постају безначајне и пре времена истека уколико цена акције досегне предвиђену, унапред дефинисану баријеру.
- Улазне (енг. $knock-in$) опције су неактивне све док цена акције не досегне баријеру, од тог тренутка се понашају као регуларне пут и кол опције.

У зависности од тога да ли се баријерна цена налази изнад или испод почетне цене акције, разликујемо две врсте опција са баријером:

- Горње (енг. *up*) опције - вредност баријере је већа од почетне цене акције.
- Доње (енг. *down*) опције - вредност баријере је мања од почетне цене акције.

У вези са претходним разматрањима, у зависности од тога да ли достизањем баријере опција постаје или престаје да буде активна, разликујемо следеће врсте опција:

- Доња излазна (енг. $down-and-out$) опција престаје када цена акције падне до вредности баријере.
- Горња излазна (енг. $up-and-out$) опција престаје када цена акције порасте до вредности баријере.
- Доња улазна ( енг. $down-and-in$) опција постаје активна када цена акције падне до вредности баријере.
- Горња улазна (енг. $up-and-in$) опција постаје активна када цена акције порасте до вредности баријере.

Власник опције са баријером може добити повраћај новца у одређеним ситуацијама када је баријерна цена достигнута (на пример, цена акције је пала испод баријерне цене, уколико имамо доњу опцију) или никада није достигнута (у случају улазних опција). Повраћај новца обично представља одређени део премије, плаћа се у тренутку достизања баријере, мада може бити одложен до истека опције.

У овом поглављу је коришћена литература [6], [3], [14], [15] и [5].

# Поглавље 4

# Одређивање цена опција

## 4.1 Блек–Шолсов модел

Познато је да се кретање цена акција на берзи може описати као случајни процес са непрекидним временом. Према Башељевом моделу, ово кретање је било моделирано Брауновим кретањем са параметром положаја $\mu$ и дисперзијом $\sigma^2$. Претпоставке тог модела су биле да за произвољне ненегативне вредности $y$ и $t$, прираштај процеса $\{S(y), 0 \leq y < \infty\}$, $S(t+y) - S(y)$ не зависи од цена акција пре тре тренутка $y$ и да има нормалну расподелу $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Један очигледан недостатак овог модела јесте претпоставка нормалне расподељености која допушта негативност цена акција. Такође, претпоставка да промена цена акције на интервалу исте дужине има исту расподелу, независно од вредности на почетку интервала, није реалистична.

Блек Фишер и Мајрон Шолс су у свом раду објављеном 1973. године представили модел за вредновање опција који се и данас веома користи у пракси. Математичко објашњење овог модела дато је у раду Роберта Мертона. Мајрон Шолс и Роберт Мертон су 1997. добили Нобелову награду за економију која, нажалост, Фишеру није припала, због смрти 1995. године.
Модел у коме су недостаци Башељеовог модела превазиђени подразумева да кретање цена акција прати процес геометријског Брауновог кретања:

**Дефиниција 4.1.1.** *Колекција цена акција $\{S(y), 0 \leq y < \infty\}$ представља процес геометријског Брауновог кретања са параметром помераја $\mu$ и параметром волатилности $\sigma$, ако за произвољне $y, t \geq 0$ важе следећи услови:*

1. *Случајна величина $\frac{S(t+y)}{S(y)}$ не зависи од цена акција пре тренутка $y$.*

2. $\ln\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ *има нормалну расподелу $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.*

Посматрамо кретање цена акција које не поседују исплате дивиденди, са константном волатилно7ћу $\sigma$ и дрифтом $\mu$.
То кретање описано је следећом једначином

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{4.1}$$

где је $\{W_t, t \geq 0\}$ Брауново кретање. Решење стохастичке диференцијалне једначине (4.1) може се добити на основу Итове формуле наведене у другом поглављу, при избору функције $f(X(t), t) = log(X(t))$

$$S_t = S_0 e^{\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right]}.$$

Претпоставимо да колекција цена акција прати процес дефинисан једначином (4.1) и означимо са $V(S,t)$ цену опције у тренутку $t$.
Поново, на основу Итове леме 2.16, добијамо да важи:

$$dV = \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dW. \tag{4.2}$$

Конструишемо портфолио који се састоји од једне опције и $-\Delta$ акција. Његова вредност тада износи $\Pi = V - \Delta S$. Промена вредности портофолија се може изразити на следећи нацин: $d\Pi = dV - \Delta dS$.
На основу (4.2), ова једнакост поприма следећи облик:

$$d\Pi = \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right]dt + \sigma S\left[\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right]dW.$$

Са циљем елиминације стохастичке компоненте, бирамо $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, одакле је:

$$d\Pi = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt.$$

Како је члан уз $dW_t = 0$, добит овог портфолија, треба да буде иста као да је уложен новац у банку, по безризичној каматној стопи, односно мора важити $d\Pi = r\Pi dt$, што се може записати и као:

$$r\Pi dt = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt.$$

У супротном, када ова једнакост не би важила, постојала би могућност арбитраже, прављења сигурног профита без ризика.

Заменом вредности за $\Pi$ и $\Delta$ и дељењем читаве једнакости са $dt$, долазимо до облика Блек–Шолсове парцијалне диференцијалне једначине:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{4.3}$$

Гранични услови за стандардну европску кол опцију су:

За $t = T$, $c(S,T) = \max(S-K, 0)$,

$S = 0$, $c(0,t) = 0$,

При $S \to \infty$, $c(S,T) \sim S$,

док су исти за стандардну европску пут опцију:

За $t = T$, $p(S,T) = \max(K-S, 0)$,

$S = 0$, $p(0,t) = K\exp -r(T-t)$,

При $S \to \infty$, $p(S,T) \to 0$.

### 4.1.1 Решавање Блек–Шолсове једначине

Детаљно ћемо размотрити опције са баријером које имају исту добит као европске опције (или тзв. европског типа) и решавањем Блек–Шолсове једначине (4.3) дати експлицитне формуле за цену ових опција. Проблем може бити усложњен уколико разматрамо попуст који власник опције може добити и тада се исти решава нумерички.

Прво разматрамо случај доње излазне кол опције, при чему цена акција за време трајања опције узима вредност већу од нивоа баријере. За цену такве опције постоји експлицитна формула. Баријерна цена је нижа у уговорене цене, тј. $K > B$.

Уводимо нове променљиве $x$ и $\tau$, такве да важи $S = Ke^x$, $t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$, одакле имамо

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial V}{\partial \tau} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial x} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) = \frac{1}{S^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) \tag{4.6}$$

Заменом (4.4), (4.5) и (4.6) у (4.3), та једнакост поприма облик

$$-\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{2r}{\sigma^2}V = 0. \tag{4.7}$$

Нека је $V(S,t) = Ke^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$ функција која задовољава једнакост (4.7). Заменом следећих вредности

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = K\left(\beta e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right) \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = K\left(\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = K\left(\alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u + 2\alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \tag{4.10}$$

у једнакост (4.7) и дељењем исте са $Ke^{\alpha x+\beta\tau} \neq 0$, добијамо

$$-\left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right) - \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{2r}{\sigma^2}\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{2r}{\sigma^2}u = 0. \tag{4.11}$$

Ако означимо $k = \frac{2r}{\sigma^2}$, константе $\alpha$ и $\beta$ одређујемо из услова да су коефицијенти уз чланове $u$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ једнаки 0,

$$2\alpha + (k-1) = 0, \quad \beta = \alpha^2 + (k-1)\alpha - k, \tag{4.12}$$

одакле је $\alpha = -\frac{1}{2}(k-1)$, $\beta = \frac{1}{4}(k+1)^2$.

Претходним поступком, једначина (4.11) је сведена на познату једначину провођења топлоте облика

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad \tau > 0. \tag{4.13}$$

Како је $u(x,\tau) = \frac{1}{K}V(S,t)e^{-(\alpha x+\beta\tau)}$, тада

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{1}{K}V(S,T)e^{-\alpha x} \\ &= \frac{1}{K}\max(Ke^x - K, 0)e^{-\alpha x} \\ &= \max(e^x - 1, 0)e^{-\alpha x} \\ &= \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0) := u_0(x), \quad x > \ln\frac{B}{K}. \end{aligned}$$

Такође, важи

$$u(x,\tau) \sim e^{(1-\alpha)x-\beta\tau}, \text{када} \quad x \to \infty.$$

У разматрању опција са баријером јавља се нови услов $u\big(\ln\big(\frac{B}{K}\big), 0\big) = 0$ који решавамо методом слике.

Проблем одређивања цене стандардних европских опција је повезан са једначином провођења топлоте на неограниченој шипки. Гранични услов $u\big(\ln\big(\frac{B}{K}\big), 0\big) = 0$ је постављен за коначну вредност, па се јавља аналогија једначином провођења топлоте на полуограниченој шипки са температуром 0 у тачки $x_0 = \ln\big(\frac{B}{K}\big)$. Једначина провођења топлоте је инваријантна у односу на рефлексију и транслацију, односно ако је $u(x,\tau)$ њено решење, решења су и $u(-x,\tau)$ као и $u(x+x_0,\tau)$, за произвољно одабрану константу $x_0$.

Рефлектујемо почетне услове око $x_0 = \ln\big(\frac{B}{K}\big)$, чиме је обезбеђено $u\big(\ln\big(\frac{B}{K}\big), 0\big) = 0$, док је

$$u(x,0) = \begin{cases} \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0), & x > x_0 \\ \max(e^{\frac{1}{2}(k+1)(\ln\frac{B}{K}-\frac{x}{2})} - e^{\frac{1}{2}(k-1)(\ln\frac{B}{K}-\frac{x}{2})}, 0) & x < x_0. \end{cases}$$

Уместо што бисмо стандардном интеграцијом дошли до решења ове једначине, означимо са $c(S,t)$ цену стандардне кол опције са истим временом до доспећа и истом уговореном ценом и са $u_1(x,\tau)$ одговарајуће решење једначине провођења топлоте,

$$u_1(x,\tau) = \frac{C(S,t)}{K}e^{-(\alpha x+\beta\tau)}. \tag{4.14}$$

Тада је цена одговарајуће опције са баријером

$$V(S,t) = Ke^{\alpha x+\beta\tau}(u_1(x,\tau) + u_2(x,\tau)), \tag{4.15}$$

где је $u_2(x,\tau)$ решење проблема са антисиметричним почетним вредностима. На основу инваријантности у односу на транслацију и рефлексију, једнакост (4.15) можемо изразити у зависности од $u_1$,

$$\begin{aligned} V(S,t) &= Ke^{\alpha x+\beta\tau}(u_1(x,\tau) - u_1(2x_0 - x,\tau)) \\ &= Ke^{\alpha x+\beta\tau}\left(\frac{C(S,t)}{K}e^{-(\alpha x+\beta\tau)} - \frac{C(\frac{B^2}{S},t)}{K}e^{-\left(\alpha\left(2\ln\frac{B}{K}-\ln\frac{S}{K}\right)+\beta\tau\right)}\right) \\ &= C(S,t) - \left(\frac{S}{B}\right)^{2\alpha}C\left(\frac{B^2}{S},t\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

### 4.1.2 Вероватносни приступ

Претходно смо до формуле за цену опција са баријером дошли решавањем Блек–Шолсове парцијалне диференцијалне једначине са одговарајућим почетним условима. Сада нам је идеја да применимо вероватносни приступ у одређивању цене опција. Присетимо се да опције са баријером зависне од трајекторије кретања цена акција,

$$\{S_t : 0 \leq t \leq T\}.$$

С тим у вези, и њихова вредност зависи од читавог процеса кретања, супротно од стандардних опција чија вредност зависи од цене акција у тренутку истека, тј. облика је $\Phi(S_T)$.

У наредној табели приказане су вредности опција са баријером.

| Тип | Понашање | Добит |
|---|---|---|
| Кол опција | доња излазна | $(S_T - K)^+ \mathbb{I}\{\min\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B\}$ |
| | доња улазна | $(S_T - K)^+ \mathbb{I}\{\min\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B\}$ |
| | горња излазна | $(S_T - K)^+ \mathbb{I}\{\max\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B\}$ |
| | горња улазна | $(S_T - K)^+ \mathbb{I}\{\max\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B\}$ |
| Пут опција | доња излазна | $(K - S_T)^+ \mathbb{I}\{\min\limits_{0\leq t\leq T} S_t > B\}$ |
| | доња улазна | $(K - S_T)^+ \mathbb{I}\{\min\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B\}$ |
| | горња излазна | $(K - S_T)^+ \mathbb{I}\{\max\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B\}$ |
| | горња улазна | $(K - S_T)^+ \mathbb{I}\{\max\limits_{0\leq t\leq T} S_t < B\}$ |

Улазно–излазни паритет опција са баријером одговара пут–кол паритету стандардних опција. Овај паритет представља везу између опција са баријером и стандардних опција одговарајућег типа. Важе следеће једнакости:

$$c_{\text{горња-улазна}} + c_{\text{горња-излазна}} = c,$$
$$c_{\text{доња-улазна}} + c_{\text{доња-излазна}} = c,$$
$$p_{\text{горња-улазна}} + p_{\text{горња-излазна}} = p,$$
$$p_{\text{доња-улазна}} + p_{\text{доња-излазна}} = p.$$

Како у изразима за вредност опција са баријером, фигуришу максимум,

$$M_0^T = \max_{0 \leq t \leq T} S_t,$$

односно минимум геометријског Брауновог кретања на интервалу $[0, T]$,

$$m_0^T = \min_{0 \leq t \leq T} S_t,$$

биће нам од интереса да одредимо расподелу ових случајних величина, као и заједничке расподеле.

**Напомена 6.** *У наставку текста ћемо се фокусирати на случај максимума и одредити цену горње излазне опције са баријером.*

Најпре, како за стандардно Брауново кретање важи $W_0 = 0$,

$$X_0^T = \max_{0 \leq t \leq T} W_t \geq 0$$

са вероватноћом 1. За позитивну константу $a > W_0 = 0$, означимо са

$$\tau_a = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : W_t = a\}$$

тренутак првог достизања нивоа $a$. На основу просторне симетрије Брауновог кретања, приметимо да важи једнакост

$$P(W_T > a | \tau_a < T) = P(W_T < a | \tau_a < T) = \frac{1}{2}.$$

док на основу следеће везе

$$\{X_0^T \geq a\} = \{\tau_a < T\}, \tag{4.17}$$

имамо да важи

$$\begin{aligned}
P(\tau_a < T) &= P(\tau_a < T, W_T > a) + (\tau_a < T, W_T < a) \\
&= 2P(\tau_a < T, W_T > a) \\
&= 2P(X_o^T \geq a, W_T > a) \\
&= 2P(W_T > a) \\
&= P(W_T > a) + P(W_T < -a) \\
&= P(|W_T| > a).
\end{aligned}$$

У претходном низу једнакости коришћена је чињеница:

$$\{W_T > a\} \subset \{X_0^T \geq a, W_T > a\} \subset \{W_T > a\}.$$

Као последица једнакости

$$P(\tau_a < T) = 2P(W_T > a),$$

максимум Брауновог кретања $W_T$ има исту расподелу као апсолутна вредност $|W_T|$. Са тим у вези, ако прикажемо максимум геометријског Брауновог кретања на следећи начин,

$$M_0^t = \max_{t\in[0,T]} S_t = S_0 \max_{t\in[0,T]} e^{\sigma W_t} = S_0 e^{X_o^T} = h(X_o^T),$$

можемо уз познавање поменуте расподеле одредити цену опција са баријером. Међутим, то не би било довољно за практичну примену услед појаве услова $r = \frac{\sigma^2}{2}$. Да бисмо избегли овај услов, разматраћемо максимум Брауновог кретања са дрифтом и одредити заједничку густину случајних величина $X_0^T$ и $W_T$. Поново, на основу принципа рефлексије Брауновог кретања, имамо да за $b \in [0, a]$ важи

$$P(W_T < b|\tau_a < T) = P(W_T > a + (a-b)|\tau_a < T), \text{ тј}$$

$$P(W_T < b, \tau_a < T) = P(W_T > 2a - b, \tau_a < T), \text{ тј на основу (4.17)}$$

$$P(W_T < b, X_0^T \geq a) = P(W_T > 2a - b, X_0^T \geq a).$$

Како је $2a - b \geq a$, имамо да важи

$$P(W_T < b, X_0^T \geq a) = P(W_T > 2a - b, X_0^T \geq a) = P(W_T > 2a - b). \tag{4.18}$$

где смо користили следећи низ подскупова

$$\begin{aligned}\{(W_T \geq 2a - b\} &\subset \{X_0^T \geq 2a - b, W_T > 2a - b\}\\ &\subset \{X_0^T \geq a, W_T > 2a - b\} \subset \{(W_T > 2a - b\}\end{aligned}$$

да покажемо да је

$$\{W_T > 2a - b, X_0^T \geq a\} = \{W_T > 2a - b\}.$$

Последично, на основу (4.18) имамо да важи за $0 \leq b < a$,

$$P(W_T < b, X_0^T \geq a) = P(W_T > 2a - b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{2a-b}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx.$$

Истовремено, представљајући заједничку функцију расподеле преко заједничке густине, добијамо

$$\int_a^{\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x,y) dy dx = \int_{2a-b}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2T}} dx. \tag{4.19}$$

Двоструким диференцирањем леве стране једнакости (4.19), најпре по промењљивој $b$,

$$\frac{\partial}{\partial b}\Big(\int_a^{\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x,y) dy dx\Big) = \int_a^{\infty} f(x,b) dx, \tag{4.20}$$

а потом и по промењивој $a$ (тј диференцирањем (4.20) по $a$), добијамо

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^\infty f(x,b)dx = -f(a,b). \tag{4.21}$$

За диференцирање десне стране једнакости (4.19), уводимо нове промењиве, ради једноставније нотације,

$$\theta = 2a-b, \lambda = -\frac{1}{2T}(2a-b)^2$$

Тада се десна страна једнакости (4.19) може писати као

$$L = \int_\theta^\infty e^{-\frac{x^2}{2T}}dx,$$

па је одатле

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial a} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{\theta^2}{2T}}\cdot 2 = -\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2a-b)^2}{2T}}.$$

Означимо вредност последњег парцијалног извода са

$$N = -\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}e^{\lambda}.$$

Тада је

$$\frac{\partial N}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial b} = -\frac{2}{\sqrt{2\pi T}}e^{\lambda}\cdot\frac{(2a-b)}{T} = -\frac{2(2a-b)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2a-b)^2}{2T}}. \tag{4.22}$$

Изједначавањем извода леве и десне стране једнакости (4.19), тј. изједначавањем (4.21) и (4.22), добијамо да израз за заједничку густину

$$f(a,b) = \frac{2(2a-b)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(2a-b)^2}{2T}}. \tag{4.23}$$

Уколико означимо са $a \vee b := \max(a,b)$, (4.23) се може представити као

$$f(a,b) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi T}}\frac{(2a-b)}{T}e^{-\frac{(2a-b)^2}{2T}}, & a > b \vee 0 \\ 0, & a < b \vee 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Користећи теорему Гирсанова, можемо одредити густину случајне величине која представља максимум Брауновог кретања са дрифтом $\mu$,

$$\hat{X}_0^T := \max_{t\in[0,T]}\tilde{W}_t = \max_{t\in[0,T]}(W_t+\mu t). \tag{4.25}$$

Приметимо да исти аргументи као код стандардног Брауновог кретања не могу бити директно примењени, зато што за $\mu \neq 0$ не важи претпоставка о симетричности. Са друге стране, $\tilde{W}_t$ је стандардно Брауново кретање у вероватносној мери $\tilde{P}$ дефинисаној на следећи начин:

$$\frac{d\tilde{P}}{dP} = e^{-\mu W_T - \frac{\mu^2 T}{2}}. \tag{4.26}$$

Отуда је заједничка густина случајних величина $\hat{X}_0^T$ и $\tilde{W}_t$ у вероватносној мери $\tilde{P}$ дата изразом (4.24).

На основу (4.26) можемо одредити заједничку густину ових величина у вероватносној мери $P$. За $0 \leq b \leq a$

$$\begin{aligned}
P(\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b) &= EI\{\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b\} \\
&= \int_\Omega I\{\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b\} dP \\
&= \int_\Omega \frac{dP}{d\tilde{P}} I\{\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b\} d\tilde{P} \\
&= \tilde{E}\left[\frac{dP}{d\tilde{P}} I\{\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b\}\right] \\
&= \tilde{E}\left[e^{\mu W_T + \frac{\mu^2 T}{2}} I\{\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b\}\right] \\
&= \tilde{E}\left[e^{\mu \tilde{W}_T - \frac{\mu^2 T}{2}} I\{\hat{X}_0^T \leq a, \tilde{W}_t \leq b\}\right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int_0^a \int_{-\infty}^b I_{(-\infty, x]}(y) e^{\mu y - \frac{\mu^2 T}{2}} \frac{(2x-y)}{T} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2T}},
\end{aligned}$$

тражена густина има следећи облик

$$f(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{T}\sqrt{\dfrac{2}{\pi T}}(2a-b)e^{\mu b - \frac{(2a-b)^2}{2T} - \frac{\mu^2 T}{2}}, & a > b \vee 0 \\ 0, & a < b \vee 0. \end{cases}$$

У наставку ће нам бити од интереса да одредимо расподелу максимума Брауновог кретања стандардним поступком, интеграцијом заједничке густине по другој променљивој.

**Теорема 4.1.** *Функција расподеле случајне величине* $\hat{X}_0^T$

$$\hat{X}_0^T = \max_{t \in [0,T]} \tilde{W}_t = \max_{t \in [0,T]} (W_t + \mu t),$$

*дата је следећим изразом*

$$P(\hat{X}_0^T \leq a) = \Phi\left(\frac{a - \mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu a}\Phi\left(-\frac{a - \mu T}{\sqrt{T}}\right), \quad a \geq 0. \tag{4.27}$$

*Доказ.* Израз у експоненту трансформишемо на следећи начин:

$$\mu y - \frac{(2a-y)^2}{2T} = -2a\mu - \frac{1}{2T}(y - (\mu T + 2a)^2).$$

Приметимо да је $y \vee 0 \leq x \leq a$ еквивалентно са $(y \leq x, 0 \leq x \leq a)$. Стандардном сменом промењивих, $\frac{(2x-y)^2}{2T} = t$ налазимо да је

$$
\begin{aligned}
P(\hat{X}_0^T \leq a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int_0^a \int_{-\infty}^{\infty} I_{(-\infty,x]}(y) e^{\mu y - \frac{\mu^2 T}{2}} \frac{(2x-y)}{T} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2T}} dy dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi T}} e^{-\frac{\mu^2 T}{2}} \int_{-\infty}^{a} e^{\mu y} \int_{y \vee 0}^{a} \frac{(2x-y)}{T} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2T}} dx dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{\mu^2 T}{2}} \int_{-\infty}^{a} (e^{\mu y - (2(y\vee 0)-y)^2/(2T)} - e^{\mu y - (2a-y)^2/(2T)}) dy \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int_{-\infty}^{a} (e^{\mu y - y^2/(2T) - \mu^2 T/2} - e^{\mu y - 2a^2/T + 2ay/T - y^2/(2T) - \mu^2 T/2}) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{a} e^{-(y-\mu t)^2/(2T)} - e^{-(y-(\mu t + 2a))^2/(2T) + 2a\mu} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{a} e^{-(y-\mu t)^2/(2T)} dy - e^{2a\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{a} e^{-(y-(\mu t+2a))^2/(2T)} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{a-\mu t} e^{-y^2/(2T)} dy - e^{2a\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_{-\infty}^{-a-\mu T} e^{-y^2/(2T)} dy \\
&= \Phi\left(\frac{a-\mu T}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu a} \Phi\left(-\frac{a-\mu T}{\sqrt{T}}\right), \quad a \geq 0. \qquad (4.28)
\end{aligned}
$$

Диференцирањем (4.28) по промењивој $a$, добијамо одговарајући израз за густину

$$
\frac{d}{da} P(\hat{X}_0^T \leq a) = \Phi'\left(\frac{a-\mu T}{\sqrt{T}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right) - 2\mu e^{2\mu a} \Phi\left(-\frac{a-\mu T}{\sqrt{T}}\right).
$$

□

**Последица 4.1.1.** *Функција расподеле максимума*

$$
M_0^T = \max_{t\in[0,T]} S_t = \max_{t\in[0,T]} S_0 e^{\sigma W_t + (r-\sigma^2/2)t}
$$

*геометријског Брауновог кретања на интервалу* $[0, T]$ *дата је следећим изразом*

$$
\begin{aligned}
P(M_0^T \leq x) = &\Phi\left(\frac{-(r+\sigma^2/2)T + \ln(x/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&- \left(\frac{S_0}{x}\right)^{1-2r/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-(r-\sigma^2/2)T + \ln(x/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad x \geq S_0.
\end{aligned}
$$

*Доказ.* Узимајући $\mu = r/\sigma - \sigma/2$, налазимо да је

$$
\begin{aligned}
P(M_0^T \leq x) &= \Phi\left(\frac{-\mu T + \sigma^{-1}\ln(x/S_0)}{\sqrt{T}}\right) - e^{2\mu\sigma^{-1}\ln(x/S_0)} \Phi\left(\frac{-\mu T - \sigma^{-1}\ln(x/S_0)}{\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-\mu T + \sigma^{-1}\ln(x/S_0)}{\sqrt{T}}\right) - \left(\frac{x}{S_0}\right)^{2\mu/\sigma} \Phi\left(\frac{-\mu T - \sigma^{-1}\ln(x/S_0)}{\sqrt{T}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{-(r+\sigma^2/2)T + \ln(x/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{S_0}{x}\right)^{1-2r/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-(r-\sigma^2/2)T + \ln(x/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad x \geq S_0.
\end{aligned}
$$

□

У наредном извођењу претпоставимо да процес кретања цена акција прати геометријско Брауново кретање, описано следећом једначином

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где је $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ стандардно Брауново кретање у мери неутралној од ризика. Користећи заједничку густину случајних величина $\hat{X}_0^T$ и $\tilde{W}_t$ можемо одредити цену произвољне егзотичне опције, чија је вредност дата са $\Phi(\hat{X}_0^T, \tilde{W}_t)$ на основу формуле:

$$e^{-r(T-t)}E^*[\Phi(\hat{X}_0^T, \tilde{W}_t)|\mathcal{F}_t].$$

Када је вредност опције облика $C = \Phi(S_T, M_0^T)$, где је

$$S_T = S_0 e^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2 + rT} = S_0 e^{\sigma \tilde{W}_T},$$
$$\mu = -\frac{\sigma}{2} + \frac{r}{\sigma}, \quad \tilde{W}_T = W_T + \mu T,$$

вредност опције можемо рачунати као

$$C = \Phi(S_T, M_0^T) = \Phi(S_0 e^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2 + rT}, M_0^T) = \Phi(S_0 e^{\sigma \tilde{W}_T}, S_0 e^{\sigma \hat{X}_0^T}),$$

одакле је

$$\begin{aligned}
e^{-rT}E^*[C] &= e^{-rT}E^*[\Phi(S_0 e^{\sigma \tilde{W}_T}, S_0 e^{\sigma \hat{X}_0^T})] \\
&= e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y\vee 0}^{\infty} \Phi(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x} dP(\hat{X}_0^T \le x, \tilde{W}_T \le y) \\
&= \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{\pi T}} e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{y\vee 0}^{\infty} \Phi(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x}(2x-y)e^{\mu y - \frac{(2x-y)^2}{2T} - \frac{\mu^2 T}{2}} dxdy \\
&= \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{\pi T}} e^{-rT}\int_{0}^{\infty}\int_{y}^{\infty} \Phi(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x}(2x-y)e^{\mu y - \frac{(2x-y)^2}{2T} - \frac{\mu^2 T}{2}} dxdy + \\
&\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{\pi T}} e^{-rT}\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{\infty} \Phi(S_0 e^{\sigma y}, S_0 e^{\sigma x}(2x-y)e^{\mu y - \frac{(2x-y)^2}{2T} - \frac{\mu^2 T}{2}} dxdy.
\end{aligned}$$

Детаљно ћемо размотрити цену горње излазне кол опције. За функцију $\Phi$, дефинисану на следећи начин:

$$\Phi(x, y) = (x - K)^+ I\{y \le B\}$$

користећи израз за густину, рачунамо вредност математичког очекивања, у случају да је $B \ge K, \quad B \ge S_0$ (иначе опција нема вредност),

$$\begin{aligned}
&E^*[C] = E^*[(S_T - K)^+ I\{M_0^T \le B\}] \\
&= E^*[(S_0 e^{\sigma \tilde{W}_T} - K) I\{S_0 e^{\sigma \tilde{W}_T} \ge K\} I\{S_0 e^{\sigma \hat{X}_0^T} \le B\}] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K) I\{S_0 e^{\sigma y} \ge K\} I\{S_0 e^{\sigma x} \le B\} dP(\hat{X}_0^T \le x, \tilde{W}_T \le y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (S_0 e^{\sigma y} - K) I\{y \ge \sigma^{-1}\ln(K/S_0)\} I\{x \le \sigma^{-1}\ln(B/S_0)\} f_{\hat{X}_0^T, \tilde{W}_T}(x, y) dxdy \\
&= \frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int_{\sigma^{-1}\ln(K/S_0)}^{\sigma^{-1}\ln(B/S_0)} \int_{y\vee 0}^{\sigma^{-1}\ln(B/S_0)} (S_0 e^{\sigma y} - K)(2x-y) e^{\mu y - \frac{(2x-y)^2}{2T} - \frac{\mu^2 T}{2}} dxdy \\
&= \frac{1}{T} e^{-\mu^2 T/2} \sqrt{\frac{2}{\pi T}} \int_{\sigma^{-1}\ln(K/S_0)}^{\sigma^{-1}\ln(B/S_0)} (S_0 e^{\sigma y} - K) e^{\mu y - y^2/2T} \int_{y\vee 0}^{\sigma^{-1}\ln(B/S_0)} (2x-y) e^{2x(y-x)/T} dxdy.
\end{aligned}$$

Ако означимо са $a = y \vee 0$, $b = \sigma^{-1}\ln(B/S_0)$, видимо да важи

$$\begin{aligned}
\int_a^b (2x-y)e^{2x(y-x)/T}dx &= -\frac{T}{2}e^{2x(y-x)/T}|_{x=a}^{x=b} \\
&= \frac{T}{2}(e^{2a(y-a)/T} - e^{2b(y-b)/T}) \\
&= \frac{T}{2}(e^{2(y\vee 0)(y-y\vee 0)/T} - e^{2b(y-b)/T}) \\
&= \frac{T}{2}(1 - e^{2b(y-b)/T}).
\end{aligned}$$

Затим, ако означимо са $c = \sigma^{-1}\ln(K/S_0)$, добијамо

$$\begin{aligned}
E^*[C] &= e^{-\mu^2T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b (S_0e^{\sigma y} - K)e^{\mu y - y^2/(2T)}(1 - e^{2b(y-b)/T})dy \\
&= S_0e^{-\mu^2T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{y(\sigma+\mu)-y^2/(2T)}(1 - e^{2b(y-b)/T})dy \\
&- Ke^{-\mu^2T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{\mu y - y^2/(2T)}(1 - e^{2b(y-b)/T})dy \\
&= S_0e^{-\mu^2T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{y(\sigma+\mu)-y^2/(2T)}dy \\
&- S_0e^{-\mu^2T/2-2b^2/T}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{y(\sigma+\mu+2b/T)-y^2/(2T)}dy \\
&- Ke^{-\mu^2T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{\mu y - y^2/(2T)}dy \\
&- Ke^{-\mu^2T/2-2b^2/T}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{y(\mu+2b/T)-y^2/(2T)}dy.
\end{aligned}$$

На основу једнакости

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\int_c^b e^{\gamma y - y^2/(2T)}dy = e^{\gamma^2T/2}\left(\Phi\left(\frac{-c+\gamma T}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+\gamma T}{\sqrt{T}}\right)\right) \tag{4.29}$$

налазимо да је

$$\begin{aligned}
e^{-rT}E^*[C] &= e^{-rT}E^*[(S_T-K)^+I\{M_0^T \le B\}] \\
&= S_0e^{-T(r+\mu^2/2)+(\sigma+\mu)^2T/2}\left(\Phi\left(\frac{-c+(\sigma+\mu)T}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+(\sigma+\mu)T}{\sqrt{T}}\right)\right) \\
&- S_0e^{-T(r+\mu^2/2)-2b^2/T+(\sigma+\mu+2b/T)^2T/2} \\
&\times\left(\Phi\left(\frac{-c+(\sigma+\mu+2b/T)T}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+(\sigma+\mu+2b/T)T}{\sqrt{T}}\right)\right) \\
&- Ke^{-rT}\left(\Phi\left(\frac{-c+\mu T}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+\mu T}{\sqrt{T}}\right)\right) \\
&+ Ke^{-T(r+\mu^2/2)-2b^2/T+(\mu+2b/T)^2T/2} \\
&\times\left(\Phi\left(\frac{-c+(\mu+2b/T)T}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{-b+(\mu+2b/T)T}{\sqrt{T}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Даљим сређивањем претходног израза добијамо

$$\begin{aligned}
c_{\text{горња-излазна}}(S,T) = S_0\bigg(&\Phi\Big(\delta_+^T\Big(\frac{S_0}{K}\Big)\Big) - \Phi\Big(\delta_+^T\Big(\frac{S_0}{B}\Big)\Big)\bigg) \\
&- S_0\Big(\frac{B}{S_0}\Big)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\bigg(\Phi\Big(\delta_+^T\Big(\frac{B^2}{KS_0}\Big)\Big) - \Phi\Big(\delta_+^T\Big(\frac{B}{S_0}\Big)\Big)\bigg) \\
&- Ke^{-rT}\bigg(\Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{S_0}{K}\Big)\Big) - \Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{S_0}{B}\Big)\Big)\bigg) \\
&+ Ke^{-rT}\Big(\frac{S_0}{B}\Big)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\bigg(\Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{B^2}{KS_0}\Big)\Big) - \Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{B}{S_0}\Big)\Big)\bigg),
\end{aligned}$$

где је $\delta_\pm^\tau(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\big(\ln s + \big(r + \frac{\sigma^2}{2}\big)\tau\big)$.

На основу улазно–излазног паритета, вредност горње улазне кол опције износи

$$\begin{aligned}
c_{\text{горња-улазна}}(S,T) = S_0\Phi&\Big(\delta_+^T\Big(\frac{S_0}{B}\Big) - Ke^{-rT}\Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{S_0}{B}\Big)\Big) \\
&+ S_0\Big(\frac{B}{S_0}\Big)^{1+\frac{2r}{\sigma^2}}\bigg(\Phi\Big(\delta_+^T\Big(\frac{B^2}{KS_0}\Big)\Big) - \Phi\Big(\delta_+^T\Big(\frac{B}{S_0}\Big)\Big)\bigg) \\
&- Ke^{-rT}\Big(\frac{S_0}{B}\Big)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}}\bigg(\Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{B^2}{KS_0}\Big)\Big) - \Phi\Big(\delta_-^T\Big(\frac{B}{S_0}\Big)\Big)\bigg).
\end{aligned}$$

Слично, користећи формулу (4.16), имамо да је

$$c_{\text{доња-излазна}}(S_0,T) = c(S_0,T) - \Big(\frac{S_0}{B}\Big)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} C\Big(\frac{B^2}{S_0},T\Big),$$

па је на основу истог паритета,

$$c_{\text{доња-улазна}}(S_0,T) = \Big(\frac{S_0}{B}\Big)^{1-\frac{2r}{\sigma^2}} C\Big(\frac{B^2}{S_0},T\Big).$$

## 4.2 Биномни модел

Ако са $S$ означимо цену акције у почетном тренутку $t = 0$ и фиксирамо дужину основног периода, према биномном моделу цена акције након једног периода може узети две вредности: $uS$, уколико порасте за фактор $u > 1$, или $dS$, уколико опадне за фактор $d < 1$. Ако претпоставимо да се претходно наведено дешава са вероватноћама $p$, односно $1 - p$, цена акције након једног периода је Бернулијева случајна величина са параметром $p$.

Овакав модел важи и за више корака, и са повећањем броја корака, структурно је све сложенији. Притом, остаје важећа претпоставка да је вероватноћа кретања "навише" $p$, док је вероватноћа кретања "наниже" $1 - p$.
Биномни модел је одређен следећим параметрима: јединицом времена у којој се дешавају промене цена акција, факторима раста и опадања цена $u$ и $d$ и вероватноћом $p$. Иако на први поглед изгледа веома једноставан, као што је речено, повећањем броја корака и смањењем дужине основног периода, цена акције може узети многе вредности, прецизније, након $n$ периода, може узети $n + 1$ вредност. Неопходно је приметити да мултипликативност модела обезбеђује ненегативност цене.

Према биномном моделу, цену стандардне европске опције можемо одредити на следећи начин: најпре, претпоставимо да након временског интервала дужине $T$, цена акције може да порасте за фактор $u > 1$ или да опадне за фактор $d < 1$. У првом случају означимо добит опције са $f_u$, а у другом случају са $f_v$. Затим, претпоставимо да смо формирали портфолио који садржи:

1. $\Delta$ купљених акција чија је тренутна цена $S_0$
2. једну опцију на те акције које смо продали.

Тражимо вредност $\Delta$ за коју ће овај портфолио бити безризичан, што значи да ће вредност портфолија остати непромењена у тренутку $T$, и ако вредност акција падне, и ако порасте. Ако дође до пораста цена акција, вредност портфолија у тренутку $T$ ће бити $S_0 u\Delta - f_u$, ако дође до пада, портфолио ће вредети $S_0 d\Delta - f_d$. Да би вредност портфолија била независна од промене цене акције, изједначавамо његове вредности у тренутку $T$.

$$S_0 u\Delta - f_u = S_0 d\Delta - f_d.$$

Тражена вредност $\Delta$ ће бити

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d}.$$

За овако одабрано $\Delta$ портфолио је безризичан и његова добит при безризичној каматној стопи $r$ треба да буде иста као добит у случају да се почетни улог уложио у банку. Како смо у почетном тренутку за овај портфолио издвојили $S_0\Delta - f$, треба да важи

$$S_0\Delta - f = (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}.$$

Одавде следи да је

$$f = S_0\Delta - (S_0 u\Delta - f_u)e^{-rT}.$$

Заменом израза за $\Delta$, добијамо да је

$$f = e^{-rT}(pf_u + (1-p)f_d), \tag{4.30}$$

где је $p = \frac{e^{-rT}-d}{u-d}$. Овом формулом је дата цена опције према биномном моделу. Вероватноћа $p$ која фигурише у изразу за цену опције може да се интерпретира као вероватноћа раста цена акција у свету неутралном од ризика. Тада је очекивана добит једнака добити од новца уложеног у банку по безризичној каматној стопи. Вредност опције је садашња вредност очекиване будуће добити , при чему се дисконтовање врши важећом каматном стопом. Уколико на тржишту не постоји могућност арбитраже (прављења сигурног профита без ризика), $p \in (0,1)$. Уколико наведени услов не би био задовољен, арбитража би била могућа.

Уопштавајући једнакост (4.30), вредност опције у тренутку $t$, у ознаци $V_t$ се може одредити као

$$V_t = e^{-r\delta t}(pV^u_{t+\delta t} + (1-p)V^d_{t+\delta t}), \tag{4.31}$$

где је са $V^u_{t+\delta t}$ означена вредност опције у тренутку $t + \delta t$, ако је дошло до пораста цене акција, док се ознака $V^d_{t+\delta t}$ односи на вредност опције, ако је дошло до пада цена акција.

**Напомена 7.** *Вредност европске опције у тренутку $t = T$ у зависности од њеног типа дата је једнакостима (3.1), односно (3.2). Сам алгоритам одређивања цена стандардних опција заснива се на подели интервала $[0, T]$ на одређен бој подинтервала. Одређивање вредности опције на крају сваког од њих се врши применом формуле (4.31) при претпоставци о неутралности од ризика.*

Надаље, од интереса нам је да изведемо вредности $u, d, p$ који се, респективно, односе на факторе раста, опадања цена акција, као и вероватноћу раста истих. У окружењу неутралном од ризика, очекивана вредност цене акције $S$ на крају временског интервала дужине $\delta t$ би била $Se^{r\delta t}$. Одавде имамо да важи:

$$Se^{r\delta t} = puS + (1-p)dS,$$

тј. након дељења са $S$

$$e^{r\delta t} = pu + (1-p)d. \tag{4.32}$$

Слично као раније, из израза за очекивану вредност (4.32) добијамо вредност вероватноће $p$,

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}. \tag{4.33}$$

Дисперзија цене акције дата је са

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2 \delta t. \tag{4.34}$$

Ако уврстимо (4.32), добијамо

$$e^{r\delta t}(u + d) - ud - e^{2r\delta t} = \sigma^2 \delta t.$$

Поред наведених, поставићемо још један услов: треба да важи $u = \frac{1}{d}$. Овај услов минимизује број чворова.

Из израза (4.34) имамо да је

$$\begin{aligned}\sigma^2 \delta t &= pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 \\ &= pu^2 + (1-p)d^2 - p^2u^2 - (1-p)^2d^2 - 2p(1-p)ud \\ &= u^2(p - p^2) + [(1-p) - (1-p)^2]d^2 - 2p(1-p)ud \\ &= u^2p(1-p) + (1-p)[1 - 1 + p]d^2 - 2p(1-p)ud \\ &= p(1-p)(u^2 - 2ud + d^2).\end{aligned}$$

На основу израза (4.33) је

$$p(1-p) = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} - \frac{e^{2r\delta t} - 2de^{r\delta t} + d^2}{(u-d)^2} = \frac{e^{r\delta t}(u + d) - ud - e^{2r\delta t}}{(u-d)^2},$$

па је одатле

$$\sigma^2 \delta t = e^{r\delta t}(u + d) - ud - e^{2r\delta t}.$$

Уз додатан услов $d = \frac{1}{u}$,

$$\sigma^2 \delta t = e^{r\delta t}\left(u + \frac{1}{u}\right) - u\frac{1}{u} - e^{2r\delta t},$$

па важи

$$\left(u+\frac{1}{u}\right)=\frac{\sigma^2\delta t+1+e^{2r\delta t}}{e^{r\delta t}}=e^{-r\delta t}\sigma^2\delta t+e^{-r\delta t}+e^{r\delta t}.$$

На основу Тејлоровог развоја, $r\sigma^2\delta t\to 0$, $e^{r\delta t}\sim 1+r\delta t$, па важи

$$\left(u+\frac{1}{u}\right)=\sigma^2\delta t+2.$$

Решавањем квадратне једначине по $u$, $u^2-(\sigma^2\delta t+2)u+1=0$ на стандардан начин добијамо $u\sim\frac{\sigma^2\delta t}{2}+1\pm\sigma\sqrt{\delta t}$. Изостављањем квадратног члана, $u\sim 1\pm\sigma\sqrt{\delta t}$. Како је $u>1$, $u=e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$, па знамо и вредност $d=e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$.

Ако са $\delta$ означимо приraштај времена на чијем крају долази до промене цена акција, можемо показати да за овако одабране параметре биномног модела, смањивањем $\delta$, биномни модел промена цена акција конвергира ка моделу геометријског Брауновог кретања, што значи да геометријско Брауново кретање може бити апроксимирано дискретним процесом.

У сврхе доказа, најпре, за произвољно изабрани временски тренутак $t$ поделимо интервал $[0,t]$ на $n$ интервала дужине $\delta t$. Посматрамо, низ независних, једнакорасподељених случајних величина $\{Y_k,k=1,\dots n\}$, за које је

$$P(Y_k=1)=p,\quad P(Y_k=1)=q,\quad k=1,\dots n.$$

Ако са $U$ означимо број корака навише, са $D$ број корака наниже, тада важи

$$\begin{aligned}M_n&=U+D,\\ n&=U-D\\ \Rightarrow U&=\frac{n+M_n}{2},\quad D=\frac{n-M_n}{2},\end{aligned}$$

где је са $M_n$ означена позиција након $n$ пређених корака. Цена акције у тренутку $t$ према биномном моделу поприма следећи облик:

$$\begin{aligned}S_t&=S_0u^{\frac{n+M_n}{2}}d^{\frac{n-M_n}{2}}=S_0e^{\frac{\sigma\sqrt{\delta t}}{2}(n+M_n)}e^{-\frac{\sigma\sqrt{\delta t}}{2}(n-M_n)}\\ &=S_0e^{\sigma\sqrt{\delta t}M_n}.\end{aligned}$$

Идеја је да покажемо конвергенцију у расподели низа $\sigma\sqrt{\delta t}M_n=\sigma\sqrt{\delta t}M_{\frac{t}{\delta t}}$ ка нормалној $\mathcal{N}((r-\frac{1}{2}\sigma^2)t,\sigma^2 t)$.

**Лема 4.2.1.** *Нека је $\Phi_n(u)$ момент генераторна функција $\sigma\sqrt{\delta t}M_n$. Тада је*

$$\Phi_n(u)=\left[e^{u\sigma\sqrt{\delta t}}\left(\frac{e^{r\delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\right)+e^{-u\sigma\sqrt{\delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\delta t}-e^{r\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\right)\right]^n$$

*Доказ.*

$$\begin{aligned}\Phi_n(u)&=E[e^{\sigma\sqrt{\delta t}M_n}]=E\left[\prod_{k=1}^n e^{\sigma\sqrt{\delta t}Y_k}\right]=\prod_{k=1}^n E[e^{\sigma\sqrt{\delta t}Y_k}]=\prod_{k=1}^n(e^{\sigma\sqrt{\delta t}}p+e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}q)\\ &=(e^{\sigma\sqrt{\delta t}}p+e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}q)^n\\ &=\left[e^{u\sigma\sqrt{\delta t}}\left(\frac{e^{r\delta t}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\right)+e^{-u\sigma\sqrt{\delta t}}\left(\frac{e^{\sigma\delta t}-e^{r\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}}-e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\right)\right]^n,\end{aligned}$$

на основу независности и једнакорасподељености случајних величина $\{Y_k,k=1,\dots,n\}$. $\square$

У интересу нам је да израчунамо граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n(u) = \lim_{\frac{t}{\delta t}\to 0}\Phi_{\frac{t}{\delta t}}(u),$$

што ћемо учинити користећи логаритамску трансформацију $\ln\Phi_{\frac{t}{\delta t}}(u)$, чији је израз формулисан лемом

**Лема 4.2.2.**

$$\ln\Phi_{\frac{t}{\delta t}}(u) = \frac{t}{\delta t} ln\Big[\cosh\sigma u\sqrt{\delta t} + \frac{(e^{r\sqrt{\delta t}} - \cosh\sigma\sqrt{\delta t})\sinh\sigma u\sqrt{\delta t}}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}\Big].$$

*Доказ.* На основу леме 4.2.1

$$\Phi_n(u) = \Bigg[e^{u\sigma\sqrt{\delta t}}\bigg(\frac{e^{r\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\bigg) + e^{-u\sigma\sqrt{\delta t}}\bigg(\frac{e^{\sigma\delta t} - e^{r\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\bigg)\Bigg]^n,$$

одакле је

$$\begin{aligned}
\ln\Phi_{\frac{t}{\delta t}}(u) &= \frac{t}{\delta t} ln\Bigg[e^{u\sigma\sqrt{\delta t}}\bigg(\frac{e^{r\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\bigg) + e^{-u\sigma\sqrt{\delta t}}\bigg(\frac{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{r\delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}}\bigg)\Bigg] \\
&= \frac{t}{\delta t} ln\Bigg[2\frac{e^{u\sigma\sqrt{\delta t}}(e^{r\delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}) + e^{-u\sigma\sqrt{\delta t}}(e^{\sigma\sqrt{\delta t}} - e^{r\delta t})}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}\Bigg] \\
&= \frac{t}{\delta t} ln\Bigg[2\frac{(e^{r\delta t}(e^{\sigma u\sqrt{\delta t}} - e^{-\sigma u\sqrt{\delta t}}) - (e^{\sigma u\sqrt{\delta t} - \sigma\sqrt{\delta t}} - e^{-(\sigma u\sqrt{\delta t} - \sigma\sqrt{\delta t})}))}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}\Bigg] \\
&= \frac{t}{\delta t} ln\Bigg[\frac{e^{r\delta t}\sinh\sigma u\sqrt{\delta t} - \sinh\big(\sigma\sqrt{\delta t}(u-1)\big)}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}\Bigg].
\end{aligned}$$

На основу адиционе тригонометријске формуле

$$\sinh(A-B) = \sinh A\cosh B - \cosh A\sinh B,$$

имамо да је

$$\sinh(\sigma\sqrt{\delta t}(u-1)) = \sinh\big(\sigma\sqrt{\delta t}u\big)\cosh\sigma\sqrt{\delta t} - \cosh\big(\sigma\sqrt{\delta t}u\big)\sinh\sigma\sqrt{\delta t},$$

одакле је

$$\begin{aligned}
\ln\Phi_{\frac{t}{\delta t}}(u) &= \frac{t}{\delta t} ln\Bigg[\frac{e^{r\delta t}\sinh\sigma u\sqrt{\delta t} - \sinh\big(\sigma\sqrt{\delta t}u\big)\cosh\sigma\sqrt{\delta t} + \cosh\big(\sigma\sqrt{\delta t}u\big)\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}\Bigg] \\
&= \frac{t}{\delta t} ln\Bigg[\cosh\sigma u\sqrt{\delta t} + \frac{(e^{r\sqrt{\delta t}} - \cosh\sigma\sqrt{\delta t})\sinh\sigma u\sqrt{\delta t}}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}}\Bigg].
\end{aligned}$$

Користећи Тејлорове развоје одговарајућих функција у околини 0, добијамо да је

$$\begin{aligned}
&\cosh\sigma u\sqrt{\delta t} + \frac{(e^{r\sqrt{\delta t}} - \cosh\sigma\sqrt{\delta t})\sinh\sigma u\sqrt{\delta t}}{\sinh\sigma\sqrt{\delta t}} = 1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\delta t \\
&+ \frac{(1 + r\delta t - 1 - \frac{1}{2}\sigma^2\delta t)\sigma u\sqrt{\delta t}}{\sigma\sqrt{\delta t}} + O((\delta t)^2) = 1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\delta t + ru\delta t - \frac{1}{2}u\sigma^2\delta t + +O((\delta t)^2)
\end{aligned}$$

када $\delta t \to 0$. Одатле је

$$\begin{aligned}
\ln \Phi_{\frac{t}{\delta t}}(u) &= \frac{t}{\delta t} ln\left[\cosh \sigma u\sqrt{\delta t} + \frac{(e^{r\sqrt{\delta t}} - \cosh \sigma\sqrt{\delta t}) \sinh \sigma u\sqrt{\delta t}}{\sinh \sigma\sqrt{\delta t}}\right] \\
&= \frac{t}{\delta t} ln\left[1 + \frac{1}{2}u^2\sigma^2\delta t + ru\delta t - \frac{1}{2}u\sigma^2\delta t + +O((\delta t)^2)\right] \\
&= \frac{t}{\delta t}\left[\frac{1}{2}u^2\sigma^2\delta t + ru\delta t - \frac{1}{2}u\sigma^2\delta t + +O((\delta t)^2)\right] + O((\delta t)^2),
\end{aligned}$$

када $\delta t \to 0$, па је тражена гранична вредност

$$\lim_{\delta t \to 0} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)tu + \frac{t\sigma^2 u^2}{2},$$

што је управо момент генераторна функција нормално расподељене случајне величине $\mathcal{N}((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t)$. Тиме смо показали да је гранична расподела биномног модела кретања цена акција иста као расподела геометријког Брауновог кретања. □

### 4.2.1 Рекурзивна формула

Процедура одређивања цена опција са баријером у биномном моделу заснива се на истом принципу као код стандардних опција. Одвија се у два корака: најпре се одреде вредности опција у сваком чвору изнад или испод баријере. Код излазних опција, вредности испод баријере су једнаке повраћају новца, уколико он постоји, иначе су 0, док су код улазних опција баријерне вредности заправо вредности пут и кол опција у тренутку када цена акције досегне баријеру. Када се одреде вредности на баријери, одреде се и вредности у крајњим чворовима, а потом, индукцијом уназад, и у преосталим.

Разлика у односу на процедуру код стандардних опција јесте што су полазни чворови дуж баријере, а не нужно крајњи.

1. Одредимо цену акције у сваком од чворова:

   У тренутку $t = 0$: $S_{n_1} = S_0$,

   У тренутку $t = 1$: $S_{n_2} = uS_0$, $S_{n_3} = dS_0$,

   У тренутку $t = 2$ $S_{n_4} = u^2 S_0$, $S_{n_5} = udS_0$, $S_{n_6} = d^2 S_0$,

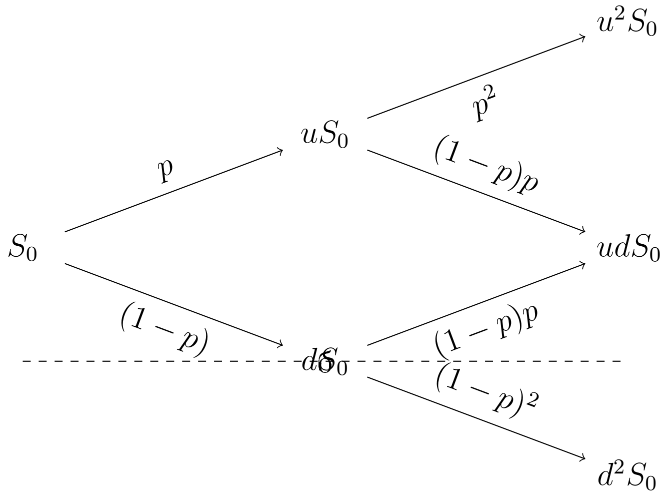
   где је $S_0$ иницијална вредност акције, $u, d$ фактори раста и опадања цена.

2. Одредимо вредности опције у чворовима који се налазе испод баријере или на самој баријери, тј. доделимо им вредност 0: $c_{n_3} = c_{n_6} = 0$

3. У зависности од врсте опције, одредимо вредности у крајњим чворовима $c_{n_4}, c_{n_5}$.

4. Индукцијом уназад, можемо одредити вредности опције у чворовима $n_1, n_2, n_3$ према следећим формулама:

$$\begin{aligned}
c_{n_2} &= e^{-r\delta t}(pc_{n_4} + (1-p)c_{n_5}), \\
c_{n_1} &= e^{-r\delta t}(pc_{n_2} + (1-p)c_{n_3}).
\end{aligned}$$




**Пример 1.** *Посматрамо доњу излазну кол опцију са следећим карактеристикама:* $S = 100, K = 100, \sigma = 0.3, r = 0.1, T = 0.2, N = 2, B = 95.$

*Најпре, рачунамо вредности* $u, d, p$ *према наведеним формулама:* $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$ , $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$, $p = \frac{e^{-r\delta t}-d}{u-d}$. *На основу датих вредности:*$u = 1.0995$, $d = 0.9095$, $p = 0.5292$.

*Вредности доње излазне опције у чворовима испод баријере су једнаке:* $c_{n3} = c_{n6} = 0$*, док су вредности у крајњим чворовима изнад баријере:* $c_{n4} = \max(120.89-100, 0) = 20.89$, $c_{n5} = \max(100 - 100, 0) = 0$.

*Индукцијом уназад, добијамо вредности опције у преосталим чворовима,*

$$c_{n_2} = e^{-0.1\cdot 0.1}(0.5292 \cdot 20.89 + 0.4708 \cdot 0) = 10.94,$$
$$c_{n_1} = e^{-0.1\cdot 0.1}(0.5292 \cdot 10.94 + 0.4708 \cdot 0) = 5.73.$$

*Аналитичко решење за доњу излазну кол опцију се добија применом формуле* (4.16). *У делу програмског кода имплементиран је алгоритам за одређивање цена опција са баријером према биномном моделу који се може наћи у [2]. Функција* $Bcall\_bm(S, K, sigma, r, T, N, B)$ *за задате вредности аргумената даје вредност опције* $c = 5.7351$ *коју смо ручно израчунали према биномном моделу са два корака. Повећањем броја корака може се повећати тачност.*

| *Резултати* | |
|---|---|
| *N* | *Цена опције* |
| *20* | *4.8036* |
| *50* | *4.6703* |
| *100* | *4.5166* |
| *150* | *4.5707* |
| *200* | *4.6718* |
| *400* | *4.5172* |
| *800* | *4.4428* |
| *1000* | *4.5895* |
| *2000* | *4.5338* |
| *4000* | *4.4860* |
| *Аналитичко решење 4.3975* | |

При одређивању цена опција према биномном моделу, присутна је грешка одређивања цена акција. Наиме, цене акција се одређују у дискретним временским тренуцима. Како се цене акција мењају непрекидно, долази до грешке проузроковане "одсуством непрекидности". Приметимо одсуство монотоности конвергенције ка стварној вредности, као и то да је конвергенција спорија како јој се приближавамо.

**Напомена 8.** *У имплементираном алгоритму за одређивање цене опција према биномном моделу са $N$ корака користи се $2N + 1$ различитих вредности опција (индуковано везом између фактора раста и опадања, $ud = 1$). Те вредности се чувају у вектору наведене дужине, чиме се избегава чување вредности у матрици великих димензија, што даје изузетну ефикасност алгоритма за велике вредности $N$.*

### 4.2.2 Комбинаторни приступ

Поред претходно наведеног алгоритма за одређивање цене опције према биномном моделу, у наставку ћемо покушати да приступимо проблему са комбинаторне тачке гледишта. Наиме, од интереса ће нам бити број путања између два чвора тзв. биномног стабла као и њихове вероватноће реализација. Уводимо потребну нотацију:

- $(k, i)$ позиција чвора $(k, i)$ у биномном стаблу,
- број корака од чвора $(0, 0)$ до чвора $(k, i)$,
- број корака до доспећа опције (од тренутка $t = 0$ до тренутка $t = T$),
- $i$ висина чвора $(k, i)$ у биномном стаблу,
- $N(k, i)$ укупан број путања од чвора $(0, 0)$ до чвора $(k, i)$.

При разматрању броја путања између два чвора, не узимамо у обзир изглед саме путање, већ једнакост почетног крајњег чвора. С тим у вези, путања ће зависити од броја корака навише, односно наниже при кретању кроз биномно стабло. Најпре, одредимо број путања од чвора $(0, 0)$ до чвора $(k, i)$, тј. након $k$ корака налазимо се $i$ корака више него на почетку. Одавде видимо да бар $i$ корака мора бити навише. Како је разлика у висини чворова тачно $i$, преосталих $k - i$ корака бирамо тако да има подједнако корака навише и наниже. На основу тога, број тражених путања је

$$\begin{aligned} N(k,i) &= \binom{\text{укупан број корака}}{\text{број корака навише}} = \binom{k}{i + \frac{1}{2}(k-i)} = \binom{k}{\frac{1}{2}(k+i)} \\ &= \binom{\text{укупан број корака}}{\text{број корака наниже}} = \binom{k}{\frac{1}{2}(k-i)}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Ако означимо $i = 2j - k$, $j$ ће представљати број корака навише, што ћемо користити у циљу поједностављења нотације, записујући (4.35) у следећем облику

$$N(k, 2j-k) = \binom{k}{j} = \binom{k}{k-j}.$$

Уопштавањем (4.35), користећи сличне аргументе, можемо одредити број путања између два произвољна чвора у стаблу $(k_1, i_1)$ и $(k_2, i_2)$. Број тражених путања је

$$\binom{k_2 - k_1}{(i_2 - i_1) + \frac{1}{2}((k_2 - k_1) - (i_2 - i_1))} = \binom{k_2 - k_1}{\frac{1}{2}((k_2 - k_1) + (i_2 - i_1))}.$$

Означимо са $V_T(n, 2j - n)$ вредност опције у тренутку $T$, при чему је цена акције на коју се односи одређена чвором $(n, 2j - n)$. Превасходно, то значи да је направљено $j$ корака навише и $n - j$ корака наниже. Вредност опције у садашњем тренутку је дата формулом

$$V_0 = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} P(n, 2j-n) V_T(n, 2j-n), \tag{4.36}$$

где је

$$P(n, 2j-n) = N(n, 2j-n) p^j (1-p)^{n-j} = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \tag{4.37}$$

и

$$V_T(n,2j-n) = (S_T(n,2j-n)-K)^+. \tag{4.38}$$

Уврштавањем једнакости (4.37) и (4.38) у једнакост (4.36), добијамо

$$V_0 = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}(S_T(n,2j-n)-K)^+. \tag{4.39}$$

**Напомена 9.** *У претходним формулама, ознака p се односи на вероватноћу неутралну од ризика.*

У разматрању опција са баријером, израз $P(n,2j-n)$ који фигурише у (4.36) остаје непромењен, док се израз $V_T(n,2j-n)$ мења у зависности од врсте опције са баријером. Најпре, уводимо додатне ознаке:

- $m$ висина баријерног нивоа (за $i \geq m$ чвор се налази на баријери или изнад ње),
- $F(k,i)$ број путања од чвора $(0,0)$ до чвора $(k,i)$ таквих да не досежу и не прелазе баријерни ниво, $i = m$.

Потом ћемо одредити цену горње излазне кол опције која постаје неактивна када цена акције порасте до вредности баријере. Слично се одређују и цене других врста баријерних опција.

Користећи претходне ознаке, вредност опције $V_T(n,2j-n)$ можемо записати као

$$\begin{aligned}V_T^B(n,2j-n) &= I\{S_t = m\ \forall t\}V_T(n,2j-n) + I\{S_t = m \text{ за неко } T\}\cdot 0\\ &= P(S_t \text{ је испод баријере})(S_T(n,2j-n)-K)^+.\end{aligned}$$

Свака путања од чвора $(0,0)$ до чвора $(n,2j-n)$ има исту вероватноћу реализације, па је вероватноћа да путања не досегне баријерни ниво једнака

$$\frac{\text{број путања од } (0,0) \text{ до } (n,2j-n) \text{ које су испод баријере}}{\text{укупан број путања од } (0,0) \text{ до } (n,2j-n)}.$$

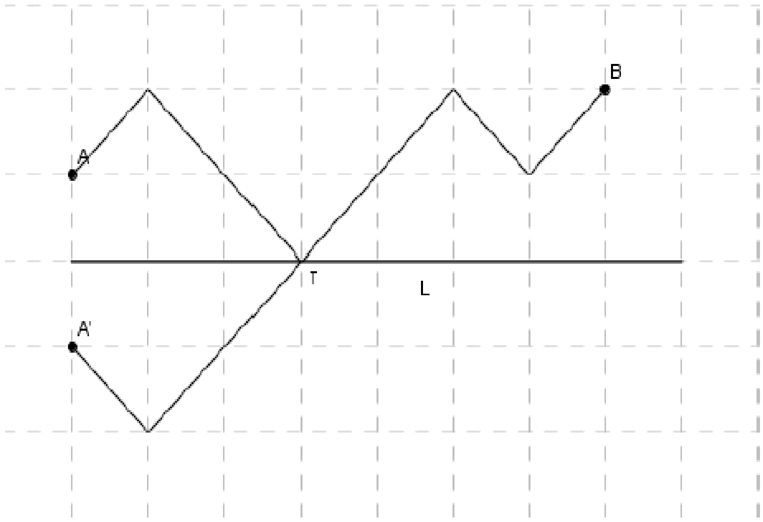
Цена опције са баријером у тренутку $T$, уколико је вредност акције одређена чвором $(n,2j-n)$ износи

$$V_T^B(n,2j-n) = \frac{F(n,2j-n)}{N(n,2j-n)}(S_T(n,2j-n)-K)^+. \tag{4.40}$$

Према формули (4.36), цена опције са баријером у садашњем тренутку је

$$\begin{aligned}V_0^B &= e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}P(n,2j-n)V_T^B(n,2j-n)\\ &= e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{F(n,2j-n)}{N(n,2j-n)}p^j(1-p)^{n-j}(S_T(n,2j-n)-K)^+\\ &= e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}N(n,2j-n)\frac{F(n,2j-n)}{N(n,2j-n)}p^j(1-p)^{n-j}(S_T(n,2j-n)-K)^+\\ &= e^{-rT}\sum_{j=0}^{n}F(n,2j-n)p^j(1-p)^{n-j}(S_T(n,2j-n)-K)^+.\end{aligned}$$

Да бисмо у потпуности одредили цену опције, потребно је још да одредимо $F(n, 2j - n)$, користећи принцип рефлексије Брауновог кретања. На основу важења тог принципа знамо да је број путања од $A$ до $B$ које досежу баријерни ниво једнак броју таквих путања од $A'$ до $B$, где су $A$ и $A'$ тачке симетричне у односу на праву која се налази на баријерном нивоу, а $T$ тачка пресека путање од $A$ до $B$ и баријерног нивоа. Јасно је да је број таквих путања од чвора $(0, 0)$ до чвора $(n, 2j - n)$ једнак једнак броју путања од чвора $(0, 2m)$ до чвора $(n, 2j - n)$.




На основу познатих аргумената, тај број је једнак

$$\binom{n}{2m - (2j - n) + \frac{1}{2}(n - (2m - (2j - n)))} = \binom{n}{n + m - j} = \binom{n}{j - m}.$$

Коначно, израз за $F(n, 2j - n)$ добијамо одузимањем ове вредности од укупног броја путања:

$$F(n, 2j - n) = \binom{n}{j} - \binom{n}{j - m}. \tag{4.41}$$

Расписивањем вредности биномним коефицијената и њиховим сређивањем, (4.41) поприма следећи облик

$$F(n, 2j - n) = N(n, 2j - n) \cdot \left[1 - \prod_{i=1}^{m} \frac{(n - j - m + i)}{(j + i)}\right].$$

**Напомена 10.** *Ова формула има теоријски значај, али није погодна за имплементацију као претходно наведена рекурзивна формула, првенствено због брзине извршавања програмског кода. Такође, са порастом вредности* $n$*, вредност* $N(n, 2j - n)$ *постаје веома велика. Међутим, формула садржи члан* $p^j(1 - p)^{n-j}$ *чија се вредност смањује са порастом* $n$*, што би требало узети у обзир при имплементацији, да би се радило са "разумним" вредностима.*

## 4.3 Монте–Карло метода

Цене опција са баријером се могу одредити на основу Монте–Карло симулација, што представља једну од једноставнијих метода за имплементацију. Такође, ова метода може дати вредност опције када не постоји експлицитна формула за њено израчунавање. Алгоритам одређивања цена је следећи:

1. Под претпоставком да су безризична каматна стопа $r$ и волатилност $\sigma$ познати, симулирати реализације процеса кретања акција, при претпоставци о неутралности од ризика.

2. Поновити симулације одређен број пута у посматраном временском интервалу и одредити добит опције у свакој реализацији.

3. Средња вредност добити опције из спроведених симулација, дисконтована при безризичној каматној стопи $r$, је тражена вредност опције.

**Пример 2.** *Посматрамо доњу излазну кол опцију са следећим карактеристикама:* $S = 100, K = 100, \sigma = 0.3; r = 0.1; T = 0.2, N = 2, B = 85$. *Функција* $dot(S, K, sigma, r, T, Dt, M, B)$ *за задате вредности аргумената даје резултате приказане у табели. Приказани 95%-тни интервал поверења је одређен према формули*

$$\left[a_M - 1.96\frac{b_M}{\sqrt(M)}, a_M + 1.96\frac{b_M}{\sqrt(M)}\right], \tag{4.42}$$

*где је са* $M$ *означен број симулираних реализација кретања цена акција,* $a_M$ *оцена,* $b_M$ *одговарајуће стандардно одступање.*

| *Резултати* | | |
|---|---|---|
| $M$ | *Интервал поверења* | *Оцена цене опције* |
| $\Delta t = 10^{-2}$ | | |
| $10^2$ | *3.614462 7.017871* | *5.316166* |
| $10^3$ | *5.162996 6.365253* | *5.764125* |
| $10^4$ | *4.888249 5.237653* | *5.062951* |
| $10^5$ | *5.104696 5.216213* | *5.160454* |
| $\Delta t = 10^{-3}$ | | |
| $10^2$ | *2.578373 5.383766* | *3.981069* |
| $10^3$ | *3.734237 4.777246* | *4.255741* |
| $10^4$ | *4.464585 4.805281* | *4.634933* |
| $10^5$ | *4.574625 4.683190* | *4.628907* |
| $\Delta t = 10^{-4}$ | | |
| $10^2$ | *1.996509 4.716625* | *3.356567* |
| $10^3$ | *3.961342 5.050656* | *4.505999* |
| $10^4$ | *4.326570 4.671829* | *4.499199* |
| $10^5$ | *4.409786 4.517335* | *4.463561* |
| $\Delta t = 10^{-5}$ | | |
| $10^2$ | *2.754185 5.764861* | *4.259523* |
| $10^3$ | *3.752115 4.805335* | *4.278725* |
| $10^4$ | *4.238575 4.582539* | *4.410557* |
| *Аналитичко решење 4.3975* | | |

*Аналитичко решење за доњу излазну кол опцију се добија применом формуле* (4.16).
*Функција* $vanillaOptionEuropean(S, K, T, r, \sigma^2)$ *за прослеђене вредности аргумената даје вредност стандардне европске кол опције.*
*Функција* $doi(S, K, sigma, r, T, Dt, M, B)$ *на основу Монте–Карло симулација вреднује одговарајућу доњу улазну кол опцију, при задатим вредностима аргумената. Применом улазно–излазног паритета и* (4.16) *се добија аналитичко решење за доњу улазну кол опцију.*

| *Резултати* | | |
|---|---|---|
| $M$ | *Интервал поверења* | *Оцена цене опције* |
| $\Delta t = 10^{-2}$ | | |
| $10^2$ | *0.7093511 2.1907389* | *1.4500450* |
| $10^3$ | *1.138059 1.655829* | *1.396944* |
| $10^4$ | *1.133813 1.283966* | *1.208889* |
| $10^5$ | *1.182493 1.230450* | *1.206472* |
| $\Delta t = 10^{-3}$ | | |
| $10^2$ | *0.792517 3.073010* | *1.932763* |
| $10^3$ | *1.504431 2.114587* | *1.809509* |
| $10^4$ | *1.600766 1.783910* | *1.692338* |
| $10^5$ | *1.663820 1.721029* | *1.692425* |
| $\Delta t = 10^{-4}$ | | |
| $10^2$ | *0.7370622 2.6823500* | *1.7097061* |
| $10^3$ | *1.538677 2.109416* | *1.824046* |
| $10^4$ | *1.813580 2.002745* | *1.908163* |
| $10^5$ | *1.831613 1.891769* | *1.861691* |
| $\Delta t = 10^{-5}$ | | |
| $10^2$ | *0.8315146 2.8698087* | *1.8506617* |
| $10^3$ | *1.526964 2.153625* | *1.840294* |
| $10^4$ | *1.853608 2.052407* | *1.953008* |
| *Аналитичко решење 1.946611* | | |

Као што је наведено, предност Монте–Карло методе оцењивања цена опција је једноставност за имплементацију и флексибилност у примени за различите врсте опција. Од посебног значаја је то што се оцена може добити и у случајевима када не постоји аналитичко решење. Ширина интервала поверења оцене се на основу (4.42) смањује са повећањем $\sqrt{M}$, па се за велику тачност захтева велики број симулација трајекторија, $M$, што представља ограничење у пракси.

Са циљем сужавања интервала поверења за Монте–Карло оцену и повећања тачности треба приметити да је његова ширина пропорционална стандардном одступању $b_M$. С тим у вези наводимо једну модификацију стандардних Монте–Карло симулација која за циљ има смањење дисперзије. Наиме, тачност стандардних Монте–Карло симулација се у неким случајевима може повећати уколико се узме у обзир особина симетрије нормалне расподеле и прва вредност се оцени на основу узорка из нормалне расподеле, а друга на основу узорка са супротним предзнаком. Оцена је средња вредност овако добијених оцена (поглавље 5.3. ([3]) .
Функција $dot\_anti(S, K, sigma, r, T, Dt, M, B)$ за одговарајуће вредности аргумената даје резултате приказане у табели.

| Резултати | | |
|---|---|---|
| $M$ | Интервал поверења | Оцена цене опције |
| $\Delta t = 10^{-2}$ | | |
| $10^2$ | 3.531125 5.710758 | 4.620941 |
| $10^3$ | 4.503561 5.278282 | 4.890922 |
| $10^4$ | 4.943882 5.190859 | 5.067371 |
| $10^5$ | 5.069377 5.147796 | 5.108587 |
| $\Delta t = 10^{-3}$ | | |
| $10^2$ | 3.245510 5.577303 | 4.411407 |
| $10^3$ | 3.952415 4.683346 | 4.317880 |
| $10^4$ | 4.454553 4.695947 | 4.575250 |
| $10^5$ | 4.622806 4.699985 | 4.661396 |
| $\Delta t = 10^{-4}$ | | |
| $10^2$ | 3.326226 5.610025 | 4.468126 |
| $10^3$ | 4.004824 4.739523 | 4.372174 |
| $10^4$ | 4.33253 4.57305 | 4.45279 |
| $10^5$ | 4.470487 4.547522 | 4.509004 |
| $\Delta t = 10^{-5}$ | | |
| $10^2$ | 2.686185 4.970835 | 3.828510 |
| $10^3$ | 4.299170 5.092387 | 4.695778 |
| $10^4$ | 4.298555 4.538848 | 4.418702 |
| Аналитичко решење 4.3975 | | |

Иако ова модификација поспешује тачност стандардних Монте–Карло симулација и често сужава интервале поверења, захтева удвостручен број примена експоненцијалне и корене функције.

У наставку ћемо упоредити вредности доње излазне опције према блискости са стварним решењем 4.39, за различите дужине подеоних интервала $[0, T]$, $\Delta t$:

- $\Delta t = 10^{-2}$: Рекурзивна формула даје вредност 4.80, најбоља оцена на основу стандардних Монте–Карло симулација је 5.06 ($M = 10000$ симулација), док је на основу модификованих 4.62 ($M = 100$ симулација). За исти број симулација, $M = 100$, стандардна Монте–Карло оцена је 5.32.
- $\Delta t = 10^{-3}$: Рекурзивна формула даје вредност 4.67, најбоља оцена на основу

стандардних Монте–Карло симулација је 4.26 ($M = 1000$ симулација), док је на основу модификованих 4.41 ($M = 100$ симулација). За исти број симулација, $M = 100$, стандардна Монте–Карло оцена је 3.98.

- $\Delta t = 10^{-4}$: Рекурзивна формула даје вредност 4.53, најбоља оцена на основу стандардних Монте–Карло симулација је 4.50 ($M = 1000$ симулација), док је на основу модификованих 4.37 ($M = 1000$ симулација).

Видимо да најбоље резултате у овом примеру даје модификација Монте-Карло методе оцењивања. Међутим, можемо приметити да интервали поверења у неким случајевима чак не садрже стварну вредност. Иако то не говори у прилог тачности методе оцењивања, треба узети у обзир да грешка не потиче само од Монте–Карло апроксимације, већ и од дискретизације.

У овом поглављу је коришћена литература [6], [11], [12], [8], [10], [13], [15], [1] и [5].

# Поглавље 5

# Закључак

У првом поглављу рада наведени су основни појмови теорије вероватноће и случајних процеса који су помињани у раду.

У другом поглављу су изложене основе теорије стохастичке интеграције, конструисан је Итов стохастички интеграл за елементарне подинтегралне процесе, а потом је и дефинисан одговарајући Итов интеграл за произвољан случајни процес. Уведена је класа Итових процеса за које важи Итова формула. Такође, уведени су стохастичке диференцијалне једначине и основна идеја технике промене мере.

У трећем поглављу наведене су особине стандардних опција и опција са баријером, претпоставке о тржишту на ком треба одредити њихову цену као и параметри разних математичких модела који утичу на исту.

У четвртом поглављу су представљени начини за одређивање цене опција при претпоставци о неутралности од ризика: решавање Блек–Шолсове парцијалне диференцијалне једначине (за коју је дато извођење), налажење расподела везаних за кретање цена акција, одређивање цене према биномном моделу на основу рекурзивне формуле, као и помоћу рачунице везане за број путања између два чвора у биномном стаблу. Опције су, такође, вредноване на основу Монте–Карло симулација и њихове модификације. Потом су упоређиване методе по блискости резултата са стварним решењем добијеним решавањем Блек–Шолсове једначине и као најпрецизнија се показала модификована метода Монте–Карло симулација. Резултати програмских кодова написаних у програмском језику $R$ су дати у табелама.

Аутор изражава велику захвалност свом ментору на ентузијазму за сарадњу, корисним сугестијама и примедбама, као и целокупној стручној помоћи при изради овог рада.

## 5.1 Имплементације алгоритама за одређивање цена опција

```
Bcall_bm <- function(S, K, sigma, r, T, N, B){


  deltaT = T/N

  u = exp(sigma * sqrt (deltaT))

  d = 1/u

  p = (exp(r*deltaT) - d)/(u-d)

  discount = exp(-r*deltaT)

  p_u = discount*p

  p_d = discount*(1-p)

  SValues = numeric(2*N+1)
  SValues[1] = S*d^N

  for (i in 2:(2*N+1)){
    SValues[i] = u*SValues[i-1]

  }

  CValues = numeric(2*N+1)
  for (i in seq(1, 2*N+1, 2))
    CValues[i] = ifelse(SValues[i] <= B, 0, max(SValues[i]-K,0))


  for(j in 1: N){
    for (i in seq(j+1, 2*N+1-j, 2)){
      CValues[i] = ifelse (SValues[i] <= B, 0, p_u*CValues[i+1] + p_d*CValues[i-1])
    }
  }

  return(CValues[N+1])
}

install.packages(NMOF)
library(NMOF)

#Vrednost donje izlazne opcije

vanillaOptionEuropean(100, 100, tau=0.2, r=0.1, v=0.3^2)$value - (100/95)^(1 - 2*0.1/0.3
    ^2)* vanillaOptionEuropean(95^2/100, 100, tau=0.2, r=0.1, v=0.3^2)$value

#Vrednost donje ulazne opcije

(100/95)^(1 - 2*0.1/0.3^2)* vanillaOptionEuropean(95^2/100, 100, tau=0.2, r=0.1, v=0.3^2)
    $value
```

```
dot <- function(S,K,sigma,r,T, Dt , M, B){

  N <- T/Dt
    f <-numeric(M)

  for (i in 1:M){

    Sfinal <- S*cumprod(exp((r-0.5*sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*rnorm(N)))
    Smin <- min(Sfinal)
    f[i] <- ifelse (Smin > B, exp(-r*T)*max(Sfinal[length(Sfinal)]-K,0), 0)

  }

  xM <- mean(f)
  yM <- sd(f)
  return(c(xM, xM - 1.96*yM/sqrt(M), xM + 1.96*yM/sqrt(M)))
}


doi <- function(S,K,sigma,r,T, Dt , M, B){

  N <- T/Dt

  f <-numeric(M)

  for (i in 1:M){

    Sfinal = S*cumprod(exp((r-0.5*sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*rnorm(N)))
    Smin <- min(Sfinal)
    f[i] <- ifelse (Smin < B, exp(-r*T)*max(Sfinal[length(Sfinal)]-K,0), 0)

  }

  xM <- mean(f)
  yM <- sd(f)
  return(c(xM, xM - 1.96*yM/sqrt(M), xM + 1.96*yM/sqrt(M)))
}



dot_anti <- function(S,K,sigma,r,T, Dt , M, B){

  N <- T/Dt
  f <-numeric(M)
  fanti <-numeric(M)

  for (i in 1:M){

    Sfinal <- S*cumprod(exp((r-0.5*sigma^2)*Dt+sigma*sqrt(Dt)*rnorm(N)))
    Smin <- min(Sfinal)
    f[i] <- ifelse (Smin > B, exp(-r*T)*max(Sfinal[length(Sfinal)]-K,0), 0)

    Sfinal2 <- S*cumprod(exp((r-0.5*sigma^2)*Dt-sigma*sqrt(Dt)*rnorm(N)))

    Smin2 <- min(Sfinal2)

    f2 <- ifelse(Smin2>B, exp(-r*T)*max(Sfinal2[length(Sfinal2)]-K,0), 0)

    fanti[i] <- 0.5*(f[i] + f2)
    }
    xM <- mean(fanti)
    yM <- sd(fanti)
    return(c(xM, xM - 1.96*yM/sqrt(M), xM + 1.96*yM/sqrt(M)))
   }
   }
```

# Литература


[1] P. Balachandran, The Convergence of Stock Prices Modeled as a Sequence of Binomial Models to the distribution of Geometric Brownian Motion, Duke University, 2008.

[2] P. Brandimarte, Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction. John Wiley & Sons, 2013.

[3] C. N. De Ponte, Pricing barrier options with numerical methods, North-West University, 2013.

[4] A. Dvoretski, P.Erdos, S. Kakutani, Nonincrease everywhere of the Brownian motion process, Proc.4th Berkaley Symp. on Math. Stat and Prob. Vol. II,103-116, 1961.

[5] D. J. Higham, An Introduction to Financial Option Valuation: Mathematics, Stochastics and Computation, Cambridge University Press, 2004.

[6] S. Janković, B. Milošević, Elementi finansijske matematike, Matematički fakultet, 2017.

[7] V. Jevremović, J. Mališić, Slučajni procesi i vremenske serije, Matematički fakultet, 2008.

[8] T. Mikosch, Elementary Stochastic Calculus with Finance in View, World Scientic, 1998.

[9] P. Mladenović, Verovatnoća i statistika, Matematički fakultet, 2008.

[10] N. Privault, Notes on stochastic finance, Chapter 8,
http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/MA5182/barrier-options.pdf

[11] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer Finance, 2005.

[12] S.E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance II, Continuous-Time Models, Springer Finance, 2004.

[13] M.K. Sol, Pricing barrier options in discrete time, Delft University of Technology, 2009.

[14] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, Mathematics of Financial Derivatives, Cambridge University Press, 1995.

[15] P. G. Zhang, Exotic options, a guide to second generations options, World Scientic Publishing Co. Pte. Ltd, 1998.