Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešavanje enumerativnih problema pomoću dejstva grupa

Master rad

Mentor: prof. dr Zoran Petrović
Student: Mirka Popović

Beograd,
2018.

Sadržaj

1 Uvod **2**

2 Dejstva grupa **7**

3 Primeri **25**

1 Uvod

Na samom početku ovog rada daćemo par jednostavnih primera kombinatornih zadataka sa kojima smo se susretali tokom školovanja i bez problema ih rešavali primenom neke od standardnih metoda. Ukoliko je naš zadatak da odredimo broj elemenata nekog konačnog skupa A, prirodno je skup podeliti na nekoliko manjih delova A_i ali tako da svaki element pripada tačno jednom delu. Ako svaki A_i deo ima k_i elemenata, tada ćemo broj elemenata skupa A dobiti kao $k_1 + ... + k_n$. Izložena metoda je poznata kao **metod sume**. Može se desiti da je skup A direktan proizvod nekoliko manjih skupova, pa se njegov broj elemenata dobija kao $k_1 \times ... \times k_n$. Poznato kao **princip proizvoda**.

Primer 1 *Koliko članova ima niz 3, 8, 13, 18, ... , 118, 123?*

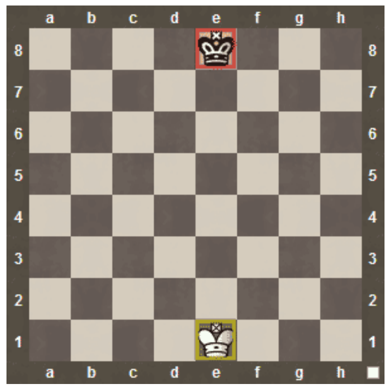
Rešenje.

Odgovor na ovo pitanje dobićemo primenom **principa bijekcije**. Neka je $A = \{3, 8, 13, ..., 118, 123\}$. Ako nađemo k takvo da je $f : \{1, 2, ...k\} \to A$ bijekcija, tada će $|A| = |B|$, $B = \{1, 2, ...k\}$. Primetimo da je $3 = 0\cdot5+3, 8 = 1\cdot5+3, ..., 123 = 24\cdot5+3$. Ako funkciju f definišemo kao $f(x) = (x-1)\cdot5+3$, definisali smo jedno bijektivno preslikavanje, te je $|A| = |B| = 25$, odnosno $B = \{1, 2, 3, ..., 25\}$.

$\clubsuit$

Sve ovo radimo u cilju da se pripremimo za usvajanje nove metode koju ćemo izložiti.

Primer 2 *Na koliko načina možemo postaviti figuru kralja na jedno polje šahovske table* 8×8, *a zatim odigrati potez?*



Rešenje.

Po pravilima, figura kralja na početku igre stoji na mestu obeleženom na šahovskoj tabli, ali to nisu jedina mesta na kojima se može naći u toku partije. Figura kralja se može kretati paralelno ivicama i dijagonalno. Iz svakog od četiri ugla možemo povući po tri poteza, dva uz ivice table i treći po dijagonali table. Iz preostalih pozicija na ivici table, njih 24, može se povući po 5 poteza. Analogno, iz pozicija koje nisu na rubu table, njih 36, možemo povući po 8 poteza. Primenom dobro poznatih *metoda sume* i *metoda proizvoda* dobijamo da je ukupan broj poteza koji se mogu povući figurom kralja

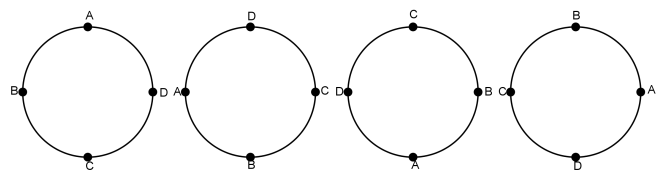
$$4 \cdot 3 + 24 \cdot 5 + 36 \cdot 8 = 420.$$

♣

Primer 3 *Na koliko različitih načina možemo rasporediti četvoro ljudi za kružnim stolom?*

Rešenje.

Obeležimo osobe sa A, B, C, D. Obzirom da ih raspoređujemo duž kružne linije, permutacija $ABCD$ ista je kao permutacije $BCDA, CDAB$ i $DABC$.



Analogno svaka kombinacija imaće svoje tri ekvivalentne, odnosno 4 permutacije biće međusobno ekvivalentne.

Dakle, broj različitih rasporeda sedenja dobijamo kada ukupan broj permutacija broja četiri podelimo sa četiri

$$N = \frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6.$$

Svakako ovo nije jedini put do tačnog rešenja.

Ukoliko bi jednu od 4 osobe fiksirali na jedno mesto, a ostale osobe raspoređivali oko fiksirane, svaki od dobijenih rasporeda bio bi drugačiji, odnosno dobili bismo neekvivalentna rešenja, a bilo bi ih

$$N = P_3 = 3! = 6.$$

♣

Primer 4 *Na koliko različitih načina možemo rasporediti n osoba duž kružne linije?*

Rešenje.

Ponovimo postupak iz prethodnog primera. Obeležimo osobe sa $A_1, A_2, ..., A_n$.

Raspored $A_1A_2...A_n$, ekvivalentan je sa rasporedima $A_2A_3...A_nA_1$, $A_3...A_nA_1A_2$, ..., $A_nA_1...A_{n-1}$. Dobili smo n ekvivalentnih permutacija.

Broj različitih rasporeda dobijamo kada ukupan broj permutacija broja n podelimo sa n, $N = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$.

♣

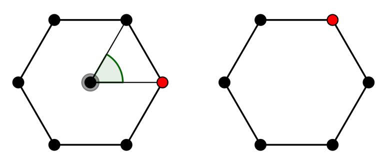
Kombinatorni zadaci bave se problemom egzistencije neke strukture sa zadatim svojstvima, optimizacijom neke strukture, ispitivanjem da li neka struktura ima željena svojstva, pronalaženjem bitnih svojstava neke konačne strukture. Na narednim stranicama pokušaćemo da znanje algebarskih struktura primenimo u rešavanju sličnih zadataka.

Ukoliko na skupu kojem želimo odrediti broj elemenata postoji unutrašnja simetrija, za dva elemeneta kažemo da su ekvivalentna ukoliko jedan možemo transformisati u drugi primenom tih simetrija. Osnovno pitanje koje se nameće jeste *Koliko ima neekvivalentnih objekata u tom skupu?*

Primer 5 *Temena pravilnog šestougla treba obojiti upotrebom dve boje. Dva bojenja se smatraju istim ako se jedno može dobiti rotacijom oko centra šestougla drugog bojenja. Koliko ima različitih bojenja? Koliko bojenja ima ukoliko smatramo istim i bojenja koja možemo dobiti i osnim simetrijama?*

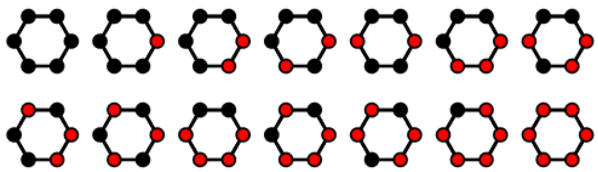
Rešenje. Možemo naslutiti da nema mnogo različitih bojenja, pa možemo pokušati da ih sve ispišemo.

Jasno je da su svi šestouglovi kod kojih su pet temena obojeni jednom bojom, a šesto teme drugom ekvivalentni jer se mogu dobiti odgovarajućom rotacijom.



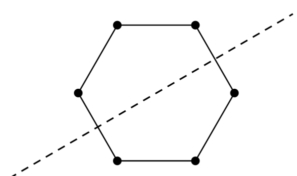
Analogno važi i za šestouglove sa dva, tri, četiri temena različite boje, ukoliko se temena istih boja nalaze jedna do drugih.

Sada već možemo preći na ispisivanje svih mogućnosti.

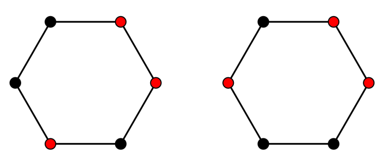


Lako možemo proveriti da su sva bojenja sa slike neekvivalentna, odnosno da se međusobno ne mogu identifikovati rotacijama. Zaključujemo da ima 14 mogućih bojenja temena šestougla sa dve boje.

Drugo pitanje na koje treba da damo odgovor uključuje simetrije šestougla. Jedna od njih je prikazana na slici.



Ako se vratimo na sliku sa svim mogućim bojenjima, možemo uočiti bojenja koja se mogu identifikovati osnim simetrijama.



Preostalih 13 bojenja su neekvivalentna. ♣

2 Dejstva grupa

U ovom poglavlju definisaćemo osnovne pojmove, stavove, leme *dejstva grupe* koji će nam biti od velike važnosti prilikom rešavanja enumerativnih zadataka kojima ćemo se baviti u sledećem poglavlju.

Definicija 1 *Grupa je algebarska struktura* $(G, \cdot)$, *gde je* G *neprazan skup, a* $\cdot$ *binarna operacija na skupu* G *za koju važi:*

1. $(\forall x, y, z \in G)(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2. $(\exists e \in G)(\forall x \in G) x \cdot e = e \cdot x = x$;
3. $(\forall x \in G)(\exists \tilde{x} \in G)(x \cdot \tilde{x} = \tilde{x} \cdot x = e)$.

Ekvivalentna definicija datoj je i sledeća definicija.

Definicija 2 *Grupa je algebarska struktura* $(G, \cdot, ', 1)$ *gde je* G *neprazan skup,* $\cdot$ *binarna operacija na skupu* G, $'$ *unarna operacija na skupu* G *i* 1 *izabrani element iz* G, *za koje važi*

1. $(\forall x, y, z \in G)\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
2. $(\forall x \in G)\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;
3. $(\forall x \in G)\ x \cdot x' = x' \cdot x = 1$.

Definicija 3 *Neka je* X *neprazan skup. Posmatrajmo skup* S_X *zadat sa:*

$$S_X = \{\pi : X \to X | \pi \text{ je bijekcija}\}.$$

Tada je $S_X = (S_X, \circ)$, *gde je sa* $\circ$ *označena kompozicija funkcija, jedna grupa i zovemo je* grupa permutacija, *odnosno simetrija, skupa* X.

Stav 1 *Ako postoji bijekcija izmedju* X *i* Y, *onda je* $S_X \cong S_Y$.

Dokaz.

Neka je $g : X \to Y$ bijekcija, $S_X = \{\pi : X \to X | \pi \text{ je bijekcija}\}$, $S_Y = \{\omega : Y \to Y | \omega \text{ je bijekcija}\}$ i neka $f : S_X \to S_Y$ definisana sa

$$f(\pi) := g \circ \pi \circ g^{-1}.$$

Ukoliko je $\pi \in X$ permutacija, tada je $g \circ \pi \circ g^{-1} \in Y$ takođe permutacija, jer je $g \circ \pi \circ g^{-1} : Y \to Y$ bijekcija kao kompozicija bijekcija.

Funkcija f je *na* jer, ako je $\sigma \in S_Y$, tada je

$$f(g^{-1} \circ \sigma \circ g) = \sigma.$$

Funkcija f je i *1-1*. Ostaje samo da proverimo da li važi

$$f(\rho \circ \pi) = f(\rho) \circ f(\pi),\ \rho, \pi \in S_X.$$

$$f(\rho \circ \pi) = g \circ (\rho \circ \pi) \circ g^{-1} = (g \circ \rho \circ g^{-1}) \circ (g \circ \pi \circ g^{-1}) = f(\rho) \circ f(\pi)$$

Funkcija f zadovoljava sve osobine izomorfizma. $\boxtimes$

Primer 6 *Karte označene brojevima* $1 - 12$ *poređane su kao na levoj slici. Karte su skupljaju po vrstama, zatim ponovo dele, ali po kolonama, tako da se dobije sledeći raspored, kao na desnoj slici.*

1	*2*	*3*
4	*5*	*6*
7	*8*	*9*
10	*11*	*12*

1	*5*	*9*
2	*6*	*10*
3	*7*	*11*
4	*8*	*12*

Koliko puta mora da se izvrši postupak pre nego što se karte ponovo nađu u početnom rasporedu?

Rešenje. Sa slika zaključujemo da je 1 u početnom i u novom rasporedu na istom mestu, dakle ona je fiksirana. Na mestu 2 u novom rasporedu, našla se 5 u ponovnom, a na mestu 5, sada je 6, na mestu 6 sada je 10, na mestu 10 sada je 4, a na mestu 4 je 2, čime se zatvara ciklus, i tako dalje. Dobijamo da je početna permutacija sledeća:

$$\pi = (1)(2\ 5\ 6\ 10\ 4)(3\ 9\ 11\ 8\ 7)(12).$$

Lako dobijamo da je $\pi^5 = \epsilon$. Odnosno, početna permutacija je identičko preslikavanje, pa nakon pet ponovljenih postupaka dobijamo početni raspored.

♣

Definicija 4 *Neka je G grupa i X neprazan skup. Pod dejstvom grupe G na skupu X podrazumevamo homomorfizam $\varphi : G \to S_X$.*

I za ovu definiciju dajemo i njoj ekvivalentnu.

Definicija 5 *Neka je G grupa, a X neprazan skup. Pod dejstvom grupe G na skupu X podrazumevamo funkciju $\theta : G \times X \to X$ za koju važi:*
1. *$\theta(e, x) = x$, za svako $x \in X$;*
2. *$\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$, za svako $x \in X$ i svako $g, h \in G$.*

U nastavku ćemo koristiti nešto drugačiji zapis funkcije θ, $\theta(g, x) = g \cdot x$. Dakle, zapis svojstava navedene funkcije izgleda ovako:
$e \cdot x = x$, za svako $x \in X$;
$(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$, za svako $x \in X$, i svako $g, h \in G$.

Primer 7 *Na skupu temena pravilnog n-tougla $X = \{1, 2, ..., n\}$ dejstvuju dve grupe.*
- *Grupa svih izometrija pravilnog n-tougla, naziva se* diedarska grupa. *Čini je n osnih simetrija i n rotacija, pa je reda $2n$.*
- *Grupa rotacija izomorfna sa cikličnom grupom Z_n.*

Definicija 6 *Neka grupa G dejstvuje na nepraznom skupu X.*
Orbita elementa *$x \in X$ definiše se na sledeći način:*

$$\Omega_x = \{\pi \cdot x : \pi \in G\}.$$

Stabilizator elementa *$x \in X$ definiše se na sledeći način:*

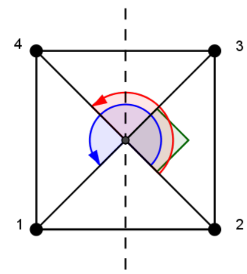
$$G_x = \{\pi \in G : \pi \cdot x = x\}.$$

Orbita elementa x je podskup skupa X koji čine svi elementi u koje se x može preslikati delovanjem elemenata iz grupe G. Stabilizator elementa x je podgrupa grupe G koju čine elementi grupe G koji fiksiraju tačku x.

Primer 8 *Ako se posmatra dejstvo diedarske grupe D_n na skupu temena pravilnog n-tougla, stabilizator svakog temena je dvočlan. Prvi element stabilizatora je identitet, a drugi osna simetrija čija osa prolazi kroz to teme.*

Primer 9 *Odrediti sve orbite i stabilizatore pri dejstvu diedarske grupe D_4 na skupu koji čine temena kvadrata.*

Rešenje.



Ako temena kvadrata obeležimo kao na slici, skup $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Poznato je da grupa koja dejstvuje jeste diedarska grupa

$$D_4 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}.$$

Red grupe D_4 je $|D_4| = 8$. Identičko preslikavanje ε fiksira svaki od elemenata, odnosno, $\varepsilon = (1)(2)(3)(4)$. Rotacija za $90°$ oko središta kvadrata slika teme $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4$, pa dobijamo da je $\rho = (1234)$. Rotacija za $180°$ slika $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, odnosno $\rho^2 = (13)(24)$. Analogno dobijamo ostala preslikavanja.

$$\begin{gathered}\varepsilon = (1)(2)(3)(4)\\ \rho = (1234)\\ \rho^2 = (13)(24)\\ \rho^3 = (1432)\\ \sigma = (12)(34)\\ \rho\sigma = (13)(2)(4)\\ \rho^2\sigma = (14)(32)\\ \rho^3\sigma = (1)(3)(24)\end{gathered}$$

Želimo da odredimo orbite svih elemenata, odnosno $\{\pi \cdot x | \pi \in G\}$, za svako $x \in X$. Za početak elementa 1:

$$\Omega_1 = \{\pi \cdot 1 | \pi \in D_4\} = \{1, 2, 3, 4\},$$

jer identičkim preslikavanjem, 1 ostaje fiksiran, preslikavanje ρ slika $1 \to 2$, ρ^2 slika $1 \to 3$, ρ^3 slika $1 \to 4$.

Na isti način dobijamo da je $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4$.

Drugi deo našeg zadatka je da odredimo stabilizatore elemenata skupa X, odnosno $G_x = \{g \in G | g \cdot x = x\}$. Lako je zaključiti da je siguran element stabilizatora svakog elementa identičko preslikavanje, na nama je da odredimo drugi element. Ako pogledamo kako elementi skupa dejstvuju na temena kvadrata, vidimo da $\rho^3\sigma = (1)(3)(24)$, odnosno da $\rho^3\sigma$ slika $1 \to 1$, tačnije fiksira ovo teme, što znači da je $\rho^3\sigma$ pripada stabilizatoru elementa 1. Analogno dobijamo stabilizatore preostalih elemenata.

$G_1 = \{\varepsilon, \rho^3\sigma\}$
$G_2 = \{\varepsilon, \rho\sigma\}$
$G_3 = \{\varepsilon, \rho^3\sigma\}$
$G_4 = \{\varepsilon, \rho\sigma\}$ ♣

Prirodno se nameće *relacija ekvivalencije* na skupu X.

$$x \sim y \Longleftrightarrow \text{postoji } \pi \in G \text{ takvo da je } \pi \cdot x = y.$$

Dokažimo da je uvedena relacija zaista relacija ekvivalencije, odnosno da je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Relacija jeste refleksivna, $x \sim x$, jer $\varepsilon \cdot x = x$

Relacija jeste simetrična, $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$, jer ukoliko je $\pi \cdot x = y$, tada je $\pi^{-1} \cdot y = x$

Relacija jeste i tranzitivna, $x \sim y$ i $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$, jer ako je π takvo da $\pi \cdot x = y$ i σ takvo da $\sigma \cdot y = z$, tada je $\sigma \cdot \pi \cdot x = z$

Ovim smo dokazali da data relacija ispunjava sve osobine relacije ekvivlencije.

Primećujemo da su klase ekvivalencije baš orbite pri dejstvu G na X. Orbite su jednake ili disjunktne, odnosno X je disjunktna unija različitih orbita.

Stav 2 *Neka grupa G dejstvuje na nepraznom skupu X. Ako su elementi x i y iz iste orbite, onda su njihovi stabilizatori konjugovani.*

Dokaz.

Ako su x, y iz iste orbite, sledi da postoji $g \in G$ takvo da je $g \cdot x = y$. Mi želimo da dokažemo da važi

$$G_y = gG_xg^{-1}.$$

$\Rightarrow$: Neka je $h \in G_y$.

Kako je $g \cdot x = y$, sledi da je $g^{-1} \cdot y = x$. Odatle dobijamo da je

$$(g^{-1}hg) \cdot x = g^{-1} \cdot (h \cdot (g \cdot x)) = g^{-1} \cdot (h \cdot y) = g^{-1} \cdot y = x,$$

odnosno, $g^{-1}hg \in G_x$ i $h \in gG_xg^{-1}$.

$\Leftarrow$: Neka je $h \in G_x$.

Tada je

$$(ghg^{-1}) \cdot y = g \cdot (h \cdot (g^{-1} \cdot y)) = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot x = y,$$

odnosno, $gG_xg^{-1} \subseteq G_y$. ⊠

Definicija 7 *Neka G dejstvuje na X i neka je g element iz G. Skup svih* fiksnih tačaka *pri dejstvu elementa g definišemo na sledeći način*

$$X^g = \{x \in X | g \cdot x = x\}.$$

Stav 3 *Neka G dejstvuje na X. Ako su g i h konjugovani, onda postoji bijekcija izmedju skupova X^g i X^h.*

Dokaz

Neka je $g = hkh^{-1}$.

Funkcija $f : X \to X$, definisana sa $f(x) = k \cdot x$ uspostavlja bijekciju između X^g i X^h, jer

$$x \in X^h \Rightarrow h \cdot x = x \Rightarrow g \cdot f(x) = g \cdot (k \cdot x) = k \cdot (g \cdot (k^{-1} \cdot (k \cdot x))) =$$
$$k \cdot (g \cdot ((k^{-1}k) \cdot x)) = k \cdot (g \cdot (e \cdot x)) = k \cdot (g \cdot x) = k \cdot x = f(x).$$

Odatle zaključujemo da $f(X^h) \subseteq X^g$.

Ako je $k \cdot x = y$, onda je $f(k^{-1}y) = x$. Ako $y \in X^g$, onda $k^{-1}y \in X^h$.

Na taj način dobijamo da je f zaista bijekcija. ⊠

Stav 4 *Neka je X neprazan skup i neka grupa G dejstvuje na njemu. Tada postoji bijekcija između G/G_x i Ω_x.*

Dokaz.

Bijekciju između ovih skupova definišemo na sledeći način

$$f(gG_x) := g \cdot x.$$

Prvo ćemo proveriti da li je funkcija dobro definisana.

$$\begin{aligned} gG_x = hG_x &\Longrightarrow h^{-1}gG_x = h^{-1}hG_x \\ &\Longrightarrow h^{-1}gG_x = G_x \\ &\Longrightarrow h^{-1}g \in G_x \\ &\Longrightarrow (h^{-1}g) \cdot x = x \\ &\Longrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = x \\ &\Longrightarrow h \cdot (h^{-1} \cdot g \cdot x) = h \cdot x \\ &\Longrightarrow (h \cdot h^{-1}) \cdot (g \cdot x) = h \cdot x \\ &\Longrightarrow e \cdot (g \cdot x) = h \cdot x \\ &\Longrightarrow g \cdot x = h \cdot x \end{aligned}$$

Funkcija jeste dobro definisana.

$$g \cdot x = h \cdot x \Longrightarrow h^{-1} \cdot (g \cdot x) = h^{-1} \cdot (h \cdot x) \Longrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = (h^{-1} \cdot h) \cdot x \Longrightarrow$$
$$(h^{-1} \cdot g) \cdot x = e \cdot x \Longrightarrow (h^{-1} \cdot g) \cdot x = x \Longrightarrow h^{-1} \cdot g \in G_x \Longrightarrow gG_x = hG_x$$

Po definiciji funkcije f, jasno je da je funkcija *na*, dokazali smo da je funkcija i "$1-1$", sve ukupno i bijekcija, što sa sobom povlači i istu kardinalnost ovih skupova. $\boxtimes$

Posledica Ukoliko konačna grupa G dejstvuje na nepraznom skupu X, onda red orbite ma kog elementa $x \in X$ deli red grupe G.

Sve pojmove do sada uveli smo zbog Bernsajdove leme kojom se određuje broj različitih orbita i koja će nam omogućiti rešavanje enumerativnih problema u nastavku. Skup orbita skupa X pri dejstvu grupe G obeležavaćemo sa X/G.

Irski matematičar Vilijam Bernsajd živeo je i stvarao u XIX i XX veku, bio profesor na univerzitetu u Grinviču, a među prvima se bavio konačnim grupama, tvorac je i $p^a q^b$ teoreme. Lemu je formulisao i dokazao 1887. godine, međutim, postoje navodi da je teoremu jos 1845. godine dokazao Koši.

Teorema 1 (Bernsajdova lema) *Neka konačna grupa G dejstvuje na konačnom skupu X. Tada je broj različitih orbita*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|.$$

Dokaz.

Ako je k broj različitih orbita elemenata skupa X, onda je

$$X = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup ... \sqcup \Omega_k.$$

Neka je $F = \{(g,x) \in G \times X | g \cdot x = x\}$.
Kako je $F = \bigsqcup_{g\in G}\{g\} \times X^g$, onda je

$$|F| = \sum_{g\in G}|X^g|$$

.

Takodje, kako je $F = \bigsqcup_{x\in X} G_x \times \{x\}$, onda je

$$F = \sum_{g\in G} G_x$$

.

Principom *dvostrukog prebrojavanja* dobijamo

$$|F| = \sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x\in X}|G_x|.$$

Primenom prethodniog *stava*, dobijamo

$$\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x\in X}\frac{|G|}{|\Omega_x|}.$$

Odnosno

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \sum \frac{1}{|\Omega_x|}.$$

Ako je Θ neka orbita iz X/G dužine k, razlomak $\frac{1}{k}$ se pojavi u sumi

$$\sum_{x\in X}\frac{1}{|\Omega_x|}$$

za svaki element $x \in \Theta$, što znači tačno k puta.

Dakle,

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = \sum_{x\in X}\frac{1}{|\Omega_x|} = |X/G|.$$

$\boxtimes$

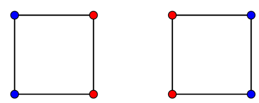
Primer 10 *Na koliko različitih načina možemo obojiti temena kvadratne ploče koristeći dve boje?*

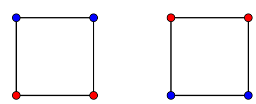
Rešenje.

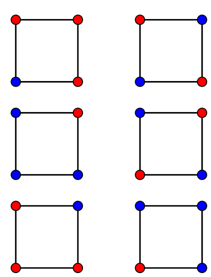
Ako sa X obeležimo skup temena kvadrata, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, tada Y čine sva moguća bojenja tog skupa sa dve boje. Grupa G koja dejstvuje na skup Y biće diedarska grupa D_4, $D_4 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma\}$, reda 8. Kako su nam na raspolaganju dve boje, a bojimo četiri temena, ukupan broj mogućih bojenja jeste 2^4. Naš zadatak je da izbrojimo različita bojenja, a za to će nam koristiti upravo dokazana *Bernsajdova lema.* Prvi korak u rešavanju zadatka biće pronalaženje koliko bojenja kvadrata svaki element skupa G fiksira.

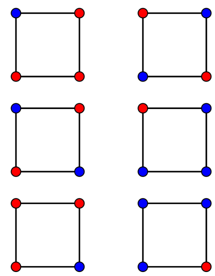
Jasno je da ε, identitet, fiksira svih 2^4, odnosno 16 bojenja.

Dalje, ρ i ρ^3 fiksiraju samo dva bojenja, tačnije ona bojenja kod kojih su sva temena obojena istom bojom. Dok ρ^2 fiksira ista bojenja kao i σ. Na sledećim slikama su data bojenja koja fiksiraju, redom $\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma$, gde je σ refleksija u odnosu na vertikalnu osu, $\sigma(1\ 2)(3\ 4)$, ρ rotacija za $90°$ u odnosu na centar kvadrata, odnosno $\rho = (1\ 2\ 3\ 4)$, a ostale transformacije se dobijaju njihovom kompozicijom.









Konačno možemo prebrojati broj orbita D_4 na skupu X, primenom Bernsajdove leme

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Y^g| = \frac{1}{8}(16+2+4+2+4+4+8+8) = 6.$$

♣

Svega 6 različitih bojenja temena kvadrata je moguće koristeći dve boje, čini se da nam lema nije mnogo olakšala. Pokušajmo sa više boja.

Primer 11 *Na koliko različitih načina možemo obojiti temena kvadratne ploče sa tri boje?*

Rešenje.

Jasno je da ćemo pratiti korake iz prethodnog primera. I dalje nam je grupa G koja dejstvuje na skup bojenja Y diedarska grupa D_4. Kako su nam sada na raspolaganju tri boje, a bojimo četiri temena, ukupan broj bojenja jeste 3^4, a broj elemenata koje fiksiraju elementi iz D_4 više nije 2^i, već 3^i. Lako zaključujemo da je broj različitih orbita grupe D_4 na datom skupu

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Y^g| = \frac{1}{8}(81+3+9+3+9+9+27+27) = 21.$$

♣

Ukoliko bismo se susreli sa problemom *Na koliko različitih načina možemo obojiti skup od n elemenata ako nam je na raspolaganju m boja?* naš odgovor bi brzopleto glasio n^m. Dejstva grupe će nam dati tačan odgovor na ovo pitanje i rešavati razne probleme enumerativne prirode.

Neka je X konačan skup sa n elemenata i neka je G podgrupa grupe S_X. Ako je B skup od m boja kojima raspolažemo, tada G dejstvuje na još jednom skupu. Obeležimo sa $Y = \{f | f : X \to B\}$ skup svih bojenja elemenata skupa X elementima skupa B. Definisani skup je reda m^n.

Dejstvo grupe G na Y definisano je sa $\pi \cdot f = f \cdot \pi$, za svako $\pi \in G$ i svako $f \in Y$. Dva bojenja f, h smatramo istim pri dejstvu grupe G ako postoji element π iz G takav da je $\pi \cdot f = h$, odnosno ako su u istoj orbiti Y pri dejstvu G. Broj različitih bojenja elemenata skupa X bojama skupa B, odgovara $|Y/G|$. Izračunavanje ovog broja omogućava nam Bernsajdova lema

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y^g|.$$

Pokušaćemo da teoretski iznesemo naš primer sa početka. Naš zadatak je da sa m boja obojimo n elemenata, pri čemu će nam elementi grupe G biti permutacije skupa S_n.

Jedan element skupa Y, odnosno jedno bojenje, jeste i kada svih n elemenata obojimo jednom istom od m ponuđenih boja. Jasno je da to bojenje ostaje isto pri svakoj permutaciji, odnosno pri dejstvu svakog elementa grupe G. Tačnije, ono je fiksirano dejstvom svakog elementa grupe G. Neko bojenje $f \in Y$ je fiksirano permutacijom $g \in G$, odnosno $f \in Y^g$ ako i samo ako bojenje f ostaje nepromenjeno na svim ciklusima permutacije g, što znači da smo bojenje fiksirali ako smo elemente svakog ciklusa obojili istom bojom. Ako je c broj ciklusa permutacije g, tada je $|Y^g| = m^c$.

Ponovo se pozivamo na Bernsajdovu lemu i dobijamo da je broj različitih bojenja skupa X bojama skupa B pri dejstvu grupe G jednak

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^c.$$

Sve ovo najbolje ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer 12 *Neka je X skup koji čine temena pravilnog osmougla. Koliko bojenja fiksira data permutacija $\pi = (1234)(5678)$, ako dati osmougao bojimo sa tri boje?*

Rešenje.
Kako skup X čine temena pravilnog osmougla, skup $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Dati skup treba obojiti sa tri date boje, $m = 3$. Ukoliko sa Y označimo skup svih bojenja to znači da je $|Y| = m^8$. Naš zadatak je da otkrijemo koliko bojenja fiksira data permutacija.
Data permutacija slika $1 \to 2 \to 3 \to 4$, $5 \to 6 \to 7 \to 8$. Kako bi bojenje bilo fiksirano potrebno je da temena 1, 2, 3, 4 budu obojena istom bojom. Analogno i temena 5, 6, 7, 8. Za izbor prva četiri temena na raspolaganju su nam 3 boje, takođe i za druga četiri temena. Zaključujemo da je ukupan broj fiksiranih bojenja datom permutacijom $|Y^\pi| = m^2 = 3^2$, gde je 2 broj ciklusa permutacije π, odnosno $c = 2$. ♣

Sada ćemo ponovo uraditi primer1 sa početka.
Rešenje.
Grupa rotacija G deluje na skup X, gde je $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\}$, a X skup temena šestougla $X = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Da bi primenili do sada naučeno potrebni su nam još neki podaci. Kako šestougao bojimo sa dve boje, $m = 2$. Preostaje nam samo da vidimo kako permutacije dejstvuju na X.

$g \in G$	permutacije	c - broj ciklusa	m^c
ε	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	6	2^6
ρ	(123456)	1	2^1
ρ^2	(135)(246)	2	2^2
ρ^3	(14)(25)(36)	3	2^3
ρ^4	(153)(264)	2	2^2
ρ^5	(165432)	1	2^1

Imamo sve potrebne podatke za izračunavanje broja različitih bojenja temena pravilnog šestougla pri dejstvu grupe rotacija.

$$|Y/G| = \frac{1}{6}(2^6 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^2 + 2^1) = \frac{84}{6} = 14.$$

Ukoliko u grupu dejstava uključimo i osne simetrije, grupa dejstava će biti D_6, reda 12.

$$D_6 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma, \rho^5\sigma\}$$

$g \in G$	permutacija	c - broj ciklusa	m^c
ε	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	6	2^6
ρ	(123456)	1	2^1
ρ^2	(135)(246)	2	2^2
ρ^3	(14)(25)(36)	3	2^3
ρ^4	(153)(264)	2	2^2
ρ^5	(165432)	1	2^1
σ	(12)(36)(45)	3	2^3
$\rho\sigma$	(1)(26)(35)(4)	4	2^4
$\rho^2\sigma$	(16)(25)(34)	3	2^3
$\rho^3\sigma$	(15)(24)(3)(6)	4	2^4
$\rho^4\sigma$	(14)(23)(56)	3	2^3
$\rho^5\sigma$	(13)(2)(46)(5)	4	2^4

Ponovnim računanjem broja različitih bojenja pri dejstvu grupe D_6 dobijamo:

$$|Y/G| = \frac{1}{12}(2^6 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^3 + 2^4 + 2^3 + 2^4 + 2^3 + 2^4) = 13.$$

Zadatak je mogao biti urađen na bar još jedan način, korišćenjem prvobitne *Bernsajdove formule.*

Kako su temena označena brojevima od 1 do 6, a na raspolaganju 2 boje, ukupan broj svih bojenja jeste 2^6, zadatak je da odredimo koliko ih je različitih. U prvom delu zadatka grupa koja dejstvuje jeste $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5\}$, potrebno je znati klase konjugovanosti ove grupe. To su

$$\{\varepsilon\},$$
$$\{\rho, \rho^5\},$$
$$\{\rho^2, \rho^4\},$$
$$\{\rho^3\}.$$

Sada je dovoljno naći koliko različitih bojenja fiksira po jedan element svake klase. Možemo se poslužiti već ispisanim permutacijama grupe G. Identičko preslikavanje svakako fiksira sva bojenja, a njih ima 2^6. Iz sledeće klase konjugovanosti uzimamo ρ i tražimo $|Y^\rho|$. Kako ρ slika $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$, jasno je da je jedino fiksirano bojenje ono u kom su sva temena isto obojena, takvih ima 2. Postupak ćemo ponoviti i za ρ^2, odnosno $|X^{\rho^2}|$. Ova permutacija slika $1 \to 3 \to 5$ i $2 \to 4 \to 6$, što znači da fiksira bojenja u kojima su temena 1, 3, 5 obojena isto, kao i 2, 4 i 6. takvih ima 2^2. Ostala nam je još jedna klasa konjugovanosti i njen jedini predstavnik ρ^3. Analogno prethodnim, ona fiksira 2^3 bojenja. Sada nam ostaje da primenimo formulu:

$$|Y/G| = \tfrac{1}{|G|} \sum |X^\pi| = \tfrac{1}{6}(2^6 + 2 \cdot 2 + 2^3 + 2 \cdot 2^2) = 14.$$

I drugi deo zadatka je moguće uraditi na isti način, samo je potrebno da znamo klase konjugovanosti grupe D_6, a to su

$$\begin{gathered} \{\varepsilon\} \\ \{\sigma, \rho^2\sigma, \rho^4\sigma\} \\ \{\rho\sigma, \rho^3\sigma, \rho^5\sigma\} \\ \{\rho^3\} \\ \{\rho, \rho^5\} \\ \{\rho^2, \rho^4\}. \end{gathered}$$

Opet ćemo se poslužiti tablicom i videti koliko bojenja svaka od klasa konjugovanosti fiksira. Identičko preslikavanje fiksira svih 2^6 bojenja. Predstavnik druge klase jeste σ, kako $1 \to 2, 3 \to 6, 4 \to 5$, fiksirana su ona bojenja kod kojih su dati parovi obojeni istom bojom, odnosno $|X^\sigma| = 2^3$. Treća klasa ima predstavnika $\rho\sigma = (26)(35)$, kako su dva temena fiksirana za njih možemo uzeti proizvoljne boje, a za date parove temena biramo jednu boju, $|X^{\rho\sigma}| = 2^4$. Analogno, $|X^{\rho^3}| = 2^3$, $|X^\rho| = 2$, $|X^{\rho^2}| = 2^2$.

$$|Y/G| = \tfrac{1}{|G|} \sum |X^\pi| = \tfrac{1}{12}(2^6 + 3 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 2^3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2) = 13.$$

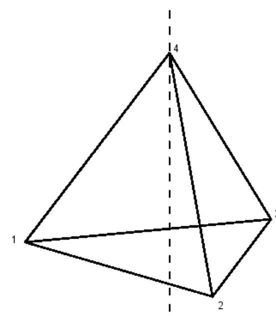
Možda na ovom primeru nije bilo ni potrebno koristiti *Bernsajdovu lemu*, niti je postojala bitna razlika u tome koji smo način odabrali, ali u narednim primerima uvidećemo razliku. ♣

U nastavku će nam od velike koristi biti sledeća dva primera.

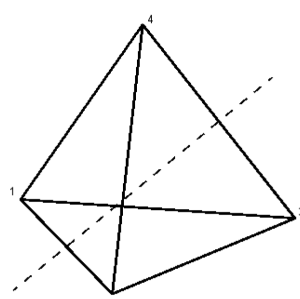
Primer 13 *Grupa rotacionih simetrija pravilnog tetraedra izomorfna je grupi A_4.*

Rešenje.

Red grupe $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$. U slučaju tetraedra razlikujemo dve grupe rotacija. Prvu grupu čine rotacije oko visine tetraedra, za $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$. Kako imamo četiri visine i dva ugla rotacije, takvih rotacija ima ukupno 8.



Drugu grupu čine rotacije oko prava koje spajaju središra naspramnih ivica za ugao π. Takvih rotacija ima 3. Uključujući i identičnu transformaciju, to je ukupno 12 rotacija.

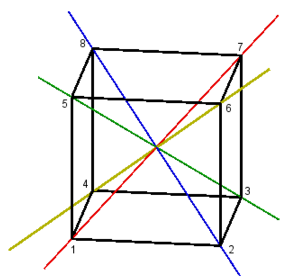


Da bismo dokazali da je grupa rotacionih simetrija izomorfna baš sa grupom A_4, označićemo temena tetraedra sa 1, 2, 3, 4. Svaka od nabrojanih rotacija indukuje jednu permutaciju skupa temena. Rotacijama oko visina tetraedra odgovaraju ciklusi dužine 3, obzirom da je jedno teme pripada osi rotacije, te je fiksirano, primer jedne rotacije jeste (123)(4). Rotacijama oko prave koja sadrži središta naspramnih stranica odgovaraju proizvodi dve transpozicije, na primer (12)(34). Na taj način formirana je funkcija iz grupe simetrija u grupu A_4. Dobijena funkcija je bijekcija, ali i izomorfizam, jer u slučaju obe grupe, grupe rotacionih simetrija i grupe permutacija A_4, predstavlja kompoziciju preslikavanja. ♣

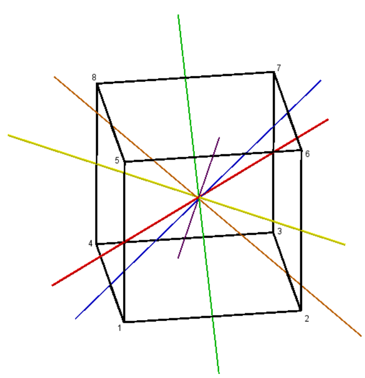
Primer 14 *Grupa rotacionih simetrija kocke izomorfna je grupi S_4.*

Rešenje.

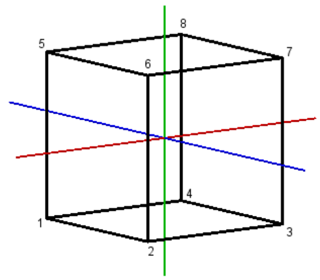
Prvu grupu rotacija čine rotacije oko glavnih dijagonala kocke, za $\frac{2\pi}{3}$ i $\frac{4\pi}{3}$. Kako imamo 4 glavne dijagonale, takvih rotacija imamo 8.



Drugu grupu rotacija čine rotacije oko prava koje sadrže središta naspramnih ivica za ugao π. Kako imamo 6 takvih pravih, imamo isto toliko i rotacija.



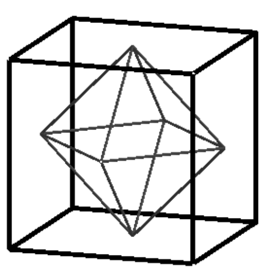
Treću grupu rotacija čine rotacije oko prava koje sadrže središta naspramnih stranica za ugao $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Postoji 9 ovakvih rotacija.



Uključujući i identičnu transformaciju, to je ukupno 24 rotacije.

Obeležimo sa $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ temena kocke. Rotacijama oko glavne ose odgovaraju proizvodi tri transpozicije, na primer, ako je osa rotacije dijagonala kroz temena 1 i 7, odgovarajuća permutacija je (1)(25)(34)(68)(7). Rotacijama oko ptavih koje sadrže središta naspramnih ivica odgovara proizvod četiri transpozicije, na primer ako je osa rotacije prava koja prolazi kroz središta ivica 14 i 67 odgovarajuća permutacija (14)(28)(35)(67). Preostale su nam rotacije oko pravih koje sadrže središta naspramnih stranica kojima odgovaraju proizvodi dva ciklusa dužine 4, na primer, ako je osa rotacije prava koja prolazi kroz središta stranica 1234 i 5678 odgovarajuća permutacija je (1234)(5678).

Ako se prisetimo da pravilan oktaedar konstruišemo tako što spojimo središta svih strana kocke, možemo zaključiti da su ova tela dualna, s toga je grupa rotacionih simetrija oktaedra takodje S_4.



3 Primeri

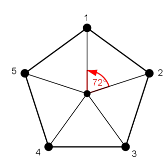
U ovom poglavlju ćemo pokušati da sa što više primera ilustrujemo primenu teorije dejstva, konkretno *Bernsajdove leme* na rešavanje enumerativnih problema.

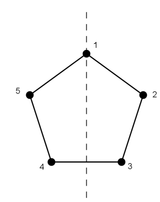
Primer 15 *Na koliko različitih načina je moguće obojiti temena pravilnog petougla sa tri boje?*

Rešenje.

Ako temena petougla označimo brojevima, skup na koji dejstvujemo jeste $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, a kako su nam na raspolaganju tri boje $m = 3$.

Grupa koja dejsvuje na petougao je diedarska grupa D_5, reda $|D_5| = 10$.





$$D_5 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma\}$$

$g \in D_5$	permutacije	c - broj ciklusa	m^c
ε	(1)(2)(3)(4)(5)	5	3^5
ρ	(12345)	1	3^1
ρ^2	(13524)	1	3^1
ρ^3	(14253)	1	3^1
ρ^4	(15432)	1	3^1
σ	(12)(35)(4)	3	3^3
$\rho\sigma$	(1)(25)(34)	3	3^3
$\rho^2\sigma$	(15)(24)(3)	3	3^3
$\rho^3\sigma$	(14)(23)(5)	3	3^3
$\rho^4\sigma$	(13)(45)(2)	3	3^3

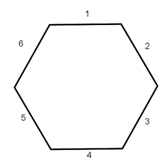
Primenom izvedene formule za broj različitih bojenja $|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum m^c$, dobijamo

$$\tfrac{1}{10}(3^5 + 3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3) = 39.$$

Pravilan petougao sa tri boje možemo obojiti na 39 različitih načina. ♣

Primer 16 *Na koliko različitih načina možemo obojiti drveni ram oblika pravilnog šestougla, ukoliko je svaku stranicu potrebno obojiti jednomo od 4 date boje?*

Rešenje.



Ako stranice rama obeležimo brojevima, skup na koji dejstvujemo je $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. Kako su nam na raspolaganju 4 boje, onda je $m = 4$.

Grupa koja dejstvuje na skup X jeste diedarska grupa D_6, reda $|D_6| = 12$.

$$D_6 = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma, \rho^5\sigma\}$$

$g \in D_6$	permutacije	c - broj ciklusa	m^c
ε	(1)(2)(3)(4)(5)(6)	6	4^6
ρ	(123456)	1	4^1
ρ^2	(135)(246)	2	4^2
ρ^3	(14)(25)(36)	3	4^3
ρ^4	(153)(264)	2	4^2
ρ^5	(165432)	1	4^1
σ	(1)(4)(26)(35)	4	4^4
$\rho\sigma$	(16)(25)(34)	3	4^3
$\rho^2\sigma$	(15)(24)(3)(6)	4	4^4
$\rho^3\sigma$	(14)(23)(56)	3	4^3
$\rho^4\sigma$	(13)(2)(46)(5)	4	4^4
$\rho^5\sigma$	(12)(36)(45)	3	4^3

Primenom izvedene formule za broj različitih bojenja

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^c,$$

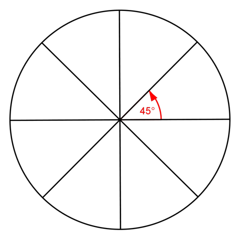
dobijamo

$\frac{1}{12}(4^6 + 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^2 + 4^1 + 4^4 + 4^3 + 4^4 + 4^3 + 4^4 + 4^3) = 430.$

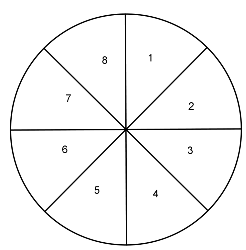
Drveni ram sa četiri boje možemo obojiti na 430 različitih načina.

Komentar. Kao i u prethodnim primerima moguće je primeniti klase konjugovanosti grupe D_6. ♣

Primer 17 *Rođendanska torta podeljena je na 8 jednakih parčadi. Na koliko različitih načina je mogiće poređati crvene i plave svećice koje se postavljaju u centar svakog parčeta?*



Rešenje.



Skup na koji dejstvujemo je reda 8, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, a skup kojim dejstvujemo jeste skup rotacija $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6, \rho^7\}$ i reda je 8.

Na raspolaganju su nam dve boje, pa je $m = 2$.

$g \in G$	permutacije	c - broj ciklusa	m^c
ε	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	8	2^8
ρ	(12345678)	1	2^1
ρ^2	(1357)(2468)	2	2^2
ρ^3	(14725836)	1	2^1
ρ^4	(15)(26)(37)(48)	4	2^4
ρ^5	(16385274)	1	2^1
ρ^6	(1753)(2864)	2	2^2
ρ^7	(18765432)	1	2^1

Primenom izvedene formule za broj različitih bojenja

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} m^c,$$

dobijamo

$$\tfrac{1}{8}(2^8 + 2^1 + 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1) = 36.$$

Rešićemo ga i primenom prvobitne formule. Klase konjugovanosti grupe G su

$$\begin{gathered} \{\varepsilon\}, \\ \{\rho, \rho^7\}, \\ \{\rho^2, \rho^6\}, \\ \{\rho^3, \rho^5\}, \\ \{\rho^4\}. \end{gathered}$$

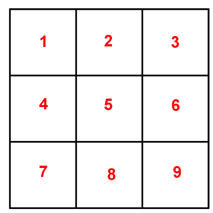
Identičko preslikavanje fiksira sva moguća bojenja, $|Y^\epsilon| = 2^8$. Permutacija ρ iz druge klase konjugovanosti slika $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 7 \to 8$, što znači da je jedino fiksirano bojenje ono kod kogu su sva temena iste boje, njih 2. Analogno, $|Y^{\rho^2}| = 2^2$, $|Y^{\rho^3}| = 2$, $|Y^{\rho^4}| = 2^4$. Primenom prvobitne formule uz korišćenje napomene o klasama konjugovanosti

$$|Y/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Y^g|,$$

dobijamo $\frac{1}{8}(2^8 + 2 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^1 + 2^4) = 36$.

♣

Primer 18 *Na koliko različitih načina se može obojiti tabla 3×3 belom i crnom bojom? Bojenja smatramo istim ako se jedno može dobiti rotacijom drugog.*



Rešenje.

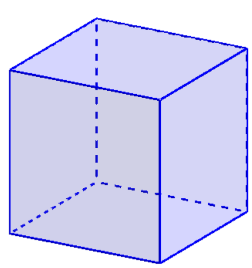
Skup kojim dejstvujemo na $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ jeste grupa rotacija kvadrata $G = \{\varepsilon, \rho, \rho^2, \rho^3\}$, a na raspolaganju su nam dve boje. Ukupno postoji 2^9 bojenja, ali koliko njih je različitih?

Svakako, identičko preslikavanje, ε, fiksira svih 2^9 bojenja. Rotaciji za $90°$ odgovara permutacija $(1397)(4268)(5)$, pa fiksira 2^3. Rotacija za $180°$ odgovara permutacija $(19)(28)(37)(46)(5)$ fiksira 2^5, a rotaciji za $270°$ odgovara permutacija $(1793)(4862)(5)$ i ona fiksira 2^5 bojenja. Sada možemo primeniti Bernsajdovu lemu

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} |X^g| = \frac{1}{4}(2^9 + 2^3 + 2^5 + 2^3) = 140.$$

♣

Primer 19 *Ako strane kocke treba obojiti sa tri boje, koliko onda ima različitih bojenja?*



Rešenje.

Ako stranice kocke obeležimo brojevima, bočne strane sa $1, 2, 3, 4$ skup na koji dejstvujemo je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na raspolaganju su nam tri boje, te je $m = 3$.

Naučili smo da je grupa koja dejstvuje na kocku grupa S_4, inače podgrupa grupe S_6, reda 24. Možemo ih svrstati u tri grupe. Rotacija oko

- glavne dijagonale;
- prave koja spaja središta naspramnih ivica;
- prave koja spaja središta naspramnih stranica.

Kod prve grupe rotacija, razlikujemo rotacije za 120° i 240°, imamo 4 glavne dijagonale, pa je takvih rotacija ukupno 8.

Kod druge grupe rotacija imamo 6 osa rotacija, pa toliko i rotacija.

Kod treće grupe razlikujemo rotacije za 90°, ima ih 6 i rotacije za 180°, ima ih 3.

Neka je ρ_{a_i} rotacija prve grupe za 120°, tada je

$$\rho_{a_i} = (125)(346).$$

Data permutacija se sastoji od 2 ciklusa, a takvih imamo 4.

Neka je $\rho_{a_i}^2$ rotacija prve grupe za 240°, tada je

$$\rho_{a_i}^2 = (152)(364).$$

Data permutacija se sastoji od 2 ciklusa, a takvih imamo 4.

Neka je ρ_{b_i} rotacija druge grupe. Tada je

$$\rho_{b_1} = (15)(24)(36).$$

Data rotacija se sastoji od tri cilkusa, a takvih imamo 6.

Neka je ρ_{c_i} rotacija druge grupe za 90°, tada je

$$\rho_{c_1} = (1234)(5)(6).$$

Data rotacija se sastoji od 3 cilkusa, a imamo ih 6.

Neka je $\rho_{c_i}^2$ rotacija druge grupe za 90°, tada je

$$\rho_{c_1}^2 = (13)(24)(5)(6).$$

Data rotacija se sastoji od 4 cilkusa, a imamo ih 3.

I identitet

$$\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6),$$

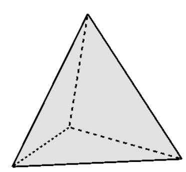
permutacija od 6 ciklusa.
Primenom izvedene formule $|Y/G| = \frac{1}{|G|}\sum m^c$, dobijamo

$$\tfrac{1}{24}(3^6 + 8\cdot 3^2 + 6\cdot 3^3 + 6\cdot 3^3 + 3\cdot 3^4) = 57.$$

Koristeći tri boje stranice kocke možemo obojiti na 57 različitih načina.

♣

Primer 20 *Na koliko različitih načina je moguće obojiti stranice tetraedra sa 4 boje?*



Rešenje.
Ako stranice tetraedra označimo sa 1, 2, 3, 4, a sa X skup svih mogućih bojenja tetraedra sa 4 boje, tada je $|X| = 4^4$. Posmatraćemo dejstvo grupe rotacija tetraedra, odnosno grupe A_4 na skupu $\{1, 2, 3, 4\}$. Interesuje nas koliko različitih orbita postoji.

Kako smo prethodno dokazali da važi $|X^g| = |X^h|$, ukoliko su g i h konjugovani, naš zadatak biće da posmatramo po jedan element iz svake klase konjugovansoti i odredimo $|X^\pi|$.

Klase konjugovanosti A_4 su

$$\begin{gathered}\{(123),(124),(134),(234)\},\\ \{(132),(142),(143),(243)\},\\ \{(12)(34),(13)(24),(14)(23)\},\\ \{(1)\}.\end{gathered}$$

Za početak uzimamo element iz prve klase konjugovanosti i želimo da odredimo $|X^{(123)}|$, gde je $\{x \in X | (123) \cdot x = x\}$. Permutacija (123) fiksira element 4, a slika $1 \to 2 \to 3$. Kako mi tražimo fiksirane elemente, odgovaraju nam bojenja gde je stranica 4 proizvoljne boje, a stranice 1, 2, 3 iste, što znači ukupno 4^2. Analogno, $|X^{(132)}|$, sa permutacijom iz druge klase.

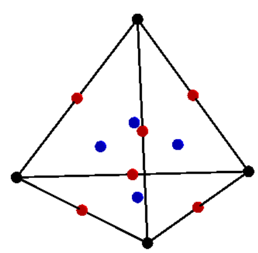
Kod treće klase konjugovanosti permutacija (12)(34), slika $1 \to 2$, a $3 \to 4$, što znači da naš uslov zadovoljavaju bojenja kod kojih su stranice 1 i 2 isto obojene, kao i stranice 3 i 4, opet ukupno njih 4^2. Poslednja jednočlana klasa, $|X^{(1)}| = 4^4$.

Sada možemo primeniti Bernsajdovu lemu u izvornom obliku i dobiti traženi broj.

$$\tfrac{1}{12}(4 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^2 + 4^4) = 36.$$

♣

Primer 21 *Ako temena, središta ivica i središta stranica tetraedra treba obojiti korišćenjem tri boje, koliko ima različitih bojenja?*



Rešenje.

Ako sa $1, 2, 3, 4$ obe;ežimo temena tetraedra, sa $5, 6, 7, 8, 9, 10$ središta stranica, redom $12, 23, 31, 14, 24, 34$, a sa $11, 12, 13, 14$ središta trouglova $123, 124, 234, 134$, onda se skup na koji dejstvujemo sastoji od 14 elemenata, odnosno $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$. Na raspolaganju su nam tri boje, $m = 3$.

Na prethodnim stranicama naučili smo da je grupa koja dejstvuje na tetraedar grupa A_4. Takođe, naučili smo da je njen red $|A_4| = \frac{4!}{2} = 12$.

Dok nismo bili upoznati sa teorijom dejstva možda bi naš odgovor bio 3^{14}. Svakako, to je netačan odgovor.

Kod grupe A_4 razlikujemo dve vrste rotacija:

• oko visine tetraedra,

• oko prave koje spajaju središta naspramnih stranica.

Kod rotacija oko visine tetraedra razlikujemo rotacije za $120°$ i $240°$. Kako imamo 4 visine, takvih rotacija je ukupno 8.

Rotacija oko prave koja spajaja središta naspramnih stranica je za $180°$, odnosno simetrija. Navedenih pravih imamo 3, pa toliko i simetrija.

$$A_4 = \{\varepsilon, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2, \rho_4^2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Neka je ρ_i rotacija oko visine za tetraedra za $120°$, tada je

$$\rho_1 = (123)(8910)(567)(121314)(4)(11).$$

Vidimo da data permutacija ima 6 ciklusa. Ovakvih rotacija imamo 4.

Neka je ρ_i^2 rotacija oko visine za tetraedra za $240°$, tada je

$$\rho_1^2 = (132)(8109)(576)(121413)(4)(11).$$

Vidimo da data permutacija ima 6 ciklusa. Ovakvih rotacija imamo 4.

Neka je σ_i simetrija, tada je

$$\sigma_1 = (5)(10)(12)(34)(68)(79)(1113)(1214).$$

Vidimo da data permutacija ima 8 ciklusa. Ovakvih simetrija imamo 3.

I identitet

$$\varepsilon = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14),$$

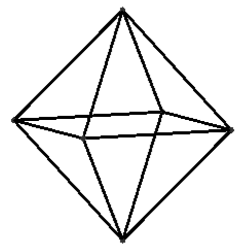
permutacija koja se sastoji od 14 cilkusa.

Primenom izvedene formule $|Y/G| = \frac{1}{|G|}\sum m^c$, dobijamo

$$\tfrac{1}{12}(3^{14} + 4 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^6 + 3 \cdot 3^8) = 400707.$$

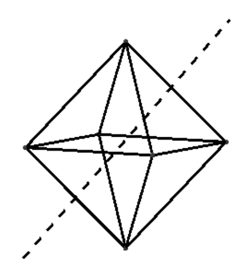
Broj različitih bojenja temena, središta ivica i središta stranica sa tri boje je 400707. ♣

Primer 22 *Na koliko različitih načina možemo obojiti stranice oktaedra upotrebom tri boje?*

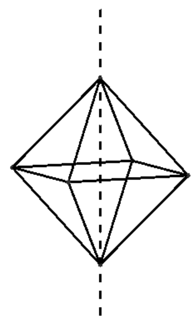


Rešenje.

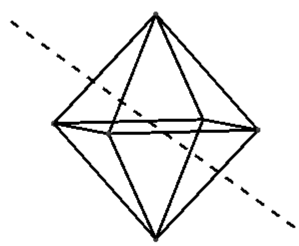
Prvo ćemo se pozabaviti grupom simetrija oktaedra. Identičko preslikavanje je jedna od simetrija, zatim 6 rotacija za ugao od 180° sa osom koja prolazi kroz središta naspramnih stranica.



Sledi 6 rotacija za ugao od 90° sa osom koja prolazi kroz naspramna temena, kao i 3 rotacije za ugao od 180° sa istom osom.



Preostalo je 8 rotacija za ugao 60° sa osom koja prolazi kroz središta naspramnih stranica.



Kada prebrojimo sve rotacije, zaključujemo da je grupa simetrija nad oktaedrom reda 24.

Sada se možemo vratiti na naš konkretan zadatak. Ako stranice oktaedra obeležimo brojevima, skup na koji dejstvujemo je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, a grupa kojom dejstvujemo je reda 24. Na raspolaganju su nam tri boje, pa je $m = 3$. Neka su ε identičko preslikavanje, ρ_1 rotacija za ugao od 180° sa osom koja prolazi kroz središta naspramnih stranica, ρ_2 rotacija za ugao od 90° sa ososom koja prolazi kroz naspramna temena, ρ_3 rotacija za ugao od 180° sa istom osom i ρ_4 rotacija za 60° sa osom koja prolazi kroz središta naspramnih stranica, u tabeli koja sledi možemo videti iz koliko ciklusa se sastoje.

$g \in G$	permutacije	c - broj ciklusa	m^c
ε	(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)	8	3^8
ρ_1	(14)(23)(58)(67)	4	3^4
ρ_2	(1234)(5678)	2	3^2
ρ_3	(13)(24)(57)(68)	4	3^4
ρ_4	(164)(287)(3)(5)	4	3^4

Na kraju je ostalo samo da ih prebrojimo.

$$\tfrac{1}{24}(3^8 + 6 \cdot 3^4 + 6 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^4) = 333$$

Priznaćemo da bi jako teško bilo prebrojati sva ova bojenja da nismo koristili Bernsajdovu lemu. ♣

Literatura

[1] Zoran Petrović, Algebra 1, predavanja za školsku 2014/2015

[2] Zoran Petrović, Algebra 2, predavanja za školsku 2014/2015

[3] Duško Jojić, Elementi enumerativne kombinatorike, Naša knjiga, Beograd, 2011

[4] Mollee Huisinga, Polya's counting Theory, 2012