Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

# Master rad

## Čirnhausova transformacija za rešavanje jednačina trećeg stepena

Mentor:
prof. dr Zoran Petrović

Student:
Tamara Tešić

Beograd,
Mart 2018.

# Sadržaj

# 1 Uvod

Kao što znamo moguće je rešiti opšte jednačine trećeg i četvrtog stepena tako što se rešenja jednačina izraze korišćenjem osnovnih algebarskih operacija i određenih korena (rešenja u radikalima). Za rešavanje jednačina trećeg stepena dobro su poznate *Kardanove formule*. Manje je poznat pristup nemačkog matematičara *fon Čirnhausa* (Ehrenfried Walther von Tschirnhaus) s kraja XVII veka. Njegova ideja sastoji se u tome da se pogodnom smenom opšta jednačina trećeg stepena svede na jednačinu oblika $y^3 = K$. Ovo je alternativan način za rešavanje jednačina trećeg stepena koji koristi ideju različitu od one kojom se izvode Kardanove formule. Čirnhausove transformacije dalje su razvijali *Bring* (Erland Samuel Bring) i *Džerard* (Jerrard George Birch). U nastavku ćemo prikazati sve te transformacije. Takođe radio je i na rešavanju polinoma petog stepena.

## 1.1 Istorijat rešavanja algebarskih jednačina trećeg stepena

**Scipion del Fero** (Scipione del Ferro, 1465 - 1526.god, Bolonja) je prvi rešio kubnu jednačinu. Del Fero studirao je na Univerzitetu u Bolonji, gde je kasnije postao profesor. U to vreme bila su česta javna takmičenja matematičara, ali ne znamo da li je on učestvovao u njima. Ta takmičenja su ličila na dvoboje. Del Fero tokom svog života nije objavio ništa. Pred kraj svog života, Fero je metod rešavanja kubne jednačine poverio jednom svom učeniku **Antoniju Mariji Fioru** (Antonio Maria Del Fiore), a svesku sa beleškama je dao svom zetu, **Hanibalu Naveu** (Hannibal Nave). Nakon smrti Del Fera 1526. godine, Hanibal je nasledio njegovo mesto na Univerzitetu u Bolonji. O tome kada je prvi put rešena kubna jednačina istoričari nagađaju. Neki istoričari misle i to da je Del Fero sarađivao sa **Lukom Pačoli** (Luca Pacioli) početkom XVI veka u Bolonji. Ali da li je to baš tako?! Nekoliko godina ranije Pačoli je štampao svoje delo *Summa* u kome je tvrdio da nije moguće rešiti kubnu jednačinu. Ostaje pitanje da li je Pačoli zaista mogao da koristi Del Feru.

Što se tiče toga da postoje dva slučaja kubne jednačine, treba napomenuti da mi danas kada rešavamo kubnu jednačinu imamo formule slične onima za rešavanje kvadratne jednačine koja se prikazuje u obliku:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

a njena rešenja u obliku:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ovo je u XVI veku bilo nemoguće zamisliti, iz razloga što nisu pomišljali da jednačina može imati negativna rešenja. Evropa u to vreme nije prihvatala negativne brojeve, čak ni broj nula. Nula se nalazila u pozicionom decimalnom sistemu i označavala je prazno mesto, a ne broj.

Od davnina je poznato da se kvadratni član kubne jednačine može eliminasti odgovarajućom smenom, pa se na taj način kubna jednačina mogla svesti na oblik $x^3 + mx = n$ ili $x^3 = mx + n$, $m$ i $n$ su pozitivni brojevi.

Nakon toga 1535.godine, **Nikolo Fontana Tartalja** (Nicolo Fontana "Tartaglia", 1500. godine rođen u Bresi, a umro 1577. godine u Veneciji) je rešio kubnu jednačinu potpuno nezavisno od Del Fera. Desetak godina nakon smrti Del Fera, njegov učenik, Antonio Marija Fior, je počeo da se hvali kako zna da reši kubnu jednačinu. Kako su u to vreme bila održavana pomenuta takmičenja matematičara, organizovano je jedno gde su učestovali Tartalja i Antonio Marija Fior[1]. Takmičenje je bilo koncipirano tako da su jedan drugom zadavali zadatke i pobednik bi bio onaj koji bi rešio više protivnikovih problema. Na takmičenju ubedljivu pobedu odneo je Tartalja koji ne samo da je rešio više protivnikovih zadataka, već je rešio sve protivnikove zadatke, a Fior je uspeo da reši samo jedan slučaj kubne jednačine. To je jedan od razloga zbog kojih se sumnja da Del Fero nije znao da reši oba slučaja, ili je možda on samo jedan slučaj rekao svom učeniku.

Nakon toga pojavljuje se **Đirolamo Kardano** (Girolamo Cardano, 1501-1576, Italia) kome je pažnju privuklo održano takmičenje. On je bio profesor matematike u Milanu u to vreme, i verovao je da se kubna jednačina ne može rešiti, sve dok nije čuo za ovo takmičenje. Pokušavao je da stupi u kontakt sa Tartaljom kako bi saznao u čemu je tajna i kako je uspeo da reši svaku kubnu jednačinu koju mu je zadao Fior. Nije bilo lako stupiti u kontakt sa Tartaljom jer je on sve vreme odbijao to, do trenutka kada mu je Kardano ponudio da ga upozna sa milanskim vojvodom. I tako, 1539. godine Kardano je saznao tajnu rešavanja kubnih jednačina ali pod uslovom da je ne objavi. Međutim Kardano je 1545. godine objavio svoje delo iz algebre *Ars magna* u kome su kako je Tartalja video bile svoje (Tartaljine) formule za rešavanje kubne jednačine. Te formule su nama danas poznate kao *Kardanove formule* za rešavanje jednačina trećeg stepena. Da li je Kardano zaista održao reč koju je dao Tartalji?! On smatra da jeste, jer kada je otputovao u Firencu sa svojim učenikom Lodovikom Ferarijem (Lodovico Ferrari) upoznali su Hanibala dela Navea. Shvatili su da i on zna tajnu rešavanja jednačina trećeg stepena. Nakon nekog vremena Hanibal im je pokazao ono što mu je Del Fero ostavio nakon svoje smrti. Tada su shvatili da Tartalja nije prvi rešio jednačine

[1] http://e.math.hr/dvoboji/index.html

trećeg stepena i nakon tri godine su objavili svoje delo. Autori *Ars magna* bili su i Kardano i Ferari, međutim samo je Kardano bio potpisan. Pored ovoga, ima još i Ferarijev metod za rešavanje jednačina četvrtog stepena, ali to nisu mogli da objave jer na taj način ne bi održali reč koju su dali Tartalji.

I pored ovoga, Tartalja je bio jako ljut na Kardana i žestoko ga napadao. Međutim to je bilo jako loše za njega jer je Kardano u tom trenutku bio na vrhuncu svoje slave. Takođe je bio i jako snalažljiv pa nije sam ulazio u raspravu sa Tartaljom, već je to radio Ferari, što je Tartalju još više nerviralo.

Kada sagledamo celu stvar sa stanovišta matematike, Kardanovo delo je postalo jako važno, zapravo uvrstilo se u najvažnija dela od helenizma do novog doba. U to vreme kada je *Ars magna* objavljena već je postojala štampa, što je još više doprinelo publicitetu ovog dela. Treba naglasiti da Kardano nije samo napisao nešto što je već postojalo, već da se u ovom delu nalaze se originalni rezultati kako njega tako i Ferarija.

*Ars Magna* je sadržala nešto za šta se danas može reći da je bio predosećaj kompleksnog broja. Grci nisu mogli da prihvate nulu i negativne brojeve i trebalo je da prođu vekovi kako bi to bilo prihvaćeno.

Manje je poznat nemački matematičar **Erenfrid Valter fon Čirnhaus** (Ehrenfried Walther von Tschirnhaus, 1651-1708) koji je takođe imao metod za rešavanje jednačina trećeg stepena. O njemu ćemo govoriti u nastavku.

Sasvim logično je bilo da se nakon rešavanja jednačina trećeg i četvrtog stepena postavi pitanje da li svaka algebarska jednačina ima bar jedno rešenje. U XVII veku matematičari su došli do zaključka da svaka jednačina u skupu kompleksnih brojeva ima rešenje (korene), i to baš onoliko koliki je stepen te jednačine. Međutim to je samo bilo tvrđenje koje nisu uspevali da dokažu sve dok se nije pojavio **Gaus** (Johann Carl Friedrich Gauss) 1815. godine. Posle bezbroj pokušaja da se to dokaže Gaus je izneo potpuni dokaz ove teoreme.

Pored ovog pitanja nametnulo se i pitanje o univerzalnom načinu rešavanja jednačina većeg stepena. To što mi znamo da jednačina $n$-tog stepena ima baš toliko rešenja ništa nam ne govori o samom načinu rešavanja. Do tada su bili otkriveni načini za rešavanje algebarskih jednačina trećeg i četvrtog stepena, pa su usledili pokušaji da se otkriju načini za rešavanje jednačina višeg stepena. Italijanski fizičar **Paolo Rufini** (Paolo Ruffini) objavio je u svojoj knjizi da takav algoritam ne postoji, ali mu dokaz nije bio kompletan. Nakon toga, nezavisno od Rufinija do istog zaključka došao je **Nils Abel** (Niels Henrik Abel) koji je imao potpuni dokaz za ovo tvrđenje. Do sličnih rezultata došao je i **Evarist Galoa** (Evariste Galois).

Galoa je još kao dečak bio dosta zainteresovan za matematiku, međutim izveštaji o njegovim rezultatima u školi bili su jako konfuzni. Pošto je bio aktivan u politici neki od profesora, uglavnom monarhisti su ga ocenili kao lenjog i ne baš inteligentnog učenika. On je bio uporan u tome da dokaže koje jednačine mogu, a koje ne mogu da se reše u radikalima. Svoje pokušaje slao je jako inteligentnim ljudima tog vremena. Jedan od njih bio je Koši (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) koji je video šta on radi i shvatio značaj toga. Iz komunikacije sa Košijem Galoa je saznao kako se deo njegovih rezultata preklopio sa rezultatima pomenutog Nilsa Abela. Galoa je upisao normalnu Veliku školu u kojoj mu je učitelj bio **Furije** (Joseph Fourier, 1768-1830), jedna od jako važnih osoba u matematici. Galoa je svoje radove slao i njemu, a Furije je neke radove razmatrao za veliku nagradu Akademije nauka. Na nesreću Furije je preminuo 1830. godine. Nakog toga je Galoa uhapšen u jednoj od revolucija. Potom je oslobođen, a na kraju je nastradao u dvoboju za koji se misli da je bio izazvan zbog jedne žene.

Abel koga smo pomenuli ranije je svoje radove slao Gausu i bio je u stalnoj komunikaciji sa njim. Bavio se magnetizmom, rešavanjem polinomskih jednačina i eliptičkim integralima. Neki od njegovih radova došli su i do **Jakobija** (Carl Gustav Jacobi, 1804-1851) koji je počeo da sarađuje sa njim. Jakobi je objavio nekoliko zajedničkih radova koji se odnose na eliptičke jednačine. Bio je poznatiji od Galoe. Velika nagrada francuske Akademije nauka za rešavanje jednačina 1830. godine dodeljena je Jakobiju i Abelu. Nakon nekoliko godina priznat je i Galoin doprinos.

Zaključujemo da mi danas znamo da polinom $n$-tog stepena ima baš toliko rešenja, ali ne znamo ništa o univerzalnom načinu na koji bismo ta rešenja odredili.

## 1.2 Ko je bio Erenfrid Valter fon Čirnhaus

**Erenfrid Valter fon Čirnhaus**, rođen je 10. IV 1651. u Kislingsvalde-u kao sedmo, najmlađe dete, a umro 11. X 1708. godine u Drezdenu, bio je nemački matematičar, fizičar, lekar i filozof. Majka mu je bila Elizabet (Elisabeth Eleonore Freiin Achil von Stirling), nemačkog i škotskog porekla, a otac Rat (Rat Christoph von Tschirnhaus), zemljoposednik saksonskog plemstva. Nakon smrti majke 1657. godine, o njemu se brinula maćeha Ana (Anna von Nostitz).[2]

Čirnhaus je imao privatne učitelje od kojih je učio i zbog njih je počeo da obraća pažnju na matematiku i prirodne nauke. Sa petnaest godina, 1666. godine, upisao je gimnaziju u Gorlicu. I u to vreme je imao veliko interesovanje za matematiku, pa je uzimao privatne časove kako bi naučio više od onoga što se u školi radilo. Studirao je matematiku, filozofiju i medicinu na univerzitetu u Lajdenu od 1668. godine. Takođe završio je i pravni fakultet 8. VI 1669, ali nije imao interesovanja za tu temu. Uzimao je privatne časove

[2]https://de.wikipedia.org/wiki/Ehrenfried_Walther_von_Tschirnhaus

kod **Pitera** (Pieter van Schooten) (polubrat slavnog matematičara **Fransa** (Frans van Schooten)). Na tim časovima ga je Piter upoznao sa matematikom i filozofijom Dekarta (Renatus des Cartes). Vojsku je služio u Holandiji. Kada je izbio rat između Holandije i Francuske, Čirnhaus je učestvovao u tome kao student, to je značilo da je prekinuo svoje studije na osamnaest meseci.

Tokom svog života dosta je putovao i sticao razna poznanstva. 1674. godine Čirnhaus je započeo evropsku turneju. Kada je otišao iz Kislingsvaldena, prvo je posetio Lajden gde je sreo starog školskog druga po imenu **Piter van Gent** koji mu je predstavio **Baruha de Spinozu** (Baruch de Spinoza). Bio je redovni član debatnog kluba koji je Spinoza vodio. Sa preporukom od Spinoze Čirnhaus je u maju 1675. godine posetio Englesku gde se sastao sa **Oldenburgom**, sekretarom kraljevskog društva. Tako je između ostalog upoznao **Isaka Njutna** (Isaac Newton) u Engleskoj. Upoznao je i **Dzona Kolins** (Johna Collins) u Londonu i **Dzona Valis** (Johna Wallis) u Oksfordu. Njima je pokazao svoj metod za rešavanje jednačina, ali se pokazalo da je to bio specijalan slučaj poznatih rezultata.

Na jesen 1675.godine, sa preporukom od Oldenburga, Čirnhaus je otisao u Pariz gde se sastao sa **Gotfridom Vilhelmom Lajbnicom** (Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz). Ostao je i radio neko vreme u Parizu sa Lajbnicom, i nakon toga je otkrio način za rešavanje kubnih jednačina i verovao je da ima univerzalni način za rešavanje jednačina n-tog stepena. Dok je radio sa Lajbnicom, on mu je omogućio da proučava neobjavljene Dekartove spise. Nakon tog proučavanja Čirnhaus je pisao o tome šta je pronašao Piter van Gentu i Spinozi.

U novembru 1676. godine, Čirnhaus je napustio Pariz i krenuo na put. Prvo mesto koje je posetio bio je Lion gde se Čirnhaus susreo sa Vijetom (Francois Villette) i zajedno sa njim izvodio eksperimente na zapaljivim ogledalima. Zatim je otputovao u Torino, Milano, Veneciju i Rim. Gde god da je otišao stupio je u kontakt sa poznatim naučnicima. Njegovo putovanje se nastavilo. Posetio je Napulj, Siciliju i Ženevu i pre nego što se vratio u Pariz, posetio je Hag i Hanover. Njegovo putovanje trajao je tri godine, a za vreme dok je putovao, redovno je obaveštavao Lajbnica o svojim zapažanjima i saznanjima, a od Lajbnica je dobijao korisne odgovore. 1678. godine dok je boravio u Rimu, Čirnhaus je napisao dugo pismo Lajbnicu. U tom pismu je razmatrao nekoliko matematičkih pitanja, izmedju ostalog i rešenje jednačina višeg stepena. Svoja rešenja je takođe poslao Lajbnicu, koji je ta rešenja kritikovao i rekao je da to nije lako i da će biti problema u dokazivanju istih.

Nakon svog dugog putovanja, vratio se u rodni grad gde je živeo. Radio je na konstrukciji kružnih i paraboličkih ogledala uz pomoć svog mehaničara Džona Hofmana (Johann Hoffmann). 22. VII 1682. godine izabran je za člana Akademije nauka u Parizu. Nadao se da će mu to omogućiti sigurnu penziju i da će moći da nastavi sa svojm naučnim istraživanjem. Te iste godine oženio je Elizabet (Elisabeth Eleonore von Lest) koja je bila ćerka važnog člana suda u Saksoniji. 1684. godine Čirnhausov otac je umro i ostavio mu da se brine o porodici u Kislingsvaldeu. Njegova žena preuzela je upravljanje imanjem kako bi on mogao da se posveti svom naučnom radu. To se odnosilo na rešavanje jednačina i proučavanju krivih. Tada je otkrio transformaciju koja kada se primenjuje na jednačinu stepena $n$, daje jednačinu stepena takođe $n$, ali bez članova $x^{n-1}$ i $x^{n-2}$.

Čirnhausova transformacija objavljena je 1683. godine u naučnom časopisu *Acta Eruditorum*, gde je u članku pokazao kako se može koristiti za rešavanje opšte kubne jednačine. Međutim njegovo uverenje da će moći da se reši jednačina bilo kog stepena $n$, nije bilo dobro, a na to mu je još ranije ukazao i Lajbnic. Pored ovoga što je poznat po Čirnhausovim transformacijama, smatra se da je on jedan od prvih izumitelja porcelana. Kao što smo naveli u tekstu da je radio na krivama, a tu je poznat jer se sinusoidna spirala naziva po njemu. U to vreme on je odlučio da napise nešto o svojoj pshilogiji. Skicu toga što je hteo da napiše posalo je Hajgensu (Christiaan Huygens), to je bilo šest godina pre nego što je to došlo do rezultata. 1686. godine objavio je *Medicina corporis*, nakon toga *Medicina mentis.* Od ova dva rada napravljena je knjiga koja je prvi put objavljena 1687. godine, a drugi put 1695. godine pod naslovom *Medicina mentis sive aris inveniendi preacepta generali.*

Pored svega ovoga Čirnahaus je izvodio eksperimente sa glinom i porcelanom. 1694. godine objavio je da je bio uspešan u eksperimentima za proizvodnju porcelana. Takođe je razmatrao mogućnost izgradnje fabrike stakla i porcelana. Čirnhausova žena umrla je 1692. godine. 1704. godine on se opet oženio sa Elizabet (Elisabeth von der Schulenburg). Botger (Johann Friedrich Bottger) i Čirnhaus su prikazali prvu šolju od porcelana u oktobru 1708. godine.

# 2 Polinomi

**Definicija 1** *Polinom po promenljivoj $x$ nad prstenom $K$ je izraz*

$$a(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

*pri čemu je $n \in \mathbf{N}$ i $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbf{K}$. Ako je $a_n \neq 0$, broj $n$ se naziva stepenom polinoma $a(x)$ (st $a(x) = n$), sabirak $a_n x^n$ se naziva najstarijim članom tog polinoma, sabirak $a_0$ slobodnim članom, a koeficijent $a_n$ najstarijim koeficijentom polinoma $a(x)$.*[3]

U ovoj definiciji $K$ može biti bilo koji prsten, struktura u kojoj su definisane dve asocijativne operacije $+$ i $\cdot$, povezane distributivnim zakonom operacije $\cdot$ prema operaciji $+$, pri čemu još za operaciju $+$ važi komutativni zakon, takođe postoje neutralni element 0, i suprotni element.

**Definicija 2** *Nula (koren) polinoma $a(x)$ je bilo koje rešenje jednačine $a(x) = 0$.*

Polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nuli naziva se *nula - polinomom.* Stepen nula polinoma nije definisan.

[3]Analiza sa algebrom 3, Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, Krug, Beograd, 2003

## 2.1 Algebarske jednačine trećeg stepena

Proizvoljna algebarska jednačina trećeg stepena je

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$ [4]

Prethodna jednačina ekvivalentna je jednačini

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

gde je $a = \frac{a_2}{a_3}$, $b = \frac{a_1}{a_3}$, $c = \frac{a_0}{a_3}$.

Kao što smo na početku rada rekli, ova jednačina može da se reši pomoću *Kardanovih formula*, što ćemo prikazati u nastavku, ali može se rešiti i *Čirnhausovim transformacijama.*

Počnimo sa rešavanjem jednačine prvog stepena (linearne jednačine) oblika $a_1x + a_0 = 0$, $a_1, a_0 \in \mathbf{R}, a_1 \neq 0$. Ova jednačina ima jedinstveno rešenje $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$, ovo rešenje je realan broj.

Sada pogledajmo jednačinu drugog stepena, oblika $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}, c \neq 0$. Ova jednačina ima dva rešenja u skupu kompleksnih brojeva. Treba napomenuti da ta rešenja mogu biti: 1° međusobno jednaki realni brojevi; 2° međusobno različiti realni brojevi; 3° par konjugovano kompleksnih brojeva. Rešenja dobijamo na sledeći način[5]:

$$ax^2 + bx + c = 0 / : a$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

Uvedimo smenu: $y = x + \frac{b}{2a}$

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad \Longrightarrow \qquad y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

[4]Analiza sa algebrom 3, Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, Krug, Beograd, 2003

[5]Ovo je najjednostavniji primer Čirnhausove transformacije

Što znači da su rešenja kvadratne jednačine:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Primetimo da se prethodna jednačina rešava svođenjem na oblik $y^2 = K$, što je ideja Čirnhausa za kubnu jednačinu, čemu je ovaj rad zapravo posvećen.

Sada rešimo jednačinu $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Za početak uvedimo novu nepoznatu:

$$y = x + \frac{a}{3}.$$

Dobijamo sledeće:

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a \cdot (y - \frac{a}{3})^2 + b \cdot (y - \frac{a}{3}) + c = 0$$

$$y^3 - ay^2 + 3y\frac{a^2}{9} - \frac{a^3}{27} + ay^2 - 2ay\frac{a}{3} + a\frac{a^2}{9} + by - b\frac{a}{3} + c = 0$$

$$y^3 + y\frac{a^2}{3} - 2y\frac{a^2}{3} + \frac{a^3}{27} + by - \frac{ab}{3} + c = 0$$

$$y^3 + y(b - \frac{a^2}{3}) + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$$

Zapišimo jednačinu u obliku:

$$y^3 + py + q = 0, \qquad p = b - \frac{a^2}{3}, \qquad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$$

Sada pretpostavimo da je $y = u + v$ i zamenimo u dobiijenu jednačinu:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0$$

Hoćemo da važi: $3uv + p = 0$.

$$u^3 + v^3 + q = 0$$

$$u^3 + v^3 = -q \qquad u^3v^3 = (uv)^3 = \big(-\frac{p}{3}\big)^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Ovo su Vijetove formule za jednačinu

$$z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 = 0$$

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$$

Rešenja ove jednačine su:

$$z_1 = u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$z_2 = v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Odavde dobijamo da je

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Dobijena formula poznata je kao *Kardanova formula*. Na ovaj način nalazimo devet mogućnosti za $y$. Jednačina $y^3 + py + q = 0$ je jednačina trećeg stepena i mora imati tri rešenja. Mi ćemo od devet mogućnosti izabrati tri. Znamo i to da jednačina trećeg stepena sa realnim koeficijentima ima bar jedno realno rešenje. Sada pretpostavimo da je $u = \alpha$, $v = \beta$, takvi da zadovoljavaju uslov: $uv = -\frac{p}{3}$, i izaberimo $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$, jedan od trećih korena jedinice. Ostali su: $\omega^2$ i $\omega^3 = 1$. Sada dobijamo:

$$y_1 = \alpha + \beta, \qquad y_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta, \qquad y_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta$$

Sada konačno možemo dobiti rešenja polazne jednačine:

$$x_1 = \alpha + \beta - \frac{a}{3}, \qquad x_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta - \frac{a}{3}, \qquad x_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta - \frac{a}{3}$$

**Primer 1.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

*Rešenje:*
Data jednačina je oblika $x^3 + px + q$, tako da prva smena nije potrebna jer smo dobili jednačinu ovog oblika, bez člana $x^2$.
Imamo da je $p = -12 \qquad i \qquad q = 16$.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -8 + \frac{\sqrt{256 - \frac{4\cdot(-12)^3}{27}}}{2} = -8 + \frac{\sqrt{256-256}}{2} = -8$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -8 - \frac{\sqrt{256 - \frac{4\cdot(-12)^3}{27}}}{2} = -8 - \frac{\sqrt{256-256}}{2} = -8$$

odavde dobijamo da je: $u = v = -2 \Rightarrow u \cdot v = 4 = -\frac{p}{3} \Rightarrow \alpha = -2; \quad \beta = -2.$
Rešenja polazne jednačine su: $\qquad x_1 = -4$

$$x_2 = -2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) - 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 = -2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$$

$$x_3 = -2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 - 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = -2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2$$

**Primer 2.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0$$

*Rešenje:*
U datoj jednačini $a = -3$, pa uvedemo smenu $y = x + \frac{a}{3}$.

$$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$$
$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) - 5 = 0$$
$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 9y + 9 - 5 = 0$$
$$y^3 + 6y + 2 = 0$$

Iz ove jednačine dobijamo: $p = 6 \qquad i \qquad q = 2.$

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{4 + \frac{4 \cdot 6^3}{27}}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{4+32}}{2} = 2$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{4 + \frac{4 \cdot 6^3}{27}}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{4+32}}{2} = -4$$

Iz ovoga dobijamo sledeće:

$$u = \sqrt[3]{2}; \qquad v = \sqrt[3]{-4}$$

$$uv = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{-4} = -2 = -\frac{p}{3}$$

Sada izaberimo $\alpha$ i $\beta$.

$$\alpha = \sqrt[3]{2}; \qquad \beta = \sqrt[3]{-4}$$

Odavde dobijamo rešenja za $y$.

$$y_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$$

$$y_2 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) - \sqrt[3]{4}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 = \sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) - \sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$y_3 = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})^2 - \sqrt[3]{4}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = \sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - \sqrt[3]{4}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$(y_1, y_2)$ je par konjugovano kompleksnih rešenja.

Rešenja polazne jednačine su:

$$x_1 = y_1 + 1; \qquad x_2 = y_2 + 1; \qquad x_3 = y_3 + 1$$

**Primer 3.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$$

*Rešenje:*

U datoj jednačini $a = 9$, pa uvedemo smenu $y = x + \frac{a}{3}$.

$$y = x + 3 \Rightarrow x = y - 3$$

$$(y-3)^3+9(y-3)^2+18(y-3)+28=0$$
$$y^3-3y^2\cdot 3+3y\cdot 9-27+9y^2-54y+81+18y-54+28=0$$
$$y^3-9y+28=0$$

Jednačina je oblika $y^3+py+q=0$, i nema drugi član. Dobijamo da je $p=-9$ i $q=28$.

$$u^3=-\frac{q}{2}+\frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-14+\frac{\sqrt{28^2+\frac{4\cdot(-729)}{27}}}{2}=-14+\frac{\sqrt{784-108}}{2}$$

$$u^3=-14+\frac{\sqrt{676}}{2}=-14+13=-1$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\frac{\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}=-14-\frac{\sqrt{28^2+\frac{4\cdot(-729)}{27}}}{2}=-14-\frac{\sqrt{784-108}}{2}$$

$$v^3=-14-\frac{\sqrt{676}}{2}=-14-13=-27$$

Iz ovoga dobijamo sledeće: $u=\sqrt[3]{-1}=-1$ i $v=\sqrt[3]{-27}=-3$.

Za realne brojeve $\sqrt[3]{-1}=-1$ i $\sqrt[3]{-27}=-3$ važi: $-1\cdot(-3)=3=-\frac{p}{3}$, pa možemo $\alpha$ i $\beta$ izabrati na sledeći način: $\alpha=-1$ i $\beta=-3$.

Sada možemo da odredimo rešenja $y$.

$$y_1=\alpha+\beta=-1-3=-4$$
$$y_2=\omega\alpha+\omega^2\beta=-(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-3(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=2+i\sqrt{3}$$
$$y_3=\omega^2\alpha+\omega\beta=-(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-3(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2-i\sqrt{3}$$

$(y_1,y_2)$ je par konjugovano kompleksnih rešenja.

Rešenja polazne jednačine su:

$$x_1 = y_1 - 3; \qquad x_2 = y_2 - 3; \qquad x_3 = y_3 - 3$$
$$x_1 = -7; \qquad x_2 = -1 + i\sqrt{3}; \qquad x_3 = -1 - i\sqrt{3}$$

**Primer 4.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

*Rešenje:*
U datoj jednačini $a = -3$, pa uvedemo smenu $y = x + \dfrac{a}{3}$.

$$y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$$

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 2(y+1) = 0$$
$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 2y + 2 = 0$$
$$y^3 + y(3 - 6 + 2) + (1 - 3 + 2) = 0$$
$$y^3 - y = 0$$

Jednačina je oblika $y^3 + py + q = 0$, i nema drugi član. Dobijamo da je $p = -1$ i $q = 0$.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = 0 + \frac{\sqrt{0 + \frac{4\cdot(-1)}{27}}}{2} = \sqrt{\frac{-1}{27}} = \frac{i}{3\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{9}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = 0 - \frac{\sqrt{0 + \frac{4\cdot(-1)}{27}}}{2} = -\sqrt{\frac{-1}{27}} = -\frac{i}{3\sqrt{3}} = -\frac{i\sqrt{3}}{9}$$

Iz ovoga dobijamo sledeće: $u = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$ i $v = \frac{i\sqrt{3}}{3}$.

Za kompleksne brojeve $-\frac{i\sqrt{3}}{3}$ i $\frac{i\sqrt{3}}{3}$ važi: $-\frac{i\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{i\sqrt{3}}{3} = -\frac{i^2}{3} = \frac{1}{3} = -\frac{p}{3}$, pa možemo $\alpha$ i $\beta$ izabrati na sledeći način: $\alpha = -\frac{i\sqrt{3}}{3}$ i $\beta = \frac{i\sqrt{3}}{3}$.

Sada možemo da odredimo rešenja $y$.

$$y_1 = \alpha + \beta = -\frac{i\sqrt{3}}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$y_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta = -\frac{i\sqrt{3}}{3}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{i\sqrt{3}}{3}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1$$

$$y_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta = -\frac{i\sqrt{3}}{3}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{i\sqrt{3}}{3}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1$$

$(y_2, y_3)$ je par konjugovano kompleksnih rešenja.

Rešenja polazne jednačine su:

$$x_1 = y_1 + 1; \qquad x_2 = y_2 + 1; \qquad x_3 = y_3 + 1$$

$$x_1 = 1; \qquad x_2 = 2; \qquad x_3 = 0.$$

# 3 Čirnhausov metod za rešavanje jednačina trećeg stepena

Iz Dekartove geometrije bilo je poznato kako se može ukloniti drugi član iz određene jednačine, ali nije bilo poznato kako ukloniti bilo koji srednji član iz date jednačine. Čirnhaus je to pokušao da uradi, i njegov način videćete u daljem tekstu[6].

Posmatrajmo jednačinu trećeg stepena $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, $x$ je koren date jednačine, a $p, q, r$ su poznate vrednosti. Kako bismo uklonili drugi član u datoj jednačini uvedimo smenu: $x = y + a_1$. Dobijamo sledeće:

$$(y + a_1)^3 - p(y + a_1)^2 + q(y + a_1) - r = 0$$

$$akko$$

$$y^3 + 3y^2a_1 + 3ya_1^2 + a_1^3 - p(y^2 + 2a_1y + a_1^2) + qy + qa_1 = 0$$

$$akko$$

$$y^3 + 3yya_1 + 3ya_1a_1 + a_1^3 - pyy - 2pa_1y - pa_1a_1 + qy + qa_1 - r = 0$$

$$akko$$

$$y^3 + y^2(3a_1 - p) + y(3a_1a_1 - 2pa_1 + q) + a_1^3 - pa_1a_1 + qa_1 - r = 0$$

[6] A method for removing all intermediate terms from a given equation, Ehrenfried Walter von Tschirnhaus

Da bismo uklonili drugi član mora važiti:

$$3y^2a_1 - py^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2(3a_1 - p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3a_1 - p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = \tfrac{p}{3}.$$

Nakon ovoga, za uklanjanje drugog člana u jednačini trećeg stepena, $x = y + a_1$ zamenimo sa $y = x + \frac{p}{3}$.

Kako bi se uklonili dva srednja člana Čirnhaus je rekao da moramo pretpostaviti da je $x^2 = bx + y + a$, isto tako da bi se uklonila tri člana rekao je da moramo pretpostaviti $x^3 = cx^2 + bx + y + a$, za četiri člana $x^4 = dx^3 + cx^2 + bx + y + a$ itd... Razlog za to je taj što kada uklanjamo jedan član koristimo jednačinu $x = y + a$ u kojoj postoji samo jedna nepoznata $a$, u jednačini $x^2 = bx + y + a$ postoje dve nepoznate $a$ i $b$, pa dva člana mogu biti uklonjena, itd...

Sada ćemo pokazati kako mogu da se uklone dva srednja člana iz date jednačine trećeg stepena $x^3 - mx^2 + nx - k = 0$. Na početku kada uklonimo drugi član dobićemo jednačinu: $y^3 - qy - r = 0$.

Sada želimo da uklonimo i drugi srednji član, pa pretpostavimo da je $y^2 = by + z + a$, iz razloga koje smo prethodno naveli.

$$y^2 = by + z + a / \cdot y$$

$$y^3 = by^2 + zy + ay$$

$$y^3 - qy - r = 0$$

$$by^2 + zy + ay - qy - r = 0$$

$$b(by + z + a) + zy + ay - qy - r = 0$$

$$b^2y + bz + ba + zy + ay - qy - r = 0$$

$$y(b^2 + z + a + q) + b(a + z) - r = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{r - b(a+z)}{b^2 + z + a - q}$$

Dobijeno $y$ zamenimo u jednačinu: $y^3 - qy - r = 0$. Dobijamo sledeće:

$$\Big(\frac{r - b(a+z)}{b^2 + z + a - q}\Big)^3 - q\Big(\frac{r - b(a+z)}{b^2 + z + a - q}\Big) - r = 0 \qquad / \cdot (b^2 + z + a - q)^3$$

$$akko$$

$$(r - b(a+z))^3 - q(r - b(a+z))(b^2 + a + z - q) - r(b^2 + a + z - q)^3 = 0$$

$$akko$$

$$(b(a+z) - r)^3 + q(r - b(a+z))(b^2 - q + (a+z))^2 + r(b^2 - q + (a+z))^3 = 0$$

$$akko$$

$$\begin{aligned} b^3(a+z)^3 - 3b^2(a+z)^2 r + 3b(a+z)r^2 - r^3 + \\ q(r - b(a+z))((b^2-q)^2 + 2(b^2-q)(a+z) + (a+z)^2) + \\ r((b^2-q)^3 + 3(b^2-q)^2(a+z) + 3(b^2-q)(a+z)^2 + (a+z)^3) = 0 \end{aligned}$$

$$akko$$

$$\begin{aligned} (a+z)^3(b^3 - qb + r) + \\ (a+z)^2(-3b^2 r + qr - 2qb(b^2-q) + 3r(b^2-q)) + \\ (a+z)(3br^2 - qb(b^2-q)^2 + qr2(b^2-q) + 3r(b^2-q)^2) + \\ (-r^3 + qr(b^2-q)^2 + r(b^2-q)^3) = 0 \end{aligned}$$

$$akko$$

*akko*

$$
\begin{aligned}
(a+z)^3(b^3-qb+r)+ \\
(a+z)^2(-3b^2r+qr-2qb^3+2q^2b+3rb^2-3rq)+ \\
(a+z)(3br^2-qb^5+2q^2b^3-q^3b+2qrb^2-2q^2r+3rb^4-6rb^2q+3rq^2)+ \\
(-r^3+qrb^4-2q^2rb^2+q^3r+rb^6-3rb^4q+3rb^2q^2-rq^3)=0
\end{aligned}
$$

*akko*

$$
\begin{aligned}
(a+z)^3(b^3-qb+r)+ \\
(a+z)^2(-2qb^3+2q^2b-2qr)+ \\
(a+z)(-qb^5+3rb^4+2q^2b^3-4qrb^2+b(3r-q^3)+rq^2)+ \\
(-r^3-2rb^4+rq^2b^2+rb^6)=0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Dobijenu jednačinu (1) podelimo sa $b^3-qb+r$. Dobićemo sledeće:

$$
\begin{array}{l}
(-2qb^3+2q^2b-2qr):(b^3-qb+r)=-2q \\
\underline{-2qb^3+2q^2b-2qr} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
(-qb^5 & +3rb^4 & +2q^2b^3 & -4qb^2r & +b(3r-q^3) & +rq^2):(b^3-qb+r)=-qb^2+3rb+q^2 \\
-qb^5 & & +q^2b^3 & -qb^2r & & \\
\hline
 & 3rb^4 & +q^2b^3 & -3qb^2r & +b(3r-q^3) & +rq^2 \\
 & 3rb^4 & & -3rqb^2 & +3r^2b & \\
\hline
 & & +q^2b^3 & & -bq^3 & +rq^2 \\
 & & +q^2b^3 & & -bq^3 & +rq^2 \\
\hline
 & & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllllll}
(b^6 & -2qb^4 & & +q^2b^2 & & -r^2) : (b^3 - qb + r) = b^3 - qb + r \\
\underline{b^6} & \underline{-qb^4} & \underline{+b^3r} & & & \\
 & -qb^4 & -b^3r & +q^2b^2 & & \\
 & \underline{-qb^4} & & \underline{+q^2b^2} & \underline{-qrb} & \\
 & & -b^3r & & +qrb & -r^2 \\
 & & \underline{-b^3r} & & \underline{+qrb} & \underline{-r^2} \\
 & & & & & 0
\end{array}
$$

Iz ovoga dobijamo sledeće:

$$(a+z)^3 + (a+z)^2(-2q) + (a+z)(-qb^2 + 3rb + q^2) + r(b^3 - qb - r) = 0$$

U dobijenoj jednačini drugi i treći član su jednaki 0 *akko*

$$3az^2 - 2qz^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2(3a - 2q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{2q}{3}$$

$$3a^2z - 4aqz - qb^2z + 3rbz + q^2z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z(3a^2 - 4aq - qb^2 + 3rb + q^2) = 0 \tag{2}$$

U dobijenoj jednačini (2) zamenimo vrednost $a$ koju smo dobili.

$$
\begin{aligned}
z(3\frac{2q}{3} - 4\frac{2q}{3}q - qb^2 + 3rb + q^2) &= 0 \\
\textit{akko} \quad z(\frac{4}{3}q - \frac{8}{3}q + q^2 - qb^2 + 3rb) &= 0 \\
\textit{akko} \quad -\frac{4}{3}q - \frac{8}{3}q + q^2 - qb^2 + 3rb &= 0 \\
\textit{akko} \quad -\frac{1}{3}q - qb^2 + 3rb &= 0 \\
\textit{akko} \quad 3qb^2 - 9rb + q^2 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow b_{1,2} = \frac{9r \pm \sqrt{81r^2 - 12q^3}}{6q} = \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{\frac{81r^2}{36q^2} - \frac{12q^3}{36q^2}}$$

$$b_{1,2} = \frac{3r}{2q} \pm \frac{3}{q}\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} = \frac{3}{q}\Big(\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}\Big)$$

Ukoliko bismo sada dobijene $a$ i $b$ zamenili u jednačini sa početka:

$$y^2 = by + z + a$$

dva srednja člana bi bila uklonjena. Ustvari, data kubna jednačina uz pomoć jednačine $y^2 = by + z + a$ bi bila transformisana u kubnu jednačinu u kojoj su dva srednja člana uklonjena.

**Primer 1.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

*Rešenje:*
Uvedimo smenu: $x = y + a_1$

$$(y + a_1)^3 - 6(y + a_1)^2 + 11(y + a_1) - 6 = 0$$
$$y^3 + 3y^2a_1 + 3ya_1^2 + a_1^3 - 6y^2 - 12ya_1 - 6a_1^2 + 11y + 11a - 6 = 0$$
$$y^3 + y^2(3a_1 - 6) + y(3a_1^2 - 12a_1 + 11) + (a_1^3 - 6a_1^2 + 11a_1 - 6) = 0$$

Kako bismo uklonili drugi član mora vačiti: $3a_1 - 6 = 0$, odakle dobijamo da je $a_1 = 2$.

Dobijena jednačina je oblika: $y^3 - y = 0$.
Kada smo dobili jednačinu jasno nam je koja su rešenja. Za početak ćemo ilustrovati Čirnhausov metod za rešavanje jednačina trećeg stepena na ovom jednostavnom primeru.
Kako bismo uklonili dva srednja člana uvedimo novu smenu: $y^2 = by + z + a$

$$y^3 - y = 0$$
$$y^2 = by + z + a / \cdot y$$
$$y^3 = by^2 + zy + ay$$
$$b(by + z + a) + zy + ay - y = 0$$
$$y(b^2 + z + a - 1) + b(z + a) = 0$$
$$y = \frac{-b(z + a)}{b^2 - 1 + z + a}$$

Dobijeno $y$ zamenimo u jednačinu: $y^3 - y = 0$.

$$(\frac{-b(z + a)}{b^2 - 1 + z + a})^3 - (\frac{-b(z + a)}{b^2 - 1 + z + a}) = 0 / \cdot (b^2 - 1 + z + a)^3$$
$$-b^3(z + a)^3 + b(z + a)((b^2 - 1) + (z + a))^2 = 0$$
$$-b^3(z + a)^3 + b(z + a)((b^2 - 1)^2 + 2(b^2 - 1)(z + a) + (z + a)^2) = 0$$
$$-b^3(z + a)^3 + b(b^2 - 1)^2(z + a) + 2b(b^2 - 1)(z + a)^2 + b(z + a)^3 = 0$$

$$(z + a)^3(-b^3 + b) + 2b(b^2 - 1)(z + a)^2 + b(b^2 - 1)^2(z + a) = 0$$
$$(z+a)^3 b(-b^2+1) - 2b(-b^2+1)(z+a)^2 + b(-b^2+1)^2(z+a) = 0 / : b(-b^2+1)$$
$$(z + a)^3 - 2(z + a)^2 + (-b^2 + 1)(z + a) = 0$$
$$z^3 + 3z^2a + 3za^2 + a^3 - 2z^2 - 4za - 2a^2 - b^2z + z - ab^2 + a = 0$$
$$z^3 + z^2(3a - 2) + z(3a^2 - 4a - b^2 + 1) + (a^3 - 2a^2 - ab^2 + a) = 0$$

Kako bismo uklonili dva srednja člana mora važiti: $3a - 2 = 0$ i $3a^2 - 4a - b^2 + 1 = 0$.
Iz prve jednačine dobijamo da je $a = \frac{2}{3}$. Kada dobijeno $a$ zamenimo u drugu jednačinu dobijamo:

$$3 \cdot \frac{4}{9} - 4 \cdot \frac{2}{3} - b^2 + 1 = 0$$
$$\frac{4}{3} - \frac{8}{3} - b^2 + \frac{3}{3} = 0$$

$$-\frac{1}{3} - b^2 = 0$$

$$b^2 = -\frac{1}{3}$$

$$b = \pm i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Mi ćemo izabrati da nam je $b = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Sada dobijene $a$ i $b$ uvrstimo u jednačinu iznad:

$$z^3 + \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

$$z^3 + \frac{8}{27} = 0$$

$$z^3 = -\frac{8}{27}$$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{8}{27}}(cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}), k = 0, 1, 2.^7$$

$$z_0 = \frac{2}{3}(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sin\frac{\pi}{3}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})$$

$$z_1 = \frac{2}{3}(cos\frac{3\pi}{3} + i \cdot sin\frac{3\pi}{3}) = \frac{2}{3}(-1 + i \cdot 0) = -\frac{2}{3}$$

$$z_2 = \frac{2}{3}(cos\frac{5\pi}{3} + i \cdot sin\frac{5\pi}{3}) = \frac{2}{3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})$$

Sada dobijene vrednosti za $a$, $b$ i $z$ zamenimo u $y = \frac{-b(z+a)}{b^2 - 1 + z + a}$.

[7] Analiza sa algebrom 3, Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, Krug, Beograd, 2003

$$y_0 = \frac{-i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{3}(1 + i\sqrt{3} + 2)}{-\dfrac{1}{3} - 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}i\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}} = \frac{-\dfrac{i}{3\sqrt{3}} \cdot (3 + i\sqrt{3})}{-\dfrac{1}{3}(1 - i\sqrt{3})} = \frac{i(3 + i\sqrt{3})}{\sqrt{3} - 3i} =$$

$$\frac{i\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)}{\sqrt{3}(1 - i\sqrt{3})} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -1$$

$$y_1 = \frac{-i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{3}(-2 + 2)}{-\dfrac{1}{3} - 1 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3}} = 0$$

$$y_0 = \frac{-i \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{3}(1 - i\sqrt{3} + 2)}{-\dfrac{1}{3} - 1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}i\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}} = \frac{-\dfrac{i}{3\sqrt{3}} \cdot (3 - i\sqrt{3})}{-\dfrac{1}{3}(1 + i\sqrt{3})} = \frac{i(3 - i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}} =$$

$$\frac{i\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)}{\sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = 1$$

Sada kada smo dobili vrednosti za $y$, možemo dobiti i rešenja početne jednačine.

$$x_0 = -1 + 2 = 1 \qquad x_1 = 0 + 2 = 2 \qquad x_2 = 1 + 2 = 3$$

.

**Primer 2.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$$

*Rešenje:*
Uvedimo smenu: $x = y + a_1$

$$(y + a_1)^3 + 9(y + a_1)^2 + 18(y + a_1) + 28 = 0$$
$$y^3 + 3y^2a_1 + 3ya_1^2 + a_1^3 + 9y^2 + 18ya + 9a_1^2 + 18y + 18a_1 + 28 = 0$$
$$y^3 + y^2(3a_1 + 9) + y(3a_1^2 + 18a_1 + 18) + (a_1^3 + 9a_1^2 + 18a_1 + 28) = 0$$

Da bismo uklonili drugi član mora važiti: $3a_1 + 9 = 0$, odakle dobijamo da je $a_1 = -3$.

Dobijena jednačina je oblika: $y^3 - 9y + 28 = 0$.

Sada želimo da uklonimo dva srednja člana, pa uvedimo novu smenu $y^2 = by + z + a$.

$$y^3 - y = 0$$
$$y^2 = by + z + a / \cdot y$$
$$y^3 = by^2 + zy + ay$$
$$b(by + z + a) + zy + ay - 9y + 28 = 0$$
$$y(b^2 + z + a - 9) + b(z + a) + 28 = 0$$
$$y = \frac{-b(z + a) - 28}{b^2 - 9 + z + a}$$

Dobijeno $y$ zamenimo u jednačinu: $y^3 - 9y + 28 = 0$.

$$(\frac{-b(z + a) - 28}{b^2 - 9 + z + a})^3 - (\frac{-b(z + a) - 28}{b^2 - 9 + z + a}) = 0 / \cdot (b^2 - 9 + z + a)^3$$

$$-(b(z + a) + 28)^3 + 9(b(z + a) + 28)(b^2 - 9 + z + a)^2 + 28(b^2 - 9 + z + a) = 0$$
$$-b^3(z+a)^3 - 84b^2(z+a)^2 - 2352b(z+a) - 21952 + 9b(b^2-9)^2(z+a) + 18b(b^2-9)(z+a)^2 + 9b(z+a)^3$$
$$+252(b^2-9)^2 + 504(b^2-9)(z+a) + 252(z+a)^2 + 28(b^2-9)^3 + 84(b^2-9)^2(z+a) + 84(b^2-9)(z+a)^2$$
$$+28(z + a)^3 = 0$$

$$(z+a)^3(-b^3+9b+28) + (z+a)^2(18b^3-162b-504) + (z+a)(9b^5+84b^4-162b^3-1008b^2-1623b+2268)$$
$$+(28b^6 - 504b^4 + 2268b^2 - 21952) = 0 / : (-b^3 + 9b + 28)$$
$$(z + a)^3 - 18(z + a)^2 + (-9b^2 - 84b + 81)(z + a) + (-28b^3 + 252b - 784) = 0$$
$$z^3 + z^2(3a-18) + z(3a^2-36a-9b^2-84b+81) + (a^3-18a^2-9ab^2-84ab+81a-28b^3+252b-784) = 0$$

Kako bismo uklonili dva srednja člana mora važiti: $3a - 18 = 0$ i $3a^2 - 36a - 9b^2 - 84b + 81 = 0$.
Iz prve jednačine dobijamo da je $a = 6$. Kada dobijeno $a$ zamenimo u drugu jednačinu dobijamo:

$$3 \cdot 36 - 36 \cdot 6 - 9b^2 - 84b + 81 = 0$$
$$3b^2 + 28b + 9 = 0$$
$$b = 9 \qquad ili \qquad b = -\frac{1}{3}$$

Mi ćemo izabrati da nam je $b = \frac{1}{3}$.
Sada dobijene $a$ i $b$ uvrstimo u jednačinu iznad:

$$z^3 + 246 - 468 - 6 + 168 + 486 + \frac{28}{27} - 84 - 784 = 0$$
$$z^3 - \frac{17576}{27} = 0$$
$$z^3 = \frac{17576}{27}$$

$$z_k = \sqrt[3]{\frac{17576}{27}}(cos\frac{0 + 2k\pi}{3} + i \cdot sin\frac{0 + 2k\pi}{3}), k = 0, 1, 2.$$

$$z_0 = \frac{26}{3}(cos0 + i \cdot sin0) = \frac{26}{3}(1 + 0 \cdot i) = \frac{26}{3}$$

$$z_1 = \frac{26}{3}(cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot sin\frac{2\pi}{3}) = \frac{26}{3}(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{13}{3}(-1 + i \cdot \sqrt{3})$$

$$z_2 = \frac{26}{3}(cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot sin\frac{4\pi}{3}) = \frac{26}{3}(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{13}{3}(-1 - i \cdot \sqrt{3})$$

Sada dobijene vrednosti za $a$, $b$ i $z$ zamenimo u $y = \dfrac{-b(z + a) - 28}{b^2 - 9 + z + a}$.

$$y_0 = \frac{\frac{1}{3}(\frac{26}{3} + \frac{18}{3}) - 28}{\frac{1}{9} - 9 + \frac{26}{3} + 6} = -4$$

$$y_1 = \frac{\frac{1}{3}(-\frac{13}{3} + i \cdot \frac{13\sqrt{3}}{3} + \frac{18}{3}) - 28}{\frac{1}{9} - 9 - \frac{13}{3} + i\frac{13\sqrt{3}}{3} + 6} = 2 + i\sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{\frac{1}{3}(-\frac{13}{3} - i \cdot \frac{13\sqrt{3}}{3} + \frac{18}{3}) - 28}{\frac{1}{9} - 9 - \frac{13}{3} - i\frac{13\sqrt{3}}{3} + 6} = 2 - i\sqrt{3}$$

Sada kada smo dobili vrednosti za $y$, možemo dobiti i rešenja početne jednačine.

$x_0 = -4 - 3 = -7$ $\qquad$ $x_1 = 2 + i\sqrt{3} - 3 = -1 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ $x_2 = 2 - i\sqrt{3} - 3 = -1 - i\sqrt{3}$

.

**Primer 3.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 - 12x + 16 = 0$$

*Rešenje:*
Data jednačina je bez člana $x^2$. Pa odmah uvodimo smenu:

$$x^2 = bx + y + a / \cdot x$$

$$x^3 = bx^2 + x(y + a)$$

$$b(bx + y + a) + x(y + a) - 12x + 16 = 0$$

$$bx^2 + b(y + a) + x(y + a) - 12x + 16 = 0$$

$$x(b^2 - 12 + y + a) + b(y + a) + 16 = 0$$

$$x = \frac{-b(y + a) - 16}{b^2 - 12 + y + a}$$

Dobijeno $x$ zamenimo u početnu jednačinu.

$$-(\frac{b(y+a)+16}{b^2-12+y+a})^3+12\frac{b(y+a)+16}{b^2-12+y+a}+16=0/\cdot(b^2-12+y+a)^3$$

$$-b^3(y+a)^3-48b^2(y+a)^2-768b(y+a)-4096+12b(b^2-12)^2(y+a)+24b(b^2-12)(y+a)^2$$
$$+12b(y+a)^3+192(b^2-12)^2+384(b^2-12)(y+a)+192(y+a)^2$$
$$+16(b^2-12)^3+48(b^2-12)^2(y+a)+48(b^2-12)(y+a)^2+16(y+a)^3=0$$

$$(y+a)^3(-b^3+12b+16)+(y+a)^2(24b^3-288b-384)$$
$$+(y+a)(12b^5+48b^4-288b^3-768b^2+960b+2304)$$
$$+(16b^6-384b^4+2304b^2-4096)=0/:(-b^3+12b+16)$$

$$(y+a)^3-24(y+a)^2+(-12b^2-48b+144)(y+a)+(-16b^3+192b-256)=0$$

$$y^3+y^2(3a-24)+y(3a^2-48a-12b^2-48b+144)$$
$$+(a^3-24a^2-12ab^2-48ab+144a-16b^3+192b-256)=0$$

Kako bismo uklonili dva srednja člana mora važiti:
$3a+24=0$ i $-12b^2-48b+144=0$.

Iz prve jednačine dobijamo da je $a=8$. Kada dobijeno $a$ zamenimo u drugu jednačinu dobijamo:

$$3\cdot 64-48\cdot 8-12b^2-48b+144=0$$

$$b=-2$$

Sada dobijene $a$ i $b$ uvrstimo u jednačinu $y^3+a^3-24a^2-12ab^2-48ab+144a-16b^3+192b-256=0$:

$$y^3+512-1536-384+768+1152+128-384-256=0$$

$$y^3 = 0$$

$$y_k = 0, k = 1, 2, 3$$

Sada dobijene vrednosti za $a$, $b$ i $y$ zamenimo u jednačinu: $x = \dfrac{-b(y+a)-16}{b^2-12+y+a}$.

$$x = \frac{2(0+8)-16}{4-12+0+8} = \frac{0}{0}$$

Dobijamo deljenje nulom. U čemu je, naime, problem?

Kada bismo u jednačinu $x = \dfrac{-b(y+a)-16}{b^2-12+y+a}$ uvrstili samo vrednost za $a$ i $b$, dobili bismo sledeće:

$$x = \frac{2y}{y}.$$

Ako bismo pretpostavili da je $y \neq 0$, prethodnu jednačinu bismo transformisali u $(x-2)y = 0$. Kako je $y \neq 0$ dobijamo da je $x = 2$ rešenje ove jednačine.

Kada dobijeno $x$ zamenimo u smenu $x^2 = bx+y+a$ dobijamo da je $y = 0$, što je kontradiktorno sa pretpostavkom da je $y \neq 0$.
Dolazimo do zaključka da Čirnahusov metod ne dovodi do rešenja u datom primeru.

Pretpostavimo da polazna jednačina ima dvostruko rešenje i da to dovodi do problema deljenja nulom. U tom slučaju ako jednačina $x^3 - 12x + 16 = 0$ ima dvostruku nulu, onda je ona i nula izvoda polinoma, pa mora da važi: $3x^2 - 12 = 0$. Odavde dobijamo $x = 2$ i $x = -2$. Kako jedino $x = 2$ zadovoljava početnu jednačinu, zaključujemo da je $x = 2$ dvostruka nula polazne jednačine.

Treće rešenje dobijamo kada početni polinom podelimo sa $(x-2)^2$, tj. treće rešenje je $x = -4$.

Hajde da vidimo kako u buduće možemo da znamo da li je u pitanju dvostruka nula ili ne.

*I NAČIN:*

Posmatrajmo jednačinu oblika $x^3 + px + q$ sa dvostrukim rešenjem, pa je možemo napisati i u obliku:

$$(x-a)(x-a)(x-b) = 0$$

$$x^3 - 2ax^2 + a^2x - x^2b + 2abx - a^2b = 0$$

$$x^3 + (-2a-b)x^2 + (a^2+2ab)x - a^2b = 0$$

Jednačina je bez drugog člana pa važi da je: $-2a - b = 0$, tj. $b = -2a$. Dobićemo:

$$p = a^2 - 4a^2 = -3a^2/^3$$

$$q = 2a^3/^2$$

Dobijamo sledeće: $p^3 = -27a^6$ i $q^2 = 4a^6$. Iz druge jednačine dobijamo da je $a^6 = \frac{q^2}{4}$. To ćemo da uvrstimo u prvu jednačinu i dobićemo: $p^3 = -\frac{27}{4}q^2$. Na ovaj način smo dobili vezu između $p$ i $q$ koja će važiti kod svih jednačina oblika $x^3 + px + q$ koje imaju dvostruko rešenje.

*II NAČIN:*

Posmatrajmo jednačinu oblika $x^3 + px + q = 0$. Ako data jednačina ima dvostruko rešenje onda je ono i nula izvoda, pa onda dobijamo sistem:

$$x^3 + px + q = 0$$

$$3x^2 + p = 0$$

Sada iz druge jednačine dobijamo da je $x^3 = -\frac{p}{3}x$. Kada to uvrstimo u prvu jednačinu dobijamo:

$$-\frac{p}{3}x + px + q = 0$$

$$\frac{2p}{3}x + q = 0$$

$$x = -\frac{3q}{2p}$$

Sada ćemo dobijemu vrednost $x$ uvrstiti u jednačinu $x^3 + px + q = 0$.

$$\big(\frac{-3q}{2p}\big)^3 + p \cdot \frac{-3q}{2p} + q = 0$$

Kada ovo rešimo dobijamo:

$$p^3 = -\frac{27}{4}q^2.$$

Dobili smo istu vezu između $p$ i $q$ kao u prethodnom načinu. To nam omogućava da na jednostavan način, pre primene Čirnhausovog metoda, uočimo jednačine sa dvostrukim rešenjem i da ih rešavamo na drugi način. To ćemo pokazati u sledećem primeru.

**Primer 4.** Rešiti jednačinu:

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

*Rešenje:*
Data jednačina je oblika $x^3 + px + q = 0$, gde $p$ i $q$ imaju sledeće vrednosti $p = -3$ i $q = -2$. Odmah proverimo da li važi veza između $p$ i $q$.

$$p^3 = -27$$

$$p^3 = -\frac{27}{4}q^2 = p^3 = -\frac{27}{4}4 = -27$$

Na ovaj način zaključujemo da jednačina ima dvostruko rešenje. Iz tog razloga mora važiti da je $3x^2 - 3 = 0$, tj. $x = -1$ ili $x = 1$. Proverimo koje od ova dva rešenja odgovara polaznoj jednačini i vidimo da je to rešenje $x = -1$. Kako bismo našli još jedno rešenje uradimo sledeće:

$$(x^3 - 3x - 2) : (x + 1)^2 = x - 2$$

Samim tim dobijamo i treće rešenje jednačine i to je $x = 2$.

# 4 Zaključak

Tema ovog master rada bila je primena Čirnhausovog metoda za rešavanje jednačina trećeg stepena. Kao što se može videti u radu, iste jednačine rešavali smo pomoću Kardanovih formula i Čirnhausovim transformacijama. Kada se sagledaju oba načina za rešavanje jednačina može se videti da je rešavanje Čirnhausovom metodom računski zahtevnije od rešavanja pomoću Kardanovih formula. U oba načina potrebno je koristiti određene smene kako bismo došli do rešenja. Tako jednačinu $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ pomoću Kardanovih formula rešavamo uvođenjem smene $y = x + \frac{a}{3}$, i pri tome dobijamo jednačinu bez drugog člana, a pomoću Čirnhausove transformacije koristi se smena $x^2 = bx + y + a$ kako bi se uklonila dva srednja člana.

Takođe, prilikom primene Čirnhausovog metoda za rešavanje jednačina trećeg stepena, zaključili smo da možemo na jednostavan način da proverimo da li jednačina ima dvostruko rešenje, i ukoliko ima, lako možemo ta rešenja dobiti. Što se tiče ovakvih jednačina, ovaj metod je koristan.

# Literatura


[1] A method for removing all intermediate terms from a given equation, Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, ACM SIGSAM Bulletin, Vol 37 (1), No. 143, (2003) 13. [Original: Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data equatione, Acta Eruditorium, 2 (1683), 204-207 ]

[2] Analiza sa algebrom 3, Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović, Krug, Beograd, 2003

[3] Pregled istorije i filozofije matematike, Milan Božić, Zavod za udžbenike, Beograd, 2000

[4] https: //de.wikipedia.org/wiki/Ehrenfried_Walther_von_Tschirnhaus.

[5] http://e.math.hr/dvoboji/index.html