УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Хопфове хиперповрши близу Келерове сфере $\mathbf{S}^6$

– мастер рад –

Аутор

Ђорђе Коцић

Ментор

др Мирослава Антић

Београд, 2018.

Апстракт

Нека су g, $\bar{\nabla}$ и J стандардна метрика, одговарајућа Леви-Чивита повезаност и стандардна скоро комплексна структура шестодимензионе сфере S^6. Тада је (J, g) скоро ермитска структура на S^6, која је при том и близу Келерова, тј. тензорско поље $\bar{\nabla}J$ је косо-симетрично.

Ако је M повезана, оријентабилна хиперповрш многострукости са скоро ермитском структуром и ξ јединично нормално векторско поље хиперповрши, тангентно векторско поље $U = -J\xi$ назива се Хопфово векторско поље. Уколико су интегралне криве поља U уједно и геодезијске на M, онда је хиперповрш M Хопфова.

Подмногострукост M многострукости са скоро комплексном структуром J је скоро комплексна ако је тангентно раслојење од M инваријантно при J, тј. $\forall p \in M$, $J(T_pM) = T_pM$, и тада је M парне димензије. Познато је да не постоје 4-димензионе скоро комплексне подмногострукости сфере S^6, а 2-димензионе су класификоване у четири разна типа кривих ([5]).

У [4] су аутори доказали да је повезана Хопфова хиперповрш сфере S^6 отворени део тотално геодезијске хиперсфере у S^6 или туба око скоро комплексне криве у S^6.

Рад је организован на следећи начин: у првом поглављу дате су неке основне чињенице о Римановим многострукостима и подмногострукостима, комплексним и скоро комплексним многострукостима. Друго поглавље је посвећено алгебри октониона и сфери S^6 као хомогеном потпростору чисто имагинарних октониона. У трећем поглављу се бавимо особинама сфере S^6. У четвртом поглављу наводимо основне чињенице о Јакобијевим пољима и тубама око многострукости. Главни резултати овог рада се налазе у петом поглављу: карактеризација Хопфових хиперповрши помоћу скоро комплексних дводимензионих многострукости и анализа у зависности од броја разних главних кривина.

Кључне речи и изрази: повезаност, метрика, кривина, главне кривине, вектори главних кривина, скоро комплексна структура, близу Келерова многострукост, оператор облика, геодезијске хиперсфере, тубе, Јакобијево векторско поље.

Abstract

Let g, $\bar{\nabla}$ and J be the induced metric, the appropriate Levi-Civita connection and standard almost complex structure on the six dimensional sphere S^6. Then (J,g) is an almost Hermitian structure on S^6 which is also nearly Kaehler, i.e. tensor field $\bar{\nabla}J$ is skew-symetric.

If M is connected orientable hypersurface of manifold with almost Hermitian structure and ξ a unit normal field on M, tangent vector field $U = -J\xi$ is called a Hopf vector field. If integral curves of U are geodesics of M then M is called a Hopf hypersurface.

A submanifold M of a manifold with an almost complex structure J is an almost complex submanifold if the tangent bundle of M is invariant for J, i.e. $\forall p \in M,\ J(T_pM) = T_pM$, and then M is even dimensional. It is known that there are no 4-dimensional almost complex submanifolds of sphere S^6 and 2-dimensional are classified in four different types of curves ([5]).

In [4], the authors proved that a connected Hopf hypersurface of sphere S^6 is an open part of either a totally geodesic hypersphere of S^6 or a tube around an almost complex curve in S^6.

The paper is organized as folows: in Chapter 1 are given basic facts about Riemannian manifolds and submanifolds, complex and almost complex manifolds. The Chapter 2 is about the algebra of octonions and the sphere S^6 as a homogeneous subspace of pure imaginary octonions. The properties of the sphere S^6 are given in Chapter 3. In Chapter 4 are given basic facts about Jacobi fields and tubes around manifolds. The main purpose of this paper are in Chapter 5: characterization of the Hopf hypersurphaces considering almost complex 2-dimensional manifolds and by analysing the number of different principal curvatures.

Key words and phrases: connection, metric, curvature, principal curvatures, principal curvature vectors, almost complex structure, nearly Kaehler manifolds, shape operator, geodesic hyperspheres, tubes, Jacobi vector field.

Садржај

Увод **4**

1 **Риманова и комплексна геометрија** **6**
1.1 Риманове многострукости 6
1.2 Риманове подмногострукости 10
1.3 Комплексне и скоро комплексне многострукости 12

2 **Октониони** **14**
2.1 Кејли-Диксонова конструкција 14
2.2 Октониони и сфера S^6 16

3 **Сфера S^6** **23**
3.1 Сфера као подмногострукост простора $\mathbb{R}^7$ 23
3.2 Скоро комплексне подмногострукости сфере S^6 26

4 **Јакобијева поља и тубе око подмногострукости** **31**
4.1 Јакобијева поља 31
4.2 Тубе око подмногострукости 36

5 **Хопфове хиперповрши** **38**
5.1 На близу Келеровој сфери S^6 39
5.2 Карактеризација 41
5.3 Тубе око скоро комплексних кривих у S^6 44

Литература **52**

Увод

Познато је да на шестодимензионој јединичној сфери S^6 постоји близу Келерова[1] структура (J, g), где је J скоро комплексна структура на S^6 (тј. ендоморфизам тангентног раслојења сфере који задовољава $J^2 = -Id$, где је Id идентичко пресликавање) дефинисана преко векторског крст производа чисто имагинарних октониона $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ а g индукована метрика на S^6 наслеђена из $\mathbb{R}^7$. Питање да ли на сфери постоји комплексна структура је и даље отворено. Такође, $S^6 = G_2/SU(3)$ је хомогена скоро ермитска[2] многострукост, где је G_2 компактна Лијева[3] група свих аутоморфизама Кејлијевих[4] бројева $\mathbb{O}$. Посматрајући подмногострукости близу Келерове сфере S^6, Греј[5] је показао да не постоје комплексне подмногострукости од S^6. У зависности од њиховог односа према J, подмногострукости могу бити скоро комплексне, код којих је тангентно раслојење инваријантно при J и тотално реалне, код којих се тангентно раслојење при J слика у нормално. Уопштење ова два типа су $CR-$подмногострукости чије је тангентно раслојење директна сума два раслојења од којих је једно J инваријантно, док се друго при J слика у нормално.

Тотално реалне подмногострукости сфере могу бити димензије мање или једнаке од 3. Свака једнодимензиона подмногострукост сфере је тривијално и тотално реална. Тотално реалне, минималне подмногострукости сфере димензије 2 су у потпуности класификоване. Такође, доста су проучаване и тродимензионе тотално реалне подмногострукости.

Скоро комплексне подмногострукости сфере S^6 морају бити парне димензије, дакле димензије 2 или 4. Греј је доказао да не постоје 4-димензионе скоро комплексне подмногострукости у S^6, па су скоро комплексне подмногострукости сфере S^6 димензије 2, и називају се скоро комплексне криве. Он је такође показао да је свака скоро комплексна крива минимална. Берндт[6], Болтон[7] и Вудвард[8] су у [4] показали да је геометрија скоро комплексних кривих у S^6 повезана са Хопфовим[9] хиперповршима сфере S^6. Ова веза између скоро комплексних кривих и Хопфових хиперповрши у S^6 чини истраживање Хопфових хиперповрши још занимљивијим.

У овом раду се бавимо Хопфовим хиперповршима сфере S^6 и представљамо резултате из [4], где су аутори показали да је повезана Хопфова хиперповрш близу Келерове сфере S^6 или отворени део тотално геодезијске хиперсфере у S^6 или део тубе око скоро комплексне криве у S^6. Занимљиво питање је како класификовати Хопфове хиперповрши које су отворени делови тотално геодезијских хиперсфера у S^6, а како оне које су делови туба око скоро комплексних кривих. Ми ћемо навести класификације Хопфових хиперповрши које су делови туба око скоро комплексних кривих које су приказане у [4] и [15]. Класификацију Хопфових хиперповрши које су делови тотално геодезијских хиперсфера у S^6 можете видети нпр. у [9].

[1] Erich Kähler (1906-2000.) - немачки математичар
[2] Charles Hermite (1822-1901) - француски математичар
[3] Sophus Lie (1842-1899) - норвешки математичар
[4] Arthur Cayley(1821-1895) - британски математичар
[5] Alfred Gray (1939-1998) - амерички математичар
[6] Jürgen Berndt - King's College London, England
[7] John Bolton - University of Durham, England
[8] Lyndon M. Woodward - University of Durham, England
[9] Heinz Hopf (1894-1971) - немачки математичар

Посебно се захваљујем свом ментору, проф. др Мирослави Антић, уз чију помоћ, савете и велико стрпљење је овај рад настао. Такође, захваљујем се и члановима комисије, проф. др Мирјани Ђорић и проф. др Зорану Ракићу, на бројним корисним примедбама и сугестијама.

1 Риманова и комплексна геометрија

1.1 Риманове многострукости

Нека је M тополошки простор. Кажемо да је M **тополошка многострукост димензије** n или **тополошка** n**-многострукост** ако задовољава:

1) M је **Хауздорфов**[10] **простор:** за сваки пар различитих тачака $p, q \in M$ постоје дисјунктни отворени подскупови $U, V \subset M$ такви да $p \in U$ и $q \in V$.

2) M задовољава **другу аксиому пребројивости:** постоји пребројива база топологије на M.

3) M је **локално еуклидски**[11] **димензије** n**:** свака тачка $p \in M$ има околину $U \subset M$ која је хомеоморфна[12] отвореном подскупу од $\mathbb{R}^n$.

Ако овај хомеоморфизам из 3) означимо са ϕ, онда уређен пар (U, ϕ) називамо **локалном картом** или локалним координатним системом многострукости M. Скуп локалних карата (U_α, ϕ_α), $\alpha \in \mathcal{A}$ таквих да важи $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$ зовемо **атласом**. Ако за сваке две карте (U_α, ϕ_α) и (U_β, ϕ_β) атласа $\mathcal{A}$ важи да је пресликавање

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}|_{\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

дифеоморфизам класе C^∞, тада кажемо да је $\mathcal{A}$ **диференцијабилан атлас**. Унија два атласа је такође атлас, али се диференцијабилност не мора очувати. Ако је унија два диференцијабилна атласа такође диференцијабилан атлас, онда кажемо да су та два атласа **еквивалентна**. Тополошка многострукост заједно са класом еквиваленције диференцијабилних атласа је **диференцијабилна многострукост**.

Нека су M и N диференцијабилне многострукости. Пресликавање $f : M \to N$ је **непрекидно** ако за сваки отворен скуп $V \subset N$ важи да је $f^{-1}(V)$ отворен у M. Нека је p тачка многострукости M која је покривена картом (U_α, ϕ_α), $f : M \to N$ непрекидно и (V_β, ψ_β) карта многострукости N која покрива $f(p)$. Ако је

$$\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) \to \psi_\beta(V_\beta) \tag{1}$$

диференцијабилно пресликавање, онда кажемо да је f **диференцијабилно у тачки** p. Ако постоје диференцијабилни атласи $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ многострукости M и N такви да је пресликавање (1) диференцијабилно за све $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ за које је $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) \neq 0$, онда је f **диференцијабилно пресликавање** многострукости. Са $\mathcal{D}_p$ означавамо скуп свих функција које су дефинисане на M и диференцијабилне у p, а са $\mathcal{F}(M)$ скуп свих диференцијабилних функција на M. Диференцијабилна функција $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ је **крива** на многострукости M. Ако је $\alpha(0) = p$, пресликавање $\alpha'(0) : \mathcal{D}_p \to \mathbb{R}$ дефинисано са $\alpha'(0)f := \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}$, $f \in \mathcal{D}_p$ је **тангентни вектор** на α у тачки p. Скуп свих тангентних вектора у тачки p називамо **тангентни простор** и означавамо га са T_pM. Дисјунктна унија тангентних простора, $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$, има структуру диференцијабилне многострукости и назива се **тангентно раслојење** многострукости M.

[10] Felix Hausdorff (1868-1942) - немачки математичар

[11] Еуклид из Александрије (4.век п.н.е) - антички математичар

[12] Непрекидно бијективно пресликавање $f : U \to V$ такво да је f^{-1} непрекидно назива се хомеоморфизам. Ако постоји хомеоморфизам из U у V, кажемо да су U и V хомеоморфни.

Векторско поље X је глатко пресликавање $X : M \to TM$ такво да је $X(p) := X_p \in T_pM$. Скуп свих векторских поља на M означавамо са $\chi(M)$.
Нека је X векторско поље на многострукости M. Крива $\gamma : I \to M$ је интегрална крива поља X ако је за свако $t \in I$, вектор $X_{\gamma(t)}$ тангентни вектор на криву γ у тачки $\gamma(t)$. Може се показати да важи следеће следеће тврђење:

Теорема 1.1 *Нека је X векторско поље диференцијабилне многострукости M и нека је $p \in M$. Тада постоји (коначан или бесконачан) интервал (a, b) такав да $0 \in (a, b)$ и диференцијабилна крива $\gamma : (a, b) \to M$ таква да је γ интегрална крива поља X и $\gamma(0) = p$. При том, ако је $\gamma_1 : (c, d) \to M$ такође интегрална крива поља X таква да је $\gamma_1(0) = p$, онда је $(c, d) \subset (a, b)$ и важи $\gamma|_{(c,d)} = \gamma_1$.*

Криву γ из претходне теореме називамо **максималном интегралном кривом** векторског поља X кроз p.
Нека је X векторско поље на M и нека је за свако $p \in M$ крива $\gamma_p : I_p \to M$ максимална интегрална крива поља X кроз p. Тада је $\bigcup_{p\in M} I_p \times \{p\}$ отворена околина $0\times M$ у $\mathbb{R}\times M$. Диференцијабилно пресликавање $Fl^X : \bigcup_{p\in M} I_p \times \{p\} \to M$ дато са $Fl^X(t, p) = \Phi^X_t(p) = \gamma_p(t)$ је **ток векторског поља** X.
Котангентни простор многострукости M у тачки p је дуални простор тангентног простора T_pM и означавамо га са T^*_pM. Елементи котангентног простора T^*_pM су **ковектори** у p, односно линеарне функције $\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$. Аналогно дефинишемо **котангентно раслојење** са $T^*M = \bigsqcup_{p\in M} T^*_pM$. **Ковекторско поље** ν је глатко пресликавање $\nu : M \to T^*M$ такво да је $\nu(p) \in T^*_pM$, а скуп свих ковекторских поља обележавамо са $\chi^*(M)$.

Нека је V коначно димензиони векторски простор и V^* дуални простор од V. Тада природно упаривање $V^* \times V \to \mathbb{R}$ означавамо са

$$(w, X) \to w(X), \qquad w \in V^*, \quad X \in V.$$

Коваријантни k-тензор над V је мултилинеарно пресликавање

$$F : \underbrace{V \times ... \times V}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Слично, **контраваријантни l-тензор** над V је мултилинеарно пресликавање

$$F : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l} \to \mathbb{R}.$$

Често нам је потребно да посматрамо тензоре мешовитог типа. **Тензор типа** (k, l) над V, који се још назива и k-коваријантни, l-контраваријантни тензор, је мултилинеарно пресликавање

$$F : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{l} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Тензорско поље A на многострукости M је тензор над $\chi(M)$. Дакле, **тензорско поље типа** (k, l) је $\mathcal{F}(M)$-мултилинеарна функција

$$A : \underbrace{\chi^*(M) \times ... \times \chi^*(M)}_{l} \times \underbrace{\chi(M) \times ... \times \chi(M)}_{k} \to \mathbb{R}.$$

Линеарна конексија или линеарна повезаност је пресликавање $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ за које важи:

(1) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(2) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z, \quad \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

(3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$,

где $X, Y, Z \in \chi(M),\ f \in \mathcal{F}(M)$.

Коваријантни извод функције f у односу на X се дефинише са

$$\nabla_X f = Xf.$$

За тензорско поље S типа $(0,k)$ или $(1,k)$, **коваријантни извод** $\nabla_X S$ поља S у односу на X дефинише се са

$$(\nabla_X S)(X_1, ..., X_k) = \nabla_X(S(X_1, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^{k} S(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_k),$$

за произвољна векторска поља $X_i,\ i = 1, ..., k$. Слично се дефинише коваријантни извод поља типа (l, k).

Тензорско поље S је **паралелно** у односу на линеарну конексију ∇ ако за свако векторско поље X важи

$$\nabla_X S = 0.$$

Тензор торзије линеарне конексије ∇ је тензорско поље T типа $(1,2)$ дефинисано са

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$

за произвољна $X, Y \in \chi(M)$, при чему је

$$[X,Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

за произвољно $f \in \mathcal{F}(M)$. За линеарну конексију кажемо да је без торзије уколико је $T(X,Y) = 0$, за све X, Y.

Тензор кривине R линеарне конексије ∇ је тензорско поље типа $(1,3)$ дато са

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \tag{2}$$

Тензорско поље g типа $(0,2)$ назива се **Риманова**[13] **метрика** на M ако задовољава:

(1) симетрично је, тј. $g(X,Y) = g(Y,X)$, за $X, Y \in \chi(M)$, и

(2) позитивно дефинитно је, тј. $g(X,X) \geq 0$, за $X \in \chi(M)$ и $g(X,X) = 0$ акко $X = 0$.

Многострукост M снабдевена Римановом метриком се назива **Риманова многострукост**.

За $f \in \mathcal{F}(M)$, **градијент функције** f је векторско поље $\mathrm{grad}\ f \in \chi(M)$ такво да је

$$g(\mathrm{grad}\ f, X) = Xf, \qquad \text{за све } X \in \chi(M). \tag{3}$$

Ако је $\mathrm{grad}\ f = 0$, онда је f константна функција.

[13] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) - немачки математичар

Линеарна конексија ∇ на M је **Риманова конексија** уколико је Риманова метрика g паралелна у односу на ∇, тј. ако за произвољна $X, Y, Z \in \chi(M)$ важи

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Теорема 1.2 *На Римановој многострукости постоји тачно једна Риманова конексија без торзије.*

Риманова конексија из претходне теореме се назива **Леви-Чивита**[14] конексија.

Риманова кривина многострукости M је пресликавање $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \mathbb{R}$ дато са

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W). \tag{4}$$

Може се показати да за Риманову кривину важе следеће релације

$$\begin{aligned}
&R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W) = 0,\\
&R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) = 0,\\
&R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y),\\
&R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0.
\end{aligned}$$

Нека је $\{E_1, ..., E_n\}$ локално поље ортонормираних база на M. **Ричијево**[15] **тензорско поље** S је тензорско поље типа $(0,2)$ дато са

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} R(E_i, X, Y, E_i).$$

Користећи S дефинишемо **скаларну кривину** τ од M са

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(E_i, E_i). \tag{5}$$

Дефиниције Ричијевог тензора и скаларне кривине не зависе од избора ортонормираних база.

Ако је Π дводимензиони потпростор тангентног простора T_pM и X, Y једна ортонормирана база равни Π, дефинишемо **секциону кривину** равни Π са

$$K_p(\Pi) = R(X,Y,Y,X). \tag{6}$$

Дефиниција секционе кривине не зависи од ортонормиране базе равни Π. Уколико је $K_p(\Pi)$ константно за све равни Π у T_pM и све тачке p из M, тада се M назива простор константне секционе кривине или **реална просторна форма**. Важи следећа теорема:

Теорема 1.3 *(Шур[16]) Нека је M просто повезана, Риманова многострукост димензије $m \geq 3$. Ако у свакој тачки $p \in M$ секциона кривина дводимензионог потпростора Π од T_pM не зависи од избора тог потпростора, онда је секциона кривина константна на целој многострукости.*

Реалну просторну форму константне секционе кривине c ћемо означавати са $K(c)$. Тада је тензор кривине многострукости $K(c)$ дат са

$$R(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y). \tag{7}$$

Уколико је тензор кривине $R = 0$, тј. M је простор кривине 0, кажемо да је M **локално еуклидски простор**.

[14] Tullio Levi-Civita (1873-1941) - италијански математичар
[15] Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) - италијански математичар
[16] Ernst Viktor Axel Schur(1891-1930) - немачки математичар

1.2 Риманове подмногострукости

Нека је $f : M \to N$ диференцијабилно пресликавање. **Диференцијал** пресликавања f у тачки $p \in M$ је линеарно пресликавања $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ дефинисано на следећи начин: за свако $X_p \in T_pM$ изаберемо криву γ у M тако да је X_p тангентни вектор на γ у $p = \gamma(t_0)$. Тада је $(f_*)_p(X_p)$ тангентни вектор на криву $f(\gamma)$ у $f(p) = f(\gamma(t_0))$. Може се показати да $(f_*)_p$ не зависи од изабране криве. Ако је g глатка функција у околини $f(p)$, тј. $g \in \mathcal{F}(f(p))$, тада директно следи да важи

$$(f_*)_p(X_p)(g) = X_p(g \circ f).$$

На овај начин пресликавање $f : M \to N$ индукује пресликавање $(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}N$. Пресликавање f има **ранг** r у тачки $p \in M$ ако је димензија векторског простора $(f_*)_p(T_pM)$ једнака r. Ако је ранг пресликавања f у свакој тачки једнак димензији многострукости N онда кажемо да је f **субмерзија**. Пресликавање f је **имерзија** или **потапање** ако је $(f_*)_p$ инјективно за сваку тачку p, тј. ако је $\dim((f_*)_p(T_pM)) = \dim M$. Тада кажемо да је M **потопљена подмногострукост** многострукости N, а N се назива и **амбијентни простор** многострукости M. Уколико је имерзија f инјективна, а топологије $f(M)$ наслеђене из N и добијена пресликавањем из M се поклапају, онда кажемо да је f **улагање** или **смештање** M у N и кажемо да је подмногострукост M (тј. $f(M)$) **смештена подмногострукост** многострукости N.

Нека су M и N Риманове многострукости са Римановим метрикама g и $\bar{g}$. Пресликавање $f : M \to N$ је **изометрија** у тачки $p \in M$ ако је

$$g(X_p, Y_p) = \bar{g}((f_*)_p(X_p), (f_*)_p(Y_p)). \tag{8}$$

У овом случају, $(f_*)_p$ је инјективно (јер $(f_*)_p(X_p) = 0$ повлачи $X_p = 0$). Дакле, ако је f изометрија у свакој тачки из M, онда је f имерзија коју зовемо **изометријска имерзија**. Кажемо да метрика $\bar{g}$ индукује метрику g уколико за имерзију f важи релација (8). Скуп свих изометрија $f : M \to M$ чини групу. Уколико та група делује транзитивно на многострукости M, онда је M **хомогена**.

Нека је $f : (M, g) \to (N, \bar{g})$ изометријска имерзија. Због једноставнијег записа ћемо идентификовати X са његовом сликом $f_*(X)$, тј. изостављаћемо f_* и обе метрике ћемо означавати са g. Означимо са TM и TN тангентна раслојења многострукости M и N, респективно. Ако за тангентни вектор $\xi_p \in TN$ многострукости N у тачки $p \in M$ важи

$$g(X_p, \xi_p) = 0$$

за произвољан $X_p \in T_pM$, онда кажемо да је ξ_p **нормални вектор** подмногострукости M у N, а са $T^\perp M$ означавамо векторско раслојење свих нормалних вектора од M у N. Тада је

$$TN|_M = TM \oplus T^\perp M.$$

Ако су X и Y векторска поља тангентна на M и $\bar{\nabla}$ Леви-Чивита повезаност на N, тада је

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{9}$$

при чему су $\nabla_X Y$ и $h(X, Y)$ редом тангентна и нормална компонента од $\bar{\nabla}_X Y$. Формула (9) назива се **Гаусова[17] формула**, и за њу важи следеће:

[17] Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) - немачки математичар

Теорема 1.4 *Нека је $\bar{\nabla}$ Леви-Чивита повезаност многострукости $(N, \bar{g})$, $f : (M, g) \to (N, \bar{g})$ изометријска имерзија и ∇ и h дати формулом (9). Тада је тензорско поље ∇ Леви-Чивита повезаност у односу на индуковану метрику g на M, а $h(X, Y)$ је симетрична квадратна форма са вредностима у нормалном раслојењу, које се назива* **друга фундаментална форма** *многострукости M.*

Нека је ξ нормално, а X тангентно векторско поље на M. Тада је

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \tag{10}$$

где је $-A_\xi X$ тангентна, а $\nabla^\perp_X \xi$ нормална компонента од $\bar{\nabla}_X \xi$. Може се показати да је A_ξ симетрична линеарна трансформација тангентног простора у свакој тачки подмногострукости M која се назива **оператор облика**, а $\nabla^\perp$ метричка конексија нормалног раслојења $T^\perp M$ у односу на индуковану метрику на $T^\perp M$, која се назива **нормална конексија**. Формула (10) назива се **Вајнгартенова**[18] **формула**.

Ако посматрамо оператор облика A_ξ у тачки p, тј. $A_\xi : T_pM \to T_pM$, **главне кривине** у тачки p су сопствене вредности оператора A_ξ, док су **главни правци**, или **вектори главне кривине**, сопствени вектори оператора A_ξ.
Друга фундаментална форма h и оператор облика A_ξ су повезани на следећи начин:

Лема 1.1 *Нека су X и Y тангентна, а ξ нормално векторско поље на M. Тада*

$$g(A_\xi X, Y) = g(h(X, Y), \xi). \tag{11}$$

Доказ: Диференцирањем $g(Y, \xi) = 0$ и користећи (9) и (10) добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= g(\bar{\nabla}_X Y, \xi) + g(Y, \bar{\nabla}_X \xi) \\ &= g(\nabla_X Y, \xi) + g(h(X, Y), \xi) - g(Y, A_\xi X) + g(Y, \nabla^\perp_X \xi) \\ &= g(h(X, Y), \xi) - g(A_\xi X, Y) \end{aligned}$$

одакле следи тврђење. ∎

Подмногострукост M Риманове многострукости N је **тотално геодезијска** уколико су геодезијске линије многострукости M уједно и геодезијске линије амбијентне многострукости N. Тада важи:

Теорема 1.5 *Нека је $f : M \to N$ изометријско потапање Риманове многострукости M у Риманову многострукост N. Тада је M тотално геодезијска у N ако и само ако је $h = 0$, тј. $A_\xi = 0$ за свако $\xi \in T^\perp M$.*

Ако је за нормално векторско поље ξ на M, A_ξ пропорционално идентичком пресликавању, тј.

$$A_\xi = \rho \; Id$$

за неку функцију ρ, онда је ξ **умбиличко сечење**, а M **умбиличка подмногострукост** у односу на ξ. Ако је M умбиличка у односу на свако нормално векторско поље, онда је M **тотално умбиличка**.

[18] Julius Weingarten (1836-1910) - немачки математичар

Нека је $\xi_1,\ \xi_2, ...,\ \xi_{n-m}$ ортонормирана база нормалног простора $T_p^{\perp}M$ у тачки $p \in M$, при чему су m и n редом димензије многострукости M и N, и нека је

$$H = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n-m} trA_{\xi_k}\xi_k. \tag{12}$$

Вектор H је нормалан вектор у тачки p који не зависи од ортонормиране базе нормалног простора и назива се **вектором средње кривине**.

Подмногострукост M је **минимална** уколико је вектор средње кривине једнак нули у свакој тачки, односно ако је траг трансформације A_ξ једнак нули за произвољан нормални вектор ξ.

Ако је подмногострукост M тотално умбиличка и минимална, онда је $A_\xi = \rho\ Id$ и $trA_\xi = 0$, тј. добијамо да је $A_\xi = 0$ за произвољно нормално векторско поље ξ, па на основу Теореме 1.5 важи да је M уједно и тотално геодезијска.

1.3 Комплексне и скоро комплексне многострукости

Нека је M повезан, Хауздорфов тополошки простор са пребројивом базом. M је **комплексна многострукост димензије** n ако

(1) постоји отворено покривање $\{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$ такво да за свако $\alpha \in \mathcal{A}$ постоји хомеоморфизам $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$, и

(2) за свака два $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ таква да је $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$, пресликавање $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} :\ \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ је бихоломорфно.[19]

Како је $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, M је уједно и $2n$-димензиона диференцијабилна многострукост коју ћемо означавати са $M_{\mathbb{R}}$. Комплексну многострукост M тада зовемо комплексном структуром на $M_{\mathbb{R}}$. Нека су $(z_1, ..., z_n)$ локалне холоморфне координате у околини тачке p, где је $z_k = x_k + iy_k$. Тада је $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ локална покретна база тангентног раслојења реалне многострукости $M_{\mathbb{R}}$. Тангентно раслојење комплексне многострукости M је разапето са $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_n}\}$, где је

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k}\right).$$

Дефинишемо пресликавање $J : TM_{\mathbb{R}} \to TM_{\mathbb{R}}$ са

$$J\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}, \qquad J\frac{\partial}{\partial y_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Очигледно, J задовољава једнакост $J^2 = -Id$, где је Id иденнтичко пресликавање тангентног раслојења реалне многострукости $M_{\mathbb{R}}$.

Ендоморфизам J тангентног раслојења реалне диференцијабилне многострукости N који задовољава једнакост $J^2 = -Id$ зове се **скоро комплексна структура** на многострукости N. Тада за N кажемо да је **скоро комплексна многострукост**. Ако на N постоји скоро комплексна структура, димензија многострукости N је паран број и N је оријентабилна.

[19]Пресликавање $f : U \to V$ је бихоломорфно ако је хомеоморфизам и ако су пресликавања f и f^{-1} холоморфна.

Из претходног директно следи да за n-димензиону комплексну многострукост M постоји природно индукована скоро комплексна структура J многострукости $M_{\mathbb{R}}$, тј. $M_{\mathbb{R}}$ је $2n$-димензиона скоро комплексна многострукост.

Риманова многострукост (N, g) са скоро комплексном структуром J је **ермитска** ако за произвољна тангентна векторска поља X и Y важи

$$g(JX, JY) = g(X, Y),$$

тј. J је изометрија.

Нека је N ермитска многострукост, $\bar{\nabla}$ Леви-Чивита конексија на N и Φ 2-форма дефинисана са

$$\Phi(X, Y) = g(X, JY)$$

коју зовемо фундаменталном формом. Диференцирањем добијамо

$$\begin{aligned}&(\bar{\nabla}_Z\Phi)(X, Y) + \Phi(\bar{\nabla}_Z X, Y) + \Phi(X, \bar{\nabla}_Z Y)\\ &= g(\bar{\nabla}_Z X, JY) + g(X, (\bar{\nabla}_Z J)Y) + g(X, J(\bar{\nabla}_Z Y)),\end{aligned}$$

тј.

$$(\bar{\nabla}_Z\Phi)(X, Y) = g(X, (\bar{\nabla}_Z J)Y),$$

одакле следи да је Φ паралелна у односу на $\bar{\nabla}$ ако и само ако је

$$(\bar{\nabla}_X J)Y = 0.$$

Ако је фундаментална форма Φ паралелна у односу на Леви-Чивита конексију $\bar{\nabla}$ ермитске многострукости N, тада кажемо да је N **Келерова** многострукост. Ако важи слабији услов

$$(\bar{\nabla}_X J)X = 0, \qquad X \in TN,$$

кажемо да је N **близу Келерова** многострукост.

Нека је N близу Келерова, али не и Келерова многострукост. Ако за свако $X \in TN$ постоји $Y \in TN$ такво да је

$$(\bar{\nabla}_X J)Y \neq 0,$$

кажемо да је N **строго близу Келерова**.

У [19] је доказано да је комплетна строго близу Келерова многострукост локално производ хомогених близу Келерових простора увијања[20] над Келеровим многострукостима и 6-димензионим Келеровим многострукостима.

Постоје тачно четири 6-димензионе хомогене близу Келерове многострукости (видети [6]) и то су:

(1) продукт многострукост $S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2)/1$;

(2) сфера $S^6 = G_2/SU(3)$;

(3) комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^3 = Sp(2)/SU(2) \times U(1)$;

(4) многострукост $\mathbb{F}^3 = SU(3)/U(1) \times U(1)$.

У наредном поглављу ћемо доказати да је S^6 хомогена многострукост.

[20] простор увијања (енг. twistor space) ермитске многострукости је раслојење свих скоро комплексних ермитских структура те многострукости.

2 Октониони

2.1 Кејли-Диксонова конструкција

У овом поглављу ћемо приказати Кејли-Диксонову[21] конструкцију нормираних дивизионих алгебри $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$. При овој конструкцији добијамо бесконачан низ алгебри, такав да се димензија стално дуплира, при чему су само прве четири нормиране дивизионе алгебре. Сваким повећањем димензије губи се нека особина, па тако кватерниони $\mathbb{H}$ нису комутативни, док октониони $\mathbb{O}$ нису ни комутативни ни асоцијативни. Пре саме конструкције, наведимо пар дефиниција које ћемо користити.

Дефинишемо ***-алгебру** $\mathcal{A}$ као алгебру са операцијом конјугације $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ за коју важи

$$a^{**} = a, \qquad (ab)^* = b^* a^*$$

за све $a, b \in \mathcal{A}$. Кажемо да је *-алгебра **реална** ако важи $a^* = a$ за све елементе $a \in \mathcal{A}$, *-алгебра $\mathcal{A}$ је **фино нормирана** ако $a + a^* \in \mathbb{R}$ и $aa^* = a^*a > 0$ за све ненула $a \in \mathcal{A}$. Ако је $\mathcal{A}$ фино нормирана, тада дефинишемо

$$\mathrm{Re}(a) = \frac{a + a^*}{2} \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(a) = \frac{a - a^*}{2},$$

и дефинишемо **норму** на $\mathcal{A}$ са

$$\|a\|^2 = aa^*.$$

Алгебра $\mathcal{A}$ је **дивизиона алгебра** ако за произвољне $a, b \in \mathcal{A}$ важи да ако је $ab = 0$, онда је $a = 0$ или $b = 0$, тј. ако $\mathcal{A}$ нема делитеље нуле. Еквивалентно, $\mathcal{A}$ је дивизиона ако једначине $ax = b$ и $xa = b$ имају решења у $\mathcal{A}$, где су $a, b \in \mathcal{A}$ и $a \neq 0$. **Нормирана дивизиона алгебра** $\mathcal{A}$ је нормирани векторски простор у коме је $\|ab\| = \|a\|\|b\|$. Кажемо да алгебра $\mathcal{A}$ има **мултипликативне инверзе** ако за произвољно $a \in \mathcal{A}$ постоји $a^{-1} \in \mathcal{A}$ такав да је $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$. Алгебра $\mathcal{A}$ је **комутативна** ако за произвољне $a, b \in \mathcal{A}$ важи $ab = ba$. Постоје три нивоа асоцијативности: алгебра $\mathcal{A}$ је **степено-асоцијативна** ако је подалгебра генерисана са једним произвољним елементом из $\mathcal{A}$ асоцијативна, алгебра $\mathcal{A}$ је **алтернативна** ако је подалгебра генерисана са било која два елемента из $\mathcal{A}$ асоцијативна и, на крају, алгебра $\mathcal{A}$ је **асоцијативна** ако је подалгебра генерисана са било која три елемента из $\mathcal{A}$ асоцијативна.
Сада можемо да се вратимо на Кејли-Диксонову конструкцију.

Крећемо од алгебре $\mathbb{R}$ за коју знамо да је реална комутативна асоцијативна фино нормирана *-алгебра.

У првом кораку од алгебре $\mathbb{R}$ добијамо алгебру $\mathbb{C}$ на следећи начин. Сваки комплексан број $z \in \mathbb{C}$ дат је као уређен пар (a, b) реалних бројева. Сабирање комплексних бројева дефинишемо по компонентама

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

а множење дефинишемо са

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

[21] Leonard Eugene Dickson (1874-1954) - амерички математичар

Такође, конјугат комплексног броја дефинишемо са

$$(a,b)^* = (a,-b).$$

Како је $(0,1)^* = (0,-1) \neq (0,1)$, алгебра $\mathbb{C}$ није реална. Може се проверити да су се остала својства сачувала из $\mathbb{R}$, па је $\mathbb{C}$ комутативна асоцијативна фино нормирана *-алгебра.

Сада када имамо комплексне бројеве, на сличан начин дефинишемо кватернионе $\mathbb{H}$. Произвољан кватернион $q \in \mathbb{H}$ је уређен пар комплексних бројева (z,w). Сабирање се врши по компонентама, док је множење дефинисано са

$$(z_1,w_1)(z_2,w_2) = (z_1z_2 - {w_2}^*w_1, w_2z_1 + w_1{z_2}^*). \tag{13}$$

Напомена 2.1 Приметимо да овако можемо дефинисати и множење у $\mathbb{C}$, с обзиром на то да је реалан број једнак свом конјугату. $\square$

Конјуговање кватерниона дефинишемо са

$$(z,w)^* = (z^*,-w). \tag{14}$$

Како $\mathbb{C}$ није реална, онда ни $\mathbb{H}$ није реална.

Пример 2.1 Посматрајмо кватернионе $q_1 = ((0,1),(0,0))$ и $q_2 = ((0,0),(1,0))$. Тада користећи (13) добијамо

$$q_1q_2 = ((0,0),(0,1)) \neq ((0,0),(0,-1)) = q_2q_1.$$

Дакле, $\mathbb{H}$ није комутативна алгебра. $\square$

Може се показати да је $\mathbb{H}$ асоцијативна фино нормирана *-алгебра, тј. на преласку са $\mathbb{C}$ на $\mathbb{H}$ се губи једино комутативност.

Настављамо ову конструкцију. Октонионе $\mathbb{O}$ дефинишемо као уређен пар кватерниона. Сабирање се врши по компонентама, док се множење дефинише са

$$(p_1,q_1)(p_2,q_2) = (p_1p_2 - {q_2}^*q_1, q_2p_1 + q_1{p_2}^*), \quad p_1,p_2,q_1,q_2 \in \mathbb{H}. \tag{15}$$

Конјуговање је дато са $(p,q)^* = (p^*,-q)$.
На преласку са $\mathbb{H}$ на $\mathbb{O}$ се губи асоцијативност. У следећем делу ћемо показати да је $\mathbb{O}$ алтернативна фино нормирана *-алгебра.

Дакле, важи

$\mathbb{R}$ је реална комутативна асоцијативна фино нормирана *-алгебра $\Rightarrow$
$\mathbb{C}$ је комутативна асоцијативна фино нормирана *-алгебра $\Rightarrow$
$\mathbb{H}$ је асоцијативна фино нормирана *-алгебра $\Rightarrow$
$\mathbb{O}$ је алтернативна фино нормирана *-алгебра.

Ако је $\mathcal{A}$ фино нормирана, мултипликативни инверз је дат са

$$a^{-1} = \frac{a^*}{\|a\|^2},$$

па су $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ нормиране дивизионе алгебре.

Теорема 2.1 *(Хурвиц[22]) Алгебре $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и $\mathbb{O}$ су једине нормиране дивизионе алгебре над $\mathbb{R}$.*

Ако наставимо Кејли-Диксонов процес на октонионе, добијамо низ *-алгебри димензије 16,32,64 итд. Први наредни се зову седениони. Видели смо да су све *-алгебре у овом низу фино нормиране, али ниједна више није реална, комутативна ни асоцијативна. Имају мултипликативне инверзе с обзиром на то да су фино нормиране. Међутим, нису дивизионе алгебре с обзиром на то да нека експлицитна рачунања показују да седениони, па тиме и сви остали, имају делитеље нуле.

Напомена 2.2 Често се за комплексан број $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ користи запис $z = a + bi$, где је $i^2 = -1$, тј.

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}.$$

Такође, кватернионе можемо посматрати на следећи начин:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1\}.$$

Како из ових релација важи $ij = k$, онда произвољан кватернион можемо записати у облику

$$q = a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j = z + wj,$$

тј. природно можемо q посматрати као уређен пар комплексних бројева (z, w), где је $z = a + bi$, $w = c + di$.

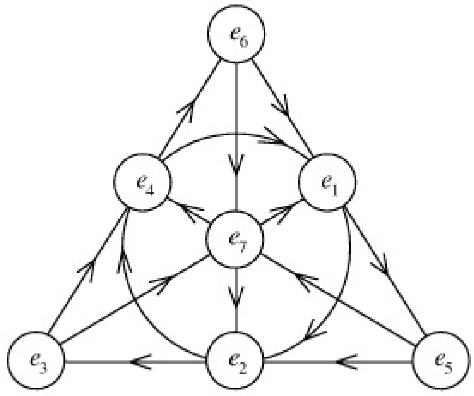
Аналогно, произвољан октонион $\alpha = (p, q) = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k, a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)$ можемо записати као $\alpha = p + qe$, где је $e^2 = -1$. Тада је

$$\alpha = (a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k)e,$$

па октонионе можемо посматрати као 8-димензиони простор над $\mathbb{R}$. $\square$

2.2 Октониони и сфера S^6

На основу претходног, за базу $\mathbb{O}$ можемо узети $\{1, e_1, e_2, ..., e_7\}$, при чему је $e_i^2 = -1$, а множење је дато следећим дијаграмом:



[22]Adolf Hurwitz (1859-1919) - немачки математичар

На свакој линији (или кругу) се налази тачно три елемента, и кроз сваки елемент иду тачно три линије. Производ два елемента са исте линије једнак је трећем, док знак зависи од смера линије. Тако је нпр. $e_5e_2 = e_3$, док је $e_1e_7 = -e_3$.

Као што смо већ поменули, алгебра октониона $\mathbb{O}$ није асоцијативна, већ важи следећа лема:

Лема 2.1 *Алгебра октониона $\mathbb{O}$ је алтернативна, тј. за свака два елемента $\alpha, \beta \in \mathbb{O}$ важи*

$$(\alpha\beta)\beta = \alpha(\beta\beta), \quad \alpha(\alpha\beta) = (\alpha\alpha)\beta. \tag{16}$$

Доказ: Нека је $\alpha = a + be$ и $\beta = c + de$. Тада је

$$\alpha\beta = (ac - d^*b) + (da + bc^*)e,$$

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\beta &= [(ac - d^*b)c - d^*(da + bc^*)] + [d(ac - d^*b) + (da + bc^*)c^*]e,\\ \beta\beta &= (c^2 - d^*d) + (dc + dc^*)e,\\ \alpha(\beta\beta) &= [a(c^2 - d^*d) - (dc + dc^*)^*b] + [(dc + dc^*)a + b(c^2 - d^*d)^*]e,\end{aligned}$$

па како су $dd^* = d^*d$ и $c + c^*$ реални, а самим тим и комутирају са кватернионима, добијамо

$$\begin{aligned}a(c^2 - d^*d) - (dc + dc^*)^*b &= ac^2 - ad^*d - (c^* + c)d^*b\\ &= ac^2 - d^*da - d^*b(c^* + c)\\ &= (ac - d^*b)c - d^*(da + bc^*),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(dc + dc^*)a + b(c^2 - d^*d)^* &= d(c + c^*)a + bc^*c^* - bd^*d\\ &= da(c + c^*) + bc^*c^* - dd^*b\\ &= d(ac - d^*b) + (da + bc^*)c^*,\end{aligned}$$

тј. важи $(\alpha\beta)\beta = \alpha(\beta\beta)$. Аналогно се доказује да важи и $\alpha(\alpha\beta) = (\alpha\alpha)\beta$. ∎

Директним рачуном се може показати и следећа лема:

Лема 2.2 *Алгебра октониона $\mathbb{O}$ је нормирана алгебра, тј. за свака два елемента $\alpha, \beta \in \mathbb{O}$ важи*

$$\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|.$$

Из ових лема заправо добијамо да је алгебра октониона дивизиона алгебра: директно се проверава да су једначине $\alpha x = \beta$ и $x\alpha = \beta$ задовољене (за $\alpha \neq 0$) респективно октонионима $x = \alpha^{-1}\beta$ и $x = \beta\alpha^{-1}$, где је $\alpha^{-1} = \frac{\alpha^*}{\|\alpha\|^2}$.

Ако у првом идентитету алтернативности из (16) заменимо β са $x+y$, после скраћивања и груписања добијамо да важи (уместо заграда раздвојићемо парове тачкама)

$$\alpha x \cdot y + \alpha y \cdot x = \alpha \cdot xy + \alpha \cdot yx. \tag{17}$$

Овај метод добијања новог идентитета од другог назива се **поларизација**.

Слично, поларизацијом другог идентитета алтернативности из (16) на исти начин, и преименовањем слова, добијамо

$$\alpha x \cdot y + x\alpha \cdot y = \alpha \cdot xy + x \cdot \alpha y. \tag{18}$$

Дефиниција 2.1 *Три-линеарна форма*

$$[x, y, z] = (xy)z - x(yz), \qquad x, y, z \in \mathbb{O}$$

назива се асоцијатором.

Идентитет (17) нам заправо каже да је $[\alpha, x, y] = -[\alpha, y, x]$, тј. $[\alpha, x, y]$ је косо-симетричан по x и y, док из (18) добијамо да је косо-симетричан и по α и x. Из овога следи да је $[\alpha, x, y]$ косо-симетричан и по α и y, па важи и трећи идентитет алтернативности,

$$\alpha x \cdot y + yx \cdot \alpha = \alpha \cdot xy + y \cdot x\alpha, \tag{19}$$

који, за $y = \alpha$ и $x = \beta$, има облик $(\alpha\beta)\alpha = \alpha(\beta\alpha)$.

Нека је

$$\mathrm{Im}\ \mathbb{O} = \{x \in \mathbb{O} : x + x^* = 0\},$$

потпростор имагинарних октониона. Тада важи ортогонална декомпозиција $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{Im}\ \mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^7$, у односу на скаларни производ (20).

За произвољне $\alpha \in \mathbb{O}$ и $\beta = \lambda + \beta'$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\beta' \perp 1$, имамо да важи $\alpha\beta \cdot (\lambda + \beta') = \alpha \cdot \beta(\lambda + \beta')$, тј. $\alpha\beta \cdot \beta' = \alpha \cdot \beta\beta'$, а то је еквивалентно са $\alpha\beta \cdot \beta^* = \alpha \cdot \beta\beta^* = \alpha(\beta, \beta)$, где је са

$$(x, y) = \mathrm{Re}(xy^*) = \frac{xy^* + yx^*}{2} \tag{20}$$

задат скаларни производ на $\mathbb{O}$. Поларизацијом овог идентитета добијамо

$$\alpha x \cdot y^* + \alpha y \cdot x^* = 2(x, y)\alpha. \tag{21}$$

Ако је $\mathcal{A}$ нормирана алгебра, тј. ако имамо да важи $(\alpha\beta, \alpha\beta) = (\alpha, \alpha)(\beta, \beta)$, онда поларизацијом овога најпре са $\beta = x + y$, а затим и са $\alpha = u + v$, добијамо идентитет

$$(ux, vy) + (vx, uy) = 2(u, v)(x, y), \tag{22}$$

који важи и за било које елементе x, y, u и v нормиране алгебре $\mathcal{A}$ (па тиме и за алгебру $\mathbb{O}$).

Ми ћемо посматрати подскуп скупа $\mathrm{Im}\ \mathbb{O}$ који садржи елементе α такве да је $\|\alpha\| = 1$. Тај подскуп представља шестодимензиону сферу, коју ћемо означавати са S^6. Дакле,

$$S^6 = \{\alpha \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O} : \|\alpha\| = 1\}.$$

Лема 2.3 $\alpha \in S^6$ *акко* $\alpha^2 = -1$.

Доказ: $\Rightarrow$: Како $\alpha \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$, онда важи $\alpha^* = -\alpha$ па је $\alpha^2 = -\|\alpha\|^2$. Пошто је $\|\alpha\| = 1$, добијамо $\alpha^2 = -1$.
$\Leftarrow$: Ако је $\alpha^2 = -1$, онда је $1 = \|\alpha^2\| = \|\alpha\|\|\alpha\|$, па је $\|\alpha\| = 1$, тј. $\alpha\alpha^* = 1$, па је $\alpha(-\alpha^*) = -1 = \alpha\alpha$. Како је $\alpha^* = -\alpha$ добијамо да $\alpha \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$, а како је $\|\alpha\| = 1$, следи да $\alpha \in S^6$. ∎

Из линеарности се види да $\alpha \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$ акко $\alpha^2 = -\|\alpha\|^2$.

Напомена 2.3 Приметимо да нам Лема 2.3 заправо каже да, у скупу октониона, једначина $x^2 = -1$ има бесконачно много решења и сва решења се налазе на сфери S^6. Подсетимо се да ова једначина у $\mathbb{R}$ нема решења, у $\mathbb{C}$ има два решења, док се аналогно може показати да у $\mathbb{H}$ такође има бесконачно много решења и сва решења су на сфери S^2. $\square$

Нека је $\mathcal{H}$ подалгебра са јединицом од $\mathbb{O}$, различита од $\mathbb{O}$, и нека је α октонион из S^6 ортогоналан на $\mathcal{H}$. Тада за произвољан елемент $b \in \mathcal{H}$, октонион $b\alpha$ је ортогоналан на $\mathcal{H}$. Наиме, ако у (22) заменимо $u = 1$, $v = b$, $x = \alpha$ и $y = a$, где $a \in \mathcal{H}$, како је $(ab, \alpha) = 0$ (јер $ab \in \mathcal{H}$) и $(\alpha, 1) = 0$, добијамо да важи $(b\alpha, a) = 0$.
Специјално, $b\alpha \perp 1$, па је $(b\alpha)^* = -b\alpha$.

Лема 2.4 *За свака два елемента $a, b \in \mathcal{H}$ и $\alpha \in S^6$ који је ортогоналан на $\mathcal{H}$ важи:*

$$a \cdot b\alpha = ba \cdot \alpha, \qquad a\alpha \cdot b = ab^* \cdot \alpha, \qquad a\alpha \cdot b\alpha = -b^*a. \tag{23}$$

Доказ: Ако у (21) заменимо α са a, x са α и y са b^*, и како је $\alpha \perp b$, па тиме и $\alpha \perp b^*$, добијамо једначину

$$a\alpha \cdot b + ab^* \cdot \alpha^* = 0,$$

што је еквивалентно другом идентитету из (23). На сличан начин, ако у (21) заменимо α са 1, x са a и y са $(b\alpha)^* = -b\alpha$, добијамо

$$-a \cdot b\alpha + b\alpha \cdot a^* = -2(a, b\alpha) = 0,$$

тј.

$$a \cdot b\alpha = ba \cdot \alpha,$$

што је први идентитет из (23). На крају, ако $b \in \mathbb{R}$, онда трећи идентитет из (23) постаје $a\alpha \cdot b\alpha = -ba$, па се своди на други идентитет. Дакле, довољно је доказати за случај када је $b \perp 1$. Ако у (21) заменимо α са a, x са α и y са $(b\alpha)^* = -b\alpha$, добијамо

$$a\alpha \cdot b\alpha + (a \cdot b\alpha)\alpha = -2(\alpha, b\alpha)a = 0.$$

Да је нула следи из (22), јер за $u = 1$, $v = b$ и $x = y = \alpha$ добијамо $(\alpha, b\alpha) = (1, b)(\alpha, \alpha) = 0$. Сада, користећи већ доказани идентитет, имамо $a\alpha \cdot b\alpha = -(ba)\alpha \cdot \alpha = ba = -b^*a$. ∎

Лема 2.5 *Алгебра $\mathcal{H}$ је асоцијативна.*

Доказ: Нека су a, b и c произвољни елементи из $\mathcal{H}$. Ако у (21) заменимо α са $b\alpha$, x са c^* и y са $a^*\alpha$, добијамо

$$(b\alpha \cdot c^*) \cdot (a^*\alpha)^* + (b\alpha \cdot a^*\alpha) \cdot c = 2(c^*, a^*\alpha) \cdot b\alpha = 0.$$

Користећи претходно доказане идентитете имамо да важи

$$\begin{aligned} 0 &= (b\alpha \cdot c^*) \cdot (a^*\alpha)^* + (b\alpha \cdot a^*\alpha) \cdot c \\ &= (b\alpha \cdot c^*) \cdot (-a^*\alpha) + (-ab)c \\ &= -(bc)\alpha \cdot (a^*\alpha) + (-ab)c \\ &= a(bc) - (ab)c. \end{aligned}$$

Дакле, за произвољне $a, b, c \in \mathcal{H}$ важи $a(bc) = (ab)c$, што значи да је $\mathcal{H}$ асоцијативна. ∎

Како за $\alpha \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$ важи $\alpha^* = -\alpha$, онда је скаларни производ (20) на $\mathrm{Im}\ \mathbb{O}$ задат са

$$(\alpha, \beta) = -\mathrm{Re}(\alpha\beta) = -\frac{\alpha\beta + \beta\alpha}{2}.$$

На $\mathrm{Im}\ \mathbb{O}$ дефинишемо **векторски** $\times$ **производ** са

$$\alpha \times \beta := \mathrm{Im}(\alpha\beta) = \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{2}.$$

Векторски производ $e_m \times e_n$ на $\mathrm{Im}\ \mathbb{O}$ је дат следећом табелом:

m/n	1	2	3	4	5	6	7
1	0	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
2	$-e_3$	0	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
3	e_2	$-e_1$	0	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	0	e_1	e_2	e_3
5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	0	$-e_3$	e_2
6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	0	$-e_1$
7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	0

Релације из ове табеле краће можемо записати као

$$e_3 = e_1 \times e_2, \quad e_5 = e_1 \times e_4, \quad e_6 = e_2 \times e_4, \quad e_7 = e_3 \times e_4,$$

и свака уређена ортонормирана база простора $\mathbb{R}^7$ која задовољава ове релације назива се **канонска база** или **G_2-база**. На пример, стандардна база простора $\mathbb{R}^7$ је канонска.

Специјално, множење на $\mathbb{O}$ преко скаларног и векторског производа је дато са

$$(r + \alpha)(s + \beta) = rs - (\alpha, \beta) + r\beta + s\alpha + (\alpha \times \beta),$$
$$r, s \in \mathrm{Re}\ \mathbb{O},\ \alpha, \beta \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}.$$

Лема 2.6 *Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$. Тада:*

(a) $\alpha\beta = \alpha \times \beta - (\alpha, \beta)$.

(б) $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$.

(в) *Ако су α и β ортогонални, при чему је α јединични, тада*

$$\alpha \times (\alpha \times \beta) = -\beta. \tag{24}$$

(г) *$\alpha \times \beta$ је ортогоналан и на α и на β.*

(д)

$$\alpha \times (\beta \times \gamma) + (\alpha \times \beta) \times \gamma = 2(\alpha, \gamma)\beta - (\alpha, \beta)\gamma - (\gamma, \beta)\alpha. \tag{25}$$

(ђ) *$(\alpha \times \beta, \gamma)$ је косо-симетричан по α, β и γ.*

Доказ:

(а) $\alpha \times \beta - (\alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{2} - (-\frac{\alpha\beta + \beta\alpha}{2}) = \alpha\beta$.

(б) $\alpha \times \beta = \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{2} = -\frac{\beta\alpha - \alpha\beta}{2} = -\beta \times \alpha$.

(в) Како је $\alpha \perp \beta$, онда је $\alpha\beta = -\beta\alpha$, а како је $\|\alpha\| = 1$, онда важи $\alpha^2 = -1$. Користећи то и алтернативност добијамо

$$\begin{aligned}\alpha \times (\alpha \times \beta) &= \alpha \times (\frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{2}) = \frac{\alpha(\alpha\beta - \beta\alpha) - (\alpha\beta - \beta\alpha)\alpha}{4} \\ &= \frac{\alpha^2\beta - 2\alpha\beta\alpha + \beta\alpha^2}{4} = \frac{-\beta + 2\beta\alpha^2 - \beta}{4} = \frac{-\beta - 2\beta - \beta}{4} = -\beta.\end{aligned}$$

(г)

$$(\alpha, \alpha \times \beta) = (\alpha, \frac{\alpha\beta - \beta\alpha}{2}) = -\frac{\alpha(\alpha\beta - \beta\alpha) + (\alpha\beta - \beta\alpha)\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2\beta - \beta\alpha^2}{4} = 0,$$

јер $\alpha^2 = -\|\alpha\|^2 \in \mathbb{R}$, па комутира са β. Аналогно и $(\beta, \alpha \times \beta) = 0$.

Слично се доказују и остала два тврђења. ∎

Дакле, група G_2 аутоморфизама простора $\mathbb{O}$ је заправо група изометрија простора $\mathbb{R}^7$ које чувају векторски $\times$ производ.

Нека су e_1, e_2 и e_4 међусобно ортогонални јединични вектори такви да је e_4 ортогоналан и на $e_1 \times e_2$. Тада e_1, e_2 и e_4 одређују јединствену канонску базу $e_1, ..., e_7$ и $(\mathbb{R}^7, \times)$ је генерисано са e_1, e_2 и e_4, где важи релација

$$e_i \times (e_j \times e_k) + (e_i \times e_j) \times e_k = 2\delta_{ik}e_j - \delta_{ij}e_k - \delta_{jk}e_i.$$

Ако су $e_1, ..., e_7$ и $f_1, ..., f_7$ две произвољне канонске базе, тада постоји јединствен $\Phi \in G_2$ такав да је $\Phi e_i = f_i$ и ово Φ је јединствено одређено са $\Phi e_1, \Phi e_2$ и Φe_4, тј. важи следећа теорема:

Теорема 2.2 *Нека су $\alpha, \beta, \delta \in S^6$ такви да:*

(1) *β је ортогоналан на α и*

(2) *δ је ортогоналан на α, β и $\alpha\beta$.*

Тада постоји јединствен аутоморфизам Φ алгебре $\mathbb{O}$ такав да је

$$\alpha = \Phi e_1, \quad \beta = \Phi e_2, \quad \delta = \Phi e_4.$$

Доказ: Како $\alpha, \beta \in S^6$, онда важи $\alpha^2 = \beta^2 = -1$, па како је $\alpha \perp \beta$, онда је $\alpha\beta = -\beta\alpha$. Такође, $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^* = \beta\alpha = -\alpha\beta$, па како је $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| = 1$, добијамо да $\alpha\beta \in S^6$, и специјално $(\alpha\beta)^2 = -1$. Из алтернативности добијамо $\alpha(\alpha\beta) = -\beta$ и $(\alpha\beta)\beta = -\alpha$. Ако у (22) убацимо $u = v = \alpha$, $x = \beta$ и $y = 1$, добијамо $(\alpha\beta, \alpha) = (\alpha, \alpha)(\beta, 1) = 0$, из чега следи $(\alpha\beta)\alpha = -\alpha(\alpha\beta) = \beta$. На сличан начин можемо добити да важи и $\beta(\alpha\beta) = \alpha$, па видимо да множењем произвољан број пута елеменате α и β, у било ком редоследу, можемо добити једино елементе ± 1, $\pm\alpha$, $\pm\beta$ и $\pm\alpha\beta$. Ово значи да елементи облика

$$a + b\alpha + c\beta + d\alpha\beta, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

формирају подалгебру $\mathcal{H}$ од $\mathbb{O}$ која је димензије 4, па према претходном разматрању, она је асоцијативна. Сада се лако може показати да се са $1 \to 1$, $i \to \alpha$, $j \to \beta$, $k \to \alpha\beta$, дефинише изоморфизам између алгебре кватерниона $\mathbb{H}$ и $\mathcal{H}$.

Како је δ према претпоставци теореме ортогоналан на 1, α, β и $\alpha\beta$, онда важи да је δ ортогоналан на цело $\mathcal{H}$. Због тога за њих важе сви идентитети из (23). Ако упоредимо идентитете из (23) са (21), можемо закључити да се изоморфизам $\mathbb{H} \to \mathcal{H}$, који смо конструисали, може проширити до хомоморфизма(при коме $e_4 \to \delta$) алгебре $\mathbb{O}$ на подалгебру генерисану подалгебром $\mathbb{H}$ и елементом δ. Како је било који ненула хомоморфизам дивизионе алгебре са јединицом заправо и мономорфизам, и како је било који мономорфизам коначно-димензионе алгебре на себе уједно и аутоморфизам, заправо имамо да смо конструисали тражени аутоморфизам $\mathbb{O} \to \mathbb{O}$ који слика e_1, e_2 и e_4 у елементе α, β и δ. Тиме је завршен доказ ове теореме. ∎

Из ове теореме следи да група $G_2 = \mathrm{Aut}\ \mathbb{O}$ делује транзитивно на S^6, тј. пресликавање $G_2 \to S^6$ дефинисано формулом $\Phi \to \Phi e_1$ је сурјективно. Ово значи да је сфера S^6 дифеоморфна количничком простору G_2/K, где је K подгрупа аутоморфизама при којима је e_1 фиксно, и K је изоморфно са $SU(3)$ па је:

$$G_2/SU(3) \approx S^6,$$

тј. сфера S^6 је хомогени простор.

3 Сфера S^6

3.1 Сфера као подмногострукост простора $\mathbb{R}^7$

Сфера $S^6(1)$ је јединична сфера у еуклидском простору $\mathbb{R}^7 \cong \mathrm{Im}\mathbb{O}$, коју ћемо краће означавати са S^6. Стандардну метрику на $\mathbb{R}^7$ ћемо означити са g, и у претходном поглављу смо видели да је тада

$$S^6 = \{X \in \mathbb{R}^7 \mid g(X,X) = 1\}.$$

Она је шестодимензиона подмногострукост простора $\mathbb{R}^7$. Означимо са D и $\bar{\nabla}$ конексије на $\mathbb{R}^7$ и S^6, са $\bar{R}$ и $\bar{h}$ тензор кривине и другу фундаменталну форму на S^6 и са g метрику на S^6 индуковану метриком простора $\mathbb{R}^7$ коју ћемо исто означавати. Ако са N означимо јединично нормално векторско поље на S^6 у $\mathbb{R}^7$, и тачку на сфери идентификујемо са одговарајућим позиционим вектором, тада важи

$$N(X) = -X, \qquad X \in S^6.$$

За произвољну хиперповрш $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ дефинишемо **Гаусово пресликавање** $\mathcal{G} : M^n \to S^n$ на следећи начин: за $p \in M^n$, $\mathcal{G}(p)$ је крајња тачка јединичног вектора $N(p)$ нормалног на M^n у тачки p, коме је почетак у координатном почетку. Приметимо да су вредности пресликавања $\mathcal{G}$ на јединичној сфери S^n. Како су простори T_pM^n и $T_{\mathcal{G}(p)}S^n$ паралелни, можемо сматрати да важи $(\mathcal{G}_*)_p : T_pM^n \to T_pM^n$. Специјално за $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, $p \in M^2$, $(\mathcal{G}_*)_p : T_pM^2 \to T_pM^2$ је симетричан линеаран оператор одређен 2×2 матрицом $[\mathcal{G}_*]$ и дефинишемо **Гаусову кривину** K површи M^2 у тачки p као детерминанту те матрице, тј.

$$K = \det\, [\mathcal{G}_*]. \tag{26}$$

Уочимо да за $M = S^6$ и одговарајуће Гаусово пресликавање $\mathcal{G} : S^6 \to S^6$ важи $\mathcal{G} = -Id$, где је Id идентичко пресликавање сфере.

Формуле Гауса (9) и Вајнгартена (10) гласе

$$D_XY = \bar{\nabla}_XY + \bar{h}(X,Y), \tag{27}$$

$$D_XN = -\bar{A}_NX + \bar{\nabla}^{\perp}_XN, \tag{28}$$

где $X, Y \in TS^6$, $N \in T^{\perp}S^6$, $\bar{\nabla}^{\perp}$ је нормална конексија и $\bar{A}_N$ оператор облика у односу на N.

Тада на основу (11) за оператор облика $\bar{A}_N$ и другу фундаменталну форму $\bar{h}$ важи

$$g(\bar{A}_NX, Y) = g(\bar{h}(X,Y), N). \tag{29}$$

Користећи (29) и (27) добијамо

$$\begin{aligned} g(\bar{A}_NX, Y) &= g(\bar{h}(X,Y), N) = g(D_XY, N) - \underbrace{g(\bar{\nabla}_XY, N)}_{=0} \\ &= D_X\underbrace{(g(Y,N))}_{=0} - g(Y, D_XN) = -g(D_XN, Y), \end{aligned}$$

тј. важи $\bar{A}_NX = -D_XN$, па је $\bar{\nabla}^{\perp}_XN = 0$, односно формула (28) постаје

$$D_XN = -\bar{A}_NX. \tag{30}$$

Нека је $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S^6$ крива чији је тангентни вектор у тачки $c(0)$ једнак $c'(0) = X$. Тада

$$\mathcal{G}_*(X) = \frac{d}{dt}(N \circ c(t))|_{t=0} = D_X N = -\bar{A}_N X,$$

па је $\bar{A}_N X = X$, што значи да је сфера тотално умбиличка и да важи

$$D_X N = -X,$$

тј.

$$D_X p = X, \tag{31}$$

где је p позиционо векторско поље, тј. $p = -N$. Из (29) добијамо и

$$\bar{h}(X, Y) = g(\bar{A}_N X, Y)N = g(X, Y)N = -g(X, Y)p. \tag{32}$$

Лема 3.1 *Нека је D Леви-Чивита повезаност у $\mathbb{R}^7$. Тада*

$$D_X(Y \times Z) = D_X Y \times Z + Y \times D_X Z.$$

Доказ: Нека су $e_1, ..., e_7$ векторска поља таква да је за свако x, $\{e_1(x), ..., e_7(x)\}$ G_2 база простора $\mathbb{R}^7$. Уочимо да је тада $D_{e_i} e_j = 0$, па је, тривијално

$$D_{e_i}(e_j \times e_k) = D_{e_i} e_j \times e_k + e_j \times D_{e_i} e_k,$$

а самим тим и

$$D_X(e_j \times e_k) = D_X e_j \times e_k + e_j \times D_X e_k.$$

Даље, можемо написати $Y(x) = \sum_{i=1}^{7} Y_i(x) e_i(x)$, $Z(x) = \sum_{j=1}^{7} Z_j(x) e_j(x)$. Тада је

$$\begin{aligned} D_X(Y \times Z) &= \sum_{i,j=1}^{7} D_X(Y_i(x) Z_j(x)) e_i \times e_j + \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) Z_j(x) D_X(e_i \times e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{7} D_X(Y_i(x)) Z_j(x) e_i \times e_j + \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) D_X(Z_j(x)) e_i \times e_j \\ &+ \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) Z_j(x) (D_X e_i) \times e_j + \sum_{i,j=1}^{7} Y_i(x) Z_j(x) e_i \times (D_X e_j) \\ &= D_X Y \times Z + Y \times D_X Z. \end{aligned}$$

∎

За произвољну тачку $p \in S^6$, $T_p S^6 \cong \{X \in \mathbb{R}^7 | g(p, X) = 0\}$. Дефинишемо $(1,1)$-тензорско поље $J : T_p S^6 \to T_p S^6$ на S^6 са

$$J_p(X) = p \times X, \tag{33}$$

за свако $p \in S^6$. Видели смо да је тада $J_p(X)$ ортогонално на p, па припада одговарајућем тангентном простору. Из (24) добијамо

$$J_p^2 X = p \times (p \times X) = -X,$$

а такође важи и $g(JX,JY) = g(X,Y)$ па је J добро дефинисано и представља скоро комплексну структуру на S^6.

Нека је G $(2,1)$ тензорско поље на S^6 дефинисано са

$$G(X,Y) = (\bar{\nabla}_X J)Y.$$

Нека је p позиционо векторско поље тачака на сфери. Тада

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= \bar{\nabla}_X(JY) - J\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X(p\times Y) - J\bar{\nabla}_X Y \\ &= D_X(p\times Y) - \bar{h}g(X, p\times Y) - J\bar{\nabla}_X Y \\ &= D_X(p)\times Y + p\times D_X Y + g(X,p\times Y)p - p\times\bar{\nabla}_X Y \\ &= X\times Y + g(X,p\times Y)p + p\times(D_X Y - J\bar{\nabla}_X Y) \\ &= X\times Y + g(X,p\times Y)p \end{aligned}$$

јер је вектор у загради нормалан на сферу, тј. колинеаран са p.

Теорема 3.1 *Поље G има следеће особине:*

(а)
$$G(X,X) = 0, \tag{34}$$

(б)
$$G(X,Y) + G(Y,X) = 0, \tag{35}$$

(в)
$$G(X,JY) + JG(X,Y) = 0, \tag{36}$$

где су X и Y векторска поља на S^6.

Доказ:

(а)
$$G(X,X) = X\times X + g(X,p\times X)p = 0$$

Први сабирак је 0 због особине векторског производа, а други јер су p и $p\times X$ ортогонална векторска поља.

(б) Користећи израз за $G(X,Y)$ и то да је $g(X,p\times Y)$ косо-симетрично добијамо

$$G(X,Y) + G(Y,X) = X\times Y + g(X,p\times Y)p + Y\times X + g(Y,p\times X)p = 0.$$

(в) Користећи (25) добијамо

$$\begin{aligned} X\times(p\times Y) &= (X\times Y)\times p - 2g(X,p)Y + g(X,Y)p + g(p,Y)X \\ &= -p\times(X\times Y) + g(X,Y)p, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} &G(X,JY) + JG(X,Y) \\ &= X\times(JY) + g(X,p\times(JY))p + p\times(X\times Y) + p\times(g(X,p\times Y)p) \\ &= -p\times(X\times Y) + g(X,Y)p - g(X,Y)p + p\times(X\times Y) = 0. \end{aligned}$$

∎

Из (34) добијамо да је J близу Келерова структура.

3.2 Скоро комплексне подмногострукости сфере S^6

Нека је M подмногострукост сфере S^6. Означимо са ∇, $\bar{\nabla}$ и D редом конексије на M, S^6 и $\mathbb{R}^7$.

Ако је M хиперповрш и ξ јединично нормално векторско поље на M, онда је $g(\xi,\xi)=1$. Нека је X произвољно тангентно поље на M. Диференцирањем добијамо $0=\bar{\nabla}_X(g(\xi,\xi))=2g(\bar{\nabla}_X\xi,\xi)$, па је $g(\nabla^{\perp}_X\xi,\xi)=0$, тј.

$$\bar{\nabla}_X\xi=-A_\xi X. \tag{37}$$

Тензор кривине R Риманове конексије D је једнак нули, тј. важи

$$0\equiv R(X,Y)Z=D_XD_YZ-D_YD_XZ-D_{[X,Y]}Z.$$

Применом формула Гауса и Вајнгартена (27) и (28) на S^6 и $\mathbb{R}^7$, као и (32) и (31), добијамо

$$\begin{aligned}0&=D_X(\bar{\nabla}_YZ-g(Y,Z)p)-D_Y(\bar{\nabla}_XZ-g(X,Z)p)-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z+g([X,Y],Z)p\\&=\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ-g(X,\bar{\nabla}_YZ)p-\underbrace{(D_Xg)}_{=0}(Y,Z)p-g(Y,Z)\underbrace{D_Xp}_{=X}\\&-\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ+g(Y,\bar{\nabla}_XZ)p+\underbrace{(D_Yg)}_{=0}(X,Z)p+g(X,Z)\underbrace{D_Yp}_{=Y}\\&-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z+g([X,Y],Z)p.\end{aligned}$$

Како је

$$g(X,\bar{\nabla}_YZ)=(\bar{\nabla}_Yg)(X,Z)-g(\bar{\nabla}_YX,Z)=-g(\bar{\nabla}_YX,Z),$$

онда је

$$\begin{aligned}&\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ-\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z+g(\underbrace{\bar{\nabla}_YX-\bar{\nabla}_XY+[X,Y]}_{=0},Z)p\\&-g(Y,Z)X+g(X,Z)Y=0,\end{aligned}$$

па добијамо

$$\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ-\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ-\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z-g(Y,Z)X+g(X,Z)Y=0. \tag{38}$$

Сада, применом формула Гауса и Вајнгартена (9) и (10) на M и S^6 добијамо

$$\begin{aligned}0&=\bar{\nabla}_X(\nabla_YZ+h(Y,Z))-\bar{\nabla}_Y(\nabla_XZ+h(X,Z))\\&-\nabla_{[X,Y]}Z-h([X,Y],Z)-g(Y,Z)X+g(X,Z)Y\\&=\nabla_X\nabla_YZ+h(X,\nabla_YZ)-A_{h(Y,Z)}X+\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z))\\&-\nabla_Y\nabla_XZ-h(Y,\nabla_XZ)+A_{h(X,Z)}Y-\nabla^{\perp}_Y(h(X,Z))\\&-\nabla_{[X,Y]}Z-h([X,Y],Z)-g(Y,Z)X+g(X,Z)Y.\end{aligned}$$

Изједначавањем тангентног и нормалног дела са нулом добијамо:

$$R(X,Y)Z-A_{h(Y,Z)}X+A_{h(X,Z)}Y-g(Y,Z)X+g(X,Z)Y=0, \tag{39}$$

$$h(X,\nabla_YZ)+\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z))-h(Y,\nabla_XZ)-\nabla^{\perp}_Y(h(X,Z))-h([X,Y],Z)=0. \tag{40}$$

Користећи (38) и (2), једначину (39) можемо другачије записати као

$$\bar{R}(X,Y)Z - R(X,Y)Z = A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X.$$

Сада користећи (4) и (11), за произвољно векторско поље W тангентно на M, добијамо

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + g(h(X,Z),h(Y,W)) - g(h(Y,Z),h(X,W)). \quad (41)$$

Једначина (41) назива се **Гаусова једначина.**

Како је $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, једначина (40) постаје

$$\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) = \nabla^{\perp}_Y(h(X,Z)) - h(\nabla_Y X,Z) - h(X,\nabla_Y Z),$$

па ако означимо $(\nabla h)(X,Y,Z) = \nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)$, добијамо

$$(\nabla h)(X,Y,Z) = (\nabla h)(Y,X,Z). \quad (42)$$

Једначина (42) назива се **Кодацијева**[23] **једначина**.

Видели смо да на сфери S^6 постоји скоро комплексна структура J. У зависности од односа према J, подмногострукост M је:

- **тотално реална,** ако J пресликава тангентно раслојење у нормално, тј. $(\forall p \in M)\ J(T_pM) \subseteq T_p^{\perp}M$,
- **скоро комплексна,** ако је тангентно раслојење инваријантно за J, тј. $(\forall p \in M)\ J(T_pM) \subseteq J(T_pM)$,
- CR-**подмногострукост**, ако је TM директна сума два ортогонална раслојења од којих је једно инваријантно за J док се друго са J слика у нормално.

Скоро комплексне подмногострукости сфере морају бити парне димензије, дакле димензије 2 или 4. Греј је доказао следећу теорему:

Теорема 3.2 *Не постоје четвородимензионе скоро комплексне подмногострукости сфере S^6.*

Дакле, скоро комплексне подмногострукости у S^6 су димензије 2 и зовемо их **скоро комплексне криве**. У [5] је показано да се скоро комплексне криве на S^6 могу сврстати у следећа четири типа:

(i) суперминималне и линеарно потпуне у S^6,

(ii) линеарно потпуне у S^6 али не суперминималне,

(iii) линеарно потпуне у некој тотално геодезијској S^5 у S^6,

(iv) тотално геодезијске.

[23] Delfino Codazzi (1824-1873) - италијански математичар

Напомена 3.1 Површ N у јединичној сфери S^n у $\mathbb{R}^{n+1}$ је **линеарно потпуна** ако N није садржана у тотално геодезијској хиперсфери S^{n-1} у S^n. Такође, кажемо да је површ N у S^{2m} **суперминимална** ако је N слика хоризонталне холоморфне криве у ермитском хомогеном простору $SO(2m+1)/U(m)$ при Римановој субмерзији $\pi: \ SO(2m+1)/U(m) \to S^{2m}$ индукованој инклузијом на $U(m)$ у $SO(2m+1)$. $\square$

Нека је S скоро комплексна подмногострукост у S^6, и нека је $p \in S$ тачка која није геодезијска. Тада можемо изабрати локалну ортонормирану базу $\{E_1, JE_1\}$ простора T_pS. Користећи Гаусову формулу

$$\bar{\nabla}_{E_1}(JE_1) = \underbrace{(\bar{\nabla}_{E_1}J)E_1}_{=0} + J\bar{\nabla}_{E_1}E_1 = J\nabla_{E_1}E_1 + Jh(E_1, E_1),$$

а с друге стране

$$\bar{\nabla}_{E_1}(JE_1) = \nabla_{E_1}(JE_1) + h(E_1, JE_1),$$

па када изједначимо тангентне и нормалне делове добијамо

$$\begin{aligned} \nabla_{E_1}(JE_1) &= J\nabla_{E_1}E_1 = \nabla_{JE_1}E_1, \\ h(E_1, JE_1) &= Jh(E_1, E_1) = h(JE_1, E_1), \end{aligned} \tag{43}$$

где смо за други део у једнакостима, аналогно, користили Гаусову формулу за $\bar{\nabla}_{JE_1}E_1$. Аналогно важи

$$h(E_2, JE_2) = Jh(E_2, E_2) = h(JE_2, E_2), \tag{44}$$

где је $E_2 = JE_1$.

Нека су $\xi_1 = \frac{h(E_1,E_1)}{\|h(E_1,E_1)\|}$ и $\xi_2 = E_1 \times \xi_1$, тада је

$$\{p, E_1, JE_1, \xi_1, J\xi_1, \xi_2, -J\xi_2\} \tag{45}$$

G_2-база дуж скоро комплексне криве S, а ξ_1, $J\xi_1$, ξ_2 и $J\xi_2$ чине ортонормирану базу простора $T_p^{\perp}S$.

Став 3.1 *У ортонормираној бази $\{E_1, JE_1\}$, оператори облика A_{ξ_1}, $A_{J\xi_1}$, A_{ξ_2} и $A_{J\xi_2}$ имају следећу форму:*

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad A_{J\xi_1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{\xi_2} = 0, \quad A_{J\xi_2} = 0, \tag{46}$$

где је $\lambda = \|h(E_1, E_1)\|$.

Доказ: Из дефиниције ξ_1, (11) и (43) имамо

$$g(A_{\xi_1}E_1, E_1) = g(h(E_1, E_1), \xi_1) = g(h(E_1, E_1), \frac{h(E_1, E_1)}{\|h(E_1, E_1)\|}) = \lambda,$$

$$g(A_{\xi_1}E_1, JE_1) = g(h(E_1, JE_1), \xi_1) = g(Jh(E_1, E_1), \frac{h(E_1, E_1)}{\|h(E_1, E_1)\|}) = 0,$$

$$g(A_{\xi_1}(JE_1), JE_1) = g(h(JE_1, JE_1), \xi_1) = g(J^2h(E_1, E_1), \frac{h(E_1, E_1)}{\|h(E_1, E_1)\|}) = -\lambda,$$

па је $A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$. За $A_{J\xi_1}$, користећи додатно то да је (J, g) ермитска структура на S^6, добијамо:

$$\begin{aligned} g(A_{J\xi_1}E_1, E_1) &= g(h(E_1,E_1), J\xi_1) = g(h(E_1,E_1), J\frac{h(E_1,E_1)}{\|h(E_1,E_1)\|}) = 0, \\ g(A_{J\xi_1}E_1, JE_1) &= g(h(E_1,JE_1), J\xi_1) = g(Jh(E_1,E_1), J\frac{h(E_1,E_1)}{\|h(E_1,E_1)\|}) \\ &= g(h(E_1,E_1), \frac{h(E_1,E_1)}{\|h(E_1,E_1)\|}) = \lambda, \\ g(A_{J\xi_1}(JE_1), JE_1) &= g(h(JE_1,JE_1), J\xi_1) = g(-h(E_1,E_1), J\frac{h(E_1,E_1)}{\|h(E_1,E_1)\|}) = 0, \end{aligned}$$

па је $A_{J\xi_1} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$. Аналогно, користећи чињеницу да је

$$\nu_1 = \mathcal{L}in_{\mathbb{R}}\{\xi_1, J\xi_1\} \perp \nu_2 = \mathcal{L}in_{\mathbb{R}}\{\xi_2, J\xi_2\}$$

(видети [14]) добијамо

$$\begin{aligned} g(A_{\xi_2}E_1, E_1) &= g(h(E_1,E_1), \xi_2) = 0, \\ g(A_{\xi_2}E_1, JE_1) &= g(h(E_1,JE_1), \xi_2) = 0, \\ g(A_{\xi_2}(JE_1), JE_1) &= g(h(JE_1,JE_1), \xi_2) = g(-h(E_1,E_1), \xi_2) = 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} g(A_{J\xi_2}E_1, E_1) &= g(h(E_1,E_1), J\xi_2) = 0, \\ g(A_{J\xi_2}E_1, JE_1) &= g(h(E_1,JE_1), J\xi_2) = 0, \\ g(A_{J\xi_2}(JE_1), JE_1) &= g(h(JE_1,JE_1), J\xi_2) = g(-h(E_1,E_1), J\xi_2) = 0, \end{aligned}$$

тј. $A_{\xi_2} = A_{J\xi_2} = 0$. ∎

Последица 3.1 *Скоро комплексна крива S сфере S^6 је минимална.*

Доказ: Како ξ_1, $J\xi_1$, ξ_2 и $J\xi_2$ чине ортонормирану базу простора $T_p^{\perp}S$ и $trA_{\xi_1} = trA_{J\xi_1} = trA_{\xi_2} = trA_{J\xi_2} = 0$, из (12) добијамо да је вектор средње кривине H скоро комплексне криве S једнак нули у свакој тачки $p \in S$, тј. она је минимална. ∎

Пример 3.1 (*Кодацијева једначина изражена преко оператора облика*)
На основу (11) знамо да за оператор облика $A_\xi = A$ и другу фундаменталну форму h важи

$$g(h(Y,Z), \xi) = g(AY, Z) = g(Y, AZ).$$

Диференцирањем и применом (37) добијамо

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X(g(AY,Z)) &= \bar{\nabla}_X(g(h(Y,Z),\xi)) = g(\bar{\nabla}_X h(Y,Z), \xi) + g(h(Y,Z), \bar{\nabla}_X\xi) \\ &= g(\nabla^{\perp}_X h(Y,Z), \xi) + \underbrace{g(h(Y,Z), -A_\xi X)}_{=0} = g(\nabla^{\perp}_X h(Y,Z), \xi), \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned}(\nabla h)(X,Y,Z) &= \nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)\\ &= g(\nabla^{\perp}_X(h(Y,Z)),\xi)\xi - g(h(\nabla_X Y,Z),\xi)\xi - g(h(Y,\nabla_X Z),\xi)\xi\\ &= [\bar{\nabla}_X(g(AY,Z)) - g(h(\nabla_X Y,Z),\xi) - g(h(Y,\nabla_X Z),\xi)]\xi\\ &= [\nabla_X(g(AY,Z)) - g(A\nabla_X Y,Z) - g(AY,\nabla_X Z)]\xi\\ &= [g(\nabla_X(AY),Z) + g(AY,\nabla_X Z) - g(A\nabla_X Y,Z) - g(AY,\nabla_X Z)]\xi\\ &= [g(\nabla_X(AY),Z) - g(A\nabla_X Y,Z)]\xi.\end{aligned}$$

Сада, Кодацијева једначина (42) има облик

$$\begin{aligned}(\nabla h)(X,Y,Z) &= (\nabla h)(Y,X,Z), \quad \forall Z\\ g(\nabla_X(AY),Z) - g(A\nabla_X Y,Z) &= g(\nabla_Y(AX),Z) - g(A\nabla_Y X,Z), \quad \forall Z\\ g(\nabla_X(AY) - A\nabla_X Y,Z) &= g(\nabla_Y(AX) - A\nabla_Y X,Z), \quad \forall Z\\ \nabla_X(AY) - A\nabla_X Y &= \nabla_Y(AX) - A\nabla_Y X\\ (\nabla_X A)Y + A\nabla_X Y - A\nabla_X Y &= (\nabla_Y A)X + A\nabla_Y X - A\nabla_Y X\\ (\nabla_X A)Y &= (\nabla_Y A)X. \quad \square\end{aligned} \tag{47}$$

Ако тачка $p \in S$ није геодезијска, онда локално можемо изабрати ортонормирану базу $\{E_1, JE_1\}$ простора T_pS. Тада је Гаусова кривина, односно секциона кривина скоро комплексне криве S у тачки p дата са

$$K = R(E_1,E_2,E_2,E_1), \text{ где је } E_2 = JE_1. \tag{48}$$

С обзиром да је S^6 константне секционе кривине 1 и користећи (46), добијамо да је Гаусова кривина K скоро комплексне криве S у тачки p једнака

$$\begin{aligned}K &= \bar{R}(E_1,E_2,E_2,E_1) - g(h(E_1,E_2),h(E_2,E_1)) + g(h(E_2,E_2),h(E_1,E_1))\\ &= 1 - g(h(E_1,E_2),h(E_1,E_2)) + g(J^2h(E_1,E_1),h(E_1,E_1))\\ &= 1 - \|h(E_1,E_1)\|^2 - \|h(E_1,JE_1)\|^2 = 1 - 2\lambda^2,\end{aligned} \tag{49}$$

где је $\lambda = \|h(E_1,E_1)\|$.

Секигава[24] је у [21] показао да ако је Гаусова кривина K скоро комплексне криве S константна на S, онда је $K = 0$, $K = \frac{1}{6}$ или $K = 1$, и дао је примере за сва три случаја.

[24] Kouei Sekigawa - University Niigata, Japan

4 Јакобијева поља и тубе око подмногострукости

4.1 Јакобијева поља

Јакобијева[25] векторска поља су решења диференцијалне једначине која се појављује природно при изучавању експоненцијалног пресликавања.

Дефиниција 4.1 *Нека је γ геодезијска крива таква да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = X_p$. Пресликавање $\exp : \mathcal{O} \to M$, дато са $\exp_p(X_p) = \gamma(1)$, где је $\mathcal{O}$ нека околина координатног почетка у T_pM и где је $\gamma(1)$ дефинисано, назива се експоненцијално пресликавање.*

Нека је (M, g) Риманова многострукост и нека је $\gamma : [a, b] \to M$ крива на M. **Варијација криве** γ је двопараметарско пресликавање

$$\Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M, \quad (t, s) \longmapsto \Gamma(t, s)$$

такво да је $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ за све $t \in [a, b]$. За фиксирано t_0, крива $\alpha_{t_0}(s) = \Gamma(t_0, s)$ је **трансверзала**, а за фиксирано s_0, крива $\beta_{s_0}(t) = \Gamma(t, s_0)$ је **лонгитудинала**. Векторско поље V дуж γ дефинисано са

$$V(t) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0),$$

(тј. $V(s)$ је почетни вектор брзине трансверзале α_t) је **варијационо векторско поље** варијације Γ и оно показује, инфинитезимално, какво је понашање варијације Γ у околини криве γ.

Нека је $p \in M$, $X_p \in T_pM$, γ геодезијска крива таква да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = X_p$ и нека је $\exp_p$ дефинисано у X_p.

Лема 4.1 *Геодезијска крива γ таква да је $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = X_p$ је у околини тачке p дата са $\gamma(t) = \exp_p(tX_p)$.*

Нека је двопараметарско пресликавање $f : [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon] \to M$ дато са

$$f(t, s) = \exp_p(tX_p(s)),$$

где је $X_p(s)$ крива у T_pM таква да је $X_p(0) = X_p$. Како важи $f(t, 0) = \gamma(t)$ за све $t \in [0, 1]$, и како су све лонгитудинале β_s за f геодезијске криве, пресликавање f називамо **геодезијска варијација** или **једнопараметарска фамилија геодезијских линија**. Векторско поље $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ дуж γ је варијационо векторско поље варијације f. Може се показати ([7]) да је тада

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = (d\ \exp_p)_{tX_p(0)}(tX_p'(0)).$$

Желимо да испитамо векторско поље $J(t)$ дуж геодезијске криве $\gamma(t) = \exp_p(tX_p)$, $0 \leq t \leq 1$. За то ће нам бити потребне следеће леме:

Лема 4.2 ([17]) *Нека је $f : [0, 1] \times [-\epsilon, \epsilon] \to M$ двопараметарско пресликавање и нека је $V = V(t, s)$ векторско поље дуж f. Тада је за свако (t, s):*

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V - \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)V. \tag{50}$$

[25] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) - немачки математичар

Лема 4.3 (*Лема симетрије,[17]*) *Нека је $f : [0,1] \times [-\epsilon, \epsilon] \to M$ глатко двопараметарско пресликавање. Тада је*

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}. \tag{51}$$

Наредна теорема нам даје мало више информација о пољу J:

Теорема 4.1 *Нека је γ геодезијска крива и J варијационо векторско поље дуж геодезијске варијације криве γ. Тада J задовољава следећу једначину*

$$\frac{D^2}{\partial t^2}J(t) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0.$$

Доказ: Како је γ геодезијска, знамо да важи $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, па користећи (50) и (51) добијамо

$$\begin{aligned} 0 = \frac{D}{\partial s}(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}) &= \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t} + R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s} + R(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned}$$

тј. $J(t)$ задовољава диференцијалну једначину $\frac{D^2}{\partial t^2}J(t) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0$. ∎

Дефиниција 4.2 *Нека је $\gamma : [0, a] \to M$ геодезијска крива на M. За векторско поље J дуж γ кажемо да је* **Јакобијево поље** *ако задовољава* **Јакобијеву једначину***:*

$$J'' + R(J, \gamma')\gamma' = 0,$$

за све $t \in [0, a]$.

Видели смо да варијационо поље J дуж геодезијске криве γ задовољава Јакобијеву једначину. Међутим, може се показати да важи и обрнуто:

Став 4.1 *Свако Јакобијево поље J дуж геодезијске криве γ је варијационо поље неке геодезијске варијације криве γ.*

Наредни став нам даје егзистенцију и јединственост Јакобијевог поља за дате почетне услове:

Став 4.2 *Нека је $\gamma : [0, a] \to M$ геодезијска крива на M и $\gamma(0) = p$. За сваки пар вектора $X, Y \in T_pM$ постоји јединствено Јакобијево поље J дуж γ такво да је $J(0) = X$ и $J'(0) = Y$.*

Доказ: Нека су $e_1(t), ..., e_n(t)$ паралелна, ортонормирана поља дуж γ. Сада Јакобијево поље J можемо записати у облику

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i(t)$$

за глатке функције $f_i \in C^\infty$, $i = 1, ..., n$, па је

$$J''(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i''(t)e_i(t)$$

и

$$R(J,\gamma')\gamma' = \sum_{i=1}^{n} g(R(J,\gamma')\gamma', e_i)e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j \cdot g(R(e_j,\gamma')\gamma', e_i)\right)e_i.$$

Дакле, Јакобијева једначина је еквивалентна систему диференцијалних једначина

$$f_i'' + \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot g(R(e_j,\gamma')\gamma', e_i) = 0, \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

Како је ово линеарни систем другог реда, за почетне услове $J(0) = X$ и $J'(0) = Y$ постоји јединствено C^∞ решење дефинисано на $[0,a]$. ∎

Пример 4.1 Увек постоје два тривијална Јакобијева поља дуж сваке геодезијске криве γ, која се могу одмах записати. Наиме, како је

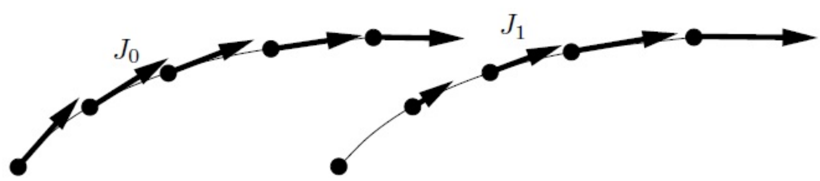
$$\frac{D^2}{\partial t^2}\gamma'(t) + R(\gamma'(t),\gamma'(t))\gamma'(t) = 0 + 0 = 0,$$

векторско поље $J_0(t) = \gamma'(t)$ задовољава Јакобијеву једначину са почетним условима

$$J_0(0) = \gamma'(0), \quad J_0^{'}(0) = 0.$$

Аналогно, $J_1(t) = t\gamma'(t)$ је Јакобијево поље дуж γ са почетним условима

$$J_1(0) = 0, \quad J_1^{'}(0) = \gamma'(0).$$



Такође, можемо уочити да је J_0 варијационо поље варијације $\Gamma(t,s) = \gamma(t+s)$, док је J_1 варијационо поље за $\Gamma(t,s) = \gamma(te^s)$. Ова два Јакобијева поља нам заправо само дају могуће репараметризације криве γ, и не дају нам никакве информације о геодезијским кривама различитим од γ. □

Како бисмо разликовали ова тривијална Јакобијева поља од оних која нам дају више информација, дефинишимо следеће појмове: **тангентно векторско поље** дуж криве γ је векторско поље V такво да је $V(t)$ умножак од $\gamma'(t)$, за све t, а **нормално векторско поље** W дуж γ је оно за које је $W(t)\perp\gamma'(t)$ за све t. Свако Јакобијево поље се може на јединствен начин записати као сума тангентног и нормалног Јакобијевог поља:

Став 4.3 *Свако Јакобијево поље J дуж геодезијске криве γ Риманове многострукости M можемо на јединствен начин записати у облику*

$$J(t) = a\,\gamma'(t) + b\,t\gamma'(t) + Y(t),$$

где су a и b реални бројеви а Y нормално Јакобијево поље дуж γ.

Доказ: Нека је g Риманова метрика на M и нека су

$$a = g(\gamma'(0), J(0)), \quad b = g(\gamma'(0), J'(0)), \quad Y(t) = J(t) - a\ \gamma'(t) - b\ t\gamma'(t).$$

Како $J(t)$, $\gamma'(t)$ и $t\gamma'(t)$ задовољавају Јакобијеву једначину, онда је и $Y(t)$ задовољава па је

$$Y'' + R(Y, \gamma')\gamma' = 0.$$

Ако помножимо ову једначину са γ' добијамо

$$g(Y'', \gamma') + g(R(Y, \gamma')\gamma', \gamma') = 0.$$

Како је Риманова кривина косо-симетрична линеарна трансформација у свакој тачки тангентног простора, добијамо да је други сабирак једнак нули па је $g(Y'', \gamma') = 0$. Из $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ и $\nabla g = 0$ добијамо

$$\frac{D^2}{dt^2} g(Y, \gamma') = \nabla^2_{\gamma'} g(Y, \gamma') = g(Y'', \gamma') = 0.$$

Дакле, $g(Y, \gamma') = At + B$ где су A и B константе. Како је $t\gamma'(t) = 0$ за $t = 0$ добијамо

$$\begin{aligned} B &= g(Y(0), \gamma'(0)) = g(J(0) - a\gamma'(0), \gamma'(0)) \\ &= g(J(0), \gamma'(0)) - g(a\gamma'(0), \gamma'(0)) = a - a = 0. \end{aligned}$$

Како је γ геодезијска, онда је $Y' = J' - b\gamma'$, па је

$$A = \frac{d}{dt} g(Y, \gamma')_{t=0} = g(J'(0), \gamma'(0)) - g(b\gamma'(0), \gamma'(0)) = b - b = 0.$$

Дакле, $g(Y, \gamma') = 0$ па је Y нормално Јакобијево поље дуж γ.

За доказ јединствености, претпоставимо да је

$$J = c\gamma' + dt\gamma' + Z$$

друга декомпозиција поља J где је Z нормално на γ. За свако t имамо

$$J(t) = (a + bt)\gamma'(t) + Y(t) = (c + dt)\gamma'(t) + Z(t).$$

Како су $Y(t)$ и $Z(t)$ нормална на $\gamma'(t)$ добијамо да је

$$a + bt = c + dt, \qquad Y(t) = Z(t),$$

па је

$$a = c, \quad b = d, \quad Y = Z.$$

∎

Став 4.4 Нека је $\gamma : I \to M$ геодезијска крива и $a \in I$. Тада:

(а) Јакобијево поље J дуж γ је нормално ако и само ако је

$$J(a) \perp \gamma'(a) \ \text{ и } \ J'(a) \perp \gamma'(a).$$

(б) Свако Јакобијево поље које је ортогонално на γ' у две тачке је нормално.

Доказ: Из доказа претходног става имамо да је $f(t) := g(J(t), \gamma'(t)) = At + B$, па је $f(a) = g(J(a), \gamma'(a)) = Aa + B$ и $f'(a) = g(J'(a), \gamma'(a)) = B$. Дакле, $J(a)$ и $J'(a)$ су ортогонални на $\gamma'(a)$ акко $f(a) = f'(a) = 0$ акко $f \equiv 0$ акко J нормално. Аналогно, ако је J ортогонално на γ' у две тачке, онда је $f \equiv 0$ па је J нормално. ∎

Пример 4.2 (*Јакобијево поље многострукости константне кривине*)
Нека је M Риманова многострукост константне секционе кривине K и нека је $\gamma : [0, l] \to M$ нормализована геодезијска крива на M. Такође, нека је J Јакобијево поље дуж γ, нормално на γ'.

Користећи (7) и чињенице да је $|\gamma'| = 1$ и J нормално на γ' добијамо

$$R(J, \gamma')\gamma' = K \left(\underbrace{g(\gamma', \gamma')}_{=1} J - \underbrace{g(J, \gamma')}_{=0} \gamma' \right) = KJ$$

па Јакобијева једначина гласи

$$J'' + KJ = 0.$$

Нека су v и w паралелна поља дуж γ таква да је $g(\gamma'(t), v(t)) = 0$, $g(\gamma'(t), w(t)) = 0$ и $|v(t)| = |w(t)| = 1$ за све $t \in [0, l]$. Тада је

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} v(t) + \dfrac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & K > 0; \\ v(t) + tw(t), & K = 0; \\ \dfrac{\cosh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} v(t) + \dfrac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & K < 0, \end{cases} \tag{52}$$

Јакобијево поље дуж γ са почетним условима $J(0) = v(0)$ и $J'(0) = w(0)$. Ово се лако може проверити: на пример за случај $K > 0$ имамо

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{dt^2} J + KJ = \frac{D}{dt} & \left(-\sin(t\sqrt{K}) v(t) + \frac{\cos(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} \underbrace{\frac{D}{dt} v(t)}_{=0} \right) \\ & + \frac{D}{dt} \left(\cos(t\sqrt{K}) w(t) + \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} \underbrace{\frac{D}{dt} w(t)}_{=0} \right) \\ & + K \left(\frac{\cos(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} v(t) + \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t) \right) \\ & = -\sqrt{K} \cos(t\sqrt{K}) v(t) - \sqrt{K} \sin(t\sqrt{K}) w(t) \\ & + \sqrt{K} \cos(t\sqrt{K}) v(t) + \sqrt{K} \sin(t\sqrt{K}) w(t) \\ & = 0, \end{aligned}$$

за све $t \in [0, l]$ што је и требало доказати. Аналогно и за остала два случаја. □

4.2 Тубе око подмногострукости

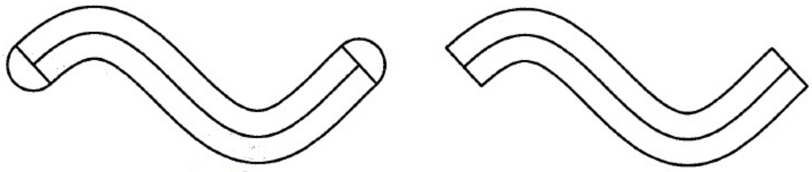
Дефиниција 4.3 *Нека је M тополошки потопљена подмногострукост Риманове многострукости L.* **Туба $T(M,r)$ полупречника** *$r \geq 0$* **око** *M је скуп*

$$T(M,r) = \{n \in L \mid \text{постоји геодезијска крива } \gamma \text{ дужине } L(\gamma) \leq r \\ \text{са почетком у } n \text{ која сече } M \text{ под правим углом } \}. \quad (53)$$

Напомена 4.1 (1) Ако M има границу, тада је

$$T(M,r) \neq \{n \in L \mid d(n,M) \leq r\},$$

зато што из скупа са десне стране морамо избацити крајеве да бисмо добили скуп са леве стране.



(2) Пресликавање $\exp_p : \mathcal{O} \subset T_pM \to M$ можемо дефинисати на $T_p^{\perp}M$ са

$$\exp_{T_p^{\perp}}(v) = \exp_p v, \qquad v \in T_p^{\perp}M.$$

Нека је $\mathcal{O}_p$ највећа околина нуле у $T_p^{\perp}M$ за коју је $\exp_{T_p^{\perp}} : \mathcal{O}_p \to \exp_{T_p^{\perp}M}(\mathcal{O}_p)$ дифеоморфизам.

(3) Можемо претпоставити да је

$$\exp_{T_p^{\perp}} : \{v \in T_p^{\perp}M \mid \|v\| \leq r\} \to T(M,r) \subset \exp_{T_p^{\perp}}(\mathcal{O}_p) \text{ дифеоморфизам.}$$

Тада (53) можемо написати као

$$T(M,r) = \bigcup_{p \in M} \{\exp_p v \mid v \in T_p^{\perp}M \text{ и } \|v\| \leq r\}. \quad \square \qquad (54)$$

Дефиниција 4.4 *Хиперповрш облика*

$$M_t = \{m \in T(M,r) \mid d(m,M) = t\}$$

називамо **тубуларна хиперповрш** *на растојању t од M.*

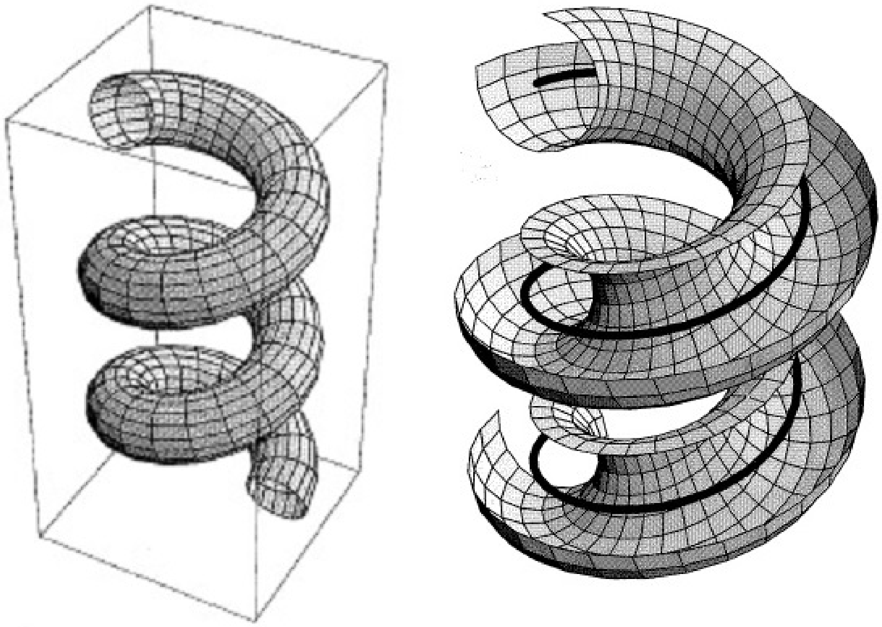
Пример 4.3 Тубуларна хиперповрш на растојању r од тачке $q \in S^6$ је сфера полупречника r са центром у q, тј.

$$M_r = \{p \in S^6 \mid d(p,q) = r\},$$

док је туба полупречника r око q једнака

$$T(q,r) = \{p \in S^6 \mid d(p,q) \leq r\}. \quad \square$$

Пример 4.4 *(Туба и тубуларна хиперповрш око хеликса у $\mathbb{R}^3$)*



Пример 4.5 (*Оператор облика тубуларне хиперповрши око скоро комплексне криве у S^6*)
Нека је S скоро комплексна крива и нека је $T_p^{\perp}S$ нормално раслојење, а са $UT_p^{\perp}S$ означимо јединично нормално раслојење у тачки $p \in S$. Дефинишемо пресликавање

$$\exp^r_{UT_p^{\perp}} : UT_p^{\perp}S \to S^6,$$
$$\exp^r_{UT_p^{\perp}}(\eta) := \exp_p(r\eta) = \cos r\ p + \sin r\ \eta,$$

За мале $r \in \mathbb{R}_+$, $\exp^r_{UT_p^{\perp}}$ је имерзија. Тада је $M_r = \exp^r_{UT_p^{\perp}}(UT_p^{\perp}S)$ тубуларна хиперповрш око скоро комплексне криве S на растојању r.

За сваки $\eta \in UT_p^{\perp}S$

$$\gamma_\eta : \mathbb{R} \to S^6, \qquad \gamma_\eta(t) = \cos t\ p + \sin t\ \eta$$

је максимална геодезијска крива у S^6 таква да је $\gamma_\eta(0) = p$ и $\dot\gamma_\eta(0) = \eta$. Ако је $q := \gamma_\eta(r) \in M_r \subset S^6$, тада је јединични нормални вектор ξ на M_r у q дат са $\xi = \dot\gamma_\eta(r)$. На основу (37), оператор облика $A_\xi : T_qM_r \to T_qM_r$ на M_r у q у односу на ξ је дефинисан са

$$A_\xi X = -\bar\nabla_X \xi,$$

за сваки вектор X тангентан на M_r у тачки q.

Специјално, ако је Y Јакобијево векторско поље дуж γ_η нормално на γ_η, на основу Става 4.1 знамо да је Y варијационо поље неке геодезијске варијације $f(t,s)$ криве γ_η. Како је Y нормално, а $\xi = \dot\gamma_\eta(r)$ тангентно поље дуж γ_η, онда важи $Y \perp \xi$, па су Y и ξ независна, тј. $f(t,s)$ је имерзија а t и s су локалне координате. Тада је $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = 0$, тј. $[\xi, Y_X] = 0$, па је $\bar\nabla_\xi Y = \bar\nabla_Y \xi$. Сада имамо

$$A_\xi Y(r) = -\bar\nabla_Y \xi(r) = -\bar\nabla_\xi Y(r) = -\bar\nabla_{\dot\gamma_\eta} Y(r) = Y'(r). \quad \Box \tag{55}$$

5 Хопфове хиперповрши

Нека је M оријентабилна хиперповрш скоро комплексне Риманове многострукости $(W, \bar{g}, J, \bar{\nabla})$, и нека је ξ јединично нормално поље на M. Користићемо g да означимо индуковану Риманову метрику на M, ∇ за Леви-Чивита повезаност на M и A за оператор облика за M у односу на ξ. Хопфово векторско поље је векторско поље U на M дато са

$$U = -J\xi. \tag{56}$$

Кажемо да је M **Хопфова хиперповрш** ако су интегралне криве за U геодезијске на M, тј. ако је $\nabla_U U = 0$.

У овом делу ћемо дати карактеризацију Хопфових хиперповрши близу Келерове многострукости. Кажемо да је W близу Келерова многострукост ако важи

$$(\bar{\nabla}_X J)X = 0, \quad X \in T_pW, \quad p \in W, \tag{57}$$

или еквивалентно

$$(\bar{\nabla}_X J)Y + (\bar{\nabla}_Y J)X = 0, \quad X, Y \in T_pW, \quad p \in W.$$

Како (34) и (36) важе и у овом случају, добијамо

$$(\bar{\nabla}_X J)(JX) = 0, \quad X \in T_pW, \quad p \in W. \tag{58}$$

Став 5.1 *Оријентабилна хиперповрш M близу Келерове многострукости W је Хопфова хиперповрш ако и само ако је U векторско поље главне кривине на M.*

Доказ: Формуле Гауса и Вајнгартена гласе

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(AX, Y)\xi, \tag{59}$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = -AX. \tag{60}$$

Користећи (56) имамо

$$\bar{\nabla}_U U = -\bar{\nabla}_U(J\xi) = -(\bar{\nabla}_U J)\xi - J(\bar{\nabla}_U \xi) = -\underbrace{(\bar{\nabla}_U J)JU}_{=0} - J(\bar{\nabla}_U \xi).$$

Први сабирак је нула због (58), па користећи (60) добијамо

$$\bar{\nabla}_U U = JAU.$$

Из (59) следи да је $\nabla_U U$ компонента од JAU тангентна на M. За произвољан тангентни вектор X на M, JX је ортогоналан на M ако и само ако је $X = \alpha U$ за неку реалну функцију α, па важи $\nabla_U U = 0$ акко је $AU = \alpha U$ за неку реалну функцију α, што је и требало доказати. ∎

5.1 На близу Келеровој сфери S^6

Ако је γ геодезијска крива на S^6 параметризована дужином лука, односно велики круг сфере, онда је $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$ па користећи (57) добијамо $\bar\nabla_{\dot\gamma}(J\dot\gamma) = (\bar\nabla_{\dot\gamma}J)\dot\gamma + J\bar\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$, тј. $J\dot\gamma$ је паралелно векторско поље дуж γ. Желимо да опишемо везу између J и паралелног померања дуж γ. Користићемо тачку да означимо извод у односу на t неке $\mathbb{R}^7$-вредносне функције.

Лема 5.1 *Нека је X паралелно векторско поље дуж геодезијске криве γ на S^6 које је ортогонално на $\dot\gamma$ и $J\dot\gamma$, и нека је*

$$Y(t) = \cos t\ JX - \sin t\ \dot\gamma \times X.$$

Ако је γ параметризована дужином лука, онда је $Y(t)$ паралелно векторско поље дуж γ са почетном вредношћу $JX(0)$.

Доказ: Из претпоставки за векторско поље X имамо да је $\dot X = 0$. Такође, видимо да је $Y(0) = JX(0)$ ортогонално на $\dot\gamma(0)$, и важи

$$\dot Y = -\sin t\ \gamma \times X + \cos t\ \dot\gamma \times X - \cos t\ \dot\gamma \times X - \sin t\ \ddot\gamma \times X.$$

Међутим, γ је велики круг на S^6 па је $\ddot\gamma = -\gamma$, и добијамо да је $\dot Y = 0$, што управо значи да је Y паралелно векторско поље дуж γ, што је и требало доказати. ∎

Сада смо спремни да докажемо битан став о Хопфовим хиперповршима из рада [4]. Касније ћемо показати да важи и обрат.

Став 5.2 *Тотално геодезијске хиперсфере у S^6 и делови туба око скоро комплексних кривих у S^6 су оријентабилне Хопфове хиперповрши.*

Доказ:

Тотално геодезијске хиперсфере S^5 у S^6 су тотално умбиличке па је Хопфово векторско поље U самим тим векторско поље главне кривине. На основу Става 5.1 геодезијске хиперсфере су Хопфове хиперповрши у S^6.

Нека је сада S повезана скоро комплексна крива у S^6, тј. скоро комплексна подмногострукост од S^6 реалне димензије 2. Локално и за мале полупречнике $r \in \mathbb{R}^+$ можемо дефинисати тубу $T(S,r)$ полупречника r око S. Нека је η јединични нормални вектор на S у некој тачки $p \in S$. Тада је

$$\gamma_\eta : \mathbb{R} \to S^6, \qquad t \mapsto \cos t\ p + \sin t\ \eta$$

максимална геодезијска крива у S^6 таква да је $\gamma_\eta(0) = p$ и $\dot\gamma_\eta(0) = \eta$. Ако је $q = \gamma_\eta(r) \in T(S,r)$, онда је јединични нормални вектор ξ на $T(S,r)$ у q дат са $\xi = \dot\gamma_\eta(r)$. Специјално, $T(S,r)$ је оријентабилна.

Нека је $X \in T_pS^6$ ортогоналан на η и нека је Y_X Јакобијево поље дуж γ_η са почетним вредностима $Y_X(0) = X^T$ и $\bar\nabla_{\dot\gamma}Y(0) = X^\perp - A_\eta X^T$, где је A_η оператор облика на S у p у односу на η, а ^{T} и $^\perp$ су ортогоналне пројекције на тангентне и нормалне просторе на S и p. Тада, на основу (55), оператор облика A_ξ на $T(S,r)$ у q у односу на ξ задовољава

$$A_\xi Y_X(r) = -\bar\nabla_{\dot\gamma}Y_X(r). \tag{61}$$

С обзиром да је Y_X нормално на γ_η и да S^6 има константну секциону кривину 1, из (52) добијамо да је

$$Y_X(t) = \cos t B_{X^T}(t) + \sin t B_{X^\perp - A_\eta X^T}(t),$$

где, за $V \in T_pS^6$, B_V је паралелно векторско поље дуж γ_η такво да је $B_V(0) = V$. Ако је X главни правац на S у p у односу на η, тј. $A_\eta X = \lambda X$, тада

$$Y_X(t) = (\cos t - \lambda \sin t)B_X(t), \text{ тј. } B_X(t) = \frac{Y_X(t)}{\cos t - \lambda \sin t}, \tag{62}$$

па користећи (61) добијамо

$$\begin{aligned} A_\xi B_X(r) &= \frac{A_\xi Y_X(r)}{\cos r - \lambda \sin r} = \frac{-\bar\nabla_{\dot\gamma}((\cos r - \lambda \sin r)B_X(r))}{\cos r - \lambda \sin r} \\ &= \frac{-(\bar\nabla_{\dot\gamma}(\cos r - \lambda \sin r))B_X(r) - (\cos r - \lambda \sin r)\overbrace{\bar\nabla_{\dot\gamma}B_X(r)}^{=0}}{\cos r - \lambda \sin r} \\ &= \frac{\sin r + \lambda \cos r}{\cos r - \lambda \sin r}B_X(r). \end{aligned}$$

Иначе, ако је X ортогоналан на S у p, имамо

$$Y_X(t) = \sin t\ B_X(t), \text{ тј. } B_X(t) = \frac{Y_X(t)}{\sin t},$$

одакле следи

$$\begin{aligned} A_\xi B_X(r) &= \frac{A_\xi Y_X(r)}{\sin r} = \frac{-\bar\nabla_{\dot\gamma}(\sin r\ B_X(r))}{\sin r} \\ &= \frac{-\bar\nabla_{\dot\gamma}(\sin r)\ B_X(r) - (\sin r)\overbrace{\bar\nabla_{\dot\gamma}B_X(r))}^{=0}}{\sin r} \\ &= -\frac{\cos\ r}{\sin\ r}B_X(r) = -\mathrm{ctg}\ r\ B_X(r). \end{aligned}$$

Закључујемо да су вектори главне кривине на $T(S,r)$ у q добијени паралелним померањем дуж γ_η од p до q:

(1) вектора главне кривина на S у односу на η, и

(2) $T_p^\perp S \cap (\mathbb{R}\eta)^\perp$, где $T_p^\perp S$ представља нормалан простор на S у p.

Како је S скоро комплексна, $T_p^\perp S$ је инваријантан при J, па $J\eta \in T_p^\perp S \cap (\mathbb{R}\eta)^\perp$. Такође, како је $J\dot\gamma_\eta$ паралелно дуж γ_η, онда се $J\dot\gamma_\eta$ добија паралелним померањем $J\eta$ дуж γ_η, па је $U = -J\xi = -J\dot\gamma_\eta(r)$ вектор главне кривине на $T(S,r)$ у q. На основу Става 5.1, $T(S,r)$ је Хопфова хиперповрш сфере S^6. ∎

Напомена 5.1 Приметимо да, с обзиром да су све скоро комплексне криве у S^6 минималне, ако су главне кривине на S у односу на η облика $\pm\mathrm{tg}\ \theta$ ($\theta \in [0, \pi/2)$) онда су главне кривине на $T(S,r)$ у q дате са $\mathrm{tg}(r \pm \theta)$ и $-\mathrm{ctg}\ r$, у зависности од случаја (1) или (2) из претходног става. □

5.2 Карактеризација

У овом делу ћемо показати да је свака Хопфова хиперповрш сфере S^6 управо један од примера из Става 5.1.

Са M ћемо означавати повезану Хопфову хиперповрш на S^6 са јединичним нормалним пољем ξ. У Ставу 5.1 смо видели да је Хопфово векторско поље U главни правац, па је

$$AU = \alpha U \tag{63}$$

за неку реално вредносну функцију α на M.

Лема 5.2 *Функција главне кривине α је константна.*

Доказ: Кодацијева једначина за M у S^6 је, на основу (47), дата са

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{64}$$

Како је $AU = \alpha U$, онда је $g(\nabla_X(AU), Y) = g(\nabla_X(\alpha U), Y)$, тј.

$$g((\nabla_X A)U, Y) + g(A(\nabla_X U), Y) = (X\alpha)g(U, Y) + \alpha g((\nabla_X U), Y)$$

па је

$$g((\nabla_X A)U, Y) = (X\alpha)g(U, Y) + \alpha g((\nabla_X U), Y) - g(A(\nabla_X U), Y). \tag{65}$$

Користећи (64), (65) и симетрију оператора A добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= g((\nabla_X A)Y - (\nabla_Y A)X, U) \\ &= g((\nabla_X A)U, Y) - g((\nabla_Y A)U, X) \\ &= (X\alpha)g(U, Y) + \alpha g(\nabla_X U, Y) - g(A\nabla_X U, Y) \\ &\quad - (Y\alpha)g(U, X) + \alpha g(\nabla_Y U, X) - g(A\nabla_Y U, X). \end{aligned} \tag{66}$$

Ако у претходну једнакост заменимо $X = U$ и користећи (63) добијамо

$$(Y\alpha) = (U\alpha)g(U, Y),$$

тј.

$$\text{grad } \alpha = (U\alpha)U. \tag{67}$$

Нека је D ортогонална комплементарна дистрибуција у односу на U на M. Тада је за векторска поља X, Y на M са вредностима у D,

$$0 = X(Y\alpha) - Y(X\alpha) = [X, Y]\alpha = (U\alpha)g([X, Y], U). \tag{68}$$

Ако је $U\alpha \neq 0$, онда је за све $X,\ Y \in D$, $[X, Y]$ нормално на U па $[X, Y] \in D$, тј. D је интеграбилна дистрибуција. Међутим, тада постоји подмногострукост чије је то тангентно раслојење, тј. четвородимензиона многострукост која је при том и скоро комплексна. Теорема 3.2 каже да такве подмногострукости не постоје па мора бити $U\alpha = 0$. Сада, из (67) добијамо да је grad $\alpha = 0$ па је α константна. ∎

Нека је c интегрална крива векторског поља U. Тада је c геодезијска на M параметризована дужином лука па из (59) добијамо

$$\bar{\nabla}_{\dot{c}}\dot{c} = g(AU, U)\xi \circ c = \alpha\xi \circ c,$$

где смо користили (63) за другу једнакост. Како је α константна, следи да је c сферна крива на S^6 и има следећа својства:

Последица 5.1 *Нека је $c : I \ \to \ M$ интегрална крива поља U. Тада*

(1) *геодезијска кривина за c у S^6 је једнака $|\alpha|$;*

(2) *$c(I)$ је повезана компонента од $M \cap N$ (специјално, c је крива у N), где је $N \approx S^2$ тотално геодезијска подмногострукост од S^6 са $c(t) \in N$ и $T_{c(t)}N = \mathbb{R}\dot{c}(t) \oplus \mathbb{R}J\dot{c}(t)$;*

(3) *$c(I)$ је део раванског круга полупречника $\sin r$, где је $r = \text{arc ctg}|\alpha|$.*

За карактеризацију Хопфових хиперповрши биће нам потребна следећа лема:

Лема 5.3 *Нека је $T_\alpha = \{X \in TM : AX = \alpha X\}$, нека је $\alpha = -\text{ctg } r$ и*

$$LX = \cos r \ JX - \sin r \ \xi \times X.$$

Тада је ортогонални комплемент $T_\alpha^\perp$ у TM инваријантан при L.

Доказ: Приметимо да ако су X и Y векторска поља тангентна на M у p, онда користећи (56) и (60) добијамо

$$\begin{aligned} g(\nabla_X U, Y) &= -g(\bar{\nabla}_X(p \times \xi), Y) = -g((\bar{\nabla}_X p) \times \xi, Y) - g(p \times \bar{\nabla}_X \xi), Y) \\ &= -g((D_X p) \times \xi, Y) - g(p \times (-AX), Y) \\ &= -g(X \times \xi, Y) + g(JAX, Y). \end{aligned} \tag{69}$$

Нека је $X \in T_\alpha(p)$ и, уз претпоставку да M није умбиличка у p, нека је $Y \in T_pM$ такав да је $AY = \lambda Y$, где је $\lambda \neq \alpha$, тј. $Y \in T_\alpha^\perp(p)$. Тада су JY и $\xi \times Y$ ортогонални на p и ξ, па је LY такође ортогоналан на p и ξ. Користећи (66) и Лему 5.2, добијамо да је $g(\nabla_X U, Y) = 0$, па из (69) важи

$$g(JAX + \xi \times X, Y) = 0. \tag{70}$$

Сада је

$$\begin{aligned} g(LY, X) &= g(\cos r \ JY - \sin r \ \xi \times Y, X) \\ &= \sin r \ g(\text{ctg } r \ JY - \xi \times Y, X) \\ &= \sin r \ g(Y, -\text{ctg } r \ JX + \xi \times X) \\ &= \sin r \ g(Y, JAX + \xi \times X) \end{aligned}$$

Из (70) добијамо да је $g(LY, X) = 0$, па $LY \in T_\alpha^\perp(p)$, што је и требало доказати. ∎

Сада смо спремни да докажемо обратни смер из Става 5.1:

Теорема 5.1 *Нека је M Хопфова хиперповрш у S^6. Тада је M отворени део тотално геодезијске хиперсфере у S^6 или туба око скоро комплексне криве у S^6.*

Доказ: Ако је ξ_1 јединично нормално поље на M, тада $\bar{\nabla}_U \xi_1 = -A_{\xi_1} U = -\alpha_1 U$, па је $\alpha_1 = -g(\bar{\nabla}_U \xi_1, U) = g(\bar{\nabla}_U U, \xi_1)$. Међутим, ако посматрамо нормално поље $\xi_2 = -\xi_1$, онда је $\alpha_2 = -\alpha_1$. Дакле, можемо изабрати локално јединично нормално поље ξ на отвореном подскупу W од M, такво да је главна кривина α негативна, и нека је $\alpha = -\text{ctg } r$ за неко $r \in (0, \pi/2]$. Нека је

$$F \ : \ W \to \ S^6, \ p \to \ \exp(-r\xi_p) = \gamma_{\xi_p}(-r).$$

На основу (54), $F(p) = \exp(-r\xi_p)$ представља тубуларну хиперповрш око W на растојању $-r$.

С друге стране, $F(p)$ је заправо ток векторског поља ξ за време $-r$, тј. $F(p) = \Phi^{\xi}_{-r}(p)$. Нека је Y_X Јакобијево поље дуж γ_{ξ_p} као у Ставу 5.1. Видели смо да је $[\xi, Y_X] = 0$, па $d\Phi^{\xi}_{-r}$ слика поље Y_X у себе, тј. $d\Phi^{\xi}_{-r}(Y_X) = Y_X$ (видети [2]).

Ако је $X \in T_pW$ главни правац који одговара главној кривини k и ако је F_* диференцијал пресликавања F, тада, користећи (62), добијамо

$$F_*(X) = d\Phi^{\xi}_{-r}(Y_X(0)) = Y_X(-r) = (\cos\ r + k \sin\ r)B_r(X), \tag{71}$$

где B_r представља паралелно померање дуж γ_{ξ_p} од p до $F(p)$. Из (71) видимо да ако је главна кривина $k = \alpha$, онда је $F_*(X) = 0$, тј. F је сингуларно у свим тачкама из W. Такође, ако $X \in \ker F_*$ онда је $\cos\ r + k \sin\ r = 0$, тј. X је главни правац који одговара главној кривини $k = -\mathrm{ctg}\ r = \alpha$ па је

$$\ker(F_*) = T_\alpha,$$

док нетривијалну слику имају они из $T_\alpha^\perp(p)$, па је

$$\mathrm{im}(F_*) = B_r(T_\alpha^\perp(p)).$$

Посматрајмо криву $\varphi(t) = \gamma_{\xi_p}(t - r)$. Како је γ_{ξ_p} геодезијска, и φ је геодезијска и важи $\dot\varphi(t) = \dot\gamma_{\xi_p}(t - r)$. Из дефиниције, B_r је паралелно померање дуж γ_{ξ_p} од p до $q = F(p)$. На основу Леме 5.1 за криву φ, почетном вектору JX_q, у тачки $\varphi(0) = q$, одговара, у тачки $\varphi(r) = p$, вектор

$$\begin{aligned}\cos r\ JX(r) - \sin r\ \dot\varphi(r) \times X(r) &= \cos r\ JX(r) - \sin r\ \dot\gamma_{\xi_p}(0) \times X(r)\\ &= \cos r\ JX_p - \sin r\ \xi_p \times X_p,\end{aligned}$$

па је

$$B_r(\cos r\ JX_p - \sin r\ \xi_p \times X_p) = JX_q.$$

Како је $X_q = B_r(X_p)$ и $L(X_p) = \cos r\ JX_p - \sin r\ \xi_p \times X_p$, имамо да важи

$$B_rL(X_p) = JB_r(X_p),\ \forall X_p.$$

Сада, применом Леме 5.3 добијамо

$$J(\mathrm{im}(F_*)) = JB_r(T_\alpha^\perp(p)) = B_rL(T_\alpha^\perp(p)) = B_r(T_\alpha^\perp(p)) = \mathrm{im}(F_*),$$

па је $\mathrm{im}(F_*)$ J-инваријантно. Због тога је $\mathrm{im}(F_*)(p)$ парне димензије, тј. димензије 0,2 или 4 у свакој тачки $p \in W$.

Прво, претпоставимо да је $\mathrm{im}(F_*)(p_0)$ димензије 4 у некој тачки $p_0 \in W$, па је $\alpha(p_0)$ вишеструкости 1. Због непрекидности функције главне кривине, постоји отворена околина $V \subset W$ тачке p_0 таква да је $\dim T_\alpha = 1$ на V, па F има константан ранг 4 на V. Због тога постоји 4-димензиона подмногострукост L од S^6 и отворена околина $\tilde V$ тачке p_0 у V таква да је $F|\tilde V : \tilde V \to L$ субмерзија на L. Међутим, тада је L 4-димензиона скоро комплексна подмногострукост од S^6, што је у контрадикцији са Теоремом 3.2.

Даље, претпоставимо да је $\mathrm{im}(F_*)(p_0)$ димензије 2 у некој тачки $p_0 \in W$. На исти начин, постоји 2-димензиона подмногострукост S од S^6 и отворена околина $\tilde{V}$ тачке p_0 у W таква да је $F|\tilde{V} : \tilde{V} \to S$ субмерзија на S. Дакле, S је скоро комплексна крива у S^6. Видели смо да је, по конструкцији пресликавања F, $F(\tilde{V})$ тубуларна хиперповрш на растојању r, тј. отворени део тубе око скоро комплексне криве S.

На крају, нека је $\mathrm{im}(F_*)(p_0)$ димензије 0 у некој тачки $p_0 \in W$. Претпоставимо да у свакој отвореној околини тачке p_0 у W постоји тачка p таква да је $\mathrm{im}(F_*)(p)$ димензије 2. Можемо изабрати низ тачака p_n које конвергирају ка p_0 и за које важи да је $\mathrm{im}(F_*)(p_n)$ димензије 2. Тада су главне кривине M у p_n једнаке $-\mathrm{ctg}\, r$, $\mathrm{tg}(r+\theta_n)$ и $\mathrm{tg}(r-\theta_n)$ за неко $\theta_n \in [0, \pi/2)$. Како су функције главне кривине непрекидне, добијамо да низови $(\mathrm{tg}(r+\theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\mathrm{tg}(r-\theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ морају конвергирати ка $-\mathrm{ctg}\, r$ што је немогуће. Дакле, постоји отворена околина V тачке p_0 у W таква да је $\dim T_\alpha = 5$ на V. Добијамо да $F : V \to q$, где је $q \in S^6$ тачка. Дакле, $F(V)$ је тубуларна хиперповрш на растојању r око тачке q, тј. отворени део тотално геодезијске хиперсфере полупречника r са центром у q.

Као што смо видели, димензија од $\mathrm{im}(F_*)$ је локално константна са вредностима 0 или 2. Како је M повезана, $\mathrm{im}(F_*)$ има константну димензију 0 или 2 на целој хиперповрши па је F или тачка или скоро комплексна крива у S^6. По конструкцији, M (тј. $F(M)$) је тубуларна хиперповрш око F, па је M отворени део тотално геодезијске хиперсфере у S^6 или отворени део тубе око скоро комплексне криве у S^6. ∎

Како су тотално геодезијске хиперсфере или тубе око скоро комплексних кривих у S^6 оријентабилне, добијамо

Последица 5.2 *Хопфове хиперповрши у S^6 су оријентабилне.*

Комбинацијом Става 5.1 и Теореме 5.1 видимо да се фамилија Хопфових хиперповрши сфере S^6 поклапа са фамилијом тотално геодезијских хиперсфера и туба око скоро комплексних крива. Специјално, свака Хопфова хиперповрш у S^6 има тачно једну, две или три различите главне кривине у свакој тачки. Умбиличке су отворени делови тотално геодезијских хиперсфера, док су неумбиличке отворени делови туба око скоро комплексних кривих.

5.3 Тубе око скоро комплексних кривих у S^6

Подсетимо се да се скоро комплексне криве на S^6 могу сврстати у следећа четири типа:

(i) суперминималне и линеарно потпуне у S^6,

(ii) линеарно потпуне у S^6 али не суперминималне,

(iii) линеарно потпуне у некој тотално геодезијској S^5 у S^6,

(iv) тотално геодезијске.

Желимо да видимо које подкласе Хопфових хиперповрши у S^6 одговарају овим класама скоро комплексних кривих. Најпре ћемо посматрати тотално геодезијске скоро комплексне криве.

Теорема 5.2 *За Хопфову хиперповрш M у S^6 са јединичним нормалним пољем ξ следеће чињенице су еквивалентне:*

(1) *M има тачно две различите главне кривине у свакој тачки.*

(2) *M је отворени део тубе око тотално геодезијске скоро комплексне криве S у S^6.*

(3) *M је не-умбиличка и оператор облика A на M и оператор L комутирају, где је $r \in (0, \pi/2]$, $\alpha = -\mathrm{ctg}\ r$ и*

$$LX = \cos\ r\ JX - \sin\ r\ \xi \times X, \qquad X \in TM.$$

Доказ:
$(1) \Rightarrow (2)$: Претпостављамо да M има тачно две различите главне кривине у свакој тачки. Тада M не може бити отворени део геодезијске хиперсфере јер је она умбиличка. Из Теореме 5.1 следи да је M отворени део тубе око скоро комплексне криве S у S^6. Ако S није тотално геодезијска, из Напомене 5.1 следи да M има три различите главне кривине $\mathrm{tg}(r+\theta)$, $\mathrm{tg}(r-\theta)$ и $\mathrm{tg}(r+\pi/2) = -\mathrm{ctg}\ r$ у некој тачки, што је контрадикција. Дакле, S је тотално геодезијска, тј. важи (2).
$(2) \Rightarrow (1)$: Ако је S тотално геодезијска скоро комплексна крива у S^6, онда је $A_\xi = 0$ за свако нормално поље ξ на S па су главне кривине на S у свакој тачки једнаке $0 = \mathrm{tg}\ 0$. На основу Напомене 5.1, главне кривине у свакој тачки на M су $\mathrm{tg}\ r$ и $-\mathrm{ctg}\ r$, где је r полупречик тубе. Дакле, M има тачно две различите главне кривине у свакој тачки.
$(3) \Rightarrow (1)$: Претпоставимо да M има три различите главне кривине у некој тачки p, и означимо их са $\alpha = -ctg\ r$, λ и μ. Тада је $\dim T_\alpha = 3$ и $\dim T_\lambda = 1 = \dim T_\mu$. На основу Леме 5.3, простор $T_\alpha^\perp = T_\lambda \oplus T_\mu$ је инваријантан при L и важи $LT_\lambda \subset T_\mu$ и $LT_\mu \subset T_\lambda$. Ако $v \in T_\lambda$, како A и L комутирају и $Lv \in T_\mu$, добијамо

$$\lambda Lv = L\lambda v = LAv = ALv = \mu Lv,$$

па је $\lambda = \mu$, што је контрадикција. Дакле, M има тачно две различите главне кривине у свакој тачки.
$(1) \Rightarrow (3)$: Фиксирајмо произвољну тачку $p \in M$ и означимо главне кривине за M у p са $\alpha = -ctg\ r$ и λ. Из Леме 5.3 знамо да је $LT_\lambda \subset T_\lambda$ јер је $T_\lambda = T_\alpha^\perp$, па L слика сваки од сопствених простора T_λ и T_α у себе. Сада имамо

$$v \in T_\alpha \Rightarrow Lv \in T_\alpha \Rightarrow ALv = \alpha Lv, \quad LAv = L\alpha v = \alpha Lv \Rightarrow AL = LA \text{ на } T_\alpha,$$
$$v \in T_\lambda \Rightarrow Lv \in T_\lambda \Rightarrow ALv = \lambda Lv, \quad LAv = L\lambda v = \lambda Lv \Rightarrow AL = LA \text{ на } T_\lambda,$$

па A и L комутирају на $TM = T_\alpha \oplus T_\lambda$. ∎

Напомена 5.2 Ако је p тачка сфере S^6 и ξ_p тангентни вектор у p, геодезијска крива кроз p у правцу ξ_p је

$$\gamma_{\xi_p}(t) = \cos t\ p + \sin t\ \xi_p.$$

Посматрајмо скоро комплексну тотално геодезијску криву S^2 у S^6. Како је $S^2 \hookrightarrow S^6 \hookrightarrow \mathbb{R}^7$, можемо S^2 посматрати у тродимензионом простору $\mathbb{R}^3 \times \{(0,0,0,0)\}$, тј.

$$(\forall p) \quad \mathcal{L}\mathrm{in}(p) \oplus T_pS^2 = \mathbb{R}^3 \times \{(0,0,0,0)\}.$$

Тада је $T_p^\perp S^2 = \{(0,0,0)\} \times \mathbb{R}^4$, а јединични нормални вектори су у $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Тубуларна хиперповрш M_r око S^2 је скуп тачака облика $\cos r\ p + \sin r\ \xi_p$, где $p \in S^2$ а $\xi_p \in S^3$. Посматрајмо пресликавање

$$S^2(\cos r) \times S^3(\sin r) \to M_r, \quad (\cos r\ p, \sin r\ \xi_p) \mapsto \cos r\ p + \sin r\ \xi_p.$$

Ово пресликавање је очигледно изометричка имерзија и бијекција, а такође и смештање, па је M_r изометрично $S^2(\cos r) \times S^3(\sin r)$. $\square$

Сада ћемо приказати неке резултате из [15], где су се аутори бавили проблемом класификације туба око скоро комплексних кривих типа (i)-(iii).

Надаље претпостављамо да S није тотално геодезијска скоро комплексна крива, тј. нека је S скоро комплексна крива типа (i)-(iii). Тада за $\eta \in UT_p^\perp S$ постоје, локално, реалне глатке функције x_1, x_2, x_3 и x_4 такве да је $\eta = x_1\xi_1 + x_2 J\xi_1 + x_3\xi_2 + x_4 J\xi_2$ и ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + {x_4}^2 = 1$. Из (46), оператор облика је

$$A_\eta \bar{e}_1 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \bar{e}_1, \qquad A_\eta \bar{e}_2 = -\sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \bar{e}_2,$$

где је $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ локално ортонормирана база за TS. Изабрали смо нову базу како бисмо дијагонизовали оператор A_η.

Као и у Ставу 5.1, добијамо да су главне кривине и вектори главних кривина тубуларне хиперповрши M_r у $q = \gamma_\eta(r)$, где је $\xi = \dot{\gamma}_\eta(r)$,

$$A_\xi B_{\bar{e}_1}(r) = \frac{\sin r + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \cos r}{\cos r - \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \sin r} B_{\bar{e}_1}(r), \tag{72}$$

$$A_\xi B_{\bar{e}_2}(r) = \frac{\sin r - \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \cos r}{\cos r + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \sin r} B_{\bar{e}_2}(r), \tag{73}$$

где је $B_V(t)$ паралелно векторско поље дуж $\gamma_\eta(t)$ такво да је $B_V(0) = V$.

Такође, видели смо да ако $X \in T_p^\perp S \cap (\mathbb{R}\eta)^\perp$, тада је

$$A_\xi B_X(r) = -\text{ctg } r \; B_X(r). \tag{74}$$

Изаберимо ортонормирану базу $\{E1, ..., E_5\}$ тубуларне хиперповрши M_r сачињену од главних праваца, тј. $A_\xi E_i = \lambda_i E_i$ за јединично нормално векторско поље ξ. На основу претходног имамо да је

$$\lambda_1 = \frac{\sin r + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \cos r}{\cos r - \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \sin r}, \; \lambda_2 = \frac{\sin r - \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \cos r}{\cos r + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \sin r}, \; \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -\text{ctg } r.$$

Вектор средње кривине H тубуларне хиперповрши $M_r \subset S^6$ је, на основу (12), дат са

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{5} tr A_\xi \xi = \frac{1}{5}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)\xi \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{\sin r + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \cos r}{\cos r - \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \sin r} + \frac{\sin r - \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \cos r}{\cos r + \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda \sin r} - 3\text{ctg } r\right)\xi \\
&= \frac{1}{5}\left(2\frac{\sin r \cos r(1 + ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2)}{\cos^2 r - ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2 \sin^2 r} - 3\text{ctg } r\right)\xi \\
&= \frac{1}{5}\left(2\frac{\text{ctg } r(1 + ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2)}{\text{ctg}^2 r - ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2} - 3\text{ctg } r\right)\xi \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{2\text{ctg } r(1 + ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2) - 3\text{ctg } r \; (\text{ctg}^2 r - ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2)}{\text{ctg}^2 r - ({x_1}^2 + {x_2}^2)\lambda^2}\right)\xi \\
&= \frac{1}{5}\frac{(2 + 5(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)\text{ctg } r - 3\text{ctg}^3 \; r}{\text{ctg}^2 \; r - (x_1^2 + x_2^2)\lambda^2}\xi.
\end{aligned}$$

Скаларна кривина τ тубуларне хиперповрши $M_r \subset S^6$ је, на основу (5), дата са

$$\tau = \sum_{i=1}^{5} S(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} R(E_j, E_i, E_i, E_j) = \sum_{i,j=1}^{5} R(E_j, E_i, E_i, E_j). \tag{75}$$

Ако у (39) заменимо $Y = Z \perp X$ и $\|X\| = 1 = \|Y\|$, добијамо

$$\begin{aligned} R(X,Y)Y &= A_{h(Y,Y)}X - A_{h(X,Y)}Y + g(Y,Y)X - g(X,Y)Y \\ &= A_{h(Y,Y)}X - A_{h(X,Y)}Y + X, \end{aligned}$$

па је

$$\begin{aligned} R(X,Y,Y,X) &= g(A_{h(Y,Y)}X, X) - g(A_{h(X,Y)}Y, X) + g(X,X) \\ &= g(h(X,X), h(Y,Y)) - g(h(X,Y), h(X,Y)) + 1. \end{aligned}$$

У бази $\{E_1, ..., E_5\}$ важи

$$h(E_i, E_i) = \lambda_i \xi, \quad h(E_i, E_j) = 0, \; i \neq j,$$

па је

$$\begin{aligned} R(E_i, E_j, E_j, E_i) &= g(h(E_i, E_i), h(E_j, E_j)) - g(h(E_i, E_j), h(E_i, E_j)) + g(E_i, E_i) \\ &= g(\lambda_i \xi, \lambda_j \xi) + 1 = \lambda_i \lambda_j g(\xi, \xi) + 1 = \lambda_i \lambda_j + 1, \quad i \neq j, \\ R(E_i, E_i, E_i, E_i) &= 0, \quad i = j. \end{aligned} \tag{76}$$

Из (75) и (76) добијамо

$$\tau = \sum_{i,j=1}^{5} R(E_j, E_i, E_i, E_j) = \sum_{i \neq j}^{5} R(E_j, E_i, E_i, E_j) = \sum_{i \neq j}^{5} (\lambda_i \lambda_j + 1) = 20 + \sum_{i \neq j}^{5} \lambda_i \lambda_j.$$

Најпре израчунајмо производе главних кривина (због једноставнијег записа означимо $a = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\lambda$):

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 &= \frac{1 - a^2 \mathrm{ctg}^2 r}{\mathrm{ctg}^2 r - a^2}, \\ \lambda_1 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_4 = \lambda_1 \lambda_5 &= \frac{-a \ \mathrm{ctg}^3 r - (1 + a^2)\mathrm{ctg}^2 r - a \ \mathrm{ctg} r}{\mathrm{ctg}^2 r - a^2}, \\ \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_2 \lambda_4 = \lambda_2 \lambda_5 &= \frac{a \ \mathrm{ctg}^3 r - (1 + a^2)\mathrm{ctg}^2 r + a \ \mathrm{ctg} r}{\mathrm{ctg}^2 r - a^2}, \\ \lambda_3 \lambda_4 = \lambda_3 \lambda_5 = \lambda_4 \lambda_5 &= \frac{\mathrm{ctg}^4 r - a^2 \mathrm{ctg}^2 r}{\mathrm{ctg}^2 r - a^2}. \end{aligned}$$

Сада је

$$\begin{aligned} \tau &= 20 + \sum_{i \neq j}^{5} \lambda_i \lambda_j = 20 + 2\lambda_1 \lambda_2 + 6(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) + 6\lambda_3 \lambda_4 \\ &= 20 + \frac{2(1 - a^2 \mathrm{ctg}^2 r) - 12(1 + a^2)\mathrm{ctg}^2 r + 6(\mathrm{ctg}^4 r - a^2 \mathrm{ctg}^2 r)}{\mathrm{ctg}^2 r - a^2} \\ &= 20 + \frac{2 - (12 + 20a^2)\mathrm{ctg}^2 r + 6\mathrm{ctg}^4 r}{\mathrm{ctg}^2 r - a^2} \\ &= 20 + \frac{2 - (12 + 20(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)\mathrm{ctg}^2 \ r + 6\mathrm{ctg}^4 \ r}{\mathrm{ctg}^2 \ r - (x_1^2 + x_2^2)\lambda^2}. \end{aligned}$$

Дакле, вектор средње кривине H и скаларна кривина τ тубуларне хиперповрши $M_r \subset S^6$ су дати са:

$$H = \frac{(2 + 5(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)\text{ctg } r - 3\text{ctg}^3 r}{5(\text{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)}\xi, \tag{77}$$

$$\tau = 20 + \frac{2 - (12 + 20(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)\text{ctg}^2 r + 6\text{ctg}^4 r}{\text{ctg}^2 r - (x_1^2 + x_2^2)\lambda^2}. \tag{78}$$

Нека је M^n Риманова подмногострукост реалне просторне форме $K^n(c)$ константне секционе кривине c. Означимо са K секциону кривину (6), а са τ скаларну кривину (5) многострукости M. Чен[26] је у [8] увео Риманову инваријанту

$$\delta_M = \frac{1}{2}\tau - \inf K,$$

где је inf K функција на M дефинисана са

$$\inf K(p) = \inf\{K_p(\pi) \mid \pi \subset T_pM \text{ раван}\}$$

и доказао да важи

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|H\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)c, \tag{79}$$

где је $\|H\|^2$ квадрат норме вектора средње кривине (12).

За минималне подмногострукости сфере S^6 неједнакост (79) се своди на

$$\delta_M \leq \frac{1}{2}(n+1)(n-2),$$

због $H = 0$ и $c = 1$. Специјално, за скоро комплексну криву S у S^6 важи $\delta_S \leq 0$.

Теорема 5.3 (*Ченова неједнакост, [8]*)
Нека је M^n n-димензиона ($n \geq 2$) подмногострукост Риманове многострукости $K^m(c)$ константне секционе кривине c. Тада важи

$$\inf K \geq \frac{1}{2}\left(\tau - \frac{n^2(n-2)}{n-1}\|H\|^2 - (n+1)(n-2)c\right).$$

Једнакост важи ако и само ако постоји ортонормирана покретна база $e_1, ..., e_n$, $e_{n+1}, ..., e_m$ где су $e_1, ..., e_n$ тангентна векторска поља, а $e_{n+1}, ..., e_m$ нормална векторска поља подмногострукости M таква да у њој оператори облика A_{e_r}, $r = n+1, ..., m$ имају следећи облик

$$A_{e_{n+1}} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu \end{pmatrix}, \quad a + b = \mu, \tag{80}$$

$$A_{e_{n_r}} = \begin{pmatrix} h_{11}^r & h_{12}^r & 0 & \dots & 0 \\ h_{21}^r & h_{22}^r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad r = n+2, ..., m. \tag{81}$$

[26] Bang Yen Chen - Michigan State University, United States

Уколико у свакој тачки подмногострукости M важи једнакост у неједнакости (79) кажемо да M задовољава **Ченову једнакост**. За такве подмногострукости постоји покретна база у којој су оператори облика дати са (80) и (81).

Напомена 5.3 На основу Напомене 5.2, видимо да, ако је S тотално геодезијска скоро комплексна крива у S^6, $M_{\frac{\pi}{2}}$ је део $S^2(0) \times S^3(1)$ што очигледно није хиперповрш.

Ако је S скоро комплексна крива типа (i)-(iii), на основу претходног главне кривине за $M_{\frac{\pi}{2}}$ су $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\lambda}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}\lambda}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$, па је $M_{\frac{\pi}{2}}$ минимална. Може се показати (видети [12]) да је $M_{\frac{\pi}{2}}$ локално хиперповрш на скупу $\{x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$, али није хиперповрш на скупу $\{x_1 = x_2 = 0\}$.

Дакле, глобално посматрајући, $M_{\frac{\pi}{2}}$ није хиперповрш. $\square$

Сада смо спремни да докажемо још једну теорему о класификацији:

Теорема 5.4 *Нека је M компактна повезана Хопфова хиперповрш у S^6. Тада*

(1) *Ако је M минимална, тада је M тотално геодезијска хиперсфера или хиперповрш*[27] $S^2(\cos \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2})) \times S^3(\sin \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2}))$ *у* S^6*;*

(2) *Ако M има константну скаларну кривину, онда је M тотално геодезијска хиперсфера или хиперповрш $S^2(\cos\ r) \times S^3(\sin\ r)$ у S^6, $r \in (0, \pi/2)$;*

(3) *Ако M задовољава Ченову једнакост, онда је M тотално геодезијска хиперсфера у S^6.*

Доказ: На основу Теореме 5.1 знамо да је компактна повезана Хопфова хиперповрш M или тотално геодезијска хиперсфера у S^6 или туба око компактне скоро комплексне криве у S^6. Тотално геодезијска хиперсфера задовољава све ставке из теореме. Дакле, преостаје нам још да докажемо теорему за тубуларну хиперповрш M_r при одговарајућим условима.

(1): Посматрајмо прво тотално геодезијску скоро комплексну криву S (која је типа (iv)) у S^6. На основу Напомене 5.2 знамо да је тубуларна хиперповрш M_r полупречника $r \in (0, \pi/2)$ око S изометрична $S^2(\cos\ r) \times S^3(\sin\ r)$. Такође, видели смо да је M_r Хопфова хиперповрш са две различите главне кривине $-\operatorname{ctg}\ r$ и $\operatorname{tg}\ r$. Ако је M_r минимална, онда важи

$$2\operatorname{tg}\ r - 3\operatorname{ctg}\ r = 0,$$

па је $r = \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2})$, тј. M_r је хиперповрш $S^2(\cos \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2})) \times S^3(\sin \operatorname{arctg}(\frac{\sqrt{6}}{2}))$ у S^6.

За остале скоро комплексне криве типа (i)-(iii), из (77) добијамо да је M_r минимална ако и само ако је

$$5(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2 \operatorname{ctg}\ r = 3\operatorname{ctg}^3\ r - 2\operatorname{ctg}\ r.$$

За фиксирано r, ако је $\operatorname{ctg} r \neq 0$, десна страна ове једнакости је константна, док се лева страна мења у јединичном нормалном раслојењу $UT_p^{\perp}S$, што доводи до контрадикције. Дакле, $\operatorname{ctg}\ r = 0$, тј. $r = \frac{\pi}{2}$. Међутим, $M_{\frac{\pi}{2}}$ није хиперповрш. Дакле мора бити $r \neq \frac{\pi}{2}$.

[27] Хиперповрши $S^k(\sqrt{\frac{k}{n-1}}) \times S^l(\sqrt{\frac{l}{n-1}}) \subset S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}, k + l = n - 1$, n-димензионе сфере су минималне и називају се Клифордовим хиперповршима.

(2): За случај тотално геодезијске скоро комплексне криве, M_r има две различите главне кривине $-\text{ctg}\ r$ и $\text{tg}\ r$ које су константне за фиксирано r, па је очигледно и скаларна кривина константна. Дакле, хиперповрш $M_r = S^2(\cos\ r) \times S^3(\sin\ r)$ има константну скаларну кривину.

За остале скоро комплексне криве типа (i)-(iii), на основу (78), M_r има константну скаларну кривину τ ако и само ако је

$$\tau = 20(1 + \text{ctg}^2 r), \quad 6\text{ctg}^4 r + (8 - \tau)\text{ctg}^2 r + 2 = 0,$$

па добијамо да је

$$\text{ctg}^2 r = \frac{1}{7}.$$

Како бисмо обезбедили да M_r буде тубуларна хиперповрш, потребне су нам додатне претпоставке о скоро комплексној кривој S.

Као у (45) и (46), бирамо векторска поља $\{E_1, JE_1, \xi_1, J\xi_1, \xi_2, J\xi_2\}$ дуж скоро комплексне криве S која је типа (i)-(iii), и означимо дуална векторска поља са $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$. Сада имамо (видети [12]) да је M_r тубуларна хиперповрш око S ако и само ако је

$$\left(w_1 - \sqrt{7}\sum_{\bar{i}}^{4} x_i w_{1\bar{i}}\right) \wedge \left(w_2 - \sqrt{7}\sum_{\bar{i}}^{4} x_i w_{2\bar{i}}\right) \neq 0, \tag{82}$$

где су $w_{1\bar{i}} = h^{\bar{i}}_{11} w_1 + h^{\bar{i}}_{12} w_2$, $w_{2\bar{i}} = h^{\bar{i}}_{21} w_1 + h^{\bar{i}}_{22} w_2$ друге фундаменталне форме криве S у S^6, $\bar{i} = i + 2$.

Из (46), директним рачуном добијамо да је (82) еквивалентно са

$$\begin{aligned}
&(w_1 - \sqrt{7}(x_1\lambda w_1 + x_2\lambda w_2)) \wedge (w_2 - \sqrt{7}(-x_1\lambda w_2 + x_2\lambda w_1))\\
&= ((1 - \sqrt{7}\lambda x_1)w_1 - \sqrt{7}\lambda x_2 w_2) \wedge (-\sqrt{7}\lambda x_2 w_1 + (1 + \sqrt{7}\lambda x_1)w_2)\\
&= (1 - 7\lambda^2 x_1^2) w_1 \wedge w_2 + 7\lambda^2 x_2^2 w_2 \wedge w_1\\
&= (1 - 7\lambda^2(x_1^2 + x_2^2)) w_1 \wedge w_2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Како за фиксирану тачку $p \in S$ важи

$$1 - 7\lambda^2 \leq 1 - 7\lambda^2(x_1^2 + x_2^2) \leq 1,$$

онда је M_r тубуларна хиперповрш ако и само ако је

$$1 - 7\lambda^2 > 0.$$

Користећи (49), добијамо да Гаусова кривина K скоро комплексне криве S задовољава

$$K > \frac{5}{7}. \tag{83}$$

У [10] је показано да за компактну скоро комплексну криву у S^6 чија Гаусова кривина припада интервалу $[\frac{1}{6}, 1]$ важи да је та Гаусова кривина или $\frac{1}{6}$ или 1. С обзиром да је $K > \frac{5}{7}$, следи да је $K = 1$ и да је $S = S^2$. На основу класификација у [5], за $S \cong S^2$ добијамо скоро комплексну криву типа (i). Међутим, у [15] је показано да, за компактну скоро комплексну криву типа (i), ако Гаусова кривина K није идентички једнака $\frac{1}{6}$, онда постоје тачке у којима је $K < \frac{1}{6}$ и тачке у којима је $K > \frac{1}{6}$. Ово је у контрадикцији са (83).

(3): На основу (81), тубуларна хиперповрш M_r задовољава Ченову једнакост ако и само ако је $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5$.

Дакле, тубуларну хиперповрш M_r око тотално геодезијске скоро комплексне криве задовољава Ченову једнакост ако и само ако је

$$2\text{tg } r = -\text{ctg } r,$$

што је контрадикција.

За остале скоро комплексне криве типа (i)-(iii), M_r задовољава Ченову једнакост ако и само ако је

$$\frac{(2 + 2(x_1^2 + x_2^2)\lambda^2)\text{ctg } r}{\text{ctg}^2\ r - (x_1^2 + x_2^2)\lambda^2} = -\text{ctg } r,$$

одакле добијамо $r = \frac{\pi}{2}$, али $M_{\frac{\pi}{2}}$ није хиперповрш. ∎

Литература

[1] Антић М.: CR *подмногострукости шестодимензионе сфере,* докторски рад, Математички факултет, Универзитет у Београду (2009).

[2] Антић М.: *Диференцијална геометрија многострукости,* Математички факултет, Универзитет у Београду, (2015)

[3] Baez J.: *The octonions*, University of California (2001).

[4] Berndt J., Bolton J.,Woodward L. M.: *Almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler* $6-sphere$, Geometriae Dedicata 56: 237-247, (1995).

[5] Bolton J., Vrancken L. and Woodward L. M.: *On almost complex curves in the nearly Kähler* $6-sphere$, Quart. J. Math. Oxford (2) 45: 407-427, (1994)

[6] Butruille, J-B: *Classification of homogeneous nearly Kähler manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. 27, pp. 201-225, (2005).

[7] Carmo, M. P. do.: *Riemannian geometry*, (Translated by Francis Flaherty), Mathematics: Theory and applications, Brikhäuser, Boston-Berlin, (1992).

[8] Chen B. Y.: *Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds*, Arch. Math., Vol 60, 568-578, (1993).

[9] Desmukh Sh., Al-Solamy F.R.: *Hopf hypersurfaces in nearly Kaehler* $6-sphere$, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.13, No.1, pp. 28-46, (2008).

[10] Dillen F., Opozda B., Verstraelen L. and Vrancken L.: *On almost complex surfaces of the nearly Kähler* $6-sphere$, to appear in Collection of Scientific Papers, Faculty of Science, Univ. of Kragujevac, 8, 5-13, (1987).

[11] Ђорић М.: *Геометрија геодезијских сфера и цеви,* докторски рад, Математички факултет, Универзитет у Београду (1994).

[12] Ge J. Q.: *On mean curvatures in submanifolds geometry*, Sci China Ser A, 51:1127-1134, (2008).

[13] Gray A.: *Tubes*, Addison-Wesley, Redwood City, (1990).

[14] Hashimoto, H.: $J-$ *Holomorphic curves of a* $6-$ *dimensional sphere*, Tokyo J. Math. 23: 137-159, (2000).

[15] HE L, Jiao X X, Zhou X C: *On almost complex curves and Hopf hypersurfaces in the nearly Kähler* $6-sphere$, Sci China Math, 57: 1045-1056, doi:10.1007/s11425-014-4777-3 , (2014)

[16] Kobayashi S., Nomizu K.: *Foundations of differential geometry*, Interscience, (1969).

[17] Lee J. M.: *Riemannian Manifolds : An Introduction to Curvature*, Springer, (1997).

[18] Lee J. M.: *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd Edition, Springer, (2013).

[19] Nagy P. A.: *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations*, Asian J. Math. 6, pp. 481-504, (2002).

[20] Postnikov M.: *Lectures in Geometry*, *Semester V. Lie Groups and Lie Algebras*, Mir Publishers, Moscow (1986).

[21] Sekigawa K.: *Almost complex submanifolds of a* $6-$*dimensional sphere*, Kōdai Math J, 6: 174185, (1983).