Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Paralelnost pravih u neeuklidskom prostoru

Master rad

Mentor: Zoran Lučić
Student: Emina Čajlak

Beograd, 2018.

Predgovor

Rad se sastoji od pet poglavlja kroz koja se prati nastanak i razvoj jedne nove ideje, od njenog samog početka pa sve do danas. Da bi značaj pojma paralelnosti bio verodostojno predstavljen, a da bi istovremeno i čitalac imao jasan uvid, u prvom poglavlju se daje istorijski osvrt. Kao bitna ličnost samog začetka geometrije ističe se Euklid, a u okviru ovog poglavlja dat je uvid o razvoju geometrije u tri ere: pre Euklida, za vreme Euklida i šta se dešavalo i posle njega. Dakle, na samom početku je i reč o samim počecima geometrije, idejama i potrebama tog doba. Navodimo i imena bitna za taj period, gde se Euklid ističe među prvima koji pokušavaju i osećaju značaj sistematizacije. Naravno, ne bi se moglo govoriti o Euklidu a da ne bude reči o njegovim čuvenim Elementima, tako i navodimo neke Euklidove definicije iz Elemenata, a sve u cilju da bismo došli do postulata i čuvenog Petog postulata. Nakon Euklida, kao bitna ličnost za teoriju geometrije se ističe Hilbert i to svojim pokušajem sistematizacije i aksiomatizacije teorije geometrije, o čemu će biti reči na kraju prvog poglavlja.
Da bismo uopšte došli do pojma hiperparalelnosti, potrebno je, naravno, uvesti pojam paralelnosti u Euklidovom smislu. O pojmu paralelnosti u Euklidovom smislu biće reči u drugom poglavlju. Navodimo Peti Euklidov postulat, a s obzirom da su se kroz istoriju, u cilju dokazivanja Petog postulata koristila tvdjenja koja su mu ekvivalenta i to je dovodilo određene naučnike na pogrešne zaključke, navodimo i tvrđenja koja su mu ekvivalenta.
Nakon uvođenja pojma paralelnosti u drugom poglavlju, u trećem poglavlju, polazimo o samog začetka neeuklidske misli, toga razvoja i posledica te ideje, da bi smo uveli pojam hiperparalelnosti. Pored samog pojma hiperparalelnosti, navodimo i osobine hiperparalelnih pravih, kao i neke krive u L_2 prostoru.
U prva tri poglavlja je dat tok razvoja i opis neeuklidske geometrije. Kako se prikaz neeuklidske geometrije ne može jasno predstaviti u euklidskom prostoru, da bismo dali jasnu predstavu o prirodi neeuklidske geometrije, predstavljamo je u modelima u kojima ona važi. S tim ciljem, u četvrtom i petom poglavlju, dajemo prikaz nekih modela neeuklidske geometrije.
Modeli u kojima važi neeuklidska geometrija, a u kojima smo objasnili i prikazali neke pojmove, su Poenkareov disk model i Poenkareov poluravanski model. Dakle, dali smo prikaz nekih osnovnih pojmova kao što su prava, duž, paralelne prave, trougao i pramenovi pravih.

Na taj način smo, od samog početka geometrije, došli do izgrađene neeuklidske geometrije i modela u kojima ona važi i u kojima je možemo pri-kazati. Sada smo već sigurni u neprotivurečnost dve naizgled suprotne i različite geometirije, koje podržavaju jedna drugu.

Sadržaj

1 Istorijski osvrt

1.1 Geometrija pre Euklida

Geometrijom su se ljudi počeli baviti iz praktičnih potreba poput premeravanja zemljišta. U starom Egiptu reka Nil je svake godine svojim izlivanjem nanosila mulj, a nakon povlačenja te plodotvorne mase, je ostajalo zemljište bez jasnih granica među parcelama. Međutim, bilo je potrebno ponovo utvrditi te granice, a one su se utvrđivale premeravanjem.

U tom periodu, geometrija nastaje kao induktivna nauka. Kada su Grci preuzeli vodeću ulogu, geometrija postaje deduktivna nauka, što se smatra jednim od najvećih tekovina matematičke misli.

Tales se smatra prvim koji je uveo deduktivnost kao metodu zaključivanja, a Pitagora je u većoj meri koristio dokazivanje u tvrđenjima i matematičkim iskazima, podstaknut Talesovom zaostavštinom.

Značajan broj dokazanih geometrijskih tvrđenja iz toga doba nameću pitanje njihovog redosleda izlaganja. To pitanje dovodi do značajnog pojma sistematizacije dotadašnjeg znanja iz geometrije. Pitagorin sledbenik, Hipokrat sa Hiosa, sakuplja teoriju geometrije i kao rezultat nastaje njegovo delo "Elementi geometrije".

U Platonovoj Akademiji se prvi put nagoveštava aksiomatsko zasnivanje geometrije. Platonova filozofska misao je imala uticaja na način poimanja brojeva i geometrijskih pojmova. Apstrahovanje geometrijskih tela od opažajnih ukazuje na razlike između naučnog zaključivanja i empirijskog saznanja. U nekim Platonovim delima se nazire ideja aksiomatskog zasnivanja naučne teorije, što je revolucionarna ideja kada je u pitanju zasnivanje geometrije.

Aristotel je u svojim delima pokušao da razotkrije opšte zakonitosti deduktivnog zaključivanja. Osnovna tvrđenja na kojima se zasniva deduktivna teorija, Aristotel razvrstava na aksiome i postulate. Aksiome uzima kao tvrđenja opštijeg karaktera, koja se prihvataju bez dokazivanja, a koja važe u više naučnih teorija, a postulate kao tvrđenja specifičnog karaktera, koja se prihvataju bez dokazivanja a važe u toj naučnoj teoriji koja se na njima zasniva. Aristotel smatra aksiome i postulate tvrđenjima koja su do te mere opštepriznata i poznata da ne samo što je nemoguće, već ih i nije potrebno dokazivati. U tako nastaloj teoriji istinitost izvedenih tvrđenja nije mogla podleći nikakvoj sumnji, pa se nije mogao ni nametati problem neprotivrečnosti deduktivne teorije aristotelovskog tipa.

1.2 Euklid

U izgrađivanju geometrije, posle mnoštva dokazanih teorema, pojavila se potreba za sistematizacijom, a kasnije i za uvođenjem aksioma. Jedan od prvih pokušaja aksiomatskog zasnivanja geometrije, i iz tog vremena jedini sačuvan, dao je starogrčki matematičar Euklid iz Aleksandrije. Obrazovanje je stekao u Atini, kod Platonovih učenika, a oko 300. godine pre n. e. prešao u Aleksandriju da bi u tek osnovanoj školi predavao geometriju. Euklid pristupa sistematizaciji teorije geometrije izloživši je na bazi osnovnih formulacija - aksioma u svojim znamenitim knjigama Elementi.

Euklidovi Elementi, po nekim procenama je knjiga koja je, osim Biblije, doživela najveći broj izdanja u celoj zapadnoj civilizaciji. Njeno prvo štampano izdanje pojavilo se 1482. godine, a iza toga bilo je još preko hiljadu izdanja. Suštinska karakteristika koja ovu knjigu čini tako slavnom, je njen jednostavan i logičan sled teorema i problema. Logička struktura ove knjige uticala je na naučnu misao čitavih 2000 godina, više nego bilo koje drugo naučno delo. Elementi se sastoje iz 13 knjiga. Veliki deo geometrije koji se nalazi u današnjim udžbenicima matematike, praktično je preuzet iz prvih šest knjiga Elemenata. To je, zapravo, najstarije naučno delo koje je još uvek u upotrebi. Prvu knjigu Elemenata Euklid započinje nizom definicija kojima se objašnjavaju prvi geometrijski pojmovi kao što su tačka, prava, ravan, ugao, krug i dr. Prevod tih definicija glasi:

1. Tačka je ono što nema delova.
2. Linija je dužina bez širine.
3. Krajevi linije su tačke.
4. Prava je linija ona, koja za tačke na njoj podjednako leži.
5. Površina je ono što ima samo dužinu i širinu.
6. Krajevi površine su linije.
7. Ravan je površina koja za prave na njoj podjednako leži.
8. Ugao u ravni je uzajamni nagib dveju linija u ravni, koje se seku i koje ne leže u istoj pravoj.
9. Ako su linije koje obrazuju ugao prave, ugao se zove pravolinijski.

10. Ako prava, koja stoji na drugoj pravoj, obrazuje sa ovom dva susedna jednaka ugla, svaki od njih je prav, a podignuta prava zove se normala na onoj na kojoj stoji.

11. Tup ugao je onaj, koji je veći od pravog.

12. Oštar je onaj, koji je manji od pravog.

13. Granica je ono što je kraj ma čega.

14. Figura je ono što je omeđeno ili jednom ili sa više granica.

15. Krug je ravna figura omedjena takvom jedinom linijom (koja se zove periferija), da su sve prave povučene od jedne tačke, koja se nalazi u samoj figuri, prema toj liniji (prema periferiji kruga) medjusobno jednake.

16. Ova tačka zove se središte kruga.

17. Prečnik kruga je svaka prava što prolazi kroz središte kruga, a ograničena je sa svake strane periferijom kruga; on polovi krug.

18. Polukrug je figura ograničena prečnikom i njime odvojenom periferijom kruga; središte polukruga je isto kao i središte kruga.

19. Pravolinijske figure su one koje su ograničene pravama; trostrane su ograničene sa tri, četvorostrane sa četiri, mnogostrane sa više od četiri prave.

20. Od trostranih figura jednakostrani trougao ima tri jednake strane, jednakokraki ima samo dve jednake strane, a raznostrani ima tri nejednake strane.

21. Dalje, od trostranih figura je pravougli trougao onaj koji ima prav ugao, tupougli koji ima tup ugao, a oštrougli koji ima tri oštra ugla.

22. Od četvorostranih figura kvadrat je jednakostran i sa pravim uglovima; pravougaonik je sa pravim uglovima, no nije sa jednakim stranama; romb sa jednakim stranama, no nije sa pravim uglovima; romboid sa jednakim naspramnim stranama i jednakim naspramnim uglovima, no nije ni jednakostran ni sa pravim uglovima. Ostale četvorostrane figure neka se zovu trapezi.

23. Paralelne su one prave, koje se nalaze u istoj ravni i koje se, produžene u beskrajnost na obe strane, ne seku jedna sa drugom.

Očigledno je da ovo nisu definicije u klasičnom smislu, već neprecizan opis geometrijskih pojmova dat u nameri da se u čovečijoj svesti stvori intuitivna predstava o ovim pojovima. Euklid deli polazna tvrđenja na aksiome i postulate od kojih su ovi drugi čisto geometrijskog sadržaja. U različitim prepisima Elemenata broj postulata i aksioma nije isti, ali se obično prihvata da je Euklid zasnovao geometriju na devet aksioma i pet postulata. Neki od njih, u izmenjenom obliku, zadržali su se i do današnjih dana. Postulati, u obliku u kom ih je Euklid dao, glase:

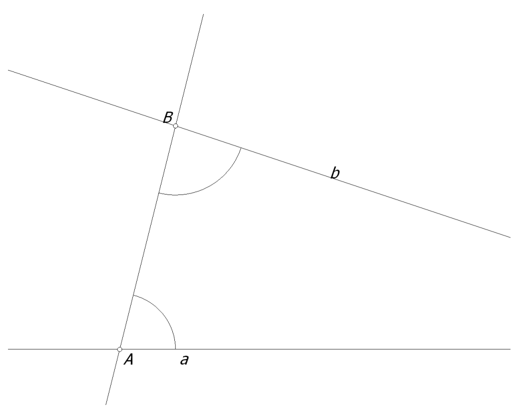
I Pretpostavlja se da je moguće od svake tačke do svake druge tačke konstruisati pravu liniju.

II Pretpostavlja se da se svaka prava, prateći njen pravac, može neograničeno produžavati.

III Pretpostavlja se da se u nekoj ravni oko svake njene tačke može opisati krug bilo kojeg poluprečnika.

IV Pretpostavlja se da su svi pravi uglovi među sobom podudarni.

V Ako neka prava presecajući druge dve komplanarne prave obrazuje sa njima sa iste strane dva unutrašnja ugla kojima je zbir manji od zbira dva prava ugla, tada se te dve prave, neograničeno produžene seku sa one strane sečice sa koje je taj zbir uglova manji od zbira dva prava ugla.



Slika 1. (Euklidov V postulat)

Po svojoj prirodi, postulati su strogo geometrijska tvrđenja. Oni su izraženi u vidu zahteva ili pretpostavki kojima kao da se želi naglasiti njihov konstruktivan karakter. Prva tri postulata zaista su konstruktivnog karaktera i na njima je vekovima zasnivana teorija geometrijskih konstrukcija. Za poslednja dva postulata ne može se reći da su konstruktivnog karaktera. Pomenimo da u savremenoj geometriji četvrti postulat predstavlja tvrđenje koje se dokazuje. Svojom složenošću ističe se famozni peti postulat. Time je izazvao pažnju ostalih matematičara i nagonio ih je da ga izvode iz ostalih aksioma geometrije. Kao i postulati, u geometriji Euklida, i aksiome su predstavljale osnovna tvrdjenja. Aksiome se od tvrdjenja razlikuju po karakteru koji nije striktno geometrijski. Aksiome, kako ih je Euklid navodio su:

1. Oni (objekti) koji su jednaki istom (objektu) jednaki su međusobno.
2. I ako se jednakim (objektima) dodaju jednaki (objekti) celine su jednake.
3. I ako se od jednakih (objekata) oduzmu jednaki (objekti) ostaci su jednaki.
4. I ako se nejednakim (objektima) dodaju jednaki (objekti) celine su nejednake.
5. I udvostručeni jednaki (objekti) jednaki su međusobno.
6. I polovine od jednakih (objekata) jednake su međusobno.
7. I oni (geometrijski objekti) koji se mogu poklopiti jednaki su međusobno.
8. I celina je veća od dela.
9. I dve prave ne ograničavaju oblast.

Po svojoj prirodi većina Euklidovih aksioma je opštijeg karaktera, to su tvrdjenja koja važe i u drugim naučnim oblastima.

1.3 Razvoj geometrije nakon Euklida

Sistem osnovnih tvrđenja koje je dao Euklid nije potpun jer se iz njega ne može izvesti svako tvrđenje. Tu nepotpunost prvi je primetio znameniti starogrčki matematičar Arhimed. Spisak geometrijskih postulata on je delom proširio. U svom delu "O lopti i valjku", radi zasnivanja metričke geometrije Arhimed je uveo sledećih pet postulata:

I Od svih linija koje imaju zajedničke krajeve prava je najkraća.

II A druge dve linije koje imaju zajedničke krajeve i leže u istoj ravni nisu jednake ako su obe ispupčene i jedna od njih obuhvaćena drugom krivom i pravom koja spaja krajeve, a takodje i ako krive imaju jedan zajednički deo, dok se preostali deo obuhvata; pritom je obuhvaćena kriva manja od one koja je obuhvata.

III Isto tako, od svih površina koje imaju zajedničku ravnu periferiju ravan je najmanja.

IV A druge dve površine koje imaju zajedničku ravnu periferiju nisu jednake ako su obe ispupčene i jedna od njih (ili jedan njen deo) obuhvaćena površinom i ravni periferije; pritom je obuhvaćena površina manja od one koja je obuhvata.

V Pored toga, od dveju nejednakih linija, dveju nejednakih površina ili dvaju nejednakih tela, veća veličina biće manja od one veličine koja se dobija kad manju umnožimo potreban broj puta.

Prva četiri stava koja navodi Arhimed se nisu mogla prihvatiti kao postulati za logičko zasnivanje metričke geometrije. Poslednje tvrđenje je jako važno i naziva se Arhimedovim postulatom. Ono se može iskazati na sledeći način:

Arhimedov stav: *Za ma koja dva broja a i b, $a < b$, postoji takav ceo broj n, da je $na > b$.*

I nakon Arhimeda se nastavljaju pokušaji za upotpunjavanjem osnova euklidske geometrije. Svi ti pokušaji nisu bitno doprineli sve do kraja XIX veka. Tada se formira takav pogled na principe logičkog zasnivanja geometrije koji omogućava da se prvi put pokaže potpun sistem aksioma, takav da se sve teoreme izvode bez pozivanja na očiglednost. Mali broj geometaričara je shvatio koliko je važno upotpunjavanje broja Euklidovih postulata.

Naprotiv, veliki broj dela u vezi sa Euklidovim Elementima postavio je sebi zadatak da smanji broj stavova geometrije koji se uzimaju bez dokaza. U tome se izražavala potpuno prirodna težnja da se razjasni pod kakvim se minimalnim uslovima materijal geometrije može razviti logičkim putem. Jedan rezultat u tom pravcu bio je dobijen bez ikakvog truda. Naime, zapazilo se da je Euklidov IV postulat izlišan, pošto se jednakost dvaju pravih uglova može dokazati isto tako strogo kao i mnoga druga tvrđenja. Mnogi matematičari smatrali da zbog svoje složenosti i neočiglednosti V Euklidov postulat ne treba da bude na spisku osnovnih tvrđenja, već ga treba kao teoremu dokazati. Zato su i mnogi matematičari pokušali da, indirektnim postupkom, izvedu dokaz tog tvrđenja, mnogi od njih su dovodili sebe u zabludu smatrajući da su u tome uspeli ne primećujući da su u svojim razmatranjima na izvestan način iskoristili neki od ekvivalenata Euklidovog petog postulata.

Proučavanja posvećena V postulatu stara su koliko i Euklidovi Elementi. Ona su se završila tek krajem XIX veka i dovela su do veoma važnih otkrića. U delu Nikolaja Lobačevskog i Janoša Boljaja prvi put je izražena misao da peti postulat ne zavisi od ostalih aksioma geometrije te da se, stoga, ne može izvesti iz ostalih postulata. Time je prošireno shvatanje samog smisla geometrije i načinjen korak u jedan sasvim novi geometrijski svet. Rezultati Lobačevskog i Boljaja postali su sasvim jasni tek krajem devetnaestog veka kada je konačno formiran pogled na logičke principe zasnivanja geometrije i kada je, prvi put, geometrija logički korektno utemeljena.

David Hilbert, u svom delu Osnove geometrije, geometriju zasniva na neprotivurečnosti, nezavisnosti i potpunom sistemu aksioma. Hilbert u svom delu ne daje opise osnovnih geometrijskih pojmova: tačke, prave i ravni. Hilbert u svom delu to objašnjava tako što kaže:

> Mi zamišljamo tri različita sistema stvari: stvari prvog sistema nazivamo tačkama i označavamo ih sa A,B,C,...; stvari drugog sistema nazivamo pravama i označavamo ih sa a,b,c,...; stvari trećeg sistema nazivamo ravnima i označavamo ih sa α,β,γ...; tačke se nazivaju elementima linearne geometrije, a tačke, prave i ravni se nazivaju elementima prostorne geometrije ili elementima prostora. Mi zamišljamo tačke, prave i ravni u izvesnim medjusobnim odnosima i označavamo ove odnose rečima ležati, izmedju, "podudarno", "paralelno", "neprekidno"; tačan i za matematičke svrhe potpun opis ovih odnosa postiže se pomoću aksioma geometrije.

Hilbert u Osnovama geometrije navodi dvadeset aksioma razvrstanih u pet grupa:

I Aksiome veze, pripadanja ili incidencije (devet aksioma).

II Aksiome poretka (šest aksiome).

III Aksiome podudarnosti (sedam aksioma).

IV Aksiome neprekidnosti (dve aksiome).

V Aksioma paralelnosti (jedna aksioma).

Na osnovama izabranog skupa aksioma, Hilbert izvodi određene teoreme euklidske geometrije, izgradjuje taj geometrijski sistem i dokazuje da je uzeti sistem aksioma potpun, nezavisan i neprotivurečan. On takodje daje i rešenje problema V Euklidovog postulata, tako što dokazuje da taj postulat nije posledica preostale četiri grupe aksioma. To zapravo znači da je zaista u pitanju aksioma, a ne teorema. Postoje teoreme koje se ne zasnivaju na aksiomu o paralelama, već samo na preostale četiri grupe aksioma. Sve teoreme koje se dokazuju pomoću grupe aksioma veze, poretka, podudarnosti i neprekidnosti čine apsolutnu geometriju. Kada se apsolutnoj geometriji doda V Euklidov postulat i sve teoreme koje poizilaze iz njega i koje se dokazuju direktno ili indirektno pomoću V Euklidovog postulata, dobija se euklidska geometrija.

I danas, skoro sto godina nakon izlaska Osnova geometrije kojima su i pored priznanja za njihov izvanvremensku valjanost u tom vremenu izrečene i mnoge zamerke, geometrija se zasniva na principima koje je utemeljio Hilbert. Značaj Hilbertovih Osnova geometrije ogleda se u tome što je njihova formalistička koncepcija stvorila preduslov za istraživanja koja se odnose na potpunost, neprotivurečnost i nezavnisnost aksiomatskog sistema.

1.4 Aksiome aposlutne geometrije

Navodimo sada aksiome iz prve četiri grupe aksioma, a koje čime aksiome apsolutne geometrije:

1.4.1 Aksiome incidencije

I.1 Svaka prava sadrži najmanje dve tačke A i B.

I.2 Postoji najmanje jedna prava koja sadrži tačke A i B.

I.3 Postoji najviše jedna prava koja sadrži dve razne tačke A i B.

I.4 Svaka ravan sadrži najmanje tri nekolinearne tačke A, B i C.

I.5 Postoji najmanje jedna ravan koja sadrži tri tačke A, B i C.

I.6 Postoji najviše jedna ravan koja sadrži tri nekolinearne tačke A, B i C.

I.7 Ako dve razne tačke A i B neke prave p pripadaju ravni π, tada sve tačke te prave p pripadaju ravni π.

I.8 Ako dve ravni α i β imaju jednu zajedničku tačku A, one imaju još najmanje jednu zajedničku tačku B.

I.9 Postoje četiri nekomplanarne tačke A, B, C, D.

1.4.2 Aksiome rasporeda

II.1 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada su svake dve od tačaka A, B, C među sobom različite.

II.2 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada je i $\mathcal{B}(C, B, A)$.

II.3 Ako su A, B, C tri kolinearne tačke takve da je $\mathcal{B}(A, B, C)$, tada nije $\mathcal{B}(A, C, B)$.

II.4 Ako su A i B dve razne tačke neke prave p, tada na pravoj p postoji tačka C takva da je $\mathcal{B}(A, B, C)$.

II.5 Ako su A, B, C tri razne tačke, tada važi najmanje jedna od relacija $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(C, A, B)$.

II.6 (Pašova aksioma) Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i prava p koja pripada ravni ABC, ne sadrži tačku A i seče pravu BC u tački P takvoj da je $\mathcal{B}(B, P, C)$, tada prava p seče pravu AC u tački Q takvoj da je $\mathcal{B}(A, Q, C)$ ili pravu AB u tački R takvoj da je $\mathcal{B}(A, R, B)$.

1.4.3 Aksiome podudarnosti

III.1 Ako je $(A, B) \cong (C, D)$ i $A = B$, tada je $C = D$.

III.2 Za svake dve tačke A i B imamo da je $(A, B) \cong (B, A)$.

III.3 Ako tačke A, B, C, D, E, F zadovoljavaju relacije $(A, B) \cong (C, D)$ i $(A, B) \cong (E, F)$, tada je $(C, D) \cong (E, F)$.

III.4 Ako su C i C' tačke otvorenih duži (AB) i $(A'B')$ takve da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$, tada je i $(A, B) \cong (A', B')$.

III.5 Ako su A, B dve razne tačke i C kraj neke poluprave p, tada na polupravoj p postoji tačka D takva da je $(A, B) \cong (C, D)$.

III.6 Ako su A, B, C tri nekolinearne tačke i A, B tačke ruba neke poluravni π takve da je $(A, B) \cong (A', B')$, tada u poluravni π postoji jedinstvena tačka C' takva da je $(A, C) \cong (A', C')$ i $(B, C) \cong (B', C')$.

III.7 Ako su A, B, C i A', B', C' dve trojke nekolinearnih tačaka i D, D' tačke polupravih BC i $B'C'$ takve da je $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$, $(C,A) \cong (C',A')$, $(B,D) \cong (B',D')$, tada je $(A,D) \cong (A',D')$

1.4.4 Aksiome neprekidnosti

IV.1 A ko su AB i CD bilo koje dve duži, tada na pravoj AB postoji konačan broj tačaka $A_1, ..., A_n$ takvih da je $B \in (A_{n-1})$ i $\mathcal{B}(A_1, ..., A_n)$ i $(C,D) \cong (A,A_1) \cong (A_1,A_2) \cong ... \cong (A_{n-1},A_n)$.

IV.2 Neka je na izvesnoj pravoj p dat beskonačan niz duži A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3,... koje zadovoljavaju sledeća dva uslova:

(a) svaka duž tog niza duži sadrži sledeću duž;

(b) ne postoji duž koja pripada svim dužima tog niza;

tada postoji tačka X koja pripada svim dužima tog niza duži.

2 Paralelnost u Euklidovom prostoru

Pojam paralelnosti pojavio se znatno kasnije u istorijskom razvoju geometrije, a do tada su, još od Aristotela, paralelne prave opisane kao prave koje se nalaze u istoj ravni, ali nemaju nikakvih zajedničkih tačaka. Naravno, bilo je još različitih interpretacija svojstva dveju pravih koje se nalaze u istoj ravni, a nemaju zajedničkih tačaka. Tako na primer, Posidonije, geometričar iz drugog veka pre nove ere kaže da su paralelne prave "prave jedne ravni koje ne konvergiraju ni divergiraju, već imaju sve upravne iz bilo koje tačke jedne od njih, na drugoj".

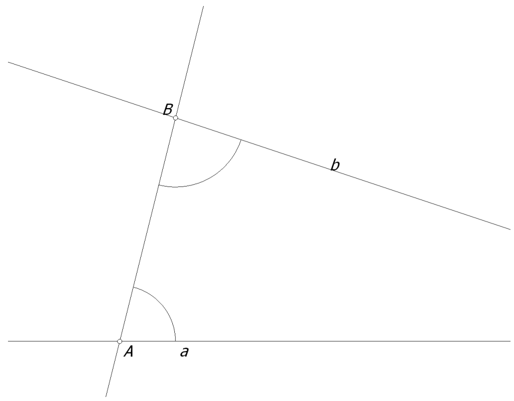
Dugo se, dakle, razumevanje paralelnih pravih svodilo na jednaku udaljenost svih tačaka jedne prave od druge. Ptolomej je paralelne prave opisivao kao prave koje sa pravom koja ih seče, sa iste strane zaklapaju sa njom iste uglove, a Prokle, da prava koja seče jednu pravu, mora seći i njoj paralelnu.

Lobačevski, a paralelno u odnosu na njega i Janoš Boljaj, uvode paralelnost na način koji će ih dovesti do zasnivanja sasvim nove, neeuklidske geometrije.

2.1 Euklidov V postulat

Aksiome su se smatrale istinitim, jer su neposredno jasne. Uz to se pod dokazom smatralo takvo razmišljanje koje treba da pokaže očiglednost nekog tvrđenja. Očiglednost je nešto čisto subjektivno, i kao svaki osećaj, može biti varljiv. Danas se očiglednost ne smatra dovoljnom u otkrivanju naučnih istina. Međutim, istorijska je istina da je spomenuto shvatanje o aksiomama vladalo među geometričarima. Zato je posebnu pažnju izazvala jedna od osnovnih Euklidovih tvrdnji koja je u nekim rukopisima Elemenata uzeta kao 11. aksioma, a u drugima kao V postulat. Euklid je tu aksiomu formulisao na sledeći način:

Peti Euklidov postulat: *Ako dve prave a i b u preseku sa trećom pravom c grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se prave a i b seku i to sa one strane sečice c sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.*



Slika 2.(Euklidov V postulat)

Ova aksioma nije izgledala geometričarima neposredno jasna, pa je još od početka nastalo mišljenje da to ne može biti aksioma, nego teorema. Zaista, ukoliko V postulat uporedimo sa ostalim aksiomama i postulatima euklidske geometrije, zapaža se da je od njih znatno komplikovaniji. Zbog toga se brzo ustalilo mišljenje koje se zadržalo više od dve hiljade godina, da je tu tvrdnju Euklid uvrstio među aksiome ne zato što je osnovnog karaktera, pa je kao takvu ne možemo dokazati, nego zato što je Euklid nije mogao dokazati pomoću ostalih aksioma svoje geometrije.

Geometričare je stalno podsticalo da traže dokaz za V postulat. Ideja koja je pri tom vodila geometričare ima ovaj smisao: Ako se uspe dokazati V postulat na osnovu ostalih Euklidovih aksioma i postulata, onda se on ne može smatrati aksiomom, jer se aksiome ne mogu dokazati, a tada bi V postulat trebalo izbrisati iz spiska aksioma i uvrstiti među teoreme.

Tokom više od dve hiljade godina pokušavalo se pronaći dokaz Euklidovog V postulata. U tome su učestvovali mnogi matematičari svih zemalja u kojima su bili poznati Euklidovi "Elementi". Za to vreme pojavili su se mnogi " dokazi"V postulata. Bilo je i vrlo oštroumnih pokušaja. Međutim, brižljivo izučavanje svih tih " dokaza"uvek je pokazalo da je u toku dokazivanja načinjena neka logička greška. Obično se u -dokaz- ušunjala, a da to autor " dokaza"nije primetio, neka tvrdnja ekvivalentna V postulatu, tj. takvo tvrđenje koje tvrdi isto što i taj postulat samo na drugačiji način. Pravi dokaz Euklidovog postulata trebalo bi da se oslanja samo na ostale aksiome Euklidove geometrije. Ako takav dokaz ne postoji, onda je to zaista aksioma, a ne teorema, jer je svaka teorema logička posledica aksioma, te se može dokazati.

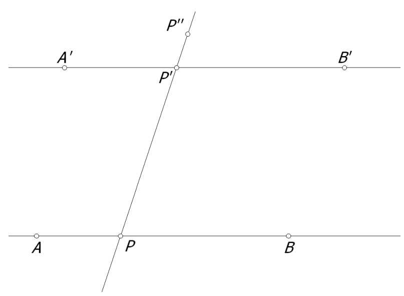
2.2 Plejferova aksioma paralelnosti

Definicija 1 *Dve prave su paralelne ukoliko pripadaju istoj ravni i pri tom nemaju zajedničkih tačaka.*

Egzistenciju paralelnih pravih je lako dokazati i to koristeći samo prve tri grupe aksioma. Taj zaključak možemo iskazati u obliku sledeće teoreme.

Teorema 1 *Kroz svaku tačku, koja ne pripada datoj pravoj, prolazi prava koja joj je paralelna.*

Dokaz:



Slika 3.

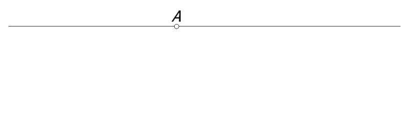
Neka je data prava AB i tačka P' van nje. Ako konstruišemo normalu p iz tačke P' na pravu AB, a zatim normalu $A'B'$ u odnosu na pravu p, kroz tačku P'. Tada će zbir uglova $\angle B'P'P$ i $\angle P'PB$ biti $2R$, pa prave AB i $A'B'$ neće imati zajedničku tačku, jer bi na taj način bio formiran trougao čiji bi zbir unutrašnjih uglova bio veći od $2R$, a to nije moguće.

Prethodnu teoremu možemo formulisati i na sledeći način:

Teorema 2 *Ako dve prave pri preseku sa trećom obrazuju podudarne naizmenične ili podudarne saglasne uglove, ili je pak zbir dva suprotna ugla jednak zbiru dva prava ugla, te dve prave su paralelne.*

Prve četiri grupe aksioma pomoću kojih se izgrađuje tzv. apsolutna geometrija nisu dovoljne da se u potpunosti izgradi geometrija razmatranog prostora. Za izgradnju te teorije neophodno je uvesti još jednu grupu aksioma; to je po redu peta grupa aksioma geometrije. Tu grupu čini samo jedna aksioma koju je 1797. godine umesto Euklidovog petog postulata uveo engleski matematičar Džon Plejfer. Ona se odnosi na paralelne prave te je nazivamo Plejferovom aksiomom paralelnosti. Plejferova aksioma paralelnosti se po formulaciji razlikuje od Euklidovog petog postulata i predstavlja njegov ekvivalent. Kako ovaj iskaz poseduje jednostavniju formulaciju, Plejfer uzima ovaj stav za aksiomu, a peti postulat za teoremu.

Plejferova aksioma paralelnosti: *Ako je p proizvoljna prava i A tačka van nje tada u ravni određenoj pravom p i tačkom A postoji jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i sa pravom p nema zajedničkih tačaka. Za tačku A i pravu p reći ćemo da imaju Plejferovo svojstvo.*

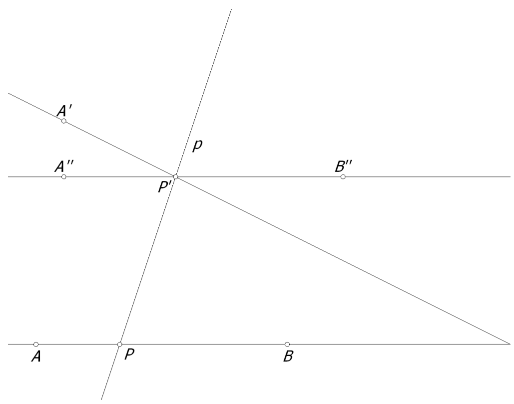


Slika 4.

Geometrija koja je zasnovana na aksiomama apsolutne geometrije i Plejferovoj aksiomi paralelnosti naziva se euklidskom ili paraboličkom geometrijom. Prostor koji te aksiome zadovoljava, naziva se euklidskim prostorom, a svaka njegova ravan euklidskom ravni. Kao što je već rečeno, Plejfer peti Euklidov postulat uzima za teoremu, koja se dobija kao posledica Plejferove aksiome paralelnosti, te ćemo sada navesti i taj dokaz.

Teorema 3 *(Peti Euklidov postulat): Ako dve prave u preseku sa trećom pravom grade suprotne uglove čiji je zbir različit od zbira dva prava ugla, onda se te dve prave seku i to sa one strane sečice sa koje je taj zbir manji od zbira dva prava ugla.*

Dokaz: Zaista, neka su AB i $A'B'$ dve prave koje prava p seče u tačkama P i P' respektivno (Slika 3.). Kroz tačku P' prolazi jedna prava, $A''B''$ recimo, takva da je zbir suprotnih uglova, koje ona i prava AB obrazuju sa pravom p, jednak zbiru dva prava ugla. S obzirom na napred izloženo, tj. na osnovu Teoreme 2, prava $A''B''$ je paralelna pravoj AB, a s obzirom na aksiomu paralelnosti, to je i jedina prava koja prolazi kroz tačku P', a paralelna je pravoj AB. Dakle, prava $A'B'$ mora seći pravu AB. Da se taj presek mora nalaziti sa one strane prave p, sa koje je zbir suprotnih uglova manji od zbira dva prava ugla, sledi iz teoreme, prema kojoj zbir dva unutrašnja ugla trougla ne može biti veći od zbira dva prava ugla.



Slika 5.

2.3 Tvrđenja ekvivaletna V Euklidovom postulatu

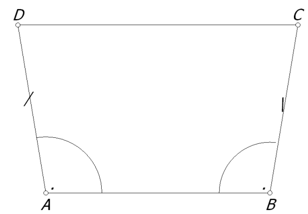
Pri mnogim pokušajima dokazivanja V Euklidovog postulata, dešavao se uglavnom, na suptilnom nivou, isti tip greške, tj. u dokazu je korišćen neki od ekvivalenata, što je dovodilo do apsurdne pozicije korišćenja samog tvrđenja u cilju njegovog dokazivanja. Navedimo neke od njih:

Teorema 4 *(I ekvivalent): Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla jednak je zbiru dva prava ugla.*

Teorema 5 *(II ekvivalent): Zbir σ unutrašnjih uglova prostog ravnog n-tougla jednak je $\sigma = 2(n-2)R$, pri čemu je R prav ugao.*

Teorema 6 *(III ekvivalent): Zbir spoljašnjih uglova kod svih temena konveksnog prostog ravnog n-tougla jednak je $4R$.*

Definicija 2 *Četvorougao $ABCD$ je Sakerijev ako važi $\angle A = \angle B = \angle R$ i $AD = BC$. Stranica AB je osnovica, CD protivosnovica, a AD i BC su visine Sakerijevog četvorougla.*

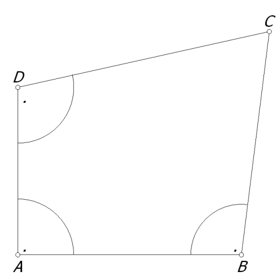


Slika 6.

Definicija 3 *Srednja linija Sakerijevog četvorougla je duž koja spaja središta osnovice i protivosnovice.*

Teorema 7 *(IV ekvivalent): Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četvorougla su pravi.*

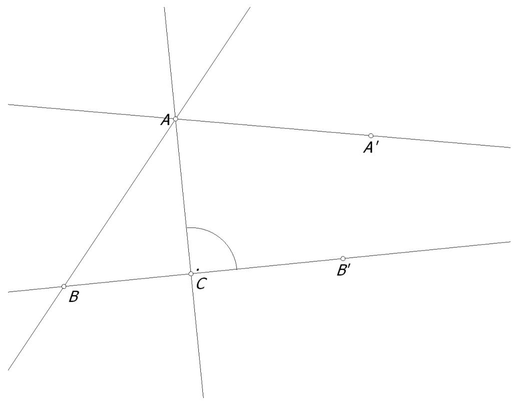
Definicija 4 *Četvorougao sa tri prava ugla u apsolutnoj geometriji naziva se Lambertov (Slika7).*



Slika 7.

Teorema 8 *(V ekvivalent): Svaka prava u ravni oštrog ugla koja je upravna na jedan krak tog ugla seče drugi krak.*

Teorema 9 *(VI ekvivalent): Peti Euklidov postulat i Plejferova aksioma paralelnosti su ekvivalentna tvrđenja.*



Slika 8.

Teorema 10 *(VII ekvivalent): Dve paralelne prave presečene trećom grade jednake odgovarajuće saglasne uglove.*

Teorema 11 *(VIII ekvivalent): Kroz ma koje tri nekolinearne tačke prolazi krug.*

Teorema 12 *(IX ekvivalent): U ravni postoje tri kolinearne tačke podjednako udaljene od date prave.*

Teorema 13 *(X ekvivalent): Postoje dva trougla kojima su odgovarajući uglovi jednaki, a odgovarajuće stranice nejednake.*

Teorema 14 *(XI ekvivalent): Za svaku unutrašnju tačku oštrog ugla postoji prava koja je sadrži i koja seče oba kraka tog ugla.*

3 Paralelnost u Geometriji Lobačevskog

3.1 Nastanak neeuklidske misli

Još od vremena Euklida i Arhimeda, suštinskih promena u geometriji nije bilo sve do prve polovine devetnaestog veka. Većina pokušaja, koji su imali za cilj da reše pitanje Petog Euklodovog postulata, ostala je bezuspešna. Svi ti pokušaji su išli u smeru dokazivanja postulata o paralelama, bez da se iko zapitao o njegovoj valjanosti. Karl Fridrih Gaus je bio prvi koji se zapitao o valjanosti postulata o paralelama.

Gaus je prvi došao, nakon dugogodišnjeg razmišljanja, do uverenja da se može izgraditi geometrija, u sebi neprotivurečna, u kojoj bi se Euklidova aksioma o paralelama zamenila hipotezom o oštrom uglu. Mnoge od svojih dela Gaus nije želeo da objavi, strahujući od reakcije koju bi izazvali novi pogledi na Peti Euklidov postulat.

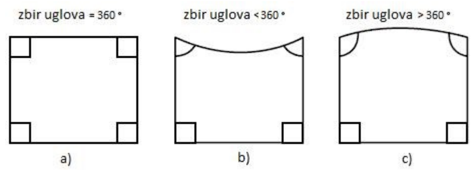
Početkom devetnaestog veka Nikolaj Lobačevski i Janoš Boljaj nezavisno jedan od drugog dolaze na ideju da pokušaju dokazivanje Petog Euklidovog postulata tako što će poći od aksiome koja ga negira. Međutim, umesto da naiđu na kontradiktornost, dolaze do zasnivanja teorije koja je isto toliko logički valjana kao i euklidska geometrija. Oni su, pokušavajući da pristupe dokazivanju teoreme o paralelama na drugi način, sasvim slučajno zasnovali jednu novu geometriju. Tako se formira jedna teorija koja je valjana i ne poziva se na očiglednost. Iz geometrijskog sveta u kojem se u potpunosti moglo osloniti na intuiciju zasnovanu na predstavama koja ostvaruju čula, dopire se do sveta koji postoji izvan okvira ljudskog iskustva.

Godine 1823. Janoš Boljaj u pismima svom ocu piše kako je otkrio novu geometriju. Iste godine, u mestu Kazanj u Rusiji, Nikolaj Ivanovič Lobačevski istražuje posledice narušavanja postulata o paralelama u jednom još neobjavljenom udžbeniku geomtrije. Otac Janoša Boljaja, Farkaš Boljaj i Martin Bartless, koji je tada bio mentor Lobačevskom i profesor na univerzitetu u Kazanju, su vodili rasprave o zamisli neeuklidske geometrije sa matematičarem Gausom.

Rezultate svojih istraživanja Lobačevski je saopštio u odeljenju fizičko - matematičkih nauka Kazanjskog univerziteta dana 23. februara 1826. godine, a rad Sažeto izlaganje osnova geometrije sa strogim dokazom teorema o paralelama, koji obeležava početak neeuklidske geometrije, publikovao je u "Vesniku"Kazanjskog univerziteta 1829. godine. Mađarski matematičar Janoš Boljaj je rezultate svojih istraživanja objavio 1832. godine u vidu dodatka knjige " Geometrija " svojeg oca Farkaša Boljaja. Stoga se taj rad u literaturi i sreće pod naslovom "Apendiks", što na latinskom jeziku znači " dodatak " . Kako je Boljajev otac bio Gausov prijatelj, rad je poslao Gausu s molbom da da mišljenje o vrednosti rada njegovog sina. U odgovoru Gaus mu piše da se rezultati do kojih je došao mladi Boljaj podudaraju s njegovim. U tom pismu Gaus napominje da nema nameru da publikuje išta od tih svojih radova, jer smatra da većina matematičara ne bi shvatila o čemu se u njima radi. Janoš se potpuno razočarao odgovorom Gausa. Nije mogao da veruje da je Gaus i pre njega došao do otkrića neeuklidske geometrije. Čak je pomišljao da je njegov otac ranije otkrio ideje iznete u "Apendiksu". Iako se kasnije uverio da je ta sumnja neopravdana, nikada nije mogao da oprosti Gausu što nije javno pohvalio vrednost njegovog rada.

Nije iznenađujuće to što zamisli Lobačevskog i Boljaja nisu za njihova života dobile priznanje koje im pripada. Samo je Gaus razumeo dubinu i dalekosežnost njihovih ideja, jer su se one podudarale sa njegovim zamislima. Zanimljivo je to što je Gaus znao za radove obojice matematičara, ali nije nijednog od njih upoznao sa rezultatima drugog. Do Boljaja je dospela jedna rasprava Geometrijsko istraživanje teorije paralela na nemačkom jeziku Nikolaja Lobačevskog, dok Lobačevski nikada nije saznao za rad Janoša Boljaja. Boljaj se začudio kako se mnoge postavke u knjizi Lobačevskog podudaraju sa njegovim rezultatima u "Apendiksu", te je počeo sumnjati da je njegov rad nekako došao u ruke Lobačevskog. Sumnjao je čak da se pod imenom Lobačevskog ne krije sam Gaus. Iako se Boljaju ne mogu osporiti zasluge za otkriće neeuklidske geometrije, ipak ga ne možemo po značenju u tom poslu uporediti sa Lobačevskim. Boljaj nije u svom rešenju postigao onu celovitost, potpunost i zaokruženost koju je dao Lobačevski. Stoga se zasluge za otkriće neeuklidske geometrije danas pripisuju najviše Lobačevskom. Zbog toga novootkrivena geometrija dobija naziv po njegovom imenu - neeuklidska geometrija Lobačevskog ili hiperbolička geometrija.

Dve decenije nakon otkrića hiperboličke geometrije otkrivena je još jedna neeuklidska geometrija, tj. eliptička ili Rimanova geometrija, do koje je došao matematičar Riman 1854. godine u svom radu O hipotezama koje leže u osnovi geometrije, razmatrajući tzv. višedimenzione površi. Eliptički prostor jeste prostor koji se dobija ako se pretpostavi jedno drugo narušavanje postulata o paralelama: da uopšte nema paralelnih linija, tj. da se sve linije u ravni moraju seći. Ukoliko se prisetimo izučavanja Sakerija i Lamberta vezana za dokaz V Euklidovog postulata, možemo reći da eliptička geometrija nastaje ukoliko se umesto V Euklidovog postulata pretpostavi da važi, tzv. hipoteza tupog ugla (Slika 9.).

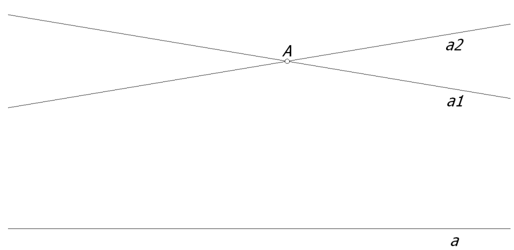


Slika 9.

3.2 Aksioma Lobačevskog i njene posledice

U okviru apsolutne geometrije mogli smo da dokažemo tvrđenje prema kojem u jednoj ravni kroz tačku A van prave a postoji prava koja sa pravom a nema zajedničkih tačaka. Međutim, u apsolutnoj geometriji nije moguće ustanoviti koliki je broj tih pravih. Uvođenjem aksiome prema kojoj kroz tačku A postoji samo jedna prava koja sa pravom a nema zajedničkih tačaka, Plejfer je omogućio izgradnju euklidske geometrije. Polazeći od aksioma apsolutne geometrije i pretpostavke da postoje kroz tačku A dve prave koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka, Lobačevski je došao do potpuno nove tzv. hiperboličke geometrije.

Akioma Lobačevskog: *Postoje prava a i tačka A van nje takve da u njima određenoj ravni kroz tačku A prolaze dve prave a_1 i a_2 koje sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka.*



Slika 10.

Za tačku A i pravu a reći ćemo da imaju svojstvo Lobačevskog. Teoriju zasnovanu na sistemu aksioma apsolutne geometrije i aksiomi Lobačevskog nazivamo hiperboličkom geometrijom ili geometrijom Lobačevskog. Ta geometrija se ponekad naziva i geometrijom Boljaj-Lobačevskog ili geometrijom

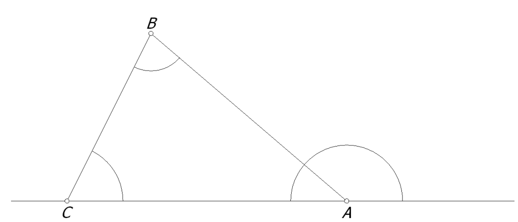
Gaus-Boljaj-Lobačevskog. Ravan i prostor u kojima važe aksiome te geometrije nazivamo respektivno hiperboličkom ravni ili ravni Lobačevskog i hiperboličkim prostorom ili prostorom Lobačevskog, a označavamo ih redom L_2 i L_3. Aksioma Lobačevskog omogućava da neposredno ustanovimo niz teorema koje se odnose na zbirove unutrašnjih i spoljašnjih uglova prostih ravnih poligona. Sva tvrđenja koja važe u apsolutnoj geometriji prenose se, a dobija se i niz novih tvrđenja koja su posledica aksiome Lobačevskog.

Teorema 15 *Ako je $\sigma(\delta)$ zbir unutrašnjih uglova trougla u ravni L_2 i ako je R prav ugao tada je $\sigma(\delta) < 2R$.*

Dokaz. Na osnovu prve Ležandrove teoreme[1] sledi da je $\sigma(\delta) \leq 2R$. Ako bi bilo $\sigma(\delta) = 2R$ tada bi prema trećoj Ležandrovoj teoremi[2] za svaku pravu p i svaku tačku A van nje u njima određenoj ravni postojala jedinstvena prava a koja sadrži tačku A i sa pravom p nema zajedničkih tačaka. Ovo je u suprotnosti sa aksiomom Lobačevskog, te mora da važi da je $\sigma(\delta) < 2R$.

Teorema 16 *Svaki spoljašnji ugao trougla u ravni L_2 veći je od zbira dva unutrašnja nesusedna ugla tog trougla.*

Dokaz.



Slika 11.

Neka su α, β i γ uglovi trougla $\triangle ABC$ redom kod temena A, B i C (Slika 11). Ako označimo sa α_1 spoljašnji ugao kod temena A i ako je R

[1]Prva Lažandrova teorema: U apsolutnoj geometriji zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog trougla nije veći od zbira dva prava ugla.

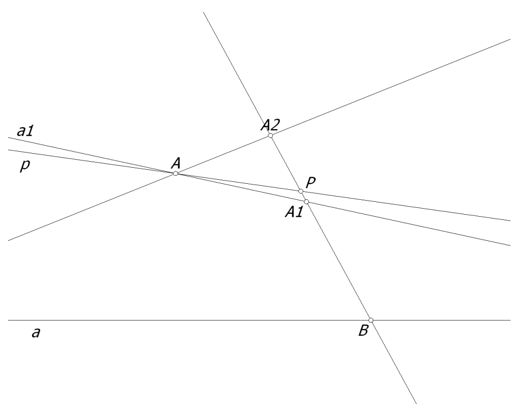
[2]Treća Lažandrova teorema: Postoji trougao čiji je zbir unutrašnjih uglova jednak zbiru dva prava ugla ako i samo ako je u ravni π određenom pravom p i tačkom A van nje postoji samo jedna prava a koja sadrži tačku A, a sa pravom p nema zajedničkih tačaka.

prav ugao, tada je $\alpha_1 = 2R - \alpha > \alpha + \beta + \gamma - \alpha = \beta + \gamma$, a ovo je trebalo pokazati.

Teorema 17 *Ako je $\sigma(A_1A_2...A_n)$ zbir svih unutrašnjih uglova prostog n-tougla $A_1...A_n$ u ravni L_2 i R prav ugao tada je $\sigma(A_1A_2...A_n) < (n-2)2R$.*

Dokaz: Prema poznatom stavu iz apsolutne geometrije svaka n-tougaona površ $A_1...A_n$ može se svojim unutrašnjim dijagonalama razložiti na $n-2$ trougaonih površi $A_1...A_n$. Pri tome je zbir svih unutrašnjih uglova površi $A_1...A_n$, dakle i n-tougla koji predstavlja rub te površi, jednak zbiru unutrašnjih uglova trougaonih površi $A_1...A_n$. No, zbir unutrašnjih uglova svake od trougaonih površi $A_1...A_n$ manji je od zbira dva prava ugla, te je i zbir svih unutrašnjih uglova n-tougla u ravni Lobačevskog manji od zbira $2n-4$ pravih uglova, tj. $\sigma(A_1A_2...A_n) < (n-2)2R$.

Teorema 18 *Ako su u hiperboličkoj ravni dati prava a i tačka A van nje tada u njima određenoj ravni postoji neograničeno mnogo pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a.*



Slika 12.

Dokaz: Na osnovu aksiome Lobačevskog postoje dve prave a_1 i a_2 takve da sadrže tačku A i sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Označimo sa A_2 tačku prave a_2 (Slika 12.) koja se nalazi sa one strane prave a_1 sa koje nije prava a, a sa B proizvoljnu tačku prave a. Tada se tačke A_2 i B nalaze sa raznih strana prave a_1, pa duž A_2B seče pravu a_1 u tački A_1. Tada je tačka A_1 između tačaka A_2B, pa su prema tome A_1 i A_2 različite tačke. Neka je P proizvoljna unutrašnja tačka duži A_1A_2, a p prava određena tačkama A i P. Tada prava p nema zajedničkih tačaka sa pravom a. Zaista, ukoliko bi se ove dve prave sekle u nekoj tački S, tada bi važio jedan od rasporeda $B(A, P, S)$ ili $B(S, A, P)$. Ako bi bilo $B(A, P, S)$, onda bi prava a_1 pripadala ravni trougla $\triangle PBS$. Prava a_1 tada ne bi sadržala ni jedno teme trougla $\triangle PBS$, sekla bi stranicu PB u tački A_1 i produžetak stranice PS u tački A. Na osnovu Pašovog stava sledi da prava a_1 mora seći stranicu BS tog trougla, odnosno pravu a. Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom, odakle sledi da prava p nema zajedničkih tačaka sa pravom a. Analogno se pokazuje da isto važi i u slučaju kada je $B(S, A, P)$. S obzirom na činjenicu da na duži A_1A_2 postoji beskonačno mnogo unutrašnjih tačaka to postoji i beskonačno mnogo pravih u ravni određenoj tačkom A i pravom a, koje prolaze kroz tačku A i sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka. Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da se skup svih pravih koje sadrže tačku A i koje se nalaze u ravni L_2 može razložiti na dva podskupa pravih M i N, pri čemu je M skup svih pravih koje sadrže tačku A i seku pravu a, a N skup svih pravih koje sadrže tačku A i ne seku pravu a. Ovakvo razlaganje zadovoljava uslove Dedekindovog preseka, odnosno Dedekindove [3] teoreme neprekidnosti, te postoje dve i samo dve prave koje razdvajaju skupove M i N. Indirektnim putem se može ustanoviti da granične prave ova dva skupa pravih nemaju sa pravom a zajedničkih tačaka, tj. da pripadaju skupu N.

Definicija 5 *Neka je u ravni Lobačevskog data prava a i tačka A izvan nje. Granične prave a_1 i a_2 koje razdvajaju pramen pravih ravni L_2 koje sadrže tačku A na podskupove pravih koje ne seku pravu a i pravih koje seku pravu a, nazivamo pravama koje su paralelne pravoj a u tački A.*

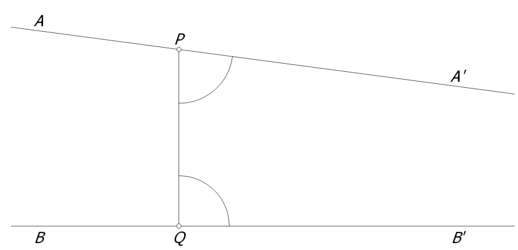
Smatraćemo da je jedna od pravih a_1 i a_2 parlalelna pravoj a u jednom smeru, a druga paralelna pravoj a u drugom smeru. Sve ostale prave u toj ravni koje sadrže tačku A i sa pravom a nemaju zajedničkih tačaka nazivamo hiperparalelnim pravama sa pravom a. Za paralelnost koristimo uobičajenu oznaku $p \parallel a$, a za hiperparalelnost koristimo oznaku $p \parallel_h a$. U hiperboličkoj geometriji paralelne prave karakterišu neke osobine koje ih bitno razlikuju od euklidske geometrije.

3.3 Ugao paralelnosti

Bitna karakteristika paralelnih pravih u geometriji Lobačevskog je ugao paralelnosti. Navodimo sada definiciju ugla paralelnosti dveju pravih:

[3]Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ podskupovi prave p koji zadovoljavaju uslove $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = p$, $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} =$, ne postoje tačke $M \in \mathcal{M}$ i $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ takve da $\mathcal{B}(N_1, M, N_2)$ i obrnuto. Tada postoji jedinstvena tačka $P \in p$ za koju važi $\mathcal{B}(N, P, M)$ za sve $N \in \mathcal{N}$ P, $M \in \mathcal{M}$ P.

Definicija 6 *Neka je tačka P izvan prave BB' i Q podnožje normale iz tačke P na pravu BB'. Ako je AA' prava koja sadrži taǔku P i paralelna je sa BB', tada oštar ugao $\omega = \angle QPA'$ nazivamo uglom paralelnosti prave AA' u tački P sa pravom BB', tj. uglom paralelnosti koji odgovara duži PQ.*

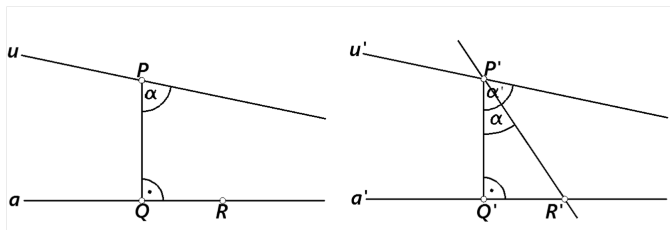


Slika 13.

Pokazaćemo da je ugao paralelnosti potpuno određen rastojanjem tačke, tj. da važi sledeća teorema:

Teorema 19 *Jednakim dužima odgovaraju jednaki uglovi paralelnosti.*

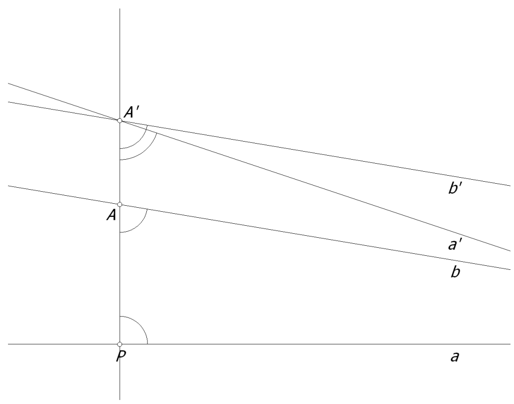
Dokaz. Neka su P i P' dve tačke koje se nalaze na jednakim rastojanjima redom od pravih a i a' (Slika 14.). Kroz tačku P postavimo pravu u paralelnu pravoj a, a kroz tačku P' pravu u' paralelnu pravoj a'. Sa Q i Q' označimo redom podnožja normala iz tačaka P i P' na prave a i a', a sa α i α' uglove paralelnosti u tačkama P i P' redom u odnosu na prave a i a'. Kako se tačke P i P' nalaze na jednakim rastojanjima redom od pravih a i a', to je $PQ = P'Q'$. Pokazaćemo da je $\alpha = \alpha'$. Pretpostavimo suprotno, da je $\alpha \neq \alpha'$. Neka je npr. $\alpha < \alpha'$. Kroz tačku P' postavimo pravu v' koja sa duži $P'Q'$ u smeru paralelnosti pravih a' i u' zaklapa ugao jednak uglu α. Iz paralelnosti pravih u' i a' sledi da prava v' mora seći pravu a' u smeru paralelnosti pravih u' i a' od tačke Q'. Označimo sa R' njihovu presečnu tačku. Neka je R tačka prave a u smeru paralelnosti pravih a i u takva da je $QR \cong Q'R'$. Trouglovi $\triangle PQR$ i $\triangle P'Q'R'$ su podudarni na osnovu prvog stava podudarnosti trouglova, jer je $PQ \cong P'Q'$, $\angle Q = \angle Q'$ i $QR \cong Q'R'$, odakle sledi da je $\angle QPR = \alpha$. To znači da se prave u i PR poklapaju, tj. da se paralelne prave u i a seku u tački R, a to je nemoguće. Dakle, ne može biti $\alpha < \alpha'$. Analogno se pokazuje da ne može biti $\alpha > \alpha'$. To znači da mora biti $\alpha = \alpha'$, čime je dokaz završen.



Slika 14.

Teorema 20 *Većoj duži odgovara manji ugao paralelnosti.*

Neka je A proizvoljna tačka van prave a i neka je P podnožje normale iz tačke A na pravu a (Slika 14.). Označimo sa b pravu koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj a. Sa α označimo ugao paralelnosti koji odgovara duži AP. Neka je A' tačka prave AP takva da su A i A' sa iste strane u odnosu na tačku P.



Slika 15.

Pretpostavimo da je $PA' > PA$. Konstruišimo pravu b' koja prolazi kroz tačku A' i u smeru paralelnosti pravih a i b gradi ugao α sa $A'P$. Dve prave b i b' grade jednake suprotne uglove u preseku sa pravom $A'P$, pa su prave b i b' hiperparalelne. To znači da prava a' koja sadrži tačku A' i paraplelna je pravoj b gradi u smeru paralelnosti ugao α' za koji je $\alpha' < \alpha$. Iz $a' \parallel b$ i $b \parallel a$ sledi da je $a' \parallel a$. Dakle, ugao paralelnosti α koji odgovara duži $A'P$ je manji od ugla paralelnosti α koji odgovara duži AP. Iz napred navedenog zaključujemo da veličina ugla paralelnosti neke prave AA' u tački P sa pravom BB' u proizvoljnom sistemu merenja duži predstavlja funkciju odstojanja x tačke P od prave BB'. Ovu funkciju obeležavamo sa π i nazivamo funkcijom Lobačevskog. Sledeća teorema daje osnovne osobine funkcije Lobačevskog:

Teorema 21 *Funkcija Lobačevskog $\omega_x = \Pi(x)$ kojom se svakoj duži x dodeljuje ugao paralelnosti ω_x, je definisana za svako x iz intervala $0 < x < \infty$, ona je neprekidna i strogo opadajuća funkcija uzimajući sve vrednosti iz intervala $0 < \omega < R$, gde je R prav ugao. Pri tome je*

$$\lim_{x\to 0} \Pi(x) = R \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0.$$

Dokaz: Prvi deo teoreme sledi neposredno, jer kroz tačku A koja se nalazi na odstojanju $AB = x$ od prave a postoje dve prave a_1 i a_2 koje su u raznim smerovima paralelne pravoj a. Pri tome su oštri uglovi koje određuju prave a_1 i a_2 s polupravom AB uglovi paralelnosti tih pravih u tački A prema pravoj a. Ti uglovi su jednaki, oni prema definiciji predstavljaju vrednost funkcije $\Pi(x)$ za odsečak x. Stoga je funkcija $\Pi(x)$ definisana za svaki odsečak iz intervala $0 < x < \infty$.

Drugi deo stava sledi iz ranije dokazanog stava prema kojem za svaki oštar ugao $\omega \equiv \measuredangle AOB$ postoji prava n koja je u nekoj tački A upravna na kraku OA i paralelna s krakom OB tog ugla. U tom slučaju imamo da je $\omega = \Pi(OA)$, te za svaki oštar ugao ω postoji odsečak x takav da je $\omega = \Pi(x)$.

Treći deo stava sledi iz ranije dokazane teoreme, jer pri $x_1 < x_2$ imamo da je $\omega_1 > \omega_2$, tj. da je $\Pi(x_1) > \Pi(x_2)$. Iz dokazanih osobina neposredno sledi da je

$$\lim_{x\to 0} \Pi(x) = R \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 0.$$

Iz $\lim\limits_{x\to 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}$, sledi da se u malim delovima prostora geometrija Lobačevskog malo razlikuje od Euklidske geometrije i da se ta razlika smanjuje sa smanjivanjem posmatranog dela prostora. Veza između uglova i linearnih veličina data funkcijom $\alpha = \Pi(x)$ uslovljava celokupni karakter geometrije Lobačevskog. Na taj način u geometriji Lobačevskog nema sličnih figura. To nije teško zaključiti, jer su uglovi i stranice trouglova povezani međusobno jednačinama, pa zadavanjem uglova trouglova potpuno su određene i njegove stranice, pa dva trougla sa podudarnim uglovima imaju podudarne i odgovarajuće stranice, tj. podudarni su među sobom.

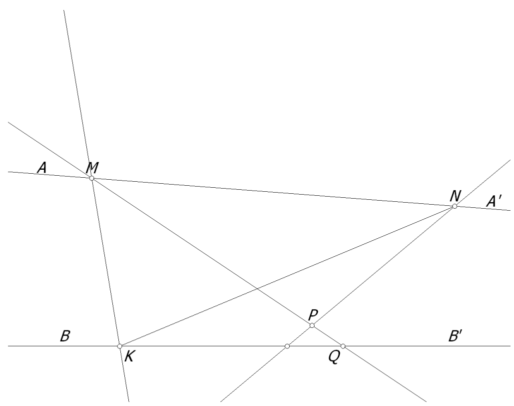
3.4 Paralelne prave u ravni L^2

Uveli smo relaciju paralenosti dve prave u ravni L^2 koja je bila strogo vezana za paralelnost jedne prave prema drugoj pravoj u odnosu na zadatu tačku. Pokazaćemo da paralelnost ne zavisi od tačke u odnosu na koju smo tu paralelnost definisali, tj. pokazaćemo da je svojstvo paralelnosti transmisibilno, odnosno prenosno.

Teorema 22 *Relacija paralelnosti pravih u ravni L^2 je transmisibilna.*

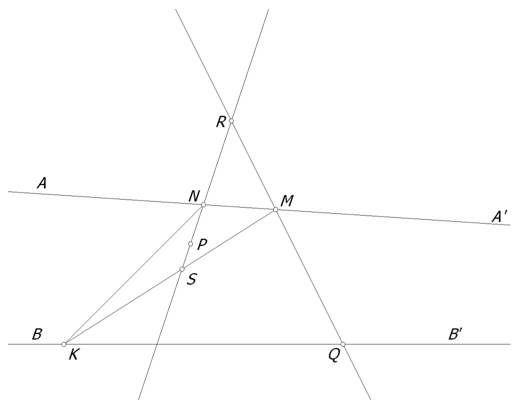
Dokaz. Neka je prava AA' paralelna pravoj BB' u nekoj tački M. Pokazaćemo da je prava AA' paralelna pravoj BB' u proizvoljnoj tački N prave AA'. Mogu nastupiti dve mogućnosti:
(i) Tačka N se nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru paralelnosti,
(ii) Tačka N se nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru suprotnom od smera paralelnosti.

Razmotrimo ponaosob svaki od ova dva slučaja:



Slika 16.

(i) Neka je K proizvoljna tačka prave BB' (Slika 18.). Da bismo pokazali da je prava AA' paralelna pravoj BB' u tački N dovoljno je da pokažemo da je AA' granična prava u skupu pravih koje sadrže tačku N i ne seku pravu BB', odnosno dovoljno je pokazati da svaka prava koja sadrži tačku N i proizvoljnu tačku P unutar ugla $\angle KNA'$ seče pravu BB'.
Ako bi se tačka P nalazila na pravoj BB' ili sa one strane prave BB' sa koje nije tačka N, direktno bi sledilo da prava NP seče pravu BB'. Zato pretpostavimo da se tačka P nalazi sa one strane prave BB' sa koje je i tačka N. Kako je prava AA' paralelna pravoj BB' u tački M, a tačka P se nalazi unutar ugla $\angle KMA'$, to prava MP seče pravu BB' u nekoj tački Q. Prava NP u uglu $\angle KNM$ nema tačaka, te ne može seći stranicu MK trougla $\triangle MKQ$. Pored toga, i s obzirom da se nalazi u ravni trougla $\triangle MKQ$ i ne sadrži nijedno njegovo teme, prava NP seče stranicu MQ tog trougla, pa na osnovu Pašovog stava ona mora seći stranicu KQ, te seče i pravu BB'. To znači da je u ovom slučaju prava AA' paralelna pravoj BB' u tački N.



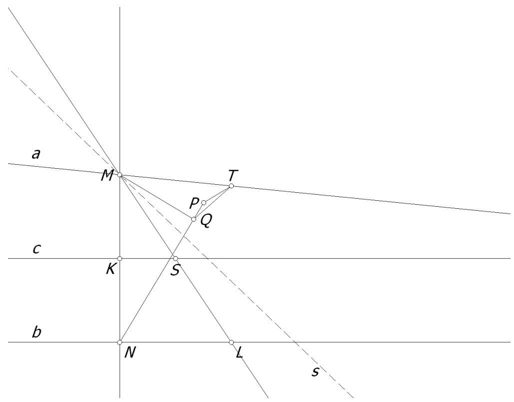
Slika 17.

(ii) Neka se sada tačka N nalazi na pravoj AA' od tačke M u smeru suprotnom od smera paralelnosti (Slika 19.). Neka je K proizvoljna tačka prave BB'. Da bismo pokazali da je $AA' \| BB'$ u tački N dovoljno je pokazati da je AA' granična prava u skupu pravih koje sadrže tačku N i ne seku pravu BB', odnosno dovoljno je pokazati da svaka prava koja sadrži tačku N i neku tačku P unutar ugla $\angle KNA'$ seče pravu BB'. Ukoliko se tačka P nalazi na pravoj BB' ili s one strane prave BB' sa koje nije tačka N, tada očigledno prava NP seče pravu BB'. Zato pretpostavimo da se tačka P nalazi sa one strane prave BB' sa koje je i tačka N. Neka je R proizvoljna tačka prave NP iza tačke N u odnosu na tačku P. Prava RM sadrži tačku R koja se nalazi u naporednom uglu ugla $\angle KMA$, te ona sadrži i tačku koja pripada drugom naporednom uglu ugla $\angle KMA$. Prema tome, kako je $AA' \| BB'$ u tački M, to prava RM seče pravu BB' u nekoj tački Q. Prava NP sadrži teme konveksnog ugla $\angle KNM$ i tačku P unutar tog ugla, te seče duž KM u nekoj tački S. Dakle, prava NP se nalazi u ravni trougla $\triangle MKQ$, ne sadrži nijedno njegovo teme, seče njegovu stranicu KM u tački S i produžetak stranice MQ u tački R, pa prema Pašovom stavu mora seći treću stranicu KQ tog trougla, tj. pravu BB'. Ovim je pokazano da je $AA' \| BB'$ u tački N.

Na osnovu ove teoreme sledi da nije potrebno naglašavati u kojoj je tački prava AA' paralelna pravoj BB'.

Teorema 23 *Relacija paralelnosti definisana na skupu pravih u ravni L^2 je relacija ekvivalencije.*

Dokaz:



Slika 18.

REFLEKSIVNOST: Ako u definisanju pravih u ravni L^2 dopustimo da tačka A pripada pravoj a, tada u tački A neće postojati hiperparalelne prave, a prave a_1 i a_2 će se poklopiti i biti suprotnosmerne. Odatle neposredno sledi da je relacija paralelnosti pravih u ravni L^2 refelksivna.

SIMETRIČNOST: Neka je $AA' \| BB'$ (Slika 18.), pokazaćemo da je i $BB' \| AA'$. Neka je M proizvoljna tačka prave AA', a N podnožje normale iz tačke M na pravu BB'. Kako je $AA' \| BB'$ to svaka prava koja sadrži tačku M i neku tačku unutar ugla $\angle NMA'$ seče pravu BB'. Da bismo dokazali da je $BB' \| AA'$ dovoljno je pokazati da svaka prava koja sadrži tačku N i neku tačku P unutar ugla $\angle MNB'$ seče pravu AA'.

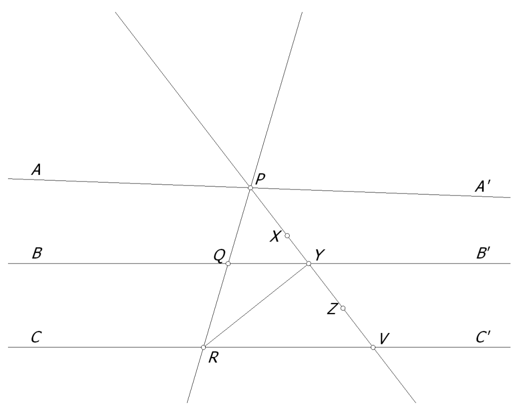
Označimo sa Q podnožje normale iz tačke M na pravu NP. Kako je ugao $\angle MNB'$ prav, a tačka P unutar tog ugla, to je ugao $\angle MNP$ oštar, pa se tačka Q nalazi na polupravoj NP. Trougao $\triangle NQM$ je pravougli sa pravim uglom kod temena Q, pa je hipotenuza MN tog trougla veća od katete MQ, tj. $MN > MQ$. To znači da između tačaka M i N postoji tačka K takva da je $MQ \cong MK$. Neka je CC' prava koja je u tački K normalna na pravu MN. Neka je ML' prava koja je simetrična pravoj MQ u odnosu na simetralu ugla $\angle NMA'$. Kako prava MQ sadrži tačku Q koja se nalazi unutar ugla $\angle NMA'$, to će i njoj simetrična prava ML' sadržati tačku unutar ugla $\angle NMA'$. S obzirom da je prava AA' paralelna pravoj BB' to prava ML' seče pravu BB' u nekoj tački L. Tačke M i L se nalaze sa raznih strana prave CC', pa duž ML mora seći pravu CC' u nekoj tački S. Na pravoj AA' označimo sa T tačku za koju važi $B(M,\ T,\ A')$ i $MT \cong MS$. Trouglovi $\triangle MKS$ i $\triangle MQT$ su podudarni na osnovu prvog stava podudarnosti trouglova, jer važi $MK \cong MQ, MS \cong MT$ i $\angle KMS \cong \angle QMT$. Iz njihove podudarnosti sledi podudarnost preostalih odgovarajućih elemenata, tj. $\angle SKM \cong \angle TQM$, a kako je $\angle SKM = R$, to sledi da je i $\angle TQM = R$, tj $TQMQ$. Kako u jednoj tački neke prave postoji samo jedna prava koja je u toj tački upravna na datu pravu, to se prave NP i QT moraju poklapati. To znači da prava $NP \equiv NQ$ seče pravu AA' u tački T. Ovim smo pokazali da je $BB' \| AA'$ u nekoj tački N, pa je BB' paralelna pravoj AA' i u svakoj drugoj tački. Dakle, važi simetričnost relacije paralelnosti pravih u L^2.

TRANZITIVNOST: Pretpostavimo daje $AA' \| BB'$ i $BB' \| CC'$ i pokazaćemo da je $AA' \| CC'$. Ovde se govori o paralelnosti u istom smeru, jer za različite smerove tranzitivnost ne važi.

Razmatraćemo dva slučaja:

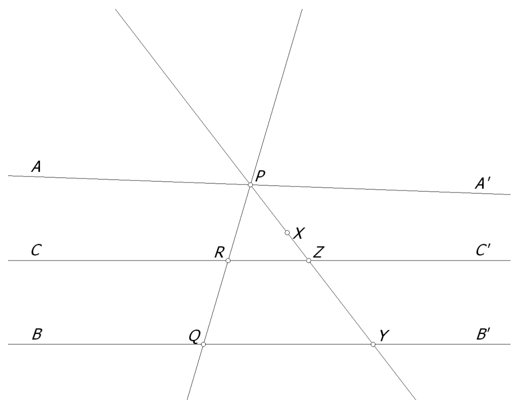
i) Prava BB' se nalazi izmedu pravih AA' i CC',

ii) Jedna od pravih AA' i CC' se nalazi izmedu druge dve.



Slika 19.

i) Neka se prava BB' nalazi između pravih AA' i CC' (Slika 19.). Sa P i R označimo proizvoljne tačke redom pravih AA' i CC'. Kako se prava BB' nalazi izmedu pravih AA' i CC' to duž PR seče pravu CC' u nekoj tački Q. Da bismo pokazali da je $AA' \| CC'$ dovoljno je dokazati da svaka prava koja sadrži tačku P i neku tačku X unutar ugla $\angle RPA'$ seče pravu CC'. Tačka X se nalazi u unutrašnjosti ugla $\angle RPA'$, pa se ona nalazi i u unutrašnjosti ugla $\angle QPA'$, a kako je $AA' \| BB'$ to prava PX seče pravu BB' u nekoj tački Y. Neka je Z tačka prave PX iza tačke Y u odnosu na tačku P. Prema tome, tačka Z se nalazi unutar ugla $\angle RYB'$. Kako je $BB' \| CC'$ to prava YZ seče pravu CC' u tački V, te i prava PX seče pravu CC'. Time smo pokazali da u ovom slučaju važi tranzitivnost relacije paralelnosti.

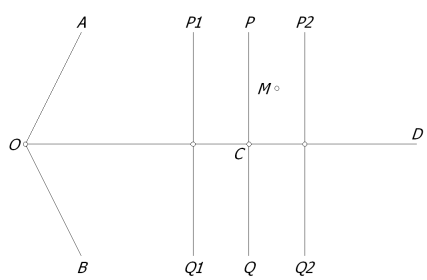


Slika 20.

ii) Neka je sada jedna od pravih AA' i CC' između druge dve prave (Slika 20.). Neka je to prava CC'. Označimo sa P i Q proizvoljne tačke redom pravih AA' i BB'. Prema tome tačke P i Q su sa raznih strana prave CC', pa duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački R. Da bismo pokazali da je $AA' \| CC'$ dovoljno je dokazati da svaka prava koja sadrži tačku P i neku tačku X unutar ugla $\angle RPA'$ mora seći pravu CC'.

Tačka X se nalaze u uglu $\angle RPA'$, pa se nalazi i u uglu $\angle QPA'$. Kako je $AA' \| BB'$ sledi da PX seče BB' u tački Y. Tačke P i Y se nalaze sa raznih strana prave CC', pa duž PY seče pravu CC' u tački Z. Dakle, $AA' \| CC'$.

Teorema 24 *Unutar svakog ugla manjeg od $2R$ postoji jedna i samo jedna prava koja je paralelna sa kracima tog ugla u određenim smerovima. Ta prava naziva se granična prava.*



Slika 21.

Neka je dat ugao $\angle AOB < 2R$. Označimo sa OD simetralu ugla $\angle AOB$ (Slika 21.). Neka uglu paralelnosti $\angle AOD$ odgovara duž OC. Konstruišimo normalu PQ u tački C na pravu OD. Pri tom je $CP \| OA$ i $CQ \| OB$. Očigledno je prava PQ tražena prava, tj. granična prava ugla $\angle AOB$.

Da bismo pokazali jedinstvenost te prave, pretpostavićemo suprotno. Neka postoji još jedna granična prava P_1Q_1 ili P_2Q_2 kao na Slici 23. Kako je relacija paralelnosti pravih u L^2 tranzitivna iz $Q_1P_1 \| OA$ i $QP \| OA$ sledi da je $Q_1P_1 \| QP$. Međutim, to je nemoguće, jer su prave Q_1P_1 i QP normalne na pravu OD, tj. sa njom grade jednake suprotne uglove. Kao takve ove dve prave su međusobno hiperparalelne. Dakle, postoji jedinstvena granična prava ugla $\angle AOB$.

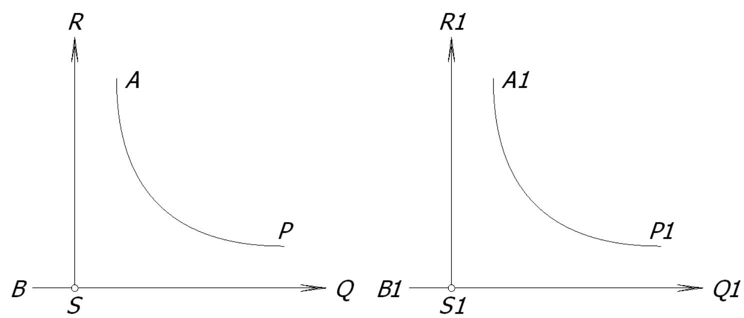
Iz upravo dokazane teoreme možemo zaključiti da se kroz tačku M unutar ugla $\angle AOB < 2R$ koja je od temena ugla O odvojena graničnom pravom ne može povući prava koja bi sekla oba kraka tog ugla.

Iz toga vidimo da teorema koja kaže da kroz svaku tačku unutar ugla manjeg od $2R$ prolazi prava koja seče oba kraka tog ugla protivureči aksiomi Lobačevskog. Ona važi samo u euklidskoj geometriji, pa je ekvivalentna V postulatu.

Poznato nam je iz euklidske geometrije da je rastojanje tačaka jedne od dve paralelne prave do druge prave konstantno. Osim toga za različite parove paralelnih pravih i to rastojanje je različito. Zbog toga parovi paralelnih pravih a, b i a', b' u opštem slučaju nisu podudarni.
Međutim, za paralelne prave u ravni Lobačevskog važi sledeće:

Teorema 25 *Svaki par paralelnih pravih je podudaran proizvoljnom paru paralelnih pravih.*

Dakle, svi likovi koje se sastoje od dveju paralela su međusobno podudarni.



Slika 22.

Neka su data dva para paralelnih pravih $AP \| BQ$ i $A_1P_1 \| B_1Q_1$ (Slika 22.). Na osnovu Teoreme 11, može se prava AP smatrati graničnom pravom pravog ugla $\angle QSR$, što znači da na pravoj BQ postoji neka određena i to samo jedna tačka S, tako da je poluprava SR koja je upravna na polupravu SQ, bude paralelna sa pravom AP u smeru suprotnom od smera paralelnosti prave AP i SQ. Drugim rečima, svakako postoji takva tačka S na pravoj BQ da prava AP bude paralelna sa polupravom SQ, ali da isto tako bude paralelna i sa polupravom SR, i to sa svakom od njih u određenom smeru.

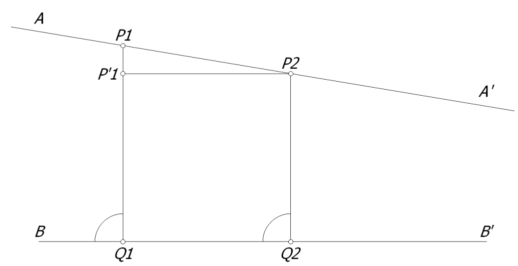
Isto će važiti i za drugi par paralelnih pravih A_1P_1 i B_1Q_1. Na pravoj B_1Q_1 postojaće tačka S_1 tako da A_1P_1 bude granična prava ugla $\angle Q_1S_1R_1$.

Poluprave SR i S_1R_1 su podudarne, kao i poluprave SQ i S_1Q_1. To je moguće, jer su uglovi pravi pa su podudarni, pa postoji izometrij koja slika jedan ugao u drugi, a jednu graničnu pravu u drugu. Tom izometrijom se par paralelnih pravih slika u drugi par paralelnih pravih.

Definicija 7 *Skup svih pravih ravni L^2 paralelnih medju sobom nazivamo paraboličkim pramenom pravih.*

Navodimo sada teoremu vezanu za rastojanje tačke na jednoj pravoj u odnosu da drugu pravu koja joj je paralelna, a vezano za smer paralelnosti, bez dokaza.

Teorema 26 *Odstojanje tačke koja pripada jednoj od dveju međusobno paralelnih pravih od druge prave strogo i neograničeno opada kada se tačka pomera u smeru paralelnosti, a strogo i neograničeno raste kada se tačka pomera u smeru suprotnom od smera paralelnosti.*



Slika 23.

Prema tome, na svakoj od dve međusobno paralelne prave postoji tačka čije je rastojanje od druge prave podudarno unapred zadatoj duži, a isto tako i tačka čije je rastojanje od druge prave manje od unapred zadate duži. Zbog toga kažemo da se paralelne prave u smeru paralelnosti asimptotski približavaju, tj. da u smeru paralelnosti imaju zajedničku beskrajno daleku tačku O_∞. Kako za svaku tačku van date prave u njima određenoj ravni postoje dve prave koje su sa njom paralelne, jedna u jednom, a druga u drugom smeru, hiperbolička prava ima dve beskrajno daleke tačke.
Navodimo sada još dve teoreme bez dokaza:

Teorema 27 *Ako je ω oštar ugao u ravni L^2 tada postoji jedinstvena prava upravna na jedan krak, a paralelna sa drugim krakom tog ugla.*

Teorema 28 *Odstojanje tačke koja se nalazi na jednom kraku oštrog ugla od drugog kraka neograničeno raste pri neograničenom udaljavanju te tačke od temena tog ugla.*

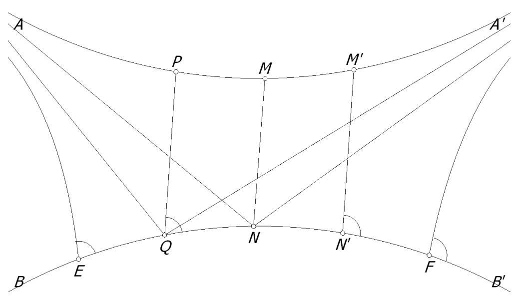
3.5 Osobine hiperparalelnih pravih u L^2

Teorema 29 *Relacija hiperparalelnosti definisana na skupu pravih u L^2 je transmisibilna, tj. ako je AA' hiperparalelna sa BB' u nekoj tački M tada je AA' hiperparalelna sa BB' u svakoj drugoj tački N.*

Teorema 30 *Relacija hiperparalelnosti definisana na skupu pravih u L^2 nije relacija ekvivalencije.*

Teorema 31 *Dve hiperparalelne prave u L^2 imaju jedinstvenu zajedničku normalu.*

Dokaz. Neka su AA' i BB' dve hiperparalelne prave (Slika 24.). Najpre ćemo dokazati egzistenciju zajedničke normale ovih pravih. Označimo sa P proizvoljnu tačku prave AA', a sa Q podnožje normale iz tačke P na pravu BB'. Tačka Q se nalazi van prave AA' te postoje dve prave QA' i QA takve da je $QA' \| AA'$ i $QA \| A'A$. Pri tome poluprave QA' i QA zaklapaju sa polupravama QB' i QB oštre uglove $\angle AQB$ i $\angle A'QB'$. Uglovi $\angle AQB$ i $\angle A'QB'$ su oštri, jer ukoliko bi bili veći ili jednaki pravom uglu onda ne bi bile granične prave u skupu pravih ravni L^2 koje prolaze kroz tačku Q i razdvajaju prave koje seku pravu AA' i koje je ne seku. Prema dokazanoj Teoremi 25 postoji jedinstvena prava upravna na QB' i paralelna sa polupravom QA'. Neka je to prava FA'. Analogno, prava EA je jedina prava u ravni pravih AA' i BB' koja je upravna na polupravu QB i paralelna polupravoj QA.



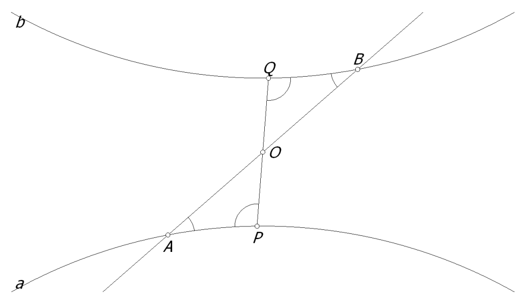
Slika 24.

Neka je N središte duži EF i M podnožje normale iz tačke N na pravu AA'. Dokazaćemo da je prava MN normalna i na pravu BB'. U tom cilju konstruišemo prave NA' i NA paralelne redom pravama AA' i $A'A$. Na osnovu tranzitivnosti relacije paralelnosti pravih u ravni L^2 zaključujemo da su prave NA' i NA paralelne pravama FA' i EA redom. Kako su uglovi $\angle MNA'$ i $\angle MNA$ uglovi paralelnosti koji odgovaraju duži MN oni su među sobom jednaki, tj. $\angle MNA' = \angle MNA$.

No, kako je tačka N središte duži EF biće $NE = NF$. Podudarnim dužima odgovaraju podudarni uglovi paralelnosti, pa je $\angle ENA = \angle FNA'$. Kako je $\angle MNF = \angle MNA' + \angle FNA'$ i $\angle MNE = \angle MNA + \angle ENA$ to sledi da je $\angle MNF = \angle MNE$. Kako su ti uglovi podudarni i naporedni, oni su i pravi, pa je prava MN normalna na pravu BB'.

Dokažimo sada jedinstvenost zajedničke normale dveju hiperparalelnih pravih: Pretpostavimo, suprotno, da postoji još jedna prava $M'N'$ koja je zajednička normala pravih AA' i BB'. Tada je zbir unutrašnjih uglova četvorougla $\square MNN'M'$ jednak zbiru četiri prava ugla, što je u geometriji Lobačevskog nemoguće. Dakle, postoji jedinstvena normala dveju hiperparalelnih pravih.

Teorema 32 *Dve prave koje u preseku sa trećom pravom grade jednake suprotne uglove su hiperparalelne.*



Slika 25.

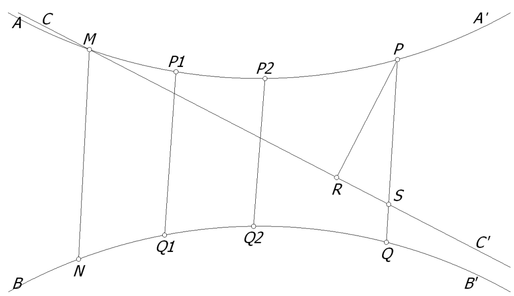
Neka su a i b dve prave, c njihova zajednička sečica (Slika 25.) i neka su jednaki suprotni uglovi koje prava c gradi sa pravama a i b. Označimo sa A i B presečne tačke prave c redom sa pravama a i b, a O središte duži AB. Označimo sa P i Q podnožja normala iz tačke O redom na prave a i b. Pravougli trouglovi $\triangle OAP$ i $\triangle OBQ$ su podudarni na osnovu petog stava podudarnosti trouglova, jer je $OA = OB, \angle P = \angle Q$ i $\angle A = \angle B$. Iz njihove podudarnosti sledi da je $\angle AOP = \angle BOQ$. Kako su tačke A, O i B kolinearne, biće kolinearne i tačke P, O i Q. Dakle, prava PQ je zajednička normala pravih a i b, odakle na osnovu Teoreme 20 sledi da su prave a i b hiperparalelne.

Teorema 33 *Odstojanje tačke koja pripada jednoj od dveju međusobno hiperparalelnih pravih od druge prave strogo i neograničeno raste kad se ta tačka udaljava od zajedničke normale tih hiperparalelnih pravih.*

Dokaz: Prema prethodnom stavu postoji jedna i samo jedna zajednička normala dveju među sobom hiperparalelnih pravih AA' i BB'; neka su M i N podnožja te zajedničke normale s pravama AA' i BB'. Dokažimo najpre da odstojanje tačke jedne od tih dveju hiperparalelnih pravih od druge prave raste kada se tačka udaljava od njihove zajedničke normale MN.

Ako obeležimo sa P_1 i P_2 tačke prave AA' takve da je $\mathcal{B}(M, P_1, P_2)$, a sa Q_1 i Q_2 podnožja upravnih iz tačaka P_1 i P_2 na pravoj BB', biće četvorouglovi MP_1Q_1N i MP_2Q_2N Lambertovi, pa su uglovi MP_1Q_1 i MP_2Q_2 oštri. S obzirom da je tačka P_1 između tačaka M i P_2, ugao $P_2P_1Q_1$ je naporedan s uglom MP_1Q_1 a ugao MP_2Q_2 istovetan s uglom $P_1P_2Q_2$. Stoga je kod četvorougla $P_1Q_1Q_2P_2$ s pravim uglovima Q_1 i Q_2 ugao P_1 tup, a ugao P_2 oštar, te je $P_2Q_2 > P_1Q_1$. Prema tome ako su P_1 i P_2 tačke prave AA' takve da je $MP_2 > MP_1$ tada je i

$$P_2Q_2 > P_1Q_1.$$



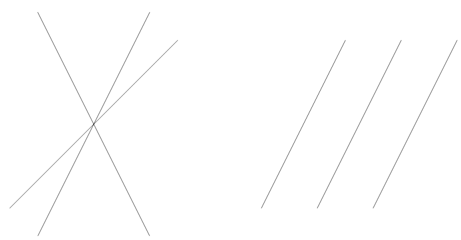
Slika 26.

Dokažimo sada da odstojanje tačke jedne od dveju hiperparalelnih pravih AA' i BB' od druge prave raste neograničeno pri udaljavanju te tačke od njihove zajedničke normale. U tom cilju obeležimo sa CC' pravu kroz tačku M, sa P proizvoljnu tačku prave AA' koja se nalazi s one strane od prave MN s koje je tačka C', a sa Q i R podnožja upravnih iz tačke P na pravama BB' i CC'. Pri tome su tačke P i Q s raznih strana od prave CC', te duž PQ seče pravu CC' u nekoj tački S. Stoga je $PR < PS < PQ$. S obzirom da prema poznatom stavu odstojanje PR tačke P od prave CC' neograničeno raste pri udaljavanju tačke P od tačke M, tim pre odstojanje PQ tačke P od prave BB' neograničeno raste pri udaljavanju tačke P od prave MN.

3.6 Krive u L^2

U ovom poglavlju je dat opis nekih karakterističnih krivih u L^2 ravni.

U euklidskoj geometriji pojam pramena pravih označava beskonačan skup pravih jedne ravni, takve da sve prave tog skupa prolaze kroz jednu zajedničku tačku ili su ortogonalne na zadatu pravu, a samim tim i međusobno paralelne. U zavisnosti od toga da li pramen pravih prolazi kroz jednu zajedničku tačku ili je u pitanju pramen paralelnih pravih, naziva se pramen konkurentnih pravih ili eliptički pramen pravih, a u drugom slučaju je to ortogonalan ili hiperbolički pramen pravih.



Slika 27.

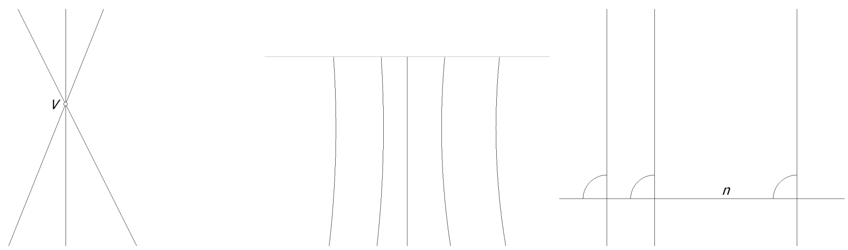
Ova dva pramena pravih postoje u apsolutnoj geometriji, a definisali smo i pojam paraboličkog pramena, koji postoji u hiperboličkoj geometriji. U Euklidovoj geometriji se ne pravi razlika izmedju hiperboličkog i paraboličkog pamena pravih. Geometrija Lobačevskog pravi razliku između paralelnih i hiperparalelnih pravih pa se samim tim i parabolički pramen pravih razlikuje od hiperboličkog.

Navodimo sada definicije eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog pramena pravih:

Definicija 8 *Eliptički pramen je skup pravih jedne ravni, koje prolaze kroz istu tačku. Ta tačka se naziva središte pramena.*

Definicija 9 *Parabolički pramen je skup pravih jedne ravni, koje su paralelne u istom smeru.*

Definicija 10 *Hiperbolički pramen je skup pravih jende ravni koje su normalne na istu pravu. Ta prava se naziva bazisna prava tog pramena.*

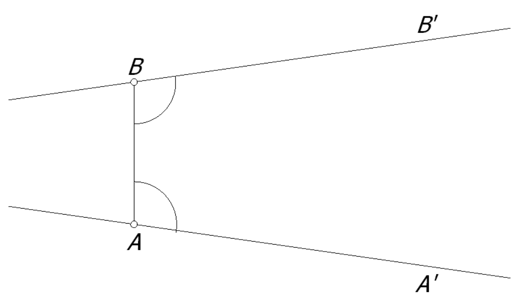


Slika 28.

U apsolutnoj ravni, pa samim tim i u ravni Lobačevskog, svaki pramen je jednoznačno određen sa ma koje dve prave tog pramena. Kroz svaku tačku te ravni prolazi samo jedna prava tog pramena, osim ako nije u pitanju tačka koja je središte pramena.

Sada ćemo definisati sečicu jednakog nagiba i kazati šta se smatra pod pojmom odgovarajućih tačaka dveju pravih.

Definicija 11 *Prava AB je sečica jednakog nagiba pravih AA' i BB' ako ona sa iste strane obrazuje sa tim pravama jednake uglove.*



Slika 29.

Navodimo teoremu koja govori o jedinstvenosti sečice jednakog nagiba za dve prave istog pramena, a da sadrži proizvoljnu tačku jedne od tih dveju pravih, bez dokaza.

Teorema 34 *U svakom pramenu pravih, kroz proizvoljnu tačku ma koje prave, prolazi jedna i samo jedna sečica jednakog nagiba ka ma kojoj drugoj pravoj istog pramena.*

Definicija 12 *Neka tačka A pripada pravoj a, a tačka B pravoj b. Ako je AB sečica jednakog nagiba pravih a i b, za tačke A i B kažemo da su odgovarajuće tačke pravih a i b.*

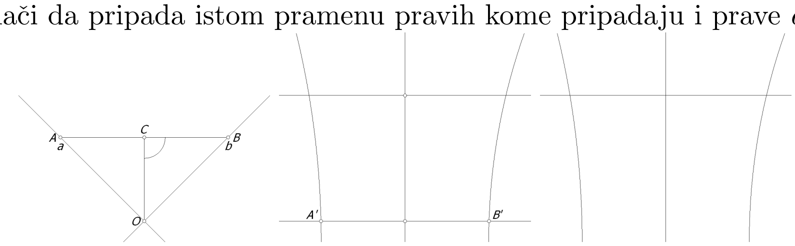
Teorema 35 *Ako su A i B odgovrajuće tačke pravih a i b nekog pramena pravih, nomala na duž AB u njenom središtu C, pripada istom pramenu pravih.*

Dokaz: S obzirom da postoje tri različita pramena pravih, razmotrićemo sva tri slučaja. Uzećemo u obzir kada su A i B tačke eliptičkog, hiperboličkog i paraboličkog pramena pravih.

Eliptički pramen: Kod eliptičkog pramena postoji središte O pramena pravih. Ako posmatramo trougao ABC, gde je C središte duži AB, tada normala na AB kroz C prolazi i kroz tačku O, jer je duž OC visina jednakokrakog trougla ABC. To znači da prava CO pripada tom pramenu pravih.

Hiperbolički pramen: Obeležimo sa A' i B' tačke bazisne prave x, koje pripadaju pravama a i b. U četvorouglu $AA'BB'$ su uglovi koji naležu na stranicu $A'B'$ pravi, a uglovi koji naležu na stranicu AB podudarni, pa je ovaj četvorougao Sakerijev. Kako je srednja linija t Sakerijevog četvorougla normalna na svaku od osnovica tog četvorougla, to je ujedno i dokaz za slučaj hiperboličkog pramena pravih.

Parabolički pramen: Sada su prave a i b prave paraboličkog pramena pravih. Normala na duž AB u njenom središtu C ne može seći, zbog podudarnosti uglova sa temenima u tačkama A i B, ni jednu od pravih a i b, pa kako se nalazi između njih, paralelna je svakoj od njih u istom smeru, što znači da pripada istom pramenu pravih kome pripadaju i prave a i b.



Slika 30.

Još jedna od karakterističkih krivih u L^2 ravni je trajektorija pramena pravih. Navodimo sada definiciju trajektorije pramena pravih.

Definicija 13 *Posmatrajmo pramen pravih i uočimo tačku A ravni; skup svih tačaka, koje u uočenom pramenu, odgovaraju tački A je trajektorija tog* *pramena pravih. Tačka A, koja pripada trajektoriji naziva se početna tačka trajektorije.*

Trajektorija pramena pravih je određena svojom početnom tačkom.

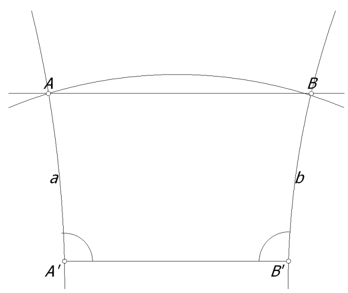
Teorema 36 *Svaka tačka trajektorije pramena pravih se može uzeti za početnu tačku trajektorije.*

Teorema 37 *Svaka tetiva trajektorije pramena pravih je sečica jednakog nagiba onih pravih koje prolaze kroz krajnje tačke te tetive.*

Teorema 38 *Normala na tetivu trajektorije pramena pravih u njenom središtu, pripada tom pramenu pravih.*

Teorema 39 *Svaka trajektorija seče pramen pravih ortogonalno.*

Teorema 40 *Prava može seći trajektoriju pramena najviše u dve tačke.*



Slika 31.

Dokaz: Na osnovu apsolutne geometrije je poznato da prava ne može seći kružnicu u više od dve tačke, pa je tvrdjenje tačno u slučaju eliptičkog pramena, jer je trajektorija eliptičnog pramena kružnica.

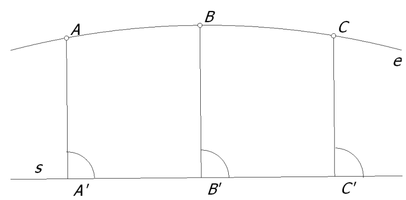
U slučaju paraboličkog i hiperboličkog pramena pravih, uočimo tačke A, B i C trajektorije tog pramena. Neka je B izmedju tačaka A i C na toj trajektoriji i AA', BB' i CC' odgovarajuće prave pramena. Tada su uglovi ABB' i CBB' oštri, odakle sledi da je trougao ABC ne može biti opružen, tri tačke trajektorije ne mogu biti kolinearne, što je trebalo dokazati.

Navedimo sada trajektorije odgovarajućih vrsta pramenova:

Definicija 14 *Trajektorija hiperboličkog pramena pravih zove se ekvidistanta, a bazisna prava je bazisna prava ekvidistante. Svaka prava pramena, u odnosu na koju je ekvidistanta definisiana je osa eksidistante.*

Teorema 41 *Tačke ekvidistante su jednako udaljene od njene bazisne prave. Tako i geometrijsko mesto tačaka podjednako udaljenih od date prave je ekvidistanta.*

Definicija 15 *Konstantno rastojanje AA', BB' i CC' tačaka ekvidistante od njene bazisne prave naziva se visina ekvidistante.*

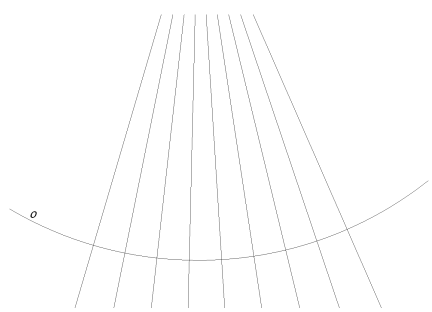


Slika 33.

Sledi zaključak da ako je visina ekvidistante jednaka nuli to znači da je ekvidistanta prava linija.

Definicija 16 *Trajektorija paraboličkog pramena pravih zove se oricikl. Svaka prava, u odnosu na koji je oricikl odredjen je osa oricikla.*

Teorema 42 *Da bi dve ekvidistante u L^2 bile podudarne potrebno je i dovoljno da im visine budu podudarne.*



Slika 34.

Definicija 17 *Kroz svaku tačku P ravni prolazi jedna i samo jedna osa oricikla. Ako se tačka P nalazi sa one strane oricikla, sa koje je smer paralelnosti njegovih osa, onda je P unutrašnja tačka oricikla. Ako je P sa one strane oricikla sa koje nije smer paralelnosti osa, tačka P je spoljašnja tačka oricikla.*

Teorema 43 *Dva oricikla, koja imaju jednu zajedničku tačku a ne dodiruju se, imaju još jednu zajedničku tačku.*

Teorema 44 *Luk oricikla je određen tetivom ili visinom.*

Teorema 45 *Svaka dva oricikla u ravni L^2 su međusobno podudarna.*

Definicija 18 *Trajektorija eliptičkog pramena pravih je cikl.*

Teorema 46 *Da bi u ravni L^2 dva kruga bila podudarna potrebno je i dovoljno da im poluprečnici budu podudarni.*

4 Neeuklidska geometrija u Poenkareovom modelu

Nepoverenje koje je izazvala geometrija Lobačevskog prouzrokovalo je potrebu da se u euklidskom prostoru nađe površ u kojoj je ostvarljiva realizacija hiperboličke geometrije. Vremenom, takva površ nije pronađena, već je dokazano da ni ne postoji. Međutim, uspešno je pokazano da u euklidskom prostoru postoji površ takva da se geometrija Lobačevskog realizuje u malom.

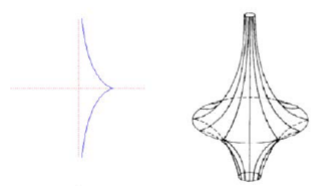
Beltrami, baveći se kartografijom i geodezijskim linijama (linije koje određuju najmanje rastojanje između dve tačke neke površi), pronalazi klasu površi konstantne negativne krivine.

Te površi se nazivaju pseudosferama i na njima se u dovoljno maloj okolini ostvaruje geometrija Lobačevskog.

Jedna takva pseudosfera nastaje obrtanjem traktise oko svoje ose. Traktisa je kriva, u čijoj je svakoj tački dužina tangente od tačke dodira do tačke preseka sa nekom pravom konstantna veličina. Prava preseka je osa traktise.

Jednačina traktise:

$x = 0, y = a\sin(t), z = a(ln \tan\frac{t}{2} + \cos(t))$



Slika 35.

Pseudosfera je površ u euklidskom prostoru na kojoj se ostavaruje geometrija Lobačevskog, ali ipak ne u potpunosti. Zapravo, na svakoj pseudosferi postoji oštra ivica, koja se sastoji iz specifičnih tačaka. Na delu pseudosfere, van tih tačaka, se ostvaruje geometrija Lobačevskog.

Teorema 47 *U dovoljno maloj okolini svake tačke pseudosfere važi hiperbolička planimetrija.*

U Euklidovom prostoru ne postoji površ u kojoj se hiperbolička planimetrija ostvaruje u celom, ali je moguće konstruisati modele hiperboličke geometrije. U ovom radu prikazaćemo ravanske modele. Takvi modeli su Poenkareov i Klajnov model. U ovom radu prikazaćemo ravanske modele.

Pre nego što pokažemo modele geometrije Lobačevskog, navodimo deo projektivne geometrije na koji se ti modeli oslanjaju.

4.1 Dvorazmera i realna projektivna prava

Neka su A, B, C, D četiri razne tačke afine prave p u euklidskoj ravni, njihova dvorazmera je realan broj, takav da:
$[A, B; C, D] := \dfrac{\vec{CA}}{\vec{CB}} : \dfrac{\vec{DA}}{\vec{DB}}$.
Dvorazmera je, kako joj i samo ime kaže, odnos dve razmere.
Ako su na pravoj p, koordinate tačaka $A(a), B(b), C(c), D(d)$
tada je dvorazmera:
$[A, B; C, D] := \dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$.
Navodimo sada neke osobine dvorazmere:

$$[A, B; C, D] = [C, D; A, B]$$
$$[A, B; C, D] = [B, A; C, D]^{-1}$$
$$[A, B; C, D] = 1 - [A, C; B, D]$$

.

Tačke A, B, C, D su harmonijski konjugovane ako važi $[A, B; C, D] = -1$, i to se označava kao $\eta(A, B; C, D)$.

U afinoj pravoj, ako su $A(a), B(b)$ dve razne tačke i $C(\dfrac{a+b}{2})$ središte duži AB, tada je $\eta(A, B; C, D)$ zapravo:

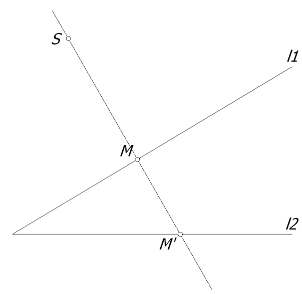
$$-1 = \frac{\dfrac{a+b}{2} - a}{\dfrac{a+b}{2} - b} = -\frac{d-a}{d-b}$$

.

Sledi da je $a = b$, što je kontradiktorno, što dovodi do zaključka da takva tačka D ne postoji.

Navedimo sada neka preslikavanja koja čuvaju dvorazmeru:

Definicija 19 *Neka su l_1 i l_2 dve prave i S tačka koja im ne pripada. Preslikavanje $f : l_1 \to l_2$ koje tački $M \in l_1$ dodeljuje tačku $f(M) = SM \times l_2$ naziva se centralno projektovanje prave l_1 na pravu l_2 iz centra S.*



Slika 36.

Teorema 48 *Dvorazmera je invarijantna u odnosu na centralno projektovanje*

Definicija 20 *Preslikavanje $f : p \to p$ prave p dato sa $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}, ad-bc \neq 0$, naziva se bilinearno preslikavanje.*

Da je $ad - bc = 0$, tada bi bilo $f(x) = \dfrac{b}{d} = const.$

Ovako definisano preslikavanje f nije definisano u tački $x = -\dfrac{d}{c}$. Sa druge strane $\dfrac{a}{c}$ nije slika ni jedne tačke x. Iz tog razloga ćemo pravu p dopuniti beskonačno dalekom tačkom $P_\infty = \pm\infty$ i označiti kao $\bar{p} \equiv p \cup P_\infty$. Tako produžena prava naziva se projektivna prava.

Slika 37.

Definišimo sada preslikavanje f tako da $\bar{f} : \bar{p} \to \bar{p}$ bude bijekcija projektivne prave:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} P_\infty, \text{ ako je } x = -\frac{d}{c} \\ \frac{c}{a}, \text{ ako je } x = P_\infty \\ f(x), \text{ inače.} \end{cases}$$

Vidimo da je:

$\lim_{x \to -\frac{d}{c}} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{a}{c}$,

što znači da tačka P_∞ zaista predstavlja $\pm\infty$ prave. Jedan model projektivne prave je krug.

Definicija 21 *Bijekcija projektivne prave na sebe, koja čuva dvorazmeru, naziva se projektivno preslikavanje.*

Teorema 49 *Preslikavanje projektivne prave je projektivno ako i samo ako je bilinearno.*

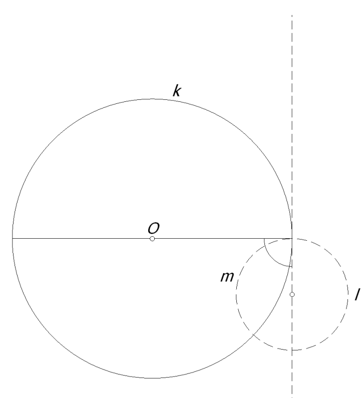
5 Poenkareov model

5.1 Poenkareov disk model

Videli smo na osnovu čega se temelji ideja Klajnovog modela. Sada ćemo dati opis još jednog modela hiperboličke geometrije, a to je Poenkareov disk model.

U cilju opisivanja Poenkareovog disk modela, navodimo osobine osnovnih geometrijskih pojmova i relacija u modelu hiperboličke geometrije. Naravno, potebno je i pokazati da u modelu hiperboličke geometrije važe i sve aksiome Hilbertobog sistema, kao i aksioma Lobačevskog.

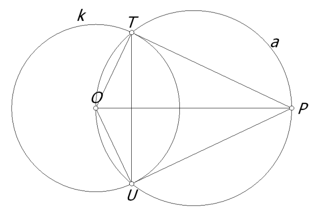
Uočimo u euklidskoj ravni kružnicu k koju nazivamo apsolutna kružnica ili samo apsoluta. Svaku tačku koja pripada unutrašnjosti te kružnice, bez tačaka same kružnice k, nazvaćemo h-tačkama. h-prava je skup svih h-tačaka koje pripadaju kružnici ili pravoj ortogonalnoj na k, tj prave u ovom modelu su otvorene tetive koje sadrže centar kruga i otvoreni lukovi krugova normalnog na posmatrani. Neka je l krug ortogonalan na k, tada presek l sa unutrašnjosti k daje otvoreni luk m, koji predstavlja pravu u Poenkareovom disk modelu, otvorena tetiva koja sadrži centar posmatranog kruga k kao i skup svih unutrašnjih tačaka kružnice k, bez tačaka same kružnice, čini h-ravan.



Slika 38.

Navodimo sada jednu teoremu na osnovu koje ćemo videti kako se konstruiše Poenkareova prava:

Teorema 50 *Neka je data apsoluta k i tačke T i U koje nisu dijametralno suprotne i neka je P pol prave TU. Tada je $PT \cong PU$, $\angle PTU \cong \angle PUT$, $OP \perp TU$ i krug $a(P, PT = PU)$ seče k u tačkama T i U i ortogonalan je na njega.*



Slika 39.

Dokaz: Na osnovu definicije pola, ugao $\angle OTP$ i ugao $\angle OUP$ su pravi, pa je $\triangle OTP \cong \triangle OUP$, a odavde sledi da su $PT \cong PU$ i $\angle OPT \cong \angle OPU$. Trougao $\triangle PTU$ je jednakokraki, pa je simetrala ugla $\angle TPU$ normalna na njegovu osnovicu TU. Onda je krug a dobro definisan jer je $PU = PT$ i a je ortogonalno na k i seče k u tačkama T i U, pa su PT i PU tangente na k.

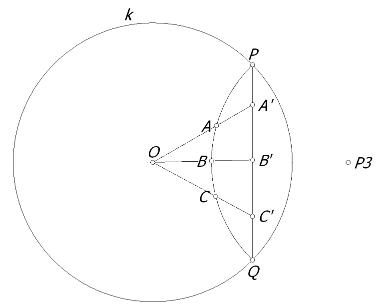
Uvodimo sada relaciju h-pripadanja koja je analogna relaciji pripadanja u euklidskom smislu, što znaci da ćemo za objekte koji pripadaju jedan drugom govoriti da h-pripadaju.

Kako h-prave mogu biti kružnice ili prečnici apsolute, na osnovu toga uvodimo relaciju između u hiperboličkom prostoru, koju ćemo nazivati h-izmedju.

Relacija između se uvodi pomoću sledeće definicije, a razlikuje se od relacije između u euklidskom prostoru, videćemo i kako:

Neka su A, B i C tri h-tačke, koje pripadaju istoj h-pravoj. Ako je ta h-prava prečnik apsolute k, kažemo da je B h-izmedju tačaka A i C ako je između u euklidskom smislu. Ako je, h-prava luk kružnice a, obeležimo sa O središte apsolute, a sa P i Q tačke u kojima apsoluta seče kružnicu a.

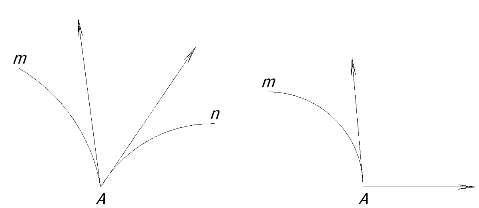
Obeležimo sa A', B' i C' tačke u kojima euklidske prave OA, OB i OC seku euklidsku tetivu PQ. h-tačka B je h-između tačaka A i C, ako je tačka B' između tačaka A' i C' u euklidskom smislu i označavamo sa: $\mathcal{B}_h(A, B, C)$.



Slika 40.

Definicija 22 *h-duž je luk kružnice koja je ortogonalna na k ili duž jednog od prečnika apsolute. h-poluprava je je luk tj. duž čija jedna krajnja tačka pripada apsoluti. h-ugao je skup h-tačke i dve h-poluprave koje proizilaze iz te tačke.*

Znači, da ako se dva luka m i n seku u tački A, ugao koji oni obrazuju je ugao između njihovih tangenti u tački A, odnosno, ugao između luka m i prave p sa početkom u tački A je zapravo ugao između prave p i tangente na luk m u tački A.



Slika 41.

Već je bilo reči o tome šta je i koje su osobine trouglova u geometriji Lobačevskog, sada ćemo reći nešto o tome kako se taj trougao predstavlja u Poenkareovom disk modelu.

Definicija 23 *Ako su A, B i C tri h-tačke koje ne pripadaju jednoj h-pravoj, tada skup koji se sastoji iz tačaka h-duži AB, BC i CA naziva se h-trouglom.*

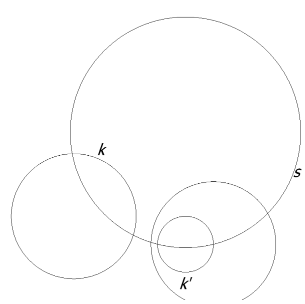
Pojmovi kao što su h-poligonske linije i h-poligon se uvode po analogiji sa odgovarajućim pojmovima apsolutne geometrije.

Inverzijom u odnosu na krug k koji je ortogonalan na apsolutu ili refleksijom u odnosu na pravu p ortogonalnu na apsolutu h-ravan se preslikava na sebe. Restrikcije tih preslikavanja na h-ravan zvaćemo h-refleksijama. h-pravu koja pripada krugu k (pravoj p) zvaćemo osom h-refleksije. Svaka poluravan kojoj je rub osa neke h-refleksije tom h-refleksiojm se preslikava na njoj komplementnu h-poluravan. Na osnovu osobina h-refleksija sledi da h-izometrije slikaju h-kolinearne tačkei pri tom čuvaju h-raspored. Samim tim h-izometrije slikaju h-prave u h-prave. Iz istog razloga h-izometrije slikaju uglove u njima podudarne uglove.

Teorema 51 *Za dve razne h-tačke A i B postoji jedinstvena h-refleksija kojom su te dve tačke preslikavaju jedna na drugu.*

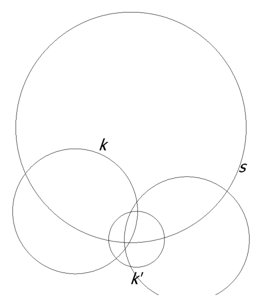
Teorema 52 *Ako se dve h-prave seku, tada postoje dve h-refleksije kojima se one preslikavaju jedna na drugu, a ako su disjunktne, tada postoji jedinstvena h-refleksija kojom se one preslikavaju jedna na drugu.*

Dokaz: Neka su k i k' krugovi koji sadrže zadate h-prave.



Slika 42.

Razmotrimo dva slučaja. Prave mogu biti disjunktne i tada su i krugovi koji ih sadrže disjunktni ili se dodiruju u tački koja pripada apsoluti, što znači da postoji jedinstvena inverzija ili refleksija kojom se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi. Krug inverzije će pripadati pramenu kojem pripadaju i k i k', on će biti upravan na apsolutu. Kada je u pitanju refleksija, osu te refleksije, koja sadrži O, smatramo uopštenim krugom. Sledi da postoji jedinstvena h-refleksija kojom se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa te h-refleksije pripada krugu s upravnom na apsolutu, čije je središte presek zajedničkih spoljašnjih tangenti i krugova k i k'.



Slika 43.

U drugom slučaju, kada se krugovi k i k' seku, tada postoje dve inverzije kojima se ti krugovi preslikavaju jedan na drugi, što znači da će postojati dve h-refleksije kojima se zadate prave preslikavaju jedna na drugu. Osa jedne od tih dveju h-refleksija pripada krugu s upravnom na apsoluti, čije je središte presek zajedničkih tangenti krugova k i k', a osa druge h-refleksije pripada krugu s' koji sadrži presečne tačke krugova k i k' i upravan je na krugu s.

Teorema 53 *Postoji jedinstvena h-refleksija kojom se dve h-poluprave sa zajedničkim temenom preslikavaju jedna na drugu.*

Definicija 24 *Za par h-tačaka (A, B) kažemo da je h-podudaran paru h-tačaka (C, D) i pišemo*

$$(A, B) \cong^h (C, D)$$

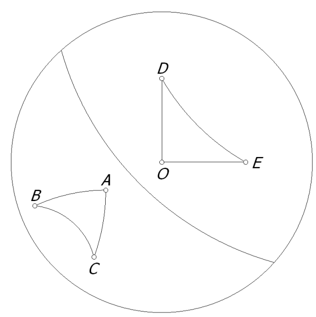
ako postoji h-izometrija koja preslikava par (A, B) na par (C, D).

Za h-figure se kaže da su h-podudarne ako se mogu preslikati jedna na drugu h-izometrijom.

Definicija 25 *h-izometrija koja je kompozicija dve h-refleksije, prve u odnosu na h-pravu normalnu na datu h-duž u početnoj h-tački i druge u odnosu na h-simetralu date h-duži naziva se h-translacija za h-duž.*

Definicija 26 *Kompozicija dve h-refleksije u odnosu na h-prave koje sadrže datu h-tačku i zahvataju dati ugao, pri čemu je orijentacija ugla izmedju datih h-pravih jednaka orijentaciji datog ugla naziva se h-rotacija oko date h-tačke za dati ugao.*

Teorema 54 *Zbir unutrašnjih uglova proizvoljnog h-trougla je manji od π.*



Slika 44.

Dokaz: Ako je ABC h-trougao i O središte apsolute k, tada postoji h-refleksija kojom se tačka A preslikava u O, a tačke B i C, redom, u D i E. Tom refleksijom se uglovi h-trougla ABC preslikavaju na njima podudarne uglove h-trougla ODE, a h-duži AB i AC se preslikavaju na h-duži OD i OE koje pripadaju prečnicima apsolute. Kako su uglovi kod temena D i E h-trougla ODE manji od uglova kod istih temena euklidskog trougla ODE, sledi da je zbir unutrašnjih uglova h-trougla ODE manji od π. Zato će i zbir unutrašnjih uglova h-trougla ABC biti manju od π.

Zbir unutrašnjih uglova h-četvorougla će biti manji od 2π, a zbir unutrašnjih uglova h-poligonske površi, od n ivica, manji od $(n-2)\pi$.

Ovim objektima i njihovim uzajamnim odnosima smo odredili jedan geometrijski model. Međutim, potrebno je još i pokazati da su zadovoljene sve aksiome apsolutne geometrije.

5.2 Aksiome u modelu

Sada ćemo pokazati da sve aksiome apsolutne geometrije i aksioma Lobačevskog važe na modelu i pokazati da na modelu važi hiperbolička geometrija.

5.2.1 Aksiome incidencije i aksiome poretka

Posmatramo dve proizvoljne h-tačke A i B. Na osnovu osobina inverzije svaka kružnica koja prolazi kroz A, a ortogonalna je na apsolutu k, prolazi kroz jos jednu utvrđenu tačku A'. Sve te kružnice obrazuju eliptični pramen kružnica koji je ortogonalan na k. Kako kroz tačku euklidske ravni koja je različita od A i A' uvek prolazi jedna i samo jedna takva kružnica tada važi sledeća teorema:

Teorema 55 *Za bilo koje dve h-tačke A i B, uvek postoji jedna i samo jedna h-prava kojoj pripada i tačka A i tačka B.*

Ova teorema nam pokazuje da su u ovom modelu zadovoljene druga i treća aksioma incidencije. Pošto svakoj kružnici koja je ortogonalna na k pripada bezbroj tačaka koje su istovremeno i unutrašnje tačke apsolute k i pored tih tačaka apsolute ima i bezbroj drugih tačaka, time je zadovoljena i prva aksioma Hilbertovog sistema.

Neka su A, B i C razne tačke jedne h-prave. Ako je ta h-prava prečnik apsolute, prve tri aksiome druge grupe Hilbertovih aksioma su zadovoljene, jer su one zadovoljene na svakoj otvorenoj euklidskoj duži. Ako je h-prava luk kružnice a, prema definiciji relacije h-između, na euklidskoj tetivi PQ tačka B' je euklidski između tačaka A' i C'. Pošto su na otvorenoj euklidskoj duži PQ, zadovoljene su Hilbertove aksiome rasporeda A', B' i C' su tri razne tačke. Stoga su i OA', OB' i OC' tri razne prave. Ako je tačka B' euklidski između A' i C', onda je ona i između C' i A', a to prema utvrđenoj definiciji znači da je tačka B h-između tačaka C i A. Važi sledeća teorema:

Teorema 56 *Ako je tačka B h-izmedju tačaka A i C, tada su A, B i C tri razne tačke i B je takodje h-izmedju tačaka C i A, a tačka C nije između tačaka A i B.*

Na ovaj način je pokazano da su zadovoljne prve tri aksiome druge grupe Hilbertovog sistema, a jednosavno se pokazuje da važe i četvrta i peta aksioma rasporeda. Pašova aksioma važi zbog sledeće teoreme euklidske geometrije.

Teorema 57 *U unutrašnjosti kružnice k date su tri tačke A, B i C. Kroz njih prolaze tri kružnice ortogonalne na k. Onaj luk četvrte kružnice ortogonalne na k, koji pripada unutrašnjosti k i koji seče jedan od unutrašnjih lukova AB, AC ili BC, seče jedan i samo još jedan od tih lukova, ako ta četvrta kružnica ne prolazi ni kroz jednu od tačaka A, B ili C.*

5.2.2 Aksiome podudarnosti

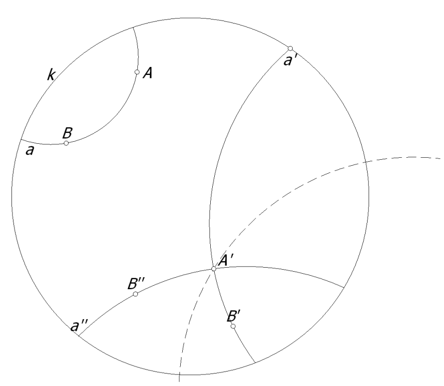
Aksioma 3.1 očigledno važi, a s obzirom da h-refleksija, koja slika tačku A u B i slika tačku B u tačku A, važi i druga aksioma podudarnosti.

Aksioma 3.3: Ako je svaka od h-duži $A'B'$ i $A''B''$ h-podudarna istoj h-duži AB, onda je i duž $A'B'$ h-podudarna duži $A''B''$.

Prema definiciji h-podudarnoosti, postoji h-izometrija f koji preslikava $A'B'$ na AB i postoji h-izometrija g, koja $A''B''$ preslikava na AB. Pri transformaciji $g \circ f$, $A'B'$ se preslikava na $A''B''$, ali $g \circ f$ je proizvod konačnog broja h-refleksija, tj. predstavlja jedno h-podudarno preslikavanje. Time je i Aksioma 3.3 potvrđena.

Aksioma 3.4: Neka su AB i BC dve duži h-prave a, koje nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka. Ako je AB h-podudarno sa $A'B'$, a BC h-podudarno sa $B'C'$, gde su A', B', C' h-kolinearne i u h-rasporedu $\mathcal{B}(A', B', C')$, onda je i AC h-podudarno sa $A'C'$.

Kako je AB h-podudarno sa $A'B'$, to postoji proizvod inverzija koje AB preslikavaju na $A'B'$. Pri tom se tačka C preslikava na C_1 h-prave $A'B'$ i to sa one strane tačke B' sa koje je tačka C'. Otuda sledi da je h-duž AC h-podudarna duži $A'C_1$. Kako se tačke C' i C_1 nalaze na pravoj $A'B'$ sa iste strane tačke A', to se one moraju poklapati. Dakle, ova h-izometrija slika AC u $A'C'$, a to dokazuje da su h-duži AC i $A'C'$ h-podudarne. *Aksioma 3.5:* Neka su A i B dve razne h-tačke h-prave a, a A' tačka te iste ili neke druge h-prave a'. Na pravoj a' sa date strane tačke A' uvek postoji tačka B' takva da je h-duž AB h-podudarna h-duži $A'B'$.



Slika 45.

Uvek postoji podudarnost koja tačku A preslikava na tačku A'. h-prava a preslikava se na h-pravu a'', koja prolazi kroz tačku A', a tačka B na neku tačku B'' h-prave a''. Tačkom A' kao početnom tačkom i tačkom B''

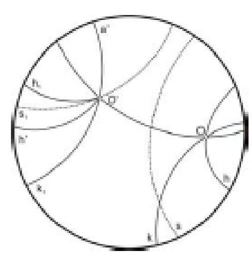
odredjena je h-poluprava koja sa unapred datom polupravom h-prave a' određuje h-ugao. Obeležimo sa s h-simetralu tog ugla. Inverzija s obzirom na kružnicu s je h-podudarnost pri kojoj se kraci tog ugla preslikavaju jedan na drugi. Tačka B'' preslikava se na tačku B' unapred date poluprave h-prave a', dok tačka A' ostaje nepromenjena. Proizvod dva posmatrana h-podudarna preslikavanja preslikavaju duž AB na h-duž $A'B'$, pri čemu je tačka A' unapred data, a tačka B' pripada unapred datoj h-pravoj i nalazi se sa date strane tačke A'. Kako je taj proizvod opet h-podudarna transformacija, to su h-duži AB i $A'B'$ h-podudarne. Što znači da je zadovoljena Aksioma 3.5.

Navodimo sledeću teoremu bez dokaza.

Teorema 58 *Tačka B' iz Aksiome 3.5 je jedinstvena takva tačka na uočenoj polupravoj h-prave a'.*

Neka je (A,B) podudarno (A,C) i neka je s h-simetrala ugla BAC. Tada se h-refleksijom u odnosu na s poluprava AB slika u polupravu AC, a tačka B u tačku B_1 takvu da je (A, B) podudarno (A, B_1). S obzirom da na polupravoj AC postoji tačno jedna takva tačka sledi da je $B_1 = C$, a s je h-simetrala h-duži BC. Znači ako je (A, B) podudarno (A, C) onda tačka A pripada h-simetrali h-duži BC.

Aksioma 3.6: Neka je u h-ravni dat h-ugao $\angle hk$ i h-prava a'. Neka je u odnosu na pravu a' zadata h-poluravan α'. Obeležimo sa h' h-polupravu h-prave a' koja ishodi iz tačke O'. Tada kroz O' u h-poluravni α', postoji jedna i samo jedna h-poluprava k', takva da je h-ugao $\angle hk$ h-podudaran h-uglu $h'k'$. Važi još i da je svaki h-ugao podudaran samom sebi.



Slika 46.

Neka su parovi h-tačaka (A, B) i (A', B') podudarni i neka je C tačka jedne h-poluravni sa rubom AB, a α h-poluravan sa rubom $A'B'$. Postoji h-izometrija F koja redom slika tačke A i B u A' i B'. h-refleksija g u odnosu na h-pravu $A'B'$ slika tačke A' i B' u sebe, a jednu poluravan sa rubom $A'B'$ u drugu. Zato, ukoliko f ne slika poluravan sa rubom AB koja sadrži C u poluravan α, onda to čini $g \circ f$. Označimo ovu h-izometriju sa f_1. Tada je tačka $C' = f_1(C)$ takva da je (A, C) podudarno (A', C') i (B, C) podudarno (B', C'). Neka je $C_1 \neq C'$ takođe tačka poluravni α takva da je (A, C) podudarno (A', C_1) i (B, C) podudarno (B', C_1). Tada je (A', C_1) podudarno (A', C'), pa tačka A' pripada h-simetrali h-duži $C'C_1$. Slično i B' pripada h-simetrali $C'C_1$, pa je h-simetrala $C'C_1$ prava $A'B'$, a one su sa raznih strana te prave, što je kontradikcija.

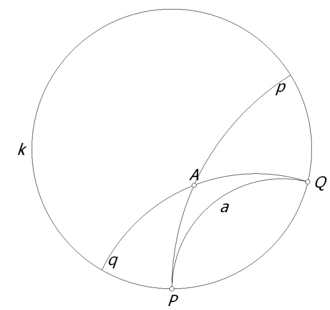
Aksioma 3.7: Neka su A, B i C tri h-tačke koje ne pripadaju istoj h-pravoj, a A', B' i C' takodje tri h-tačke koje ne pripadaju istoj h-pravoj. Ako su tada h-duži AB i AC h-podudarne h-dužma $A'B'$ i $A'C'$, a h-ugao $\angle BAC$ podudaran h-uglu $\angle B'A'C'$, onda je i h-ugao $\angle ABC$ h-podudaran h-uglu $\angle A'B'C'$.

Neka su redom parovi tačaka (A, B) i (A', B'); (B, C) i (B', C'); (C, A) i (C', A') podudarni. Tada postoji h-izometrija f koja slika A i B redom u A' i B', a slično kao u prethodnom slučaju možemo smatrati da f slika poluravan sa rubom AB koja sadrži C u poluravan sa rubom $A'B'$ koja sadrži C'. Neka je $f(C) = C_1$. Tada je (A, C) podudarno (A', C_1) i (B, C) podudarno (B', C_1). Pri tom su C' i C_1 u istoj poluravni sa rubom $A'B'$. Na osnovu prethodne aksiome postoji tačno jedna takva tačka, pa je $C_1 = C'$. Neka su D i D' tačke polupravih BC i $B'C'$ takve da je (B, D) podudarno (B', D'). h-izometrija f slika polupravu BC u polupravu $B'C'$, pa zbog podudarnosti slika tačku D u D'. Dakle f slika redom A i D u A' i D', pa su i odgovarajući parovi tačaka podudarni.

5.2.3 Aksiome neprekidnosti i aksioma paralelnosti

Kako su aksiome neprekidnosti zadovoljene na otvorenoj euklidskoj duži, to su zadovoljene i u ovom modelu gde smo definišući relaciju h-između postavili jednoznačnu korespondenciju između tačaka h-prave a i tačaka otvorene euklidske duži PQ, gde su P i Q beskonačno daleke tačke prave a.

Treba još pokazati aksiomu paralelnosti.



Slika 47.

Aksioma paralelnosti: Uočimo h-pravu a i van nje h-tačku A. Tačke u kojima kružnica ili prečnik a seče apsolutu k označimo sa P i Q, pri čemu te tačke nisu h-tačke i ne pripadaju pravoj a. Kroz tačke A i P prolazi uopštena kružnica p koja je uz to i ortogonalna na apsolutu, a kroz tačke A i Q prolazi uopštena kružnica q koja je ortogonalna na apsolutu. Sve ostale kružnice koje prolaze kroz A, a ortogonalne su na apsolutu, pripadaju jednom od dva para unakrsnih uglova koje obrazuju kružnice p i q. Sve kružnice iz jednog od tih uglova seku a, dok kružnice iz drugog para ne seku a.

U h-ravni, kroz tačku van prave, prolazi bezbroj h-pravih koje datu h-pravu seku, a takodje i bezbroj onih koje je ne seku.

Kako smo pokazali da važi i aksioma Lobačevskog, odnosno da je ovaj model model hiperboličke geometrije i naziva se Poenkareov model hiperboličke geometrije tj. Poenkareov disk model. Kako je ovaj model smešten u delu euklidske ravni, to i osnovni objekti tog modela i relacije su jedan deo geometrije Euklida. To znači da ako bismo našli protivrečnost u ovom modelu to bi impliciralo i protivrečnost u geometriji Euklida. Na osnovu ove povezanosti, navodimo sledeću teoremu:

Teorema 59 *Ako je geometrija Euklida neprotivrečna, neprotivrečna je i hiperbolička geometrija.*

Navedimo sledeće dve teoreme bez dokaza:

Teorema 60 *Ako se u inverziji u odnosu na krug k tačka X koja ne pripada krugu k preslikava na X', onda je svaki krug l koji sadrži tačke X i X' normalan na k.*

Teorema 61 *Ako se u osnoj refleksiji u odnosu na pravu p tačka X koja ne pripada pravoj p preslikava na tačku X′, onda je svaki krug l koji sadrži tačke X i X′ normalan na pravoj p.*

Tek kada smo pokazali da važe sve aksiome i postavili pojmove u Poenkareovom disk modelu, možemo govoriti o jako važnom pojmu, a to je paralelnost i o njegovoj interpretaciji u ovom modelu.

Ako dve h-poluprave sa zajedničkim temenom B imaju iste krajeve kao i neka h-prava a, koja ne sadrži B, tada će proizvoljna h-poluprava sa temenom B seći h-pravu a ako i samo ako pripada onom od h-uglova na koje zadate h-poluprave razlažu h-ravan, kojem pripada i h-prava a. Stoga za te dve h-poluprave možemo reći da su h-paralelne h-pravoj a. Za dve h-prave možemo reći da su medjusobno h-paralelne ako imaju jedan zajednički kraj.

Metrika se u h-ravni može uvesti preko inverznog rastojanja, na osnovu čega možemo uvesti pojam h-kruga kao skupa svih h-tačaka jednako udaljenih od izabrane h-tačke koju ćemo označiti kao centar h-kruga.

Inverzno rastojanje se u modelu definiše na sledeći način:

Definicija 27 *Neka su A i B dve h-tačke, a a i b dve h-prave upravne na pravoj AB, inverzno rastojanje medju krugovima koji sadrže h-prave a i b upravne na AB je h-rastojanje između h-tačaka A i B. Ovim je definisana funkcija na skupu parova h-tačaka A, B koja zadovoljava sve uslove da bude mera duži pa nju možemo nazvati h-rastojanjem ili h-metrikom.*

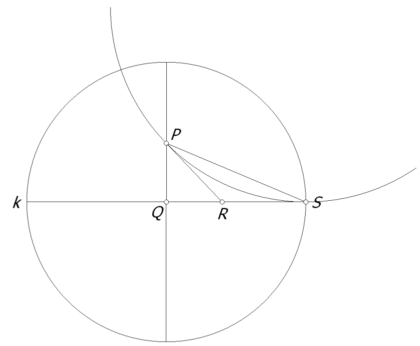
Dakle rastojenje u Poenkareovom disk modelu je dato sa:

$$\rho(A,B) = |ln[A,B;X,Y]| = 2\left|ln\left(\frac{X-A}{X-B} : \frac{Y-A}{Y-B}\right)\right|.$$

U Poenkareovom disk modelu važi i komfornost, što znači da su uglovi između h-pravih u hiperboličkom smislu jednaki euklidskim uglovima između uopštenih krugova koji ih definišu. Sada možemo pokazati da za ugao paralelnosti važi sledeća jednakost.

Teorema 62 *Ugao paralelnosti u Poenkareovom disk modelu dat je sa*

$$e^{-d} = tan[\Pi(d)/2].$$



Slika 48.

Dokaz: Neka je d Poenkareovo rastojanje od neke tačke P do neke Poenkareove prave l. Možemo da izaberemo da l bude dijametar kruga k, Q centar tog kruga tako da P pripada dijametru normalnom na l. Tada je $d = \bar{PQ}$ a $\Pi(d)$ predstavlja Poenkareov ugao paralelnosti koji obrazuju prava paralelna sa l i $p(\bar{PQ})$. Poenkareova prava kroz P paralelna sa l je luk kruga a, koji je ortogonalan na k, sadrži tačku P i ima jedan zajednički kraj sa l, pa je l tangenta na a. Dodirna tačka im je jedan kraj dijametra l i označimo je sa S. Tangenta na a u tački P seče l u nekoj unutrašnjoj tački R, koja predstavlja pol tetive PS kruga a pa su uglovi $\angle RPS$ i $\angle RSP$ jednaki i imaju zajedničku meru β. Neka je $\alpha = \Pi(d)$, mera ugla $\angle RPQ$. Kako je $\angle PRQ = 2\beta$, dobijamo da je jednaka proizvodu $r \cdot tan\beta$, gde je r poluprečnik apsolute k, pa koristeći identitet:

$$e^d = \frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta},$$

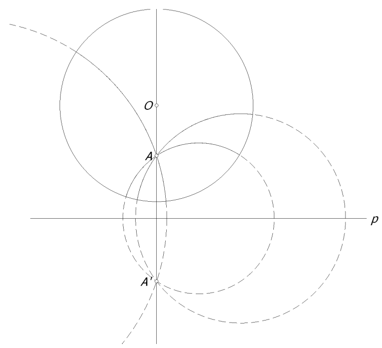
formulu za ugao β i trigonometrijske identitete

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}$$

dobijamo traženu formulu.

5.3 Epicikli u Poenkareovom disk modelu

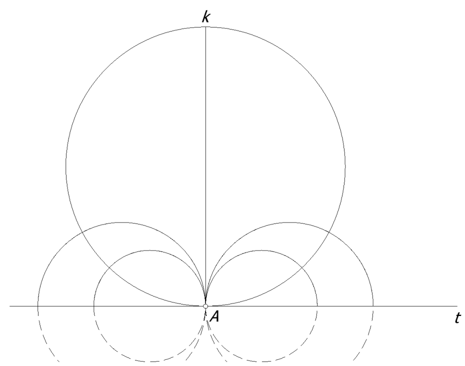
Opisali smo epicikle u geometriji Lobačevskog i primetili da postoje tri različita pramena pravih i to: eliptički, parabolički i hiperbolički. Sada ćemo videti kako se predstavljaju eliptički, parabolički i hiperbolički pramen pravih u Poenkareovom disk modelu.



Slika 49.

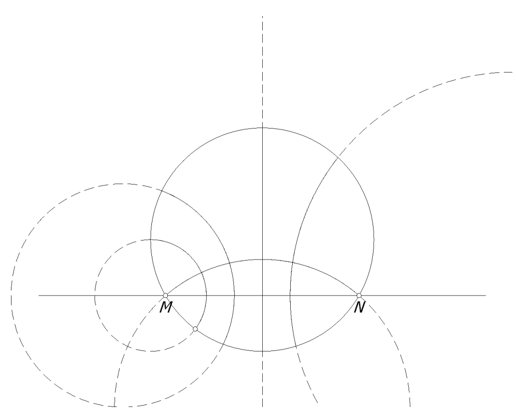
Eliptički pramen h-pravih se predstavlja kao skup skup svih h-pravih koje prolaze kroz neku h-tačku. Videli smo da u euklidskom smislu su to lukovi kružnica koje prolaze kroz tačku A, normalne su na kružnicu k i pripadaju unutrašnjosti kružnice k. Sve kružnice koje su normalne na kružnicu k i prolaze kroz tačku A, prolaze i kroz tačku A', koja je inverzna tački A u odnosu na kružnicu k. Otuda one obrazuju eliptički pramen kružnica sa karakterističnim tačkama A i A'. Prema tome eliptički pramen h-pravih, sa h-centrom u h-tački A, predstavljen je lukovima kružnica eliptičkog pramena A, A' koji pripadaju unutrašnjosti apsolute k, uključujući i prečnik apsolute koji prolazi kroz tačku A.

Parabolički pramen pravih je skup svih h-pravih sa zajedničkim krajem koje su predstavljene lukovima kružnica koje su normalne na apsolutu i sve prolaze kroz istu tačku A apsolute. Kako središta krugova koji sadrže h-prave jednog paraboličkog pramena pripadaju tangenti apsolute u zajedničkom kraju A zadatog pramena h-pravih, h-prave nekog paraboličkog pramena pripadaju krugovima nekog paraboličkog pramena krugova (slika 50.).



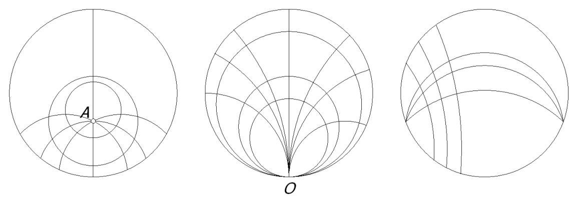
Slika 50.

Hiperbolički pramen h-pravih predstavlja skup svih h-pravih normalnih na apsolutu k ili na h-pravu a. Neka luk uopštene kružnice a reprezentuje bazisnu pravu pramena i neka su M i N tačke preseka kružnica k i a. Elementi hiperboličkog pramena pravih, sa bazisnom pravom a, su predstavljeni lukovima kružnica koje su normalne i na kružnicu k i na kružnicu a. Znači, da one obrazuju pramen konjugovan pramenu (k, a). Kako je (k, a) eliptički, njemu konjugovan pramen je hiperbolički pramen. Linija centra tog pramena je prava MN.



Slika 51.

Krug koji je upravan na svim krugovima zadatog pramena krugova, će biti skup svih slika proizvoljne tačke ravni u inverzijama u odnosu na krugove nekog pramena, pa će h-epicikl će biti krug ili deo tog kruga. On neće biti upravan na apsoluti sem u slučaju kada je taj h-epicikl osnova neke h-ekvidistante.



Slika 52.

U pramenu konkurentnih pravih, odgovarajući h-krug će biti krug koji pripada h-ravni, čiji centar ne mora biti centar euklidskog kruga. Kako je h-oricikl upravan na paraboličkom pramenu h-pravih, on će biti euklidski krug kome nedostaje zajednički kraj h-pravih zadatog paraboličkog pramena. Ako je zadat hiperbolički pramen h-pravih, sa bazisnom pravom s, njemu odgovarajuća h-ekvidistanta je deo euklidskog kruga koji je upravan na zadatom pramenu krugova. Ekvidistantu takođe predstavlja još jedna grana koja se dobija h-simetrijom u odnosu na h-pravu s. Ako je h-prava s deo kružnice h-simetrija je inverzija u odnosu na tu kružnicu, a ako je h-prava s prečnik apsolute tada je h-simetrija osna simetrija u odnosu na pravu s.

5.4 Poenkareov poluravanski model

Predstavili smo geometriju Lobačevskog u Poenkareovom disk modelu. Pored disk modela, geometrija Lobačevskog je zadovoljena i u Poenkareovom poluravanskom modelu. Pre nego što vidimo da je zaista tako, dajemo opis tog Poenkareovog poluravanskog modela.

Bilinearnim preslikavanjem

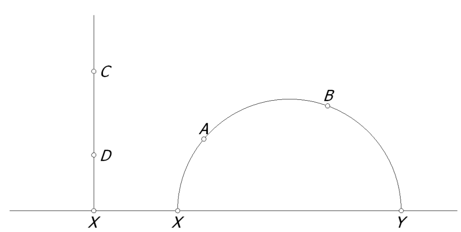
$$f(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

unutrašnjost jediničnog diska P, σ koji pripada kompleksnoj ravni π, se preslikava u gornju poluravan, a kružnica (apsoluta) se preslikava u x-osu koja predstavlja rub te poluravni.

$$B_\omega = R\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar{z}}{1-\bar{z}}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}.$$

Zato je $B_\omega > 0$, tj. $f(z)$ pripada gornjoj poluravni ako i samo ako je $|z| < 1$, tj. ako z pripada jediničnom krugu. Preslikavanje f je bijekcija jediničnog diska i gornje poluravni. Na taj način, od Poenkareovog disk modela dobijamo model u gornjoj poluravni, koji nazivamo poluravanski model i označavamo sa H.

Bilinearno preslikavanje f, krugove i prave normalne na jedinični krug preslikava u krugove i prave normalne na x-osu. Zato su prave u poluravanskom modelu poluprave upravne na x-osu i polukrugovi sa centrom na x-osi i nazivamo te prave h-pravama (slika 56.).



Slika 53.

Osu x koja sadrži centar polukruga i podnožje prave upravne na nju zvaćemo apsolutom neeuklidske ravni tj. otvorene euklidske poluravni, a duž CD h-prave upravne na x-osu predstavljaće h-duž kao i deo luka XY od tačke A do tačke B.

A U slučaju kada je prava AB poluprava normalna na x-osu u tčki X, tačka Y je beskonačno daleko. Zato je u tom graničnom slučaju

$$\rho_h(A,B) = \left| ln\frac{X-A}{X-B} \right|.$$

Sada prikazujemo pojmove h-ugla i h-trougla u poluravanskom modelu.

Slika 54. (h-ugao i h-trougao)

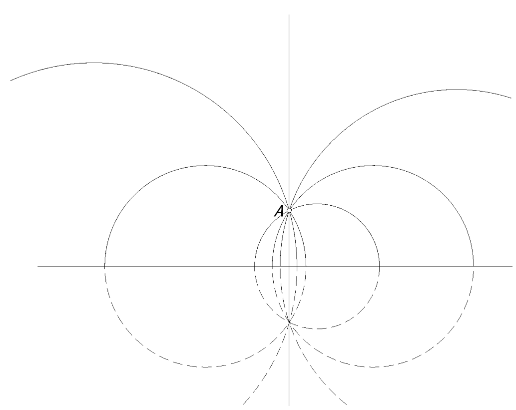
Na slikama vidimo h-ugao $\angle AOB$ i h-trugao $\triangle ABC$ u poluravanskom modelu.

5.5 Epickili u Poenkareovom poluravanskom modelu

Videli smo kako se tri različita tipa pramenova predstavljaju u Poenkareovom disk modelu. Sada ćemo dati prikaz ta tri pramena u Poenkareovom poluravanskom modelu.

Eliptički, parabolički i hiperbolički pramenovi h-pravih h-ravni π se dobijaju kao slike odgovarajućih pramenova Poenkareovog disk modela u preslikavanju f. Budući da h-prave nekog pramena h-pravih h-ravni σ pripadaju krugovima nekog pramena krugova, i h-prave pramena h-pravih h-ravni π pripadaju krugovima nekog pramena krugova.

5.5.1 Eliptički pramen u Poenkareovom poluravanskom modelu



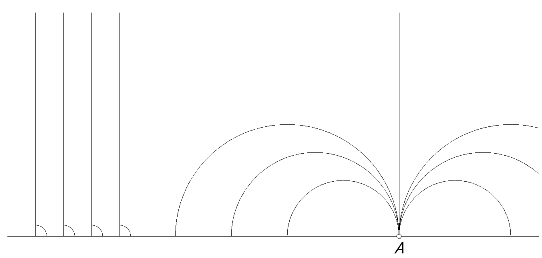
Slika 55.

Posmatrajmo sve h-prave koje prolaze kroz tačku A. To su u euklidskom smislu polukružnice, čiji centri leže na pravoj p i koje prolaze kroz tačku

A, tom skupu pripada i normala na pravu p koja prolazi kroz tačku A. Odgovarajuće kružnice, nosači uočenih polukružnica, prolaze kroz tačku A' koja je simetrična tački A u odnosu na apsolutu p. Tako one obrazuju eliptički pramen sa karakterističnim tačkama A i A'. (Slika 55.)

To znači, eliptički pramen pravih u Poenkareovom poluravanskom modelu predstavljen je delovima elemenata eliptičkog pramena kružnica, koji leže sa uočene strane apsolute p, uključujući i odgovarajući deo potencijalne ose tog pramena. Linija centra toga pramena kružnica je apsoluta p, a karakteristična tačka pramena koja leži u h-ravni je h-centar eliptičkog pramena h-pravih.

5.5.2 Parabolički pramen u Poenkareovom poluravanskom modelu

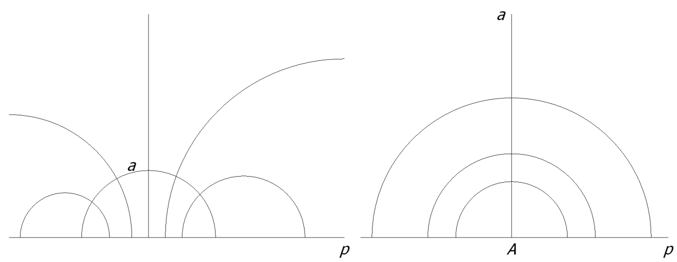


Slika 56.

Analogno kako i za prethodni pramen, skup svih polukružnica na apsoluti p koje imaju jednu zajedničku tačku na apsoluti, uključujući i polupravu koja je u toj tački normalna na apsolutu. Tako je parabolički pramen h-pravih reprezentovan delom paraboličkog pramena kružnica koji leži u h-ravni.

Parabolički pramen h-pravih je takođe reprezentovan i skupom svih polupravih sa početnom tačkom na apsoluti, a koje su normalne na apsolutu (Slika 56.).

5.5.3 Hiperbolički pramen u Poenkareovom poluravanskom modelu



Slika 57.

Neka je bazisna h-prava pramena euklidska polukružnica a. Prave hiperboličkog pramena pravih reprezentovane su polukružnicama sa centrima na apsoluti koje su normalne na kružnicu a. Konstrukcijama normala na datu pravu dobijamo opis hiperbolički pramen pravih (Slika 57.).

Ako je bazisna prava poluprava a upravna na apsolutu u tački A, tada je hiperbolički pramen reprezentovan sistemom koncentričnih polukružnica sa zajedničkim centrom A (Slika 57.).

Bilinearnim preslikavanjem f h-krugovi h-ravni σ se preslikavaju na euklidske krugove h-ravni π, pa predstavljaju h-krugove h-ravni π. Tom inverzijom h-oricikli h-ravni σ preslikavaju se na euklidske prave h-ravni π koje su euklidski paralelne rubu p poluravni π, i na euklidske krugove poluravni π koji dodiruju pravu p. Stoga se skup h-oricikala h-ravni π sastoji iz euklidskih pravih poluravni π koje su paralelne pravoj π i krugova te poluravni koju dodiruju p. Bilinearnim preslikavanjem f h-ekvidistante h-ravni σ preslikavaju se na euklidske poluprave sa temenima na pravoj p, i na lukove krugova čija temena pripadaju pravoj p. Stoga se skup h-ekvidistanti h-ravni π sastoji iz euklidskih h-polupravih kojima su temena na rubu p poluravni π i krugova čija temena pripadaju pravoj p.

5.6 Klajnov model

Za Klajnov model κ uzima se unutrašnjost fiksiranog kruga k. Tačke tog modela čine sve tačke koje se nalaze u unutrašnjosti kruga, a prave su tetive tog kruga. Relacija između se, u tom modelu, nasleđuje iz ravni.

Neka su $a, b \in \kappa$ dve fiksirane tačke. Neka su x i y krajnje tačke tetive kruga k koja sadrži a i b. Definišimo nenegativnu funkciju $\rho : \kappa \to \kappa$ sa

$$\rho(a,b) := \frac{1}{2}|ln[a,b;x,y]| = \frac{1}{2}\left|ln\left(\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b}\right)\right|$$

Ovako definisana funkcija zadovoljava sledeće osobine:

1. $\rho(a,b) = 0$ akko $a = b$;
2. $\rho(a,b) = \frac{1}{2}|ln[a,b;x,y]| = \frac{1}{2}|ln[b,a;x,y]^{-1}| = \frac{1}{2}|-ln[b,a;x,y]| = \rho(b,a)$

Da bi funkcija ρ bila metrika, a Klajnov model (κ, ρ) metrički prostor, treba da važi i nejednakost trougla:

$$\rho(a,c) + \rho(c,b) \geq \rho(a,b); a,b,c \in \kappa.$$

Možemo primetiti da definicija funkcije ρ ne zavisi od označavanja tačaka x i y, tj važi $[a,b;x,y] = -[a,b;y,x]$, pa zamenom mesta x i y poništi apsolutnu vrednost logaritma. Vidi se da uz raspored $\mathcal{B}(y,a,b,x)$ važi

$$[a,b;x,y] = \left|\frac{x-a}{x-b}.\frac{y-b}{y-a}\right| > 1 \times 1 = 1$$

pa je $\rho(a,b) = \frac{1}{2}ln[a,b;x,y] > 0$, što znači da možemo izostaviti apsolutnu vrednost.

Pretpostavimo da su tačke $a, b, c \in \kappa$ kolinearne, tako da pripadaju tetivi (xy) i važi $\mathcal{B}(a,c,b)$ odnosno $\mathcal{B}(y,a,c,b,x)$. Tada važi

$$\rho(a,c) + \rho(c,b) = \frac{1}{2}ln[a,c;x,y] + \frac{1}{2}ln[c,b;x,y]$$

$$= \frac{1}{2}ln([a,c;x,y][c,b;x,y]) = \frac{1}{2}ln[a,b;x,y] = \rho(a,b)$$

gde je treća jednakost dobijena na osnovu identiteta

$$\left(\frac{x-a}{x-c} : \frac{y-a}{y-c}\right) \cdot \left(\frac{x-c}{x-b} : \frac{y-c}{y-b}\right) = \left(\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b}\right)$$

Teorema 63 *Klajnov model (κ, ρ) je metrički prostor.*

Smatramo da je par tačaka A, B podudaran paru tačaka C, D ako je $\rho(A,B) = \rho(C,D)$. Može se pokazati da tačke i prave Klajnove ravni i relacije između i podudarnosti parova tačaka zadovoljavaju aksiome prve četiri grupe kao i aksiomu Lobačevskog. Ovim je dat jedan model hiperboličke geomtrije ravni.

6 Zaključak

Nastanak savremene ideje revolucionarne geometrije pratio je dug i mučan proces u razvoju matematičke misli. Veliki problem, oko kojeg su se sakupljali najveći matematički umovi, dugi niz vekova, izrodio je kao rešenje, veliku i sasvim novu teoriju. U ovom radu izložen je, u kratkim crtama, tok tog procesa, s akcentom na istorijsku pozadinu, lutanja, pokušaje i osnovne ideje koje su utemeljile jedan sasvim novi svet u teoriji geometrije i njenog zasnivanja. Vidimo kako tri različite vrste geometrijskog prostora stoje jedan pored drugog, svaki podjednako valjan i svaki podjednako ispravan.

Literatura

[1] Z.Lučić, Euklidska i hiperbolična geometrija, Matematički fakultet, Beograd, 1997

[2] S.Mintakovic, Neeuklidska geometrija Lobačevskog,Zagreb 1972

[3] D.Lopandić, Geometrija

[4] M.Prvanović, Neeuklidske geomtrije, Novi Sad 1974

[5] M.Stanković, Osnovi geometrije, PMF, Niš 2006

[6] S.Vukmirović, Modeli geometrije Lobačevskog

[7] D. Lopandić, Geometrija Lobačevskog