

Математички факултет
Универзитет у Београду



Системи линеарних једначина у осмом разреду основне школе

Ментор:

Александар Липковски

Студент:

Драгана Бјелић

1146/2015

Септембар 2018. године

Предговор

Овај рад намењен је широком кругу читалаца, а пре свега осмацима, као и средњошколцима и њиховим наставницима. Тема рада је систем две линеарне једначине са две непознате, као и методе решавања истог, на начин на који се ова тема обрађује у основним школама.

Из личног искуства у раду са ученицима увидела сам да је осмацима, после геометрије, област система линеарних једначина најтежа и да постоји проблем када је у питању ова област математике у основним школама, па отуда и жеља да се систематизује и на једном месту објаве сви задаци, примери и дефиниције објашњене на различите начине. Обухваћени су сви уџбеници по којима се тренутно ради. Покушала сам да проникнем у срж проблема са циљем да нађем решење или идеје које би помогле ученицима у њиховом даљем образовању.

Такође бих препоручила рад Бранковић Биљане „Системи једначина у школи са освртом на проблемске задатке мастер рад¹“. Рад обухвата системе једначина у основној и средњој школи, са акцентом на математику у гимназијама општег смера и средњим стручним школама, у све четири године учења математике. У раду се налази све што је битно за системе једначине у основном и средњем образовању, са додатком изабраних проблемских задатака и задатака са такмичења за ученике средњих школа.

¹ http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/4248/Brankovic_Biljana.pdf?sequence=1.

Садржај

1. Увод.....	6
2. Историјат и примена.....	7
3. Системи линеарних једначина и план и програм у осмом разреду основних школа 12	
3.1. Општи приказ система линеарних једначина.....	12
3.2. План и програм система линеарних једначина у осмом разреду основних школа13	
4. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Klett).....	16
4.1. Системи линеарних једначина	16
4.2. Линеарна једначина са две непознате	17
4.3. Систем од две линеарне једначине с две непознате	18
4.3.1. Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате.....	19
4.4. Еквивалентност система линеарних једначина	21
4.5. Решавање система методом замене	23
4.6. Решавање система методом супротних коефицијената	26
4.7. Примена система линеарних једначина	28
5. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Креативни центар).....	33
5.1. Систем од две линеарне једначине са две непознате	33
5.1.1. Једначина са две непознате	33
5.1.2. Решење линеарне једначине са две непознате	33
5.1.3. Систем од две линеарне једначине са две непознате	34
5.1.4. Решење система од две линеарне једначине са две непознате.....	35
5.2. Решење система од две линеарне једначине са две непознате – графички приказ	36
5.2.1. Графички приказ решења линеарне једначине са две непознате.....	37
5.2.2. Графички приказ решења система од две линеарне једначине са две непознате	37
5.3. Решење система од две линеарне једначине са две непознате	39
5.3.1. Збир две линеарне једначине	39
5.3.2. Еквивалентни системи линеарних једначина.....	40
5.4. Решење система од две линеарне једначине са две непознате – метода смене	42
5.4.1. Метода замене	42
5.5. Решење система од две линеарне једначине са две непознате – метода супротних коефицијената.....	44
5.5.1. Метода супротних коефицијената.....	44
5.6. Примена система линеарних једначина	46

5.6.1.	Примена система линеарних једначина.....	46
5.7.	ЗАПАМТИ	47
6.	Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Завод за уџбенике).....	48
6.1.	Појам система линеарних једначина са две непознате	48
6.2.	Еквивалентност система линеарних једначина са две непознате	51
6.3.	Решавање система линеарних једначина са две непознате методом смене	53
6.4.	Решавање система линеарних једначина са две непознате методом супротних коефицијената.....	55
6.5.	Графички приказ решења система линеарних једначина са две непознате	57
6.6.	Примена система линеарних једначина са две непознате.....	61
7.	Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Круг)	64
7.1.	Појам линеарне једначине са две непознате.....	64
7.2.	Појам система од две линеарне једначине са две непознате. Еквивалентност система линеарних једначина	65
7.3.	Решавање система методом замене и методом супротних коефицијената. Графички приказ решења	67
7.3.1.	Решавање система методом замене.....	67
7.3.2.	Решавање система методом супротних коефицијената	69
7.3.3.	Графички приказ решавања система линеарних једначина са две непознате.....	71
7.4.	Примена система линеарних једначина при решавању разних проблема.....	74
8.	Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Герундијум)	76
8.1.	Појам, решење и еквивалентност једначина с две непознате	76
8.2.	Појам и решење система две линеарне једначине с две непознате.....	78
8.3.	Еквивалентност система две линеарне једначине с две непознате	79
8.4.	Решавање система методом замене	80
8.5.	Решавање система методом супротних коефицијената	82
8.6.	Примене система линеарних једначина с две непознате	84
9.	Системи линеарних једначина с две непознате („Математика 8“, издавач Математископ.....	88
9.1.	ЛИНЕАРНА ЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ	88
9.2.	СИСТЕМ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ	92
9.3.	РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА.....	95
	Графичка метода	95
9.4.	МЕТОДА ЗАМЕНЕ ПРОМЕНЉИВЕ	98
9.5.	МЕТОДА СУПРОТНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА	101
9.6.	ПРИМЕНА СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА	103
10.	Компарација уџбеника различитих издавача	106
11.	Пробни завршни испит – резултати	110

12.	Задаци са такмичења.....	112
13.	Закључак	115

1. Увод

Тема која је обрађена у овом раду има за циљ да представи како су кроз различите уџбенике обрађени системи линеарних једначина у основним школама.

У првом делу рада дат је историјски део везан за настанак и развој система линеарних једначина, као и њихов значај и примена у свакодневном животу.

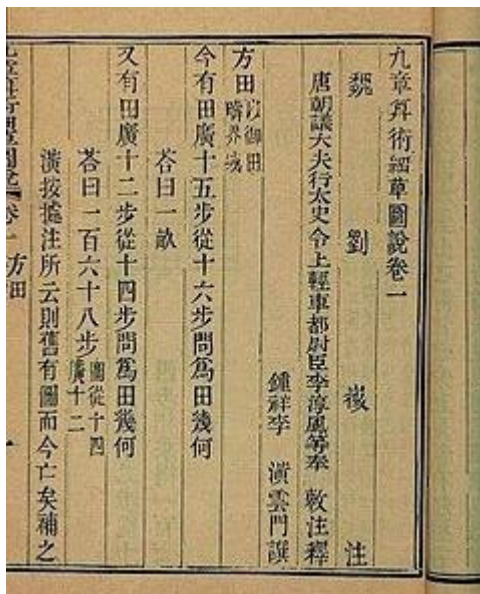
Следеће поглавље обухвата наставни план и програм за осми разред основних школа, У наставку рада, обрађене су дефиниције и појмови система линеарних једначина, методе решавања система (графички приказ, метода замене и метода супротних коефицијената) и њихова примена, појединачно за сваки уџбеник, од издавача Klett, Креативни центар, Завод за уџбенике, Круг, Герундијум и Математископ.

На крају рада дата је анализа резултата ученика на ову тему из непосредне школске праксе аутора. Паралелно, методом компарације уочене су предности и недостаци наведених уџбеника, и додато је још задатака за самостално вежбање ученика.

2. Историјат и примена

Решавање система линеарних једначина има дугу историју. Свака напредна култура - древни Ирак, Египат, Индија, Кина, Маје - решила је систем две линеарне једначине са две непознате. Пре око 4000 година, људи из Вавилона су знали решити једноставан 2×2 систем линеарних једначина са две непознате.

Прва општа употреба матрица и рекурзивних алгоритама који се сада назива "Гаусова елиминација" појавила се у старој кинеској књизи „Девет поглавља о математичкој уметности“ (или „Математика у девет поглавља“), објављеној за време Хан династије, око 200 година пре нове ере. Они су показали способност решавања 3×3 система једначина. Неки историчари сматрају да је књигу писало више генерација током 10-ог до 2-ог века пре нове ере, док други сматрају да је књига написана око 200 година пре нове ере, након спаљивања свих књига, које је 213. године пре нове ере наредио први кинески цар Ћин Ши Хуанг, да би се спречио утицај конфучијанизма. Ова књига је један од најранијих преосталих математичких текстова из Кине. Записи у књизи обично имају облик изјаве о проблему, затим изјаве о решењу и објашњења процедуре која је довела до решења. Она поставља приступ математици која се фокусира на проналажење најопштијих метода решавања проблема, што је у контрасту са приступом математичара из древне Грчке, који су имали тенденцију да долазе до закључака на основу почетног скупа аксиома.



Једна страна из књиге
„Математика у девет поглавља“

Да би разумели математику која се појављује у „Девет поглавља“, важно је најпре размотрити математичке алате и идеје које су Кинези имали у тренутку када је ова књига написана. Један од најстакнутијих алата у употреби око 200 година пре нове ере у Кини биле су табле за рачунање, на којима су штапићи од бамбуса или слоноваче распоређени у правоугаоним низовима, тако да се могу вршити различити прорачуни, укључујући и основне рачунске операције: сабирање, одузимање, множење и дељење. Кинези су користили позициони бројевни систем, са различитим записом за цифре на парним и цифре на непарним местима у запису природног броја, гледано с десна на лево, и празним местом за нулу, која је уведена тек касније у VIII веку.

Позитивни бројеви:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10^{2n}		I	II	III	IIII	IIII	┐	┐┐	┐┐┐	┐┐┐┐
10^{2n+1}		—	=	≡	≡≡	≡≡≡	┐	┐┐	┐┐┐	┐┐┐┐

Негативни бројеви:

	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
10^{2n}		I	II	III	IIII	IIII	┐	┐┐	┐┐┐	┐┐┐┐
10^{2n+1}		—	=	≡	≡≡	≡≡≡	┐	┐┐	┐┐┐	┐┐┐┐

Примери:

231		II	≡	I
5089	≡≡≡		┐	┐┐┐
-407		IIII		┐┐
-6720	┐	┐┐	=	

О системима линеарних једначина говори се у осмом поглављу, које се састоји од 18 проблема, од којих су сви линеарни системи са 2 до 6 једначина и непознатих. Једина разлика са савременом методом је да се коефицијенти стављају у колоне, а не у редове. Матрица се онда своди на троугаону форму. Сви проблеми имају јединствено решење са једнаким бројем непознатих и једначина, изузев једног који је имао једну непознату више, а то је аутор решио додавањем додатног улова задатка. То указује на чињеницу да су Кинези имали снажну интуицију да број непознатих мора бити једнак броју једначина, да би се обезбедило јединствено решење. Међутим, како изворни текст садржи само изјаве о проблему са описима како их решити, није познато које претпоставке су имали као оправдање за интуицију математичара тог времена.

Тринаест од осамнаест проблема у овом поглављу односи се на агрикултуру, и бави се питањем количине стоке или зрна (по броју, тежини, запремини или трошковима). Други проблеми варирају од практичних (повлачење силе коња, количине воде које користе породице које деле комунална добра и количине пилећег меса које људи једу на основу њихових друштвених класа) до загонетних (комбинације различитих врста новчића, тежине врабаца и гутљаја). То су докази о постојању

заједничке валуте за трговину, удомњавање коња за вучу и класну структуру кинеског друштва око 200. године пне. Први проблем у поглављу гласи:

*3 снопа доброг, 2 снопа средњег и 1 сноп лошег жита дају 39 мерица зрна,
2 снопа доброг, 3 средњег и 1 лошег дају 34 мерица зрна, а
1 сноп доброг, 2 средњег и 3 лошег жита дају 26 мерица зрна.
Тражи се количина зрна у снопу доброг, средњег и лошег жита.*

Кинески поступак елиминације, за разлику од Гаусовог, подразумева вертикални запис коефицијената система. У наведеном примеру, који преводимо у систем једначина

$$3x+2y+z=39$$

$$2x+3y+z=34$$

$$x+2y+3z=26$$

записали бисмо коефицијенте у облику

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

а у кинеском решењу одмах су поређане једначине тако да се смањи број потребних операција (довођење „1“ у горњи леви угао) и поређани су вертикално, пошто су Кинези у то време писали усправно.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Решење система је уређена тројка бројева $(37/4, 17/4, 11/4)$.

Пример у коме имамо једну непознату више од броја једначина је следећи:

Из три бурета у којима су биле једнаке количине пиринча, три лопова су крали пиринча. Испоставило се да је у првом бурету остао 1 г' пиринча, у другом 1 сјинг 6 г'-а, и у трећем 1 г'. Први лопов је признао да је узимао пиринча помоћу лопате, други да је користио своју дрвену ципелу, а трећи чинију. Први је лопов узимао само из првог бурета, други само из другог, а трећи из трећег. У лопату може да стане 1 сјинг 9 г', у дрвену ципелу 1 сјинг 5 г', а у чинију 1 сјинг 2 г'-а. Колико је који лопов узео пиринча, ако је познато да је 10 г' један сјинг, 10 сјинг 1 тао, а 10 тао један ш'?

Решење које ће бити размотрено, подразумева да се прво задатак „преведе“, тако што установимо које су величине непознате и која је веза међу њима. Непозната је количина пиринча у бурадима, и нека је она означена са X . Непознато је колико пута је који од лопова захватао пиринча из „свог“ бурета, али по резултатима се види да је онај који је користио чинију, а у њу стане мање пиринча него у лопату или дрвену ципелу, био најбржи! Нека су величине A , B , C бројеви захвата првог, другог и трећег лопова редом. С обзиром на дату везу мерних јединица, може се записати да у лопату стане 1.9, у дрвену ципелу 1.5, а у чинију 1.2 сјинга пиринча. Стога ће и величина X бити изражена у истој мери. Према условима задатка (односно пљачке), добија се систем једначина:

$$1.9A+0.1=X$$

$$1.5B+1.6=X$$

$$1.2C+0.1=X$$

Посматрани систем има три једначине, а четири непознате, уз додатни услов, који произилази из природе задатка, да су A , B , C природни бројеви. Ако се од прве једначине одузме друга, добија се:

$$1.9A - 1.5B - 1.5 = 0,$$

а ако се од прве једначине одузме трећа добија се:

$$1.9A - 1.2C = 0$$

Ако се једначина помножи са 10 добија се:

$$19A - 12C = 0.$$

Из ове једначине, пошто су 12 и 19 узајамно прости бројеви, а A и C природни бројеви следи да мора бити $A = 12k$, а $C = 19k$, где је k неки природни број. Кад се прва једначина помножи са 10 и уврсти вредност за A добија се:

$$19 \cdot 12k - 15B - 15 = 0$$

Треба одредити природни број k за који је број $19 \cdot 12k - 15$ дељив са 15. Најмањи такав број је 5. Дакле, први лопов је захватао 60 пута, други 75 пута, а трећи 95 пута. У сваком од буради било је по 1140.1 сјинга пиринча, а то је 114.01 тао пиринча, односно 11.401 ш'-а.

И у европској математици овај алгоритам је био познат много пре Гауса. Француски калуђер и математичар Бутео је у књизи „*Logistica*“ из 1559. године на исти начин решавао линеарне системе. Снага и напредак у линеарној алгеби нису се остварили до краја 17. века. Гаус је поново открио ову методу око 1800. године, као део његових „апроксимација најмањих квадрата“. Први пут се прославио када је користио свој метод апроксимације да предвиди на ком месту ће се следећи пут појавити астероид Церес (чији је пречник мањи од 1000 км), засновано на претходним запажањима кретања овог астероида. Гаус је морао да реши систем од 16 линеарних једначина², које је редуковао у 4 једначине са 3 непознате. Његови тачни прорауни помогли су предвиђању тачне орбите овог астероида. Методу најмањих квадрата, објавио је у књизи „*Theoria motus coelestium*“ (Theory on the Motion of Heavenly Bodies moving in Conic Sections), 1809. године, и објаснио да систем линеарних једначина има јединствено решење, бесконачно много решења или нема решења³.

Деветнаести и рани двадесети век донели су преформулисање проблема у смислу векторских простора и линеарних трансформација. Изум електронског рачунарства средином двадесетог века дао је подстицај за потрагу за бољим алгоритмима за проблеме у науци и инжењерству, који обично укључују стотине или чак хиљаде непознатих.

² Veronique Le Corvec; Jeffrey Donatelli; Jeffrey Junt, How Gauss Determined the Orbit of Ceres, стр. 8.

³ Christine Andrews-Larsin, Roots of Linear Algebra: An Historical Exploration of Linear Systems, стр. 514

Значај система линеарних једначина

Системи линеарних једначина имају многобројне примене, као што су процене, предвиђање, обрада дигиталних сигнала, линеарно програмирање итд. Представљају веома важну компоненту у повезивању и разумевању битних елемената алгебарских израза и појмова.

Системи линеарних једначина прожимају све области научног рачунања; физичке науке, хемију, економију, инжењерство, рачунарство и многе друге. Они су најважније средство у научном истраживању, развоју и технологији. Многи други проблеми који директно не укључују линеарне једначине, решавају се помоћу итеративних метода, које обично у свакој итерацији укључују један или више система линеарних једначина које треба решити.

Економисти и предузетници у стварном свету користе системе линеарних једначина да сазнају када је понуда једнака тражњи. Све је у вези новца, а ако не знате бројеве када имате бизнис, можда ће пропасти. Оне нам могу помоћи у решавању многобројних проблема у свакодневном животу, иако тога често нисмо ни свесни. Најчешће их примењујемо када желимо да израчунамо када ће нас нешто коштати јефтиније: на пример коју тарифу изабрати и код ког мобилног оператера, у зависности од цене минута, порука и GB за интернет, као и количине истих која се добија уз дати пакет. Затим, да израчунамо најбољу или најкраћу руту за наше путовање; као и да на том путовању одредимо коју rent-a-car агенцију да изаберемо, узимајући за непознате, на пример, цена по пређеном километру и издавање на дан. Тако ћемо увидети која агенција нам штеди новац за различите пређене километре. Затим, једна јако важна ставка, код узимања кредита од банака, у зависности од дужине трајања кредита (месеци, године), камате и месечне рате, можемо израчунати који кредит је најповољнији за нас. Исто важи и за штедњу на рачуну, планирање буџета или инвестирање у неки пројекат. Такође, контрола лета користи једначине да буде сигурна да се два авиона неће сусрести у исто време. И једна занимљива информација. Сваки човек на планети који користи интернет, скоро свакодневно користи Google претраживач, а ретко ко се запита или размишља о томе како овај претраживач ради и на који начин нам даје листу најпопуларнијих и најпосећенијих сајтова. Па у њиховом алгоритму за ранкирање страница се такође користе системи линеарних једначина и хиперматрица.

3. Системи линеарних једначина и план и програм у осмом разреду основних школа

3.1. Општи приказ система линеарних једначина

У општем случају, под системом линеарних једначина подразумевамо систем од m једначина са непознатих n :

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

где су $x_1, x_2, \dots, x_n$ непознате величине, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ коефицијенти, а $b_1, b_2, \dots, b_m$ слободни чланови. При томе, број једначина m и број непознатих n могу бити у било ком од односа $m < n$, $m = n$ или $m > n$.

Под решењем система линеарних једначина подразумевамо било који скуп од n бројева $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ који за $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ идентички задовољава систем.

Према томе да ли има или нема решења, и уколико их има, да ли има једно јединствено или више решења, систем линеарних једначина може бити:

- 1) *одређен*, ако има само једно решење.
- 2) *неодређен*, ако има више од једног (бесконачно много) решења,
- 3) *немогућ* (противречан), ако нема решења.

Одређени и неодређени системи се називају једним именом *сагласним системима*. Сагласан систем, дакле, има бар једно решење. Ако су сви слободно чланови система једнаки нули:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$$

систем је *хомоген*, у противном је *нехомоген*. Сваки хомоген систем је сагласан, јер има бар једно решење:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

Ово решење се назива *тривијалним решењем*. Уколико је хомоген систем одређен, он има само тривијално решење. Неодређен хомоген систем има и решења која су *нетривијална*.

Два система линеарних једначина су еквивалентна ако је свако решење једног система истовремено и решење другог система и обрнуто.

Трансформације које систем линеарних једначина преводе у њему еквивалентан систем су:

1. Замена места двеју једначина,
2. Множење свих коефицијената једне једначине константом $c \neq 0$,
3. Додавање коефицијената једне једначине одговарајућим коефицијентима неке друге једначине.

Системе линеарних једначина можемо решавати помоћу више метода: метод смене, метод супротних коефицијената, графички метод, Гаусов поступак елиминације, помоћу детерминанти, матрицама итд.

Под системом од две линеарне једначине са две непознате x и y подразумевамо:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Ово је такозвани „прост“ систем до кога увек можемо доћи еквивалентним трансформацијама. Овде су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ дати реални бројеви (понекад и параметри). Решење система је уређен пар бројева (x_0, y_0) за који важи да је:

$$a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 = c_2.$$

3.2. План и програм система линеарних једначина у осмом разреду основних школа

У основној школи, појам система линеарних једначина први пут се појављује у осмом разреду и најчешће се обрађује у другом полугодишту. У оба полугодишта наизменично се смењују геометрија и алгебра, с тим што се у првом полугодишту обрађују линеарне једначине и неједначине са једном непознатом, а затим се у другом полугодишту обрађују линеарне функције и њихов график, након чега се обрађују системи линеарних једначина, који обухватају све три претходне области.

Годишњи фонд часова за осми разред основних школа износи 136 часова, 4 часа недељно, од чега је 12 часова предвиђено за системе линеарних једначина. Од тога је 6 часова предвиђено за обраду новог градива, 5 за утврђивање и 1 за проверу знања.

Преглед наставних јединица предвиђених годишњем планом и програмом, приказан је у следећој табели:

Редни број наставне теме	Редни број наставне јединице	Наставна јединица	Тип часа
8.	95.	Линеарна једначина са две непознате	обрада
	96.	Еквивалентни системи. Решавање система	обрада
	97.	Систем две једначине са две непознате. Решење система	обрада
	98.	Графички начин решавања система линеарних једначина	обрада
	99.	Решавање система две линеарне једначине са две непознате методом супротних коефицијената	обрада
	100.	Решавање система две линеарне једначине са две непознате методом супротних коефицијената	утврђивање
	101.	Решавање система једначина методом замене	обрада
	102.	Решавање система једначина методом замене	утврђивање

	103.	Примена система једначина у решавању задатака	утврђивање
	104.	Примена система једначина у решавању задатака	утврђивање
	105.	Примена система једначина у решавању задатака	утврђивање
	106.	Системи, методе решавања, примене	писмена провера знања

- Табела 1 –

Ученици треба да упознају линеарну једначину с две непознате, график једначине с две непознате (права) и појам система једначина; они треба да знају да је график једначине $ax + by + c = 0$, где је $a \neq 0$ или $b \neq 0$ права и да умеју да нацртају тај график. Графички приказ и интерпретација система линеарних једначина с две непознате имају значајну улогу. Решавати једноставније облике система методама замене и супротних коефицијената. У изучавању линеарних једначина с једном непознатом и система линеарних једначина доста пажње треба посветити њиховој примени у решавању разних једноставних проблема.

Планом је утврђено да се најпре обради графички приказ система линеарних једначина, пошто су ученици већ упознати са графиком линеарне функције, па затим метода супротних коефицијената и метода замене, и примена система у текстуалним задацима, мада то не мора бити правило. Неопходно је да се осмишљеним планирањем наставе изврши понављање и повезивање градива наставних садржаја из претходних разреда и „текућег” градива. Такође, пожељно је повезати наставне садржаје предмета математика са наставним садржајима других предмета.

➤ **Образовни задаци:**

Ученици треба да:

- на основу раније стечених знања продубе и прошире појам једначина; упознавање линеарне једначине са две непознате и начин изналажења њеног скупа решења;
- усвоје појам еквивалентности система линеарних једначина са две непознате;
- умеју да проверавају да ли је неки уређени пар бројева решење датог система;
- науче да издвајају заједничко решење из скупова решења сваке појединачне једначине, са посебним освртом на графичко тумечење тог решења;
- умеју да (на једноставнијим примерима): препознају систем од две линеарне једначине са две непознате који има јединствено решење, који има бесконачно много решења и који нема решење
- успешно решавају систем од две линеарне једначине са две непознате различитим методама (графичка метода, метод смене и метод супротних коефицијената);
- упознају и утврде начин превођења текстуалног проблема на математички језик, тј. на систем линеарних једначина;
- науче и утврде да примењују систем једначина у решавању разних математичких, геометријских и практичних проблема, проблема у вези са бројевима, проблема кретања, проблема у физици итд.

- понављају, повезују и сређују стечена знања о систему линеарних једначина са две непознате у логички систем математичког знања.

➤ **Функционални задаци:**

Ученици треба да:

- усаврше тачно, брзо и правилно рачунање са реалним бројевима на најједноставнији начин;
- усаврше примену правила замене, правила о додавању и правила о множењу приликом добијања нове једначине која је еквивалентна полазној;
- развијају логичко мишљење и закључивање;
- аналогijом, генерализацијом, индуктивним и дедуктивним начином закључивања развијају математичко мишљење;
- се коришћењем писаног материјала оспособљавају за самостално учење;
- применом мисаоних операција, нарочито апстракције и генерализације, развијају способности за индуктивни облик закључивања;

➤ **Васпитни задаци:**

Ученици треба да развијају:

- концентрацију;
- способност за упоран и предан рад;
- поступност и систематичност у раду;
- тачност, прецизност и уредност у раду;
- позитиван однос према математици и уважавање математике као подручја људске делатности;
- самопоуздање и поверење у властите математичке способности.

➤ **Образовни стандарди:**

Основни ниво:

- препознаје једнакост
- уме да провери решења система линеарних једначина са две непознате

Средњи ниво:

- решава системе линеарних једначина са две непознате
- примењује једначине у једноставнијим текстуалним задацима

Напредни ниво:

- саставља и решава система линеарних једначина са две непознате
- користи системе линеарних једначина решавајући сложеније текстуалне задатке

4. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Klett)

Међу мноштвом издавача и различитих уџбеника, што се тиче математике у осмом разреду основних школа, најзаступљенији је радни уџбеник „Математика 8“, од аутора Небојше Икодиновић и Слађане Димитријевић.

4.1. Системи линеарних једначина

Ове године време је послужило воћаре и њихов труд се исплатио. Кајсије су родиле 20% боље него прошле. Заправо, принос по стаблу је порастао за 6 kg.

Можемо ли на основу ових података да закључимо колики је принос по стаблу био прошле, а колики је ове године ?

Обележимо са x принос по стаблу (у килограмима) прошле године, а са y принос по стаблу (у килограмима) ове године. Дати подаци нам дају две линеарне везе међу величинама x и y , односно на основу њих долазимо до следеће две једначине са две непознате, уз услов $x \geq 0$, јер принос не може бити негативан.

$$\begin{aligned}y &= 1,2x \\ y &= x + 6\end{aligned}$$

Две линеарне једначине са две непознате заједно називају се **системом** те две једначине .

Једнакости

$$y = 1,2x \text{ и } y = x + 6$$

можемо посматрати и као две различите линеарне функције. Графици ових функција се секу. Апсциса пресечне тачке је решење линеарне једначине

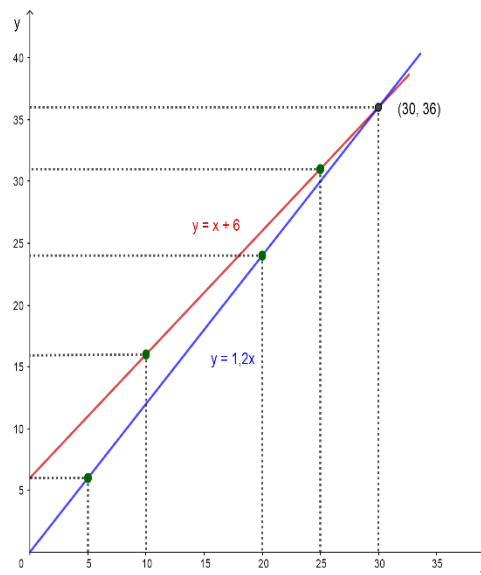
$$1,2x = x + 6.$$

Дакле,

$$x = 30 \text{ и } y = 36.$$

Уређени пар (30, 36) је решење посматраног система, тј. он је решење обе једначине тог система. Овај уређени пар уједно представља координате пресечне тачке посматраних графика линеарних функција

$$y = 1,2x \text{ и } y = x + 6.$$



У оквиру ове теме бавићемо се решавањем сличних система линеарних једначина. Сваком од система се увек може придружити одговарајући графички приказ. Он нам може помоћи да, и пре одређивања решења система, уочимо да ли систем има решење, као и колико их има.

4.2. Линеарна једначина са две непознате

Линеарна једначина са две непознате x и y је свака једначина еквивалентна једначини облика $ax + by + c = 0$, где су a, b, c реални бројеви, а коефицијенти a и b не могу истовремено бити једнаки 0 ($a \neq 0$ или $b \neq 0$).

Из практичних разлога у горњој дефиницији је дозвољено да коефицијенти уз непознате могу бити 0, мада је тада реч о линеарној једначини са једном непознатом.

На пример, једначине

$$3x + 2y - 1 = 0, \quad -x + y - 2 = 0, \quad 11x - 7y - 4 = 0$$

јесу линеарне једначине са две непознате.

Задатак 1.

Наведи три линеарне једначине са две непознате.

Дату линеарну једначину са две непознате трансформишемо у њој еквивалентну применом истих правила (замене, о додавању, о множењу) као и у случају једначина са једном непознатом.

Решење линеарне једначине са две непознате $ax + by + c = 0$ је сваки уређени пар (x_0, y_0) који заменом x са x_0 и y са y_0 ту једначину преводи у тачну бројевну једнакост.

На пример, уређени парови $(1, -1)$ и $(3, -4)$ јесу решења једначине $3x + 2y - 1 = 0$, јер јесте

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1 = 0 \quad \text{и} \quad 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) - 1 = 0.$$

А уређени парови $(0, 0)$ и $(-5, 3)$ нису решења једначине $3x + 2y - 1 = 0$, јер је

$$3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 \neq 0 \quad \text{и} \quad 3 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 - 1 \neq 0.$$

Задатак 2.

Проверити да ли је неки од уређених парова $(0, 0)$, $(1, 5)$, $(-4, -8)$, $(-\frac{2}{7}, 1)$, $(-11, 0)$, $(-2, 3)$ решење једначине:

$$\text{а) } 3x - y + 2 = 0; \quad \text{б) } -2x + y = 0; \quad \text{в) } 7x - 3y + 5 = 0.$$

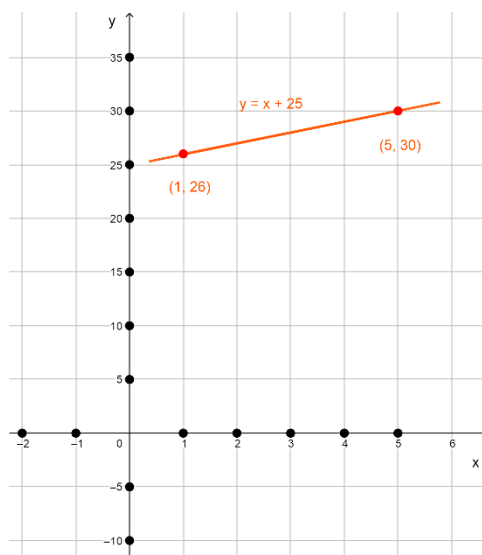
Пример 1. Када се Марко родио, његов отац је имао 25 година. Ако са x обележимо Маркове, а са y године његовог оца, претходну реченицу описујемо са $y = x + 25$, где је $x \geq 0$.

Посматрајмо сада једначину (без услова $x \geq 0$)
 $x - y + 25 = 0$.

Права приказана десно одговара тој једначини.
 Она је график линеарне функције $y = x + 25$,
 односно график линеарне функције $x - y + 25 = 0$.

Тај график (права) је потпуно одређен с две
 (различите) тачке које му припадају, али
 можемо
 одредити и више њих.

x	1	5			
y = x + 25	26	30			



Сваку линеарну једначину са две непознате $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ или $b \neq 0$) можемо тумачити и као имплицитно задату линеарну функцију. Зато свакој таквој једначини придружујемо праву у координатном систему. Уређени пар координата сваке тачке те праве је једно од решења одговарајуће једначине.

Једначина $ax + by + c = 0$, за $a \neq 0$ и $b \neq 0$, има бесконачно много решења, то јест има онолико решења колико права $ax + by + c = 0$, где је $a \neq 0$ и $b \neq 0$, има тачака.

Задатак 3.

Одреди три решења линеарне једначине са две непознате:

а) $y = 3x - 4$; б) $-2x + y = 3$; в) $x - 5y + 8 = 0$;

па нацртај праву у координатном систему која јој одговара.

Задатак 4.

Срђан је купио 5 свезака и шестар. Продавачици је дао 200 динара и добио кусур 29 динара. На основу ових података запиши одговарајућу једначину.

4.3. Систем од две линеарне једначине с две непознате

Пример 2. Отац је имао 30 година када се родио његов син Марко. Колико година сада има Марко ако знамо да је тренутно отац три пута старији од Марка?

Обележимо са x Маркове, а са y године његовог оца.

Онда прва реченица даје једну линеарну везу међу непознатим величинама x и y .

→ $y = x + 30$

Друга реченица даје још једну линеарну везу међу тим величинама.

→ $y = 3x$

Дакле, описаној ситуацији одговара систем од две линеарне једначине с две непознате.

→ $\begin{cases} y = x + 30 \\ y = 3x \end{cases}$

Општи облик система од две линеарне једначине с две непознате x и y је

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ дати реални бројеви.

Одредимо уређени пар бројева (x_0, y_0) који је решење обе једначине уоченог система.

$$\begin{array}{c} y_0 = x_0 + 30 \\ y_0 = 3x_0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 3x_0 = x_0 + 30 \\ y_0 = 3x_0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} x_0 = 15 \\ y_0 = 45 \end{array} \leftarrow \begin{array}{c} 45 = 15 + 30 \\ 45 = 3 \cdot 15 \end{array}$$

Дакле, Марко сада има 15, а његов отац 45 година.

Решење система од две линеарне једначине с две непознате x и y је сваки уређени пар реалних бројева (x_0, y_0) који је решење обе једначине тог система.

Задатак 5.

Уређени пар спој са системом чије је решење.

$$(-1, 4)$$

$$(-2, 3)$$

$$(2, 3)$$

$$(0,5, 0,5)$$

$$\begin{array}{l} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5x + 4y = 11 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 7x + 3y = 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + y = -3 \\ y = 3 \end{array}$$

4.3.1. Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате

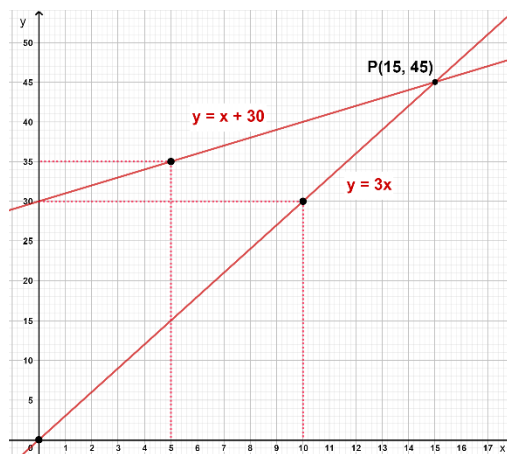
Свакој од једначина система

$$x - y = -30$$

$$3x - y = 0$$

одговара права у координатном систему.

Уређени парови координата сваке од тачака праве $y = x + 30$ су решења прве, а уређени парови координата сваке од тачака праве $y = 3x$ су решења друге једначине. Онда је уређени пар $(15, 45)$ координата пресечне тачке P решење посматраног система.



Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

чине две праве које су графици линеарних функција $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$.

Две праве једне равни могу се наћи у једном од три различита међусобна односа:

1. Праве се секу, тј. имају једну заједничку тачку;
2. Праве су паралелне, али се не поклапају, тј. немају заједничких тачака;
3. Праве се поклапају, тј. имају бесконачно много заједничких тачака.

Пример 6. Нацртати графички приказ система

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

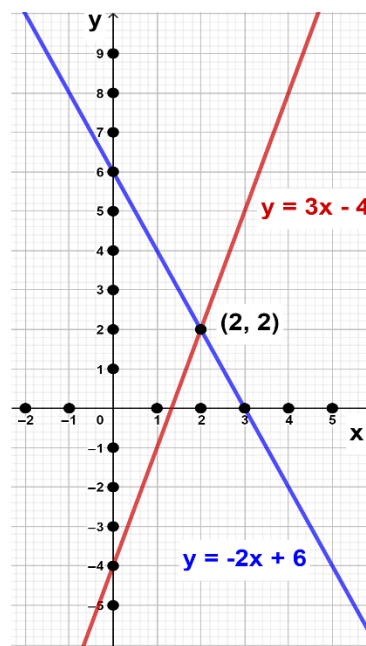
Праве које одговарају једначинама

$$3x - y = 4 \quad (y = 3x - 4)$$

и

$$2x + y = 6 \quad (y = -2x + 6)$$

секу се, то јест имају једну заједничку тачку (2, 2). Дакле, постоји само један уређени пар (2, 2) који је решење обе од датих једначина, па закључујемо да посматрани систем има јединствено решење (2, 2), то јест $x = 2$, $y = 2$.



Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се секу, тада тај систем има јединствено решење.

Пример 7. Нацртати графички приказ система

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Праве које одговарају једначинама

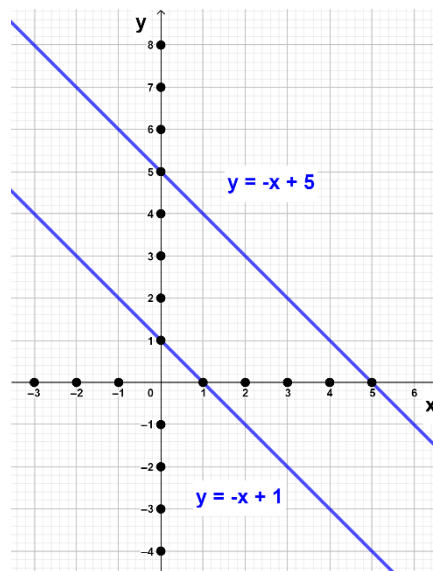
$$x + y = 1 \quad (y = -x + 1)$$

и

$$x + y = 5 \quad (y = -x + 5)$$

паралелне су и немају заједничких тачака.

Дакле, не постоји уређени пар бројева који је решење обе од датих једначина, па закључујемо да посматрани систем нема решење.



Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две паралелне праве које се не поклапају, тада тај систем нема решење.

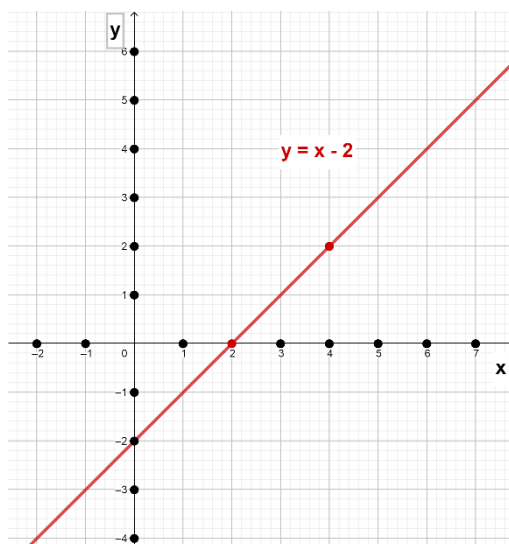
Пример 8. Нацртати графички приказ система

$$\begin{aligned}x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 4.\end{aligned}$$

Једначине

$$x - y = 2 \quad \text{и} \quad 2x - 2y = 4$$

су еквивалентне (друга се добија множењем обе стране прве једначине са 2), па се поклапају графици који им одговарају ($y = x - 2$). То значи да сваки пар координата тачака тог графика јесте решење посматраног система. Дакле, овај систем има бесконачно много решења.



Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се поклапају, тада тај систем има бесконачно много решења.

Задатак 6.

Нацртати графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате:

$$\begin{aligned}\text{а) } 3x - y &= 1 & \text{б) } 2x - 4y &= 1 \\ -3x + y &= 1; & 3x - 6y &= 1,5.\end{aligned}$$

па одредити да ли тај систем има решење, и ако га има, да ли је јединствено.

Дакле, графички приказ користимо да унапред, пре решавања датог система, сазнамо да ли тај систем има решење, као и колико их има.

За систем од две линеарне једначине с две непознате постоје три могућности :

1. систем има једно решење;
2. систем нема решење;
3. систем има бесконачно много решења.

4.4. Еквивалентност система линеарних једначина

Када су две једначине еквивалентне? Као и у једначинама, слично важи и за системе.

Два система једначина су еквивалентна ако је свако решење једног од њих уједно решење и другог, или ако оба система немају решење.

Једначине се решавају применом три правила: правило замене, правило о додавању и правило о множењу. Слично је и у случају система једначина.

Пример 9. Посматрамо следећа два система једначина :

$$\begin{array}{c} 2x - 2y = 0 \\ x + y = 2 \end{array} \xrightarrow{:2} \begin{array}{c} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{array}$$

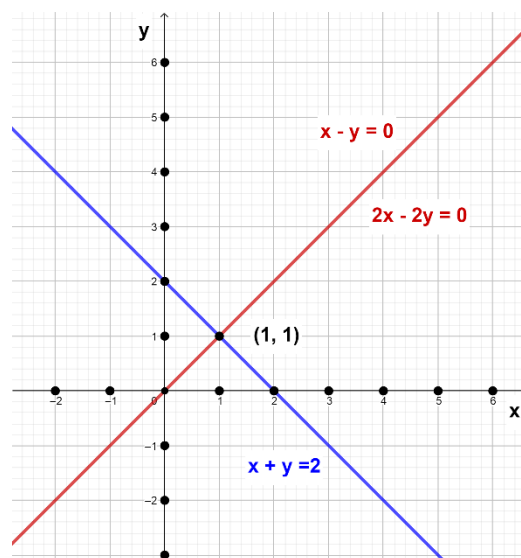
Прве једначине ових система су еквивалентне и њима одговара права $y = x$. Друга једначина им је заједничка и њој одговара права $y = -x + 2$. Дакле, оба система имају исти графички приказ. Закључујемо да су посматрани системи еквивалентни и да је њихово једино решење уређени пар $(1, 1)$.

Провера. $2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 + 1 = 2$$

$$1 + 1 = 2$$



Ако једначину система заменимо њој еквивалентном, добијемо нови систем еквивалентан полазном.

Пример 10. Посматрати начин на који добијемо следећи низ система једначина.

$$\begin{array}{c} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{array} \xrightarrow{+y} \begin{array}{c} y = x \\ x + y = 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} y = x \\ x + x = 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} y = x \\ 2x = 2 \end{array} \xrightarrow{:2} \begin{array}{c} y = x \\ x = 1 \end{array}$$

Други систем добијемо из првог замењујући прву једначину њој еквивалентном. На основу претходног правила, ова два система су еквивалентна. Потом израз y у другој једначини замењујемо изразом x , јер су они на основу прве једначине ($y = x$) једнаки. Затим другу једначину замењујемо њој еквивалентним једначинама и тако долазимо до последњег система. На основу графичких приказа првог (пример 9) и другог система (десно) видимо да оба имају исто решење.

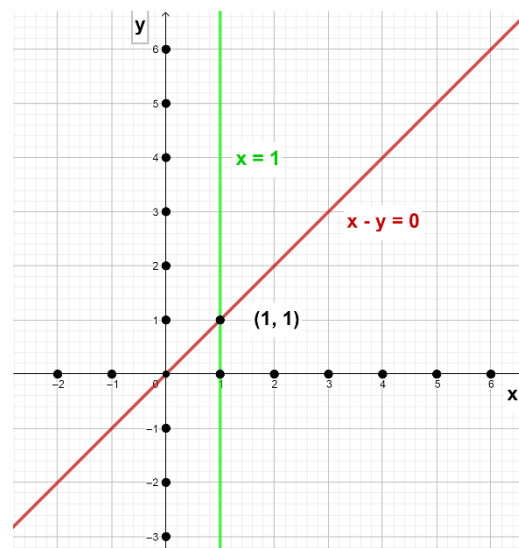
Једино решење оба система је уређени пар $(1, 1)$.

Провера. $1 - 1 = 0$

$$1 = 1$$

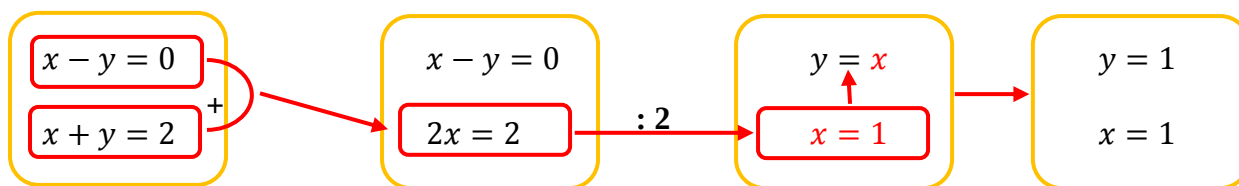
$$1 + 1 = 2$$

$$1 = 1$$



Ако у једначини датог система заменимо једну од непознатих изразом који је једнак тој непознатој на основу друге једначине, добијемо нови систем који је еквивалентан полазном систему.

Пример 11. Уочити трансформације помоћу којих се добија следећи низ система.

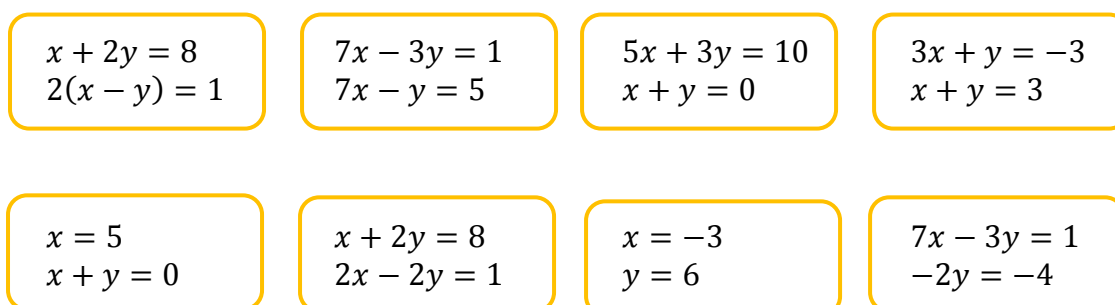


Други систем добијамо из првог замењујући другу једначину једначином која представља збир једначина првог система. Потом на основу претходна два правила добијамо следећа два система. Последњи систем је најједноставнијег облика, то је систем из кога директно читамо решење – уређени пар $(1, 1)$. Сви системи у горњем низу су међусобно еквивалентни и њихово једино решење је $(1, 1)$.

Ако једну једначину датог система заменимо једначином која је збир или разлика једначина датог система, добијамо нови систем који је еквивалентан полазном систему.

Задатак 7.

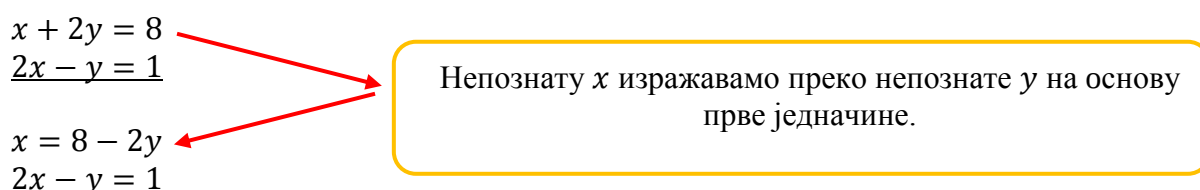
Спој еквивалентне системе.



4.5. Решавање система методом замене

Решити систем једначина значи одредити решење (решења) тог система или утврдити да тај систем нема решење. При решавању система циљ нам је да применом правила, датих у претходном делу, добијемо еквивалентан систем најједноставнијег облика.

Пример 12. Следећи систем решићемо **методом замене**. Уобичајено је да се сваки новодобијени еквивалентни систем одвоји хоризонталном линијом.



$$x = 8 - 2y$$

$$2(8 - 2y) - y = 1$$

Непознату x у другој једначини замењујемо изразом $8 - 2y$ добијеним из прве једначине.

$$x = 8 - 2y$$

$$16 - 4y - y = 1$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о замени ($2(8 - 2y) = 16 - 4y$).

$$x = 8 - 2y$$

$$-5y = -15$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о додавању и правила о замени ($-4y - y = -5y$).

$$x = 8 - 2y$$

$$y = 3$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о множењу (обе стране једначине делимо са -5).

$$x = 2$$

$$y = 3$$

Непознату у првој једначини замењујемо са 3 .

Провера. $2 + 2 \cdot 3 + 8$
 $2 \cdot 2 - 3 + 1$

Увек је корисно, сигурности ради, урадити проверу.

Суштина ове методе је да једну непознату изразимо преко друге (x преко y или y преко x) на основу једне од једначина система, а затим у другој једначини заменимо ту непознату претходно добијеним изразом. Тада друга једначина постаје линеарна једначина с једном непознатом, а њих од пре знамо да решавамо. Избор о томе коју променљиву изразити преко друге зависи у потпуности од нас, па бирамо шта нам је у датом случају погодније. Методу замене је најзгодније примењивати када је бар један коефицијент уз неку од непознатих једнак 1 или -1 , јер се тада применом правила о додавању једна непозната лако изражава преко друге.

У претходном примеру смо на основу прве једначине изразили x преко y . Могли смо изразити и y преко x (на основу друге једначине). Решавањем система и на тај начин, добијамо исто решење.

Задатак 8.

Нацртати графички приказ система и одредити његово решење методом замене:

а) $3x - y = 1$ б) $2x - 3y = -2$ в) $x + y = 6$
 $-3x + 2y = 1$; $x - 5y = 6$; $5x + 2y = 6$.

Пример 13. Методом замене решити следећи систем једначина.

$$4x + 2y = 5$$

$$2x + y = 1$$

Непознату y изражавамо преко непознате x на основу друге једначине.

$$4x + 2y = 5$$

$$y = -2x + 1$$

$$4x + 2(-2x + 1) = 5$$

$$y = -2x + 1$$

Непознату y у првој једначини замењујемо изразом $-2x + 1$.

$$4x - 4x + 2 = 5$$

$$y = -2x + 1$$

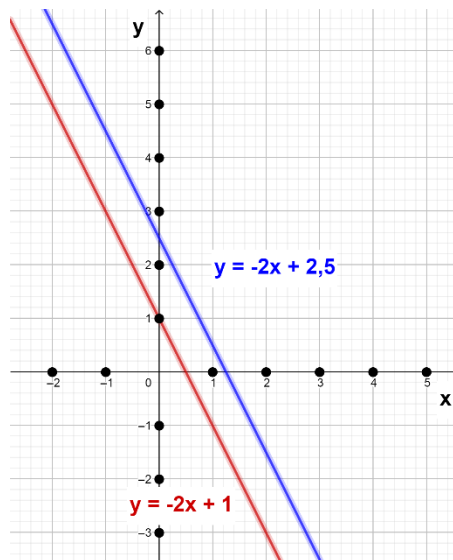
Прву једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила замене.

$$0 \cdot x + 2 = 5$$

$$y = -2x + 1$$

Прву једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила замене.

Једначина $0 \cdot x + 2 = 5$ нема решење, па га нема ни дати систем. То смо могли да закључимо и на основу графичког приказа овог система.



Систем еквивалентан систему чија бар једна једначина нема решење такође нема решење.

Пример 14. Следећи систем једначина решити методом замене.

$$x + 2y = 5$$

$$5x + 10y = 25$$

$$x = 5 - 2y$$

$$5(5 - 2y) + 10y = 25$$

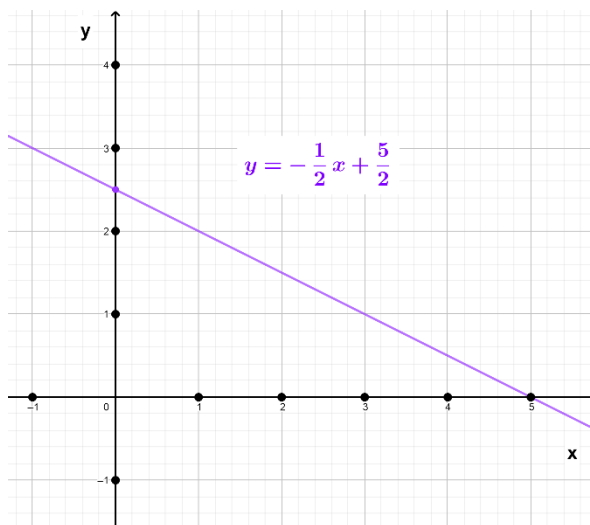
Прву једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о додавању и непознату x у другој једначини замењујемо изразом $5 - 2y$.

$$x = 5 - 2y$$

$$0 \cdot y = 0$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила замене и правила о додавању.

Једначина $0 \cdot y = 0$ је идентитет (сваки реалан број је решење ове једначине), па су решења датог система у ствари решења његове прве једначине. Дакле, овај систем има бесконачно много решења и то су уређени парови $(5 - 2a, a)$, где $a \in R$. До овог закључка долазимо и ако нацртамо графички приказ посматраног система.



Систем има бесконачно много решења ако је еквивалентан систему чија је једна једначина идентитет, а друга има решење.

Задатак 9.

Одреди скуп решења система:

а) $3x - y = 1$ б) $3x - y = 1$
 $-3x + y = -1$; $-3x + y = 1$.

4.6. Решавање система методом супротних коефицијената

За методу супротних коефицијената кључна је примена правила које гласи: ако једну од једначина система заменимо збиром или разликом једначина тог система, добијамо систем еквивалентан полазном.

Пример 15. Следећи систем једначина решити методом супротних коефицијената.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 9 \\ 2x - 2y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5x = 10 \\ 2x - 2y = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x = 2 \\ 2x - 2y = 1 \end{array}$$

Саберемо једначине система и тако добијамо једначину у којој више не учествује непозната y ($3x + 2y + 2x - 2y = 5x$ и $9 + 1 = 10$). Овом једначином замењујемо прву једначину система.

Прву једначину замењујемо њој еквивалентом применом правила о множењу (обе стране једначине делимо са 5).

$$x = 2$$

$$4 - 2y = 1$$

Непознату x у другој једначини замењујемо са 2.

$$x = 2$$

$$-2y = -3$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о додавању (од обе стране једначине одузмемо 4).

$$x = 2$$

$$y = \frac{3}{2}$$

Другу једначину замењујемо њој еквивалентном применом правила о множењу (обе стране једначне делимо са -2).

Провера.

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{3}{2} = 9$$

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Увек је корисно, сигурности ради, урадити проверу.

Методу супротних коефицијената је најзгодније примењивати када су коефицијенти уз исту непознату у две једначине система међусобно супротни бројеви, као у претходном примеру (коефицијенти уз y су 2 и -2), или међусобно једнаки бројеви. Када су одговарајући коефицијенти међусобно супротни бројеви, једначине система сабирамо (као у претходном примеру), а када су одговарајући коефицијенти међусобно једнаки бројеви, онда једначине система одузимамо једну од друге.

Задатак 10.

Нацртати графички приказ система и решити га методом супротних коефицијената:

а) $4x - y = 1$ б) $2x - 3y = -2$ в) $-x + y = 6$
 $-4x + 2y = 1;$ $2x - 5y = -6;$ $5x + y = 6.$

Пример 16. Следећи систем једначина ћемо решити и методом замене и методом супротних коефицијената, а према томе се може одлучити како убудуће решавати сличне системе (системе код којих су сви коефицијенти уз променљиве различити од 1 и -1, а парови одговарајућих коефицијената нису ни међусобно супротни ни једнаки).

Метода замене

$$5x + 4y = 11$$

$$2x + 3y = 10$$

$$5x + 4y = 11$$

$$2x = 10 - 3y \quad / : 2$$

$$5x + 4y = 11$$

$$x = \frac{10-3y}{2}$$

$$5 \cdot \frac{10-3y}{2} + 4y = 11 \quad / \cdot 2$$

$$x = \frac{10-3y}{2}$$

Метода супротних коефицијента

$$5x + 4y = 11 \quad / \cdot 2$$

$$2x + 3y = 10 \quad / \cdot 5$$

$$10x + 8y = 22$$

$$10x + 15y = 50$$

$$10x + 8y = 22$$

$$(10x + 15y) - (10x + 8y) = 50 - 22$$

$$10x + 8y = 22$$

$$7y = 28 \quad / : 7$$

$$5(10 - 3y) + 8y = 22$$

$$x = \frac{10-3y}{2}$$

$$50 - 15y + 8y = 22 \quad /- 50$$

$$x = \frac{10-3y}{2}$$

$$-7y = -28 \quad /: (-7)$$

$$x = \frac{10-3y}{2}$$

$$y = 4$$

$$x = \frac{10-3 \cdot 4}{2}$$

$$y = 4$$

$$x = -1$$

$$10x + 8y = 22$$

$$y = 4$$

$$10x + 8 \cdot 4 = 22$$

$$y = 4$$

$$x = -1$$

$$y = 4$$

Провера.

$$5 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 = 11$$

$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 10$$

Задатак 11.

Решити систем од две линеарне једначине с две непознате:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} 3x + 2y = -1 & \text{б)} 7x + 9y = 7 & \text{в)} \frac{1}{3}x + 2y = 1 \\ -5x - 3y = 8; & 3x - 2y = 85; & 4x + 3y = -6. \end{array}$$

4.7. Примена система линеарних једначина

Као и у случају линеарних једначина, системи линеарних једначина се јављају при решавању различитих проблема. Показаћемо неколико примера који то илуструју.

Пример 17. Збир два броја је за 1 већи од троструке вредности мањег од та два броја, а петострука вредност мањег је једнака двострукој вредности већег. О којим бројевима је реч?

Нека је x мањи од два тражена броја, а y већи од њих. Дакле, треба решити систем:

$$x + y = 3x + 1$$

$$5x = 2y$$

Предлаже се примена методе замене. На основу прве једначине изразити y преко x , па тај израз уврстити у другу једначину.

Задатак 12.

Одредити бројеве a и b ако је двоструке вредност броја a за 1 мања од троструке вредности броја b и трострука вредност броја a за 1 већа од двоструког збира бројева a и b .

Пример 18. Јована је отишла у књижару јер је желела да купи 5 свезака и 2 маркера. Понела је 200 динара. Међутим, продавачица јој је рекла да јој недостаје 3 динара за ту куповину, али и да може да купи једну свеску мање и да добије кусур од 22 динара. Да ли су ове информације довољне да одредимо појединачне цене свеске и маркера?

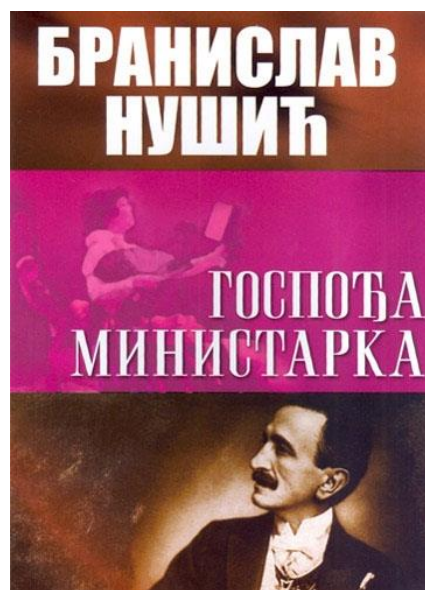
Обележимо са x цену свеске, а са y цену маркера. Тада на основу датих података, записујемо следеће две једначине:

$$\begin{aligned}5x + 2y &= 200 + 3 \\4x + 2y &= 200 - 22.\end{aligned}$$

Препорука: решити овај систем применом методе супротних коефицијената.

Задатак 13.

Поводом краја школске године, драмска секција је припремила познату Нушићеву комедију *Госпођа министарка*. Приход од продаје карата је био намењен у хуманитарне сврхе. Карте су се посебно наплаћивале за ученике школе, а посебно за остале. Двојица браће Јовановић (ученици школе) дошли су са својим родитељима и улазнице платили 600 динара, док су две сестре Петровић (ученице школе), поред родитеља, повеле и баку и деку и за улазнице платиле 1000 динара. Колико су коштале карте за ученике школе, а колико за остале гледаоце?



Задатак 14.

Улазнице за добротворни концерт коштале су 240 и 400 динара.

а) Једна организација је за 30 улазница платила 8 640 динара. Колико скупљих, а колико јефтинијих улазница је та организација купила?

б) Друга организација је одлучила да потроши 10 000 динара. Навести неколико варијанти како су улазнице могле бити купљене (колико скупљих, а колико јефтинијих?). Колико највише улазница ова организација може да купи за издвојени новац?

Задатак 15.

Ако се једног дана за 10 000 динара могло купити 100 евра и 8 долара, а за 7 490 динара 50 евра и 44 долара, одредити курс евра и долара према динару тог дана.

Пример 19. Сава је имао уштеђевину од 1 100 динара и од родитеља је сваке недеље добијао џепарац од 300 динара. Он је сваке недеље од тог новца куповао један часопис по цени од 150 динара и један стрип по цени од 200 динара. Његов млађи брат Јован није имао уштеђевину, а добијао је исти џепарац и од њега сваке недеље куповао стрип по цени од 75 динара. После колико недеља ће браћа имати исту количину новца?

Нека је t број недеља после којих ће оба брата имати исту суму новца, коју ћемо означити са s .

Тада на основу датих података записујемо следеће две једначине:

$$s = 1100 + (300 - 200 - 150)t$$

$$s = (300 - 75)t.$$

Овај систем ћемо решити методом замене.

Непознату s у првој једначини замењујемо изразом $225t$, који смо добили из друге једначине. Тада је:

$$225t = 1100 - 50t,$$

односно

$$t = 4.$$

$$s = (300 - 75) \cdot 4 = 225 \cdot 4 = 900.$$

Браћа ће после 4 недеље имати по 900 динара.

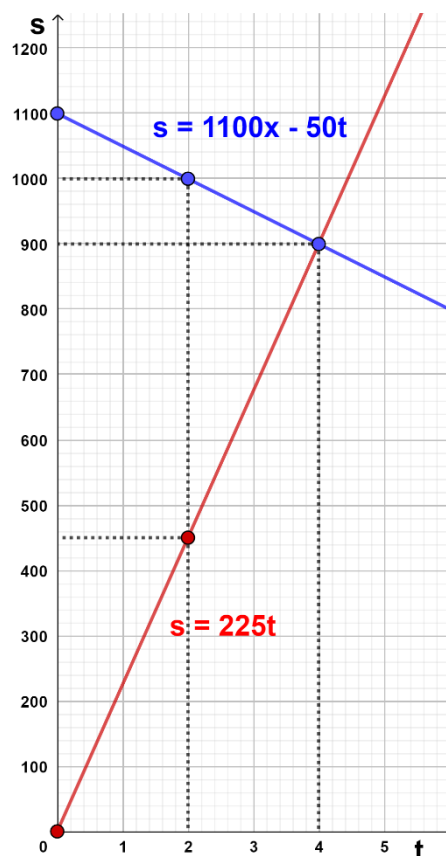
Посматрану ситуацију можемо и графички приказати. Количину Савиног новца (у односу на време) описује опадајућа линеарна функција

$$s = 1100 - 50t,$$

а количину Јовановог новца описује растућа линеарна функција

$$s = 225t.$$

Графици ове две функције се секу у тачки $(4, 900)$, чије координате представљају решење уоченог система.



Пример 20. Ако дужину правоугаоника повећамо за 3cm, а ширину за 2cm, добијамо правоугаоник чија је површина за 25cm^2 већа од површине првобитног правоугаоника. А ако дужину повећамо за 2cm, а ширину за 3cm, добијамо правоугаоник чија је површина за 27cm^2 већа од површине првобитног правоугаоника. Колике су димензије првобитног правоугаоника?

Нека је a дужина, а b ширина првобитног правоугаоника изражена у сантиметрима. Тада овом проблему одговара систем

$$(a + 3) \cdot (b + 2) = ab + 25$$

$$(a + 2) \cdot (b + 3) = ab + 27.$$

Применом правила замене (извршимо назначено множење), добијамо систем

$$ab + 2a + 3b + 6 = ab + 25$$

$$ab + 3a + 2b + 6 = ab + 27$$

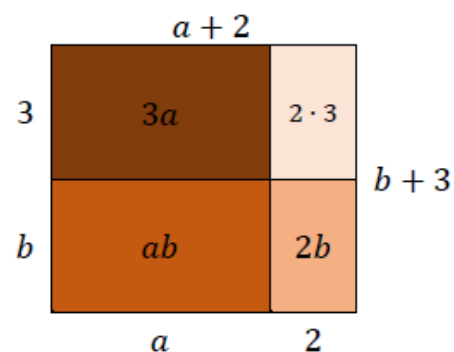
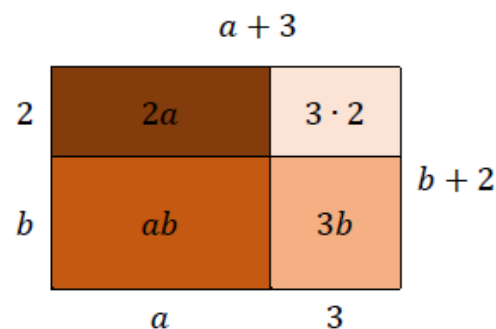
еквивалентан претходном. Потом, применом правила о додавању на обе једначине (на обе стране тих једначина додајемо израз $-ab - 6$), добијамо систем од две линеарне једначине с две непознате

$$2a + 3b = 19$$

$$3a + 2b = 21$$

који је еквивалентан претходном.

Овај систем је вероватно најлакше решити методом супротних коефицијената.



Задатак 16.

Ако дужину датог правоугаоника смањимо за 3 cm, добијамо квадрат, а ако обе стране тог правоугаоника смањимо за 2 cm, добијамо нови правоугаоник чија је површина за 18 cm^2 мања. Одредити обим датог правоугаоника.

Задатак 17.

Изračунати мере оштрих углова правоуглог троугла ако се оне односе као 3:2.

Пример 21. Кружну бициклическу стазу бициклиста је први пут обишао за 5 минута, а други пут за 6 минута. Колика је дужина стазе, ако је средња брзина бициклисте (за оба круга) $36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Прво ћемо израчунати брзине (довољно је израчунати и само једну од њих) којима се кретао бициклиста у првом и другом кругу, па онда израчунати дужину стазе. Означимо са v_1 брзину бициклисте у првом кругу, а са v_2 брзину бициклисте у другом кругу. Тада на основу датих података, записујемо следећи систем:

$$\begin{aligned} v_1 \cdot \frac{5}{60} &= v_2 \cdot \frac{6}{60} \\ v_1 \cdot \frac{5}{60} + v_2 \cdot \frac{6}{60} &= \left(\frac{5}{60} + \frac{6}{60}\right) \cdot 36. \end{aligned}$$

При решавању овог система, најбоље је израз $v_2 \cdot \frac{6}{60}$ у другој једначини заменити изразом $v_1 \cdot \frac{5}{60}$ из прве једначине. Тако добијамо једначину

$$v_1 \cdot \frac{5}{60} + v_1 \cdot \frac{5}{60} = \left(\frac{5}{60} + \frac{6}{60}\right) \cdot 36,$$

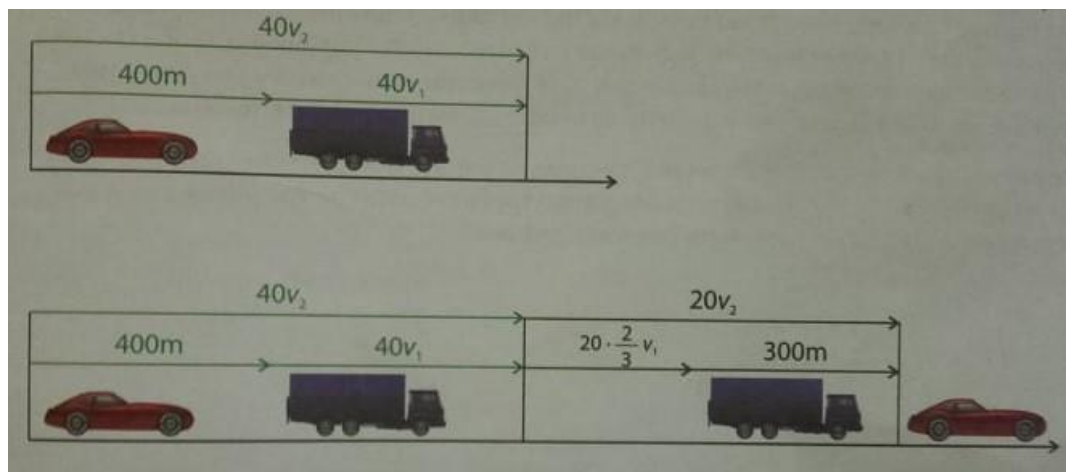
чије је решење

$$v_1 = \frac{11}{60} \cdot 36 \cdot \frac{60}{10} = 39,6 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Дакле, један круг стазе је дугачак $s = 39,6 \cdot \frac{5}{60} = 3,3 \text{ km} = 3300 \text{ m}$. Израчунати v_2 и проверити тачност добијеног резултата.

Пример 22. Дуж истог пута равномерно се крећу, у истом смеру, камион и иза њега аутомобил. У једном тренутку растојање између ова два возила је 400m, а након 40 секунди аутомобил је стигао камион. Тада је камион смањио брзину за трећину и након 20 секунди растојање између возила је било 300m, али је сада аутомобил био испред камиона. Одредити којим брзинама су се кретала возила на почетку.

Нека су v_1 и v_2 брзине (тим редом) којима су се кретали камион и аутомобил на почетку.



На основу датих података и илустрације изнад добијамо следећи систем једначина

$$\begin{aligned}40v_1 + 400 &= 40v_2 \\20 \cdot \frac{2}{3}v_1 + 300 &= 20v_2\end{aligned}$$

Предлог: решити овај систем методом супротних коефицијената.

Задатак 17.

Дуж истог пута равномерно се крећу, један ка другом камион и аутомобил. У једном тренутку растојање између ова два возила је 3,05km, а након 40 секунди то растојање је 1,45km. Тада је камион повећао брзину за трећину и након још 30 секунди возила су се мимоишла. Одреди којим брзинама су се кретала возила на почетку.

Пример 23. Када се у спољашњи део електричног кола укључи отпорник чија је отпорност 2Ω , јачина струје у колу је 2А, а када се укључи отпорник чија је отпорност $4,1\Omega$, јачина струје у колу је 1А. Колика је онда електромоторна сила извора?

На основу Омовог закона имамо да је $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где је I јачина електричне струје, ε електромоторна сила, R спољашњи електрични отпор, а r унутрашњи отпор. Тада на основу датих података добијамо две једначине

$$2 = \frac{\varepsilon}{2+r} \text{ и } 1 = \frac{\varepsilon}{4,1+r}.$$

Како је $2 + r > 0$ и $4,1 + r > 0$, треба решити систем

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 4 + 2r \\ \varepsilon &= 4,1 + r.\end{aligned}$$

5. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Креативни центар)

У овом поглављу биће представљени системи линеарних једначина из уџбеника „Математика за осми разред основних школа“, од издавача Креативни центар.

5.1. Систем од две линеарне једначине са две непознате

- линеарне једначине са две непознате
- решење линеарне једначине са две непознате
- систем од две линеарне једначине са две непознате
- решење система од две линеарне једначине са две непознате

1. Вредност израза $3\left(x - \frac{1}{2}\right) - y$ за $x = 0,5$ и $y = -1$ је:
а) -1 б) 1 в) 2 г) 3 д) 4
Који је одговор тачан?

5.1.1. Једначина са две непознате

Два израза са укупно две променљиве, везана знаком једнакости, чине једначину са две непознате. Променљиве у једначини називају се *непознате*.

Ако се непознате у једначини појављују на првом степену, кажемо да је једначина линеарна.

Следеће једнакости су линеарне једначине са две непознате, x и y :

$$y - 3x + 7 = 2 \quad 4x = 5 - 2y \quad \frac{2}{3}y = \frac{1}{2}x - 5$$

2. Које су од датих једначина линеарне једначине са две непознате?
а) $4x + y - 7 = 3$ б) $t - 1 = 10 + 5t$ в) $x - y^2 = 2y$ г) $p - \frac{1}{3} = 6\left(\frac{2}{3} - r\right)$
3. Дата је једначина $x + y - 5 = 0$. Израчунај y ако је:
а) $x = 5$ б) $x = 2$ в) $x = -3$

5.1.2. Решење линеарне једначине са две непознате

Дата је једначина $y = 1 - 2x$.

Изаберимо произвољну вредност за непознату x , на пример $x = 2$, и израчунајмо y .

$$y = 1 - 4$$

$$y = -3$$

Уређени пар $(2, -3)$ јесте решење једначине $y = 1 - 2x$.

Проверимо да ли су и уређени парови $(1, -1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(-2, 5)$ решења дате једначине.

Заменимо у једначини $y = 1 - 2x$ променљиву x првом координатом, то јест бројем 1, а променљиву y другом координатом, то јест бројем -1.
 $-1 = 1 - 2 \cdot 1$

Како смо добили тачну бројевну једнакост, уређени пар (1, -1) јесте решење дате једначине. На исти начин утврђујемо да су и уређени парови $(\frac{1}{2}, 0)$, (-2, 5) решења дате једначине $y = 1 - 2x$.

Уређени парови (2, 4), (-1, 1), (0, 3) нису решења једначине $y = 1 - 2x$ јер важи:
 $4 \neq 1 - 2 \cdot 2$ $1 \neq 1 - 2 \cdot (-1)$ $3 \neq 1 - 2 \cdot 0$

Уопште, ако изаберемо да је $x = a$, где је a произвољан реални број, добијамо да је $y = 1 - 2a$. Уређени пар $(a, 1 - 2a)$ јесте решење дате једначине за произвољно a , па линеарна једначина $y = 1 - 2x$ има бесконачно много решења.

Решење линеарне једначине са две непознате, x и y , јесте уређен пар бројева (x_0, y_0) којима у једначини замењујемо променљиве x и y и добијамо тачну бројевну једнакост.

4. Који су од датих уређених парова решења линеарне једначине $2y - 3x + 2 = 4$:
а) $(1, \frac{5}{2})$ б) $(-4, -5)$ в) $(\frac{2}{3}, 2)$ г) $(5, -4)$

5. Уређени пар (5, -4) јесте решење једначине:
а) $-x + 1 = 4 + 2y$ б) $y + \frac{1}{5}x = 3$ в) $4x - 5y = 0$
Који је одговор тачан?

5.1.3. Систем од две линеарне једначине са две непознате

Често је за успешно решавање неког проблема, како у науци тако и у животу, потребно проналажење везе између непознатих величина. У математици ту везу успостављамо једначинама.

На пример:

Свеска и оловка коштају 120 динара. Колико кошта свеска, а колико оловка ако је свеска три пута скупља од оловке?

Означимо са x цену свеске, а са y цену оловке.

Тада реченици: *Свеска и оловка коштају 120 динара*, одговара запис: $x + y = 120$,

а реченици: *Свеска је три пута скупља од оловке*, одговара запис: $x = 3y$.

Задатак можемо решити формирањем две једначине са две непознате и тражењем заједничког решења тих једначина.

Ако, као у наведеном примеру, успостављамо везу између непознатих величина x и y у два линеарна једначина, онда кажемо да имамо систем од две линеарне једначине са две непознате. У претходном примеру:

$$\begin{aligned}x + y &= 120 \\x &= 3y\end{aligned}$$

Систем од две линеарне једначине са две непознате, x и y , где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ реални бројеви:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

Бројеви a_1 и a_2 јесу коефицијенти уз непознату x ; b_1 и b_2 су коефицијенти уз непознату y ; c_1 и c_2 су слободни чланови.

6. Одреди коефицијенте уз непознате x и y и слободне чланове у систему.

а) $5x + 3y = 2$ б) $-x + 7y = 0$

$2x - 4y = -1$ $6x + y = 4$

в) $2y = 16$ г) $9x + y = 1$

$-3x - 8y = 5$ $x = 5$

У даљем тексту систем од две линеарне једначине са две непознате означаваћемо речју *систем*.

7. Дат је систем:

$$x + y = 4$$

$$2x - y = 5$$

Који је од уређених парова $(1, 3), (5, -1), (4, 3), (3, 1), (\frac{5}{2}, 0)$:

а) решење само једне од једначина система

б) решење обе једначине система?

5.1.4. Решење система од две линеарне једначине са две непознате

Решење система од две линеарне једначине са две непознате, x и y , јесте сваки уређени пар бројева (x_0, y_0) који је решење обе једначине тог система.

На пример:

Дат је систем једначина:

$$3x - 2y = 0$$

$$-x + y = 2$$

Уређени пар $(2, 3)$ јесте решење само прве једначине јер је:

$$3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0 \text{ и } -2 + 3 \neq 2$$

Уређени пар $(3, 5)$ јесте решење само друге једначине јер је:

$$3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \neq 0 \text{ и } -3 + 5 = 2$$

Уређени пар $(4, 6)$ јесте решење и прве и друге једначине јер је:

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0 \text{ и } -4 + 6 = 2$$

$$x_0 = 4, y_0 = 6$$

Дакле, уређени пар $(4, 6)$ јесте решење датог система.

8. Дат је систем:

$$-5x - y = 4$$

$$3x + 2y = -1$$

Који је од уређених парова $(1, -1), (-1, -1), (-1, 1), (1, 1)$ његово решење?

9. Провери да ли је уређени пар $(-2, 1)$ решење система:

$$0,5x + 2y = 1$$

$$x - y = -3$$

10. Који су од уређених парова $(1, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(0, \frac{1}{2})$ решења система $x + 2y = 1$ и $2x + 4y = 2$?

Систем једначина може имати више решења.

11. Да ли можеш да пронађеш уређени пар који је решење система?

а) $x + y = 1$

$$x + y = 10$$

б) $3x + 4y = 5$

$$3x + 4y = -5$$

Упутство за део задатка под а):

Не постоји уређени пар који је решење датог система јер не постоје два броја и чији је збир истовремено 1 и 10.

Провери шта знаш

1. Напиши три линеарне једначине са две непознате.
2. Који су од уређених парова решења линеарне једначине $5y - 1 = 2 - x$?
а) $(-2, 1)$ б) $(-3, 0)$ в) $(0, \frac{3}{5})$ г) $(2, \frac{1}{5})$
3. Одредити коефицијенте уз непознате x и y и слободне чланове у систему.
а) $-4x + 7y = 1$ б) $-y + 9x = 14$ в) $\frac{3}{4}x = 4$ г) $2,1x + 0,5y = 4,7$
 $x - 3y = -10$ $2y - 6x = 0$ $-5x - y = 17$ $3,9x = 9$
4. Који је од уређених парова $(-3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$, $(3, 0)$ решење система $4x - y = 12$ и $x + 3y = 3$?

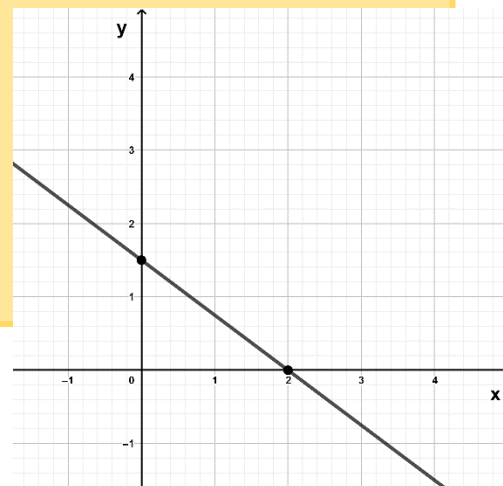
5.2. Решење система од две линеарне једначине са две непознате – графички приказ

- графички приказ решења линеарне једначине са две непознате
- графички приказ решења система од две линеарне једначине са две непознате

1. Дат је график функције $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$.

а) Одредити координате пресека графика с координатним осама.

б) Испитати да ли тачке $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$, $C(1, \frac{3}{4})$ припадају графику функције.



2. Проверити да ли је уређени пар $(2, 0)$ решење једначине $\frac{1}{2}x - y = 1$.

5.2.1. Графички приказ решења линеарне једначине са две непознате

Решења линеарне једначине са две непознате можемо одредити и графички тако што ћемо сваку линеарну једначину са две непознате, x и y , посматрати као линеарну функцију $ax + by + c = 0, b \neq 0$. Научили смо да је график линеарне функције права у координатном систему.

Координате сваке тачке те праве јесу једно од решења дате једначине.

На пример:

Пронађимо неколико решења једначине $x + 3y = -3$.

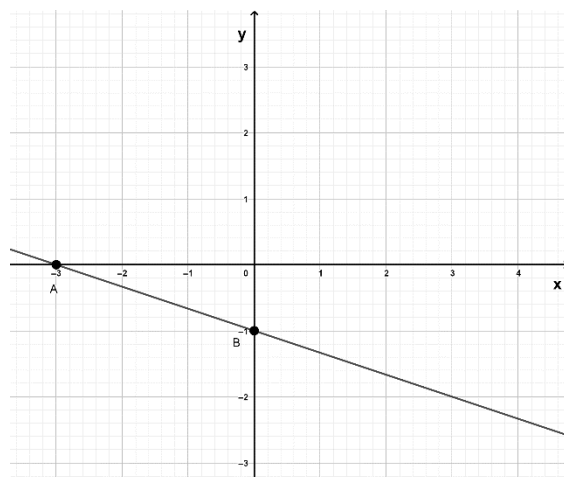
Нацртајмо график функције $x + 3y = -3$.

Уочимо неколико тачака које припадају графику функције.

На пример: тачке $A(-3, 0)$, $B(0, -1)$, $C(3, -2)$.

Уређени парови бројева $(-3, 0)$, $(0, -1)$ и $(3, -2)$ јесу нека од решења дате линеарне једначине.

Како свака права садржи бесконачно много тачака, одговарајућа линеарна једначина има бесконачно много решења.



3. Одредити бар три решења једначине $y - 2 = x - 5$ на основу графичког приказа.

4. У истом координатном систему нацртај графике функција

а) $x + y = 1$ и $x - y = 3$ б) $x + y = -1$ и $x + y = 4$

У ком су међусобном положају графици функција $x + y = 1$ и $x - y = 3$, а у ком графици функција $x + y = -1$ и $x + y = 4$?

Две праве једне равни могу се наћи у једном од три различита међусобна положаја:

- Праве се секу, то јест имају једну заједничку тачку.
- Праве су паралелне, али се не поклапају, то јест немају заједничких тачака.
- Праве се поклапају, то јест имају бесконачно много заједничких тачака.

5.2.2. Графички приказ решења система од две линеарне једначине са две непознате

Научили смо да сваку линеарну једначину са две непознате, x и y , можемо посматрати као линеарну функцију $ax + by + c = 0, b \neq 0$, као и да можемо графички приказати сва њена решења.

Слично томе, ако посматрамо систем од две линеарне једначине са две непознате:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

онда те једначине представљају две праве у координатном систему, то јест графике функција $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$.

На основу међусобног положаја тих прaviх систем може да:

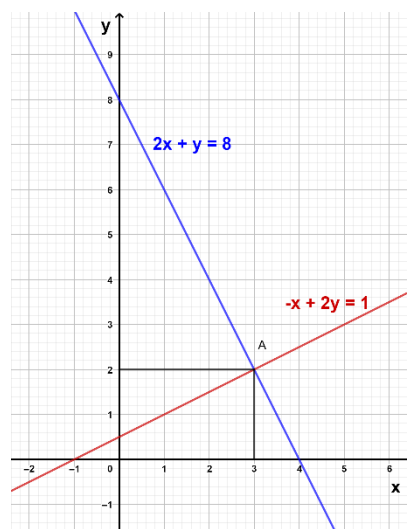
- има јединствено решење
- нема решења
- има бесконачно много решења.

Размотримо сва три случаја на следећим примерима.

1. случај

Прикажимо графички систем једначина $2x + y = 8$ и $-x + 2y = 1$ и одредимо његово решење.

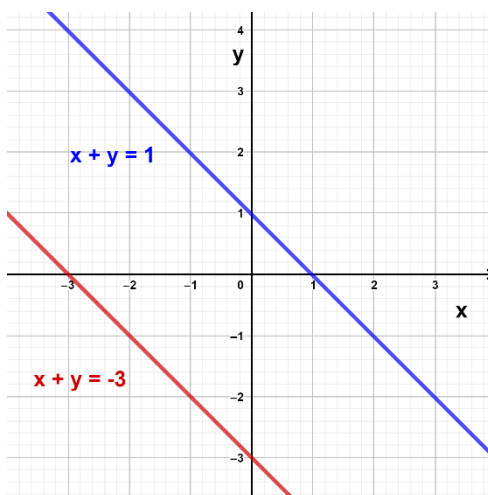
Нацртајмо графике тих функција. Праве које одговарају графицима секу се у једној тачки А. Координате те тачке, $x = 3$ и $y = 2$, јесу решење датог система. Кажемо да систем има јединствено решење и то је уређени пар $(3, 2)$.



2. случај

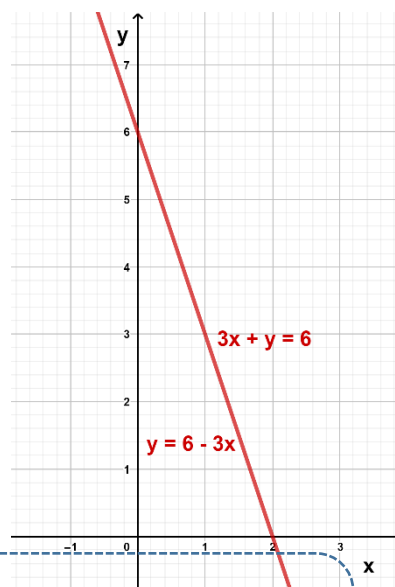
Прикажимо графички систем једначина $x + y = -3$ и $x + y = 1$ и одредимо његово решење.

Нацртајмо графике тих функција. Графици су паралелне праве, па систем нема решења.



3. случај

Прикажимо графички систем једначина $3x + y = 6$ и $y = 6 - 3x$ и одредимо његово решење. Графици тих функција су праве које се поклапају. Координате свих тачака које припадају тој правој јесу решења датог система једначина. Како тих тачака има бесконачно много, кажемо да систем има бесконачно много решења.



Посматрајући међусобни положај графика функција које одговарају систему једначина, можемо закључити:

- Ако графици имају једну заједничку тачку, систем има јединствено решење.
- Ако су графици паралелне праве, а не поклапају се, систем нема решења.
- Ако су графици праве које се поклапају, систем има бесконачно много решења.

5. Графички приказати систем једначина и одредити његово решење.

а) $x + 2y = 5$

б) $2x + y = 2$

в) $x + 2y = 5$

г) $y = 1 - \frac{x}{2}$

$-x + y = 1$

$x - y = 4$

$x + 2y = 1$

$x + 2y - 2 = 0$

Провери шта знаш

1. Одредити бар три решења линеарне једначине са две непознате на основу графичког приказа.

а) $y = -2x + 1$

б) $x + 2y = -5$

2. Графички приказати систем једначина и одредити његово решење.

а) $3x - y = 4$

б) $x + y = -3$

в) $4x + 2y - 8 = 0$

г) $y = x - 3$

$-x + y = 2$

$y = 5 - x$

$2x + y - 4 = 0$

$2x - y = 0$

5.3. Решење система од две линеарне једначине са две непознате

- еквивалентни системи једначина
- правила за решавање система линеарних једначина

1. Које су од једначина еквивалентне?

а) $5x - 30 = -5$

б) $5|x| = 25$

в) $2x - 3 = -1$

г) $\frac{1}{2}(x - 5) = 0$

5.3.1. Збир две линеарне једначине

Збир две једначине рачунамо тако што саберемо сличне мономе с леве и са десне стране датих једначина.

На пример:

Одредити збир једначина $4x - 3y = -13$ и $5x + y = 7$.

$$\begin{array}{r} 4x - 3y = -13 \\ + \quad \left\{ \begin{array}{l} 5x + y = 7 \end{array} \right. \\ \hline 4x + 5x - 3y + y = -13 + 7 \\ 9x - 2y = -6 \end{array}$$

2. Израчунај збир једначина:

а) $7x + 2y = 0$ и $-2x + 5y = -4$

б) $-6x - y = -2$ и $6x - 2y = -1$

5.3.2. Еквивалентни системи линеарних једначина

Научили смо да су линеарне једначине еквивалентне ако имају исти скуп решења. Исто важи и за системе линеарних једначина. Два система линеарних једначина су еквивалентна ако имају исти скуп решења.

Решавање система линеарних једначина, као и код једначина, састоји се у томе што се формира низ еквивалентних система, од којих је први дати систем, а последњи је систем чије се решење непосредно одређује.

Еквивалентне системе добијамо коришћењем рачунских операција и њихових својстава, као и основних својстава једнакости. Формулисаћемо следећа три правила која користимо за добијање еквивалентних система, то јест правила која примењујемо када решавамо систем једначина.

Правило П1

Ако једну или обе једначине система заменимо еквивалентним једначинама, добијамо систем једначина, еквивалентан датом систему. На пример:

$$\begin{cases} 2x + 3y = x + 4 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$$

----- Једначина $2x + 3y = x + 4$ еквивалентна је једначини $x + 3y = 4$.

Правило П2

Ако у једној једначини датог система једну од непознатих заменимо изразом једнаким тој непознатој, добијеним из друге једначине система, добијамо систем једначина еквивалентан датом систему. На пример:

$$y = x + 2$$

$$x - 3y = 0$$

$$y = x + 2$$

$$x - 3 \cdot (x + 2) = 0$$

----- У другој једначини непознату y заменили смо изразом $x + 2$.

Правило П3

Ако једну једначину система заменимо једначином која чини збир или разлику једначина датог система, добијамо систем једначина еквивалентан датом систему. На пример:

$$-4x + 3y = 0$$

$$4x - 2y = 3$$

+

$$-4x + 3y = 0$$

$$y = 3$$

----- Једначину $4x - 2y = 3$ заменили смо једначином $y = 3$.

Једначина $y = 3$ једнака је збиру једначина $-4x + 3y = 0$ и $4x - 2y = 3$.

Решити систем линеарних једначина значи одредити уређен пар бројева који је решење обе једначине система, а уз примену наведених правила. Циљ нам је да почетни систем, примењујући правила, сведемо на систем чије се решење непосредно одређује.

Током решавања система уобичајено је да се после примене неког од правила добијени системи раздвоје хоризонталном линијом ради прегледности записа. Неопходно је да приликом решавања система у сваком кораку имамо две једначине.

На пример, решимо следећи систем једначина: $x = -1$ и $x - 2y = -1$.

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ x - 2y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ -1 - 2y = -1 \end{array} \quad \leftarrow \text{Применили смо правило П2.}$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ -2y = 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{Применили смо правило П1.}$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \quad \leftarrow \text{Применили смо правило П1.}$$

Решење система је уређен пар $(-1, 0)$.

3. Решити систем једначина примењујући правила П2 и П1. Решење система записати у облику уређног пара.

а) $x = 5$

$4x - 3y = -4$

б) $-x + 7y = -2$

$y = -1$

в) $y = \frac{3}{5}$

$-4x + 10y = 2$

4. Решити систем једначина примењујући правила П2 и П1. Решење система записати у облику уређног пара.

а) $y - 1 = 5$

$x + 2y = 0$

б) $-3x + 4y = 65$

$2x = 10$

Провери шта знаш

1. Израчунати збир једначина:

а) $7x + 2y = 0$ и $-2x + 5y = -4$

б) $x + 4y = 2$ и $x - 9y = 3$

2. Решити систем једначина примењујући правила П1 и П2. Решење система записати у облику уређног пара.

а) $x = 0$

$9x + 16y = 64$

б) $3x + 2y = 12$

$y = 3$

в) $x = \frac{1}{2}$

$-4x - 5y = 1$

5.4. Решење система од две линеарне једначине са две непознате – метода замене

- метода замене

1. Изразити променљиву y преко променљиве x из једначине:

а) $7x - y - 21 = 0$

б) $9x + 3y = 15$

5.4.1. Метода замене

Научили смо да решити систем од две линеарне једначине са две непознате, x и y , значи одредити све уређене парове бројева (x_0, y_0) који су решења обе једначине тог система.

Једна од метода којом ћемо решавати систем од две линеарне једначине са две непознате јесте метода замене.

Метода замене се састоји у томе да се једна непозната (на пример x) из једне једначине система изрази помоћу друге непознате, а затим да се та непозната x у другој једначини замени добијеним изразом. На тај начин једну од једначина система са две непознате свели смо на једначину с једном непознатом.

На пример, решићемо следећи систем једначина методом замене:

$$x + 5y = 3$$

$$3x - 2y = -8$$

$$x + 5y = 3$$

$$3x - 2y = -8$$

$$x = 3 - 5y$$

$$3x - 2y = -8$$

Применили смо правило П1: једначину $x + 5y = 3$ заменили смо еквивалентном једначином $x = 3 - 5y$.

$$x = 3 - 5y$$

$$3(3 - 5y) - 2y = -8$$

Применили смо правило П2: променљиву x у другој једначини заменили смо изразом $3 - 5y$.

$$x = 3 - 5y$$

$$9 - 15y - 2y = -8$$

Применили смо правило П1.

$$x = 3 - 5y$$

$$9 - 17y = -8$$

Применили смо правило П1.

$$x = 3 - 5y$$

$$-17y = -17$$

Применили смо правило П1.

$$x = 3 - 5y$$

$$y = 1$$

Применили смо правило П1: израчунали смо y .

$$x = 3 - 5 \cdot 1$$

$$y = 1$$

←----- Применили смо правило П2: заменили смо y у првој једначини бројем 1.

$$x = -2$$

$$y = 1$$

←----- Применили смо правило П1.

Провера:

$$-2 + 5 \cdot 1 = 3$$

$$3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 = -8$$

Уређени пар $(-2, 1)$ јесте решење датог система.

У овом примеру било је погодније да непознату x изразимо преко y , јер нам је коефицијент уз x број 1. Добили бисмо исто решење и да смо непознату y изразили преко x .

Уопште, код методе замене нема правила за избор непознате коју ћемо изражавати. Избор зависи од нас, мада је погодно изабрати непознату уз коју је коефицијент 1 или -1 кад год је то могуће.

2. Решити систем једначина методом замене и провери решење.

а) $y = 10 + 4x$

б) $x = 4 - y$

в) $y = x - 5$

$2x - y = 4$

$3x + y = 8$

$3x + y = 7$

Упутство:

Прво примени правило П2.

3. Решити систем једначина.

а) $x - y = 12$

б) $-x + y = 8$

$2x + y = 3$

$5x - 2y = 5$

4. Решити систем једначина.

а) $5x + 2y = 17$

б) $3y + 2x = 7$

$x - y = 2$

$3y + x = 5$

5. Решити систем једначина.

а) $4x + y = 4$

б) $7x + y = 6$

$5x - 4y = 5$

$x - 6y = 7$

Провери шта знаш

1. Решити систем једначина методом замене:

а) $x = 5y - 10$

б) $8y = 13x - 1$

в) $y = 2x - 2$

г) $-x + y = -1$

$x - 2y = 2$

$-14x + 8y = -2$

$x - 2y = 25$

$-7x + 3y = 25$

5.5. Решење система од две линеарне једначине са две непознате – метода супротних коефицијената

- метода супротних коефицијената

1. Дат је систем: $3x + 7y = -5$

$$3x - 7y = 10$$

Супротни бројеви су:

а) коефицијенти уз непознату x б) коефицијенти уз непознату y

в) слободни чланови

Који је одговор тачан?

5.5.1. Метода супротних коефицијената

Упознаћемо још један поступак решавања система линеарних једначина са две непознате – методу супротних коефицијената. Тај метод састоји се у следећем:

- 1) Ако су коефицијенти уз исту непознату у датим једначинама супротни бројеви, онда еквивалентни систем добијамо тако што једну од једначина препишемо, а уместо друге напишемо једначину која је збир једначина датог система (примењујемо правило ПЗ). На пример, решимо следећи систем једначина:

$$2x + 5y = 5$$

$$-2x - y = -1$$

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 5 \\ -2x - y = -1 \end{array}$$

+

← Коефицијенти уз непознату x су супротни бројеви.

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 5 \\ 4y = 4 \end{array}$$

← Прву једначину смо преписали; друга једначина, $4y = 4$, једнака је збиру једначина $2x + 5y = 5$ и $-2x - y = -1$; применили смо правило ПЗ.

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 5 \\ y = 1 \end{array}$$

← Применили смо правило П1.

$$\begin{array}{r} 2x + 5 \cdot 1 = 5 \\ y = 1 \end{array}$$

← Применили смо правило П2.

$$\begin{array}{r} 2x = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

← Применили смо правило П1.

$$\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 1 \end{array}$$

← Применили смо правило П1.

Решење система је $(0, 1)$.

- 2) Ако у систему једначина, уз исту непознату, коефицијенти нису супротни бројеви, онда množимо једну једначину или обе једначине система одговарајућим бројем. Добијемо систем еквивалентан датом, али такав да су коефицијенти уз исту непознату супротни бројеви. На пример, решимо следећи систем једначина:

$$\begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ 4x - 5y = 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 3y = 0 / \cdot (-4) \\ 4x - 5y = 14 \end{array}$$

← - - - - Да би коефицијенти 1 и 4 уз непознату x били супротни бројеви, леву и десну страну прве једначине množимо бројем -4; примењујемо правило П1.

$$\begin{array}{l} -4x + 12y = 0 \\ 4x - 5y = 14 \end{array} \quad +$$

← - - - - Коефицијенти уз непознату x су супротни бројеви.

$$\begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ 7y = 14 \end{array}$$

← - - - - Прву једначину датог система смо преписали – она нам је погодна за рачунање, јер су коефицијенти уз x и y најмањи бројеви; друга једначина, $7y = 14$, једнака је збиру једначина система; применили смо правило П3.

$$\begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ y = 2 \end{array}$$

← - - - - Применили смо правило П1.

$$\begin{array}{l} x - 3 \cdot 2 = 0 \\ y = 2 \end{array}$$

← - - - - Применили смо правило П2.

$$\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

← - - - - Применили смо правило П1.

Решење система је (6, 2).

Исти резултат добили бисмо и да смо посматрали коефицијенте уз непознату y . Да би коефицијенти уз непознату y били супротни бројеви, прву једначину можемо помножити са -5, а другу са 3.

2. Решити систем једначина методом супротних коефицијената и провери решење.

$$\begin{array}{lll} \text{а) } x + y = 10 & \text{б) } y - x = 5 & \text{в) } 4x - y = 10 \\ x - y = 0 & 3y + x = 7 & -2x + y = 4 \end{array}$$

3. Решити систем једначина методом супротних коефицијената.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x + 2y = 12 & \text{б) } -x + y = 8 \\ x - 3y = 2 & 5x - 2y = 5 \end{array}$$

4. Решити систем једначина методом супротних коефицијената.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } 3x - 2y = 6 & \text{б) } x - 3y = -1 \\ -2x + 4y = -12 & 7x + y = 15 \end{array}$$

Провери шта знаш

1. Решити систем једначина методом супротних коефицијената.

$$\begin{array}{llll} \text{а) } x + y = 122 & \text{б) } 5x - 3y = 19 & \text{в) } 4x - 5y = 7 & \text{г) } 7x - 2y = 3 \\ x - y = 18 & 2x + 3y = -5 & 2x + y = 7 & 3x + 8y = -43 \end{array}$$

5.6. Примена система линеарних једначина

- састављање система једначина на основу текста
- решавање система једначина

1. Напиши одговарајући израз.

- а) Број x увећан за своју трећину.
- б) Број x умањен за своју половину.

5.6.1. Примена система линеарних једначина

Системе линеарних једначина, слично као и линеарне једначине, можемо применити на решавање неких проблема из живота, као што су, на пример, проблеми везани за кретање, израчунавање процената и камате, однос између бројева, однос геометријских објеката итд. Да бисмо решили проблем, потребно је да на основу текста саставимо једначине и решимо их.

Збир два броја је 18. Ако се четвороструком првом броју дода троструки други број, добија се број 61.

Решење

Означимо са x први непознати број, а са y други непознати број.

Реченици *Збир два броја је 18* одговара једначина $x + y = 18$.

Реченици *Ако се четвороструком првом броју дода троструки други број добија се 61* одговара једначина $4x + 3y = 61$.

Изаберимо неку од метода за решавање система и решимо систем.

$$x + y = 18 \quad \cdot (-3)$$

$$4x + 3y = 61$$

$$-3 - 3y = -54$$

$$4x + 3y = 61$$

$$x + y = 18$$

$$x = 7$$

$$7 + y = 18$$

$$x = 7$$

$$y = 11$$

$$x = 7$$

Непознати бројеви су 7 и 11.

5.7. ЗАПАМТИ

Системи линеарних једначина са две непознате

Систем од две линеарне једначине са две непознате, x и y има облик:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ реални бројеви.

На пример:

$$5x + 2y = 3$$

$$x - 4y = 7$$

Бројеви 5 и 1 су коефицијенти уз непознату x , 2 и -4 су коефицијенти уз непознату y , 3 и 7 су слободни чланови.

Решење система две линеарне једначине са две непознате, x и y , јесте сваки уређени пар бројева (x_0, y_0) који је решење обе једначине тог система.

Уређени пар $(-1, 1)$ је решење система:

$$x + y = 0$$

$$-x + y = 2$$

Провера:

$$-1 + 1 = 0$$

$$1 + 1 = 2$$

Правила која примењујемо код решавања система линеарних једначина

Прво правило

Ако једну једначину или обе једначине система заменимо еквивалентним једначинама, добијамо систем једначина еквивалентан датом систему.

Друго правило

Ако у једној једначини датог система једну од непознатих заменимо изразом јенаким тој непознатој добијеној из друге једначине система, добијамо систем једначина еквивалентан датом систему.

Треће правило

Ако једну једначину система заменимо једначином која чини збир или разлику једначина датог система, добијамо систем једначина еквивалентан датом систему.

На пример:

$$2x + 2y = 2 / : 2$$

$$-x + y = -5$$

$$x + y = 1$$

$$-x + y = +5$$

$$x + y = 1$$

$$2y = -4 / : 2$$

$$x + y = 1$$

$$y = -2$$

$$x - 2 = 1$$

$$x = 3$$

$$y = -2$$

6. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Завод за уџбенике)

Системи линеарних једначина са две непознате

Као и у осталим уџбеницима, увод у системе линеарних једначина започет је позивањем на претходно стечено знање о линеарним једначинама са једном непознатом из претходног градива. Циљ овог поглавља је упознати се са системима линеарних једначина са две непознате, њиховим решавањем еквивалентним трансформацијама и њиховим применама на многобројне проблеме у науци и свакодневном животу.

6.1. Појам система линеарних једначина са две непознате

Појам линеарне једначине са две непознате упознаћемо кроз примере, као што смо упознали и друге математичке појмове.

пример 1

Ако је за 15 једнаких свезака и 7 једнаких књига плаћено 2550 динара, онда се то математичким језиком може записати као $15x + 7y = 2550$, где је x непозната цена свеске, а y непозната цена књиге.

Једнакост $15x + 7y = 2550$ је линеарна једначина са две непознате x и y . Приметимо да је за $x = 1$ и $y = 2$ добијена једнакост нетачна, јер је $15 + 14 = 29 \neq 2550$, а за $x = 100$ и $y = 150$ добијена једнакост тачна, јер је $15 \cdot 100 + 7 \cdot 150 = 1500 + 1050 = 2550$. За уређени пар $(x, y) = (1, 2)$ кажемо да није решење добијене једначине $15x + 7y = 2550$, а за уређени пар $(x, y) = (100, 150)$ кажемо да јесте решење дате једначине.

пример 2

Чињеница да једна књига вреди 10 пута више од свеске може се записати математичким језиком као $y = 10x$ или као $y - 10x = 0$, где је x цена свеске, а y цена књиге.

И једнакост $y = 10x$ је линеарна једначина са две непознате. Уређени пар $(4, 40)$ је једно решење ове једначине. Примећујемо да ова једначина има бесконачно много решења, јер за сваки реалан број a уређени пар $(a, 10a)$ је њено решење.

пример 3

Једнакост $2x + y = 7$ је линеарна једначина са две непознате x и y .

Сва решења ове једначине добијмо ако произвољно изаберемо x . Нека је $x = t$. Одговарајуће y израчунамо из дате једнакости: $y = 7 - 2x = 7 - 2t$. Скуп свих решења је

$$\{(t, 7 - 2t) | t \in \mathbb{R}\}.$$

Раније смо видели да у координатном систему овај скуп представља праву линију чија је једначина $y = 7 - 2x$.

На основу претходних примера, може се закључити:

Једначина облика $ax + by = c$, где су a, b и c дати реални бројеви, а x и y непознате назива се линеарна једначина са две непознате.

Уређени пар реалних бројева (x_0, y_0) је решење ове линеарне једначине ако је тачна једнакост $ax_0 + by_0 = c$.

Сва решења једначине чине скуп њених решења.

пример 4

За 15 једнаких свезака и 10 једнаких књига плаћено је 2550 динара. Колико кошта свеска, а колико књига ако је књига 10 пута скупља од свеске?

Ако цену свеске означимо са x , а цену књиге са y , истовремено важе следеће једнакости:

$$\begin{cases} 15x + 7y = 2550 \\ y = 10x \end{cases}$$

Кажемо да смо добили **систем од две једначине са две непознате**. Приметимо да је уређени пар $(30, 300)$ решење и једне и друге једначине, тј. решење добијеног система, јер је $15 \cdot 30 + 7 \cdot 300 = 2550$ и $300 = 10 \cdot 30$.

Како смо добили ово решење? Да ли је то и једино решење система?

Ако уместо y у прву једначину уврстимо $10x$ добија се једнакост $15x + 7 \cdot 10x = 2550$ или $85x = 2550$, па је $x = 2550 : 85 = 30$. Тада је $y = 10x = 10 \cdot 30 = 300$. Дакле, цена једне свеске је 30 динара, а књиге 300 динара.

пример 5

Миша и Неша заједно имају 127 DVD-а са филмовима, при чему Миша има 35 DVD-а више од Неше. Колико DVD-а има Миша, а колико Неша?

Нека Миша има m , а Неша n DVD-а. Тада се услови задатка изражавају једначинама:

$$\begin{cases} m + n = 127 \\ m - n = 35. \end{cases}$$

Добијене једначине чине систем линеарних једначина са две непознате.

Из прве једначине је $m = 127 - n$, па се заменом у другу једначину добија $127 - n - n = 35$. Решавањем ове једначине добија се $92 = 2n$, тј. $n = 46$. Сада је $m = 127 - n = 127 - 46 = 81$. Дакле, Неша је имао 46, а Миша 81 DVD-а.

Две једначине $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ чине систем од две линеарне једначине са две непознате x и y (где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ дати реални бројеви).

Ако су обе једнакости $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ тачне, онда је уређени пар (x_0, y_0) једно решење система.

Скуп свих оваквих уређених парова је скуп свих решења овог система линеарних једначина са две непознате.

пример 6

Дат је систем једначина $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 11 \end{cases}$

Уређени пар $(7, -1)$ је решење датог система једначина, јер бројеви 7 и -1 задовољавају и прву и другу једначину: $7 + 2 \cdot (-1) = 5$ и $2 \cdot 7 + 3(-1) = 11$.

Уређени пар $(5, 0)$ није решење датог система једначина, јер бројеви 5 и 0 задовољавају прву једначину и не задовољавају другу једначину: $5 + 2 \cdot 0 = 5$ и $2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = 10 \neq 11$.

Уређени пар $(-2, 5)$ није решење датог система једначина, јер бројеви -2 и 5 задовољавају другу једначину и не задовољавају прву једначину: $-1 + 2 \cdot 5 = 9 \neq 5$ и $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 = 11$.

пример 7

Дат је систем једначина $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

Како је немогуће да вредност израза $x + 2y$ истовремено буде и 3 и 5, дати систем нема ниједно решење.

Систем који нема ниједно решење назива се противуречни или немогући.

Систем једначина облика $\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$ називамо систем једначина у решеном облику.

Решити систем две једначине са две непознате значи одредити скуп решења.

Контролна питања

Шта је линеарна једначина са две непознате?

Шта је решење линеарне једначине са две непознате?

Шта је систем линеарних једначина са две непознате?

Када се говори о систему једначина у решеном облику?

Шта је решење система линеарних једначина са две непознате?

Када је систем једначина немогућ?

Задаци

- Дате су једначине: а) $x + y = 5$, б) $a^3 = a + 6$, в) $m + 7 = n - 10$, г) $y^2 + z^2 = 1$. Које од њих су једначине са две непознате? Које од датих једначина су линеарне?
- Напиши линеарне једначине које преводе следеће реченице на математички језик:

- а) Збир два броја је 57,
 - б) Разлика двоструког броја x и троструког броја y је 2010,
 - в) Количник два броја је 9.
3. Докажи да су уређени парови $(a, b) = (3, 4)$ и $(a, b) = (-1, 7)$ решења једначине $3a + 4b = 25$.
 4. Докажи да уређени парови $(m, n) = (1, 4)$ и $(m, n) = (5, -2)$ нису решења једначине $8m + 3n = 7$.
 5. Дата је линеарна једначина $3x - 2y = 7$. Одреди бројеве p и q тако да уређени парови $(p, 4)$ и $(1, q)$ буду решења дате једначине.
 6. Напиши линеарну једначину са две непознате чије је једно решење $(x, y) = (7, -4)$.
 7. Да ли једначине $x + y = 2010$ и $x = 123$ чине систем линеарних једначина са две непознате?
 8. Дат је систем линеарних једначина:
$$\begin{cases} 2a + 5b = 14 \\ 7a - b = 12 \end{cases}$$
. Који од уређених парова су решења датог система једначина: а) $(7, 0)$, б) $(2, 2)$, в) $(-2, 5)$?
 9. Напиши бар један систем линеарних једначина са две непознате чије решење је $(x, y) = (3, 0)$.
 10. Докажи да уређени парови $(-1, 5)$ и $(4, 9)$ нису решења следећег система линеарних једначина са две непознате:
$$\begin{cases} 3p + 11q = 52 \\ 6q - 5p = 34 \end{cases}$$
.
 11. Да ли постоје реални бројеви x и y , такви да је $7x - 2y = 15$ и $28x - 8y = 36$?

6.2. Еквивалентност система линеарних једначина са две непознате

Циљ ове наставне јединице је упознати се са трансформацијама које дати систем једначина преводи у систем једначина у решеном облику, не мењајући притом његов скуп решења. Такве трансформације називају се еквивалентне трансформације система.

пример 1

Системи једначина

$$J_1: \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 \end{cases} \quad J_2: \begin{cases} 2x = 10 \\ 3y = -9 \end{cases} \quad J_3: \begin{cases} 2y = -6 \\ 3x = 15 \end{cases}$$

су еквивалентни.

Уређени пар $(5, -3)$ је једино решење и првог и другог и трећег система једначина, пошто се дељењем једначина са 2 и 3 и заменом њиховог редоследа J_2 и J_3 своде на систем једначина J_1 , који је у решеном облику.

Системе који имају исти скуп решења називамо еквивалентним системима. Трансформације које не мењају скуп решења система називамо еквивалентне трансформације.

Еквивалентне трансформације система линеарних једначина са две непознате заснивају се на познатим чињеницама и особинама реалних бројева:

ако је $a = b$ и $b = c$, онда је $a = c$;

ако је $a = b$, онда је $a + c = b + c$ и обрнуто;

ако је $c \neq 0$, онда из $a = b$ следи $ac = bc$ и обрнуто.

На основу њих, закључујемо да следеће трансформације не мењају скуп решења система (са L и D смо означили леву, односно десну страну једначина):

Трансформација 1. Замена редоследа једначина:

$$\begin{array}{l} L_1 = D_1 \\ L_2 = D_2 \end{array} \text{ еквивалентно са } \begin{array}{l} L_2 = D_2 \\ L_1 = D_1 \end{array}.$$

Трансформација 2. Промена једне једначине множењем њених страна са бројем различитим од нуле:

$$\begin{array}{l} L_1 = D_1 \\ L_2 = D_2 \end{array} \text{ еквивалентно са } \begin{array}{l} L_1 = D_1 \\ tL_2 = tD_2, t \neq 0 \end{array}.$$

Трансформација 3. Промена једне једначине добијена додајући њеним странама произвољни умножак страна друге једначине:

$$\begin{array}{l} L_1 = D_1 \\ L_2 = D_2 \end{array} \text{ еквивалентно са } \begin{array}{l} L_1 = D_1 \\ L_2 + t \cdot L_1 = D_2 + t \cdot D_1 \end{array}.$$

Трансформација 4. Непознату из једне једначине система изразити као функцију друге непознате, па је у другој једначини заменити добијеним изразом.

Системи једначина

$$J_1: \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad J_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

су еквивалентни.

Заменом вредности $y = x + 1$ из друге у прву једначину система J_1 добија се једначина $2x + 3(x + 1) = 8$, тј. $5x + 3 = 8$ или $5x = 8 - 3 = 5$. Решење добијене једначине је $x = 5 : 5 = 1$. Следи да је $y = x + 1 = 1 + 1 = 2$. Системи једначина J_1 и J_2 су еквивалентни, јер је уређени пар $(1, 2)$ једино решење и једног и другог система једначина.

Контролна питања

Када су два система једначина еквивалентна?

Наведи еквивалентне трансформације система једначина.

Задаци:

1. Да ли су еквивалентни системи једначина: $J_1: \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ и $J_2: \begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 4y - 5x = 20 \end{cases}$?
2. Докажи да су еквивалентни системи једначина: $J_1: \begin{cases} 5a - 6b = 4 \\ 2a + 7b = 11 \end{cases}$ и $J_2: \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 3 \end{cases}$.

3. Дати су системи линеарних једначина са две непознате: $J_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$, $J_2: \begin{cases} 5x = 5 \\ 3y = -12 \end{cases}$, $J_3: \begin{cases} 2x = 2 \\ 7y = -21 \end{cases}$. Који од датих система су еквивалентни?
4. Докажи да системи једначина $J_1: \begin{cases} 12p + 13q = 14 \\ 4p - 5q = 6 \end{cases}$ и $J_2: \begin{cases} 3p = 0 \\ 2q = 2 \end{cases}$ нису еквивалентни.
5. Напиши бар један систем једначина еквивалентан са системом једначина: $J: \begin{cases} m = 2 \\ n = 9 \end{cases}$.
6. Да ли су еквивалентни системи:
- а) $J_1: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, $J_2: \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 16 \end{cases}$; б) $J_1: \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$, $J_2: \begin{cases} 2x = 8 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$.

6.3. Решавање система линеарних једначина са две непознате методом смене

Решавање система линеарних једначина методом смене заснива се на трансформацији 4:

Непознату из једне једначине система изразити као функцију друге непознате, па је у другој једначини заменити добијеним изразом.

пример 1

Решити систем линеарних једначина: $\begin{cases} x = 9 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases}$.

Непозната x из прве једначине система замењује се у другу једначину система. Добијамо низ еквивалентних система:

$$\begin{cases} x = 9 \\ 3x + 2y = 31 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ 3 \cdot 9 + 2y = 27 + 2y = 31 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ 2y = 31 - 27 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 \\ y = 4 : 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$

Поступак решавања је једноставан.

Корак 1: Из једне једначине израчунати једну непознату (назовимо је прва) као (линеарну) функцију од друге непознате.

Корак 2: Заменити прву непознату у другој једначини добијеним изразом.

Корак 3: Решити добијену (линеарну) једначину по другој непознатој.

Корак 4: Заменити добијену вредност за другу непознату у израз за прву непознату и израчунати је.

пример 2

Одредити решење система линеарних једначина: $\begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$.

И у овом случају се решавање система линеарних једначина одвија преко еквивалентних система једначина, с тим што је најједноставније непознату x из прве једначине система заменити у другу једначину:

пример 2

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y + 2 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ 2(y + 2) + 5y = 11 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ 2y + 4 + 5y = 11 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ 7y + 4 = 11 \end{cases} \\ & \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ 7y = 11 - 4 = 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 7 : 7 = 1 \end{cases} & \quad \begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

пример 3

Решити систем линеарних једначина: $\begin{cases} 3a - 2b = 15 \\ 2a + b = 17 \end{cases}$.

Најједноставније је из друге једначине изразити непознату b као функцију од a и заменити је у првој једначини добијеним изразом. Добиће се једначина по a коју треба решити, а затим итрачунати b :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3a - 2b = 15 \\ 2a + b = 17 \end{cases}, & \quad \begin{cases} 3a - 2b = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, & \quad \begin{cases} 3a - 2(17 - 2a) = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, \\ \begin{cases} 3a - 34 + 4a = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, & \quad \begin{cases} 7a - 34 = 15 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, & \quad \begin{cases} 7a = 15 + 34 = 49 \\ b = 17 - 2a \end{cases} \\ \begin{cases} a = 49 : 7 = 7 \\ b = 17 - 2a \end{cases}, & \quad \begin{cases} a = 7 \\ b = 17 - 2 \cdot 7 = 17 - 14 + 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

пример 4

Цана и Дана треба да поделе 2345 динара, тако да Цана добије 789 динара више од Дана. Колико ће новца добити Цана, а колико Дана?

Ако новац који треба да добије Цана обележимо са c , а новац који треба да добије Дана са d , добијамо систем једначина: $c + d = 2345$ и $c - d = 789$. Решавањем система једначина добија се:

$$\begin{aligned} \begin{cases} c + d = 2345 \\ c - d = 789 \end{cases}, & \quad \begin{cases} c + d = 2345 \\ c = d + 789 \end{cases}, & \quad \begin{cases} d + 789 + d = 2345 \\ c = d + 789 \end{cases}, \\ \begin{cases} 2d + 789 = 2345 \\ c = d + 789 \end{cases}, & \quad \begin{cases} d = 1556 : 2 = 778 \\ c = d + 789 \end{cases}, & \quad \begin{cases} d = 778 \\ c = 778 + 789 = 1567 \end{cases}. \end{aligned}$$

Дакле, Цана ће добити 1567, а Дана 778 динара.

Задаци:

1. Методом смене решити следеће системе линеарних једначина:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ x = 3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} a = -2 \\ 4b - 5a = 18 \end{cases}$.

2. Одредити решења система једначина:

а) $\begin{cases} 3x + 4y = 24 \\ x - y = 3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 7a + 3b = 34 \\ a = 2b \end{cases}$, в) $\begin{cases} 6m + 7n = -1 \\ m + n = 0 \end{cases}$.

3. Решити следеће системе једначина:

а) $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2p + 5q = 20 \\ 3p - q = 13 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 0,2a + 0,3b = 1,2 \\ 0,4a - 0,1b = 1 \end{cases}$.

4. Одредити решења система једначина:
- а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{4}y = 5 \\ 4x = 15y \end{cases}$.
5. Збир два броја је 2010, а њихова разлика 666. О којим бројевима је реч?
6. У правоугаонику чији је обим 100 cm, једна страница је за 8 cm већа од друге. Одредити површину тог правоугаоника.
7. Обим једнакокраког троугла је 32 cm, а крак и основица се односе као 5:6. Колика је површина датог троугла?
8. Решити система једначина:
- а) $\begin{cases} 3x + y = 25 \\ 9x + 3y = 30 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x - 4y = 25 \\ 5x - 20y = 125 \end{cases}$.

6.4. Решавање система линеарних једначина са две непознате методом супротних коефицијената

Решавање система линеарних једначина са две непознате методом супротних коефицијената заснива се на еквивалентним трансформацијама, а посебно на трансформацији 3. У случају да су коефицијенти уз неку непознату супротни, сабирањем једначина по странама добија се једначина у којој се та непозната не појављује (јер је коефицијент уз њу једнак нули), а која може да замени једну једначину система.

пример 1

Решити систем линеарних једначина: $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$.

Систем линеарних једначина решава се преко еквивалентних трансформација система, с тим што се уместо друге једначине система записује збир прве и друге једначине система, чиме се постиже да друга једначина остане са само једном непознатом. Када се она израчуна, лако је израчунати и вредност друге непознате. Конкретно:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases} & \quad \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 3x - 5x + 2x + 5y = 13 + 7 \end{cases} & \quad \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 5x = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ x = 20:5 = 4 \end{cases} & \quad \begin{cases} 12 - 5y = 7 \\ x = 4 \end{cases} & \quad \begin{cases} -5y = 7 - 12 = -5 \\ x = 4 \end{cases} \\ & \quad \begin{cases} y = (-5):(-5) = 1 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

пример 2

Одредити решења система линеарних једначина: $\begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 2a + 3b = -9 \end{cases}$.

У претходном примеру прву и другу једначину било је могуће сабрати директно. Међутим, у овом примеру то не би дало резултат, јер су коефицијенти уз обе непознате различити. Да бисмо добили једнаке коефицијенте, али супротног знака, погодно је да прву једначину помножимо са 3, а другу са 2 и потом применимо поступак као у претходном примеру:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3a - 2b = 6 \\ 2a + 3b = -9 \end{cases} & \quad \begin{cases} 9a - 6b = 18 \\ 4a + 6b = -18 \end{cases} & \quad \begin{cases} 9a - 6b = 18 \\ 13a = 0 \end{cases} & \quad \begin{cases} 9a - 6b = 18 \\ a = 0:13 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

пример 2

$$\begin{cases} 0 - 6b = 18 \\ a = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = 18 : (-6) \\ a = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = -3 \\ a = 0 \end{cases}.$$

пример 3

Анка је купила 3 kg брашна и 5 kg шећера и платила 424 динара. У истој продавници Бранка је купила 5 kg брашна и 8 kg шећера и платила 686 динара. Колико кошта 1 kg брашна, а колико 1 kg шећера?

Ако цену брашна означимо са b , а цену шећера са s , онда је на основу услова задатка $3b + 5s = 424$ и $5b + 8s = 686$. Дакле, добили смо систем од две линеарне једначине са две непознате. Систем решавамо методом супротних коефицијената, тако што прву једначину množимо са 5, а другу са -3 :

$$\begin{cases} 3b + 5s = 424 \mid \cdot 5 \\ 5b + 8s = 686 \mid \cdot (-3) \end{cases}, \quad \begin{cases} 15b + 25s = 2120 \\ -15b - 24s = -2058 \end{cases}.$$

У наредном кораку уместо друге једначине користимо збир прве и друге једначине:

$$\begin{cases} 15b + 25s = 2120 \\ 25s - 24s = s = 2120 - 2058 = 62 \end{cases}, \quad \begin{cases} 15b + 25 \cdot 62 = 2120 \\ s = 62 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15b = 2120 - 1550 = 570 \\ s = 62 \end{cases}, \quad \begin{cases} b = 570 : 15 = 38 \\ s = 62 \end{cases}$$

Према томе, 1 kg брашна кошта 38 динара, а 1 kg шећера 62 динара.

На основу урађених примера можемо закључити да се метода супротних коефицијената примењује код система чији су сви коефицијенти уз непознате различити од нуле и да има следеће кораке.

Корак 1. Провери да ли су коефицијенти уз неку променљиву у једначинама супротни. Ако јесу, иди на корак 2. У супротном, иди на корак 3.

Корак 2. Замени другу једначину система збиром једначина (сабирањем по странама) и иди на корак 4.

Корак 3. Помножи стране прве и друге једначине погодним бројем да добијеш супротне коефицијенте уз изабрану непознату (ако су коефицијенти уз непознату били a и A , помножи стране једначина редом са A и $-a$) и иди на корак 2.

Корак 4. Ређи другу једначину и иди на корак 5.

Корак 5. Из прве једначине израчунај преосталу непознату.

Задаци:

- Одредити решења система једначина:
 - $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 5x - 3y = 6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 6a + 5b = 22 \\ 7b - 6a = 2 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 4m + 9n = 13 \\ 5n - 2m = 3 \end{cases}$.
- Решити системе једначина:
 - $\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ x - y = -1 \end{cases}$, б) $\begin{cases} a + 2b = 3 \\ 3a + b = 2 \end{cases}$, в) $\begin{cases} 7c + d = 9 \\ 5c + 11d = 27 \end{cases}$.
- Одредити решења система једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + 3y = 16 \\ 4x + 7y = 22 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} 3p - 10y = 13 \\ 8p + 7y = 1 \end{cases}, \quad \text{в) } \begin{cases} 4m = 7n \\ 5m = 9n \end{cases}.$$

4. Решити систем једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} 8x = 5y \\ 4x + 3y = 44 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 8 \\ \frac{1}{4}x - \frac{7}{10}y = -6 \end{cases}, \quad \text{в) } \begin{cases} 3(x + 1) = 4(y - 2) \\ y - x = 3 \end{cases}.$$

5. За 5 свезака и 7 оловака плаћено је 220 динара. Колико кошта 7 свезака и 5 оловака, ако је свеска за 20 динара скупља од оловке?

6. Два броја чија је аритметичка средина 37, разликују се за 8. О којим бројевима је реч?

7. Двоцифрени број је 4 (четири) пута већи од збира својих цифара, а 12 (дванаест) пута већи од њихове разлике. Одредити тај двоцифрени број.

8. Решити систем једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 8y = 34 \\ 12x + 32y = 96 \end{cases}, \quad \text{б) } \begin{cases} 4x - 7y = 15 \\ 8x - 14y = 30 \end{cases}.$$

6.5. Графички приказ решења система линеарних једначина са две непознате

Решавање система линеарних једначина са две непознате графичком методом заснива се на чињеници да се скуп решења сваке линеарне једначине по непознатим x и y може приказати као скуп тачака у Декартовом xOy координатном систему (права ако је бар један коефицијент уз непознате различит од нуле, односно цела равна или празан скуп ако су оба коефицијента уз непознате једнака нули). Скуп решења система линеарних једначина биће тада пресек скупова решења свих једначина система. Ситуације које при том могу настати илуструјемо следећим примерима.

Графичком методом одредити решења система линеарних једначина: $\begin{cases} y - 2x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$

Једначина $y - 2x = 3$, тј. једначина $y = 2x + 3$, у Декартовом координатном xOy систему представља праву a чија је једначина $y = 2x + 3$.

Уочимо и праву b чија је једначина $y = 5$. Права a је дефинисана тачкама B и C (види таблицу), а права b : $y = 5$ је паралелна са x -осом изнад ње на растојању 5.

Права $a: y - 2x = 3$		
Тачка	x	y
B	0	3
C	-2	-1

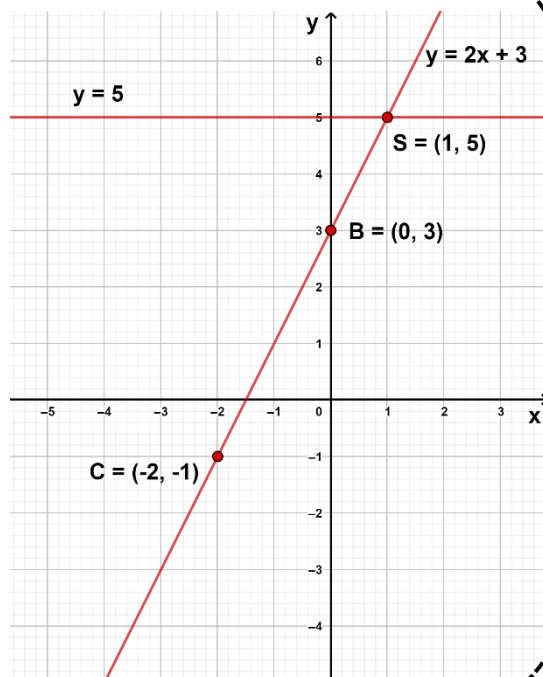
пример 1

пример 1

Све тачке праве a , дакле бесконачно много тачака имају особину да њихове координате задовољавају једначину $y = 2x + 3$, а све тачке праве b имају координату y једнаку 5. Праве a и b се секу у тачки S чије су координате $x = 1$, $y = 5$. Координате тачке $S(x, y)$ имају обе особине, тј. $y = 2x + 3$ и $y = 5$.

С обзиром на то да је цртање правих у координатној равни ограничене прецизности, добро је да увек проверимо да ли овако процењене координате тачке пресека правих са цртежа задовољавају обе једначине система.

Зато проверавамо, $x = 1$, $y = 5$ је заиста решење датог система једначина, јер је $5 - 2 \cdot 1 = 3$ и $5 = 5$.



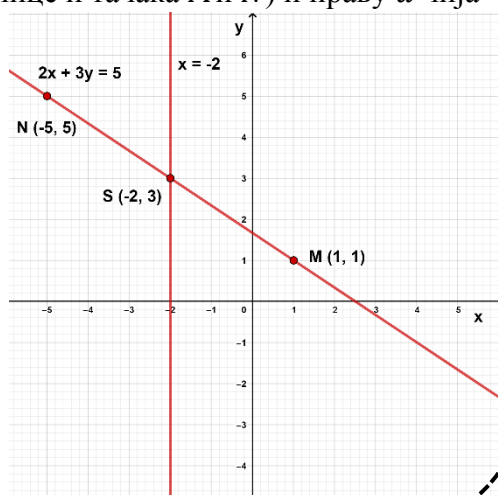
пример 2

Графичком методом решити систем линеарних једначина: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = -2 \end{cases}$

Као и у претходном примеру, у Декартовом координатном xOy систему конструишемо праву c чија је једначина $2x + 3y = 5$ (помоћу таблице и тачака M и N) и праву d чија је једначина $x = -2$ која је паралелна са y -осом на растојању 2 лево од ње.

Праве c и d се секу у тачки S чије су координате $(-2, 3)$. Очигледно је да координате тачке S задовољавају систем.

Права $c: 2x + 3y = 5$		
Тачка	x	y
M	1	1
N	-5	5



пример 3

Графичком методом одредити решења система једначина: $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$

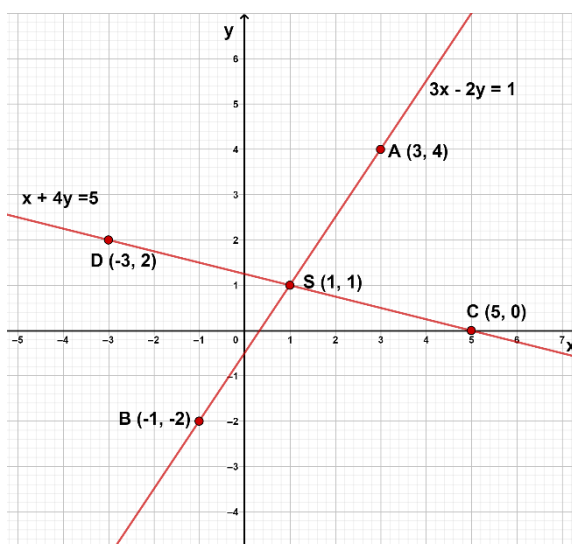
Једнакости $3x - 2y = 1$ и $x + 4y = 5$ су једначине правих које су у xOy равни представљене правом p (задата тачкама A и B), односно правом q (задата тачкама C и D).

Праве p и q секу се у тачки $S(1, 1)$. Провером се утврђује да је $x = 1$ и $y = 1$ заиста решење датог система једначина, јер је $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ и $1 + 4 \cdot 1 = 5$.

пример 3

Правa $p: 3x - 2y = 1$		
Тачка	x	y
A	3	4
B	-2	-1

Правa $q: x + 4y = 5$		
Тачка	x	y
C	5	0
D	-3	2

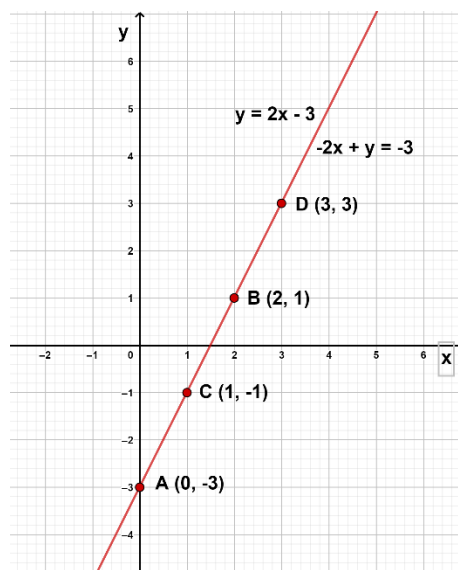


Графичком методом решити систем једначина $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$.

Ако дате једначине представимо правима m и n у Декартовој xOy равни, онда се добија:

Правa $m: 2x - y = 3$		
Тачка	x	y
A	0	-3
B	2	1

Правa $n: 4x - 2y = 6$		
Тачка	x	y
C	1	-1
D	3	3

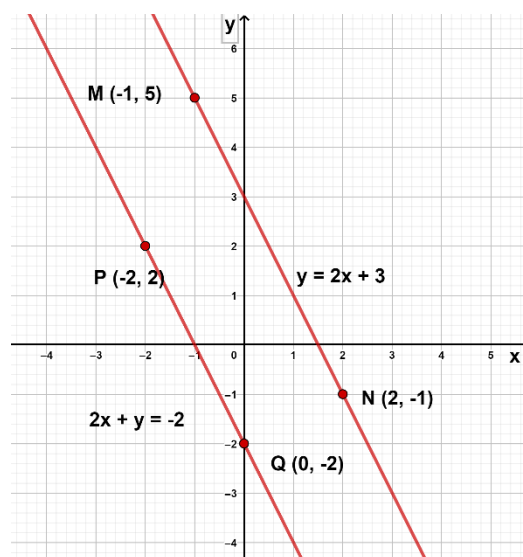


Очигледно је да се праве m и n поклапају, тј. свака тачка праве m је и тачка праве n . То значи да дати систем има бесконачно много решења. Ако је $x = t$, онда је $y = 2x + 3 = 2t - 3$. Уређени пар $(t, 2t - 3)$, где је t неки реалан број, представља опште решење дате једначине. Приметимо и да су обе једначине датог система еквивалентне, јер се свде на једначину $2x - y = 3$.

Графичком методом одредити решења система једначина $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = -4 \end{cases}$

Правна $a: 2x + y = 3$		
Тачка	x	y
M	-1	5
N	2	-1

Правна $n: 4x + 2y = -4$		
Тачка	x	y
P	-2	2
Q	0	-2



Ако решења једначине $2x + y = 3$ представимо као праву у Декартовој координатној равни (помоћу тачака M и N), а једначину $4x + 2y = -4$ правом b (помоћу тачака P и Q), онда је јасно да се те две праве не секу, тј. паралелне су. То доказују и њихови коефицијенти правца, јер обе праве имају коефицијент $k = -2$. Такав систем смо већ сусретали, утврдили да он нема решења и звали га немогућим или противуречним. Заиста, једначине $2x + y = 3$ и $2x + y = -2$ су противуречне.

Из претходних примера можемо извести следеће закључке.

Нека систему једначина $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ у Декартовој координатној xOy равни

одговарају две праве чије су једначине: $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$.

Ако се праве $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ секу у тачки $S(x_0, y_0)$ систем има јединствено решење $x = x_0$ и $y = y_0$.

Ако се праве $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ поклапају, систем има бесконачно много решења.

Ако су праве $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ паралелне, систем нема решења.

Задаци:

1. Графичким методом решити систем једначина:

а) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 3x - y = 9 \\ x = 4 \end{cases}$.

2. Графичким методом одредити решење система једначина:

$$\text{а)} \begin{cases} 3x + y = 6 \\ x + 3y = 10 \end{cases}, \quad \text{б)} \begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}.$$

3. Графичким методом решити систем једначина:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x + y = 7 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}, \quad \text{б)} \begin{cases} 4x - y = 3 \\ 12x - 3y = 9 \end{cases}.$$

6.6. Примена система линеарних једначина са две непознате

Системи линеарних једначина са две непознате имају значајне примене како у математици, тако и у другим наукама, али и у многобројним проблемима из свакодневног живота. Најзначајније примене система линеарних једначина илуструјемо следећим примерима.

пример 1

Збир два броја је 52. Ако се већи од њих подели мањим, добија се количник 9 и остатак 2. О којим бројевима је реч?

Нека је већи од тражених бројева x , а мањи y . Тада је $x + y = 52$ и тада је $x = 9y + 2$, па добијамо систем једначина:

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ x = 9y + 2 \end{cases}.$$

Трансформацијом добијеног система у низ еквивалентних система и применом методе смене (јер је непозната x у другој једначини система већ израчуната) налазимо:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 52 \\ x = 9y + 2 \end{cases} & \rightarrow \begin{cases} 9y + 2 + y = 52 \\ x = 9y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10y = 52 - 2 \\ x = 9y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10y = 50 \\ x = 9y + 2 \end{cases} \\ & \rightarrow \begin{cases} y = 50 : 10 = 5 \\ x = 9y + 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 5 \\ x = 9 \cdot 5 + 2 = 47 \end{cases}. \end{aligned}$$

Тражени бројеви су 47 и 5. Њихов збир је 52, а при дељењу 47 са 5 добија се количник 9 и остатак 2.

пример 2

Пре четири године Марко је био четири пута старији од Ненада, а за четири године Марко ће бити три пута старији од Ненада. Колико година сада има Марко, а колико Ненад?

Ако Марко сада има m , а Ненад n година, онда су пре 4 године имали $m - 4$, односно $n - 4$ година и тада је $m - 4 = 4(n - 4)$. За 4 године Марко ће имати $m + 4$ година, а Ненад $n + 4$ година и тада ће бити $m + 4 = 3(n + 4)$. Добијамо следећи систем једначина:

$$\begin{cases} m - 4 = 4(n - 4) \\ m + 4 = 3(n + 4) \end{cases}.$$

пример 2

Трансформацијом система једначина добија се:

$$\begin{cases} m - 4 = 4(n - 4) \\ m + 4 = 3(n + 4) \end{cases}, \begin{cases} m - 4 = 4n - 16 \\ m + 4 = 3n + 12 \end{cases}, \begin{cases} m = 4n + 4 - 16 \\ m = 3n - 4 + 12 \end{cases}, \begin{cases} m = 4n - 12 \\ m = 3n + 8 \end{cases}.$$

Ако вредност непознате m из прве једначине заменимо у другој једначини, добија се:

$$\begin{cases} m = 4n - 12 \\ 4n - 12 = 3n + 8 \end{cases}, \begin{cases} m = 4n - 12 \\ 4n - 3n = 12 + 8 \end{cases}, \begin{cases} m = 4n - 12 \\ n = 20 \end{cases}, \begin{cases} m = 4 \cdot 20 - 12 = 68 \\ n = 20 \end{cases}.$$

Значи Марко сада има 68, а Ненад 20 година. Пре четири године Марко је имао 64, а Ненад 16 година, што је 4 пута више. За четири године Марко ће имати 72, а Ненад 24 године, што је 3 пута више.

пример 3

Одредити једначину праве p , која садржи тачке: $A(1,3)$ и $B(4,6)$.

Нека је једначина тражене праве $y = kx + n$. Како тачке A и B припадају траженој правој, то координате тачака задовољавају једначину праве, што значи да је: $3 = k \cdot 1 + n$ и $6 = k \cdot 4 + n$.

Из услова задатка добијамо систем једначина: $\begin{cases} k + n = 3 \\ 4k + n = 6 \end{cases}$ који решавамо методом смене. Дакле,

$$\begin{cases} k + n = 3 \\ 4k + n = 6 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 4k + n = 6 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 4k + 3 - k = 6 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 3k + 3 = 6 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - k \\ 3k = 3 \end{cases}, \\ \begin{cases} n = 3 - k \\ k = 1 \end{cases}, \begin{cases} n = 3 - 1 = 2 \\ k = 1 \end{cases}.$$

Тражена једначина је $y = kx + n$, тј. $y = x + 2$.

пример 4

Од Новог Сада до Београда туристички брод путује Дунавом 3 сата. Од Београда до Новог Сада исти туристички брод путује Дунавом 5 сати. За колико сати ће Дунавом из Новог Сада до Београда стићи пластична боца у којој је Милица својој другарици Вери послала решење овог задатка ако је растојање од Београда до Новог Сада 75 km?

Нека је v_1 брзина брода, v_2 брзина Дунава. Знамо је растојање између Новог Сада и Београда 75 km, а знања из физике указују на то да се пређени пут израчунава када се брзина кретања помножи са временом утрошеним за прелазак пута. На основз тога је $(v_1 + v_2) \cdot 3 = 75$ и $(v_1 - v_2) \cdot 5 = 75$, јер низводно Дунав убрзава брод, а узводно Дунав успорава брод. Добија се систем једначина:

$$\begin{cases} 3 \cdot (v_1 + v_2) = 75 \\ 5 \cdot (v_1 - v_2) = 75 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} v_1 + v_2 = 25 \\ v_1 - v_2 = 15 \end{cases}.$$

Систем једначина решавамо методом супротних коефицијената тако што прву једначину задржимо, а уместо друге напишемо збир прве и друге једначине. На тај начин добијамо:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 25 \\ 2v_1 = 40 \end{cases}, \begin{cases} v_1 + v_2 = 25 \\ v_1 = 20 \end{cases}, \begin{cases} v_1 + 20 = 25 \\ v_1 = 20 \end{cases}, \begin{cases} v_2 = 5 \\ v_1 = 20 \end{cases}.$$

Време за које ће боца прећи пут од Новог Сада до Београда је сати $t = \frac{s}{v_2} = \frac{75}{5} = 15$.

Задаци:

1. Збир два броја је 2010, а њихов количник је $\frac{3}{7}$. О којим бројевима је реч?
2. Два броја се разликују за 19, а збир њихових трећина је 27. Који су то бројеви?
3. Збир два броја је три пута већи од њихове разлике. Одредити о којим бројевима је реч ако се, када један саберемо са 10, а од другог одузмемо 10, добију једнаки бројеви.
4. На екскурзији је било 64 ученика. Девојчице су смештене у четворокреветне, а дечаци у трокреветне собе. Колико је било дечака, а колико девојчица ако су употребљене две четворокреветне собе више?
5. Школа је набавила 120 уџбеника и 80 збирки и платила укупно 72000 динара. За три уџбеника плати се као за четири збирке. Колика је цена уџбеника, а колика збирке?
6. Мира и Весна имају једнаке суме новца. Мира потроши 42 динара, а Весна 214 динара. Колико су новца имале ако сада Мира има три пута више новца него Весна?
7. Пас је угледао зеца на раздаљини од 240 m испред себе. Зец претрчи 500 m за 2 минута, а пас претрчи 1325 m за 5 минута. За које време ће пас стићи зеца?
8. Сада син има 9 година, а његов отац 35. За колико година ће отац бити 3 пута старији од сина?
9. У једном магацину било је 4 пута више јабука него у другом. Када је из већег магацина издато 950 kg, а из мањег 50 kg јабука, на оба места је остала иста количина јабука. Колико јабука је било у сваком магацину?

7. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Круг)

7.1. Појам линеарне једначине са две непознате

Подсетимо се линеарних једначина са једном непознатом, тј. оним једначинама које се разним трансформацијама доводе на облик

$$ax + b = 0.$$

при чему су a и b неки бројеви. На пример, $2x + 3 = 0$, $\frac{1}{3}x - 7 = 0$, $\frac{x}{4} + \frac{\sqrt{2}}{5}$. Решење такве једначине је сваки број x_0 за који важи $ax_0 + b = 0$, тј. такав број који, заменом у једначину уместо непознате x , ту једначину претвара у тачну једнакост.

На сличан начин уводи се и појам линеарне једначине са две непознате x и y . То је једначина која се може довести на облик

$$ax + by + c = 0$$

где су a, b и c неки бројеви.

ПРИМЕР 1. Једначине

$$12x + 3y - 5 = 0, \quad 3x - \frac{1}{2}y = 4, \quad \frac{x+4}{2} - \frac{2y+5x}{6} + 1 = \frac{7y+5}{3}$$

су линеарне једначине са две непознате, док једначине

$$x^2 + y^2 = 9, \quad (x + y)^2 = x^2 + xy + y^2, \quad \sqrt{x+2} = y$$

имају две непознате, али нису линеарне.

ПРИМЕР 2. Посматрајмо једначину

$$2x + 3y - 8 = 0$$

Ово је линеарна једначине са две непознате x и y . Ако уместо x и y заменимо 1, односно 2, добијамо

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 8 = 0,$$

$$2 + 6 - 8 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Дакле, добијена је тачна једнакост. Због тога кажемо да је уређени пар бројева $(x, y) = (1, 2)$ решење дате једначине. За пар се наглашава да је уређен, што значи да се прва компонента пара односи на непознату x , а друга на непознату y . Тако, уређени пар $(2, 1)$ није решење дате једначине, јер је

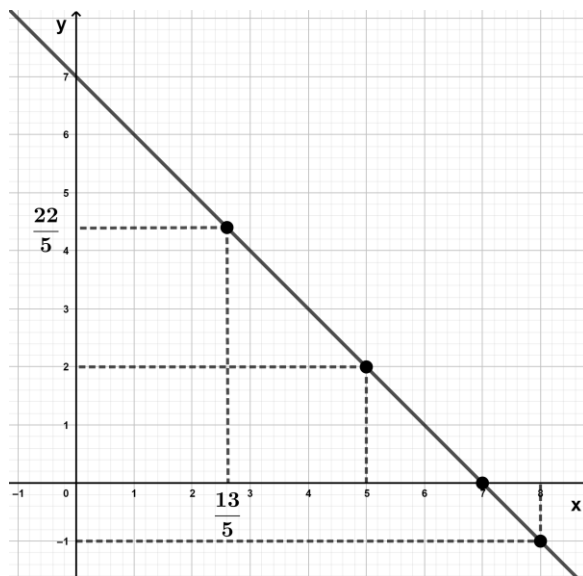
$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 8 = 4 + 3 - 8 = -1 \neq 0.$$

Решење једначине са две непознате x и y је уређени пар (x_0, y_0) који замењен у једначину (x_0 уместо x , а y_0 уместо y) претвара ту једначину у тачну једнакост.

ПРИМЕР 3. За једначину

$$x + y - 7 = 0$$

можемо уочити да су уређени парови $(7, 0)$, $(5, 2)$, $(8, -1)$, $(\frac{13}{5}, \frac{22}{5})$ њена решења. Ако једначину посматрамо у облику $y = 7 - x$, можемо да приметимо да је сваки уређени пар облика $(c, 7 - c)$, где је c произвољан реалан број, решење ове једначине. Дакле, она има бесконачно много решења.



- Слика 1 -

Можемо посматрати и график ове линеарне једначине. Као што већ знамо, линеарна једначина $ax + by + c = 0$ одређује линеарну функцију чији је график права. Конкретно, овде се ради о правој $y = 7 - x$ чији је график приказан на слици 1. Уређени парови који су решења дате једначине, при оваквој графичкој интерпретацији, јесу тачке које припадају правој $y = 7 - x$.

Задаци

1. Збир два броја, x и y , једнак је 6. Саставити одговарајућу линеарну једначину са две непознате и одредити неколико уређених парова решења.
2. Дата је једначина $\frac{x}{3} - y = 2$. Који од уређених парова $(3, -1)$, $(6, 0)$, $(-2, 0)$, $(-1, 3)$, $(0, 6)$, $(0, -2)$, $(5, 5)$ су решења ове једначине?
3. Дата је једначина $3x - 2y = 1$. Одредити два њена решења и помоћу њих нацртати график линеарне функције који одговара овој једначини.

7.2. Појам система од две линеарне једначине са две непознате. Еквивалентност система линеарних једначина

Посматрајмо две линеарне једначине са две непознате, на пример

$$x + 3y = 10$$

$$2x - y = -1$$

Свака од ових једначина има бесконачно много решења. Поставља се питање да ли међу тим решењима постоји неко заједничко за обе једначине. У овом примеру је решење $(1, 3)$ заједничко. Међутим, на пример једначине

$$3x + 2y = 7 \text{ и } 3x + 2y = 11$$

немају ниједно заједничко решење јер не постоји уређени пар бројева (x, y) за које би израз $3x + 2y$ истовремено узимао вредности 7 и 11.

Уопште, ако посматрамо две линеарне једначине са две непознате облика

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

кажемо да се ради о систему од две линеарне једначине с две непознате. Решење оваквог система је сваки пар бројева (x_0, y_0) који замењен у обе једначине даје две тачне једнакости. Циљ поступка решавања система је да се пронађу сва решења, или, ако их нема, да се то докаже.

Решење система две једначине са две непознате x и y је уређени пар бројева (x_0, y_0) , који заменом x са x_0 и y са y_0 у обе једначине система, те једначине претвара у тачне бројевне једнакости.

За два система линеарних једначина с две непознате се каже да су **еквивалентни** ако је свако решење једног од њих истовремено и решење другог и обратно.

Тако су, на пример, системи:

$$\begin{aligned} 3x - 2y = 5, & \quad 6x - 4y = 10, \\ 4x + y = 11 & \quad \text{и} \quad 12x + 3y = 33 \end{aligned}$$

еквивалентни. Прва једначина другог система добијена је множењем израза на левој и десној страни прве једначине првог система са 2, а друга на исти начин од друге једначине првог система, множењем са 3.

Уопште, ако било коју једначину система заменимо њој еквивалентном једначином (тј. једначином чије је свако решење истовремено и решење полазне једначине и обратно), добићемо систем једначина еквивалентан полазном. Ово значи да се могу примењивати трансформације линеарних једначина. Ради се о замени израза у једначинама еквивалентним изразима, додавању неког израза левој и десној страни једначине, множењу израза на левој и десној страни једначине неким бројем различитим од нуле, односно пребацивању сабирака на другу страну једначине, при чему се мења знак тог израза.

У следећем одељку ћемо видети да постоје и друге методе за добијање еквивалентних, а једноставнијих система једначина у циљу налажења решења.

Задаци

1. Проверити да ли је пар $(1, -1)$ решење система једначина:

$$2x + 3y = -1, \quad x + y = 0,$$

$$\text{а) } \frac{x}{5} - 1,4 = y - \frac{1}{5} \quad \text{б) } \frac{x}{3} - \frac{2y}{3} = -\frac{1}{3}$$

2. Одредити бројеве α и β тако да уређени пар $(-1, 2)$ буде решење система једначина

$$2x + y + 3 = \alpha$$

$$5x - 3y = \beta$$

3. Дат је систем једначина

$$\begin{aligned}(x-3)(x+3) - (y+1)^2 &= x^2 - y^2, \\ (2x+1)(2x-1) + 5x - 4x^2 &= (y+1)^2 - (y-1)^2 - 4y.\end{aligned}$$

Користећи се еквивалентним трансформацијама упростити изразе у једначинама и наћи решење датог система.

7.3. Решавање система методом замене и методом супротних коефицијената. Графички приказ решења

Приликом решавања система једначина, сређивањем и упрошћавањем изрази који се у једначинама појављују, систем најпре доведемо на облик

$$\begin{aligned}a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2,\end{aligned}$$

где су $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ бројеви.

Сада ћемо упознати два најважнија метода за решавање система две линеарне једначине с две непознате.

7.3.1. Решавање система методом замене

ПРИМЕР 4. Посматрајмо систем једначина

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 16, \\ x - 2y &= 1.\end{aligned}$$

Ако у другој једначини пребацимо израз $-2y$ на десну страну једначине, добићемо да је $x = 1 + 2y$. Тако добијамо еквивалентан систем

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 16, \\ x &= 1 + 2y.\end{aligned}$$

Израз $1 + 2y$ заменимо у прву једначину уместо променљиве x и добијемо еквивалентни систем

$$\begin{aligned}2(1 + 2y) + 3y &= 16, \\ x &= 2y + 1.\end{aligned}$$

Сада се у првој једначини не појављује променљива x и то је линеарна једначина са једном непознатом y . Добијамо еквивалентан систем

$$\begin{aligned}2 + 4y + 3y &= 16, \\ x &= 2y + 1,\end{aligned}$$

а затим

$$\begin{aligned}7y &= 14, & \text{и} & & y &= 2, \\ x &= 2y + 1 & & & x &= 2y + 1.\end{aligned}$$

Најзад,

$$\begin{aligned}y &= 2, \\ x &= 2 \cdot 2 + 1 = 5,\end{aligned}$$

па је решење датог система једначина уређени пар (5, 2).

На овом примеру смо показали како се ситем линеарних једначина решава тзв. **методом замене**. Из једне од једначина система изрази се једна од непознатих преко друге и тај се израз замени у другу једначину. Добијамо нову линеарну једначину само са једном непознатом која, заједно са првом једначином датог система, образује нови систем једначина еквивалентан полазном.

ПРИМЕР 5. Методом замене решити систем једначина

$$\begin{aligned}2x + y &= 7, \\3x - 4y &= 5.\end{aligned}$$

Решење. Из прве једначине имамо $y = 7 - 2x$. Израз $7 - 2x$ заменићемо у другу једначину уместо променљиве y . Добијамо еквивалентан систем

$$\begin{aligned}y &= 7 - 2x, \\3x - 4(7 - 2x) &= 5.\end{aligned}$$

Сада сређујемо другу једначину:

$$\begin{aligned}y &= 7 - 2x, \\3x - 28 + 8x &= 5, \quad \text{тј.} \quad y = 7 - 2x, \\11x - 28 &= 5, \quad \quad \quad 11x = 5 + 28,\end{aligned}$$

односно,

$$\begin{aligned}y &= 7 - 2x, \\11x &= 33, \quad \text{па је} \quad y = 7 - 2x, \\x &= 3, \quad \quad \quad x = 3,\end{aligned}$$

и најзад,

$$\begin{aligned}y &= 7 - 2 \cdot 3 = 1, \\x &= 3.\end{aligned}$$

Решење задатог система је пар (3, 1).

ПРИМЕР 6. Методом замене решити систем једначина

$$\begin{aligned}\frac{x+2y}{3} - x &= -4, \\y - \frac{2y-x}{4} &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Решење. Помножимо прво изразе на левој и десној страни прве једначине са 3, а друге са 4:

$$\begin{aligned}x + 2y - 3x &= -12, \\4y - (2y - x) &= 3.\end{aligned}$$

Након сређивања и дељења обе стране једначине са 2 добија се

$$\begin{aligned}-x + y &= -6, \\x + 2y &= 3.\end{aligned}$$

Из друге једначине заменимо $x = 3 - 2y$ у прву:

$$\begin{aligned}-(3 - 2y) + y &= -6, & -3 + 2y + y &= -6, \\x = 3 - 2y, & \text{односно} & x &= 3 - 2y,\end{aligned}$$

тј.

$$3y = -3,$$

$$x = 3 - 2y,$$

па је $y = -1$, $x = 3 - 2 \cdot (-1) = 5$. Решење је пар $(5, -1)$.

7.3.2. Решавање система методом супротних коефицијената

Ако у систему линеарних једначина једну од једначина заменимо збиром (или разликом) једначина система, при чему другу једначину не мењамо, добићемо еквивалентан систем.

Тако су, на пример, системи

$$\begin{array}{lcl} 4x - 6y = 8, & \text{и} & 13x = 65, \\ 9x + 6y = 57, & & 4x - 6y = 8. \end{array}$$

еквивалентни. Овде смо другу једначину система заменили збиром једначина, а прва је остала непромењена. При томе је очигледно да је други систем много једноставнији за решавање јер прва његова једначина садржи само једну непознату.

На овој идеји се заснива **метода супротних коефицијената** за решавање система линеарних једначина. Коефицијент уз непознату y у посматраном систему

$$\begin{array}{l} 4x - y = 8, \\ 9x + 6y = 57 \end{array}$$

су супротни бројеви (6 и -6), тако да се сабирањем левих и десних страна једначина система добија једна линеарна једначина у којој се појављује само једна непозната, тј. непозната y се елиминише из те једначине.

ПРИМЕР 7. Методом супротних коефицијената решити систем једначина

$$\begin{array}{l} x + y = 5, \\ -x + 3y = 11. \end{array}$$

Решење. Приметимо да су коефицијенти уз непознату x у једначинама супротни бројеви -1 и 1 . Сабирањем левих и десних страна датих једначина добијамо $4y = 16$, а да бисмо добили еквивалентан систем, овој једначини придружимо једну од две дате једначине, на пример прву:

$$\begin{array}{l} 4y = 16, \\ x + y = 5. \end{array}$$

Дати систем је еквивалентан систему

$$\begin{array}{lcl} y = 4, & \text{односно} & y = 4, \\ x + y = 5, & & x + 4 = 5, \end{array} \quad \text{тј.}$$

$$y = 4, x = 1.$$

Решење система је пар $(1, 4)$.

Ако у систему који решавамо коефицијенти ни уз једну непознату нису супротни бројеви, онда прво формирамо систем еквивалентан датом, такав да коефицијенти уз једну непознату буду супротни.

ПРИМЕР 8. Решити методом супротних коефицијената систем једначина

$$\begin{aligned}5x - 4y &= 19, \\ x + y &= 2.\end{aligned}$$

Решење. Ако другу једначину помножимо са 4, добијамо

$$\begin{aligned}5x - 4y &= 19, \\ 4x + 4y &= 8.\end{aligned}$$

На овај начин смо постигли да су коефицијенти уз непознату y у систему супротни бројеви (4 и -4). Ако сада прву једначину препишемо, а за другу узмемо једначину која је збир последње две једначине, добијамо еквивалентан систем.

$$\begin{array}{lcl}5x - 4y = 19, & \text{тј.} & 5x - 4y = 19, \\ 9x = 27, & & x = 3,\end{array}$$

па је

$$\begin{array}{lcl}5 \cdot 3 - 4y = 19, & \text{односно} & -4y = 19 - 15, \\ x = 3, & & x = 3, \quad \text{тј.} \quad y = -1, x = 3.\end{array}$$

Решење датог система је уређени пар $(3, -1)$.

ПРИМЕР 9. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}14x - 3y &= 25, \\ 3x + 2y &= 8.\end{aligned}$$

Решење. У овом примеру погоднија метода је метода супротних коефицијената. Како су бројеви (коефицијенти) уз променљиву y мањи, изабраћемо ту променљиву. Прву једначину система множимо са 2, а другу са 3 да би коефицијенти уз променљиву y били супротни. При записивању ћемо, као што се то често чини, једначине система обухватати витичастом заградом; системи записани један испод другог су међусобно еквивалентни.

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 28x - 6y = 50 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases}, \\&\begin{cases} 37x = 74 \\ 9x + 6y = 24 \end{cases}, \\&\begin{cases} x = 2 \\ 9 \cdot 2 + 6y = 24 \end{cases}, \\&y = 1.\end{aligned}$$

Решење је пар $(2, 1)$.

ПРИМЕР 10. Решити систем једначина

$$\begin{aligned}2x + 5y &= 7, \\ 3x + 4y &= 7.\end{aligned}$$

Решење. Изаберемо променљиву x . Прву једначину ћемо помножити са -3 , а другу са 2. Добијамо

$$\begin{cases} -6x - 15y = -21 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases},$$

$$\begin{cases} -7y = -7 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ 6x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Решење система је уређени пар (1, 1).

7.3.3. Графички приказ решавања система линеарних једначина са две непознате

ПРИМЕР 11. Посматрајмо систем линеарних једначина

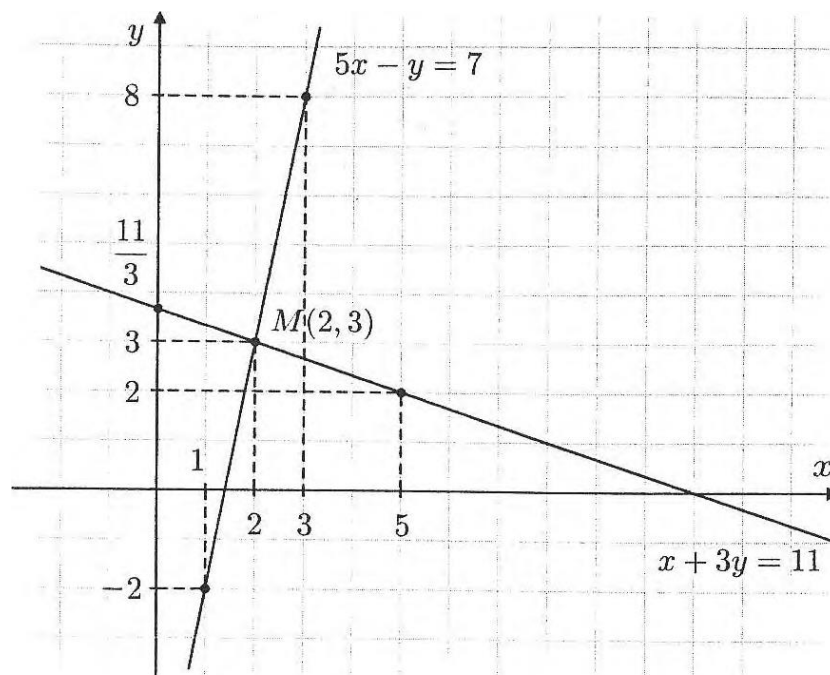
$$\begin{aligned} x + 3y &= 11, \\ 5x - y &= 7. \end{aligned}$$

Раније смо видели да свака од ових једначина представља једну линеарну функцију, задату имплицитно. Графици тих функција су праве. Представљамо их у координатном систему уз помоћ одговарајућих таблица (слика 2).

x	0	5
$y = \frac{11-x}{3}$	$\frac{11}{3}$	2

x	1	3
$y = 5x - 7$	-2	8

Координате тачака сваке од ових правих су решења одговарајуће линеарне једначине са две непознате. Дакле, ако ове две једначине имају заједничко решење (то је тада решење система), тачка која одговара том решењу припада и једној и другој од нацртаних правих, тј. њиховом пресеку.



Слика 2

Са цртежа се види да је пресечна тачка $M(2, 3)$. Заиста, заменом њених координата у систем, добијамо тачне једнакости:

$$\begin{aligned} 2 + 3 \cdot 3 &= 11, \\ 5 \cdot 2 - 3 &= 7. \end{aligned}$$

Видимо да се графички начин решавања система линеарних једначина састоји у томе да се нацртају графици обе функције одређене датим једначинама, а затим нађе пресечна тачка, ако се графици секу. Њене координате су решење система.

Графичко решавање омогућава да се једноставно установи број решења система. Ако се, као у примеру 11, праве секу у једној тачки — систем има јединствено решење. У примерима 12 и 13 ћемо испитати број решења система ако се праве поклапају, односно ако су паралелне, а различите.

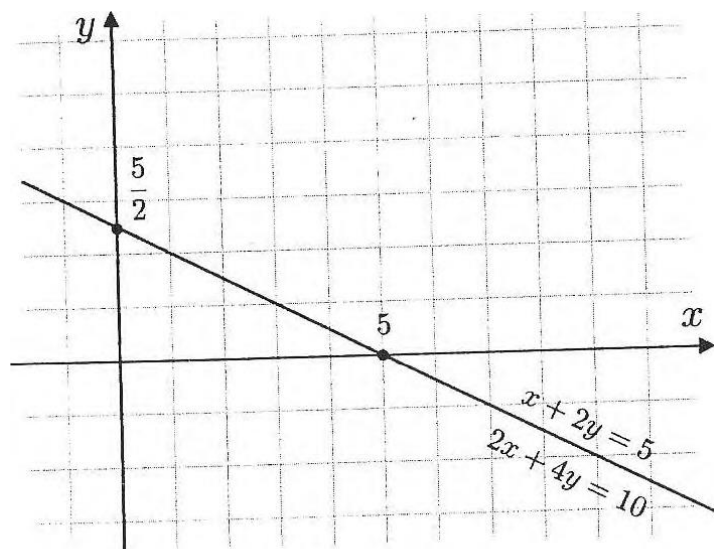
ПРИМЕР 12. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5, \\ 2x + 4y &= 10. \end{aligned}$$

Решење. График обе једначине је једна иста права (слика 3). Њен график можемо нацртати користећи се таблицом

x	0	5
y	$5/2$	0

Дати систем због тога има бесконачно много решења. Како је $y = \frac{5-x}{2}$, то су сва решења уређени парови облика $(x, \frac{5-x}{2})$, $x \in \mathbb{R}$.

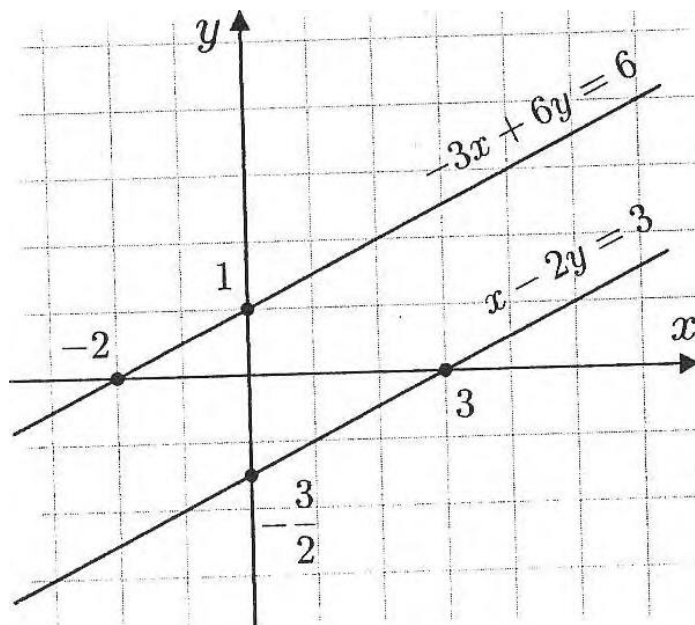


Слика 3

ПРИМЕР 13. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3, \\ -3x + 6y &= 6. \end{aligned}$$

Решење. Графици одговарајућих правих приказани су на слици 4. У питању су две паралелне праве које немају заједничких тачака.



Слика 4

У овом случају дати систем нема решења. То се види и тако што при дељењу левих и десних страна друге једначине са -3 добијамо једначину $x - 2y = -2$ која је противуречна са првом једначином система.

На крају, могу се извести следећи закључци:

- 1) Ако се праве, графици једначина система секу - систем има јединствено решење.
- 2) Ако се одговарајуће праве поклапају, систем има бесконачно много решења.
- 3) Ако су те праве паралелне, а различите - систем нема решења.

Задаци

1. Решити систем једначина методом замене:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 3x + 2y = 7, & \text{б) } 4x + 3y = 22, & \text{в) } \frac{x-3}{2} + \frac{3y}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ 5x - y = -10; & x - 5y = -6; & \frac{5x-2}{3} + \frac{y+1}{2} = 2. \end{array}$$

2. Решити системе једначина методом супротних коефицијената:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 5x - 4y = 1, & \text{б) } 2x - y = 1, & \text{в) } (x + 5)(y - 3) = xy + 2, \\ -5x + 7y = 2; & \frac{1}{3}x + y = -1; & (x - 1)(y + 3) = xy + 2. \end{array}$$

3. Графички решити следеће системе:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 3x + 5y = 14, & \text{б) } 3x + 2y = 9, & \text{в) } x - 2y = 1, \\ x - y = 6; & x + \frac{2}{3}y = 3; & 4x - 8y = 4. \end{array}$$

7.4. Примена система линеарних једначина при решавању разних проблема

У одељку 3.7 ученици су се упознали са поступком при решавању разних проблема из свакодневног живота, али и примена математике у разним областима. Готово на исти начин решавамо те проблеме у случају када се појављују две непознате:

- 1) Означимо словима (обично x и y) бројеве који треба да се одреде.
- 2) Помоћу тих слова изразимо и друге непознате величине о којима се у проблему говори.
- 3) Изједначимо одговарајуће изразе према условима постављеним у проблему и формирамо систем од две једначине са две непознате.
- 4) Решавањем система добијамо решење постављеног проблема.

ПРИМЕР 14. У две корпе налазе се 132 јабуке, при чему је у једној корпи пет пута више јабука него у другој. Колико јабука се налази у корпама?

Решење. 1) Означимо број јабука у првој корпи са x , а у другој корпи словом y .

2) Изрази који се појављују у формулацији проблема су $x + y$ и $5y$.

3) Одговарајуће једначине су:

$$x + y = 132 \quad \text{и} \quad x = 5y.$$

3) Решавамо систем једначина

$$\begin{aligned} x + y &= 132, \\ x &= 5y. \end{aligned}$$

Приметимо да је због облика друге једначине у овом случају згодније да користимо метод замене за решавање система. При решавању ћемо се користити уобичајеном методом записивања. Дакле,

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 132 \\ x = 5y \end{cases} & \cdot \\ \begin{cases} 5y + y = 132 \\ x = 5y \end{cases} & , \\ \begin{cases} 6y = 132 \\ x = 5y \end{cases} & , \\ \begin{cases} y = 22 \\ x = 5 \cdot 22 = 110 \end{cases} & . \end{aligned}$$

Добили смо да се у првој корпи налази 110, а у другој 22 јабуке.

Пример 15. Ако Марта да Наташи 10 динара, обе ће имати исти износ новца, а ако Наташа да Марти 20 динара, Марта ће имати три пута више новца од Наташе. Колико свака од њих две има новца?

Решење. Означимо са x износ који поседује Марта, а са y Наташа. Добијамо систем једначина

$$\begin{cases} x - 10 = y + 10 \\ x + 20 = (y - 20) \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ x - 3y = -80 \end{cases}$$

Уочимо да је овде згодно применити метод супротних коефицијената, тако што изразе у другој једначини помножимо са -1, а затим једначине саберемо.

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ -x + 3y = 80 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ 2y = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y = 20 \\ y = 50 \end{cases}$$

$$x = 70, \quad y = 50.$$

Дакле, Марта има 70, а Наташа 50 динара.

Пример 16. Када вози са ветром у леђа, бициклиста вози брзином 20 km/h, а када је са ветром у прса, брзином 12 km/h. Која је брзина бициклисте када ветар не дува?

Решење. Означимо са v брзину бициклисте када ветар не дува, а са v_1 брзину ветра. Тада важи $v + v_1 = 20$, $v - v_1 = 12$. Систем ћемо решавати методом супротних коефицијената:

$$\begin{cases} v + v_1 = 20 \\ v - v_1 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v + v_1 = 20 \\ 2v = 32 \end{cases}$$

$$v = 16, \quad v_1 = 4.$$

Добили смо да је брзина бициклисте 16 km/h.

Задаци

- Збир два броја је 47, а њихова разлика је 23. Који су то бројеви?
- Збир два броја је 50. Ако већи поделимо мањим, добија се количник 2 и остатак 5. Који су то бројеви?
- Сестро, имаш исто толико браће, колико и сестара.
- Брате, имаш два пута више сестара него браће.
Колико деце има у овој породици?
- Обим правоугаоника износи 26 cm, а његова површина је једнака површини другог правоугаоника који је за 6 cm дужи, а за 2 cm ужи. Израчунати дужину и ширину првог правоугаоника.

8. Системи линеарних једначина („Математика 8“, издавач Герундијум)

СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

8.1. Појам, решење и еквивалентност једначина с две непознате

Једнакост у којој учествују тачно две променљиве представља једначину с две непознате величине.

Решење једначине с две непознате x и y је уређен пар (x_0, y_0) , $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$, такав да, када се x замени са x_0 , а y са y_0 , једначина постаје тачна бројевна једнакост.

Пример 1. а) Једначина $3x + 2y = 7$ је једначина с две непознате x и y .

$(1, 2)$ јесте решење ове једначине, јер је:
 $3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$
тачна бројевна једнакост.

$(1, 3)$ није решење ове једначине, јер једнакост:
 $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7$
није тачна.

Једнакост $3x + 2y = 7$ којом је задана једначина одређује услов зависности непознатих величина x и y . Ако бисмо једну од њих, на пример y , заменили произвољним реалним бројем, на пример 5, вредност друге непознате x одређена је једначином $3x + 10 = 7$, чије је решење $x = -1$. Дакле, и пар $(-1, 5)$ је решење дате једначине.

б) Једначина $x \cdot y = 1$ је једначина с две непознате x и y . Једноставно се проверава да $(1, 1)$ и $(-1, -1)$ јесу, а да $(1, -1)$ и $(-1, 1)$ нису решења ове једначине.

Примећујемо да једначина с две непознате може имати више решења.

Сви уређени парови који су решења једначине с две непознате чине **скуп решења те једначине**.

Пример 2. а) Једначина $-\frac{2}{3}x + y = 3$ је једначина с две непознате x и y .

Ако непознату x заменимо било којим бројем $t \in \mathbf{R}$, из $-\frac{2}{3}t + y = 3$ налазимо да је $y = 3 + \frac{2}{3}t$. Дакле, сваки уређени пар облика $(t, 3 + \frac{2}{3}t)$, при чему је $t \in \mathbf{R}$, представља решење полазне једначине, а скуп $\{(t, 3 + \frac{2}{3}t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ је скуп њених решења.

б) Ако у једначини $x \cdot y = 1$ узмемо да је $x = t \in \mathbf{R}$, добијамо да је $y = \frac{1}{t}$ и да мора важити да је $t \neq 0$. Скуп решења ове једначине је $\{(t, \frac{1}{t}) \mid t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}$.

За две једначине с две непознате кажемо да су **еквивалентне** ако је свако решење једне од њих уједно и решење друге, и обрнуто.

Еквивалентне једначине имају **једнаке скупове решења**.

Тврђења у којима се наводе услови при којима су једначине еквивалентне важе и за једначине с две непознате. Укратко, ако изразима на различитим странама једначине додамо или одузмемо исти израз или ако изразе на странама једначине помножимо или поделимо истим изразом, различитим од нуле, добијамо једначину еквивалентну полазној.

Једначину с две непознате x и y ,
 еквивалентну једначини облика
 $ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbf{R}$,
 називамо **линеарна једначина с**
две непознате x и y .

Ако је један од коефицијената a и b у једначини $ax + by + c = 0$ једнак нули, она представља линеарну једначину с једном непознатом.

Пример 3. Једначина $-\frac{3}{4}x = 2y + 1$, с две непознате x и y , еквивалентна је једначини $-\frac{3}{4}x - 2y - 1 = 0$, те представља линеарну једначину с две непознате x и y . Ако x заменимо било којим бројем $t \in \mathbf{R}$, из једначине $-\frac{3}{4}t - 2y - 1 = 0$ налазимо да је $y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{8}t$. Скуп решења дате једначине је $\{(t, -\frac{1}{2} - \frac{3}{8}t) \mid t \in \mathbf{R}\}$.

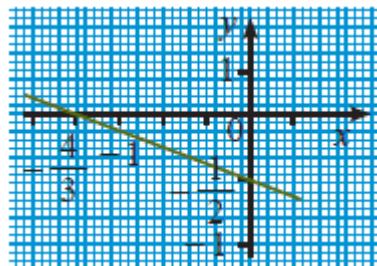
Реалних бројева, означених са t , има бесконачно много, те дата једначина има бесконачно много решења.

Линеарна једначина $ax + by + c = 0$,
 $a, b, c \in \mathbf{R}$ и $b \neq 0$, с непознатим
 x и y , представља линеарну функцију
 задату у имплицитном облику.

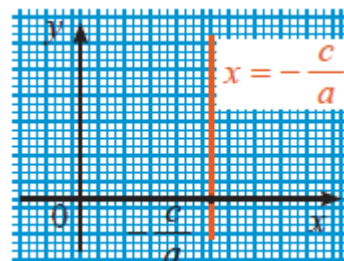
Уређени парови који су решења
дате линеарне једначине
представљају координате тачака које
припадају графику те функције.

График линеарне функције представља **графички приказ решења** дате једначине.

Права која је график линеарне функције $-\frac{3}{4}x - 2y - 1 = 0$ садржи тачке $(0, -\frac{1}{2})$ и $(\frac{4}{3}, 0)$, које су пресеци графика са координатним осама. Графички приказ решења једначине из претходног примера дат је на слици.



У случају када је $b = 0$, за $a \neq 0$, једначина $ax + by + c = 0$ има облик $ax + 0 \cdot y + c = 0$, те је скуп њених решења $\{(-\frac{c}{a}, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$. Графички приказ решења је права $x = -\frac{c}{a}$, паралелна ординатној оси.



8.2. Појам и решење система две линеарне једначине с две непознате

Две линеарне једначине у којима учествују две различите непознате чине **систем две линеарне једначине с две непознате**.

Решење система једначина с две непознате x и y је уређен пар (x_0, y_0) , $x_0, y_0 \in \mathbf{R}$, који представља решење сваке од датих једначина тог система.

Општи облик система две линеарне једначине с две непознате.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

$$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 \text{ и } c_2 \in \mathbf{R}$$

a_1, a_2 – **коэффицијенти** уз непознату x

b_1, b_2 – **коэффицијенти** уз непознату y

c_1, c_2 – **слободни чланови**

Систем две линеарне једначине с две непознате зваћемо скраћено **систем**.

Видели смо да је графички приказ решења сваке од једначина система права.

Заједничке тачке правих које представљају графичке приказе решења сваке од једначина система представљају **графички приказ решења тог система**.

У зависности од положаја правих које представљају графичке приказе решења једначина система, систем:

- има јединствено решење ако се праве секу;
- има бесконачно много решења ако се праве поклапају;
- нема решења ако су праве паралелне.

Пример 4. Једначине $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ чине систем од две линеарне једначине с две непознате x и y .

Скуп решења једначине $3x + y = 5$ је $\{(a, -3a + 5) \mid a \in \mathbf{R}\}$.

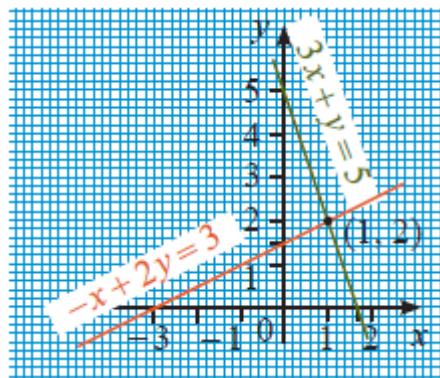
Скуп решења једначине $-x + 2y = 3$ је $\{(b, \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}) \mid b \in \mathbf{R}\}$.

Да би тачка припадала графичким приказима оба наведена решења мора важити да је

$$a = b \text{ и } -3a + 5 = \frac{1}{2}b + \frac{3}{2}.$$

За $b = a$ друга од наведених једначина постаје $-3a + 5 = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}$, одакле следи да је $a = b = 1$, те је решење полазног система $(1, 2)$.

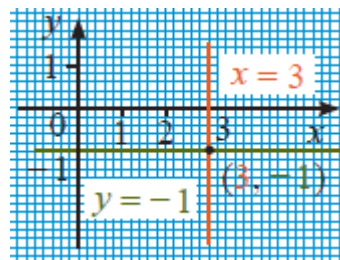
Решење датог система је тачка пресека правих које представљају графичке приказе решења једначина које чине полазни систем.



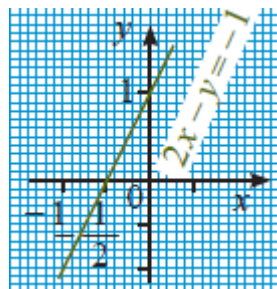
Систем има јединствено решење $(1, 2)$.

Пример 5. Једначине система $\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ дате су у решеном облику.

Непосредно закључујемо да је јединствено решење овог система уређени пар $(3, -1)$.

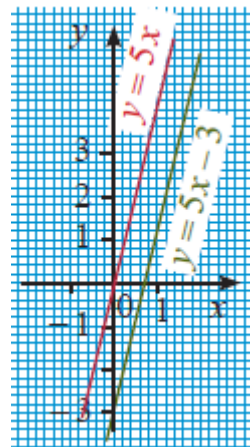


Пример 6. Једначине система $\begin{cases} 2x - y = -1 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ су еквивалентне, јер се друга добија множењем прве бројем -2 , те имају једнаке скупове решења. Праве које представљају графички приказ скупова решења се поклапају, те систем има бесконачно много решења. Решење система је сваки уређени пар облика $(a, 2a + 1)$, при чему је $a \in \mathbf{R}$.



Пример 7. Посматрајмо систем $\begin{cases} -5x + y = 0 \\ 10x - 2y = 6 \end{cases}$.

Једначине система, које представљају линеарне функције у имплицитном облику, записане у експлицитном облику, гласе $\begin{cases} y = 5x \\ y = 5x - 3 \end{cases}$, те су њихови графици паралелни, одакле следи да полазни систем нема решење.



8.3. Еквивалентност система две линеарне једначине с две непознате

Два система линеарних једначина с две непознате називамо **еквивалентним** ако је свако решење једног од њих уједно и решење другог и обрнуто.

Теорема 1. Ако се једна или обе једначине система замене њима еквивалентним једначинама, добија се систем еквивалентан полазном.

Пример 8. Системи $\begin{cases} \frac{1}{3}x = 2y - 6 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 6y = -18 \\ -12x + 6y = 6 \end{cases}$ су еквивалентни.

Једначине $\frac{1}{3}x = 2y - 6$ и $x - 6y = -18$ (другу добијамо множењем прве са 3), као и једначине $2x - y = -1$ и $-12x + 6y = 6$ (другу добијамо множењем прве са -6), су еквивалентне, те су и дати системи еквивалентни.

Теорема 2. Оставимо једну једначину система непромењеном. Другу заменимо једначином чија је лева страна једнака збиру левих, а десна страна збиру десних страна једначина полазног система. Добијен је еквивалентан систем.

$$\begin{array}{l} \text{Системи } \begin{cases} A = B \\ C = D \end{cases} \\ \text{и} \\ \begin{cases} A = B \\ A + C = B + D \end{cases} \\ \text{су еквивалентни.} \end{array}$$

Пример 9. Системи $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 7x = 5 \end{cases}$ су еквивалентни, јер је једначина $7x = 5$ добијена сабирањем једначина првог од датих система.

Теорема 3. Оставимо једну једначину система непромењеном. Другу заменимо једначином коју добијамо када из непромењене једну од непознатих изразимо преко друге и заменимо је у другу једначину полазног система. Добијени систем еквивалентан је полазном.

Пример 10. Системи $\begin{cases} -4x + y = -3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} -4x + y = -3 \\ x = 1 \end{cases}$ су еквивалентни.

Из прве једначине имамо да је $y = 4x - 3$, те заменом, друга једначина постаје $2x - 3(4x - 3) = -1$, односно $x = 1$, те су дати системи еквивалентни.

8.4. Решавање система методом замене

Метода замене састоји се у томе да се из једне од једначина једна непозната изрази у зависности од друге непознате, и да се заменом у другу једначину полазни систем сведе на решен облик $\begin{cases} x = p \\ y = r \end{cases}$. Еквивалентност система следи из теореме 3.

Пример 11. Методом замены решени су системи.

а) **полазни систем**

$$\begin{aligned} 5x - 4y &= -2 \\ 3x + 5y &= 21 \end{aligned}$$

$$5x - 4y = -2$$

изражено у $\rightarrow y = \frac{3}{5}(7 - x)$

$$5x - 4 \cdot \frac{3}{5}(7 - x) = -2 \quad \leftarrow \text{замена у}$$

$$y = \frac{3}{5}(7 - x)$$

$$5x - 4 \cdot \frac{3}{5}(7 - x) = -2 \quad / \cdot 5$$

$$y = \frac{3}{5}(7 - x)$$

$$37x - 84 = -10 \quad / + 84$$

$$y = \frac{3}{5}(7 - x)$$

$$37x = 74 \quad / : 37$$

$$y = \frac{3}{5}(7 - x)$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{3}{5}(7 - 2)$$

решење система $x = 2, y = 3$

б) **полазни систем**

$$\begin{aligned} 2(x - 3) + 4(y - 1) &= 3x \\ -(x + 1)^2 - 2y &= -x^2 + y - 3 \end{aligned}$$

$$2x - 6 + 4y - 4 = 3x$$

$$-x^2 - 2x - 1 - 2y = -x^2 + y - 3$$

$$-x + 4y = 10$$

$$-2x - 3y = -2$$

изражено х $\rightarrow x = 4y - 10$

$$-2(4y - 10) - 3y = -2$$

$$x = 4y - 10$$

$$-11y = -22$$

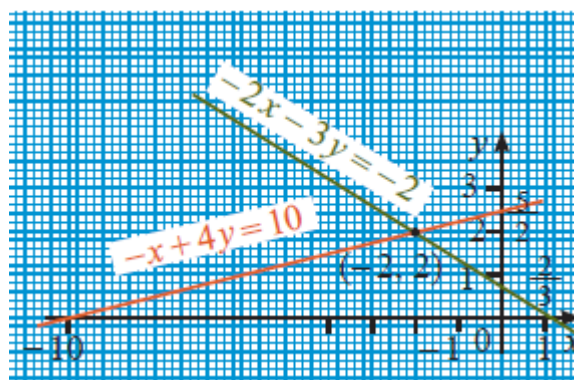
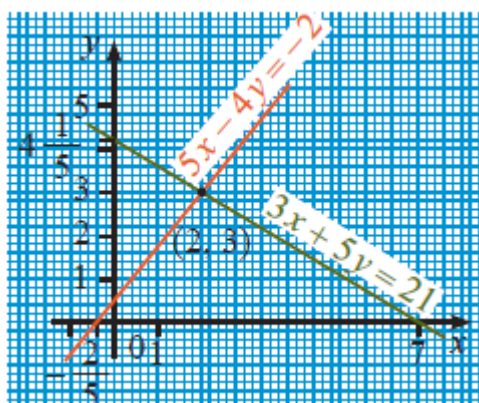
$$x = 4y - 10$$

$$y = 2$$

$$x = 4 \cdot 2 - 10$$

$$y = 2$$

решење система $x = -2$
 $y = 2$



Пример 12. Методом замене решићемо систем $\begin{cases} (2x + 3y):(1 - x) = 7:4 \\ \frac{x+2}{4} = 1 - \frac{y-1}{5} \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{2x+3y}{1-x} = \frac{7}{4} & / \cdot 4(1-x), x \neq 1 \\ \frac{x+2}{4} = 1 - \frac{y-1}{5} & / \cdot 20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4(2x+3y) = 7(1-x) \\ 5(x+2) = 20 - 4(y-1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 8x + 12y = 7 - 7x \\ 5x + 10 = 20 - 4y + 4 \\ \hline 5x + 4y = \frac{7}{3} \\ 5x + 4y = 14 \\ \hline y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{12} \\ y = -\frac{5}{4}x + \frac{7}{2} \end{array}$$

Систем је сведен на њему еквивалентан.
Непозната y изражена је у зависности од
непознате x из обе једначине.

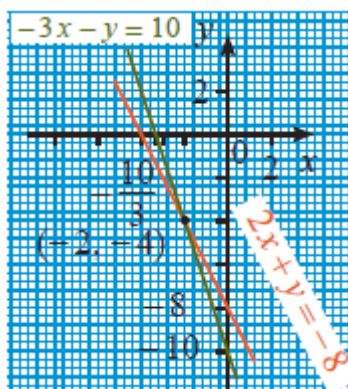
Графички прикази решења су линеарне
функције које представљају пар паралелних
правих, те систем нема решења.

8.5. Решавање система методом супротних коефицијената

Метода супротних коефицијената састоји се у:

- замени система са њему еквивалентним системом, таквим да коефицијенти уз једну променљиву представљају пар супротних бројева,
- сабирању једначина еквивалентног система, чиме га сводимо на решени облик. Еквивалентност добијених система следи из теореме 2.

Пример 13. Методом супротних коефицијената решен је систем $\begin{cases} 2x + y = -8 \\ -3x - y = 10 \end{cases}$.



коэффициенты
уз y чине пар
супротных
бројева, те
смо сабрали
једначине

$$\begin{array}{r} 2x + y = -8 \\ -3x - y = 10 \quad + \\ \hline 2x + y - 3x - y = -8 + 10 \\ \hline -x = 2 \\ \hline x = -2 \\ \hline 2 \cdot (-2) + y = -8 \\ \hline y = -4 \\ \hline x = -2 \end{array}$$

Пример 14. Методом супротних коефицијената решимо систем $\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ -2x - y = 3 \end{cases}$.

$$\begin{array}{rcl}
 4x - 3y = -2 & & \\
 -2x - y = 3 & / \cdot 2 & \leftarrow \text{једначину множимо са 2 да би коефицијенти} \\
 & & \text{уз } x \text{ представљали пар супротних бројева} \\
 \hline
 4x - 3y = -2 & & \\
 -4x - 2y = 6 & \leftarrow + & \text{сабирањем једначина коефицијент уз } x, \\
 & & \text{у другој једначини, постаје 0} \\
 \hline
 4x - 3y = -2 & & \\
 -5y = 4 & / : (-5) & \\
 \hline
 4x - 3y = -2 & & \\
 y = -\frac{4}{5} & \leftarrow & \text{једначина у решеном облику} \\
 \hline
 4x - 3\left(-\frac{4}{5}\right) = -2 & \leftarrow & \text{замењујемо добијену вредност у} \\
 y = -\frac{4}{5} & & \\
 \hline
 x = -1,1 & & \\
 y = -0,8 & &
 \end{array}$$

Дати систем има јединствено решење $(-1,1, -0,8)$.

Пример 15. Решимо систем $\begin{cases} \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+3} = 2 \\ \frac{4}{x-1} + \frac{5}{y+3} = 3 \end{cases}$

Уводећи смену $\frac{1}{x-1} = a$ и $\frac{1}{y+3} = b$ добијамо систем $\begin{cases} 3a + 4b = 2 \\ 4a + 5b = 3 \end{cases}$, који ћемо решити методом супротних коефицијената.

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{cases} 3a + 4b = 2 & / \cdot 4 \\ 4a + 5b = 3 & / \cdot (-3) \end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases} 12a + 16b = 8 \\ -12a - 15b = -9 \end{cases} \\
 \Rightarrow \begin{cases} 12a + 16b = 8 \\ b = -1 \end{cases} & \Rightarrow & \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}
 \end{array}$$

Из $\frac{1}{x-1} = a$ и $\frac{1}{y+3} = b$ добијамо да је $x = 1,5$ и $y = -4$.

Пример 16. Решимо систем $\begin{cases} (x+1)^2 - 2(y-1)^2 = x^2 - 2y^2 \\ \frac{1}{2}(4x+3y) = 1 - 2,5y \end{cases}$

Налазећи квадрате бинома добијамо еквивалентан систем $\begin{cases} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 8y = 2 \end{cases}$.

Множењем прве од једначина са -2 и сабирањем са другом, друга постаје $0 = 0$. Систем има бесконачно много решења, односно графици се поклапају.

8.6. Примене система линеарних једначина с две непознате

Пример 17. За 15 kg јабука и 12 kg крушака треба платити 3 390 динара, а за 13 kg јабука и 17 kg крушака за 505 динара више. Колико укупно треба платити за 5 kg јабука и троструко више крушака?

Ако је x цена килограма јабука, а y цена килограма крушака, одговарајући систем једначина је
$$\begin{cases} 15x + 12y = 3\,390 \\ 13x + 17y = 3\,895 \end{cases}$$
 Решење система је пар $(x, y) = (110, 145)$.
За 5 kg јабука и 15 kg крушака треба платити $5 \cdot 110 + 15 \cdot 145 = 2\,725$ динара.

Пример 18. Два позитивна броја разликују се за $\frac{3}{4}$, а њихови квадрати се разликују за 1. Одредимо те бројеве.

Ако са x и y означимо тражене бројеве, добијемо систем из кога одређујемо решење.

$$\begin{cases} x - y = \frac{3}{4} \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \frac{3}{4} \\ x + y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1\frac{1}{24} \\ y = \frac{7}{24} \end{cases}$$

Пример 19. Одредимо површину правоуглог троугла катете $b = 11$ cm и обима $O = 132$ cm.

Нека је c мерни број хипотенузе (изражено у cm), а a друге катете овог троугла. Једна једначина одговарајућег система добија се из једнакости $a + 11 + c = 132$, а друга $c^2 - a^2 = 121$ применом Питагорине теореме на дати троугао.

$$\begin{cases} a + c = 121 \\ c^2 - a^2 = 121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 121 \\ c - a = 121 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 60 \\ c = 61 \end{cases} \Rightarrow P = 330 \text{ cm}^2$$

Пример 20. Збир цифара двоцифреног броја је 11. Ако се уместо цифре јединица у том броју запише цифра за 2 већа, а уместо цифре десетица цифра за 3 мања и добијене цифре се запишу обрнутим редоследом, добија се број за 10 мањи од датог. Одредимо полазни број.

Нека је цифра десетица датог броја x , а цифра јединица y . Одговарајући систем једначина је
$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 10(y + 2) + x - 3 = 10x + y - 10 \end{cases}$$
 чије је решење пар $(x, y) = (7, 4)$.
Полазни број је 74.

Пример 21. Педесет процената дужине правоугаоника представља 60 % његове ширине. Површина правоугаоника чија је дужина за 4 cm већа од дужине, а ширина за 1 cm мања од ширине датог је за 4 cm 2 већа од површине датог правоугаоника. Одредићемо обим датог правоугаоника.

Нека је a дужина, а b ширина датог правоугаоника. Одговарајући систем једначина је
$$\begin{cases} 50\% a = 60\% b \\ (a + 4) \cdot (b - 1) = ab + 4 \end{cases}$$
 а њему еквивалентан систем
$$\begin{cases} 5a - 6b = 0 \\ -a + 4b = 8 \end{cases}$$

Решење система је $a = \frac{3}{7}$ cm, а $b = 2\frac{6}{7}$ cm, те је обим правоугаоника $12\frac{4}{7}$ cm.

Пример 22. Одредићемо експлицитни облик линеарне функције чији график садржи тачке (3, 1) и (-6, 13).

Одредимо коефицијент k и слободан члан n тражене функције $y = kx + n$.

Како дате тачке припадају графику ове функције, одговарајући систем линеарних једначина с непознатима k и n је $\begin{cases} 3k + n = 1 \\ -6k + n = 13 \end{cases}$, чије је решење $(k, n) = (-\frac{4}{3}, 5)$.
Тражена функција је $y = -\frac{4}{3}x + 5$.

Задаци за вежбу

- Одреди барем три решења једначине $2x - 4y = -1$.
- Одреди уређени пар једнаких бројева који припада скупу решења једначине $2x - 5(x - 0,8y) = \frac{1}{3}(x + y) - 3$.
- Графички прикажи скуп решења једначине $5(a + 1) - 2(a - 2b) = 11$.
- Одреди реалан број p тако да уређени пар $(2, -3)$ припада решењу једначине $3px + (p - y) = 1$.
- Дата је једначина $2x + 1 = 3y$. Формирај линеарну једначину с непознатима x и y , тако да она и дата једначина чине систем који а) има јединствено решење; б) нема решење; в) има бесконачно много решења.
Графички прикажи сваки од тих система.
- Којем од скупова решења датих система припада уређени пар $(1, -2)$?

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ -x + 4y = -7 \end{cases} \quad б) \begin{cases} 11x - \frac{1}{2}y = 12 \\ 5,5x = \frac{1}{4}y + 6 \end{cases} \quad в) \begin{cases} -4x + 6y = -2 \\ x - 1,5y = 1 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x + 2y = -3 \\ y = -\frac{3+x}{2} \end{cases}$$
- Одреди коефицијенте a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 тако да системи $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} (x + 2)(y - 1) = (3 - x)(5 - y) \\ (2x + 1)2 - (y - 3)2 = 4(x - 2)2 - (y + 1)2 + 5 \end{cases}$ буду еквивалентни и да су a_1, b_1 и c_1 , као и a_2, b_2 и c_2 узајамно прости бројеви.
- Дат је систем $\begin{cases} x + 3y = -11 \\ 2x - 10y = 25 \end{cases}$.
Одреди једначине које представљају збир, односно разлику једначина датог система и покажи да оне одређују систем еквивалентан датом.
- Покажи да су системи $\begin{cases} 2(x + y) = 3 - 2x \\ 4x - y = 9 \end{cases}$ и $\begin{cases} 12x = 21 \\ y = 4x - 9 \end{cases}$ еквивалентни.
- Методом замене решити дате системе једначина.

$$a) \begin{cases} x = 2y + 1 \\ 2x + \frac{1}{3}y = 0 \end{cases} \quad б) \begin{cases} a = \frac{2b-3}{4} \\ -a + 2b = \frac{1}{3} \end{cases} \quad в) \begin{cases} z + 0,3t = 0,4 \\ 3z - 2t = 7 \end{cases}$$
- Методом супротних коефицијената решити дате системе.

$$a) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x = 3y \end{cases} \quad б) \begin{cases} 3x - 11y = 21 \\ 2x + 5y = -23 \end{cases} \quad в) \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2y = 3 \\ -\frac{7}{9}x - \frac{1}{3}y = -2 \end{cases}$$
- Решити дате системе и приказати их графички.

$$a) \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad б) \begin{cases} 2x - y = 8 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \quad в) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad г) \begin{cases} x + y = -3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - 3y = 9 \end{cases} \quad ж) \begin{cases} 5x - y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \quad з) \begin{cases} 4x - 3y + 17 = 0 \\ x + 5y - 13 = 0 \end{cases}$$

$$и) \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

13. Рачунски и графички покажи да систем $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$ нема решења.

14. Који од датих система немају решење, који има бесконачно много решења, а који има јединствено решење?

$$a) \begin{cases} -2x + 3y = -5 \\ 4x - 6y = 10 \end{cases} \quad б) \begin{cases} x : y = 2 : 5 \\ -2,5x + y = 1 \end{cases} \quad в) \begin{cases} \frac{1}{3}(x + y) = 2(x - 2y) + 1 \\ 1,4x - 2,2y = -0,6 \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} (x + 1)^2 - (y - 5)^2 = (x - y)(x + y) + 2(x + 5y) \\ 4x - 3y + 3 = -2(x - y) \end{cases}$$

15. Уведи одговарајуће смене, а затим реши системе једначина.

$$a) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 13 \\ -\frac{2}{x} + \frac{7}{y} = 12 \end{cases} \quad б) \begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 13 \\ -\frac{3}{x+1} - \frac{2}{y-1} = -10 \end{cases} \quad в) \begin{cases} \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 5 \\ \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 5 \end{cases}$$

16. Ако је $(x + 4)(y + 2) = (x + 8)(y + 3)$
 $(x + 1)(y + 3) = (x + 3)(y - 4)$,

колика је бројевна вредност израза $30x + 15y$?

17. Збир два броја је 60. Када се један од њих увећа, а други смањи за 7, добијају се бројеви чији је производ за 63 већи од производа датих бројева. Када се већи од датих бројева подели мањим, колико износи остатак?

18. Разлика два природна броја је 12. Када се већи од њих подели мањим, добија се количник 3 и остатак 2. За колико је квадрат збира ових бројева већи од збира њихових квадрата?

19. Када се разломак чији је именилац за 4 већи од бројиоца прошири бројем 5, добија се разломак чији збир имениоца и бројиоца износи 90. Колико цифара има период у децималном запису датог разломка?

20. Размера два броја је $3 : 5$. Када се сваки од њих увећа за 2, добијају се бројеви чија је размера $2 : 3$. Који су то бројеви?

21. Унутрашњи угао β троугла $\triangle ABC$ је три пута већи од угла γ . Угао који образују симетрале углова β и γ има меру 110° . Која страница троугла је најкраћа?

22. Збир дужина катета правоуглог троугла је 119 cm. Ако се једна његова катета увећа за 9 cm, а друга смањи за 25 cm, добија се правоугли троугао чија је површина за 240 cm² мања од површине полазног троугла. Колика је дужина хипотенузе полазног троугла?

23. Ако Јана да Пеђи 10 динара, обоје ће имати исто новца. Ако Пеђа да Јани 20 динара, она ће имати двоструко више од њега. Колико динара има свако од њих?

24. Тридесет евра и 20 долара вреде колико и 4 460 динара, а 25 евра и 70 долара вреде колико и 7 610 динара. Колико вреди 15 евра и 110 долара?

25. Одреди тачку која припада правој $3x + 14y = -15$, чији збир апсцисе и ординате износи 8.
26. Одреди једначину праве одеђене тачкама $(1, -3)$ и $(-2, 5)$.
27. Одреди површину троугла ограниченог координатним осама и правом која је одређена тачкама $(-4, -6)$ и $(2, -\frac{3}{2})$.
28. Одреди површину троугла ограниченог правама $3x - 4y + 9 = 0$ и $x + y = 4$ и апсцисном осом.

9. Системи линеарних једначина с две непознате („Математика 8“, издавач Математископ)

9.1. ЛИНЕАРНА ЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Сматрајући две променљиве x и y непознатим величинама, које се могу одредити под неким условима, можемо рећи да

$$ax + by + c = 0 \text{ или } y = kx + n.$$

представља **линеарну једначину с две непознате**. Притом су a, b, c, k и n дати реални бројеви. Договоримо се да основни облик овакве једначине буде

$$ax + by = c \quad (\text{линеарна једначина с две непознате})$$

Ово је, заправо, *најједноставнији (сређени)* облик линеарне једначине с две непознате. (Обе непознате су на левој страни једначине.)

Уочимо једну такву једначину, на пример

$$2x + y = 4$$

Заменимо x са 1 и y са 2. Добићемо тачну бројевну једнакост:

$$2 \cdot 1 + 2 = 4.$$

Дакле, вредности непознатих величина, $x = 1$ и $y = 2$ **задовољавају** дату једначину. Овим вредностима непознатих даћемо посебно име. За пар бројева $x = 1, y = 2$ који задовољава дату једначину, кажемо да представља **решење** те једначине. Овај пар бројева можемо записати и у облику $(1, 2)$. Уопште,

Ако је $ax_1 + by_1 = c$ тачна једнакост, онда је пар реалних бројева (x_1, y_1) **решење** линеарне једначине $ax + by = c$.

Уместо, пар (x_1, y_1) је *решење једначине*, често кажемо: „Решење једначине је пар бројева $x = x_1, y = y_1$ “.

Вратимо се на једначину

$$2x + y = 4.$$

Није тешко уверити се да су њена решења и парови $(-1, 6), (3, -2), (2, 0)$. (Провером утврдимо да је, на пример $2 \cdot (-1) + 6 = 4$ тачна једнакост.) Покушајмо да нађемо још решења! Уверавамо се да их има још *много*, јер за свако одабрано x , лако налазимо одговарајуће y , и обрнуто.

Имамо намеру да се бавимо *решавањем* линеарних једначина с две непознате. Шта то значи?

Решити једначину значи наћи сва њена решења.

Сва решења једначине одређују њен **скуп решења**.

Занимљиво је да скуп решења линеарних једначина с две непознате може бити *празан скуп*, тј. скуп $\emptyset$. На пример, једначина

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$$

нема решења, јер за било који пар реалних бројева (x, y) она се своди на нетачну бројевну једнакост $0 = 3$.

Будући да једначина $2x + y = 4$ има *много решења*, поставља се питање:

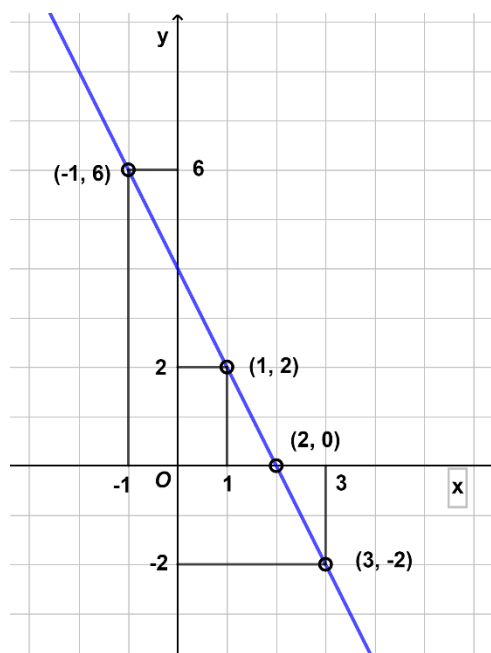
Можемо ли одредити скуп решења ове једначине?

Одговор на ово питање налазимо (нашли смо) у особинама линеарне функције. Раније смо утврдили да сви парови вредности x и y , који *задовољавају* формулу линеарне функције, одређују тачке које леже на правој линији, графику те функције.

Нашој једначини, $2x + y = 4$ одговара линеарна функција

$$2x + y = 4$$

На слици видимо праву, график ове функције. На правој су означена решења која смо помињали.



Проучавајући графике линеарних функција закључили смо да важи и обрнут закључак: координате сваке тачке графика задовољавају формулу линеарне функције. Дакле, добили смо одговор на постављено питање.

Скуп решења једначине $2x + y = 4$ представљају координате свих тачака праве, графика одговарајуће линеарне функције $y = -2x - 4$.

Изведени закључци важе за било коју линеарну једначину с две непознате. Дакле,

Скуп решења линеарне једначине с две непознате, $ax + by = c$, је скуп свих тачака праве, графика одговарајуће линеарне функције.

Другим речима, *графички приказ* (Ојлер-Венов дијаграм) скупа решења линеарне једначине с две непознате је права.

У вези са решењима једначина усвојили смо појам *еквивалентних једначина*, који се односи и на линеарне једначине с две непознате.

Ако две линеарне једначине с две непознате имају исти скуп решења, онда су оне еквивалентне.

Линеарна једначина с две непознате може да има бесконачно много решења. Због тога није изводљиво да проверимо сва решења двеју таквих једначина, ради извођења закључака о њиховој евентуалној еквивалентности. Међутим, због природе скупа решења, долазимо до врло једноставног начина утврђивања еквивалентности. Скупови решења су праве, а знамо да је *свака права одређена са две различите тачке*. Отуда следи решење овог проблема.

Ако две линеарне једначине с две непознате имају два различита заједничка решења, онда су оне **еквивалентне**.

Пример 1. Да ли пар бројева $(-1, 3)$ представља решење једначине

а) $x + y = 3$; б) $2x + y = 1$; в) $3x + 2y = 3$ г) $x - y = 2$?

Решење. а) $-1 + 3 = 2$, односно $-1 + 3 \neq 3$. Пар $(-1, 3)$ није решење. б) $2 \cdot (-1) + 3 = 1$, па $(-1, 3)$ јесте решење. Слично утврдимо да је дати пар решење једначине в) а није решење једначине г).

Пример 2. Провери да ли је неки од парова: $x = -2$, $y = 2$, $(-1, \frac{1}{2})$ и $(2, 4)$ решење једначине

а) $-x + 2y = 6$; б) $3x + 2y = -2$ в) $\frac{1}{2}x - y = -3$.

Да ли су неке од датих једначина еквивалентне?

Решење. Провером утврдимо да пар $x = -2$, $y = 2$ представља решење сваке од три једначине. Пар $(-1, \frac{1}{2})$ задовољава само једначину б), а пар $(2, 4)$ задовољава само једначине а) и в).

Једначине а) и в) имају два заједничка решења, па су *еквивалентне*.

Проучавајући линеарне једначине с једном непознатом, утврдили смо да се, коришћењем особина једнакости, једначине могу *упростити*. Тај поступак смо назвали *сређивањем једначине*. Притом се обилато користимо искуствима из сређивања полинома. Поступци (операције) које користимо не мењају решења једначине, па их називамо **еквивалентним трансформацијама**. Раније смо показали да су то поступци:

- ослобађање од разломака (множење једначине бројем $\neq 0$),
- ослобађање од заграда (сређивање полинома),
- пребацивање познатих и непознатих величина на другу страну једначине, уз промену знака

Ако једначина није у најпростијем облику, применом еквивалентних трансформација доведемо је на такав облик. Онда видимо којој врсти једначина припада, па је решавамо.

Свака једначина с две непознате, која се еквивалентним трансформацијама своди на облик $ax + by = c$, где су a, b, c реални бројеви и $a \neq 0, b \neq 0$ представља **линеарну једначину с две непознате**.

Пример 3. Дате су једначине:

$$\text{а) } \frac{x+1}{2} = \frac{4+3y}{4} - 1 + \frac{3-y}{2}; \quad \text{б) } \frac{x-y}{2} - \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x-3y}{6} - \frac{(x-2)^2}{3};$$

$$\text{в) } x(x-2) - 2(x+y-4) = (4-x)^2 \quad \text{г) } x(x-y-3) - 2 = y(y-x) - (y^2 - x^2)$$

Да ли су ово линеарне једначине с две непознате? Има ли међу њима еквивалентних једначина?

Решење. Еквивалентним трансформацијама упростимо једначине.

а) Ослободимо се разломака, тако што једначину помножимо са 4 (јер је НЗС за 2 и 4 број 4). Добијамо најпре

$$2(x+1) = 4 + 3y - 4 + 2(3-y)$$

После сређивања (ослобађања од заграда и пребацивања x и y на леву страну) добијамо: $2x - y = 4$.

Слично, сређивањем осталих једначина добијамо:

$$\text{б) } x^2 + 4x - y = 8; \quad \text{в) } 2x - y = 4; \quad \text{г) } 3x = 2.$$

Дакле, само су а) и в) линеарне једначине с две непознате и оне су еквивалентне. Једначина б) није линеарна, а једначина г) је линеарна, али с једном непознатом.

Пример 4. Дате једначине доведи на најпростији облик, па им одреди скуп решења.

$$\text{а) } \frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{2} = \frac{x-2y}{6}; \quad \text{б) } \frac{x}{2} - \frac{x+y}{3} + \frac{2}{3} = \frac{x}{6} - \frac{y-3}{3};$$

$$\text{в) } x(x+2) - y(y-1) - 3 = (x-y)(x+y).$$

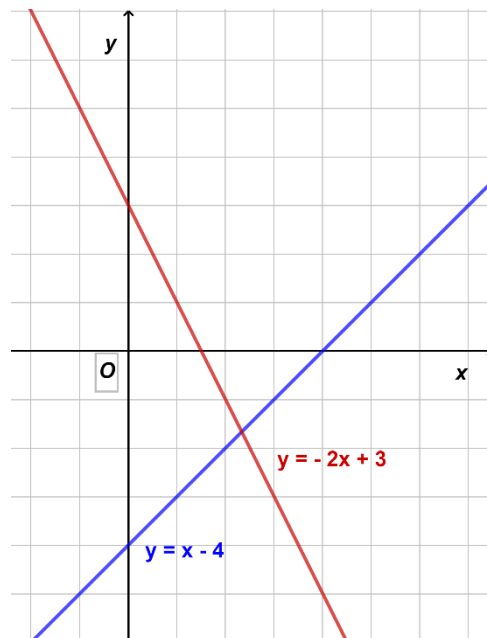
Решење. Сређивањем, као у претходном примеру, добијамо најједноставније облике задатих једначина.

$$\text{а) } x - y = 4; \quad \text{б) } 0 \cdot x + 0 \cdot y = 2;$$

$$\text{в) } 2x + y = 3.$$

Једначина б) има празан скуп решења, $\emptyset$, јер, за било који пар вредности x и y прелази у нетачну једнакост, $0 = 2$.

Скупови решења једначина а) и в) представљени су графички на слици десно. (Једначини а) одговара линеарна функција $y = x - 4$, а једначини в) функција $y = -2x + 3$.)



Вежбе

1. Која од једначина представља линеарну једначину с две непознате?

$$\text{а) } 2x + 3y^2 = 6; \quad \text{б) } x - y = 0; \quad \text{в) } 3x + x^2 = 2; \quad \text{г) } x + y = 1.$$

2. Која од следећих једначина има решења $x = 2, y = 1$?

а) $x + y = 0$; б) $-x + 2y = 2$; в) $2x - y = 4$; г) $x + 7y = 2$.

3. Одреди скуп решења једначине

а) $3x - y = 1$; б) $x + 2y = 6$; в) $2x - 3y = 0$; г) $0 \cdot x + 0 \cdot y = -1$.

4. Покажи да је $(2, -3)$ заједничко решење једначина $2x + y = 1$ и $x - y = 5$.

5. Покажи да једначине из претходног задатка нису еквивалентне.

Упутство. Нацртај одговарајуће праве.

6. Докажи да једначине $2x - y = 3$ и $x - \frac{1}{2}y = -1$ немају заједничких решења.

9.2. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА С ДВЕ НЕПОЗНАТЕ

Уочимо једначине $3x - y = -6$ и $x + 2y = 5$ и парове бројева: $(-3, 4)$, $(1, 9)$ и $(-1, 3)$. Проверимо да ли су ови парови бројева решења датих једначина.

Како је $3 \cdot (-3) - 4 = -13$, тј. $3 \cdot (-3) - 4 \neq -6$, пар $(-3, 4)$ није решење једначине $3x - y = -6$. Међутим, $-3 + 2 \cdot 4 = 5$, па $(-3, 4)$ јесте решење друге једначине, $x + 2y = 5$.

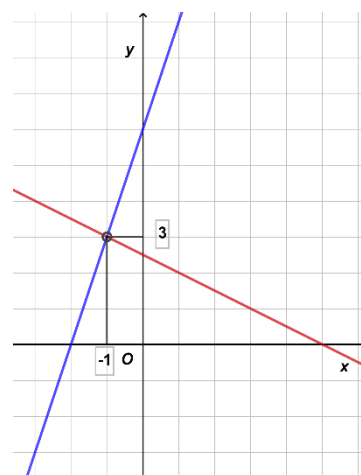
Проверавајући слично, утврдимо да је пар $(1, 9)$ решење прве, а није решење друге једначине.

Међутим, пар $(-1, 3)$, односно $x = -1, y = 3$, представља решење и прве и друге једначине. То је заједничко решење двеју задатих једначина.

Природно је да поставимо питање:

Да ли ове једначине имају још заједничких решења?

До одговора долазимо једноставно, захваљујући чињеници да скуп решења сваке од ове две једначине одређује праву. Прва права пролази кроз тачке $(1, 9)$ и $(-1, 3)$, а не пролази кроз тачку $(-3, 4)$. Друга права пролази кроз тачке $(-3, 4)$ и $(-1, 3)$. Дакле, то су две различите праве са заједничком тачком $(-1, 3)$. То је њихова једина заједничка тачка, што видимо и на слици.



Овај пример показује да има смисла тражити заједничка решења за две или више лнеарних једначина са две непознате. Уверили смо се да једна оваква једначина има неограничен број решења. Али, ако од тих решења тражимо оно, које задовољава још једну једначину, долазимо до заједничког решења тих једначина.

Ако се поставља задатак налажења заједничких решења за више линеарних једначина с две непознате, онда те једначине чине *систем линеарних једначина с две непознате*. У геометријском смислу, као што се види на горњој слици, тражи се пресечна тачка више правих. Онда, задатак има највише смисла, ако имамо две праве, односно две једначине.

Ако су задате две линеарне једначине с две непознате, за које се траже заједничка решења, онда те једначине чине **систем од две линеарне једначине с две непознате**.

Ова дефиниција подразумева две линеарне једначине и две непознате величине. Али, то не значи да обе линеарне једначине морају имати обе непознате. На пример, једначине $(x - 2y = 1$ и $3x = -3)$ чине један систем линеарних једначина с две непознате. Исто кажемо и за једначине $(3x = -2$ и $5y = 4)$.

Систем линеарних једначина може се записати на начин који смо управо користили. Али, чешће се користи запис у коме су две једначине једна испод друге. Два наведена система записујемо овако:

$$\begin{array}{l} x-2y=1 \\ 3x=-3 \end{array} \quad \text{односно} \quad \begin{array}{l} 3x=-2 \\ 5y=4 \end{array}$$

Пример који смо илустровали сликом је систем:

$$\begin{array}{r} 3x - y = -6 \\ x + 2y = 5 \end{array}$$

Заједничко решење ових једначина, $x = -1, y = 3$, односно пар $(-1, 3)$, називамо **решењем** овог система линеарних једначина.

Пар бројева (x_0, y_0) који представља заједничко решење једначина $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$, назива се **решењем система једначина**

$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}$$

Пример 1. Сисли систем од две линеарне једначине с две непознате који има решење:

а) $x = 0, y = 2$; б) $x = -3, y = 1$; в) $(\frac{1}{2}, -3)$; г) $(-3, 0)$.

Решење. Да ли је пар бројева решење неког од система једначина:

а) б) в) г)

Решење. На пример а) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ и слично.

Пример 2. Да ли је пар бројева $x = -2, y = 1$ решење неког од система једначина:

а) $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 3x - y = -7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x - 4y = -1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 2 \\ -2x + 3y = 7 \end{cases}$

Решење. Провером утврдимо да $x = -2, y = 1$ представља решење система а) и система г).

Можемо се лако уверити да је то једино решење и система а) и система г). То значи да оба система имају исти скуп решења. Једини елемент овог скупа решења је пар $(-2, 1)$.

Ако два система линеарних једначина имају једнаке скупове решења, онда су та два система **еквивалентна**.

У последњем примеру еквивалентни су међусобно такође системи б) и в), јер оба имају исти скуп решења.

$$\mathcal{R} = \{(3, 1)\}.$$

Решити система једначина, значи одредити његов скуп решења.

Пример 3. Решити систем једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 2y = 3; \\ x = -5 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Решење. а) Из друге једначине је одређена вредност променљиве x . Ако у првој заменимо x бројем -5 , добићемо: $-5 + 2y = 3$. Одавде лако израчунавамо да је $y = 4$. Решење система је $x = -5, y = 4$.

б) Слично претходном случају, налазимо решење $(3, 2)$.

У овом примеру није било тешко *решити систем* линеарних једначина. Међутим, неће увек бити тако једноставно. У наредним одељцима научићемо како да решимо и сложеније случајеве.

Пример 4. Докажи да скуп решења система једначина $\begin{cases} 2x - y = \frac{3}{2} \\ 3x + 2y = -6 \end{cases}$ има само један елемент, пар $(0, -3)$.

Решење. Провером утврдимо да пар $(0, 3)$ задовољава обе једначине датог система. Доказаћемо, на два начина, да је пар $(0, 3)$ једино решење овог система.

Први начин. Лако утврдимо да, на пример, $x = 3, y = 3$ задовољава прву једначину. То значи да скуп решења једначине $2x - y = 3$ представља права која садржи тачке $(0, -3)$ и $(3, 3)$. Међутим, не задовољава другу једначину. То значи да њена одговарајућа права не садржи тачку $(3, 3)$, па се разликује од прве. Две различите праве имају највише једну заједничку тачку, а то је овде тачка $(0, -3)$.

Други начин. Линеарне функције, које одговарају једначинама датог система, у експлицитном облику су: $y = 2x - 3$ и $y = -\frac{1}{2}x - 3$. Коефицијенти правца су различити ($k_1 = 2, k_2 = -\frac{1}{2}$) па се одговарајући графици (праве) секу и имају само једну заједничку тачку. То је тачка $(0, -3)$.

Пример 5. Докажи да систем линеарних једначина $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ -\frac{1}{2}x + y = 3 \end{cases}$ нема решења. Скуп решења је $\emptyset$.

Решење. Одговарајуће линеарне функције имају експлицитне облике: $y = \frac{1}{2}x - 2$ и $y = \frac{1}{2}x + 3$. Њихови коефицијенти правца су једнаки $k = \frac{1}{2}$. Како су пресеци графика са $-$ осом различити, $n_1 = -2$ и $n_2 = 3$, онда су графици ових функција две различите паралелне праве. Ове правенемају заједничких тачака, што показује да једначине датог система немају заједничких решења.

Отуда следи закључак: *дати систем једначина нема решења.*

Ако систем линеарних једначина с две непознате нема решења, онда је то немогућ систем.

Такође кажемо да *једначине система нису сагласне.*

Може се десити да су једначине система еквивалентне међусобно, тј. да су им једнаки скупови решења. Тада систем има бесконачно много решења (праве које одговарају скуповима решења поклапају се). За такав систем кажемо да је **неодређен**.

Систем линеарних једначина с две непознате **одређен** је ако има тачно једно решење.

Вежбе

1. Састави систем од две линеарне једначине с две непознате, тако да решење тог система буде пар
а) $x = 4, y = -2$; б) $x = -8, y = 0$; в) $(0, \frac{3}{2})$; г) $(-3, -3)$.
2. Дата су три система линеарних једначина с две непознате. Означимо их са I, II и III.
Ако су системи I и II еквивалентни, а такође II и III еквивалентни, докажи да су еквивалентни систем I и систем III.
3. Има ли еквивалентних међу системима линеарних једначина:
а) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 0,2x = 1 \end{cases}$.
4. Покажи да систем линеарних једначина
а) $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$ има решење $(2, y_0)$; б) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$ има решење $(x_0, 1)$.
5. Има ли решења систем једначина:
а) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$?
6. Провери да ли систем линеарних једначина с две непознате $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -1 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$ има решења $(0, 1)$ и $(-4, -3)$. Шта из тога можемо закључити?

9.3. РЕШАВАЊЕ СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Графичка метода

Током досадашњег изучавања скупова решења система линеарних једначина с две непознате и система од две линеарне једначине с две непознате, ми смо открили како се стиже до решења.

Идеја која се намеће своди решавање система на одређивање пресека скупова решења двеју једначина система. Скупове решења представљају две праве, па се до решења система долази цртањем ових правих.

Због тога се овај начин решавања назива **графичка метода**.

На следећим примерима сагледаћемо ову једноставну методу.

Пример 1. Графичком методом решити систем линеарних једначина

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Решење. 1° Најпре одредимо линеарне функције, које одговарају једначинама система.

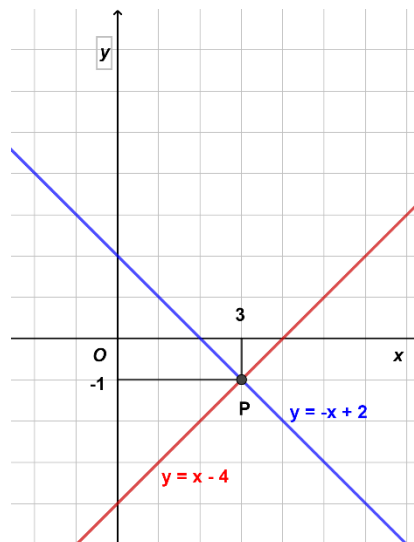
Формуле ових функција написаћемо у експлицитном облику. За дати систем имамо функције: $y = -x + 2$ и $y = x - 4$.

2° Нацртамо графике добијених функција, слика десно.

3° Одредимо координате пресечне тачке правих. То је тачка $P(3, -1)$.

4° Координате тачке представљају решење задатог система:

$$x = 3, y = -1.$$

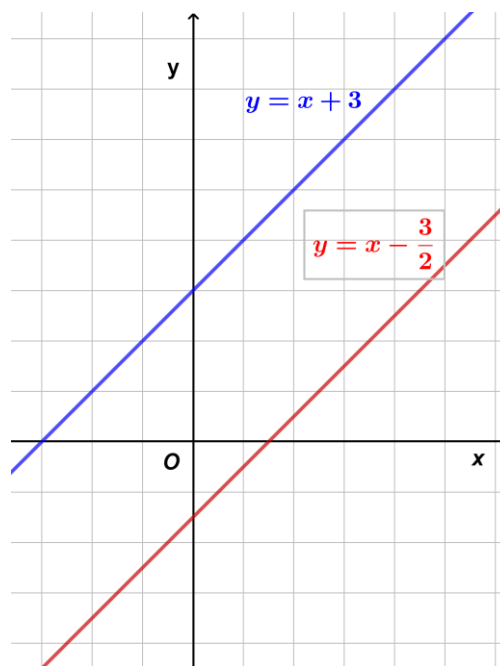
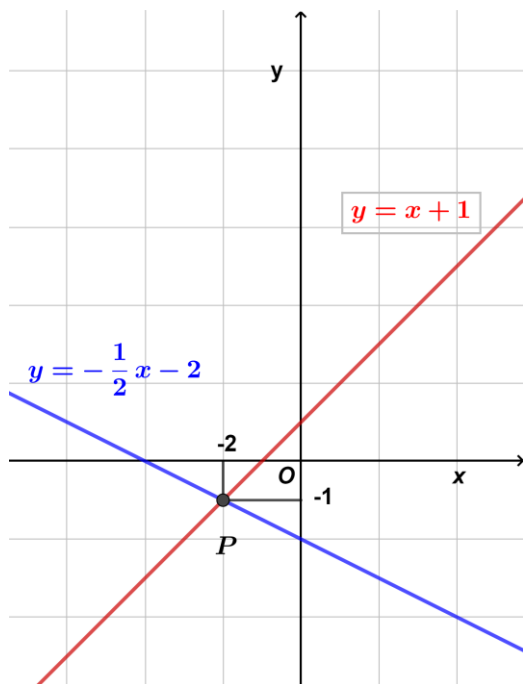


Провери да ли ове вредности непознатих задовољавају систем.

Пример 2. Решити систем једначина

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} - \frac{x+y}{2} = \frac{6-y}{6} \\ x(x-2) - 2(y-1) = (x-1)^2 - (x+y) \end{cases}$$

Решење. Прво једначине средимо, тј. доведемо их на најједноставнији облик. Добијемо: $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$. Даље поступамо као у претходном примеру. Нацртамо графике линеарних функција $y = -\frac{1}{2}x - 2$ и $y = x + 1$. Пресечна тачка $P(-2, -1)$ одређује решење система: $x = -2, y = -1$, слика лево.



Пример 3. Решити систем једначина $\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$

Решење. Одговарајуће линеарне функције су $y = x + 3$ и $y = x - \frac{3}{2}$. Обе имају коефицијент правца $k = 1$, па су им графици две паралелне праве, слика горе десно. То су две различите праве, па се не секу. Дакле, систем је **немогућ**, нема решења.

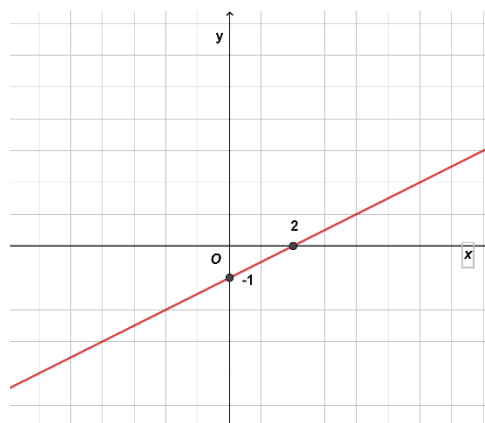
Пример 4. Решити систем линеарних једначина:

$$\left(\frac{x-y}{4} - \frac{2-x}{8} = \frac{x-y-1}{2} \text{ и } \frac{1}{2}x - y = 1\right)$$

Решење. Сређивањем прву једначину доведемо на најједноставнији облик: $-x + 2y = -2$. Сада имамо две једначине правих:

$$-x + 2y = -2 \text{ и } \frac{1}{2}x - y = 1.$$

За цртање правих одредићемо пресеке са координатним осама. Добијамо за обе праве исти одсечак на y -оси, $n = -1$. Такође и пресек са x -осом је исти: $x_0 = 2$. Дакле, праве се поклапају, што значи да су једначине које формирају систем еквивалентне међусобно. Систем је *неодређен* и има бесконачно много решења. То су координате свих тачака добијене праве.



Према добијеним резултатима, утврдили смо да систем им тачно једно решење ако се графици (праве) секу.

Можемо ли без цртања правих утврдити да ли је систем одређен?

Из последња два примера видели смо, ако су коефицијенти правца одговарајућих правих једнаки, систем је *немогућ* или *неодређен*. Да би био одређен праве се морају сећи. Знамо да ће се праве сећи ако имају различите коефицијенте правца:

$$k_1 \neq k_2.$$

Нека је задат систем: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$. Из прве једначине најпре добијамо: $b_1y = -a_1x + c_1$. Ако је $b_1 \neq 0$, поделимо једначину са b_1 и добијемо експлицитни облик одговарајуће линеарне функције:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}. \quad (\text{Коефицијент правца је } k_1 = -\frac{a_1}{b_1}.)$$

Слично, из друге једначине имамо:

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \quad (\text{Коефицијент правца је: } k_2 = -\frac{a_2}{b_2}.)$$

Услов да се графици секу је $k_1 \neq k_2$, па заменом k_1 и k_2 добијамо:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}, \quad \text{односно} \quad \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}.$$

Следи закључак.

Ако је $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ систем има тачно једно решење, тј. **одређен је**.

Пример 5. Који од система линеарних једначина је одређен?

$$\text{а) } \begin{cases} -2x + 6y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} -x + 2y = -1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

Решење. а) Важи једнакост $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, односно $\frac{-2}{6} = \frac{1}{-3}$, па систем није одређен. б) $\frac{3}{-2} \neq \frac{2}{1}$ и в) $\frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-3}$, па су системи б) и в) одређени.

Вежбе

1. Цртањем одговарајућих скупова решења, решити следеће системе линеарних једначина.

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = -4 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

2. Решити систем линеарних једначина

$$\frac{x + 2y}{3} - 1 = \frac{x - 1}{2} + y = \frac{1}{6}$$

$$x(1 + y) - y(x - 2) = 3(x + y) - 2$$

3. Покажи да немају решења следећи систем линеарних једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -2x + y = 1 \\ x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 6x + 4y = 3 \end{cases}$$

Упутство. Провери да ли је $k_1 = k_2$, односно да ли је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

9.4. МЕТОДА ЗАМЕНЕ ПРОМЕНЉИВЕ

Примери и разматрања из претходног одељка недвосмислено потврђују да се цртањем одговарајућих правих може решавати систем од две линеарне једначине с две непознате.

Графичка метода је поуздана у смислу утврђивања постојања решења. Међутим, тачне вредности бројева x и y треба прочитати на координатним осама, што најчешће није могућно. Разлог може бити недовољно прецизна слика, али најчешћи разлог су сами бројеви x и y , ако то нису цели бројеви. На пример, ако је решење $x = 2,7$ и $y = \frac{13}{8}$, сигурно је да толико прецизно ишчитавање са слике, није могућно. Слично је са решењима велике апсолутне вредности, као $x = 2013$, $y = -856$, које не можемо ни добити цртањем.

Све то присиљава нас да удобну графичку методу напустимо и потражимо прецизније путеве ка решењу.

Приликом решавања линеарних једначина с једном непознатом, користили смо еквивалентне трансформације, са циљем да једначине сведемо на најједноставнији облик. Ради решавања *једначина с две непознате*, требаће нам нове *еквивалентне трансформације*. Циљ ових трансформација је издвајање једне променљиве, ради одређивања решења.

Еквивалентне трансформације система једначина, којим издвајамо једну непознату, означаћемо са (S_1) и (S_2) .

(S_1) Принцип супституције (замене). Ако се једна променљива у једној једначини замени изразом, који је једнак тој променљивој, а одређен је из друге једначине, добија се *еквивалентни систем*.

Овај принцип користили смо већ у његовом једноставнијем облику. Тако смо решавали **пример 3** у одељку **9.2**. Подсетићемо се на то у следећем примеру. Уједно, описаћемо поступак решавања система линеарних једначина применом **принципа** (S_1) .

Пример 1. Решити систем једначина.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x = 2 \end{cases}$$

Решење. а) Принцип (S_1) подразумева да се из једне једначине изрази једна променљива. То је овде већ учињено у другој једначини.

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ y = 3 \end{cases} \quad (\text{Друга једначина даје решење за } y)$$

$$\begin{cases} 2x + 3 = -1 \\ y = 3 \end{cases} \quad (\text{Замена } y \text{ са } 3 \text{ у првој једначини}) \quad (S_1)$$

$$\begin{cases} 2x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \quad (\text{Сређена прва једначина})$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \quad (\text{Прва једначина решена по } x)$$

Решење задатог система једначина је пар бројева $(-2, 3)$.

б) Слично претходном задатку. Примену принципа (S_1) започињемо тако што из друге једначине изразимо променљиву x .

$$\begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ 3x = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 2y = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{Друга једначина даје решење за } x)$$

$$\begin{cases} 6 \cdot \frac{2}{3} + 2y = 3 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{Замена } x \text{ са } \frac{2}{3} \text{ у првој једначини}) \quad (S_1)$$

$$\begin{cases} 2y = -1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{Сређена прва једначина})$$

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (\text{Прва једначина сређена по } y)$$

Решење задатог система је пар бројева $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$.

Пример 2. Решити систем једначина

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 4y = -12 \\ x - y = 10 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} -7x + 4y = 19 \\ 5x + 7y = -1 \end{cases}$$

Решење. а) Ако обе једначине имају обе променљиве, онда принцип (S_1) користимо два пута. За прву замену бирамо променљиву која има коефицијент +1 или -1. Ако таква променљива не постоји, онда бирамо ону која има коефицијент са најмањом апсолутном вредношћу. У задатом случају, изабраћемо променљиву x из друге једначине.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3x + 4y = -12 \\ x = y + 10 \end{cases} && \text{(Израчунавање } x \text{ из друге једначине)} \\ &\begin{cases} 3 \cdot (y + 10) + 4y = -12 \\ x = y + 10 \end{cases} && \text{(Замена } x \text{ са } y + 10 \text{ у првој једначини)} \quad (S_1) \\ &\begin{cases} 3y + 30 + 4y = -12 \\ x = y + 10 \end{cases} && \text{(Сређивање прве једначине)} \\ &\begin{cases} y = -6 \\ x = y + 10 \end{cases} && \text{(Прва једначина даје решење за } y) \\ &\begin{cases} y = -6 \\ x = -6 + 10 \end{cases} && \text{(Замена } y \text{ са } -6, \text{ из прве у другу једначину)} \quad (S_1) \\ &\begin{cases} y = -6 \\ x = 4 \end{cases} && \text{(Друга једначина решена по } x). \end{aligned}$$

Решење задатог система је пар бројева $(4, -6)$.

Због идеје замене једне променљиве, цео овај поступак решавања система једначина добио је име **метода замене променљиве**.

б) За прву замену бирамо $+4y$, јер је $+4$ коефицијент са најмањом апсолутном вредношћу.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = \frac{7x+29}{4} \\ 5x + 7y = -1 \end{cases} && \text{(Израчунавање } y \text{ из прве једначине).} \\ &\begin{cases} y = \frac{7x+29}{4} \\ 5x + \frac{7(7x+29)}{4} = -1 \end{cases} && \text{(Замена } y \text{ са } \frac{7x+29}{4} \text{ у другој једначини)} \quad (S_1) \\ &\begin{cases} y = \frac{7x+29}{4} \\ 69x = -207 \end{cases} && \text{(Сређивање друге једначине)} \\ &\begin{cases} y = \frac{7 \cdot (-3) + 29}{4} \\ x = -3 \end{cases} && \text{(Замена } x \text{ са } -3, \text{ из друге у прву једначину)} \quad (S_1) \\ &\begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \end{cases} && \text{(Прва једначина решена по } y). \end{aligned}$$

Решење задатог система је пар бројева $(-3, 2)$.

Пример 3. Методом замене променљиве решити систем једначина.

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{2} - \frac{2y}{3} &= \frac{1}{6} \\ x - 2(x-2y) &= 3 \end{aligned}$$

Решење. Прво ћемо једначине система довести на најједноставнији облик. Добијамо сређен систем.

$$\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ -x + 4y = 3 \end{cases} \quad (\text{За прву замену бирамо } -x)$$

$$\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ x = 4y - 3 \end{cases} \quad (\text{Израчунавање } x \text{ из друге једначине})$$

$$\begin{cases} 3 \cdot (4y - 3) - 7y = 1 \\ x = 4y - 3 \end{cases} \quad (\text{Замена } x \text{ са } 4y - 3 \text{ у првој једначини}) \quad (S_1)$$

Када увежбамо овај поступак, можемо мало штедети време и папир, тако што одређивање прве непознате (овде y) радимо са стране, или на помоћном листу итд.

Решење задатог система је пар бројева $(5, 2)$.

Вежбе

1. Методом замене променљиве решити систем једначина

$$\text{а) } \begin{cases} x = 1 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 6 \\ 3x - 2y = 2 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x - 5y = -6 \\ 7x - 8y = -36 \end{cases}$$

2. Средити, па методом замене променљиве решити систем једначина

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 7 \\ 3x - y = 6 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2y - \frac{3x+2y}{3} = 3x + 4 \\ \frac{x+2y}{3} = \frac{4y-3x}{4} - 1 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3,5 - 2,4(y + 1) = 0 \\ \frac{y}{5} - \frac{x-2,5}{2} = \frac{11}{20} \end{cases}$$

9.5. МЕТОДА СУПРОТНИХ КОЕФИЦИЈЕНАТА

Метода коју смо претходно проучили има за циљ да, путем замене једна променљиве, **елиминира** ту променљиву из једне једначине. После тога остане једначина с једном непознатом, коју лако решимо итд.

Исти ефекат, **елиминација једне променљиве**, може се постићи коришћењем једног новог принципа, који као и (S_1) представља *еквивалентну трансформацију система једначина*. Означимо га са (S_2) .

S_2 Принцип сабирања једначина. Ако се једна једначина система замени збиром двеју једначина тог система, добија се еквивалентни систем.

Како овај принцип помаже у решавању система линеарних једначина, видећемо на следећем примеру.

Пример 1. Решити систем једначина $\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases}$

Решење. Коефицијенти уз представљају **супротне бројеве**. Ако саберемо једначине система, супротни чланови, $-2y$ и $+2y$ поништавају се и у збиру остаје само непозната x . Ево како ћемо то искористити.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 5x + 2y = 6 \end{cases} \quad + \Rightarrow 8x = 16$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ 8x = 16 \end{cases} \quad (\text{Другу једначину заменили смо збиром једначина система}) (S_2)$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 2y = 10 \\ x = 2 \end{cases} \quad (\text{Заменимо } x \text{ са } 2 \text{ у првој једначини}) (S_1)$$

$$\begin{cases} -2y = 4 \\ x = 2 \end{cases} \quad (\text{Сређивање прве једначине})$$

$$\begin{cases} y = -2 \\ x = 2 \end{cases} \quad (\text{Прва једначина даје решење за } y)$$

Решење задатог система је пар бројева $(2, -2)$.

Кључни потез у решавању система био је *елиминација непознате у*, сабирањем **супротних бројева $-2y$ и $2y$** . Због тога се овакав начин решавања система једначина назива **методом супротних коефицијената**.

Наравно, ретко се догађа да једначине у задатом систему имају *супротне коефицијенте* испред једне непознате. То нас неће онемогућити да користимо ову изванредну методу. Имамо веома једноставну идеју.

Коефицијенти који нису супротни, проширивањем доводимо на потребан облик.

Некад је довољно променити знак једног коефицијента, што се постиже множењем једначине са (-1) . Некад је довољно једну једначину помножити одговарајућим бројем. Најчешће два одабрана коефицијента проширујемо до НЗС-а.

Пример 2. Методом супротних коефицијената решити системе једначина:

$$\text{а) } \begin{cases} 9x - 7y = 2 \\ 3x + 8y = 11 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 9x - 10y = 5 \\ 12x + 25y = 100 \end{cases}$$

Решење. а) Да бисмо добили супротне коефицијенте уз непознату x , помножимо другу једначину са (-3) .

$$\begin{cases} 9x - 7y = 2 \\ 3x + 8y = 11 \end{cases} \quad (\text{Множимо другу једначину са } (-3)).$$

$$\begin{cases} 9x - 7y = 2 \\ -9x - 24y = -33 \end{cases} \quad + \quad \text{тј. } -31y = -31$$

$$\begin{cases} 9x - 7y = 2 \\ -31y = -31 \end{cases} \quad (\text{Друга једначина замењена збиром једначина система}) (S_2)$$

$$\begin{cases} 9x - 7 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{Замена } y \text{ са } 1 \text{ у првој једначини}) (S_1)$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{Прва једначина даје решење за } x)$$

Решење система је пар бројева $(1, 1)$.

б) Коефицијенте 9 и 12 уз непознату x доводимо на НЗС, а то је број 36. Помножимо прву једначину са (-4) , а другу са $(+3)$. (Могли смо уместо тога довести на НЗС, број 50, коефицијенте 10 и 25 уз y .)

$$\begin{cases} 9x - 10y = 5 \quad / \cdot (-4) \\ 12x + 25y = 100 \quad / \cdot 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -36x + 40y = -20 \\ 36x + 75y = 480 \end{cases} \quad (\text{саберемо})$$

$$\begin{cases} 9x - 10y = 5 \\ 115y = 460 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(Друга једначина замењена збиром једначина, претходно} \\ \text{помножених са } (-4) \text{ и са } (+3)) \end{array}$$

$$\begin{cases} 9x - 10 \cdot 4 = 5 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{(Замена } y \text{ са } 4 \text{ у првој једначини)}$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} \quad \text{(Прва једначина даје решење за } x \text{)}$$

Решење задатог система је пар бројева (5, 4).

Вежбе

1. Методом супротних коефицијената решити системе једначина:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{cases}; & \text{б)} \begin{cases} 3x + 7y = 26 \\ 5x + 7y = 20 \end{cases}; & \text{в)} \begin{cases} 3x + y = 105 \\ 4x + 3y = 140 \end{cases}; \\ \text{г)} \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 7x - 3y = 11 \end{cases}; & \text{д)} \begin{cases} 7x - 8y = 51 \\ 3x + 5y = 5 \end{cases}; & \text{ђ)} \begin{cases} 8x + 15y = 36 \\ 3x - 4y = 52 \end{cases} \end{array}$$

9.6. ПРИМЕНА СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА

Решавање многих практичних проблема своди се на једначине. Сада ћемо решавати проблеме у којима фигуришу две непознате. Математички модели оваквих проблема биће системи од две линеарне једначине с две непознате.

Пример 1. Наћи два броја која се разликују за 19, таква да им је збир 5.

Решење. Нека су тражени бројеви x и y . Они треба да задовоље услове: ($x - y = 19$ и $x + y = 5$). Решење постављеног система је: $x = 12, y = -7$. (Решимо методом супротних коефицијената)

Пример 2. Угао код врха једнакокраког троугла већи је од угла на основици за $52^\circ 30'$. Колики су унутрашњи углови овог троугла?

Решење. Означимо са α угао код врха, а са β угао код основице. По услову је $\alpha - \beta = 52^\circ 30'$. Знамо да је збир унутрашњих углова у троуглу 180° , па одатле имамо услов $\alpha + 2\beta = 180^\circ$. Дакле, треба решити систем једначина $\begin{cases} \alpha - \beta = 52^\circ 30' \\ \alpha + 2\beta = 180^\circ \end{cases}$. Можемо решити методом супротних коефицијената. (Прву једначину помножимо са (-1) , па саберемо итд.). Решење је $\alpha = 95^\circ, \beta = 42^\circ 30'$.

Пример 3. У нашој школи има 890 ђака. Када би нам дошао још један дечак, онда би број дечака износио $\frac{4}{5}$ од броја девојчица. Колико у нашој школи има дечака, а колико девојчица?

Решење. Ако је у школи x дечака и y девојчица, онда је ($x + y = 890$ и $x = \frac{4}{5}y - 1$). Добијени систем једначина решимо методом замене променљиве. Добијамо решење: дечака је 395, а девојчица 495.

Пример 4. Треба промешати воду загрејану на 35°C и воду на 55°C , тако да се добије 100 литара воде на температури од 50° . Колико литара воде температуре 35° и температуре 55° треба да се помеша?

Решење. Узмимо x литара прве и y литара друге воде. Знамо услове: $(x + y = 100$ и $35x + 55y = 50(x + y))$. Решење овог система једначина је $x = 25$ литара, $y = 75$ литара.

Пример 5. Лана и Стефан су мерили корацима ходник. Лана је пошла са једног краја, а Стефан са другог краја. Срели су се код излаза. Укупно су избројали 105 корака. Знамо да је дужина ходника 69 метара. Лана једним кораком пређе 60, а Стефан 70. Колико је корака избројала Лана?

Решење. Ако је Лана избројала x корака, а Стефан y корака, онда је $(x + y = 105$ и $60x + 70y = 6900)$. Решавајући овај систем (нпр. методом замене променљиве) добијамо $x = 45$ корака. Толико је избројала Лана. Стефан је избројао 60 корака.

Пример 6. Пре 5 година отац је био 5 пута старији од ћерке, а после 3 године биће 3 пута старији. Колико година данас имају отац и ћерка?

Решење. Означимо са x и y године оца и ћерке. Пре 5 година они су имали $x - 5$ и $y - 5$ година, а после 3 године имаће $x + 3$ и $y + 3$ година. Познати су услови: $(x - 5 = 5(y - 5)$ и $x + 3 = 3(y + 3))$. Решење овог система једначина је $x = 45, y = 13$. Провери да ли су испуњени услови.

Пример 7. Растојање од места A до места B , 36 km низ реку чамција је прешао за 4 сата. У повратку, требало му је 6 сати вожње, мада је оба пута возио под пуним гасом. Колика је просечна брзина речног тока између места A и места B ?

Решење. Брзину речног тока означимо са x km/h, а брзину чамца (на мирној води) са y km/h. Возећи низводно, чамција се кретао $(x + y)$ km/h, а узводно $(y - x)$ km/h. Онда знамо да је $(x + y) \cdot 4 = 36$ и $(y - x) \cdot 6 = 36$, односно $(x + y = 9$ и $y - x = 6)$. Методом супротних коефицијената лако израчунамо: $x = 1,5$ и $y = 7,5$. Брзина речног тока је 1,5 km/h.

Пример 8. На базену имамо пумпу A и неколико пумпи B . Ако се базен пуни пумпом A и истовремено са две пумпе B , напуниће се за три сата. Ако се, пак, пуни са три пумпе B и истовремено празни пумпом A , напуниће се за 12 сати. Колико сати базен пуни само једна пумпа A или B ?

Решење. Нека је пумпи A потребно x сати, а пумпи B y сати, за самостално пуњење базена. Тада би A за 1 сат напунила $\frac{1}{x}$ део базена, а B би за исто време напунила $\frac{1}{y}$ део базена. Из датих услова добијамо једначине $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{3}$ и $\frac{3}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$. То је систем једначина са непознатим $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$. Методом супротних коефицијената одмах добијамо (саберемо једначине): $\frac{5}{y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$. Одавде је $y = 12$ сати. Следи да је $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$, односно $x = 6$ сати.

Вежбе

1. Разлика два броја је 20, а збир већег броја и петоструког мањег износи 2. Који су то бројеви?

2. Један двоцифрен природан број је четири пута већи од збира својих цифара. Одреди тај број ако му се цифре разликују за 3.
3. Обим правоугаоника је 5 dm. Ако се једна страница повећа за 2 cm, а друга смањи за 1 cm, површина се неће променити. Колике су странице правоугаоника?
4. Када се пуни славином за хладну и славином за топлу воду. Ако се славина за хладну воду одврне до краја 8 минута, а славина за топлу воду 12 минута, у кади ће бити 300 литара воде. Али, ако се на исти начин хладна вода точи 11 минута, а топла 4 минута, у кади ће бити 250 литара воде. Колико воде за један минут истече кроз ове славине?
5. Помешано је 32 литара воде на собној температури, са 18 литара воде на температури за 40° вишој од собне. Измерена је температура мешавине: $34,4^{\circ}$ C. Колика је собна температура?
6. Један посао би Душан и Никола завршили заједно, ако Душан ради 18 дана и Никола 16 дана. Међутим, Никола је морао да напусти посао после 12 дана, па је Душан морао радити три дана дуже. Колико би дана требало Душану да цео посао уради сам? А Николи?
7. Бициклиста је у подне кренуо у суседни град. Четири сата касније, из истог места је кренуо мотоциклиста брзином за 20 km/h већом од брзине бициклисте. Сат после мотоциклисте, пошао је истим путем аутомобилиста. Кретао се брзином која је за 30 km/h већа од брзине мотоциклисте. У суседни град сва тројица су стигла истовремено. У колико сати су стигли? Колико километара је удаљен суседни град?

10. Компарација уџбеника различитих издавача

У основној школи у којој сам радила као наставник, рађено је по програму уџбеника Klett, па сам на личном искуству имала прилике да видим реакције ученика на тему системи линеарних једначина. Из тог разлога ћу прво дати своје мишљење о овом уџбенику, а након тога о осталима.

Уџбеник од издавача Klett

Прво што сам приметила везано за област система линеарних једначина, је да је одмах у првој лекцији кроз пример уведен појам систем две линеарне једначине са две непознате, са наводом да се сваком од система увек може придружити графички приказ. Сматрам да је велика грешка на првом часу директно увести овај појам, а још већа додати и графички приказ томе, јер након линеарних једначина и неједначина, и графика линеарне функције, ово има негативан ефекат на ученике, остају збуњени и није им јасно зашто задатак објашњавамо на два начина и како смо повезали графике функција са текстуалним задатком.

У следећој лекцији уводи се појам линеарна једначина са две непознате и њено решење и поново се наводи пример са графиком линеарне функције и веза једначине са правом, односно да свака једначина облика $ax+by+c=0$ има бесконачно много решења.

Затим се у оквиру лекције Систем од две линеарне једначине са две непознате поново враћа на појам система, где је дата прецизна дефиниција система и решења тог система. Лекција графички приказ система, јако лепо објашњена кроз три пажљиво изабрана примера, и дефиницијама након сваког од њих, наглашавајући да систем може имати јединствено решење, нема решење или има бесконачно много решења. Аутори уџбеника инсистирају на термину графички приказ, а не графичка метода који се може наћи у другим књигама. У потпуности се слажем са ауторима да је графички приказ само испомоћ при решавању система и да нам најчешће користи само да би утврдили број решења датог система без његовог решавања, јер кад је у питању јединствено решење система, углавном не можемо да прецизно одредимо решење на овај начин. С тим у вези, требало би на нивоу државе, усагласити термин и објаснити и ученицима и наставницима да графички приказ није метода решавања.

Следи лекција еквивалентност система линеарних једначина. Сматрам да је ова лекција морала доћи пре лекције графички приказ. Такође су дата три примера и три дефиниције након њих, али је текст помало нејасан и збуњујући.

У лекцијама решавање система методом замене и методом супротних коефицијената, најпре је образложен поступак конкретног система једначина, а затим и у општем случају и што је јако битно, указано је којим случајевима је погодније користити коју методу.

У последњој лекцији Примена система, дат је разноврстан скуп задатака чије је решавање своди на решавање одговарајућих система линеарних једначина, с циљем да се ученицима прикаже практична страна математике.

У свим лекцијама се мешају теорија и дефиниције са примерима и задацима, па није увек потпуно схватљиво где почиње пример, а где се завршава.

Уџбеник од издавача Креативни центар

Област системи линеарних једначина подељена је у шест области, уз додатну седму област ЗАПАМТИ, где је поновљено шта је то систем и његово решење и три правила која користимо код еквивалентних трансформација система.

На почетку сваке области најпре су дати наслови свих лекција у оквиру те области, а онда редом следи лекција уз сваки наслов. Појмови се уводе поступно и то се најпре уводи појам једначине са две непознате и њено решење, па затим систем и његово решење. Читко написан текст, са јасно наглашеним примерима, задацима и дефиницијама. Такође, на крају сваке лекције је дат уоквирен и осенчани део Провери шта знаш, са задацима за самостално вежбање. У уџбенику од издавача Klett, такође су дати задаци после сваке лекције, али потпуно ненаглашено и неприметно, што сматрам великом маном. Ученицима у том узрасту све мора бити јасно наглашено, јер је њихова незаинтересованост велика.

Следе лекције графички приказ система и његово решење. Као и у претходном уџбенику, јако лепо објашњено уз три лепа примера за сва три случаја решења система.

Након тога следе лекције еквивалентни системи и правила за њихово решавање, јасно и поступно објашњене. Опет понављам, сматрам да би било ефикасније да је ова лекција обрађена пре лекције графички приказ.

У лекцијама у којима се обрађују метода смене и метод супротних коефицијената, у сваком кораку решавања система, наглашено је које од три правила, односно трансформација, користимо.

Једина замерка, је да би у последњој лекцији везаној за примену система, требало додати још који пример задатака.

Уџбеник од издавача Завод за уџбенике

Област системи линеарних једначина подељена је у шест области. Најпре се уводи појам линеарне једначине са две непознате, па потом појам система линеарних једначина. Разлика у односу на претходна два уџбеника је да су на крају лекција дата контролна питања везана за дату лекцију, која уједно могу служити и као подсетник и доста више задатака за самостално вежбање, па уџбеник уједно може бити и уџбеник и збирка, све у једном. Такође, још једна разлика у односу на претходна два уџбеника је да након увођења појма система, следи лекција еквивалентност система, па затим метод смене и метод супротних коефицијената, и тек на крају графички приказ система. По мом личном мишљењу, сматрам да би ово требало да буде редослед лекција. У лекцији графички приказ система, за сваки систем је додатно дата и таблица за сваку линеарну једначину, што ученицима још више олакшава разумевање.

Оно што ми се не свиђа код овог уџбеника је што су системи, при решавању, писани један поред другог започети једном витичастом заградом и одвајани зарезом, а не један испод другог одвојени хоризонтално линијом, како и учимо ученике да решавају систем. Методе решавања нису јасно објашњене, односно, помало су на напреднијем нивоу и компликоване за ученике.

Уџбеник од издавача Круг

Област системи линеарних једначина подељена је у четири области. Сматрам да је ово најбоља подела. Прва област је појам линеарне једначине са две непознате, где се такође, као код издавача Klett, одмах наводи веза између линеарне једначине и графика функције.

У другој области, уводи се појам система једначина и његовог решења и спомиње еквивалентност система. Дат је један пример еквивалентних система уз коментар зашто су еквивалентни и напомену о еквивалентним трансформацијама, без неког детаљног објашњавања.

Следећа област подељена је, редом, на решавање система методом замене, методом супротних коефицијената и графички приказ решења. Кратко, јасно и прецизно објашњено, уз замерку да би и овде требало системе записивати један испод другог и одвајати хоризонталном линијом. Одлично објашњена сва три примера решења система, уз таблицу и графички приказ.

И на крају дата област примене система уз јасно објашњене примере.

Укратко, један класичан пример правога уџбеника из математике. Нема много теорије, нема много додатног текста и околишања, навођења на наслућивање проблема. Идеалан уџбеник за ученике са бољим предзнањем, и препоручујем га ученицима који планирају да школовање наставе у гимназијама.

Уз додатке мало боја, неких осенчених делова, сличица и слично може да буде савршен уџбеник за све ученике.

Уџбеник од издавача Герундијум

Област системи линеарних једначина подељена је у шест области. Започиње се појмом, решењем и еквивалентношћу једначине са две непознате, уз графички приказ. Визуелно лепо приказано, али лоше, тј. нејасно обрађени примери.

Следећа област је појам и решење система две линеарне једначине са две непознате. Одмах су дате дефиниције система и његовог решења и дефиниција графичког система и шта све може бити решење система, након чега следи пар примера са графичким приказом, али су слике графика доста нејасне.

Потом следи област еквивалентност система. Сматрам да није требало раздвајати еквивалентност једначина од еквивалентности система.

Следеће области су метод замене, метод супротних коефицијената и примена система.

Метод замене је јако лоше објашњен, скоро да нема објашњења. Поново напомињем да су слике графика скоро нечитљиве. Није уложено ни мало труда у њихову израду.

Од свих пет уџбеника, овај је најлошији, и једини уџбеник који не бих никоме препоручила.

Уџбеник од издавача Математископ

Област системи линеарних једначина подељена је у шест области: линеарна једначина с две непознате, систем линеарних једначина с две непознате, решавање система линеарних једначина уз графички приказ, метод замене и метод супротних коефицијената и примена система. Овај уџбеник се доста разликује од свих осталих уџбеника. Читајући уџбеник у неким тренуцима, стиче се утисак као да смо у учioniци и слушамо предавање свог наставника, уз пар занимљивих и врло корисних коментара.

Свака област је у потпуности обрађена. Оно што ми се доста свиђа је да се аутор константно осврће на претходно градиво, при чему се читаоцу олакшава разумевање и повезивање претходног и новог градива. Једини је уџбеник где се у овој области помиње коефицијент правца праве и експлицитни облик једначине, и како на први поглед помоћу њих можемо одмах видети да ли једначина има решење или не. Такође, код методе супротних коефицијената детаљно објашњено како „наместити“ коефицијенте, проширивањем на НЗС итд. Уз још доста ситница, које овај уџбеник издваја од осталих. Започиње се појмом линеарне једначине и њеног решења и наравно еквивалентних једначина, па на сличан начин се проширује на појам система једначина, на методе решавања итд. Једино што би на пар места можда требало дати мало лакше почетне примере, а не почињати одмах са решавањем полинома. По мом личном мишљењу, један одличан уџбеник.

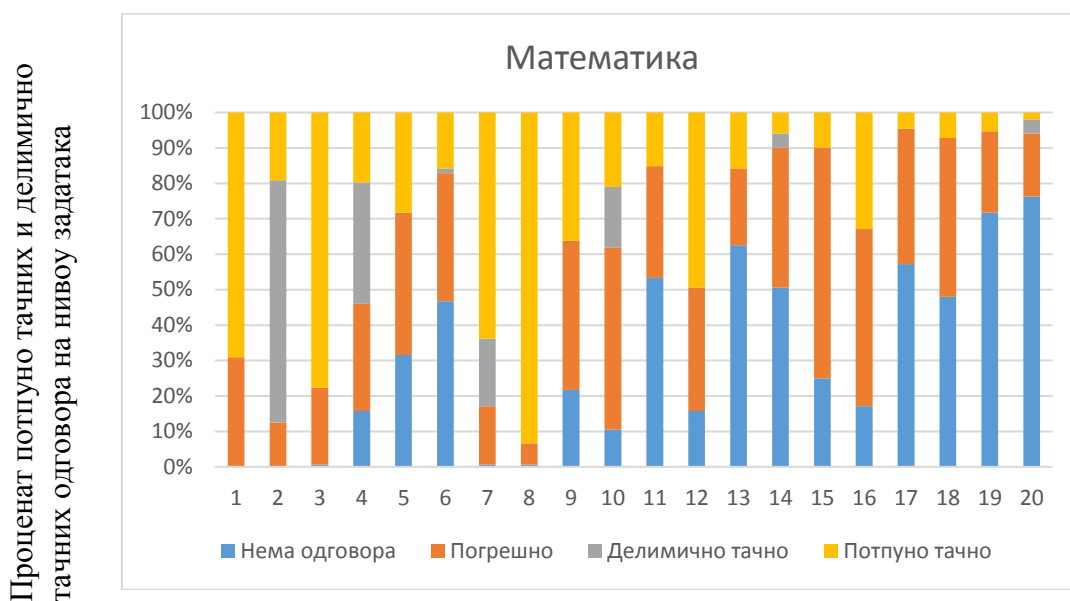
Закључак и предлози

Једна слика вреди хиљаду речи, али исто тако добра књига злата вреди. Осим уџбеника од издавача Герундијум, сви остали су добро одрађени. Сваки има своје предности, али и лоше делове. Било би идеално када би све добре карактеристике спојили у један одличан уџбеник, који би сви могли да користе.

Напоменула бих још, да би код примене система у свим уџбеницима требало додати примере са интересантнијим текстом, повезаним са било којом облашћу којом је окупиран данашњи тинејџер. Ту најпре спада телефон и све везано за интернет, почевши од youtube-а, facebook-а, instagram-а, броја „лајкова“ и слично. Затим увести неке познате личности, глумце, фудбалере, спорт, теретану, додати мало занимљиве географије и биологије. То би ученицима било доста занимљивије од класичних текстова са јабукама, чоколадама, свескама и оловкама, који их прате од првог разреда основне школе, и можда би им дало мало више мотивације за рад и вежбање.

11. Пробни завршни испит – резултати

Пробни завршни испит из математике одржан је 13. априла 2018. године. На следећем графикону и у табели представљени су резултати на тесту из математике које су остварили ученици осмог разреда Основне школе „Коста Абрашевић“, општина Ресник у Београду.



	з1	з2	з3	з4	з5	з6	з7	з8	з9	з10	з11	з12	з13	з14	з15	з16	з17	з18	з19	з20
Нема одговора	0	0	1	24	48	71	1	1	33	16	81	24	95	77	38	26	87	73	109	116
Погрешно	47	19	33	46	61	55	25	9	64	78	48	53	33	60	99	76	58	68	35	27
Делимично тачно	0	104	0	52	0	2	29	0	0	26	0	0	0	6	0	0	0	0	0	6
Потпуно тачно	105	29	118	30	43	24	97	142	55	32	23	75	24	9	15	50	7	11	8	3

- Табела 1. -

На пробни завршни испит изашло је 159 ученика ове школе, 6 одељења, од тога 152 ученика који похађају редовну наставу и 7 ученика који раде по ИОП програму. За ученике који раде по ИОП програму припремљени су посебни тестови и њихови резултати нису обухваћени, јер се по њиховом плану и програму не обрађују системи линеарних једначина.

У табелама су дати резултати за сваки задатак појединачно. Од 20 задатака, првих 9 су задаци основног нивоа, 7 средњег нивоа, и последња 4 задатка су задаци за напредни ниво. У 11. задатку треба решити систем линеарних једначина, и он гласи:

11. Реши систем једначина.

Прикажи поступак.

$$-0,3x - 0,2y = -1,2$$

$$7x + 6y = 32$$

$$(x, y) = (_, _)$$

У табели 2, дати су резултати решених задатака у процентима.

	з1	з2	з3	з4	з5	з6	з7	з8	з9	з10	з11	з12	з13	з14	з15	з16	з17	з18	з19	з20
Потпуно тачно (%)	69.1	19.1	77.6	19.7	28.3	15.8	63.8	93.4	36.2	21.1	15.1	49.3	15.8	5.92	9.87	32.9	4.61	7.24	5.26	1.97
Делимично тачно (%)	0	68.4	0	34.2	0	1.32	19.1	0	0	17.1	0	0	0	3.95	0	0	0	0	0	3.95
Тачно и делимично тачно (%)	69.1	87.5	77.6	53.9	28.3	17.1	82.9	93.4	36.2	38.2	15.1	49.3	15.8	9.87	9.87	32.9	4.61	7.24	5.26	5.92
Погрешно (%)	30.9	12.5	21.7	30.3	40.1	36.2	16.4	5.92	42.1	51.3	31.6	34.9	21.7	39.5	65.1	50	38.2	44.7	23	17.8
Нема одговора (%)	0	0	0.66	15.8	31.6	46.7	0.66	0.66	21.7	10.5	53.3	15.8	62.5	50.7	25	17.1	57.2	48	71.7	76.3

- Табела 2. -

Као што се може видети из табеле, више од 50% ученика није чак ни покушало да уради задатак, 31% је задатак урадило погрешно, а само 15 % је задатак урадило тачно. С обзиром да је ово задатак за средњег нивоа и припада области алгебра и функције, а не области геометрије, које се последњих година показала као област са најслабијим резултатима, сматрам да су резултати требали бити знатно бољи, и да је чињеница да више од половине ученика није покушало да реши задатак, поражавајућа. Такође, први задатак средњег нивоа, у збирци за припрему за завршни испит за школску 2017/2018. годину, је за нијансу тежи од задатка на пробном завршном испиту, јер садржи апсолутну вредност, а трећи је скоро потпуно исти. Што указује на чињеницу, да се ученици нису довољно припремали за завршни испит, или слабо разумеју ову област.

12. Задачи са такмичења

У овом делу рада дати су задаци који су се претходних година јављали на такмичењима ученика основних школа, односно осмог разреда.

1. (Државно такмичење, мај 2013. године)

Реши систем једначина:

$$\begin{aligned}x - 2y - 1 &= 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4y - 17 &= 0.\end{aligned}$$

2. (Државно такмичење, мај 2010. године)

Реши систем једначина

$$\begin{aligned}|x| + y + z &= 2009 \\ x + y + z &= 2010 \\ x + y + 2z &= 2011.\end{aligned}$$

3. (Општинско такмичење 2005. година)

Цена оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. На колико начина се може потрошити 2005 динара за набавку свезака и оловака?

4. (Школско такмичење 2005. година)

Збир два броја је 2005. Ако 17% једног броја износи колико 68% другог броја, који су то бројеви?

5. (Школско такмичење 2004. година)

Збир два броја је 135. Ако 35% једног броја износи колико и 28% другог броја, који су то бројеви?

6. (Школско такмичење 1995. година)

Дат је разломак чији је именилац за 1995 већи од његовог бројилаца. Ако се датом разломку дода $\frac{1}{3}$ добије се разломак који је три пута већи од првобитног. Колики је именилац, а колики бројилац датог разломка.

7. (Школско такмичење 1990. година)

На школском такмичењу је учествовало 240 ученика. Половину ученика чине $\frac{3}{5}$ девојчица и $\frac{3}{7}$ дечака. Колико је било дечака, а колико девојчица?

РЕШЕЊА

1. Из прве једначине имамо да је $x = 2y + 1$. Израз $2y + 1$ заменићемо удругу једначину уместо променљиве x . Добијамо систем:

$$\begin{aligned}x &= 2y - 1 \\ 4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 + 4y - 17 &= 0,\end{aligned}$$

односно:

$$\begin{aligned}x &= 2y - 1 \\ 8y - 16 &= 0.\end{aligned}$$

Дакле, решење система је $x = 5$ $y = 2$.

2. Одузимајући другу од треће једначине система добијамо $z = 1$, па се систем своди на

$$\begin{cases} |x| + y = 2008 \\ x + y = 2009 \end{cases}.$$

Одузимајући другу од прве једначине система добијамо једначину $|x| - x = -1$.

Разматрајући случајеве по x имамо:

- i) $x \geq 0$. $x - x = -1$, $0 = -1$ па једначина нема решења у овом случају.
ii) $x < 0$. $-x - x = -1$, одакле је $x = \frac{1}{2}$ па ни у овом случају једначина нема решења.

Дакле, закључујемо да полазни систем нема решења

3. Означимо са x цену оловке, а са y цену свеске. Добијамо систем:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 100 \\ 3x + 2y &= 75 \end{aligned}$$

Прву једначину ћемо помножити са (-3) , како би уз променљиву x добили супротне коефицијенте, а затим ћемо другу једначину заменити збиром једначина система:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 100 \\ \underline{3x + 2y} &= \underline{75} \\ x + 3y &= 100 \\ \underline{-7y} &= \underline{-225} \end{aligned}$$

Одатле лако израчунавамо да је $y = \frac{225}{7}$, а $x = \frac{25}{7}$, односно цена оловке је $\frac{25}{7}$ динара, а свеске $\frac{225}{7}$ динара.

Када број 2005 разложимо на чиниоце, добијамо број 5 и број 401. Како су обе цене дељиве са 25, не постоји ни један начин да потрошимо 2005 динара на куповину.

4. Из поставке задатка добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned} x + y &= 2005 \\ \underline{0,17x} &= \underline{0,68y} \end{aligned}$$

Систем ћемо решити методом замене.

$$\begin{aligned} x &= 2005 - y \\ \underline{0,17(2005 - y)} &= \underline{0,68y} \\ x &= 2005 - y \\ \underline{340,85} &= \underline{0,85y} \end{aligned}$$

Одакле добијамо да је $y = 401$, а $x = 1604$.

Дакле, тражени бројеви су 1604 и 401.

5. На исти начин као и у претходном задатку, добијамо да су тражени бројеви 60 и 75.
6. Означимо са x бројилац, а са y именилац датог разломка. Из услова задатка, добијамо систем:

$$\begin{aligned} y &= x + 1995 \\ \frac{x}{y} + \frac{1}{3} &= 3\frac{x}{y} \end{aligned}$$

Када другу једначину помножимо са 3у добијамо:

$$\begin{aligned}y &= x + 1995 \\ 3x + y &= 9x\end{aligned}$$

Заменом $x + 1995$ уместо y у другој једначини, добијамо:

$$\begin{aligned}y &= x + 1995 \\ 4x + 1995 &= 9x\end{aligned}$$

Лако се решава да је $x = 399$, а $y = 1596$.

Дакле, тражени разломак је $\frac{399}{1596}$.

7. Означимо са x број девојчица, а са y број дечака. Из услова задатка, добијамо систем:

$$\begin{aligned}x + y &= 240 \\ \frac{3}{5}x + \frac{3}{7}y &= 120\end{aligned}$$

Решавањем на сличан начин као и у претходним задацима, добијамо да је на такмичењу учествовало 184 девојчице и 56 дечака.

13. Закључак

Након извршене анализе на дату тему, оно што бих прво издвојила је да је у ранијим плановима за област система линеарних једначина било издвојено 18 часова, од тога 6 за обраду, 11 за утврђивање и 1 час за систематизацију градива. Након тога у плану је промењено да за ту област буде издвојено 15 часова, 6 за обраду и 9 за утврђивање, а по садашњем плану 12, односно 6, то јест 3 мање. Сматрам да би у годишњем плану овој области требало посветити који час више, јер ученицима треба више времена да је савладају. Задаци су јако дуги, односно израда њиховог решења захтева доста времена, па у току једног часа не може бити обрађен довољан број задатака. Такође, за додатну и допунску наставу је предвиђен један час, што је опет недовољно за успех, било у преовладавању датом материјом на основном нивоу или на неком напреднијем.

На контролној вежби из ове области, сва три одељења којима сам предавала, контролни су урадила испод просека (испод 2,5). Слични резултати су били и у супротној смени. Дискутујући са ученицима у чему је проблем, углавном су коментари били да је ово најтежа област, посебно примена система, и да ће на следећим тестовима знања поправити своје оцене, само да се ова област заврши и да више не морају да је понављају. Међутим, прегледајући њихове радове са контролних задатака и пробног завршног испита, обратила сам пажњу на грешке које ученици праве при тражењу решења задатака. Најчешћа грешка која се јавља је промена знака код пребацивања променљивих или непознатих са једне на другу страну једнакости.. Друга грешка се јавља ако се у једначини појаве разломци или децимални бројеви. Већина одмах претпоставља да једначину треба помножити, али не знају са сигурношћу шта се тачно са чиме множи. Тако често помноже само коефицијенте уз непознате или само слободне чланове, а такође забораве да помноже и другу страну једнакости. Такође, доста ученика сабира непознате и слободне чланове. Већина учи формуле напамет, па их самим тим брзо и заборавља. Ретки су они који знају сами да изведу неку формулу. Па тако, када су дати системи у којима се појављују квадрат бинома, разлика квадрата и сличне једначине са већим изразима, које најпре треба средити, па онда решавати неком погодном методом, већина ученика ни не покушава да реши задатак, јер најпре има проблем са несавладаним пређеним градивом. Чак иако знају методе решавања система, не знају како да их употребе, јер не могу да среде израз. Када је у питању примена система, већина ученика не зна да постави почетне једначине које описује текст и услове задатке.

Закључак је да дубина проблема лежи у првим корацима сусретања са математиком. Дакле, разредна настава је најбитнија у савладавању основа превођења текстуалних задатака у једначине, затим се кроз целокупно образовање у вишим разредима, мора обратити посебна пажња на стално понављање и подсећање на претходно градиво, јер у математици се знање константно проширује надограђивањем на претходно стечено.

Следећа, јако битна ставка је избор одговарајућег уџбеника, јер без обзира на искуство, маштовитост, креативност и преданост раду, наставник мора да поштује план и програм који му је задан, као и припреме за час. Треба споменути и економску добит при избору уџбеника, при чему се недовољно стручни или непрофесионални руководиоци одређују и управљају према проценту од издавача, а не према квалитету уџбеника и обрађеног садржаја, јер економски моменат у свакој сфери пословања преузима утицај. Па би и ту требало направити одређене измене, при чему ће адекватна

комисија истински проценити стварне предности или недостатке. Сматрам да би сви ученици требало да раде по истом уџбенику. Требало би изабрати најбољи, или ујединити све најбоље из више уџбеника у један, а елиминисати или кориговати оно што не ваља у истим, са највећим акцентом на резултат који је показао највише исходе и постигнућа ученика.

По мом личном мишљењу, уџбеник који је најбоље објаснио ову област објавио је издавач Математископ.

Такође, уџбенике је потребно на неки начин уводити у дигиталне програме, као што су Geogebra, Mathlab, Latex, WolframAlpha и други, како би целокупно усвојено знање у великој мери могло да буде употребљено и применљиво у смислу дигиталне писмености ученика. Пожељна је и обрнута узајамна корелација. Континуирани процес унапређења наставе један је од основних захтева савременог друштва. Неопходно је да уџбеници прате прогрес науке и информационо-комуникационих технологија.

Намеће се закључак да би у наредном периоду у смислу побољшања нивоа знања и резултата исхода при обради анализи наставних јединица и материјала и изради уџбеника требали да учествују наставници из школских учионица чији резултати су потврђени кроз године рада, јер пракса је једна од главних мера квалитета.

Литература

- 1) Небојша Икодиновић; Слађана Димитријевић, Математика за осми разред основне школе, уџбеник, Klett, Београд 2010.
- 2) Мирјана Стојсаљевић-Радовановић; Љиљана Вуковић, Математика уџбеник за осми разред основне школе, Креативни центар, Београд 2012.
- 3) Вера Јоцковић; Владимир Мићић; Ђорђе Дугошија; Војислав Андрић, Математика за осми разред основне школе, Завод за уџбенике, Београд 2010.
- 4) Срђан Огњановић, Математика 8: уџбеник за 8. разред основне школе, Круг, Београд 2010.
- 5) др Синиша Н. Јешић; Драгица Д. Мишић; мр Наташа А. Бабачев, Математика за 8. разред основне школе, Герундијум, Београд 2010.
- 6) Владимир Стојановић, Математика уџбеник за осми разред основне школе, Математископ, Београд 2010.
- 7) Александар Липковски, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Завод за уџбенике, Београд 2007.
- 8) Небојша Икодиновић; Слађана Димитријевић, Математика за осми разред основне школе, приручник за наставнике, Klett, Београд 2010.
- 9) http://www.livetoadd.org/Courses/Documents/17f2/Notes/lecture_20111024.pdf
- 10) http://iola.math.vt.edu/media/pubs/Andrews-Larson_2015.pdf
- 11) <https://www.math.utah.edu/~gustafso/s2016/2270/web-projects/christensen-HistoryLinearAlgebra.pdf>
- 12) https://www.worldscientific.com/doi/suppl/10.1142/8261/suppl_file/8261_chap01.pdf
- 13) <http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/nm/229/nm511207.pdf>
- 14) <http://operator.pmf.ni.ac.rs/www/pmf/publikacije/Mii/2008-2009/broj%201%20sveska%201-2/mii1-1.pdf>
- 15) https://digitalcommons.ursinus.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1001&context=triumphs_linear
- 16) <https://www.ics.uci.edu/~irani/f13-6N/Labs/Lab2.shtml>
- 17) <http://sites.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers1999/weiss.html>
- 18) https://math.berkeley.edu/~mgu/MA221/Ceres_Presentation.pdf