

INSTITUT MATHÉMATIQUE — BEOGRAD

**QUELQUES PROBLÈMES
DE LA THÉORIE QUALITATIVE
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ORDINAIRES**

BEOGRAD
1969

INSTITUT MATHÉMATIQUE — BEOGRAD

**QUELQUES PROBLÈMES
DE LA THÉORIE QUALITATIVE
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ORDINAIRES**

B E O G R A D
1969

EDITIONS SPÉCIALES DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUES DE BEOGRAD

L'Institut mathématique de Beograd dans ses *Éditions spéciales* (Posebna izdanja) fera paraître des monographies sur des problèmes actuels de Mathématiques et de Mécanique, des articles originaux plus étendus, des tableaux numériques originaux etc. Les *Éditions spéciales* ne sont pas périodiques.

1. (1963) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović*:
Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. III.
2. (1963) *K. Milošević-Rakočević*:
Prilozi teoriji i praksi Bernoullievih polinoma i brojeva.
3. (1964) *V. Devidé*:
Matematička logika.
4. (1964) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović*:
Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. IV.
5. (1965) *D. Z. Đoković*:
Algebra trigonometrijskih polinoma.
6. (1966) *D. S. Mitrinović* et *R. S. Mitrinović*:
Tableaux d'une classe de nombres reliés aux nombres de Stirling. VI.

EDITIONS SPÉCIALES DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE BEOGRAD

TOME 7

Rédacteur
T. Peyovitch

QUELQUES PROBLÈMES DE LA THÉORIE QUALITATIVE
DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Republički fond za naučni rad SRS finansirao je štampanje ove knjige



TABLE DES MATIÈRES

	Page
<i>Préface</i>	5
1. <i>T. Peyovitch</i> , Existence et quelques propriétés asymptotiques des équations différentielles ordinaires	7
2. <i>M. Bertolino</i> , Inégalités différentielles et l'analyse qualitative des équations différentielles	59
3. <i>O. Rakić</i> , Quelques propriétés asymptotiques d'un système d'équations différentielles ordinaires	153



PRÉFACE

Ce livre est le résultat d'un séminaire qui fut tenu à l'Institut Mathématique de Belgrade au cours de l'année 1966—1967. Dans ce livre se trouvent quelques-uns de problèmes de la théorie qualitative des équations différentielles qui furent traités dans les conférences du séminaire par les auteurs de ce livre.

Les auteurs

EDITIONS SPÉCIALES DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE BEOGRAD

Tome 7

T. PEYOVITCH

EXISTENCE ET QUELQUES PROPRIÉTÉS
ASYMPTOTIQUES DES ÉQUATIONS
DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

BEOGRAD
1969

A ma femme
Lioubitza Peyovitch

Dans ce Mémoire nous allons exposer quelques résultats sur l'existence et quelques propriétés asymptotiques des équations différentielles ordinaires dont nous nous sommes occupés à plusieurs reprises, en modifiant quelques-uns de nos résultats antérieurs et ajoutant encore quelques autres résultats. Pour cela nous utilisons exclusivement la méthode classique des approximations successives de Picard. Les intégrales sont celles de Riemann. Enfin, nous mentionnerons les résultats d'autres auteurs concernant la même question.¹⁾

Nous commencerons cet exposé par l'équation linéaire du premier ordre et le terminerons par un système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + f_i(t) + F_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et par quelques équations spéciales.

1. Equation linéaire du premier ordre. — Soit donnée une équation

$$(1.1) \quad \frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t)$$

dont la solution générale est

$$(1.2) \quad x = e^{\int_{t_0}^t a(t) dt} \left[C + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t a(t) dt} f(t) dt \right] = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[C + \int_{t_0}^{\xi} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi \right]$$

où $a(t)$, $f(t)$ sont des fonctions réelles et continues de la variable réelle $t > t_0$.

Il faut distinguer plusieurs cas:

1°. Supposons que l'on ait

$$(1.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = k \neq 0, \infty, \quad (k = \text{nombre fixe}),$$

$$(1.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi = 0.$$

¹⁾ Nous avons commencé à nous occuper du problème des solutions asymptotiques des équations différentielles ordinaires en 1932 par un Mémoire intitulé: „Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles linéaires“ (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. 1, 1932).

On peut choisir la constante C de manière que la solution (1.2) prenne la forme

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[\frac{l}{k} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi \right]$$

d'où l'on a, d'après (1.3) et (1.4), $\lim_{t \rightarrow \infty} x = l$, l étant un nombre fixe.

Le mme 1.1° — L'équation (1.1) admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (1.3) et (1.4), toutes les solutions asymptotiques bornées avec C bornée.¹⁾

Il faut remarquer que la condition (1.4) est remplie, si l'on a

$$\left| \frac{f(t)}{-a(t)} \right| = M, \quad (a(t) \neq 0), \quad \text{pour } t \in [t_0, \infty),$$

M étant un nombre fixe, car on a

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi &= \int_t^\infty \frac{f(\xi)}{-a(\xi)} \cdot -a(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} d\xi < \\ &< M \int_t^\infty |du| = M \begin{cases} \frac{1}{k} - u(t), & du > 0, \\ u(t) - \frac{1}{k}, & du < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

avec

$$u(\xi) = e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds}, \quad du = -a(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} d\xi$$

où l'on a, d'après (1.3), $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{1}{k}$.

2°. Supposons que l'on ait

$$(1.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b, \quad a(t) \neq 0, \quad t \geq t_0.$$

En appliquant la règle de Stolz à l'équation (1.2.) on aura, sous la condition (1.5) et sous la condition que la fonction $e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$ admet la dérivée pour $t \in [t_0, \infty)$,

$$(1.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x = b.$$

¹⁾ En remplaçant la condition (1.4) par la condition $\int_{t_0}^\infty e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi = O(1)$

les solutions de l'équation (1.1) sont bornées.

²⁾ b étant un nombre fixe.

L e m m e 1.2° — L'équation (1.1) admet pour $t > t^0$, sous la condition (1.5), toutes les solutions avec la propriété (1.6.)¹⁾

3°. Supposons que l'on ait

$$(1.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b, \quad a(t) \neq 0, \quad t \geq t_0$$

Choisissons la constante C de manière que l'intégrale (1.2) prenne la forme

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{\infty}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi,$$

on obtient, d'après la règle de L'Hospital, la propriété (1.6).

L e m m e 1.3° — L'équation (1.1) admet, pour $t > t_0$, sous la condition (1.7), une solution avec la propriété (1.6).

4° Soit $a(t) = 0$, on obtient le cas du numéro 1° avec $k = 1$.

5° Soit $a(t) = r$, où r ²⁾ est un nombre réel et négatif, on obtient le cas du numéro 2°.

6° Soit $a(t) = r$, où r est un nombre réel et positif, on obtient le cas du numéro 3°.

7° Supposons que l'on ait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = r.$$

L'équation (1.1) peut être écrite sous la forme

$$(1.8) \quad \frac{dx}{dt} = rx + f(t) + \delta(t)x$$

avec

$$(1.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [a(t) - r] = 0$$

ou sous la forme de l'équation intégrale

$$(1.10) \quad x = e^{r(t-t_0)} \left[C + \int_{t_0}^t e^{-r(\xi-t_0)} f(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t e^{-r(\xi-t_0)} \delta(\xi) x d\xi \right].$$

¹⁾ Si l'on a $\int_{t_0}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi = O(1)$ au lieu $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{-a(t)} = b$, les solutions de l'équation (1.1.) sont bornées.

²⁾ Le nombre r peut être complexe $r = \rho + \theta i$.

Il faut distinguer plusieurs cas:

a) r est un nombre réel négatif ou complexe $r = \rho + \theta i$ à partie réelle $\rho < 0$.

Considérons les approximations de l'équation provenant de l'équation (1.10)

$$(1.11) \quad x_m = x_0 + e^{rt} \int_{t_0}^t e^{-r\xi} \delta(\xi) x_{m-1} d\xi$$

avec

$$(1.12) \quad x_0 = e^{r(t-t_0)} \left[C + \int_{t_0}^t e^{-r(\xi-t_0)} f(\xi) d\xi \right]$$

où x_0 est une solution asymptotique bornée, c'est-à-dire

$$(1.13) \quad |x_0| < M, \quad \text{pour } t > t_0$$

M étant une constante fixe.¹⁾

Pour $m=1$, l'équation (1.11) donne

$$|x_1 - x_0| < e^{\rho t} \int_{t_0}^t e^{-\rho\xi} |\delta(\xi)| |x_0| d\xi$$

ou, d'après (1.13),

$$(1.14) \quad |x_1 - x_0| < M e^{\rho t} \int_{t_0}^t e^{-\rho\xi} |\delta(\xi)| d\xi = M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec, d'après (1.9),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

Pour $m=2$, l'équation (1.11) donne

$$|x_2 - x_1| < e^{\rho t} \int_{t_0}^t e^{-\rho\xi} |\delta(\xi)| |x_1 - x_0| d\xi$$

d'où l'on a, d'après (1.14),

$$|x_2 - x_1| < M \varepsilon \varepsilon(t) < M \varepsilon^2,$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(1.15) \quad |x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

¹⁾ Si la fonction $f(t)$ satisfait à la condition $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \alpha$ ($\alpha =$ constante fixe), elle peut être écrite sous la forme $f(x) = \alpha + \varphi(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$. Alors l'équation (1.12) entraîne:

$$(1.a) \quad \frac{dx_0}{dt} = rx_0 + \alpha + \varphi(t), \quad (r \neq 0).$$

Si l'on pose $x_0 = y_0 + A$, où A est une constante donnée par l'équation $Ar + \alpha = 0$, l'équation

$$(1.a) \quad \frac{dy_0}{dt} = ry_0 + \varphi(t), \quad \text{c'est-à-dire, l'équation } \frac{dx_0}{dt} = rx_0 + f(t) \quad \text{avec } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$$

²⁾ En appliquant la règle de Stolz à l'inégalité (1.14).

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_m - x_{m-1}) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Puisque $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$, on peut choisir t_0 assez grand pour que l'on ait

$$(1.16) \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t) < 1.$$

Par conséquent, la série

$$(1.17) \quad x = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m - x_{m-1}),$$

d'après (1.15) et (1.16), converge uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente la solution de l'équation (1.8) avec la propriété

$$(1.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x - x_0) = 0.$$

Lemme 1.7° a) — L'équation (1.8) admet pour $t > t_0$, sous les conditions (1.9), (1.13) et (1.16), toutes les solutions avec la propriété (1.18).

b) r est un nombre réel positif ou complexe $r = \rho + \theta i$ à partie réelle $\rho > 0$.

Considérons les approximations successives de l'équation provenant de l'équation (1.10)

$$(1.19) \quad x_m = x_0 + e^{rt} \int_{\infty}^t e^{-r\xi} \delta(\xi) x_{m-1} d\xi$$

avec

$$x_0 = e^{rt} \int_{\infty}^t e^{-r\xi} f(\xi) d\xi,$$

où la solution x_0 satisfait à la condition (1.13). Pour $m=1$, l'équation (1.19) donne

$$|x_1 - x_0| < e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho\xi} |\delta(\xi)| |x_0| d\xi$$

ou, d'après (1.13)

$$(1.20) \quad |x_1 - x_0| < M e^{\rho t} \int_t^{\infty} e^{-\rho\xi} |\delta(\xi)| d\xi = M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec, d'après (1.9),

$$(1.21) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0,^{1)} \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t) < 1.$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$|x_m - x_{m-1}| < N \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_m - x_{m-1}) = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

¹⁾ En appliquant la règle de l'Hospital à l'inégalité (1.20).

La série de la forme (1.17), d'après (1.21), converge uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente la solution de l'équation (1.8) avec la propriété (1.18).

Le m m e 1.7° b) — L'équation (1.8) admet pour $t > t_0$, sous les conditions (1.9), (1.13) et (1.21), une solution avec la propriété (1.18).

c) $r = \theta i$ est un nombre imaginaire ou égal à zéro ($\theta = 0$).

Dans ce cas l'équation (1.19) devient

$$(1.22) \quad x_m = x_0 + e^{\theta i t} \int_{\infty}^t e^{-\theta i \xi} \delta(\xi) x_{m-1} d\xi$$

avec

$$x_0 = e^{\theta i t} \int_{\infty}^t e^{-\theta i \xi} f(\xi) d\xi$$

où x_0 satisfait à la condition (1.13).¹⁾ Pour $m=1$ l'équation (1.22) donne

$$|x_1 - x_0| < \int_t^{\infty} |\delta(\xi)| |x_0| d\xi$$

ou, d'après (1.13),

$$|x_1 - x_0| < M \int_t^{\infty} |\delta(\xi)| d\xi = M \varepsilon(t) < M \xi$$

avec

$$(1.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max } \varepsilon(t) < 1,$$

t_0 étant assez grand, sous la condition

$$(1.24) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} |\delta(\xi)| d\xi = 0.$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$|x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_m - x_{m-1}| = 0, \quad (= 1, 2, \dots).$$

La série de la forme (1.17), d'après (1.23) et (1.24), converge uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente une solution de l'équation (1.8) avec la propriété (1.18).

¹⁾ La solution x_0 est bornée si l'on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} e^{-\theta i \xi} f(\xi) d\xi = 0.$$

Lemme 1.7° c) — L'équation (1.8) admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (1.9), (1.13), (1.23) et (1.24), une solution avec la propriété (1.18).

Il faut remarquer que l'équation (1.1) ne change pas de forme si l'on pose

$$x = y e^{\int_{t_0}^t \varphi(s) ds},$$

c'est-à-dire, on obtient l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)$$

avec

$$A(t) = a(t) - \varphi(t), \quad B(t) = f(t) e^{-\int_{t_0}^t \varphi(s) ds}.$$

Dans ce cas, on peut étudier les propriétés différentes de la relation

$$x e^{\int_{t_0}^t \varphi(s) ds} \quad \text{pour } t \rightarrow \infty.^1)$$

2. Equation du premier ordre. — Soit donnée une équation

$$(2.1) \quad \frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t) + \varphi(t, x)$$

où $a(t)$, $f(t)$ sont des fonctions réelles et continues de la variable réelle $t > t_0$; $\varphi(t, x)$ une fonction satisfaisant aux conditions:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{a) continue et bornée pour la variable réelle } t > t_0, |x| < \infty; \\ \text{b) } \varphi(t, 0) = 0; \\ \text{c) } |\varphi(t, X) - \varphi(t, x)| < \lambda(t) |X - x|, \end{cases}$$

où $\lambda(t)$ est une fonction positive et continue de la variable réelle $t > t_0$.

Ecrivons l'équation (2.1) sous la forme de l'équation intégrale

$$(2.3) \quad x = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[C + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \varphi(\xi, x) d\xi \right]$$

et appliquons la méthode des approximations successives, en supposant que l'équation

$$\frac{dx_0}{dt} = a(t)x_0 + f(t)$$

admet la solution asymptotique bornée, c'est-à-dire

$$(2.4) \quad |x_0| < M, \quad \text{pour } t > t_0,$$

M étant un nombre fixe.

¹⁾ Concernant les résultats exposés dans le paragraphe N° 1, il faut voir les travaux de Perron [8], de Tatarkiewicz [11], de Kostin [37] et d'autres.

Il faut distinguer plusieurs cas.

1° Supposons que l'on ait

$$(2.5) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = k \neq 0, \infty, \quad (k = \text{constante}), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = 0. \end{cases}$$

L'équation (2.3) peut être écrite sous la forme

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[\int_{-\infty}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} \varphi(\xi, x) d\xi \right]^{1)}$$

d'où l'on a

$$(2.6) \quad x_m = x_0 + e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{-\infty}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} \varphi(\xi, x_{m-1}) d\xi$$

avec

$$x_0 = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[\frac{1}{k} + \int_{-\infty}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} f(\xi) d\xi \right].$$

Pour $m=1$, l'équation (2.6), d'après (2.2), donne

$$|x_1 - x_0| < e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} \lambda(\xi) |x_0| d\xi^2)$$

ou, d'après (2.4),

$$(2.7) \quad |x_1 - x_0| < M e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

¹⁾ On peut choisir la constante C de manière que la solution (2.3) prenne la forme

$$x = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[\frac{1}{k} + \int_{-\infty}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} f(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a(s) ds} \varphi(\xi, x) d\xi \right].$$

où 1 est un nombre fixe.

²⁾ $|\varphi(t, x_0)| = |\varphi(t, x_0) - \varphi(t, 0)| < \lambda(t) |x_0|$.

avec, d'après (2.5),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

Pour $m=2$, l'équation (2.6), d'après (2.2), donne

$$|x_2 - x_1| < e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \lambda(\xi) |x_1 - x_0| d\xi$$

où, d'après (2.7),

$$|x_2 - x_1| < M \varepsilon(t) < M \varepsilon^2.$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(2.8.) \quad |x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_m - x_{m-1}| = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Puisque $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$, on peut choisir t_0 assez grand pour que l'on ait

$$(2.9.) \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t) < 1.$$

Par conséquent, la série

$$(2.10.) \quad x = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m - x_{m-1}),$$

d'après (2.8.) et (2.9.), converge uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente la solution de l'équation (2.1.) avec la propriété

$$(2.11.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x - x_0| = 0.$$

Théorème 2.1°. — *Sous les conditions (2.2), (2.4), (2.5) et (2.9), l'équation (2.1) admet pour $t > t_0$, une solution avec la propriété (2.11).*

2° Supposons que l'on ait

$$(2.12.) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{-a(t)} = 0 \quad a(t) \neq 0^{1)}$$

Considérons les approximations successives de l'équation provenant de l'équation (2.3)

$$(2.13.) \quad x_m = x_0 + e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^{\xi} e^{-\int_{t_0}^s a(s) ds} \varphi(\xi, x_{m-1}) d\xi$$

¹⁾ En supposant que la fonction $e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$ admet la dérivée.

avec

$$x_0 = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left[C + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi \right].$$

Pour $m=1$, l'équation (2.13), d'après (2.2), donne

$$|x_1 - x_0| < e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \lambda(\xi) |x_0| d\xi$$

ou, d'après (2.4),

$$|x_1 - x_0| < M e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \lambda(\xi) d\xi < M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec, d'après (2.12),

$$(2.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t) < 1.$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$|x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_m - x_{m-1}| = 0, \quad (m=1, 2, \dots).$$

La série de la forme (2.10) d'après (2.14), converge uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente toutes les solutions de l'équation (2.1) avec la propriété (2.11.).

Théorème 2.2°. — *L'équation (2.1) admet pour $t > t_0$, sous les conditions (2.2), (2.4), (2.12) et (2.14), toutes les solutions avec la propriété (2.11).*

3°. Supposons que l'on ait

$$(2.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{-a(t)} = 0, \quad a(t) \neq 0, \quad t \geq t_0.$$

Considérons les approximations de l'équation provenant de l'équation (2.3)

$$(2.16) \quad x_m = x_0 + e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \varphi(\xi, x_{m-1}) d\xi$$

avec

$$x_0 = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} f(\xi) d\xi.$$

Pour $m=1$, l'équation (2.16) d'après (2.2), donne

$$|x_1 - x_0| < e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_t^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \lambda(\xi) |x_0| d\xi$$

ou, d'après (2.4),

$$|x_1 - x_0| < M e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \int_t^{\infty} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec, d'après (2.15),

$$(2.17) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t) < 1.$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$|x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_m - x_{m-1}| = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

La série de la forme (2.10) d'après (2.17), converge uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente une solution de l'équation (2.1) avec la propriété (2.11).

Théorème 2.3°. — L'équation (2.1) admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (2.2), (2.4), (2.15) et (2.17), une solution avec la propriété (2.11).

4°. Soit $a(t) = 0$. On obtient le cas du numéro 1° avec $k=1$.

5°. Soit $a(t) = r$, ou r est un nombre réel et positif. On obtient le cas du numéro 2°.

6°. Soit $a(t) = r$, ou r est un nombre réel et positif. On obtient le cas du numéro 3°.

7°. Supposons que l'on ait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = r \neq 0;$$

alors, l'équation (2.1) peut être écrite sous la forme

$$(2.18) \quad \frac{dx}{dt} = rx + f(t) + \psi(t, x)$$

avec

$$\psi(t) = \delta(t)x + \varphi(t, x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) - r = 0.$$

Le procédé de la recherche de solution asymptotique de l'équation (2.18) se ramène à un des cas du numéro 5° ou 6°.

Considérons l'équation

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + \varphi(t, e^x).$$

Si l'on pose $e^x = y$, on obtient l'équation

$$\frac{dy}{dt} = a(t)y + y\varphi(t, y) = a(t)y + \psi(t, y),$$

c'est-à-dire, on obtient l'équation (2.1) avec $f(t) \equiv 0$.

Il faut remarquer que l'équation (2.1) ne change pas de forme si l'on pose

$$x = y e^{\int_{t_0}^t \psi(s) ds},$$

c'est-à-dire, on obtient l'équation

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t) + C(t, y)$$

avec

$$A(t) = a(t) - \psi(t), \quad B(t) = f(t) e^{-\int_{t_0}^t \psi(s) ds}$$

$$C(t, y) = \varphi \left[t, y e^{\int_{t_0}^t \psi(s) ds} \right] e^{-\int_{t_0}^t \psi(s) ds}.$$

Dans ce cas on peut étudier des propriétés variées de la relation

$$x e^{-\int_{t_0}^t \psi(s) ds} \quad \text{pour } t \rightarrow \infty.$$

3. Système d'équations linéaires à coefficients constants. Soit donné un système d'équations linéaires

$$(3.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_k + f_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où \bar{a}_{ik} sont des constantes, $f_i(t)$ fonctions continues de la variable réelle $t > t_0$ et satisfaisant aux conditions

$$(3.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = 0.^1)$$

¹⁾ Si les fonctions $f_i(t)$ satisfont aux conditions $\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = b$, on peut écrire $f_i(t) = -b_i + \psi_i(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t) = 0$. Le système (3.1) alors devient

$$(3.a) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_k + b_i + \psi_i(t).$$

Si l'on pose $x_i = y_i + A_i$, où A_i sont des constantes données par les équations

$$\sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} A_k + b_i = 0 \quad \det |\bar{a}_{ik}| \neq 0,$$

le système (3.a) devient

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} y_k + \psi_i(t),$$

c'est-à-dire, on obtient le système (3.1) avec $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_i(t) = 0$.

Le système (3.1.) par les transformations linéaires à coefficients constants

$$(3.3) \quad y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} x_k \quad \text{ou} \quad x_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ik} y_k,$$

$$\det |\alpha_{ik}| \neq 0, \quad \det |\beta_{ik}| \neq 0$$

peut être ramené à la forme canonique dépendant des racines de l'équation caractéristique

$$(3.4) \quad \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Si toutes racines r_i de cette équation sont distinctes, le système (3.1), après les transformations (3.3), peut être ramené à la forme

$$\frac{dy_i}{dt} = r_i y_i + \varphi_i(t)$$

avec

$$(3.5) \quad \varphi_i(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} f_k(t), \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Si l'équation (3.4) a des racines multiples, à chaque racine multiple $r_1 = r_2 = \dots = r_p$ correspond un groupe d'équations de la forme

$$(3.6) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = r_1 y_1 + \varphi_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} = r_1 y_2 + y_1 + \varphi_2(t), \\ \dots \\ \frac{dy_p}{dt} = r_1 y_p + y_{p-1} + \varphi_p(t) \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi_i(t)$, d'après (3.2) et (3.5), satisfont aux conditions

$$(3.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

L'intégration du système (3.6) donne

$$(3.8) \quad \begin{cases} y_1 = e^{r_1(t-t_0)} \left[C_1 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_1)} \varphi_1(t) dt \right], \\ y_2 = e^{r_1(t-t_0)} \left[C_2 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_2(t) dt + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} y_1 dt \right], \\ \dots \\ y_p = e^{r_1(t-t_0)} \left[C_p + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_p(t) dt + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} y_{p-1} dt \right] \end{cases}$$

ou

$$(3.9) \quad \begin{cases} y_1 = e^{r_1(t-t_0)} \left[C_1 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_1(t) dt \right], \\ y_2 = e^{r_1(t-t_0)} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_2(t) dt + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_1(t_2-t_0)} \varphi_1(t_2) dt_2 \right] \right\}, \\ \dots \end{cases}$$

Il faut distinguer plusieurs cas.

1°. r_1 est un nombre réel négatif ou complexe $r_1 = \rho_1 + \theta_1 i$ à partie réelle $\rho_1 < 0$.

Selon la règle de Stolz et d'après (3.7), les solutions (3.9) admettent les propriétés

$$(3.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

c'est-à-dire, d'après (3.3), les solutions du système (3.1) admettent les propriétés

$$(3.11) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Lemme 3.1°. Le système (3.1) admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (3.2), toutes les solutions avec les propriétés (3.11).

2°. r_1 est un nombre réel positif ou complexe $r_1 = \rho_1 + \theta_1 i$ à partie réelle $\rho_1 > 0$.

Ecrivons les équations (3.8) sous la forme

$$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 t} \int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_1(t) dt, \\ y_2 = e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_2(t) dt + \int_{\infty}^t e^{-r_1 t} y_1 dt \right], \\ \dots \\ y_p = e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_p(t) dt + \int_{\infty}^t e^{-r_1 t} y_{p-1} dt \right] \end{cases}$$

ou

$$(3.12) \quad \begin{cases} y_1 = e^{r_1 t} \int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_1(t) dt, \\ y_2 = e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_2(t) dt + \int_{\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^{t_1} e^{-r_1 t_2} \varphi_1(t_2) dt_2 \right], \\ \dots \end{cases}$$

Il est facile à voir que les solutions (3.12) admettent, selon la règle de l'Hospital et d'après (3.7), les propriétés (3.10). Par conséquent les solutions du système (3.1) admettent, d'après (3.3), les propriétés (3.11).

Lemme 3.2.° — *Le système (3.1) admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (3.2), un système de solutions avec les propriétés (3.11).*

3° $r_1 = \theta_1 i$ est un nombre imaginaire ou égal à zéro ($\theta_1 = 0$).

Les solutions (3.12) admettent les propriétés (3.10), si, d'après (3.12), les intégrales

$$\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \cdots \int_{t_{p-1}}^\infty e^{-\theta_1 i t_p} \varphi_1(t_p) dt_p,$$

$$\int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \cdots \int_{t_{p-2}}^\infty e^{-\theta_1 i t_{p-1}} \varphi_2(t_{p-1}) dt_{p-1},$$

.....

convergent. La convergence des intégrales ci-dessus se ramène, d'après (3.5), à la convergence des intégrales

$$(3.13.) \quad \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty dt_2 \cdots \int_{t_{p-1}}^\infty e^{-\theta_1 i t_p} f_k(t_p) dt_p, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Par conséquent les solutions du système (3.1) admettent, d'après (3.3), les propriétés (3.11).

Lemme 3.3.° — *Le système (3.1) admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (3.2) et si les intégrales (3.13) convergent, un système de solutions avec les propriétés (3.11).*

Il faut procéder de la même manière pour toutes les racines de l'équation caractéristique (3.4).

Par conséquent, pour les système d'équation (3.1) où \bar{a}_{ik} sont des constantes, $f_i(t)$ fonctions intégrables pour la variable réelle $t > t_0$, avec les conditions (3.2), on aura le théorème suivant:

Théorème 3. — *Les équations (3.1) admettent pour $t > t_0$, sous les conditions (3.2), un système de solutions avec les propriétés (3.11), si pour chaque racine multiple $r_1 = r_2 = \dots = r_p = \theta_1 i$ convergent les intégrales (3.13). Ce système de solutions dépend d'un nombre des constantes arbitraires égal au nombre des racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives de l'équation caractéristique (3.4).*

Il faut remarquer que le système (3.1) ne change pas de forme si l'on pose

$$x_i = z_i e^{\lambda t}, \quad (\lambda = \text{constante});$$

c'est-à-dire, on obtient le système

$$\frac{dz_i}{dt} = (\bar{a}_{ii} - \lambda) z_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \bar{a}_{ik} z_k + f_i(t) e^{-\lambda t}$$

pour l'étude des propriétés des relations

$$x_i e^{-\lambda t} \text{ pour } t \rightarrow \infty.$$

Il est évident que le théorème 3. est valable pour une équation linéaire d'ordre n

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \bar{a}_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \bar{a}_{n-1} \frac{dx}{dt} + \bar{a}_n x = f(t)$$

sachant qu'elle peut être ramenée au système d'équations de la forme (3.1).

4. Système d'équations du premier ordre. — Soit donné un système d'équations

$$(4.1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + f_i(t) + F_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

ou sous la forme

$$(4.2) \quad \frac{dx_i}{dt} = a_{ii}(t) x_i + f_i(t) + \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

avec

$$(4.3) \quad \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}(t) x_k + F_i(t, x_1, \dots, x_n),$$

où $a_{ii}(t)$ sont des fonctions réelles et continues de la variable réelle $t > t_0$, $f_i(t)$ fonctions continues de la variable réelle $t > t_0$; fonctions $\Phi_i(t, x_1, \dots, x_n)$ satisfont aux conditions

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) continuées et bornées pour la variable réelle } t > t_0, |x_i| < \infty \\ \text{b) } \Phi_i(t, 0, \dots, 0) = 0; \\ \text{c) } |\Phi_i(t, X_1, \dots, X_n) - \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n)| < \lambda(t) \left[\sum_{k=1}^n |X_k - x_k| \right] \end{array} \right.$$

où $\lambda(t)$ est une fonction positive et continue pour la variable réelle $t > t_0$.

Ecrivons le système (4.2) sous la forme des équations intégrales

$$(4.5) \quad \begin{aligned} x_i = e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} & \left[C_i + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} f_i(\xi) d\xi + \right. \\ & \left. + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \Phi_i(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi \right] \end{aligned}$$

et appliquons la méthode des approximations successives en supposant que les équations

$$\frac{dx_i^0}{dt} = a_{ii}(t) x_i^0 + f_i(t)$$

admettent les solutions asymptotiques bornées, c'est-à-dire

$$(4.6) \quad |x_i^0| < M, \quad \text{pour } t > t_0,$$

M étant un nombre fixe.

Il faut distinguer plusieurs cas:

1° Supposons que l'on ait

$$(4.7) \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} = k_i \neq 0, \infty & (k_i = \text{constantes}) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^\xi a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = 0 \end{cases}$$

et considérons les approximations successives du système provenant du système (4.5)¹⁾

$$(4.8) \quad x_1^m + x_i^0 + e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^\xi a_{ii}(s) ds} \Phi_i(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi$$

avec

$$x_i^0 = e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \left[\frac{l_i}{k_i} + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^\xi a_{ii}(s) ds} f_i(\xi) d\xi \right].$$

Pour $m=1$, le système (4.8), d'après (4.4), donne

$$|x_1^1 - x_i^0| < e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_t^\infty e^{-\int_{t_0}^\xi a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi$$

¹⁾ En choisissant les constantes C_i de la manière que l'on ait

$$C_i + \int_t^\infty e^{-\int_{t_1}^\xi a_{ii}(s) ds} \left[f_i(t) + \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) \right] dt = \frac{l_i}{k_i},$$

l_i sont des nombres fixes.

ou, d'après (4.6) et (4.7),

$$(4.9) \quad |x_i^1 - x_i^0| < nM e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^{\xi} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = nM \varepsilon_i(t) < M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0,^{1)} \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

Pour $m=2$, le système (4.8), d'après (4.4) et (4.9), donne

$$|x_i^2 - x_i^1| < Mn^2 \varepsilon \varepsilon_i(t) < Mn^2 \varepsilon \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^2.$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(4.10) \quad |x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon_i(t) < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Si l'on a

$$(4.11) \quad n\varepsilon < 1,$$

les séries

$$(4.12) \quad x_i = x_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_i^m - x_i^{m-1})$$

d'après (4.10) et (4.11), convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représentent les solutions des équations (4.2) satisfaisant aux conditions

$$(4.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - x_i^0) = 0$$

Théorème 4.1°. — *Les équations (4.2) admettent pour $t > t_0$, sous les conditions (4.4), (4.6), (4.7) et (4.11), un système des solutions avec les propriétés (4.13).*

2°. Supposons que l'on ait

$$(4.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{-a_{ii}(t)} = 0, \quad a_{ii}(t) \neq 0, \quad t \geq t_0$$

Il faut considérer les approximations successives du système provenant du système (4.5)

$$(4.15) \quad x_i^m = x_i^0 + e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^{\xi} e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \Phi_i(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi$$

¹⁾ $\varepsilon(t) = \text{Max}_{i=1, 2, \dots, n} \varepsilon_i(t)$.

avec

$$x_i^0 = e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \left[C_i + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} f_i(\xi) d\xi \right].$$

Pour $m=1$, le système (4.15), d'après (4.4), donne

$$|x_i^1 - x_i^0| < e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi$$

ou, d'après (4.6) et (4.14)

$$|x_i^1 - x_i^0| < nM e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = nM \varepsilon_i(t) < nM \varepsilon(t) < Mn \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(4.16) \quad |x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon_i(t) < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Si l'on a

$$(4.17) \quad n\varepsilon < 1,$$

les séries de la forme (4.12), d'après (4.16) et (4.17), convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représentent les solutions des équations (4.2) satisfaisant aux relations (4.13).

Théorème 4.2° — Les équations (4.2) admettent pour $t > t_0$, sous les conditions (4.4), (4.6), (4.14) et (4.17) toutes les solutions avec les propriétés (4.13).

3°. Supposons que l'on ait

$$(4.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{-a_{ii}(t)} = 0, \quad a_{ii}(t) \neq 0, \quad t \geq t_0.$$

Il faut considérer les approximations successives du système provenant du système (4.5)

$$(4.19) \quad x_i^m = x_i^0 + e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \Phi_i(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi$$

avec

$$x_i^0 = e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} f_i(\xi) d\xi.$$

Pour $m=1$, le système (4.19), d'après (4.4), donne

$$|x_i^1 - x_i^0| < e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi$$

ou, d'après (4.6) et (4.18),

$$|x_i^1 - x_i^0| < nM e^{\int_{t_0}^t a_{ii}(s) ds} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\xi} a_{ii}(s) ds} \lambda(\xi) d\xi = nM \varepsilon_i(t) < nM \varepsilon(t) < Mn \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(4.20) \quad |x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} (\varepsilon_i(t) < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0, \quad (m=1, 2, \dots).$$

Si l'on a

$$(4.21) \quad n\varepsilon < 1$$

les séries de la forme (4.12), d'après (4.20) et (4.21), convergent uniformément pour $t \geq t_0$, t_0 étant assez grand et *représentent les solutions des équations (4.2) satisfaisant aux relations (4.13)*.

Théorème 4.3° — *Les équations (4.2) admettent pour $t \geq t_0$, sous les conditions (4.4), (4.6) (4.18) et (4.21) un système des solutions avec les propriétés (4.13).*

Il faut bien remarquer que nous avons supposé que tous les coefficients $a_{ii}(t)$ ($i=1, 2, \dots, n$) du système (4.2) satisfont à la même condition, c'est-à-dire, l'une des conditions désignées par les numéros 1°, 2° et 3°. Mais on peut avoir tous les trois cas en même temps, c'est-à-dire, chaque coefficient $a_{ii}(t)$ satisfait à l'une des conditions désignées par les numéros 1°, 2° et 3°. Cela sera une combinaison de tous les trois cas et les résultats des recherches sont les mêmes.

4°. Supposons que les coefficients $a_{ik}(t)$ des équations (4.1.) satisfont aux conditions

$$(4.22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_{ik}(t) = \bar{a}_{ik} \quad (i, k=1, 2, \dots, n), \quad \bar{a}_{ik} = \text{const.}$$

Le système (4.1) peut être écrite sous la forme

$$(4.23) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_k + f_i(t) + \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

avec

$$(4.24) \quad \begin{cases} \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(t) x_k + F_i(t, x_1, \dots, x_n) \\ \delta_{ik}(t) = a_{ik}(t) - \bar{a}_{ik}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_{ik}(t) = 0. \end{cases}$$

Si toutes les racines de l'équation caractéristique (3.4) sont distinctes, le système (4.23) se ramène, par les transformations (3.3), à la forme canonique

$$\frac{dy_i}{dt} = r_i y_i + \varphi_i(t) + \Psi_i(t, y, \dots, y_n)$$

où les fonctions $\varphi_i(t)$ sont données par les formules (3.5); les fonctions $\Psi_i(t, y_1, \dots, y_n)$, d'après (3.3), (4.4) et (4.24), satisfont aux conditions:

$$(4.25) \quad \begin{cases} a_1) \text{ continues et bornées pour la variable réelle } t > t_0, |y_i| < \infty \\ b_1) \Psi_i(t, 0, \dots, 0) = 0 \\ c_1) |\Psi_i(t, Y_1, \dots, Y_n) - \Psi_i(t, y_1, \dots, y_n)| < \mu(t) \left[\sum_{k=1}^n |Y_k - y_k| \right] \end{cases}$$

où $\mu(t)$ est une fonction positive et intégrable pour la variable réelle $t > t_0$, satisfaisant à la condition

$$(4.26) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = 0.$$

Si l'équation caractéristique (3.4) a des racines multiples; à chaque racine multiple $r_1 = r_2 = \dots = r_p$ correspond un groupe d'équations de la forme

$$(4.27) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = r_1 y_1 + \varphi_1(t) + \Psi_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dt} = r_1 y_2 + y_1 + \varphi_2(t) + \Psi_2(t, y_1, \dots, y_n), \\ \dots \\ \frac{dy_p}{dt} = r_1 y_p + y_{p-1} + \varphi_p(t) + \Psi_p(t, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Considérons les approximations successives des équations ci-dessus

$$\begin{aligned} \frac{dy_1^m}{dt} &= r_1 y_1^m + \varphi_1(t) + \Psi_1(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}), \\ \frac{dy_2^m}{dt} &= r_1 y_2^m + y_1^m + \varphi_2(t) + \Psi_2(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) \\ &\dots \\ \frac{dy_p^m}{dt} &= r_1 y_p^m + y_{p-1}^m + \varphi_p(t) + \Psi_p(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) \end{aligned}$$

ou sous la forme des équations intégrales

$$\begin{aligned}
 y_1^m &= e^{r_1(t-t_0)} \left[C_1 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_1(t) dt + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \Psi_1(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt \right], \\
 y_2^m &= e^{r_1(t-t_0)} \left[C_2 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_2(t) dt + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} y_1^m dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \Psi_2(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt \right], \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

ou

$$(4.28) \quad \left\{ \begin{aligned}
 &y_1^m = e^{r_1(t-t_0)} \left[C_1 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_1(t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \Psi_1(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt \right], \\
 &y_2^m = e^{r_1(t-t_0)} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_2(t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_1(t_2-t_0)} \varphi_1(t_2) dt_2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_1(t_2-t_0)} \Psi_1(t_2, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt_2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \Psi_2(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt \right\} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \right.$$

et appliquons la méthode des approximations successives en supposant que les équations

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1^0}{dt} &= r_1 y_1^0 + \varphi_1(t), \\
 \frac{dy_2^0}{dt} &= r_1 y_2^0 + y_1^0 + \varphi_2(t), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \frac{dy_p^0}{dt} &= r_1 y_p^0 + y_{p-1}^0 + \varphi_p(t)
 \end{aligned}$$

admettent un système de solutions asymptotiques bornées, c'est-à-dire

$$(4.29) \quad |y_i^0| < M, \quad \text{Pour } t \geq t_0, \quad (i = 1, \dots, p)$$

M étant un nombre fixe.

Il faut distinguer plusieurs cas:

a) r_1 est nombre réel négatif ou complexe $r_1 = \rho_1 + \theta_1 i$ à partie réelle $\rho_1 < 0$.

Le système (4.28) peut être écrit sous la forme

$$(4.30) \quad \begin{cases} y_2^m = y_1^0 + e^{r_1 t} \int_{t_0}^t e^{-r_1 t} \Psi_1(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt, \\ y_2^m = y_2^0 + e^{r_1 t} \left[\int_{t_0}^t e^{-r_1 t} \Psi_2(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_1 t_2} \Psi_1(t_2, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt_2 \right] \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} y_1^0 &= e^{r_1(t-t_0)} \left[C_1 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_1(t) dt \right], \\ y_2^0 &= e^{r_1(t-t_0)} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t e^{-r_1(t-t_0)} \varphi_2(t) dt + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{-r_1(t_2-t_0)} \varphi_1(t_2) dt_2 \right] \right\}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Pour $m = 1$, le système (4.30), d'après (4.25), donne

$$\begin{aligned} |y_1^1 - y_1^0| &< e^{\rho_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\rho_1 t} \mu(t) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt, \\ |y_2^1 - y_2^0| &< e^{\rho_1 t} \left\{ \int_{t_0}^t e^{-\rho_1 t} \mu(t) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_1 t_2} \mu(t_2) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt_2 \right\}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

ou, d'après (4.23),

$$(4.31) \quad \begin{cases} |y_1^1 - y_1^0| < nM e^{\rho_1 t} \int_{t_0}^t e^{-\rho_1 t} \mu(t) dt = Mn \varepsilon_1(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon, \\ |y_2^1 - y_2^0| < nM e^{\rho_1 t} \left[\int_{t_0}^t e^{-\rho_1 t} \mu(t) dt + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} e^{-\rho_1 t_2} \mu(t_2) dt_2 \right] \\ = Mn \varepsilon_2(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

avec, d'après (4.26),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)^{1)} = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

Pour $m=2$, le système (4.30), d'après (4.26) et (4.31), donne

$$\begin{aligned} |y_1^2 - y_1^1| &< Mn^2 \varepsilon \varepsilon_1(t) < Mn^2 \varepsilon \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^2, \\ |y_2^2 - y_2^1| &< Mn^2 \varepsilon \varepsilon_2(t) < Mn^2 \varepsilon \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(4.32) \quad |y_i^m - y_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon_i(t) < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^m - y_i^{m-1}| = 0, \quad (m=1, 2, \dots).$$

Si l'on a

$$(4.33) \quad n\varepsilon < 1$$

les séries de la forme (4.12), d'après (4.32) et (4.33) convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand et représentent les solutions des équations (4.27) satisfaisant aux relations

$$(4.34) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_i - y_i^0) = 0, \quad (i=1, 2, \dots, p).$$

b) r_1 est un nombre relatif positif ou complexe $r = \rho_1 + \theta_1 i$ à partie réelle $\rho_1 > 0$.

Pour cela le système (4.28) peut être écrit sous la forme

$$(4.35) \quad \begin{cases} y_1^m = y_1^0 + e^{r_1 t} \int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \Psi_1(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt, \\ y_2^m = y_2^0 + e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \Psi_2(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt + \right. \\ \quad \left. + \int_{\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^t e^{-r_2 t_2} \Psi_1(t_2, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt_2 \right] \\ \dots \end{cases}$$

¹⁾ $\varepsilon(t) = \text{Max}_{i=1, 2, \dots, p} \varepsilon_i(t)$

avec

$$y_1^0 = e^{r_1 t} \int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_1(t) dt$$

$$y_2^0 = e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^t e^{-r_1 t} \varphi_2(t) dt + \int_{\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^{t_1} e^{-r_1 t_2} \varphi_1(t_2) dt_2 \right],$$

Pour $m=1$, le système (4.35.), d'après (4.25.), donne

$$|y_1^1 - y_1^0| < e^{\rho_1 t} \int_t^{\infty} e^{-r_1 t} \mu(t) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt,$$

$$|y_2^1 - y_2^0| < e^{\rho_1 t} \left\{ \int_t^{\infty} e^{-\rho_1 t} \mu(t) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt + \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\rho_1 t_2} \mu(t_2) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt_2 \right\},$$

ou, d'après (4.29),

$$|y_1^1 - y_1^0| < nM e^{\rho_1 t} \int_t^{\infty} e^{-r_1 t} \mu(t) dt = Mn \varepsilon_1(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

$$|y_2^1 - y_2^0| < nM e^{\rho_1 t} \int_t^{\infty} e^{-\rho_1 t} \mu(t) dt + \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} e^{-\rho_1 t_2} \mu(t_2) dt_2 = Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

avec, d'après (4.26),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$(4.36) \quad |y_i^m - y_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon_i(t) < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m \quad (i=1, \dots, p)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^m - y_i^{m-1}| = 0, \quad (m=1, 2, \dots).$$

Si l'on a

$$(4.33) \quad n\varepsilon < 1$$

les séries de la forme (4.12), d'après (4.36) et (4.33) convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente les solutions des équations (4.27) satisfaisant aux relations (4.34).

c) r_1 est un nombre imaginaire $r_1 = \theta_1 i$ ou égal à zéro ($\theta_1 = 0$).
Le système (4.35) devient alors

$$(4.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1^m = y_1^0 + e^{\theta_1 i t} \int_{\infty}^t e^{-\theta_1 i t} \Psi_1(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt, \\ y_2^m = y_2^0 + e^{\theta_1 i t} \left[\int_{\infty}^t e^{-\theta_1 i t} \Psi_2(t, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt + \right. \\ \quad \left. + \int_{\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^{t_1} e^{-\theta_1 i t_2} \Psi_1(t_2, y_1^{m-1}, \dots, y_n^{m-1}) dt_2 \right], \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} y_1^0 &= e^{\theta_1 i t} \int_{\infty}^t e^{-\theta_1 i t} \varphi_1(t) dt, \\ y_2^0 &= e^{\theta_1 i t} \left[\int_{\infty}^t e^{-\theta_1 i t} \varphi_2(t_2) dt + \int_{\infty}^t dt_1 \int_{\infty}^{t_1} e^{-\theta_1 i t_2} \varphi_1(t_2) dt_2 \right], \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Pour $m=1$, le système (4.37), d'après (4.25), donne

$$\begin{aligned} |y_1^1 - y_1^0| &< \int_t^{\infty} \mu(t) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt_1, \\ |y_2^1 - y_2^0| &< \int_t^{\infty} \mu(t) \left[\sum |y_k^0| \right] dt + \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \mu(t_2) \left[\sum_{k=1}^n |y_k^0| \right] dt_2, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ou, d'après (4.29)

$$\begin{aligned} |y_1^1 - y_1^0| &< nM \int_t^{\infty} \mu(t) dt = nM \varepsilon_1(t) < nM \varepsilon(t) < Mn \varepsilon, \\ |y_2^1 - y_2^0| &< nM \int_t^{\infty} \mu(t) dt + \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \mu(t_2) dt_2 = Mn \varepsilon_2(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} (t),$$

sous les conditions

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} \mu(t) dt &= 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} \mu(t_2) dt_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Les conditions ci-dessus se ramènent à la condition

$$(4.38) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} dt_1 \int_{t_1}^{\infty} dt_2 \cdots \int_{t_{p-1}}^{\infty} \mu(t_p) dt_p = 0$$

pour une racine multiple $r_1 = r_2 = \cdots = r_p$. En continuant ainsi de suite, on aura

$$(4.39) \quad |y_i^m - y_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon_i(t) < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m \quad (i = 1, \dots, p)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i^m - y_i^{m-1}| = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Si l'on a

$$(4.33) \quad n\varepsilon < 1$$

les séries de la forme (4.12), d'après (4.39) et (4.33) convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente les solutions des équations (4.27) satisfaisant aux relations (4.34), sous les conditions (4.38).

Il faut procéder de la même manière pour toutes les racines de l'équation caractéristique (3.4).

Si toutes les équations de la forme (4.27) admettent pour $t > t_0$ les solutions satisfaisant aux relations (4.34), les équations (4.23) admettent pour $t > t_0$, d'après, (3.3), les solutions satisfaisant aux relations

$$(4.40) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - x_i^0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \beta_{ik} y_k - \sum_{k=1}^n \beta_{ik} y_k^0 \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Par conséquent, pour les équations (4.23) nous avons le théorème suivant:

Théorème 4.4. — *Les équations (4.23) admettent, pour $t > t_0$, un système des solutions avec les propriétés (4.40), sous les conditions (4.25), (4.26), (4.29) et (4.33) et sous les conditions (4.38) pour chaque racine multiple $r_1 = r_2 = \cdots = r_p = \theta_i$ de l'équation caractéristique (3.4). Ce système dépend d'un nombre de constantes arbitraires égal au nombre de racines réelles négatives ou complexes à parties réelles négatives de l'équation caractéristique (3.4).*

Pour étudier l'existence et les propriétés asymptotiques de solutions des équations linéaires à coefficients variables, il faut poser $F_i(t, x_1, \dots, x_n) = 0$, et les équations (4.1) et (4.23) deviennent les équations linéaires

$$(4.41) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + f_i(t), \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_{ik} x_k + f_i(t) + \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(t) x_k$$

où l'on a, d'après (4.3) et (4.24),

$$\Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik} x_k, \quad \Phi_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \delta_{ik}(t) x_k.$$

Par conséquent, le système d'équations linéaires (4.41) est un cas particulier des équations (4.1) et (4.23) pour $F_i(t, x_1, \dots, x_n) = 0$, et tous les

résultats obtenus pour les systèmes (4.1) et (4.23) sont valables pour le système linéaire (4.41).

Considérons le système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(t) + F_i(t, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}).$$

Si l'on pose $e^{x_i} = z_i$, on aura

$$\frac{dz_i}{dt} = a_i(t) z_i + z_i F_i(t, z_1, \dots, z_n) = a_i(t) z_i + \Phi_i(t, z_1, \dots, z_n),$$

c'est-à-dire, on obtient le système (4.1) avec $f_i(t) \equiv 0$.

Il faut remarquer que le système (4.1) ne change pas de forme si l'on pose

$$x_i = z_i e^{\int_{t_0}^t \psi(t) dt};$$

c'est-à-dire, on obtient le système

$$\begin{aligned} \frac{dz_i}{dt} = & [a_{ii}(t) - \psi(t)] z_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n a_{ik}(t) z_k + f_i(t) e^{-\int_{t_0}^t \psi(t) dt} + \\ & + F_i[t, z_1 e^{\int_{t_0}^t \psi(t) dt}, \dots, z_n e^{\int_{t_0}^t \psi(t) dt}] e^{\int_{t_0}^t \psi(t) dt} \end{aligned}$$

5. Quelques équations spéciales. — 1°. Considérons l'équation spéciale

$$(5.1) \quad \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} x + f(t),$$

où $f(t)$ est une fonction continue et $\varphi(t)$ une fonction positive, monotone, admettant la dérivée continue de la variable réelle $t > t_0$.

Ecrivons l'équation (5.1) sous la forme

$$(5.2) \quad x = e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left[C + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^s \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f(\xi) d\xi \right]^2$$

¹⁾ Concernant les résultats exposés dans le paragraphe № 4, il faut voir les travaux d'autres auteurs cités dans „Index bibliographique“ et surtout les travaux de Perron [8], de Tatariewicz [11] et de Костин [37].

²⁾ L'équation (5.1) avec le signe + et — donne

$$x = \varphi(t) \left[C_1 + \int_{t_0}^t \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi \right], \quad C_1 = \frac{C}{\varphi(t_0)}; \quad x = \frac{1}{\varphi(t)} \left[C_2 + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) f(\xi) d\xi \right],$$

$$C_2 = C \varphi(t_0), \quad \varphi(t_0) > 0.$$

Il faut distinguer plusieurs cas:

a) Supposons que l'on ait

$$(5.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} f(\xi) d\xi = 0.$$

L'équation (5.2) avec le signe + laquelle peut admettre une solution asymptotique bornée pour $t > t_0$ est de la forme

$$(5.4) \quad x = -\varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi$$

d'où l'on a, d'après (5.3) et d'après la seconde formule de la moyenne,

$$(5.6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x = 0.$$

Il faut remarquer que la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} f(t) dt = 0$$

peut être remplacée par les conditions

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t) dt = O(1), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)f(t)}{\varphi'(t)} = 0,$$

Théorème 5.1°. a) L'équation (5.2) avec le signe + admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (5.3), une solution avec la propriété (5.6).

b) Supposons que l'on ait

$$(5.7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)f(t)}{\varphi'(t)} = l, 2)$$

L'équation (5.2) avec le signe — devient alors

$$(5.8) \quad x = \frac{1}{\varphi(t)} \left[C_2 + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) f(\xi) d\xi \right]$$

d'où l'on a, d'après (5.7) et d'après la règle de Stolz,

$$(5.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x = l.$$

¹⁾ En choisissant la constante C_1 de la manière que l'on ait

$$C_1 + \int_{t_0}^{\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} dt = 0.$$

²⁾ $l =$ constante fixe.

Il faut remarquer que la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)f(t)}{\varphi'(t)} = l,$$

peut être remplacée par la condition

$$\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t)f(t) dt = O(1)$$

et l'équation (5.8) admet la propriété (5.6).

Théorème 5.1°. b) *L'équation (5.2) avec le signe — admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (5.7), toutes les solutions avec la propriété (5.9).*

c) Supposons que l'on ait

$$(5.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)f(t)}{\varphi'(t)} = l.$$

L'équation (5.2) avec le signe + devient alors

$$(5.11) \quad x = \varphi(t) \left[C_1 + \int_{t_0}^t \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi \right]$$

d'où l'on a, d'après (5.10) et d'après la règle de Stolz,

$$(5.12) \quad \lim x = -l.$$

Il faut remarquer que la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)f(t)}{\varphi'(t)} = l,$$

peut être remplacée par la condition

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{f(t)}{\varphi(t)} dt = O(1)$$

et l'équation (5.11) admet la propriété (5.6).¹⁾

Théorème 5.1°. c) *L'équation (5.2) avec le signe + admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (5.10), toutes les solutions avec la propriété (5.12).*

d) Supposons que l'on ait

$$(5.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} f(\xi) d\xi = 0.$$

¹⁾ Ce cas est au fond le cas du numéro b).

L'équation (5.2) avec le signe — devient alors l'équation (5.8). Mais l'équation laquelle peut admettre une solution asymptotique bornée, est de la forme

$$x = -\frac{1}{\varphi(t)} \int_t^{\infty} \varphi(\xi) f(\xi) d\xi$$

d'où l'on a, d'après (5.13) et d'après la seconde formule de la moyenne, la propriété (5.6).

Il faut remarquer que la condition

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} f(t) dt = 0$$

peut être remplacée par les conditions

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t) dt = O(1), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)f(t)}{\varphi'(t)} = 0, {}^1)$$

Théorème 5.1°. d) — L'équation (5.2) avec le signe — admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (5.13), une solution avec la propriété (5.6).

2°. Considérons l'équation

$$(5.14) \quad \frac{dx}{dt} = \pm \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} x + f(t) + \psi(t, x),$$

où $f(t)$ est une fonction continue et $\varphi(t)$ une fonction positive, monotone, admettant la dérivée continue de variable réelle $t \geq t_0$, $\varphi(t, x)$ une fonction satisfaisant aux conditions

$$(5.15) \quad \begin{cases} \alpha) \text{ continue et bornée de la variable réelle } t \geq t_0, |x| < \infty; \\ \beta) \psi(t, 0) = 0; \\ \gamma) |\psi(t, X) - \psi(t, x)| < \lambda(t) |X - x|, \end{cases}$$

où $\lambda(t)$ est une fonction positive et intégrable de la variable réelle $t \geq t_0$.

Ecrivons l'équation (5.14) sous la forme de l'équation intégrale

$$(5.16) \quad x = e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left[C + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^s \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^s \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \psi(\xi, x) d\xi \right]$$

et appliquons la méthode des approximations successives en supposant que l'équation

$$\frac{dx_0}{dt} = \pm \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} x_0 + f(t).$$

¹⁾ Ce cas est au fond le cas du numéro a).

admet la solution asymptotique bornée, c'est-à-dire

$$(5.17) \quad |x_0| < M, \quad \text{pour } t > t_0.$$

Il faut distinguer plusieurs cas :

a) Supposons que l'on ait

$$(5.18) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\infty} \lambda(\xi) d\xi = 0.^{1)}$$

L'équation (5.16) avec le signe +, laquelle peut admettre une solution asymptotique bornée, pour $t > t_0$, est de la forme

$$x = -\varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi - \varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{\psi(\xi, x)}{\varphi(\xi)} d\xi$$

d'où l'on a

$$(5.19) \quad x_m = x_0 - \varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{\psi(\xi, x_{m-1})}{\varphi(\xi)} d\xi$$

avec

$$x_0 = -\varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi.$$

Pour $m=1$, on aura, d'après (5.15), (5.17) et (5.18),

$$(5.20) \quad |x_1 - x_0| < \varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} |x_0| d\xi < M \varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{\lambda(t)}{\varphi(t)} dt < M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

Pour $m=2$, l'équation (5.19), d'après (5.15), (5.17) et (5.20), donne

$$|x_2 - x_1| < \varphi(t) \int_t^{\infty} \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} |x_1 - x_0| d\xi < M \varepsilon \varepsilon(t) < M \varepsilon^2.$$

En continuant ainsi de suite, on obtient

$$|x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} (\varepsilon(t) < M \varepsilon^m)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_m - x_{m-1}| = 0.$$

Si l'on a

$$(5.21) \quad \varepsilon < 1$$

¹⁾ Ou $\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = O(1)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) \lambda(t)}{\varphi'(t)} = 0$.

la série

$$(5.22) \quad x = x_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_m - x_{m-1})$$

convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente une solution de l'équation (5.16) avec le signe + et avec la propriété

$$(5.23) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x - x_0) = 0.$$

Théorème 5.2°. a) — L'équation (5.16) avec le signe + admet, pour $t > t_0$, sous les conditions (5.15), (5.17), (5.18) et (5.21), une solution avec la propriété (5.23).

b) Supposons que l'on ait

$$(5.24) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)\lambda(t)}{\varphi'(t)} = 0, \text{)}$$

L'équation (5.16) avec le signe — devient alors

$$(5.25) \quad x = \frac{1}{\varphi(t)} \left[C_1 \text{)} + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) f(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \psi(\xi, x) d\xi \right]$$

d'où l'on a

$$(5.26) \quad x_m - x_0 = \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \psi(\xi, x_{m-1}) d\xi$$

avec

$$x_0 = \frac{1}{\varphi(t)} \left[C_1 + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) f(\xi) d\xi \right].$$

Pour $m = 1$, l'équation (5.26), d'après (5.15), (5.17) et (5.24), donne

$$|x_1 - x_0| < \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \lambda(\xi) |x_0| d\xi < M \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \lambda(\xi) d\xi = M \varepsilon(t) < M \varepsilon$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on aura

$$|x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_m - x_{m-1}| = 0.$$

1) Ou $\int_{t_0}^{\infty} \varphi(t) \lambda(t) dt = O(1)$.

2) $C_1 = C \varphi(t_0)$, $\varphi(t_0) > 0$.

Si l'on a

$$(5.25) \quad \varepsilon < 1$$

la série de la forme (5.22) converge uniformément pour $t \geq t_0$, t_0 étant assez grand, et représente toutes les solutions de l'équation (5.16) avec le signe — et avec la propriété (5.23).

Théorème 5.2°. b) *L'équation (5.16) avec le signe — admet pour $t \geq t_0$, sous les conditions (5.15), (5.17), (5.24) et (5.25), toutes les solutions avec la propriété (5.23).*

c) Supposons que l'on ait

$$(5.26) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)\lambda(t)}{\varphi'(t)} = 0,^{1)}$$

L'équation (5.16) avec le signe + devient alors

$$x = x_0 + \varphi(t) \int_{t_0}^t \frac{\psi(\xi, x)}{\varphi(\xi)} d\xi$$

avec

$$x_0 = \varphi(t) \left[C_1 + \int_{t_0}^t \frac{f(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi \right]$$

d'où l'on a, d'après (5.15), (5.17) et (5.26)

$$|x_m - x_{m-1}| < M \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M \varepsilon^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) \int_{t_0}^t \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi = 0,$$

$$(5.27) \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) < 1$$

Théorème 5.2°. c) — *L'équation (5.16) avec le signe + admet pour $t \geq t_0$, sous les conditions (5.15), (5.17), (5.26) et (5.27), toutes les solutions avec la propriété (5.23).²⁾*

d) Supposons que l'on ait

$$(5.28) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \lambda(\xi) d\xi = 0.^{3)}$$

1) Ou $\int_{t_0}^\infty \frac{\lambda(t)}{\varphi(t)} dt = O(1)$.

2) Ce cas est au fond le cas du numéro b)

3) Ou $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)\lambda(t)}{\varphi'(t)} = 0$, $\int_{t_0}^\infty \lambda(t) dt = O(1)$.

Ecrivons les équations (6.1) sous la forme des équations intégrales :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left\{ C_1 + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_1(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \psi_1(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi \right\}, \\
 x_2 &= e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_2(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} x_1(\xi) d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \psi_2(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi \right\},
 \end{aligned}$$

.....
ou sous la formes

$$\begin{aligned}
 (6.3) \quad \left\{ \begin{aligned}
 x_1 &= e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left\{ C_1 + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_1(\xi) d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \psi_1(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi \right\}, \\
 x_2 &= e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_2(\xi) d\xi + \right. \\
 &\quad + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mp \int_{t_0}^{t_2} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_1(t_2) dt_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mp \int_{t_0}^{t_2} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \psi_1(t_2, x_1, \dots, x_n) dt_2 \right] + \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \psi_2(\xi, x_1, \dots, x_n) d\xi \right\},
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

.....

et appliquons la méthode des approximations successives en supposant que les équations

$$\begin{aligned}
 x_1^0 &= e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left\{ C_1 + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_1(\xi) d\xi \right\}, \\
 x_2^0 &= e^{\pm \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t e^{\mp \int_{t_0}^{\xi} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f_2(\xi) d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \int_{t_0}^{t_1} e^{\mp \int_{t_0}^{t_2} \frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} ds} f(t_2) dt_2 \right] \right\}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

admettent les solutions asymptotiques bornées, c'est-à-dire

$$(6.4) \quad |x_i^0| < M, \quad \text{pour } t > t_0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Il faut distinguer plusieurs cas:

1°. Supposons que l'on ait

$$(6.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \xi^{n-1}(\xi) d\xi = 0.$$

Les équations (6.3) avec le signe +, lesquelles peuvent admettre un système de solutions asymptotiques bornées, sont de la forme

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1^0 - \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\psi_1(\xi, x_1, \dots, x_n)}{\varphi(\xi)} d\xi, \\
 x_2 &= x_2^0 - \varphi(t) \left\{ \int_t^\infty \frac{\psi_2(\xi, x_1, \dots, x_n)}{\varphi(\xi)} d\xi - \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \frac{\psi_1(t_2, x_1, \dots, x_n)}{\varphi(t_2)} dt_2 \right\}, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

avec

$$x_1^0 = -\varphi(t) \int_t^\infty \frac{f_1(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi, ^1)$$

¹⁾ Pour $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty$, l'existence des solutions asymptotiques bornées des équations ci-dessus est assurée, si l'on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \xi^{n-t} f_t(\xi) d\xi = o(1)$, $(i = 1, \dots, n)$.

$$x_2^0 = -\varphi(t) \left\{ \int_t^\infty \frac{f_2(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi - \int_t^\infty dt_2 \int_{t_1}^\infty \frac{f_1(t_2)}{\varphi(t_2)} dt_2 \right\},$$

.....

Considérons les équations

$$x_1^m = x_1^0 - \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\psi_1(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1})}{\varphi(\xi)} d\xi$$

$$x_2^m = x_2^0 - \varphi(t) \left\{ \int_t^\infty \frac{\psi_2(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1})}{\varphi(\xi)} d\xi - \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \frac{\psi_1(t_2, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1})}{\varphi(t_2)} dt_2 \right\},$$

.....

Pour $m=1$, on aura, d'après (6.2), (6.4), (6.5) et d'après la seconde formule de la moyenne,

$$|x_1^1 - x_1^0| < \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi < nM \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} = Mn \varepsilon_1(t),$$

$$|x_2^1 - x_2^0| < \varphi(t) \int_t^\infty \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi + \varphi(t) \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \frac{\lambda(t_2)}{\varphi(t_2)} \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] dt_2 <$$

$$< Mn \left[\varphi(t) \int_t^\infty \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi + \varphi(t) \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \frac{\lambda(t_2)}{\varphi(t_2)} dt_2 \right] < Mn \varepsilon_2(t_2),$$

.....

$$|x_1^1 - x_1^0| < Mn \varepsilon_1(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

$$|x_2^1 - x_2^0| < Mn \varepsilon_2(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

.....

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0,^{1)} \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on obtient

$$|x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n; \quad m=1, 2, \dots).$$

¹⁾ $\varepsilon(t) = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t), \quad (i=1, 2, \dots, n).$

Si l'on a

$$(6.7) \quad n \varepsilon < 1$$

les séries

$$(6.8) \quad x_i = x_i^0 + \sum_{m=1}^{\infty} (x_i^m - x_i^{m-1})$$

convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représentent les solutions des équations (6.1) avec le signe + satisfaisant aux relations

$$(6.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (x_i - x_i^0) = 0.$$

Théorème 6.1°. — *Les équations (6.1) avec le signe + admettent, pour $t > t_0$, sous les conditions (6.2), (6.4), (6.5), et (6.7), un système des solutions avec les propriétés (6.9).*

2°. Supposons que l'on ait

$$(6.10) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty, \quad \int_{t_0}^{\infty} \xi^{n-1} \varphi(\xi) \lambda(\xi) d\xi = O(1).$$

Considérons les approximations successives du système provenant du système (6.3) avec le signe —

$$(6.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^m = x_1^0 + \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \psi_1(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi, \\ x_2^m = x_2^0 + \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \psi_2(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t_2) \psi_1(t_2, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) dt_2 \right\}, \\ \dots \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ C_1 + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) f_1(\xi) d\xi \right\}, \\ x_2^0 &= \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t \varphi(\xi) f_2(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t_2) f_1(t_2) dt_2 \right] \right\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

1) Pour $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = +\infty$ l'existence des solutions asymptotiques bornées des équations ci-dessus est assurée, si l'on a

$$\int_{t_0}^{\infty} \xi^{n-i} \varphi(\xi) f_i(\xi) d\xi = O(1) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Pour $m=1$, les équations (6.11), d'après (6.2), (6.4) et (6.10) donnent

$$|x_1^1 - x_1^0| < \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi < Mn \frac{1}{\varphi(t)} \int_{t_0}^t \varphi(t) \lambda(t) dt = \\ = Mn \varepsilon_1(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

$$|x_0^1 - x_2^0| < \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t_2) \lambda(t_2) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] dt_2 \right\} < \\ < Mn \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_{t_0}^t \varphi(\xi) \lambda(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t_2) \lambda(t_2) dt_2 \right\} < Mn \varepsilon_2(t),$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on obtient

$$|x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0,$$

$$(6.12) \quad n\varepsilon < 1.$$

Les séries de la forme (6.8), d'après (6.12), convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représente les solutions des équations (6.1) avec le signe — satisfaisant aux relations (6.9).

Théorème 6.2°. *Les équations (6.1) avec le signe — admettent pour $t > t_0$, sous les conditions (6.2), (6.4), (6.10) et (6.12), toutes les solutions avec les propriétés (6.9).*

3°. Supposons que l'on ait

$$(6.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \int_{t_0}^{\infty} \frac{t^{n-1} \lambda(t)}{\varphi(t)} dt = O(1).$$

Les approximations successives du système provenant du système (6.3) avec le signe + deviennent alors

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^m - x_1^0 = \varphi(t) \int_{t_0}^t \frac{\psi_1(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1})}{\varphi(\xi)} d\xi, \\ x_2^m - x_2^0 = \varphi(t) \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\psi_2(\xi, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1})}{\varphi(\xi)} d\xi + \right. \\ \left. + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\psi_1(t_2, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1})}{\varphi(t)} dt_2 \right\}, \\ \dots \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} x_1^0 &= \varphi(t) \left[C_1 + \int_{t_0}^t \frac{f_1(t_2)}{\varphi(t_2)} dt_2 \right], \\ x_2^0 &= \varphi(t) \left\{ C_2 + \int_{t_0}^t \frac{f_2(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi + \int_{t_0}^t dt_1 \left[C_1 + \int_{t_0}^{t_1} \frac{f_1(\xi)}{\varphi(\xi)} dt_2 \right] \right\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Pour $m=1$, on aura, d'après (6.2), (6.4), (6.13),

$$\begin{aligned} |x_1^1 - x_1^0| &< \varphi(t) \int_{t_0}^t \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi < Mn \varphi(t) \int_{t_0}^t \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi = Mn \varepsilon_1(t) < \\ &< Mn \varepsilon(t) Mn \varepsilon, \\ |x_2^1 - x_2^0| &< \varphi(t) \left\{ \int_{t_0}^t \frac{\lambda(\xi)}{\varphi(\xi)} \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\lambda(t_2)}{\varphi(t_2)} dt_2 \right\} < Mn \varepsilon_2(t) < \\ &< Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon, \\ &\dots \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on obtient

$$|x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m$$

¹⁾ Pour $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$ l'existence des solutions asymptotiques bornées de équations

ci-dessus est assurée, si l'on a $\int_{t_0}^{\infty} \frac{t^{n-t} f_i(t)}{\varphi(t)} dt = O(1)$.

avec

$$(6.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0, \quad n \varepsilon < 1.$$

Les séries de la forme (6.8), d'après (6.15), convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représentent les solutions des équations (6.1) avec le signe + satisfaisant aux relations (6.9).

Théorème 6.3°. — *Les équations (6.1) avec le signe + admettent, pour $t > t_0$, sous les conditions (6.2), (6.4), (6.13) et (6.15), toutes les solutions avec les propriétés (6.9).¹⁾*

4°. Supposons que l'on ait

$$(6.16) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \xi^{n-1} \lambda(\xi) d\xi = 0.$$

Les approximations successives des équations (6.3) avec le signe —, lesquelles peuvent admettre un système des solutions asymptotiques bornées, sont de la forme

$$(6.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^m = x_1^0 - \frac{1}{\varphi(t)} \int_t^\infty \varphi(\xi) \varphi_1(t, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi, \\ x_2^m = x_2^0 - \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_t^\infty \varphi(\xi) \psi_1(t, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) d\xi - \right. \\ \quad \left. - \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \varphi(t_2) \psi_1(t_2, x_1^{m-1}, \dots, x_n^{m-1}) dt_2 \right\}, \\ \dots \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} x_1^0 &= -\frac{1}{\varphi(t)} \int_t^\infty \varphi(\xi) f_1(\xi) d\xi, ^2) \\ x_2^0 &= -\frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_t^\infty \varphi(\xi) f_2(\xi) d\xi + \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \varphi(t_2) f_1(t_2) dt_2 \right\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

¹⁾ Ce cas est au fond le cas du numéro 2°.

²⁾ Pour $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$, l'existence des solutions asymptotiques bornées des équations ci-dessus est assurée, si l'on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \xi^{n-t} f_i(\xi) d\xi = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

Pour $m = 1$, on aura, d'après (6.2), (6.4), (6.16) d'après la seconde formule de la moyenne, pour les équations (6.17),

$$|x_1^1 - x_1^0| < \frac{1}{\varphi(t)} \int_t^\infty \varphi(\xi) \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi < \frac{Mn}{\varphi(t)} \int_t^\infty \varphi(\xi) \lambda(\xi) d\xi < Mn \varepsilon_1(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

$$|x_2^1 - x_2^0| < \frac{1}{\varphi(t)} \left\{ \int_t^\infty \varphi(\xi) \lambda(\xi) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] d\xi + \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \varphi(t_2) \lambda(t_2) \left[\sum_{k=1}^n |x_k^0| \right] dt_2 \right\} < \frac{Mn}{\varphi(t)} \left\{ \int_t^\infty \varphi(\xi) \lambda(\xi) d\xi + \int_t^\infty dt_1 \int_{t_1}^\infty \varphi(t_2) \lambda(t_2) dt_2 \right\} < Mn \varepsilon_2(t) < Mn \varepsilon(t) < Mn \varepsilon,$$

.....

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0, \quad \varepsilon = \text{Max}_{t \geq t_0} \varepsilon(t).$$

En continuant ainsi de suite, on obtient

$$|x_i^m - x_i^{m-1}| < Mn^m \varepsilon^{m-1} \varepsilon(t) < M(n\varepsilon)^m$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i^m - x_i^{m-1}| = 0, \quad n\varepsilon < 1. \tag{6.18}$$

Les séries de la forme (6.8) d'après (6.18), convergent uniformément pour $t > t_0$, t_0 étant assez grand, et représentent les solutions des équations (6.1) avec le signe — satisfaisant aux relations (6.9)¹⁾

Théorème 6.4°. — *Les équations (6.1) avec le signe — admettent pour $t > t_0$, sous les conditions (6.2), (6.4), (6.16) et (6.18), un système de solutions avec les propriétés (6.9).*

Il faut remarquer que l'on peut étudier d'autres propriétés asymptotiques des équations considérées.

7. Quelques résultats d'autres auteurs. — Premières études sur les solutions asymptotiques des équations différentielles appartiennent à *Poincaré* [1]. Après *Poincaré* beaucoup de mathématiciens ont repris à étudier le comportement asymptotiques des solutions des équations différentielles ordinaires. Par exemple, *A. Kneser* [2], *J. Horn* [3], *W. Jacobsthal* [4], *L. Schlesinger* [5], *E.*

¹⁾ Ce cas est au fond le cas du numéro 1°.

Picard [6] et d'autres. La plupart de mathématiciens cités plus haut, ont cherché les solutions des équations différentielles sous la forme des séries asymptotiques. *E. Cotton* [7] a utilisé la méthode des approximations successives pour démontrer l'existence des solutions asymptotiques d'un système spécial des équations différentielles. Dans son Mémoire remarquable: *Общая задача об устойчивости движения*, 1892, *A. M. Ляпунов* a étudié en détail la théorie de la stabilité du mouvement de système des équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

en donnant la définition de la solution stable et de même, de la solution stable asymptotiquement. *Poincaré* [1] et puis *Perron* [8] ont étudié quelques propriétés asymptotiques de l'équation

$$y^{(n)} + f_1(t) y^{(n-1)} + \dots + f_n(t) y = 0$$

et de même du système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n f_{ik}(t) x_k$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = \bar{a}_i, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_{ik}(t) = \bar{a}_{ik}.$$

Il faut encore mentionner les résultats de *Perron* [8] et de *Späth* [9] concernant les équations

$$y^{(n)} + f_1(t) y^{(n-1)} + \dots + f_n(t) y = f(t)$$

avec

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_i(t) = \bar{a}_i, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = b.$$

Pour l'étude de l'équation ci-dessus, *Späth* [9] a utilisé la méthode des approximations successives. Enfin *Perron* [8] a traité les équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + \varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

et donné les résultats intéressants. *T. Peyovitch* [10] a étudié l'existence et les propriétés asymptotiques à partir de l'équation

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + f(t)$$

jusqu'au système d'équations

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_k + f_i(t) + \varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)$$

K. Tatarkiewicz [11] a traité quelques propriétés asymptotiques du système d'équations

$$\dot{x} - Ax = h(x, t) + g(x, t) + f(t)$$

et généralisé certains résultats de *Perron et Peyovitch*, et puis il a étudié les propriétés asymptotiques de l'équation

$$x^{(n)} = a_n(t) x^{(n-1)} + \dots + a_2(t) x' + a_1(t) x + d(t, x_1, x_1', \dots, x^{(n-1)}) + f(t)$$

et particulièrement l'équation linéaire du second ordre. *M. Hukuharo* [12] a considéré en détail les propriétés asymptotiques du système d'équations linéaires généralisant quelques-uns de résultats de *F. Lettenmeyer* [13], *Späth* [9], *Peyovitch* et d'autres auteurs. Il faut bien citer les résultats de *T. Wazewski* [14] concernant les solutions asymptotiques des équations différentielles ordinaires en se basant de la méthode topologique et de la théorie de rétracte, dont il est le créateur. Beaucoup de mathématiciens ont utilisé la méthode de *Wazewski* pour démontrer certaines propriétés asymptotiques du système des équations.¹⁾ Les propriétés asymptotiques des équations différentielles ordinaires ont été étudiées par plusieurs mathématiciens. Par exemple *R. Bellman* [15], *N. Lewinson* [16], *L. Cesari* [17], *G. Ascoli* [18], *S. Lojasiewicz* [19], *R. Nardini* [20], *J. Haag* [21], *P. Hariman* [22], *W. M. Starzynski* [23], *Z. Szmydt* [24], *A. Winter* [25], *R. E. Vinograd* [26], *G. Sansone* [27], *W. Wasow* [28], *O. Haupt* [29], *H. A. Antonsiewicz* [30], *H. Weyl* [31], *R. Caccioppoli* [32], *Н. Я. Лященко* [33], *S. Faedo* [34], et beaucoup d'autres mathématiciens se sont occupés de ce problème. *M. Bertolino* [35] a consacré plusieurs travaux à la recherche des équations différentielles. Par exemple, il a étudié les solutions bornées et de même, les solutions tendant vers des limites bien déterminées, lorsque la variable indépendante augmente infiniment. En traitant ces problèmes-ci, il a utilisé les inégalités différentielles et particulièrement les inégalités du type de *Tchaplignine* (*Чайлигин*, С. А.) pour encadrer les solutions considérées par les solutions des équations des comparaisons. En plus, il a appliqué la méthode de rétracte de *Wazewski* pour déterminer „les tuyaux“ dans lesquels se trouvent les solutions asymptotiques des équations considérées, où se manifestent aussi les inégalités différentielles. Les équations dont il s'est occupé, sont de la forme

$$y' = \varphi(x) y^n + \psi(x, y), \quad y' = \prod_{i=1}^n [y - \varphi_i(x)],$$

$$y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(x) y^i}{\sum_{i=0}^m b_i(x) y^i}, \quad y' = \frac{\prod_{j \in A} [y - \varphi_j(x)]^{\alpha_j}}{\prod_{i \in B} [y - \varphi_i(x)]^{\alpha_i}},$$

$$y'' = + a(x) y' + b(x) y = f(x)$$

¹⁾ Voir le livre de Lamberto Cesari intitulé: *Asymptotic behaviour and stability problems in ordinary differential equations* ou plutôt la traduction de ce livre: „Асимптотическое поведение и устойчивость решения обыкновенных дифференциальных уравнений“.

et ainsi de suite, en considérant leurs propriétés différentes. *O. Rakić* [36] a considéré les propriétés asymptotiques des équations de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) e^{\lambda_k(x_k)}.$$

A. B. Коси́ин [37] a traité l'existence et les propriétés asymptotiques du système d'équations

$$\frac{dy_i}{dt} = q_i(t) + \sum_{k=1}^n p_{ik}(t) y_k + X(t, y_1, \dots, y_n), \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Beaucoup de mathématiciens se sont occupés du problème de la stabilité des solutions des équations. Ce problème est lié intimement avec le problème des solutions asymptotiques des équations. Par exemple, *I. M. Panonop* [38], *B. A. Плисе* [39], *Н. Н. Красовский* [40], *Е. А. Барбашии* [41], *И. Г. Малкин* [42], *Н. Г. Чемаев* [43], *К. П. Персидский* [44], *Н. П. Ерушии* [45], *В. П. Демидович* [46] et beaucoup d'autres ont contribué à la théorie de stabilité et de même au comportement asymptotique des solutions des équations différentielles.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE¹⁾

- [1] Poincaré, H. — a) *American Journal of Mathematics*, vol. VII (1885); b) *Acta Mathematica*, t. 8 (1886); c) *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, 1982.
- [2] Kneser, A. — a) *Crelles Journal*, Bd. 116, 117, 120, b) *Mathematische Annalen*, Bd. 49; c) *Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung*, 1905.
- [3] Horn, J. — a) *Crelles Journal*, Bd. 118; b) *Mathematische Annalen*, Bd. 49, 50; c) *Acta Mathematica*, t. 23, 24; d) *Archiv der Mathematik*, Bd. 4 (3. Reihe).
- [4] Jacobstahl, W. — *Mathematische Annalen*, Bd. 56.
- [5] Schlesinger, L. — a) *Mathematische Annalen*, Bd. 63; b) *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, 1908.
- [6] Picard, E. — a) *Traité d'Analyse*, t. III.; b) *C. R. Acad. Sci.* t. 15, Paris.
- [7] Cotton, E. — a) *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, t. 28 (1911); b) *Mem. Act. Sci.* 28 (1928), Herman, Paris; c) *C. R. Acad. Sci.* Paris, 1911.
- [8] Perron, O. — a) *Crelles Journal*, Bd. 142 (1912), 143 (1913); b) *Math. Zeitschrift*, Bd. 1 (1918), 6 (1920), 17 (1923), 29 (1928), 32 (1930).
- [9] Späth, H. — a) *Acta mathematica*, t. 51 (1928); b) *Math. Zeitschrift*, Bd. 30 (1929).
- [10] Peyovitch, T. — a) *Publ. math. Univ. de Belgrade*, t. 1 (1932), Belgrade; b) *Bull. Soc. math. France*, t. 61 (1933), Paris; c) *Bull. Sci. math.* t. 58 (1934), Paris; d) *C. R. du 2^e Congrès des mathématiciens des Pays Slaves*, 64 (1935), Praha; e) *C. R. Acad. Sci.* t. 208, № 13 (1939), Paris; f) *Revue scientifique*, 84 (1946), Paris; g) *Publ. Inst. Math.* t. I (1947), Belgrade; h) *Глас САХ*, т. 96 (1948), Beograd; i) *Premier congrès des mathématiciens et physiciens de Yougoslavie*, 1949, Naučna knjiga, 2 (1951), Belgrade; j) *Soc. des math. et phys. de SR Serbie*, Naučna knjiga, 1952, Belgrade; k) *Bull. Soc. des math. et phys. de SR Serbie*, IX, 3—4, (1957), XIV (1962), Belgrade;²⁾ l) *Boll. Unione mat. Italiana*, (3) vol. 15 (1960) Bologna; m) *Funkcialaj Ekvacioj (Sera internacia)*, vol. 9, № 1—3 (1966), Tokyo; n) *Diferencijalne jednačine egzistencija rešenja*, Zavod za izd. udžbenika (1968), Beograd.
- [11] Tatariewicz, K. — *Ann. UMCS, Sec. A*, 7 (1953), 8 (1954), Lublin (Pologne).
- [12] Hukuhara, M. — a) *J. Fac. Sci. Univ. Hokkaido* (1), Math. 2 (1934—1936); b) *Mem. Fac. Sci., Kyushu Imp. Univ.*, A. (1941—1942), 3 (1949); c) *Mem. Fac. Eng. Kyushu Imp. Univ.*, 8 (1934); d) *Proc. Imp. Acad., Tokyo* (avec Nagumo).
- [13] Lettenmeyer, F. — *Sitzungsber. Akad., München, Math.-naturwiss.* 1930.
- [14] Ważewski, T. — a) *Rend. Accad. Lincei* (8), 3 (1947); b) *Ann. Soc. Pol. Math.*, 20 (1948); c) *C. R. Soc. Sci. Lett., Varsovie*, 40 (1944), 41 (1948), 42 (1949); d) *Stud. Math.* 10 (1948); e) *Bull. Acad. Polon. Sci.*, (1949), 1 (1953); f) *Ann. mat. pura appl.*, 49 (1960).
- [15] Bellman, R. — a) *Duke Math. J.*, vol. 10 (1943), 14 (1947); b) *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62 (1947), 64 (1948); c) *Ann. of Math.*, 49 (1948), 50 (1949); d) *Annali mat. pura appl.*, 31 (1950); e) *Stability Theory of Differential Equations*, New York, 1953.

1) La liste des noms des auteurs est rangée d'après leurs travaux chronologiques.

2) Le titre de cet article est: Le développement historique sur les solutions asymptotiques des équations différentielles²⁾, où se trouve presque toute la bibliographie concernant cette question (en serbo-croate).

- [16] Levinson, N. — a) *Ann. Math.* (2), 45 (1944); b) *Amer. J. Math.*, 68 (1946); c) *Duke Math. J.*, 15 (1948); d) *Colloq. Math.*, 2 (1949).
- [17] Cesari, L. — *Annali Scuola Norm. Sup., Pisa* (2), 3 (1940), 9 (1940); b) *Rend. Sem. Mat. Univ. Roma* (4), 3 (1940); c) *Asymptotic behaviour and stability in ordinary differential equations*, 1959, Berlin.¹⁾
- [18] Ascoli, G. — a) *Rend. Acad. Lincei* (6), 22 (1935); b) *Annali Scuola Norm. Sup., Pisa* (3), 5 (1951); c) *Rend. Sem. Mat. Fis., Milano*, 22 (1952); d) *Boll. Unione Mat. Ital.*, (3), 8 (1953); e) *Riv. Mat. Univ. Parma*, 4 (1953); f) *Rev. Mat., fis., Univ. Tucuman*, 2 (1941); g) *Scritti mat. offerti a L. Berzolari*, (1936).
- [19] Lojasiewicz, S. — a) *Ann. Polon. Math.*, 1 (1954); b) *Ann. Soc. Polon. Math.*, 24, № 2 (1951).
- [20] Nardini, L. — *Rend. Acad. Lincei* (8), 7 (1949), (8), 16.
- [21] Haag, J. — a) *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., Paris*, (3), 60 (1943), (3), 61 (1944); b) *Bull. Sci. Math.*, (2), 74 (1950).
- [22] Hartman, P. — *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948).
- [23] Staržinski, W. M. — *Prikl. Mat. Meh.*, 16 (1952), 17 (1953).
- [24] Szymdt, Z. — *Ann. Pol. Math.*, 2 (1955).
- [25] Winter, A. — *Amer. J. Math.*, 68 (1946), 69 (1947), 71 (1949), 76 (1954).
- [26] Виноград, Р. Э. — а) *ДАН, СССР*, 84 (1952), 85 (1952), 91 (1953); б) *ПММ*, 17 (1953); в) *УМН*, 9, 2 (1954).
- [27] Sansone, G. — a) *Atti 2. Congr. Unione Mat. Ital.*, Bologna, 1940; b) *Rend. Sem. Mat. Fis., Milano*, 15 (1941); c) *Rend. Mat., Univ. Roma* (5), 10 (1951); d) *Equationi differenziali nel campo reale*, Bologna, 1949.
- [28] Wasow, W. — a) *J. math. Phys.*, 23 (1944); b) *Matematiche, Catania*, 10 (1955).
- [29] Haupt, O. — *Math. Zeitschrift*, 48 (1942).
- [30] Antosiewicz, N. A. — *J. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1954) (avec Davis, P.).
- [31] Weyl, H. — *Amer. J. Math.* 68 (1946).
- [32] Caccioppoli, R. — a) *Rend. Accad. Lincei*, (6), 11 (1930); b) *Rend. Accad. Italia*, (7), 3 (1942) avec A. Ghizzetti.
- [33] Лященко, Н. Я. — а) *ДАН, СССР*, 96 (1954), (3) 97 (1954), 104 (1955); б) *УМЖ*, 7 (1955).
- [34] Faedo, S. — *Annali Mat. pura appl.* (4) 23 (1944), (4) 25 (1946), 26 (1947).
- [35] Bertolino, M. — а) *Vesnik Društva mat. i fiz. NRS*, IX, 1—2, 3—4 (1957), X (1958), XIII (1961), XV (1963), Belgrade; б) *Mat. vesnik*, 1 (16) (1964), 2 (17) (1965), 3 (18) (1966), 4 (19) (1967), 5 (20) (1968), Beograd; в) *Annali mat. pura appl.* (IV), vol. LXVII, Bologna.
- [36] Rakić, O. — *Vesnik Društva mat. i fiz. NRS*, 1958, Beograd.
- [37] Костин, А. В. — *Дифференциальные уравнения*, том 1, вып. 5, 1965, Одесский Университет.
- [38] Рапапорт, И. М. — *О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений*, Киев, 1954.
- [39] Плис, В. А. *Некоторые проблемы теории устойчивости*, Ленинград, 1958.
- [40] Красовский, Н. Н. — *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Москва, 1959.
- [41] Барбошин, Е. А. — *Введение в теорию устойчивости*, Москва, 1967.
- [42] Малкин, И. Г. — *Теория устойчивости движения*, Москва-Ленинград, 1952.
- [43] Четаев, Н. Н. — *Устойчивость движения*, Москва, 1955.
- [44] Персидский, К. П. — *ПММ*, 12 (1948).
- [45] Еругин, Н. П. — *ПММ*, 2 (1948), 5 (1950), 15 (1951), 16 (1952).
- [46] Демидович, Б. П. — *Лекций по математической теории устойчивости*, Москва, 1967.

1) Ou plutôt sa traduction russe: „Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений“

TABLE DES MATIÈRES

	Page
1. Equation linéaire du premier ordre	9
2. Equation du premier ordre	15
3. Système d'équations linéaires à coefficients constants	20
4. Système d'équations du premier ordre	24
5. Quelques équations spéciales	36
6. Système des équations spéciales	43
7. Quelques résultats d'autres auteurs	51
8. Index bibliographique.....	55

MILORAD BERTOLINO

INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES ET L'ANALYSE
QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES
ORDINAIRES

CHAPITRE I

INTRODUCTION

Nous allons donner dans cette étude plusieurs résultats concernant les estimations des solutions d'équations différentielles ordinaires dans l'intervalle fini, mais la plupart des théorèmes a pour le sujet l'existence des solutions asymptotiques (solutions asymptotiquement bornées). La solution $y = y(x)$ d'une équation différentielle est dite *solution asymptotique* (solution asymptotiquement bornée), si elle satisfait aux conditions suivantes: 1° elle est définie dans $[x_0, +\infty)$; — 2° il existe un nombre réel $M > 0$ tel que $|y(x)| < M$ pour $x > x_0$. On établit, dans plusieurs cas, l'existence d'une limite fixe c telle qu'on ait $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = c$.

Presque tous les résultats sont obtenus par l'application des inégalités différentielles. Notamment, pour l'équation $y' = f(x, y)$ la plus simple inégalité différentielle qui intervient est, premièrement, l'inégalité $f(x, y) > 0$ ($f(x, y) < 0$) donnant les domaines de croissance (décroissance) des solutions. L'équation $f(x, y) = 0$ n'est que l'ensemble de points stationnaires. Cet ensemble, dans les cas convenables, peut jouer le rôle d'une solution approximative. Ces inégalités différentielles élémentaires furent utilisées habilement par le célèbre mathématicien serbe *Michel Petrovitch*, dont les travaux [30]—[36] surtout [35] nous donnèrent l'inspiration dans l'étude directe des solutions d'équations différentielles. Michel Petrovitch s'est occupé beaucoup d'*encadrement* de la solution par deux courbes (l'une inférieure et l'autre supérieure) dont le comportement offre des conclusions correspondantes concernant la solution en question. Cet encadrement est beaucoup considéré dans la présente étude.

Les suivantes inégalités différentielles figurant dans nos procédés sont celles provenant des travaux de *S. A. Tchaplguine* et de ses successeurs. Nous avons démontré ([58]) la priorité de Michel Petrovitch concernant le théorème fondamental de Tchaplguine sur les inégalités différentielles du premier ordre, ce qui ne diminue pas essentiellement le grand rôle de Tchaplguine dans la théorie d'inégalités différentielles et d'analyse qualitative. Les inégalités tchapli-guiniennes offrent la possibilité d'encadrer la solution inconnue par deux courbes plus faciles à considérer.

Les inégalités différentielles interviennent essentiellement aussi dans l'application de *la méthode de rétracte* due à *Tadeusz Wazewski*, tellement présente dans notre étude. La construction des ensembles ω , Z , S paraissant

dans cette méthode est étroitement liée aux inégalités différentielles, comme nous le verrons.

Tadya Peyovitch a donné plusieurs résultats (voir [37]—[40]) concernant les solutions asymptotiques, appliquant toujours la méthode des approximations successives. Les résultats de Peyovitch précèdent dans un certain sens à la méthode de rétracte, par l'alternative bien visible y figurant: "au moins une solution asymptotique", "toutes les solutions asymptotiques". Nous avons donné quelques modifications des résultats de Peyovitch. Les modifications des résultats de K. *Tatarkiewicz* et de E. *Kamke* sont aussi présentes.

Les formes des équations considérées sont différentes, souvent accomodées à la méthode appliquée, mais assez générales. Parmi les équations des formes connues on y trouve des équations suivantes: l'équation générale linéaire du second ordre, les équations d'*Abel*, *Weber*, *Bessel*, *Riccati*, *Whittaker*, l'équation radiale ondulatoire, l'équation hypergéométrique dégénérée etc. Parmi les autres équations nous ne citons que les équations de la forme suivante:

$$y' = \varphi(x) y^n + \psi(x, y),$$

$$y' = \prod_{i=1}^n (y - \varphi_i(x)),$$

$$y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(x) y^i}{\sum_{i=0}^m b_i(x) y^i},$$

$$y' = \frac{\prod_{j \in A} (y - \varphi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod_{i \in B} (y - \varphi_i(x))^{\alpha_i}},$$

A, B étant deux permutations des nombres naturels sans éléments communs, telles que l'on a $A \cup B = \{1, 2, \dots, m\}$; $A \cap B = \emptyset$; α_i, α_j — les nombres naturels.

Remarquons que, dans la plupart des travaux concernant les solutions asymptotiques, figure la forme:

$$y' = \varphi(x) y + \psi(x, y)$$

donnant "la linéarisation" du problème. Dans la présente étude cette forme est rarement traitée, quoique elle figure aussi. Les cas non-linéaires sont données dans les formes variées, citées déjà en avance.

Nous avons essayé, par la notion de "solution approximative presque stable" de lier nos considérations aux problèmes de stabilité de solutions.

La notion de "zone d'influence" qualitative contient un essai de sortir du domaine des solutions asymptotiques et de donner un aspect plus large d'analyse qualitative.

Tous nos résultats particuliers figurant dans cette étude sont publiés dans nos travaux [43]—[60].

L'étude offre une synthèse et une systématisation de ces résultats.

Le chapitre II contient des résultats provenant d'application des équations comparatives obtenues par la méthode de Tchapligrine. Les passages de ce chapitre concernent les équations particulières.

Le chapitre III contient des résultats provenant de l'application de la méthode de rétracte, où les équations tchapligriniennes ne sont pas exclues. Les passages de ce chapitre concernent les équations particulières.

Le chapitre IV contient la notion de "solution approximative presque stable". Quoique très court, il figure indépendamment, donnant un commentaire général, d'un certain point de vue, de tout ce qui précède.

Le chapitre V, traitant "zone d'influence qualitative", donne, particulièrement, l'analyse de l'équation

$$y^m + y'^n = f(x).$$

Les démonstrations sont courtes, impliquant la connaissance de la théorie générale d'existence de solutions des équations différentielles ordinaires. Souvent, les démonstrations sont omises. Parmi les théorèmes d'existence relatifs aux équations du premier ordre nous ne citerons qu'un, utilisé très souvent:

Étant donnée l'équation

$$y' = f(x, y),$$

($f(x, y)$ continue dans tout le plan xy y satisfaisant la condition de Lipschitz dans chaque région bornée), par chaque point (x_0, y_0) , passe une et seulement une solution prolongeable à l'infini (soit dans l'intervalle $[x_0, +\infty)$, soit dans l'intervalle $[x_0, x_1)$ — la droite $x = x_1$ étant une asymptote verticale de la solution en question (voir [7]).

CHAPITRE II

APPLICATIONS D'INÉGALITÉS DE TCHAPLIGRINE

II 1. UNE QUESTION DE PRIORITÉ

S. A. Tchapligrine a publié, en 1919, son mémoire bien connu „Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений“ (l'édition temporaire NKPS, Moscou, 1919), y donnant son théorème fondamental concernant les inégalités différentielles du premier ordre, le théorème concernant les inégalités de l'ordre arbitraire, ainsi qu'une certaine application

dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Il souligne que le théorème sur les inégalités différentielles du premier ordre a lieu sans égard à la „limite d'application“, compliquant la question dans le cas des inégalités de l'ordre supérieur. C'est à cause de cela que Tchapliguine donne un rôle bien visible au cas du premier ordre. En 1919—1920 il publie encore trois travaux: „Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда“, „Интегрирование основных уравнений баллистики при законе сопротивления данном Лоренцом“, „Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка“. Il développe sa théorie surtout dans le dernier article, y donnant sa célèbre méthode, permettant d'encadrer la solution par une suite de courbes, obtenues intégrant les équations linéaires, d'une convergence très rapide.

Ces articles furent publiés en commun sous le titre „Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений“ (Труды ЦАГИ им. Н. Е. Жуковского, в. 130 (1932) ainsi que, sous le même titre dans l'édition *Классики естествознания*, Москва-Ленинград 1950, ([2]) sans compter les éditions des oeuvres choisies de Tchapliguine ([1], [3]).

Le théorème de Tchapliguine sur les inégalités différentielles du premier ordre est le suivant:

Étant donnée l'équation

$$(\alpha) \quad \frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0$$

et soit $t = t(x)$ une fonction avec les propriétés suivantes:

$$1^\circ \quad t_0 = y_0 \text{ pour } x = x_0$$

$$2^\circ \text{ partout dans } (x_0, X) \text{ on a } \frac{dt}{dx} - f(x, t) > 0;$$

supposons encore que dans cet intervalle l'intégrale y et la fonction t n'ont pas de points singuliers. Pour toutes x , plus grandes que x_0 et ne dépassant pas X , on aura

$$t > y.$$

(Pour l'inégalité $\frac{dt}{dx} - f(x, t) < 0$ on obtient $t < y$).

Le théorème équivalent, qu'on cite très souvent ([4], [5], [6] sous le titre de Tchapliguine est le suivant:

Soit donnée une région ouverte Ω , et deux fonctions $f_1(x, y)$, $f(x, y)$ continues dans cette région, y satisfaisant à l'une des conditions d'unicité des solutions des équations

$$(\beta) \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Soit dans cette région $f_1(x, y) < f(x, y)$. Étant $y_1(x)$, $y(x)$ respectivement les

solutions des équations (β) avec $y_1(x_0) = y(x_0) = y_0$, on aura

$$y_1(x) < y(x)$$

pour $x > x_0$, dans Ω .

(Il s'ensuit de $f_1(x, y) < f(x, y)$ qu'on a, ($u(x)$ étant une solution de $\frac{du}{dx} = f(x, u)$, avec $u(x_0) = y_0$) $\frac{du}{dx} > f_1(x, u)$. Au contraire, sous l'hypothèse $\frac{du}{dx} > f(x, u)$, soit $f_1(x, y)$ une fonction telle qu'on a $\frac{du}{dx} = f_1(x, u)$. On aura, donc, $f_1(x, u) > f(x, u)$).

Or, ce théorème équivalent a donné le mathématicien serbe Mihailo (Michel) Petrovitch en 1899, c'est-à-dire vingt ans avant Tchapliguine, Dans son travail „Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre“ (Mathematische Annalen LIV Band, 3. Heft, pp 417—436, 1899) ([31])

Petrovitch écrit: „Soient

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

$$(5) \quad \frac{du}{dx} = F_1(x, u)$$

$$(6) \quad \frac{dv}{dx} = F_2(x, v)$$

trois équations données. Traçons dans le plan (x, y) les courbes D limitant les régions de ce plan, où chacune des fonctions

$$(7) \quad F(x, y) - F_1(x, y)$$

$$(8) \quad F(x, y) - F_2(x, y)$$

considérée comme fonction de x et y , garde un signe constant et soient Δ_1 et Δ_2 la région positive et négative du plan par rapport à la fonction (7), Ω_1 et Ω_2 la région positive et négative du plan par rapport à la fonction (8).

Traçons également dans le plan (x, y) toutes les courbes, lieux géométriques des singularités des fonctions F, F_1, F_2 et appelons E l'ensemble de ces courbes.

Soit (x_0, y_0) un point n'appartenant à aucune des courbes D, E et qui se trouve dans la partie Π du plan, commune à deux régions Δ_i, Ω_k de signes contraires. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les régions Δ_1, Ω_2 . Désignons par y, u, v les intégrales respectives (ou les branches d'intégrales) de (4), (5), (6), qui pour $x = x_0$ prennent la valeur commune $u_0 = v_0 = y_0$.

Il existera toujours de part et d'autre de la valeur $x = x_0$ un intervalle d'étendue non nulle, p. ex. de $x = x_0 - h_1$ à $x = x_0 + h_2$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° x variant de $x_0 - h_1$ à $x_0 + h_2$ les deux fonctions u et v et leurs dérivées premières sont déterminées et continues;

2° aucune partie des courbes D, E ne se trouve dans l'intérieur ni sur la périphérie du contour Γ , formé par les courbes u, v et les deux droites $x = x_0 - h_1; x = x_0 + h_2$ et ce contour se trouve tout entier dans la partie Π du plan (x, y) .

On démontre alors le résultat suivant:

Lorsque x varie de $x_0 - h_1$ à $x_0 + h_2$, l'intégrale y sera constamment déterminée, finie, continue et comprise entre les valeurs correspondantes de u et v .

C'est vraiment, le contenu du théorème de Tchapliguine.

Dans la suite, Petrovitch donne la démonstration, où l'on voit clairement que le problème de la „limite d'application“ dans le cas du premier ordre ne se pose pas. Puis, il donne des applications intéressantes, concernant l'équation

$$y' = F(x, y, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$$

φ_i dépendant de x ou de y .

Encadrant φ_i , en se rendant compte du théorème fondamental, il donne des conclusions concernant les solutions de l'équation considérée. Il est intéressant que nous avons traité ce théorème du Petrovitch dans notre travail [11], sans risque de parler sur la priorité, parce, que, en 1957, nous ne l'avons pas vue que dans le livre [36] de Petrovitch, où il ne donne pas la bibliographie, ce qui était souvent son habitude.

Dans le même travail nous citons le travail [31] de Petrovitch à propos de l'équation $y' = F(x, y, \varphi)$, mais d'une façon indirecte, par intermédiaire du travail [32] de Petrovitch.

On peut voir les traces du théorème en question dans le travail de *Michel Petrovitch*; „*Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques*“ Sitzungsberichte der Königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe, Prag, 1896 pp 1—25. ([30])

On y traite l'équation de Riccati

$$y' = \varphi(y - f_1)(y - f_2)$$

ainsi que sa généralisation

$$y' = \varphi(f_1 - y)(f_2 - y) \dots (f_n - y) \quad (,l'équation chimique“).$$

Petrovitch étudie l'intégrale y de l'équation considéré, avec $y(0) = 0$.

Il forme les équations de comparaison augmentant ou diminuant les fonctions φ_i ou f_i . Un de ces théorèmes fut cité par nous dans notre travail [12]. On peut voir cependant que les deuxièmes membres des équations de comparaison satisfont aux inégalités $f_1(x, y) < f(x, y)$ sous les hypothèses imposées par Petrovitch, qui cela utilise évidemment, restant cependant toujours dans le cadre des équations factorisées, sans donner le cas général.

Cette priorité ne diminue pas le grand rôle de Tchapliguine, qui a donné encore les fondements de la théorie de l'ordre n , une profonde analyse des

équations linéaires de l'ordre arbitraire, ainsi que sa célèbre méthode de l'encadrement successif. Sans diminuer, donc, l'importance de la théorie de Tchaplighine, cette priorité souligne cependant visiblement la lucidité et la richesse d'idées de Michel Petrovitch.

Ce passage est publié dans [58].

II 2. LA MÉTHODE DE TCHAPLIGUINE

On voit, donc, que, $f_1(x, y)$, $f(x, y)$, $f_2(x, y)$ étant trois fonctions continues dans la région ouverte $\Omega(x, y)$ y satisfaisant la condition de Lipschitz et

$$f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y)$$

on aura, dans cette région

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x)$$

où $y_1(x)$, $y(x)$, $y_2(x)$ sont respectivement les solutions des équations

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f(x, y), \quad y' = f_2(x, y)$$

avec

$$y_1(x_0) = y(x_0) = y_2(x_0) = y_0.$$

On peut omettre la condition de Lipschitz, le théorème ayant lieu même dans le cas de non-unicité.

La méthode de Tchaplighine va plus loin. En ajoutant la condition $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \geq 0$, Tchaplighine obtient la paire suivante des courbes d'encadrement en connaissant la paire précédente. Il n'y a qu'à résoudre les équations

$$y' = f_y'(x, u_n)(y - u_n) + f(x, u_n)$$

$$y' = \frac{f(x, v_n) - f(x, u_n)}{v_n - u_n} (y - u_n) + f(x, u_n).$$

Sous l'hypothèse $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ la première de deux équations linéaires citées donne la courbe inférieure et la seconde équation donne la courbe supérieure.

Pour étudier plus profondément la méthode de Tchaplighine il faut consulter la littérature suivante: [1]—[7], [9]—[18], [54].

Nous allons citer quelques exemples simples de la méthode de Tchaplighine, qu'on peut trouver dans [43].

Exemple 1. Soit $z = f(y)$ une fonction continue ainsi que f_y' , avec $f_y'' > 0$ et telle que $y = 0$ est le point intérieur de l'intervalle déterminé par $0 < f(y) < 1$. Prenant pour $f_1(x, y) \equiv 0$, pour $f(x, y) \equiv f(y)$, pour $f_2(x, y) \equiv 1$ on obtient, pour $x > 0$, dans $0 < f(y) < 1$,

$$0 < \frac{f(0)}{f_y'(0)} (e^{f_y'(0)x} - 1) < y(x) < \psi(x) < x$$

où $\psi(x)$ est l'intégrale particulière de l'équation

$$y' = \frac{f(x)-f(0)}{x} y + f(0)$$

passant par $(0, 0)$ et $y(x)$ est l'intégrale particulière de l'équation $y' = f(y)$ passant par $(0, 0)$. Par exemple, si l'on prend $f(y) = y^2 - y + \frac{1}{2}$, l'inégalité $0 < f(y) < 1$ aura lieu pour $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < y < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. On a alors $f_y' = 2y - 1$, $f_y'(0) = -1$, $f_{yy}'' = 2 > 0$, $f(0) = \frac{1}{2}$.

Exemple 2. Si l'on part de l'inégalité

$$0 < f\left(\frac{y}{x}\right) < 1$$

en considérant les équations $y' = 0$, $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, $y' = 1$ et leurs solutions $y(1) = 0$, sous l'hypothèse $x > 0$, $y > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ (f, f_y' continues), $f_t'\left(\frac{0}{x}\right) > 1$ ($t = \frac{y}{x}$), $f(0) \equiv f\left(\frac{0}{x}\right)$, on obtient

$$0 < f(0) x \ln x < y(x) < \psi(x) < x - 1,$$

$y(x)$ étant la solution de $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ passant par $(1, 0)$ et $\psi(x)$ la solution correspondante de

$$y' = \frac{f\left(\frac{x-1}{x}\right) - f(0)}{x-1} y + f(0).$$

L'équation $y' = \frac{f(0)}{x} y + f(0)$, dont la solution est $y(x) = f(0) x \ln x$ est obtenue en minorant l'équation $y' = f_t'\left(\frac{0}{x}\right) \frac{y}{x} + f(0)$.

Exemple 3. Soit donnée l'équation de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y + y^2$$

($f(x)$ -fonction continue et positive). On aura

$$-\operatorname{th} x < y(x) < \operatorname{tg} x$$

dans la région

$$-\frac{1}{f(x)} < y < \frac{1}{f(x)}, \quad 0 < x < x_0,$$

où $y(x)$ est la solution de l'équation donnée avec $y(0)=0$. Les fonctions $f_1(x, y), f_2(x, y)$ sont données par $f_1=y^2-1, f_2=y^2+1$.

Exemple 4. Soit donnée l'équation de Bernoulli $y' = f(x)y^2 + y$ ($f(x)$ -fonction continue et positive). On aura

$$1 - e^x < y(x) < e^x - 1$$

dans la région

$$-\frac{1}{\sqrt{f(x)}} < y < \frac{1}{\sqrt{f(x)}}, \quad 0 < x < x_0,$$

On a ici $f_1 = y - 1, f_2 = y + 1$

Exemple 5. On voit dans cet exemple la possibilité d'application de la méthode de Tchapligne dans la recherche des solutions asymptotiques.

Soit donnée l'équation de Riccati

$$y' = \frac{b}{x^2} - ay^2; \quad a > 0, b > 0, (a, b = \text{const.}).$$

La solution de cette équation passant par (x_0, y_0) est donnée par la formule

$$y(x) = \frac{x^l - k}{x(u_1 x^l - u_2 k)}$$

k, l, u_1, u_2 — les constantes $l(a, b) > 0, k = k(a, b, x_0, y_0) > 0, u_1 = u_1(a, b) > 0, u_2 = u_2(a, b) < 0$.

Cette solution peut être encadrée de façon suivante

$$\frac{1}{ax + C_0} < y(x) < \frac{C_0' + (ab + 1)ax + 2abC_0 \ln x - \frac{bC_0^2}{x}}{(ax + C_0)^2} < C_0^* - \frac{b}{x},$$

pour $x > x_0 > 0$, avec $x_0, y_0 > 0, C_0, C_0', C_0^*$ — constantes dépendant de a, b, x_0, y_0 avec $C_0^* > 0$.

On peut conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ avec $y(x) > 0$ et $y(x) < C_0^*$.

Les fonctions f_1, f_2 étaient les suivantes:

$$f_1 = -ay^2, f_2 = \frac{b}{x^2}.$$

Ici, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$ ce qui veut dire que

$$\frac{dy}{dx} = f_y'(x, u_n)(y - u_n) + f(x, u_n)$$

donne la courbe supérieure.

Exemple 6. Partant de $x(y+1) < (y+1)^2$ on obtient

$$e^{\frac{x^2}{2}} - 1 < \frac{x}{1-x} \quad \text{pour } 0 < x < 1.$$

Exemple 7. Partant de $0 < (y-x)^2 < (y-1)^2$ on obtient

$$\frac{e^{2x}(x-1) + x + 1}{e^{2x} + 1} < \frac{x}{x+1}.$$

Exemple 8. L'inégalité $0 < y^2 + 1 < (x+1)^2 + 1$ donne

$$\operatorname{tg} x < \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \quad \text{pour } 0 < x < x_0.$$

Exemple 9. Partant de $0 < \sqrt{1+y^2} < y^2 + k, k > 1$ on obtient

$$0 < x < \operatorname{sh} x < \sqrt{k} \operatorname{tg} \sqrt{k} x \quad \text{pour } 0 < x < \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Exemple 10. Partant de $0 < \frac{y^2}{x} < 1$ on obtient

$$\frac{x+1}{4} < \frac{1}{2-\ln x}$$

pour $0 > 1$, dans la région résultante.

Exemple 11. Partant de $0 < y^2 e^x < e^x$ on obtient, dans $-1 < y < 1, x > 0$ l'inégalité suivante

$$\frac{1}{4} (e^{e^x-1} + 1) < \frac{1}{3-e^x}.$$

Exemple 12. Partant de $0 < e^{-y} < k; k > 1$ on obtient, dans la région résultante, pour $x > 0$

$$0 < 1 - e^{-x} < \ln(x+1) < kx.$$

II. 3. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Nous allons étudier l'équation différentielle

$$y' = \varphi(x) y^n + \Psi(x, y) \quad n = 1, 2, \dots,$$

c'est-à-dire l'existence de ses solutions asymptotiques. Les équations de comparaison dans le sens de Tchapliguine sont les suivantes:

$$y' = \varphi(x) y^n \pm k \quad (k = \text{const.})$$

$$y' = \varphi(x) y^n \pm ky.$$

La première de ces deux équations sera dite „équation de Riccati généralisée“ et la seconde est une équation de Bernoulli.

Nous citerons ici le texte des résultats relatifs aux solutions bornées pour $x \rightarrow +\infty$ et nous donnerons enfin l'esquisse des démonstrations de deux théorèmes, pour illustrer la méthode. Ces résultats sont publiés dans [46], [47], [48].

T h é o r è m e I. *Étant donnée l'équation*

$$y' = \varphi(x)y^{2k} + \Psi(x, y) \quad k = 1, 2, \dots$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\Psi(x, y)$ satisfont aux conditions suivantes:

1. $\varphi(x)$ est une fonction continue et $C_1 < \varphi(x) < C_2$, ($C_1, C_2 < 0$) pour $x > x_0$,
2. $\Psi(x, y)$ est continue dans XOY et satisfait à la condition

$$0 < N < \Psi(x, y) < M$$

et à la condition de Lipschitz

$$|\Psi(x, Y) - \Psi(x, y)| < K|Y - y|$$

dans chaque région bornée du plan XOY , — cette équation a toujours une classe de solutions bornées. (Par exemple, toutes les solutions positives sont bornées).

On obtient la même conclusion dans le cas $C_1, C_2 > 0$, $-N < \Psi(x, y) < -M$.

Ici, toutes les solutions négatives sont bornées.

Si l'on a

$$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad -N < \Psi(x, y) < -M$$

(ou si l'on a

$$\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty, \quad N < \Psi(x, y) < M),$$

il existe une classe de solutions qui tendent vers zéro.

T h é o r è m e II. *Étant donnée l'équation différentielle.*

$$y' = \varphi(x)y^{2k+1} + \Psi(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

où les fonctions $\varphi(x)$ et $\Psi(x, y)$ satisfont aux conditions suivantes:

1. $\varphi(x)$ est une fonction continue et $C_1 < \varphi(x) < C_2$, ($C_1, C_2 < 0$) pour $x > x_0$, ou $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$,

2. $\Psi(x, y)$ est dans XOY continue, satisfaisant à une des trois conditions

$$0 < N < \Psi(x, y) < M,$$

$$-N < \Psi(x, y) < -M,$$

$$-N < \Psi(x, y) < M,$$

$$(N, M > 0)$$

et à la condition de Lipschitz

$$|\Psi(x, Y) - \Psi(x, y)| < K |Y - y|$$

dans chaque région bornée du plan XOY , — toutes les solutions de l'équation donnée sont bornées.

T h é o r è m e III. *Étant donnée l'équation*

$$y' = \varphi(x) y^{2k} + \Psi(x, y), \quad k = 1, 2, \dots$$

où

1. $\varphi(x)$ est une fonction continue pour $x \geq x_0$,
2. $\Psi(x, y)$ est dans XOY continue et satisfait à la condition de Lipschitz dans chaque partie bornée du plan XOY

$$|\Psi(x, Y) - \Psi(x, y)| < K |Y - y|$$

et si l'on a

$$C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad (C_1, C_2 < 0);$$

$$y \neq 0, \quad 0 < N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0,$$

alors toutes les solutions positives sont bornées ne tendant pas vers zéro et il existe une classe de solutions négatives bornées tendant vers zéro.

Le tableau suivant donne tous les autres résultats relatifs aux solutions bornées de l'équation donnée dans le texte du théorème III:

Solutions positives — 1) Toutes les solutions sont bornées:

$$a) C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$$

$$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$b) C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0,$$

$$y \neq 0, \quad 0 < N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$$

2) Toutes les solutions tendent vers zéro:

$$a) C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$$

$$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$b) \varphi(x) \rightarrow -0; \quad y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$c) \varphi(x) \rightarrow -\infty; \quad y \neq 0, \quad \pm N|y| < \Psi(x, y) < \pm N|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

3) Il y a une classe de solutions tendant vers zéro

$$a) C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 > 0;$$

$$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{b) } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +0; \quad y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{c) } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty; \quad y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$$

Solutions négatives — 1) Toutes les solutions sont bornées:

$$\text{a) } C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

$$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{b) } C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

$$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$$

2) Toutes les solutions tendent vers zéro.

$$\text{a) } C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 > 0,$$

$$y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{b) } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +0;$$

$$y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{c) } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty; \quad y \neq 0, \quad \pm N|y| < \Psi(x, y) < \pm M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$$

3) Il y a une classe de solutions tendant vers zéro:

$$\text{a) } C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$$

$$y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{b) } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -0; \quad y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$$

$$\text{c) } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} -\infty; \quad y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$$

Théorème IV. *Étant donnée l'équation*

$$y' = \varphi(x) y^{2k+1} + \Psi(x, y) \quad k = 1, 2, \dots$$

avec les conditions suivantes:

1. Pour $x > x_0$, $\varphi(x)$ est une fonction continue et satisfait à la condition:

$$C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad (C_1, C_2 < 0).$$

2. $\Psi(x, y)$ est dans XOY continue et

$$y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0$$

et satisfait à la condition de Lipschitz dans chaque région bornée du plan XOY

$$|\Psi(x, Y) - \Psi(x, y)| < K|Y - y|,$$

alors toutes les solutions positives de l'équation donnée sont bornées et toutes les solutions négatives tendent vers zéro.

Le tableau suivant donne les autres résultats relatifs à cette équation:

Solutions positives — 1) Toutes les solutions sont bornées:

a) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$

$y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$

b) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$

$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$

2) Toutes les solutions tendent vers zéro:

a) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$

$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$

b) $\varphi(x) \rightarrow -0; \quad y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$
 $x \rightarrow +\infty$

c) $\varphi(x) \rightarrow -\infty; \quad y \neq 0, \quad \pm N|y| < \Psi(x, y) < \pm M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$
 $x \rightarrow +\infty$

3) Il y a une classe de solutions tendant vers zéro:

a) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 > 0;$

$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$

b) $\varphi(x) \rightarrow +0; \quad y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$
 $x \rightarrow +\infty$

c) $\varphi(x) \rightarrow +\infty; \quad y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$
 $x \rightarrow +\infty$

Solutions négatives — 1) Toutes les solutions sont bornées

a) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$

$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$

b) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$

$y \neq 0, \quad -N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$

2) Toutes les solutions tendent vers zéro:

a) $C_1 < \varphi(x) < C_2, \quad C_1, C_2 < 0;$

$y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$

b) $\varphi(x) \rightarrow -0; \quad y \neq 0, \quad N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0;$
 $x \rightarrow +\infty$

c) $\varphi(x) \rightarrow -\infty; \quad y \neq 0, \quad \pm N|y| < \Psi(x, y) < \pm M|y|; \quad \Psi(x, 0) = 0.$
 $x \rightarrow +\infty$

3) Il y a une classe de solutions tendant vers zéro:

a) $C_1 < \varphi(x) < C_2, C_1, C_2 > 0;$

$y \neq 0, N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \Psi(x, 0) = 0;$

b) $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +0; y \neq 0, N|y| < \varphi(x, y) < M|y|; \Psi(x, 0) = 0,$

c) $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty; y \neq 0, N|y| < \Psi(x, y) < M|y|; \Psi(x, 0) = 0.$

Nous soulignons aussi que nous avons obtenu un autre groupe de résultats relatifs aux équations

$$y' = \varphi(x)y + f(x)y^2 + \Psi(x, y),$$

$$y' = \varphi(x)y^2 + f(x)y^4 + \Psi(x, y),$$

$$y' = \Phi(y)\varphi(x)y^{2n+1} + \Phi_1(y)f(x)y^{4n+1} + \Psi(x, y),$$

en appliquant le même procédé.

Nous allons maintenant démontrer les théorèmes I et III, pour illustrer plus précisément la méthode. On ne donne qu'une esquisse des démonstrations.

Démonstration du théorème I — On a, d'après les hypothèses données

$$C_1 y^{2k} + N < \varphi(x)y^{2k} + \Psi(x, y) < C_2 y^{2k} + M.$$

D'après le théorème de Tchapligne, nous considérons les équations

$$y' = C_1 y^{2k} + N;$$

$$y' = \varphi(x)y^{2k} + \Psi(x, y);$$

$$y' = C_2 y^{2k} + M;$$

sachant que par chaque point $P(\xi, \eta)$ du plan XOY ($\xi > x_0$), passent trois courbes intégrales de ces trois équations et que l'on a

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x), \quad x > \xi.$$

D'après le théorème sur l'existence des solutions (Cauchy), nos hypothèses nous permettent de prolonger infiniment une solution de chaque de nos équations qui passe par un point $P(\xi, \eta)$. A ce point n'appartient qu'une solution continue possédant la dérivée continue. Les solutions peuvent avoir des asymptotes de la forme $x=C$, ce qui ne contredit pas au procédé de prolongement qui résulte du théorème de Cauchy.

On peut donc considérer deux équations de Tchapligne

$$y' = C_1 y^{2k} + N$$

$$y' = C_2 y^{2k} + M$$

qui donnent „les courbes d'encadrement“ de notre solution inconnue (la courbe inférieure et la courbe supérieure).

Considérons d'abord „l'équation supérieure“

$$y' = C_2 y^{2k} + M.$$

Évidemment, y' sera > 0 , c'est-à-dire des solutions croissantes dans une région donnée par l'inéquation

$$|y| < \sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}.$$

Cette région est limitée par deux droites

$$y = \pm \sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}.$$

Les valeurs asymptotiques des intégrales nous obtenons de l'équation

$$0 = C_2 C^{2k} + M \quad \dots \quad C = \pm \sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}.$$

(On utilise dans cette considération le fait que si $y \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} C$, on a $y' \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$, y et y' satisfaisant aux conditions connues).

Toutes les solutions qui passent par les points de la région

$$|y| < \sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}$$

tendent vers $\sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}$ en croissant, lorsque x tend vers $+\infty$.

Les solutions qui passent par les points de la région

$$y > \sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}$$

tendent vers la même valeur en décroissant. Les solutions qui passent par les points de la région

$$y < -\sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}$$

tendent vers l'infini soit au voisinage des asymptotes de la forme $x = C$ soit asymptotiquement.

L'équation inférieure est du même type. Au lieu de M , C_2 figurent N , C_1 . On a

$$\sqrt[2k]{-\frac{N}{C_1}} < \sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}; \quad -\sqrt[2k]{-\frac{N}{C_1}} > -\sqrt[2k]{-\frac{M}{C_2}}.$$

Il est évident que notre équation, dont les solutions sont „encadrées“ par les solutions des équations de comparaison, a toujours une classe de solutions bornées.

Démonstration du théorème III — Sous la supposition $y > 0$, „les équations d'encadrement“ sont les suivantes:

$$y' = C_2 y^{2k} + My,$$

$$y' = C_1 y^{2k} + Ny.$$

Considérons „l'équation supérieure“. y' sera > 0 pour

$$y < \sqrt[2k-1]{-\frac{M}{C_2}} > 0.$$

Toutes les solutions tendent vers $\sqrt[2k-1]{-\frac{M}{C_2}}$ et celles de l'équation inférieure vers $\sqrt[2k-1]{-\frac{N}{C_1}}$. Si $y < 0$, y' sera > 0 pour $y > \sqrt[2k-1]{\frac{M}{C_2}} < 0$.

Dans ce cas existe toujours une classe de solutions tendant vers zéro.

Quant aux solutions décroissantes, celles appartenant à la région

$$y > \sqrt[2k-1]{-\frac{M}{C_2}}$$

tendent vers la même valeur $\sqrt[2k-1]{-\frac{M}{C_2}}$.

Nous obtenons la conclusion analogue pour „l'équation inférieure“ et aussi pour notre équation considérée.

Nous avons donné l'esquisse des démonstrations les plus simples, pour pouvoir clairement illustrer la méthode. On rencontre souvent des circonstances plus compliquées, en démontrant les autres résultats mais il s'agit des difficultés qui n'empêchent pas essentiellement les considérations relatives aux solutions asymptotiques.

II. 4. ESTIMATION DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION D'ABEL DE DEUXIÈME ESPÈCE AVEC LES GÉNÉRALISATIONS

On donne dans ce passage l'estimation des solutions de l'équation d'Abel de deuxième espèce

$$(1) \quad (y + g(x)) y' = f_2(x) y^2 + f_1(x) y + f_0(x)$$

ainsi que quelques généralisations.

On applique le théorème fondamental de Tchapliguine sur les inégalités différentielles suivantes:

Soient dans la région ω du plan XOY les fonctions $f_1(x, y)$, $f(x, y)$, $f_2(x, y)$ continues, satisfaisant à la condition de Lipschitz et

$$f_1(x, y) < f(x, y) < f_2(x, y).$$

On aura alors $y_1(x) < y(x) < y_2(x)$ pour $x > x_0$ dans cette région, où $y_1(x)$, $y(x)$, $y_2(x)$ sont les solutions des équations différentielles

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f(x, y), \quad y' = f_2(x, y)$$

satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ (le point (x_0, y_0) appartient à ω).

Nous démontrerons alors le théorème suivant:

Théorème. — Soit donnée l'équation (1) sous les hypothèses suivantes:

a) les fonctions $g(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, sont continues pour $x > x_0$,

b) on a $g(x) > 0$, $f_0(x) < 0$, $f_1(x) - g(x)f_2(x) > 0$ pour $x > x_0$.

Sous ces hypothèses, pour $x > x_0$, on aura

$$(2) \quad e^{\int_{x_0}^x f_2(t) dt} \left[y_0 - \varepsilon \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^t f_2(u) du} dt \right] < y(x) < y_0 e^{\int_{x_0}^x f_2(t) dt}$$

dans la région

$$(3) \quad \frac{f_0 + \varepsilon g}{g f_2 - f_1 - \varepsilon} < y < \frac{f_0}{g f_2 - f_1},$$

ε étant un nombre réel positif arbitraire, et $y(x)$ la solution de l'équation (1) avec $y(x_0) = y_0$, (y_0 appartient à (3)).

Démonstration. Écrivons (1) sous la forme

$$(4) \quad y' = \frac{f_2 y^2 + f_1 y + f_0}{y + g}.$$

Dans la région $y > -g$, ($-g < 0$) le deuxième membre de (4) est une fonction continue, satisfaisant localement à la condition de Lipschitz. L'unicité des solutions et la possibilité de leur prolongement sont garanties dans $y > -g$. D'autre part, il est facile de montrer qu'on a

$$-g < \frac{f_0 + \varepsilon g}{g f_2 - f_1 - \varepsilon} < \frac{f_0}{g f_2 - f_1}.$$

Il est de même facile à vérifier qu'on a dans (3)

$$(5) \quad f_2 y - \varepsilon < \frac{f_2 y^2 + f_1 y + f_0}{y + g} < f_2 y$$

ce qui donne, pour l'équation d'Abel, des équations de comparaison suivante

$$y' = f_2 y - \varepsilon; \quad y' = f_2 y.$$

Ces deux équations sont linéaires et leurs solutions avec $y(x_0)$ sont données par les courbes d'encadrement de l'inégalité (2), suivant le théorème cité de Tchapliguine.

Exemple. — Pour $y(x) = x^2$, $f_0(x) = -1$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = -1$ c'est-à-dire pour l'équation

$$y' = \frac{-y^2 + y - 1}{y + x^2}$$

on obtient dans la région

$$\frac{1 - \varepsilon x^2}{1 + x^2 + \varepsilon} < y < \frac{1}{1 + x^2}$$

l'estimation suivante

$$e^{x_0 - x} (y + \varepsilon) - \varepsilon < y(x) < y_0 e^{x_0 - x},$$

$y(x)$ étant la solution de l'équation donnée avec $y(x_0) = y_0$.

*

On obtient la même conclusion pour l'équation

$$(6) \quad (y^{n-1} + g(x)) y' = f_2(x) y^n + f_1(x) y + f_0(x),$$

avec $n = 3, 5, 7, \dots$ sous les mêmes hypothèses sur les fonctions $g(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$.

Ici il faut cependant ajouter les conditions supplémentaires

$$\varepsilon g(x) > -f_0(x)$$

et

$$(7) \quad \left[\frac{(g f_2 - f_1)^{n-1}}{\varepsilon (n-1)} \right]^{\frac{1}{n-2}} < \frac{(n-1)(f_0 + \varepsilon g)}{n}.$$

Ces conditions supplémentaires garantissent la validité de l'inégalité

$$f_2 y - \varepsilon < \frac{f_2 y^n + f_1 y + f_0}{y^{n-1} + g(x)}.$$

La dernière inégalité est équivalente à

$$(8) \quad F(y) = -\varepsilon y^{n-1} + y(g f_2 - f_1) - f_0 - \varepsilon g < 0.$$

La fonction $F(y)$ sera négative pour chaque x si l'on a $F_{\max}(y) < 0$. Cette condition donne l'inégalité supplémentaire (7) concernant les coefficients de l'équation considérée. L'inégalité.

$$\frac{f_2 y^n + f_1 y + f_0}{y^{n-1} + g} < f_2 y$$

est satisfaite pour $y < \frac{f_0}{g f_2 - f_1}$ comme dans le théorème démontré sur l'équation d'Abel. Cette partie d'inégalité (5) concernant (6) ne donne donc aucune condition supplémentaire.

Exemple. — Si l'on a $g=1$, $f_0=-1$, $f_2=1$, $\varepsilon=3$, $n=3$, c'est-à-dire si l'on considère l'équation

$$y' = \frac{-y^3 + y - 1}{y^2 + 1}$$

on obtient le même résultat comme dans l'exemple précédent. Le nombre ε étant fixé, on a

$$(y_0 + 3) e^{x_0 - x} - 3 < y(x) < y_0 e^{x_0 - x}$$

dans la région

$$\frac{1 - 3x^2}{x^2 + 4} < y < \frac{1}{x^2 + 1}$$

pour y_0 appartenant à cette région.

Remarquons que l'expression $y^{n-1} + g(x)$ multipliant y' dans (6) reste $\neq 0$ ($n-1$ étant pair), ce qui garantit l'unicité et la possibilité de prolongement dans tout le plan XOY (la continuité du deuxième membre a lieu, ainsi que la condition de Lipschitz localement).

*

Dans le cas (6) pour $n=2, 4, 6, \dots$ l'inégalité

$$\frac{f_2 y^n + f_1 y + f_0}{y^{n-1} + g} < f_2 y$$

a lieu pour

$$y < \frac{f_0}{f_2 g - f_1}$$

comme dans le cas $n=3, 5, 7, \dots$ mais pour $y > -\sqrt[n-1]{g(x)}$.

Pour fixer la validité de

$$f_2 y - \varepsilon < \frac{f_2 y^n + f_1 y + f_0}{y^{n-1} + g},$$

il faut étudier (8) encore une fois. n étant pair, $F(y)$ n'a pas de maximum dans ce cas. Pour tout x^* fixé il existe pour la fonction $F(y)$ un y^* tel que, partant de lui, on aura $F(y) < 0$. L'ensemble de ces y^* donne une fonction $\Phi(x)$ telle qu'on a $F(y) < 0$ pour $y > \Phi(x)$. La fonction $\Phi(x)$ sera déterminée dans les cas particuliers sans oublier la condition $y > -\sqrt[n-1]{g(x)}$.

Exemple. — Avec les mêmes valeurs numériques comme dans l'exemple précédent pour $n=4$, c'est-à-dire pour l'équation

$$y' = \frac{-y^4 + y - 1}{y^3 + 1}$$

l'estimation obtenue aura lieu pour $-1 < y^* < y < \frac{1}{2}$, y^* — une constante fixée.

Si l'on considère l'intégrale passant par (1.4), l'estimation est la suivante:

$$\frac{13}{4} e^{1-x} - 3 < y(x) < \frac{1}{4} e^{1-x}$$

*

Remarquons que dans le cas de l'équation d'Abel (1) les résultats du théorème restent valables pour $g(x) \equiv 0$.

Toutes les estimations obtenues sont intéressantes parce qu'on les obtient à l'aide des équations linéaires chez lesquelles ne figure qu'une des quatre fonctions — coefficients de l'équation considérée. Par un choix convenable de ε nous pouvons diminuer à plaisir la distance entre les courbes d'encadrement augmentant tellement l'exactitude de l'approximation. Vraiment la différence des fonctions d'encadrement

$$\Delta = \varepsilon e^{x_0} \int_{x_0}^x f_2(t) dt - \int_{x_0}^x e^{-t} f_2(u) du$$

pour un x fixé tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro. On change cependant l'intervalle de validité.

Pour $g(x) < 0$ on peut discuter le problème d'une manière semblable.

Remarque. Nous venons de considérer l'équation (6) pour $n=2, 4, 6, \dots$ avec $g(x) > 0$, $f_0(x) < 0$, $f_1(x) - g(x) f_2(x) > 0$ pour $x > x_0$, où les fonctions g, f_0, f_1, f_2 sont les fonctions continues. On a dit qu'il ne faut pas oublier la condition $y > \sqrt[n-1]{-g(x)}$. Il faut, donc, assurer que $\Phi(x)$ appartient à la région de régularité. Posons $\sqrt[n-1]{-g}$ au lieu de y dans (8). On obtient

$$\sqrt[n-1]{-g} (f_2 g - f_1) - f_0 > 0.$$

Pour tout $x > x_0$ on a, donc, $\sqrt[n-1]{-g} < \Phi(x)$, parce que, pour $y > \Phi(x)$ le premier membre de (8) est négatif et le polynôme (8) n'a qu'un zéro, ce qui est facile à conclure. Il suit que, dans la région

$$\sqrt[n-1]{-g} < \Phi(x) < y < \frac{f_0}{f_2 g - f_1}$$

les courbes d'encadrement inférieures et supérieures de l'équation (6) nous obtenons en intégrant les équations $y' = f_2 y - \varepsilon$, $y' = f_2 y$ (ε nombre réel positif arbitraire). Naturellement, la fonction $\Phi(x)$ dépend aussi de ε . On vérifie facilement qu'on a

$$\Phi(x) < \frac{f_0}{f_2 g - f_1}.$$

Dans le cas de n impair nous avons donné des conditions supplémentaires pour f_0, f_1, f_2, g tellement que l'encadrement a lieu dans la région bornée seulement au-dessus (sans la fonction $\Phi(x)$). Dans ce cas $y^{n-1} + g$ est positif, c'est-à-dire cette condition peut être omise.

Cependant, prenant en considération le terme $-\varepsilon y^{n-1}$ de (8), il est évident que la fonction $\Phi(x)$ existe ici aussi, ce qui veut dire que les conditions supplémentaires pour f_0, f_1, f_2, g peuvent être omises, ce qui diminue, vraiment, la région de validité.

Ces résultats sont publiés dans [51] et [53].

II.5. ENCADREMENT ET SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Nous allons étudier dans ce passage l'équation différentielle

$$y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(x) y^i}{\sum_{i=0}^m b_i(x) y^i}$$

$a_i(x), b_i(x)$ étant les fonctions continues et bornées pour $x > x_0$. Mais, nous allons considérer d'abord quelques cas particuliers.

Considérons l'équation

$$(1) \quad y' = \frac{f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2}{y + g(x)}$$

avec $g(x) > 0, f_2(x) > 0, f_1(x) > 0, f_0(x) < 0$.

Partons, suivant Tchapligne, de l'inégalité

$$f_2 y^2 - \varepsilon < \frac{f_0 + f_1 y + f_2 y^2}{y + g} < f_2 y^2.$$

On aura, dans la région de validité de cette inégalité

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x),$$

$$y_1(x), y(x), y_2(x) \quad (y_1(x_0) = y(x_0) = y_2(x_0) = y_0)$$

étant respectivement les solutions des équations

$$y' = f_2 y^2 - \varepsilon \quad (1), \quad y' = f_2 y^2,$$

ε étant un nombre réel positif de qui nous parlerons plus tard.

Considérons d'abord l'inégalité

$$\frac{f_0 + f_1 y + f_2 y^2}{y + g} < f_2 y^2.$$

Dans $y > -g$ ($-g < 0$) elle devient

$$(2) \quad g f_2 y^2 - f_1 y - f_0 > 0.$$

La discriminante du trinôme est $f_1^2 + 4 f_0 f_2 g$. Si nous ajoutons, pour fixer les idées, la condition

$$f_1^2 + 4 f_0 f_2 g < 0,$$

l'inégalité (2) aura lieu pour tout y , avec f_0, f_1, f_2, g satisfaisant aux conditions déjà introduites. Cela veut dire que les courbes d'encadrement supérieures nous obtenons en intégrant l'équation

$$y' = f_2(x) y^2$$

séparant les variables.

Pour considérer les courbes d'encadrement inférieures, il faut étudier l'inégalité

$$(3) \quad f_2 y^2 - \varepsilon < \frac{f_0 + f_1 y + f_2 y^3}{y + g}.$$

Pour $y > -g$, elle devient

$$f_2 g y^2 - (\varepsilon + f_1) y - g \varepsilon - f_0 < 0.$$

Cette inégalité, n'oubliant pas les hypothèses sur les signes des fonctions coefficients, ne peut être remplie que dans le cas où le trinôme carré a des racines réelles (dans la région entre les racines réelles). La discriminante est

$$D = (\varepsilon + f_1)^2 + 4 g f_2 (g \varepsilon + f_0).$$

Évidemment, elle sera positive pour $\varepsilon > -\frac{f_0}{g}$. f_0, g étant les fonctions bornées, nous pouvons toujours choisir ε de façon indiquée, L'inégalité (3) aura lieu dans

$$(4) \quad \frac{\varepsilon + f_1 - \sqrt{D}}{2 f_2 g} < y < \frac{\varepsilon + f_1 + \sqrt{D}}{2 f_2 g}.$$

Il est facile de vérifier que l'on a

$$\frac{\varepsilon + f_1 - \sqrt{D}}{2 f_2 g} > -g,$$

c'est-à-dire que la zone obtenue de validité se trouve dans la région de régularité. Dans la zone (4) les courbes d'encadrement inférieures seront les solutions de l'équation

$$y' = f_2 y^2 - \varepsilon$$

avec ε choisie convenablement.

Considérons maintenant l'équation

$$y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(x) y^i}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x) y^i}$$

$a_i(x)$, $b_i(x)$ étant les fonctions *continues* et *bornées* pour $x > x_0$.

Supposons, premièrement, que n soit *impair* et $\sum_{i=0}^{n-1} b_i y^i > 0$ pour $x > x_0$. Évidemment, $b_{n-1}(x) > 0$.

Si nous voulons obtenir des courbes d'encadrement en intégrant les équations

$$y' = \frac{a_n}{b_{n-1}} y - \varepsilon, \quad y' = \frac{a_n}{b_{n-1}} y$$

nous sommes obligés encore une fois d'étudier la région de validité. L'inégalité

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i y^i}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i y^i} < \frac{a_n}{b_{n-1}} y$$

devient

$$(5) \quad \left(b_{n-2} \frac{a_n}{b_{n-1}} - a_{n-1}\right) y^{n-1} + \left(b_{n-3} \frac{a_n}{b_{n-1}} - a_{n-2}\right) y^{n-2} + \dots \\ \dots + \left(b_0 \frac{a_n}{b_{n-1}} - a_1\right) y - a_0 > 0.$$

Introduisons l'hypothèse *supplémentaire* que, pour $x > x_0$

$$b_{n-2} \frac{a_n}{b_{n-1}} - a_{n-1} > 0.$$

Alors, pour tout x^* fixé, le polynôme (5) a le premier terme de la forme $a^2 y^{2k}$ ($a \neq 0$). Cela veut dire qu'à tout x^* correspond y^* tellement que le polynôme en question est positif pour $y > y^*$. L'ensemble de tous y^* donne une fonction $\Phi(x)$ telle que, pour $y > \Phi(x)$, l'inégalité (5) est remplie.

Considérons maintenant l'inégalité

$$\frac{a_n}{b_{n-1}} y - \varepsilon < \frac{\sum_{i=0}^n a_i y^i}{\sum_{i=0}^{n-1} b_i y^i}.$$

Elle devient

$$(6) \quad \left[b_{n-2} \frac{a_n}{b_{n-1}} - \varepsilon b_{n-1} - a_{n-1} \right] y^{n-1} + \dots + \dots < 0.$$

Envisageons la fonction

$$\varphi(x) = \frac{b_{n-2} \frac{a_n}{b_{n-1}} - a_{n-1}}{b_{n-1}}.$$

Soit $k = \sup \varphi(x)$ ($x > x_0$). Choisissons $\varepsilon > k$ (ce qui est toujours possible). Nous obtenons $\varepsilon > \varphi(x)$ c'est-à-dire

$$b_{n-2} \frac{a_n}{b_{n-1}} - a_{n-1} - \varepsilon b_{n-1} < 0.$$

Le polynôme (6) a donc le premier terme de la forme $-a^2 y^{2k}$, ce qui veut dire qu'à tout $x^* > x_0$ correspond y^* tellement que, pour $y > y^*$, le polynôme est négatif. L'ensemble y^* donne la fonction $\Phi_1(x)$. Pour $y > \Phi_1(x)$ l'inégalité (6) a lieu (avec ε choisie comme nous l'avons indiquée).

Pour $y > \max \Phi_1(x)$, $\Phi(x)$ les inégalités (5), (6) auront lieu et notre encadrement dans cette région aura lieu aussi.

Dans le cas n pair, dans la région $y > \psi(x)$ où $\sum_{i=0}^{n-1} b_i y^i > 0$, la conclusion est analogue, avec la région de validité

$$y > \max \Phi_1(x), \Phi(x), \psi(x).$$

On peut obtenir des conclusions semblables dans le cas plus général

$$(7) \quad y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i y^i}{\sum_{i=0}^m b_i y^i}, \quad (n > m).$$

Les équations de comparaison seront ici les suivantes:

$$y' = \frac{a_n}{b_m} y^{n-m} - \varepsilon, \quad y' = \frac{a_n}{b_m} y^{n-m},$$

où l'équation générant les courbes d'encadrement inférieures ne pourra pas être, dans le cas général, réductible aux quadratures. Elle devrait être, elle-même, analysée par les méthodes d'analyse qualitative.

Dans le cas de l'équation (7) on peut obtenir des résultats aussi à l'aide des équations

$$y' = \frac{a_k}{b_{k-1}} y - \varepsilon \quad y' = \frac{a_k}{b_{k-1}} y \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dont l'avantage est leur forme linéaire, mais le degré du polynôme (dont l'étude donne la région de validité) ici n'est pas obligatoirement moins grand que n .

Les résultats de ce passage sont publiés dans [53].

II.6. LIMITE D'APPLICATION DES INÉGALITÉS DU TCHAPLIGUINE DU SECOND ORDRE

S. A. Tchaplighine a donné ([4]) le théorème suivant sur les inégalités différentielles du second ordre:

Soit $y(x)$, [$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$], la solution de l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y - f(x) = 0,$$

$a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ — les fonctions continues dans $[x_0, x_1]$ et $v(x)$ ($v(x_0) = y_0$, $v'(x_0) = y_0'$) une fonction satisfaisant à l'inégalité

$$(2) \quad v'' + a(x)v' + b(x)v - f(x) \geq 0$$

dans $(x_0, x_1]$. Si l'équation de Riccati

$$(3) \quad k' + k^2 - a(x)k - a'(x) + b(x) = 0$$

a une solution continue dans $[x_0, x_1]$, on aura dans $(x_0, x_1]$

$$v(x) \geq y(x).$$

On appelle l'équation (3) "l'équation de garantie".

Les travaux ([11], [12]) traitent cette équation.

Il existe donc une limite d'application du théorème cité—donnée par l'intervalle de continuité d'une solution de l'équation (3).

Dans notre article [44] nous avons publié le théorème suivant:

Soit $k_1(x)$ une fonction continue dans $[x_0, x_1]$, y satisfaisant à l'équation différentielle

$$(4) \quad k' + k^2 + a(x)k + b(x) = 0.$$

Formons la fonction $v(x) = \Psi(x)\omega_1(x)$ où $\Psi(x)$ est une fonction primitive de la fonction $v_1(x)$, $\left[\Psi(x_0) = \left(\frac{y}{\omega_1} \right)_{x=x_0} \right]$. La fonction $v_1(x)$, $\left[v_1(x_0) = \left(\frac{y}{\omega_1} \right)'_{x=x_0} \right]$ satisfait dans $(x_0, x_1]$ à l'inégalité

$$(5) \quad v_1' + (2k_1 + a(x))v_1 - f(x)e^{-\int k_1 dx} \geq 0$$

où $\omega_1 = e^{\int k_1 dx}$ ($\int k_1 dx$ une fonction primitive arbitraire de $k_1(x)$).

Sous ces hypothèses on aura dans $(x_0, x_1]$

$$v(x) = \Psi(x) \omega_1(x) \geq y(x),$$

$y(x)$ étant la solution de l'équation (1) dont on parle dans le théorème cité de Tchapliguine.

Ce théorème fut donné sans démonstration, l'article [44] n'étant qu'un aperçu des méthodes différentes de l'encadrement des solutions des équations différentielles.

On a obtenu de cette manière une courbe supérieure (inférieure) pour la solution. Mais, aux coefficients de l'inégalité (5) figure $k_1(x)$; pour la construction pratique de $v(x)$ il est donc nécessaire de connaître une solution de l'équation (4). Il est connu qu'on peut résoudre dans ce cas l'équation (1) par les quadratures. Le théorème permet donc l'obtention d'inégalités différentes qui peuvent être intéressantes (où figurent les solutions de l'équation considérée ainsi que les courbes d'encadrement).

Il est facile de remarquer que les équations de RICCATI (3) et (4) sont équivalentes par rapport à l'existence des solutions continues dans le cas où la dérivée $a'(x)$ existe dans tout l'intervalle.

Si l'on pose dans (4)

$$k = k_1 - a$$

on obtient (3). Sans l'hypothèse d'existence de $a'(x)$, on ne peut pas parler à priori de cette équivalence.

L'équivalence en question suggère que le théorème de TCHAPLIGUINE a lieu avec l'équation (4) au lieu de (3). On obtiendrait un théorème plus général (sans l'existence $a'(x)$). *Vraiment ce fait je démontre dans la première partie du présent article.*

Il est dans un certain sens inverse au théorème cité de l'article [44], où l'on parle de la construction de $v(x)$ pour laquelle on prouve alors qu'elle présente une courbe de Tchapliguine (d'encadrement).

La deuxième partie de ce passage donne la recherche des équations (3) et (4). On obtient la condition suffisante (dans les cas différents) pour que l'intervalle (x_0, x_1) („l'intervalle d'application") soit infini. Il s'agit, à savoir, des conditions suffisantes pour que dans l'intervalle $(x_0, +\infty)$ existe au moins une solution continue de (3) ou (4). La discussion traite les cas spéciaux

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

$$y'' + b(x)y = f(x) \quad (f(x) \equiv 0 \text{ ou } f(x) \equiv 0)$$

$$y'' + a(x)y' = f(x).$$

La méthode appliquée est celle de rétracte, due à T. Ważewski ([22], [48]).

La troisième partie contient les évaluations des solutions de certaines équations différentielles bien connues, appliquant un résultat de notre article [45] concernant un procédé par lequel on obtient pour l'équation

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

l'encadrement de ces solutions partant du théorème fondamental de *Tchapligne* pour les équations du premier ordre appliqué à l'équation (4).

On a donné dans la quatrième partie deux exemples de construction des inégalités fonctionnelles utilisant le fait qu'on peut résoudre l'équation

$$y'' + a(x)y' = f(x)$$

par les quadratures. La limite d'application du théorème de *Tchapligne* est infinie dans ce cas sous l'hypothèse de continuité des fonctions $a(x)$, $f(x)$.

I

Théorème. — Soit $y(x)$, $[y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0']$, la solution de l'équation différentielle

$$(1) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y - f(x) = 0$$

($a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ — les fonctions continues dans $[x_0, x_1]$) et $v(x)$, $[v(x_0) = y_0, v'(x_0) = y_0']$ une fonction satisfaisante à l'inégalité

$$(2) \quad v'' + a(x)v' + b(x)v - f(x) \geq 0$$

dans $(x_0, x_1]$. Si l'équation de Riccati

$$(4) \quad k' + k^2 + a(x)k + b(x) = 0$$

a une solution continue dans $[x_0, x_1]$, on aura dans $(x_0, x_1]$

$$v(x) \geq y(x).$$

Démonstration. — Soit donnée la fonction

$$v(x), [v(x_0) = y_0, v'(x_0) = y_0']$$

satisfaisant aux hypothèses données dans le texte du théorème. Soit encore $k_1(x)$ une solution continue de (4) dans l'intervalle $[x_0, x_1]$. La fonction $v(x)$ peut être écrite sous la forme

$$(6) \quad v(x) = \left[\frac{y_0}{\omega_{10}} + \int_{x_0}^x v_1(t) dt \right] \omega_1(x)$$

où

$$v_1(x) = \left[\frac{v}{\omega_1(x)} \right]', \quad v_1(x_0) = \left(\frac{v}{\omega_1} \right)'_{x=x_0},$$

$\omega_1(x) = e^{\omega_2(x)}$ ($\omega_2(x)$ — une fonction primitive arbitraire de $k_1(x)$). Il est facile de vérifier la représentation (6).

La fonction $v(x)$ est supposée vérifiant (2). Posons (6) dans (2). On obtient

$$(7) \quad v_1' + (2k_1 + a(x))v_1 - \frac{f}{\omega_1} \geq 0.$$

Posons alors dans (1)

$$y = ue^{\int k_1 dx}.$$

On obtient

$$u'' + (2k_1 + a(x))u' - \frac{f}{\omega_1} = 0.$$

Posons ensuite $u' = p$.

L'équation (1) devient

$$(8) \quad p' + (2k_1 + a(x))p - \frac{f}{\omega_1} = 0.$$

L'équation (8) a dans l'intervalle $[x_0, x_1]$, d'après les théorèmes d'existence, les solutions continues. La fonction $v_1(x)$ existe aussi dans cet intervalle.

D'après le théorème du *Tchaplignine* concernant les équations du premier ordre et selon (7) et (8) on obtient dans $(x_0, x_1]$

$$v_1(x) \geq p(x),$$

où

$$v_1(x_0) = p(x_0) = \left(\frac{y}{\omega_1}\right)'_{x=x_0}.$$

On a donc $v_1(x) \geq \frac{du}{dx}$, c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v}{\omega_1}\right) \geq \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\omega_1}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{v-y}{\omega_1}\right) \geq 0.$$

La fonction $\frac{v-y}{\omega_1}$ s'annule pour $x = x_0$, étant cependant croissante (décroissante) dans $[x_0, x_1]$ d'après le signe de sa dérivée. Elle doit être donc positive (négative) dans cet intervalle. ω_1 étant positive, on a ensuite $v-y \geq 0$, c'est-à-dire $v \geq y$ ce qui termine la démonstration.

Exemple I 1. — L'équation

$$xy'' + (b-x)y' - ay = 0$$

b n'étant pas un nombre entier (l'équation hypergéométrique dégénérée) a la solution de la forme

$$y = C_1 F(a, b, x) + C_2 x^{1-b} F(a-b+1, 2-b, x)$$

où

$$F(a, b, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{b(b+1)\cdots(b+k-1)k!} x^k$$

(la fonction de *Pochhammer* — une série convergente pour chaque x — voir [8] p. 437).

Dans le cas spécial $b = a + 1$ on obtient

$$y = C_1 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ax^k}{(a+k)k!} \right) + C_2 x^{-a}.$$

Si l'on considère la solution $y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1$ on obtient

$$y_1(x) = \frac{x_0 e^{-x_0}}{a} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ax^k}{(a+k)k!} - x_0^a x^{-a} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ax_0^k}{(a+k)k!} \right) \right].$$

L'équation (4) a dans ce cas la solution $k_1 = -\frac{a}{x}$. Si l'on choisit pour $v_1(x) = x^a$ on obtient dans $(x_0, 1)$ où $0 < x_0 < 1$

$$y_1(x) < \frac{x}{a+1} \frac{x_0^{a+1}}{(a+1)x^a}.$$

Ce résultat est la forme améliorée de l'exemple dans l'article [44].

II

Il est intéressant de considérer les cas où l'équation (3) ou (4) a dans $[x_0, +\infty)$ une solution continue. Il suffit dans ce cas de chercher les solutions $v(x)$ satisfaisant à (2) — dans chaque intervalle de validité de (2) on aura $v(x) \geq y(x)$. Ce cas nous appellerons: *le cas de la limite infinie d'application*.

Il faut remarquer que les seules ruptures des solutions (3) et (4) peuvent provenir des pôles de ces solutions, selon les hypothèses sur les coefficients de ces équations.

Considérons d'abord le cas le plus général de l'équation (1) et l'équation (3) correspondante.

Écrivons (3) dans la forme

$$k' = -k^2 + ak + a' - b.$$

Posons $k=0$ au deuxième membre de l'équation. On obtient $k' = a' - b$. Supposons que les fonctions continues $a(x), b(x)$ sont bornées. On trouvera un nombre réel négatif C tel qu'on aura $k' < 0$ si l'on pose $k = C$ au deuxième membre de l'équation. Sous l'hypothèse $a' - b > 0$ ($a' > b$), le "tuyau" $x > x_0$, $C < y < 0$ contient, selon la méthode de rétracte due à *T. Ważewski* au moins

une solution continue de l'équation de *Riccati* considérée, qu'on peut prolonger pour $x \rightarrow +\infty$ (voir [22], [48]). Cette solution est définie pour $x = x_0$ et continue pour $x > x_0$.

Alors, pour que la limite d'application soit infinie (dans le cas général (1) et l'équation (3) il suffit que les fonctions $a(x)$, $b(x)$ soient bornées et continues et qu'on ait pour $x \geq x_0$, $a'(x) > b(x)$.

Si l'on considère l'équation (4), il est évident que la condition $a'(x) > b(x)$ obtient la forme plus simple $b(x) < 0$.

Pour l'équation homogène

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

on obtient le même résultat, la fonction $f(x)$ ne figurant dans (3) ou (4).

Dans le cas

$$(9) \quad y'' + b(x)y = f(x) \quad (a(x) \equiv 0)$$

où

$$y'' + b(x)y = 0$$

la fonction $b(x)$ doit être continue, bornée et négative pour $x \geq x_0$, ce qui suffit pour que la limite d'application soit infinie.

Dans le cas

$$(10) \quad y'' + a(x)y' + f(x) = 0$$

ou

$$y'' + a(x)y' = 0$$

($b(x) \equiv 0$), l'équation (3) a la solution continue $k = a$, et l'équation (4) $k = 0$, ce qui donne la limite d'application infinie sans aucune condition suffisante de plus.

D'autre côté, on peut résoudre l'équation (10) par les quadratures ce qui donne la possibilité de former les inégalités fonctionnelles différentes.

III

Dans l'article [45] nous avons montré qu'on peut, pour l'équation

$$(11) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

obtenir l'encadrement des solutions cherchant les courbes inférieures et supérieures pour l'équation de *Riccati* (4), utilisant le théorème fondamental de *Tchapligne* relatif aux équations différentielles du premier ordre.

Étant, donc, $k_1(x)$, $\left(k_1(x_0) = \frac{y_0'}{y_0}\right)$ une fonction continue satisfaisant dans $(x_0, x_1]$ à l'inégalité

$$k_1' + k_1^2 + ak_1 + b \geq 0,$$

on aura dans $(x_0, x_1]$

$$y_1(x) \geq y(x),$$

$y(x)$ étant la solution de l'équation

$$\frac{y'}{y} = k_1, (y_1(x_0) = y_0, y'_1(x_0) = y'_0) \text{ et } y(x), (y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0)$$

la solution de l'équation (11).

On démontre cette inégalité sous l'hypothèse que les fonctions $y_1(x)$, $y(x)$ sont de même signe dans $[x_0, x_1]$.

Remarquons que A. T. Popov dans son article: *O postroenii dvustoronej načalnoj pari približenii k rešeniju uravnenija $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$* (Sb. naučn. tr. Rostovsk.-n/D. in.-ta inž. ž.-d. transp. 1962, vip. 39, 43-46) utilise la même idée faisant l'évaluation $u \geq y \geq v$ de la solution y , de l'équation $y'' + py' + qy = 0$, $y(a) = y_0$, $y'(a) = y'_0$, appliquant le théorème de Tchapliguine concernant l'équation $z' = f(x, z)$ obtenue posant $\frac{y'}{y} = z - \frac{p}{2}$ (on obtient la forme canonique de l'équation (4)). Sur cet article voir *Referativnij žurnal-Matematika*, 1964, 6 B 191, réf. W. Azbelev et Z. Caljuk.

Notre article [45] est cependant publié en 1958.

Le but principal de cet article fut de démontrer que certaines courbes d'encadrement de Michel Petrovitch sont simultanément des courbes tchapliguiniennes.

Citerons quelques exemples qui illustrent le résultat de l'article [45], donnant l'évaluation des solutions de quelques équations bien connues.

Exemple III. 1. — Soit donnée l'équation (1)

$$y'' + 2ay' + f(x)y = 0$$

(voir [8] p. 421 où $f(x)$ est une fonction continue $m^2 < f(x) < M^2$ pour $x \geq x_0$, a une constante $a^2 > M^2$. Considérons la solution $y(x)$, $(y(x_0) = y_0 > 0, y'(x_0) = y'_0 > 0)$.

On démontre que cette solution $y(x) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow +\infty$.

L'équation (4) a la forme

$$k' + k^2 + 2ak + f(x) = 0.$$

Ces équations de comparasion (de Tchapliguine) sont

$$k' + k^2 + 2ak + m^2 = 0$$

$$k' + k^2 + 2ak + M^2 = 0.$$

(1) A. N. Tcherkassoff a montré (Voir [9]), que l'équation $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (l'unicité comprise) sous l'hypothèse $m < p(x) < M$, $\mu < q(x) < \mathfrak{M} < 0$ a toutes les solutions tendant vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$. Nos hypothèses considèrent $q(x)$ positive.

On obtient la courbe inférieure

$$y = \frac{y_0 \sqrt{w}}{1-w} \left(e^{(\sqrt{a^2-M^2}-a)x+ax_0-c_0\sqrt{a^2-M^2}} - e^{-(a+\sqrt{a^2-M^2})x+ax_0+c_0\sqrt{a^2-M^2}} \right)$$

et la courbe supérieure

$$y = \frac{y_0 \sqrt{w_1}}{1-w_1} \left(e^{(\sqrt{a^2-m^2}-a)x+ax_0-c_0'\sqrt{a^2-m^2}} - e^{-(a+\sqrt{a^2-m^2})x+ax_0+c_0'\sqrt{a^2-m^2}} \right)$$

où

$$w = \frac{y_0' + ay_0 - y_0 \sqrt{a^2-M^2}}{y_0' + ay_0 - y_0 \sqrt{a^2-M^2}}, \quad c_0 = x_0 + \frac{1}{2\sqrt{a^2-M^2}} \ln w$$

$$w_1 = \frac{y_0' + ay_0 - y_0 \sqrt{a^2-m^2}}{y_0' + ay_0 - y_0 \sqrt{a^2-m^2}}, \quad c_0' = x_0 + \frac{1}{2\sqrt{a^2-m^2}} \ln w_1.$$

Toutes les deux courbes d'encadrement sont positives pour $x > x_0$, tendant toutes les deux vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$, ce qui est donc valable aussi pour la solution $y(x)$ considérée, se trouvant entre ces deux courbes.

Exemple III. 2. — Soit donné l'équation de *Weber* (voir [8] p. 422)

$$y'' - xy' - ay = 0$$

($a = \text{const.}$). La solution $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ a la forme

$$y(x) = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{a(a+2) \cdots (a+2v-2)}{(2v)!} x^{2v}.$$

Posons

$$y' = ue^{\frac{x^2}{4}}.$$

On obtient

$$u' = \frac{x^2 + 4a - 2}{4} u.$$

Posons encore $\frac{u'}{u} = v$.

On obtient l'équation

$$v' + v^2 = \frac{x^2 + 4a - 2}{4}.$$

Les courbes d'encadrement pour cette équation seront

$$v_1(x) = \frac{x^3}{12} + \left(a - \frac{1}{2}\right)x, \quad v_2(x) = \frac{x}{2}.$$

Pour $a > 1$ on aura

$$e^{\frac{x^2}{2}} < 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a(a+2)\dots(a+2\nu-2)}{(2\nu)!} x^{2\nu} < e^{\frac{x^2}{2} \left(a + \frac{x^2}{24}\right)}$$

pour $x > 0$.

Exemple III. 3. — L'équation radiale ondulatoire (voir [8], p. 448) a la forme

$$x^2 y'' + (ax^2 + bx + c) y = 0.$$

Supposons qu'on ait $a < 0$, $b^2 - 4ac < 0$, $c < 0$, $b > 0$ et considérons la solution $y(x)$, ($y(x_0) = y_0 > 0$, $y'(x_0) = 0$).

On obtient pour $x > -\frac{c}{b}$

$$y_0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c}} (x - x_0) < y_0 \operatorname{ch} (x - x_0) \sqrt{-a}.$$

Le cas spécial est connu sous le nom de l'équation de Whittaker (voir [4], p. 489)

$$4x^2 y'' = (x^2 - 4kx + 4m^2 - 1) y.$$

Ici,

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = k, \quad c = \frac{1}{4} - m^2, \quad b^2 - 4ac = k^2 - m^2 + \frac{1}{4}.$$

On a, vraiment, $a < 0$. Si l'on a de plus

$$k > 0 \quad \text{et} \quad c < 0 \left(|m| > \frac{1}{2} \right), \quad b^2 - 4ac < 0 \left(k^2 < m^2 - \frac{1}{4} \right),$$

on obtient

$$y_0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{k^2}{1 - 4m^2} + \frac{1}{4}} (x - x_0) < y(x) < y_0 \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{2}.$$

Exemple III. 4. — Considérons, chez l'équation de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

la solution

$$y(x), \left(y(x_0) = y_0 > 0, \quad y'(x_0) = \nu \frac{y_0}{x_0}, \quad x_0 > 0 \right).$$

On obtient, pour $x > x_0$,

$$y(x) < y_0 x_0^{-\nu} x^{\nu}.$$

La courbe supérieure pour l'équation (4) ici a la forme $k = \frac{\nu}{x}$.

Exemple III. 5. — Dans le cas de l'équation

$$y'' - f(x)y = 0 \quad (f(x) > 0)$$

la courbe supérieure pour l'équation (4) est

$$k = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

ce qui donne la courbe supérieure

$$v(x) = y'_0 e^{\frac{y'_0}{y_0}(x-x_0) + \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^t f(u) du \right] dt}$$

par rapport à la solution

$$y(x), (y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0).$$

IV

On a souligné dans II que l'équation (10) peut être résolue par les quadratures ce qui permet la construction des inégalités fonctionnelles différentes (les solutions de l'équation considérée et les courbes supérieures et inférieures). La limite d'application est infinie.

Considérons, par exemple, l'équation

$$(12) \quad y'' - f(x)y' - \varphi(x) = 0,$$

où $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont pour $x > x_0$ les fonctions continues et positives. Soit encore k une constante $k > 1$ et $x = x^*$ un nombre réel tel qu'on a dans (x_0, x^*)

$$\int_{x_0}^x \varphi(t) dt < \frac{\varphi(x)(k-1)}{kf(x)}.$$

On a alors dans (x_0, x^*)

$$(13) \quad \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^t \varphi(u) du \right] dt < y(x) < k \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^t \varphi(u) du \right] dt$$

$y(x)$ étant la solution ($y(x_0) = y'(x_0) = 0$) de l'équation (12).

Il est facile de vérifier que ces courbes d'encadrement posées dans (1) donnent les inégalités (2). La solution $y(x)$ a la forme

$$(14) \quad y(x) = \int_{x_0}^x \left[e^{\int f(t) dt} \int_{x_0}^t \varphi(u) e^{-\int f(u) du} \right] dt.$$

Le suivant groupe d'inégalités peut être construit partant de la considération suivante.

Soit donnée l'équation

$$(15) \quad y'' + f(x)y' - f(x) = 0$$

où $f(x)$ est une fonction continue et positive. On obtient pour $k < 1$, dans l'intervalle (x_0, x^*) où

$$\int_{x_0}^x f(t) dt < \frac{1}{k} - 1$$

l'évaluation suivante:

$$k \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^t f(u) du \right] dt < y(x) < \int_{x_0}^x \left[\int_{x_0}^t f(u) du \right] dt,$$

$y(x)$ étant la solution de (15) avec

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0.$$

Les résultats de ce passage sont publiés dans [52]. Dans [54] on peut trouver une certaine comparaison des résultats de ce passage avec une inégalité trouvée dans [10].

CHAPITRE III

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES ET LA METHODE DE RETRACTE

Comme nous l'avons déjà souligné, ce chapitre contient non seulement l'application de la méthode de rétracte, mais aussi les passages concernant des inégalités différentielles, surtout celles généralisant des inégalités tchapliguiniennes. Il contient aussi les généralisations de certains résultats du chapitre précédent (obtenus par une large applications des inégalités différentielles), présentant donc, dans une certaine mesure, une méthode comparative.

III. 1. LIAISON AVEC LES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

Dans II 3. nous avons traité l'existence des solutions asymptotiquement bornées (solutions asymptotiques) de l'équation de la forme

$$(1) \quad y' = \varphi(x)y^n + \Psi(x, y) \quad (n \text{ un nombre naturel}).$$

On obtenait des résultats essentiellement différents pour $n = 2k$ ($k = 1, 2, \dots$) et $n = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). On supposait $\varphi(x)$ continue pour $x > x_0 > 0$, satisfaisant à une des conditions

- a) $C_1 < \varphi(x) < C_2$ (C_1, C_2 étant les constantes telles qu'on a $C_1 C_2 > 0$),
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \pm 0$
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \pm \infty$.

Quant à la fonction $\Psi(x, y)$, elle était continue dans tout le plan XOY , satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$|\Psi(x, Y) - \Psi(x, y)| < K|Y - y|$$

dans chaque région bornée du plan XOY . De plus $\Psi(x, y)$ satisfaisait à l'une des conditions

$$(1^*) \quad \begin{aligned} 0 < N < \Psi(x, y) < M \\ -N < \Psi(x, y) < -M \quad (N, M > 0) \\ -N < \Psi(x, y) < M \end{aligned}$$

ou à l'une des conditions

$$(2^*) \quad \begin{aligned} 0 < N|y| < \Psi(x, y) < M|y| \\ -N|y| < \Psi(x, y) < -M|y| \quad \text{pour } y \neq 0 \text{ et } \Psi(x, 0) = 0. \\ -N|y| < \Psi(x, y) < M|y| \end{aligned}$$

Par l'application du théorème fondamental de Tchapliguine nous avons réduit l'étude de l'équation (1) à l'étude des équations plus simples au point de vue de l'intégration qualitative

$$(2) \quad y' = \varphi(x) y^n \pm K \quad (K \text{ une constante positive})$$

et

$$(3) \quad y' = \varphi(x) y^n \pm Ky.$$

Nous avons étudié alors les équations de comparaison (2), (3) d'une façon inspirée par une méthode de Michel Petrovitch ([35]).

En distinguant, dans le cas (2*), $y < 0$ et $y > 0$, prenant en égard toutes les combinaisons des hypothèses relatives à $\varphi(x)$, $\Psi(x, y)$ et à n , on obtient 108 cas différents et l'on constate l'existence des solutions asymptotiques dans 50 de ces cas. Il était évident qu'il faudrait systématiser ces résultats, en diminuant le nombre de cas essentiellement différents. Pour illustrer l'espèce des résultats obtenus nous citons ici encore une fois cinq théorèmes dont on parle, pour qu'on puisse voir clairement en quoi consistent les généralisations qui suivent.

Théorème I. — *Sous les conditions*

$$n = 2k, k = 1, 2, \dots; \quad C_1 < \varphi(x) < C_2 \quad (C_1, C_2 < 0);$$

$$0 < N < \Psi(x, y) < M$$

(avec les autres hypothèses générales sur $\varphi(x)$, $\Psi(x, y)$ citées déjà en avant — ces hypothèses restent invariables dans tous les cinq théorèmes); l'équation (1) a une classe de solutions asymptotiques (toutes les solutions positives et toutes les solutions qui passent par les points de l'axe $y=0$).

Théorème II. — *Sous les conditions*

$$n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots; C_1 < \varphi(x) < C_2 \quad (C_1, C_2 < 0);$$

et si l'on a une des conditions (1), toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.*

Théorème III. — *Sous les conditions*

$$n = 2k, k = 1, 2, \dots; C_1 < \varphi(x) < C_2 \quad (C_1, C_2 < 0);$$

$$N|y| < \Psi(x, y) < M|y| \quad \text{pour } y \neq 0 \text{ et } \Psi(x, 0) = 0$$

toutes les solutions positives sont asymptotiquement bornées ne tendant pas vers zéro et il existe une classe de solutions négatives asymptotiquement bornées qui tendent vers zéro.

Théorème IV. — *Sous les conditions*

$$n = 2k + 1, k = 1, 2, \dots; C_1 < \varphi(x) < C_2 \quad (C_1, C_2 < 0);$$

$$N|y| < \Psi(x, y) < M|y| \quad \text{pour } y \neq 0 \text{ et } \Psi(x, 0) = 0,$$

toutes les solutions positives sont asymptotiquement bornées ne tendant pas vers zéro et toutes les solutions négatives tendent vers zéro.

Théorème V. — *Sous les conditions*

$$n = 2k, k = 1, 2, \dots; \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$$

$$0 < N < \Psi(x, y) < M$$

toutes les solutions positives et toutes les solutions passant par les points de l'axe $y=0$ sont asymptotiquement bornées. Elles tendent vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$.

III. 2. INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES DE T. WAZEWSKI. LA MÉTHODE DE RÉTRACTE DUE A T. WAZEWSKI

On généralise dans ce passage nos résultats précédents relatifs à l'existence des solutions asymptotiques, par les inégalités de T. Wazewski et par sa méthode de rétracte. Adressant le lecteur aux travaux cités de T. Wazewski (ne donnant pas donc les définitions détaillées de toutes les notions), nous citons cependant quelques définitions et théorèmes les plus nécessaires, dus à T. Wazewski. Le texte est donné directement selon le texte original.

Hypothèse H. — 1° Les fonctions $f_i(t, y_1, \dots, y_n)$ sont continues dans un ensemble ouvert Ω de l'espace des points (t, y_1, \dots, y_n) .

2° Si, pour un i quelconque ($i = 1, \dots, n$) les points

$$A_i = (t, a_1, \dots, a_{i-1}, C, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

$$B_i = (t, b_1, \dots, b_{i-1}, C, b_{i+1}, \dots, b_n)$$

appartiennent à Ω et

$$a_v < b_v \quad (v = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n)$$

alors

$$f_i(A_i) < f_i(B_i).$$

Dans le cas $n=1$ l'hypothèse H est évidemment vérifiée pour tout ensemble Ω des points (t, y_1) .

Théorème W_1 . — *Dans l'hypothèse H il passe par tout point $(t_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$ de Ω une intégrale supérieure \bar{J} et (une intégrale inférieure \underline{J}) du système*

$$(4) \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

relative à ce point et à un intervalle $t_0 < t < \alpha$. Le nombre α peut être choisi de façon qu'un point M variant sur \bar{J} tend vers la frontière de Ω lorsque t tend vers α .

Théorème W_2 . — *Supposons que les fonctions*

$$f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad \text{et} \quad g_i(t, y_1, \dots, y_n)$$

soient continues dans un ensemble ouvert Ω et soient

$$A = (t_0, a_1, \dots, a_n), \quad B = (t_0, b_1, \dots, b_n)$$

deux points quelconques de Ω , tels que $A < B$ (c.-à-d. $a_i < b_i$ pour $(i = 1, 2, \dots, n)$).

Considérons deux systèmes d'équations différentielles

$$(5) \quad \frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$(6) \quad \frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

I. Si les fonctions f_i remplissent l'Hypothèse H et le système (5) majore le système (6) (c.-à-d. $f_i < g_i$ dans Ω), si ensuite $\Phi(t)$ désigne une intégrale de (6) issue de A et $\Psi(t)$ l'intégrale supérieure droite de (5) issue de B , alors $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ à droite de t_0 dans tout l'intervalle $t_0 < t < \alpha$ dans lequel ces deux intégrales existent.

II. Si les fonctions f_i remplissent dans Ω l'Hypothèse H et le système (6) majore (5) dans Ω (c.-à-d. $f_i < g_i$), si $\Psi(t)$ désigne une intégrale du système (6) issue de B et $\Phi(t)$ l'intégrale inférieure droite de (5) relative à A , alors $\Psi(t)$ majore $\Phi(t)$ à droite de t_0 dans tout intervalle $t_0 < t < \alpha$ dans lequel ces deux intégrales existent.

L'Hypothèse H et les théorèmes W_1 et W_2 sont cités d'après [25].

NOTION DE RÉTRACTE

Considérons dans un espace quelconque, deux ensembles A et B , tels que $A \subset B$. Nous dirons que la transformation $Q = \varphi(P)$ effectue une rétraction de B en A lorsqu'elle jouit des propriétés suivantes: 1° Elle est définie et continue dans B , 2° $\varphi(P) \in A$ lorsque $P \in B$ et $\varphi(P) = P$ lorsque $P \in A$.

S'il existe au moins une transformation de telle sorte, on dit, d'après K. Borsuk ([28]), que A est un rétracte de B .

L'Hypothèse H_1 — Les fonctions réelles $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ des variables réelles t, x_1, \dots, x_n sont continues dans un ensemble ouvert Ω . Par chaque point de Ω il passe une intégrale unique du système

$$(7) \quad \frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

L'ensemble ω est un ensemble ouvert et l'on a $\omega \subset \Omega$.

Nous appellerons un point M (appartenant à la frontière de ω relativement à Ω) un point de sortie, s'il existe un point $P \in \omega$ tel que M appartient à l'intégrale unique issue de P et prolongée à droite. On définit d'une façon analogue un point d'entrée. Le point de sortie sera le point de sortie stricte s'il est aussi un point d'entrée de l'ensemble $\Omega - \omega$.

Théorème W_3 — Admettons l'Hypothèse H_1 relativement au système (7) et supposons que tout point de sortie soit un point de sortie stricte. Soit Z un ensemble tel que $Z \subset \omega \cup S$, $Z \cap S$ est un rétracte de S , $Z \cap S$ n'est pas un rétracte de Z (S — l'ensemble de tous les points de sortie). Ceci étant admis, il existe au moins un point P_0 , tel que $P_0 \in Z - S$ (c.-à-d. $P_0 \in Z \cap \omega$) et que la demi-intégrale droite issue de P_0 et saturée relativement à Ω (c.-à-d. prolongée vers la droite autant que ce soit possible) soit contenue dans ω . Ceci veut dire que

$$\text{Demi}_{(+)} J(P_0) \subset \omega.$$

Définition. Supposons que les fonctions

$$(8) \quad l^\alpha(t, x_1, \dots, x_n), m^\beta(t, x_1, \dots, x_n), \quad (\alpha = 1, \dots, p; \beta = 1, \dots, q)$$

soient de la classe C^1 (c.-à-d. possèdent les dérivées premières continues) dans un ensemble ouvert Ω . Désignons par ω l'ensemble des points vérifiant le système des relations

$$(\omega) \quad P \in \Omega, l^\alpha(P) < 0, m^\beta(P) < 0, \quad (\alpha = 1, \dots, p; \beta = 1, \dots, q).$$

Soient L^γ et M^δ ($\gamma = 1, \dots, p; \delta = 1, \dots, q$) les ensembles des points P vérifiant le système des relations

$$P \in \Omega, l^\gamma(P) = 0$$

$$(9) \quad l^\alpha(P) < 0, \quad (\alpha = 1, \dots, p); m^\beta(P) < 0, \quad (\beta = 1, \dots, q)$$

(l'ensemble L^γ)

$$P \in \Omega, m^\delta(P) = 0$$

$$(10) \quad l^\alpha(P) < 0, (\alpha = 1, \dots, p); m^\beta(P) < 0 (\beta = 1, \dots, q)$$

(l'ensemble M^δ).

Supposons que pour $1 < \gamma < p$ la fonction $l^\gamma(P)$ ait la pente $\left(\frac{dl^\gamma(P)}{dt}\right)$, lorsqu'on remplace au lieu de x_t l'intégrale du système (7) positive en chaque point de L^γ et que pour $1 < \delta < q$ la fonction $m^\delta(P)$ ait la pente négative en chaque point de M^δ .

Si ces hypothèses sont remplies, l'ensemble ω , défini par les relations (ω), sera dit ensemble polyfacial régulier relativement au système (7), possédant comme les faces positives les ensembles L^γ et comme les faces négatives les ensembles M^δ .

Théorème W^L . — Supposons que l'ensemble ω soit polyfacial régulier à faces positives L^γ et négatives M^δ . Admettons l'Hypothèse H_1 au système (7) et posons $S = \text{Sortie}(\omega, \Omega)$. Ceci étant admis nous affirmons que l'égalité $S = \text{Sortie}(\omega, \Omega) = \text{Sortie stricte}(\omega, \Omega)$ a lieu. On a en plus

$$(11) \quad S = \sum_{\gamma=1}^p L^\gamma - \sum_{\delta=1}^q M^\delta.$$

La notion de rétracte, l'hypothèse H_1 , les théorèmes W_3 et W_4 sont donnés d'après [22]. Voir aussi [23], [24]. L'ensemble ω est appelé un "tuyau".

III 3. INTÉRPRÉTATION DE NOS RÉSULTATS PRÉCÉDENTS AU POINT DE VUE DE LA MÉTHODE DE RÉTRACTE

On peut interpréter nos résultats ([46]) concernant l'existence des solutions asymptotiques (excepté ceux concernant les solutions tendant vers zéro) au point de vue de la méthode de rétracte.

Envisageons le théorème I. de [46] et de ce passage (p. 97). D'après les hypothèses, c'est le membre $\varphi(x)y^{2k}$ qui donne le signe au deuxième membre de l'équation, pour $|y| > y_0$, où y_0 est un nombre positif. A tout point des droites $y = \pm y_0$ correspond une solution de l'équation différentielle, dont la dérivée est négative en ce point. On a, pour $y = 0$:

$$y' = \varphi(x)y^{2k} + \Psi(x, y) = \Psi(x, 0) > 0;$$

c'est-à-dire le long de l'axe des x les solutions ont une dérivée positive. La figure 1 représente la situation obtenue. Pour chaque y_0' où $|y_0'| > y_0$ la figure reste la même. Envisageons deux tuyaux:

$$(\alpha) \quad x > x_0, \quad -y_0 < y < 0;$$

$$(\beta) \quad x > x_0, \quad 0 < y < y_0.$$

Dans le cas (α), la région ω est donnée par les inégalités $x > x_0$, $-y_0 < y < 0$. Prenons comme Z le segment $[M_1, M_2]$ (voir la figure 1).

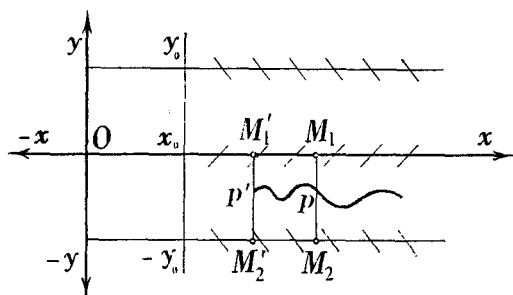


Figure 1

$Z \cap S$ est composé de deux points M_1 et M_2 . M_1 est un rétracte de la demi-droite $y=0$, ($x > x_0$), M_2 est un rétracte de la demi-droite $y=-y_0$, ($x > x_0$), $Z \cap S$ est donc un rétracte de S . $Z \cap S$ n'est pas un rétracte de Z , parce qu'il n'existe pas une transformation continue qui transforme un segment en ces bouts. Il existe donc au moins un point P sur (M_1, M_2) tel que la solution correspondante reste dans ω pour $x \rightarrow +\infty$.

On peut trouver un point analogue P' sur (M_1', M_2') , et une intégrale analogue, qui peut cependant coïncider avec celle appartenant à P . On ne peut pas donc garantir que l'existence au moins d'une solution négative asymptotiquement bornée ce qui donne plus que le théorème I. La conclusion est donnée à l'aide du théorème W_3 .

Quant au tuyau (β), l'ensemble S est vide. Envisageons comme Z un point quelconque de ω ; $Z \cap S$ est vide; il est donc un rétracte de S (chaque ensemble est un rétracte de lui-même). $Z \cap S$ n'est pas, évidemment, un rétracte de Z . Il appartient donc au point Z une solution asymptotiquement bornée, mais, comme Z était un point quelconque, on peut en conclure que toutes les solutions de ω sont bornées. Mais ce fait peut être démontré facilement sans rétractes. C'est aussi un cas spécial du théorème W_3 .

Quant au fait que certaines solutions (dans les théorèmes III et IV) tendent même vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$, c'est une conséquence de ce que $y=0$ satisfait à l'équation donnée et il ne faut pas l'interpréter par la méthode de rétracte. On peut donner une généralisation des parties des théorèmes III et IV concernant les solutions tendant vers zéro. (Nos propres théorèmes de ce passage sont désignés par A_i).

Théorème A_1 . — (démontré à l'aide du théorème de Tchapliguine).

L'équation

$$(12) \quad y' = \Psi(x, y) + r(x, y)$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY), où $-Ny < \Psi(x, y)$

pour $y < 0$; $\Psi(x, 0) = 0$ et $|r(x, y)| < (N - \eta)|y|$

pour $y \neq 0$, $|y| < \delta > 0$; $r(x, 0) = 0$, ($0 < \eta < N$)

et $\Psi(x, y)$, $r(x, y)$ sont deux fonctions continues dans XOY , a une classe de solutions négatives asymptotiquement bornées et tendant vers zéro lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Ce théorème ne comprend pas les solutions tendant vers zéro du théorème V. C'est aussi la méthode de rétracte qui garantit l'existence des solu-

tions bornées dans ce cas (théorème V), mais c'est la forme curviligne spéciale du tuyau (voir [46], [48]) qui sert à démontrer que les solutions tendent même vers zéro.

III 4. — GÉNÉRALISATIONS

On généralise dans ce paragraphe les résultats du travail [46], concernant l'équation $y' = \varphi(x)y^n + \Psi(x, y)$.

Théorème A_2 . — *Tous les énoncés des théorèmes I, II, III, IV, V concernant seulement l'existence des solutions asymptotiques ont lieu aussi sans la condition de Lipschitz (sans l'hypothèse d'unicité).*

On obtient ce résultat utilisant les théorèmes W_1 et W_2 . Les équations de comparaison jouissent de la propriété d'unicité, ce qui est suffisant.

Théorème A_3 . — *L'équation*

$$y' = \varphi(x)y^{2k} + \Psi(x, y) \quad (k=1, 2, \dots; ;)$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY), où $\Psi(x, 0) > 0$, $|\Psi(x, y)| < M + P|y|^{2k-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 2k$, M et P deux constantes positives, $\varphi(x) < c < 0$, ($\varphi(x)$ continue pour $x > x_0$, $\Psi(x, y)$ continue dans tout le plan XOY), a une classe de solutions asymptotiquement bornées (toutes les solutions positives, toutes les solutions passant par les points de l'axe $y=0$ et au moins une solution négative).

Théorème A_4 . — *L'équation*

$$y' = \varphi(x)y^{2k+1} + \Psi(x, y) \quad k=0, 1, \dots$$

($\varphi(x)$ et $\Psi(x, y)$ continues, l'unicité remplie dans tout le plan XOY), où

$$\varphi(x) < c < 0; \quad |\Psi(x, y)| < A + B|y|^{2k+1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1; \quad A, B > 0$$

a toutes les solutions asymptotiquement bornées.

Les théorèmes A_3 , A_4 généralisent les parties des théorèmes I — V concernant seulement l'existence des solutions asymptotiquement bornées. On peut les réduire toujours au cas des tuyaux (α) ou (β).

Théorème A_5 . — *Considérons l'équation*

$$(13) \quad y' = \Psi(x, y)$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY). Supposons qu'il existe une suite de nombres $r_n > 0$, $r_n \rightarrow +\infty$, telle qu'on ait

$$\text{sign } y \Psi(x, y) = \text{const.}$$

pour $|y| = r_n$ ("Sign" signifie + ou -).

Alors, l'équation a au moins une solution asymptotiquement bornée. Particulièrement, pour $y\Psi < 0$ toutes les solutions sont bornées. Pour $y\Psi > 0$, il suffit que "sign $y\Psi = \text{const}$ " soit rempli pour un "n".

Théorème A_6 . — Si l'on a, pour l'équation (13), pour $|y| = r_n$

$$\text{sign } \Psi(x, y) = \text{const}$$

et sign $\Psi(x, 0)$ est contraire, il existe une classe de solutions asymptotiquement bornées. Particulièrement, pour $\Psi(x, 0) < 0$ toutes les solutions négatives et celles passant par les points de l'axe $y=0$ et au moins une solution positive sont asymptotiquement bornées. Pour $\Psi(x, 0) > 0$ toutes les solutions positives, celles passant par les points de l'axe $y=0$ et au moins une solution négative sont asymptotiquement bornées.

Ces théorèmes généralisent A_3 et A_4 .

Exemples pour A_5 et A_6 . — Considérons l'équation

$$y' = \Phi(y)\varphi(x) + \Psi(x, y); \quad |\Psi(x, y)| < M$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY).

Si l'on a

a)
$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(y) = \pm\infty, \quad \varphi(x) > c > 0$$

il existe au moins une solution asymptotique.

b)
$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(y) = \pm\infty, \quad \varphi(x) < c < 0$$

toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.

c)
$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(y) = +\infty, \quad \varphi(x) > c > 0, \quad \Psi(x, 0) < 0.$$

Solutions asymptotiques: toutes les solutions négatives, celles passant par les points de l'axe $y=0$ et au moins une solution positive.

d)
$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(y) = +\infty, \quad \varphi(x) < c < 0, \quad \Psi(x, 0) > 0.$$

Solutions asymptotiques: toutes les solutions positives, celles passant par les points de l'axe $y=0$, au moins une solution négative.

e)
$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(y) = -\infty, \quad \varphi(x) > c > 0, \quad \Psi(x, 0) > 0.$$

Le même cas comme d).

f)
$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \Phi(y) = -\infty, \quad \varphi(x) < c < 0, \quad \Psi(x, 0) < 0$$

Le même cas comme c).

On obtient les théorèmes A_5 et A_6 toujours par les tuyaux du type (α) et (β) .

MODIFICATIONS DE QUELQUES THÉORÈMES
DE MM. PEYOVITCH ET TATARKIEWICZ

K. Tatarkiewicz, dans son travail [26] donne quelques exemples de l'allure asymptotique des solutions des équations différentielles du premier ordre. Il introduit la notion de la fonction de comparaison $\varphi(\varepsilon, t)$ et puis de la fonction de forte comparaison, considérant, à l'aide de celle-ci l'expression $x(t)e^{-\varphi(\varepsilon, t)}$ dans les cas où elle est asymptotiquement bornée. A titre d'exemple pour la méthode de rétracte nous traitons quelques équations sous les hypothèses tantôt moins générales tantôt incomparables à celles de K. Tatarkiewicz, et nous obtenons des conclusions concernant immédiatement des solutions $x(t)$.

Théorème A_7 . — *L'équation*

$$(14) \quad \dot{x} = a(t)x + d(x, t) + f(t)$$

(les fonctions $a(t)$ et $f(t)$ continues pour $t > t_0$, la fonction $d(x, t)$ continue dans tout le plan TOX et

$$|f(t)| < M; \quad d(0, t) = 0 \quad |d(x, t) - d(\bar{x}, t)| < \rho(t)|x - \bar{x}|;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \bar{a} < 0,$$

à toutes les solutions asymptotiquement bornées.

En effet, posons dans la condition de Lipschitz $\bar{x} = 0$. On obtient $|d(x, t)| < \rho(t)|x|$ pour chaque x et t , par exemple, $t > t_0 > 0$. Il faut montrer qu'il existe un x_0 tel qu'on ait

$$|a(t)| > |d(x, t) + f(t)| \quad \text{pour } |x| > |x_0|.$$

Cela permettra la formation du tuyau du type (β) ce qui montre que toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.

Vraiment,

$$|d(x, t) + f(t)| < |d(x, t)| + |f(t)| < \rho(t)|x| + M.$$

Pour qu'il soit, pour chaque $t > t_0$,

$$M + \rho(t)|x_0| < |a(t)||x_0|$$

il faut qu'on ait

$$|x_0| > \frac{M}{|a(t)| - \rho(t)}.$$

On peut choisir toujours t_0 de façon que $|a(t)| > \rho(t)$ pour $t > t_0$.

On peut donc conclure que, pour $|x| > |x_0|$, le membre $a(t)x$ détermine le signe du deuxième membre de l'équation.

Théorème A_8 . — *Sous les mêmes conditions comme dans le théorème A_7 , mais pour $\bar{a} > 0$, l'équation a au moins une solution asymptotiquement bornée.*

Théorème A_9 . — *Sous les mêmes hypothèses comme dans A_7, A_8 , mais si l'on a aussi $\bar{a} = 0$ et $a(t)$ ne change pas de signe pour $t > t^* > t_0 > 0$ et*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\rho(t)}{|a(t)|} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{|a(t)|} = 0, \quad a(t) \neq 0$$

on aura:

Si $a(t) > 0$ pour $t > t^*$, il existe au moins une solution asymptotiquement bornée.

Si $a(t) < 0$ pour $t > t^*$, toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.

Théorème A_{10} . — *Considérons l'équation*

$$(15) \quad \dot{x} = a(t)x + d(x, t)$$

($a(t)$ continue pour $t \geq 0$, $d(x, t)$ continue dans tout le plan TOX , l'unicité remplie dans tout le plan TOX) où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \bar{a} < 0, \quad |d(x, t)| \leq \gamma(t)|x|; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = 0.$$

Sous ces hypothèses toutes les solutions de l'équation donnée sont bornées.

Si l'on a $\bar{a} = 0$, $\int_0^{\infty} a(t) dt = -\infty$, $\int_0^{\infty} \gamma(t) dt < +\infty$

toutes les solutions tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow +\infty$.

La première partie du théorème (que toutes les solutions sont asymptotiquement bornées) est évidente (à cause des théorèmes précédents) et l'on démontre la seconde partie à l'aide des équations de comparaison du type

$$\dot{x} = [a(t) + \gamma(t)]x$$

formées par les inégalités différentielles de Tchapliguine.

T. Peyovitch a considéré ([37]—[40]) utilisant la méthode d'approximations successives l'équation

$$y' = a(x)y + f(x) + \varphi(x, y)$$

On peut, sous certaines modifications de ses hypothèses, démontrer quelques résultats semblables à l'aide de la méthode de rétracte.

Théorème A_{11} . — *Considérons l'équation*

$$(16) \quad y' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y + f(x) + \Psi(x, y)$$

(l'unicité remplie dans tout le plan XOY) où

- 1) $\varphi(x)$ une fonction positive et monotone pour $x > x_0 > 0$ et $\varphi(x) \rightarrow +\infty$;
- 2) $\Psi(x, y)$ est définie et continue dans tout le plan XOY et

$$|\Psi(x, Y) - \Psi(x, y)| < \lambda(x) |Y - y|, \quad \Psi(x, 0) = 0$$

où $\lambda(x)$ est continue pour $x > x_0 > 0$ et $\lambda(x) \rightarrow +0$.

Si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \varphi > 0 \quad \text{et} \quad |f(x)| < M$$

il existe au moins une solution asymptotiquement bornée. Il est de même dans le cas

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|f(x)|}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(x)}{\varphi'(x)} = 0.$$

On peut démontrer ce théorème, sous une hypothèse adjointe, dans le cas où les hypothèses ont lieu seulement pour

$$x > x_0 > 0, \quad |y| < B.$$

Théorème A_{12} . — Les théorèmes A_{7-11} ont lieu lorsqu'on remplace $a(t)x$, $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y$ respectivement par

$$a(t)x^{2n+1} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y^{2n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(avec l'exclusion de la deuxième partie du théorème A_{10} , concernant les solutions tendant vers zéro).

Les tuyaux utilisés dans les démonstrations des théorèmes A_{7-11} sont du type (α) et (β) .

Les démonstrations sont analogues à celle du théorème A_7 (voir l'esquisse de la démonstration, donnée après le texte du théorème). Il s'agit toujours des majorations qui montrent quelle expression du deuxième membre lui détermine le signe.

Remarque. Nous allons démontrer enfin la proposition suivante, trouvée dans [8].

L'équation

$$y' = g(x)y + f(x,y)$$

($f(x, y), g(x)$ — fonctions continues) avec $g(x) > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x, 0)}{g(x)} > 0$, où l'on a

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < \theta g(x) |y_2 - y_1|; \quad 0 < \theta < 1,$$

a au moins une solution asymptotiquement bornée. Pour que l'on puisse appliquer la méthode de rétracte, il faut démontrer que l'on a $|f(x, y)| < g(x) |y|$ pour $|y| \geq |y_0|$. Cela rend possible la formation du „tuyau“ garantissant au moins une solution bornée. Vraiment, on a

$$|f(x, y) - f(x, 0)| < \theta g(x) |y|.$$

On a ensuite

$$|f(x, y)| - |f(x, 0)| < |f(x, y) - f(x, 0)|;$$

$$|f(x, y)| < |f(x, 0)| + \theta g(x) |y|;$$

$$|f(x, y)| < g(x) \left(\theta |y| + \left| \frac{f(x, 0)}{g(x)} \right| \right).$$

L'inégalité $\theta |y| + \left| \frac{f(x, 0)}{g(x)} \right| < |y|$ est vraie. En effet, partant d'une certaine x , on aura $\theta |y| + \left| \frac{f(x, 0)}{g(x)} \right| < \theta |y| + \varepsilon$, (ε positif). Pour qu'on ait $\theta |y| + \varepsilon < |y|$ il suffit de choisir $|y| > \frac{\varepsilon}{1-\theta} > 0$, ce qui est toujours possible.

III. 5. SYSTÈME DE DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On utilise, dans l'étude de l'existence des solutions asymptotiques dans le cas des systèmes d'équations le critère donné dans le théorème W_4 .

Considérons d'abord le système

$$(17) \quad \begin{cases} y' = \varphi(x) y^{2k+1} + \sigma(x, y, z), \\ z' = \Psi(x) z^{2p+1} + \tau(x, y, z) \end{cases} \quad k, p = 0, 1, 2, \dots$$

L'application du critère mentionné réduit le problème à la détermination du signe des seconds membres des équations du système, semblablement au cas d'une équation différentielle. Pour que les termes $\varphi(x) y^{2k+1}$ et $\Psi(x) z^{2p+1}$ puissent déterminer, pour $|y|, |z|$ suffisamment grand le signe des deuxièmes membres correspondants des équations du système, il faut ajouter les conditions spéciales, par exemple

$$(18) \quad \begin{cases} |\sigma(x, y, z)| < A + B |y|^{2k+1-\varepsilon}, & 0 < \varepsilon < 1 \\ |\tau(x, y, z)| < A_1 + B_1 |z|^{2p+1-\varepsilon_1}, & 0 < \varepsilon_1 < 1 \end{cases}$$

(A, B, A_1, B_1 les constantes positives).

On obtient, au lieu du tuyau sous la forme $x > x_0, y_1 < y < y_2$ (le cas d'une équation) les tuyaux sous la forme des parallélépipèdes. Les figures 2, 3, 4, 5 représentent les cas où: toutes les solutions sont asymptotiquement bornées (figure 2— ∞^2), il existe une classe de solutions bornées (figures 3 et 4— ∞^1), il existe au moins une solution bornée (figure 5— ∞^0). Les symboles $\infty^2, \infty^1, \infty^0$ désignent les ensembles de solutions dépendant de 2, 1, 0 paramètres, $BFGC$ se trouve à l'infini

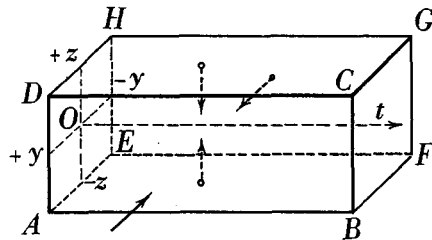


Figure 2

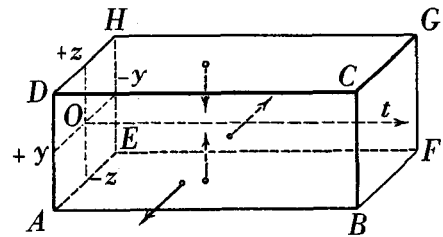


Figure 3

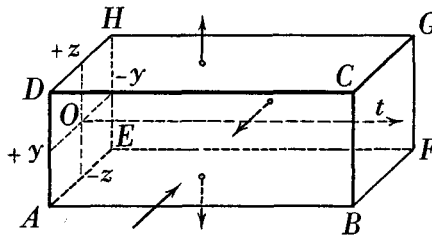


Figure 4

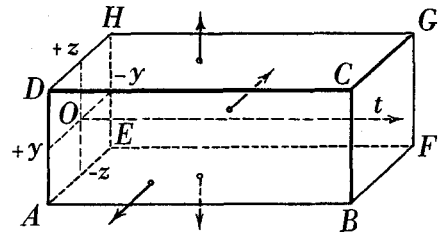


Figure 5

On peut démontrer, utilisant la méthode de rétracte

Théorème A_{13} . — Sous les hypothèses (18) et si $\varphi(x), \Psi(x)$ satisfont à une des conditions

$$(19) \quad \begin{cases} \text{a) } \varphi(x) < C < 0, & \Psi(x) < C_1 < 0, \\ \text{b) } \varphi(x) < C < 0, & \Psi(x) > C_1 > 0, \\ \text{c) } \varphi(x) > C > 0, & \Psi(x) < C_1 < 0, \\ \text{d) } \varphi(x) > C > 0, & \Psi(x) > C_1 > 0, \end{cases}$$

le système (17) (l'unicité remplie dans tout l'espace $OXYZ$) a au moins une solution asymptotique.

Plus précisément, dans le cas a) toutes les solutions sont asymptotiquement bornées, dans les cas b), c) il existe une classe de solutions asymptotiquement bornées, dans le cas d) il y a au moins une solution asymptotiquement bornée.

Les figures 6, 7, 8, 9 représentent les intersections des parallélépipèdes correspondants par les plans $t=t_0$ dans les cas *a*), *b*), *c*), *d*).

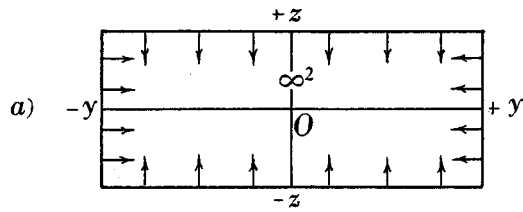


Figure 6

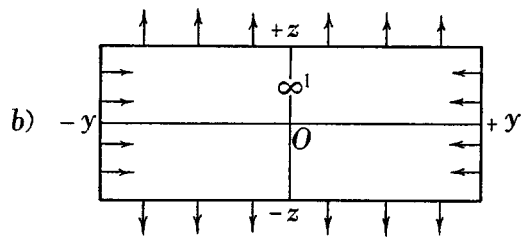


Figure 7

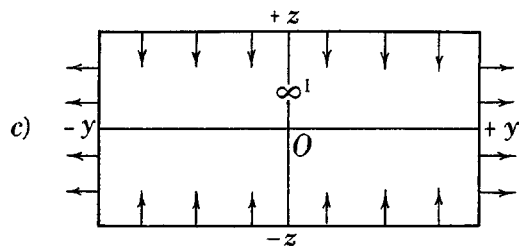


Figure 8

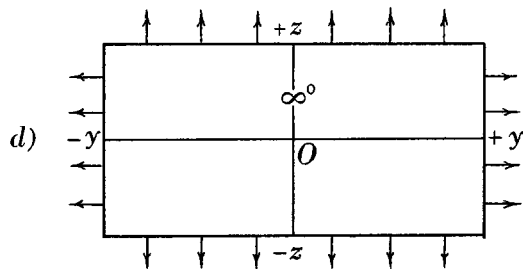


Figure 9

Dans le cas de la figure 6, toutes les solutions entrent dans le tuyau. Les cas représentés sur les figures 7, 8 sont essentiellement équivalents à l'exemple de T. Ważewski (voir [23], [24]), mais pour $t = \infty$. Quant au cas représenté sur la figure 9, prenons comme Z un rectangle d'intersection (comme sur la figure 9). $Z \cap S$ (c'est-à-dire les côtés du rectangle) n'est pas un rétracte de Z (l'homéomorphie avec la circonférence — voir [23], [24]), $Z \cap S$ est un rétracte de S (les côtés de sortie correspondants passent par rétraction en côtés correspondants du rectangle). Il existe $P \in Z$ auquel correspond une solution bornée. Il existe pour chaque intersection un tel point P , mais, t étant dans l'infini, toutes les solutions correspondantes peuvent coïncider et on ne peut garantir que l'existence au moins d'une solution asymptotique. Remarquons que la propriété d'être un rétracte est un invariant de la homéomorphie.

Le travail fondamental relatif aux rétracte est celui de K. Borsuk (voir [28]).

Théorème A_{14} . — *Considérons le système*

$$(20) \quad \begin{cases} y' = \varphi(x) y^{2k} + \sigma(x, y, z); \\ z' = \varphi(x) z^{2p} + \tau(x, y, z); \end{cases} \quad k, p = 1, 2, \dots$$

(l'unicité remplie dans tout l'espace $OXYZ$).

Si l'on a

$$(21) \quad \begin{cases} |\sigma(x, y, z)| < A + B|y|^{2k-\varepsilon}, & 0 < \varepsilon < 2k \\ |\tau(x, y, z)| < A_1 + B_1|z|^{2p-\varepsilon_1}, & 0 < \varepsilon_1 < 2p \end{cases}$$

(A, B, A_1, B_1 les constantes positives), et si une des conditions suivantes est remplie

$$(22) \quad \begin{cases} a') \quad \varphi(x) < C < 0, & \Psi(x) < C_1 < 0, & \sigma(x, 0, z) > 0, & \tau(x, y, 0) > 0, \\ b') \quad \varphi(x) < C < 0, & \Psi(x) > C_1 > 0, & \sigma(x, 0, z) > 0, & \tau(x, y, 0) < 0, \\ c') \quad \varphi(x) > C > 0, & \Psi(x) < C_1 < 0, & \sigma(x, 0, z) < 0, & \tau(x, y, 0) > 0, \\ d') \quad \varphi(x) > C > 0, & \Psi(x) > C_1 > 0, & \sigma(x, 0, z) < 0, & \tau(x, y, 0) < 0, \end{cases}$$

le système a une classe de solutions asymptotiques. Les intersections correspondantes des parallélépipèdes „principaux“ sont données sur les figures 10, 11, 12, 13 qui représentent les cas a'), b'), c'), d').

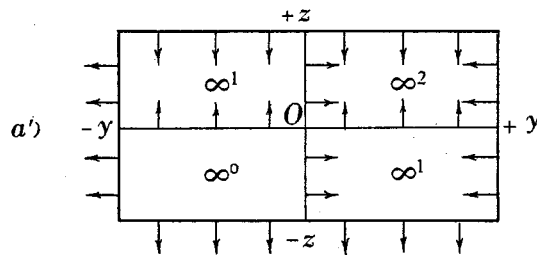


Figure 10

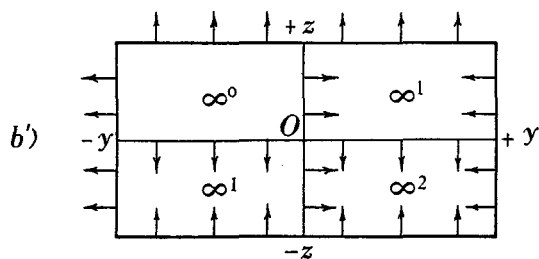


Figure 11

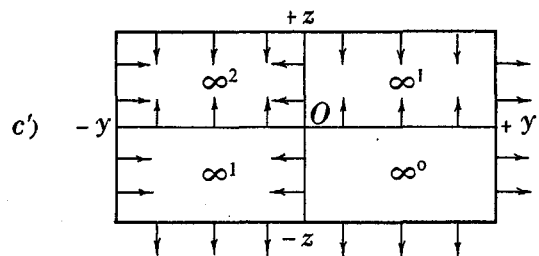


Figure 12

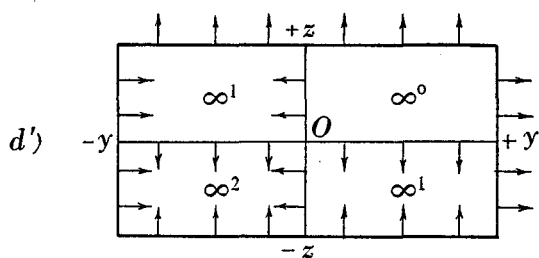


Figure 13

Ici les conditions supplémentaires font décomposer les parallélépipèdes „principaux“ en quatre composants, se réduisant, de leur côté, toujours à un des cas du théorème A₁₃.

Pour généraliser les deux derniers théorèmes, introduisons deux suites convenables de nombres

$$\begin{aligned} r_n > 0, \quad r_n \rightarrow +\infty & \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty \\ s_n > 0, \quad s_n \rightarrow +\infty & \quad \text{pour } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

et considérons le tuyau

$$T_n \begin{cases} y_n^2 < r_n^2 \\ z_n^2 < s_n^2 \\ 0 < x < +\infty \end{cases}$$

aves les côtés

$$G_n \begin{cases} y_n^2 = r_n^2, \\ z_n^2 < s_n^2, \\ 0 < x < +\infty. \end{cases} \quad H_n \begin{cases} y_n^2 < r_n^2, \\ z_n^2 = s_n^2, \\ 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Envisageons le système

$$(23) \quad \begin{aligned} y' &= M(x, y, z), \\ z' &= N(x, y, z), \end{aligned}$$

(l'unicité remplie dans tout l'espace $OXYZ$).

On obtient le théorème A_{15} , généralisant A_{13} .

Théorème A_{15} . — *Considérons le système (23). Si l'on a*

$$a) \quad \begin{aligned} y M(x, y, z) < 0 & \quad \text{sur } G_n \quad n=1, 2, \dots \\ z N(x, y, z) < 0 & \quad \text{sur } H_n \quad n=1, 2, \dots \end{aligned}$$

toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.

b) *Si l'on a*

$$\begin{aligned} y M(x, y, z) < 0 & \quad \text{sur } G_n, \text{ pour un } n \\ z N(x, y, z) > 0 & \quad \text{sur } H_n, \text{ pour un } n \end{aligned}$$

il existe une classe de solutions asymptotiques.

c) *Au cas $y M > 0$, $z N < 0$ pour un n sur G_n , H_n correspond la même conclusion comme pour b).*

d) *Si l'on a*

$$y M(x, y, z) > 0, \quad z N(x, y, z) > 0$$

pour un n sur G_n, H_n , il existe au moins une solution asymptotique.

Aux cas a), b), c), d) de ce théorème correspondent les figures 6, 7, 8, 9.

Théorème A_{16} . — (généralisant A_{14}).

Si l'on a, pour un n

$$\text{sign } M(x, y, z) = \text{const sur } G_n,$$

$$\text{sign } N(x, y, z) = \text{const sur } H_n,$$

sign $M(x, 0, z)$ contraire à celui de $M(x, y, z)$ pour $y_n \neq 0$,

sign $N(x, y, 0)$ contraire à celui de $N(x, y, z)$ pour $z_n \neq 0$,

le système a une classe de solutions asymptotiques.

Les cas particuliers:

$$\begin{aligned}
 a') & \quad M < 0, \quad N < 0, \quad M(x, 0, z) > 0, \quad N(x, y, 0) > 0, \\
 b') & \quad M < 0, \quad N > 0, \quad M(x, 0, z) > 0, \quad N(x, y, 0) < 0, \\
 c') & \quad M > 0, \quad N < 0, \quad M(x, 0, z) < 0, \quad N(x, y, 0) > 0, \\
 d') & \quad M > 0, \quad N > 0, \quad M(x, 0, z) < 0, \quad N(x, y, 0) < 0,
 \end{aligned}$$

Aux cas a'), b'), c'), d') de ce théorème correspondent des figures 10, 11, 12, 13.

III, 6. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUEMENT BORNÉES D'UN SYSTÈME A $p+q$ EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Théorème A₁₇. — Considérons le système

$$(24) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t) x_i^{2k_i+1} + \sigma_i(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q), & i=1, 2, \dots, p, \\ \frac{dy_j}{dt} = \Psi_j(t) y_j^{2l_j+1} + \tau_j(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q), & j=1, 2, \dots, q, \end{cases}$$

(l'unicité est remplie dans l'espace $(t, x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$) où les conditions suivantes sont remplies:

$$(25) \quad \begin{cases} |\sigma_i| < A_i + B_i |x_i|^{2k_i+1-\varepsilon_i}, & i=1, 2, \dots, p, \quad 0 < \varepsilon_i < 1, \\ |\tau_j| < A_j^* + B_j^* |y_j|^{2l_j+1-\varepsilon_j^*}, & j=1, 2, \dots, q, \quad 0 < \varepsilon_j^* < 1, \end{cases}$$

(A_i, B_i, A_j^*, B_j^* étant des constantes positives).

Si l'on a

$$(\alpha_1) \quad \varphi_i < C_i < 0, \quad \Psi_j > C_j^* > 0, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p, \\ j=1, 2, \dots, q, \end{matrix}$$

le système a une classe de solutions asymptotiques bornées.

Si l'on a

$$(\alpha_2) \quad \varphi_i < C_i < 0, \quad \Psi_j < C_j^* < 0, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p, \\ j=1, 2, \dots, q, \end{matrix}$$

toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.

Si l'on a

$$(\alpha_3) \quad \varphi_i > C_i > 0, \quad \Psi_j > C_j^* > 0, \quad \begin{matrix} i=1, 2, \dots, p, \\ j=1, 2, \dots, q, \end{matrix}$$

il existe au moins une solution asymptotiquement bornée.

Théorème A₁₈. — Considérons le système

$$(26) \quad \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \varphi_i(t) x_i^{2k_i} + \sigma_i(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q), \\ \frac{dy_j}{dt} = \Psi_j(t) y_j^{2l_j} + \tau_j(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q), \end{cases}$$

où

$$(27) \quad \begin{cases} |\sigma_i| < A_i + B_i |x_i|^{2k_i - \epsilon_i}, & 0 < \epsilon_i < 2k_i, \\ |\tau_j| < A_j^* + B_j^* |y_j|^{2l_j - \epsilon_j^*}, & 0 < \epsilon_j^* < 2l_j, \end{cases}$$

(A_i, B_i, A_j^*, B_j^* étant des constantes positives).

Si l'on a

$$\begin{aligned} \varphi_i < C_i < 0 & \quad \text{ou } \varphi_i > C_i > 0, & i = 1, 2, \dots, p, \\ \Psi_j > C_j^* < 0 & \quad \text{ou } \Psi_j < C_j^* < 0 & j = 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

et

- $\sigma_1(t, 0, x_2, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$ a le signe contraire à C_1 ,
- $\sigma_2(t, x_1, 0, x_3, \dots, x_p; y_1, \dots, y_q)$ a le signe contraire à C_2 ,
-
- $(\sigma_p(t, x_1, \dots, x_{p-1}, 0; y_1, \dots, y_q)$ a le signe contraire à C_p ,
- $(\tau_1(t, x_1, \dots, x_p; 0, y_2, \dots, y_q)$ a le signe contraire à C_1^*
- $(\tau_2(t, x_1, \dots, x_p; y_1, 0, \dots, y_q)$ a le signe contraire à C_2^*)
-
- $\tau_q(t, x_1, \dots, x_p; y_1, \dots, y_{q-1}, 0)$ a le signe contraire à C_q^* ,

alors le système a une classe de solutions asymptotiquement bornées.

Ces deux théorèmes généralisent respectivement les théorèmes, A_{13} et A_{14} dans le cas d'un espace à $p + q + 1$ dimensions.

On utilise, pour démontrer ces théorèmes le critère contenu dans le théorème W_4 . Le rôle des fonctions l^r et $m^s(W_4)$ jouent, selon les circonstances, les fonctions $\pm y_j - \theta$ où $\pm x_i - \rho$. On utilise aussi l'impossibilité d'une transformation continue d'un segment en ces bouts, le théorème (voir [24]) que la frontière d'une sphère n'est pas un rétracte de la sphère, le théorème concernant l'invariabilité par rapport à la homéomorphie de la propriété des ensembles d'être un rétracte ([28]).

Voyons, par exemple, le cas (α_1) du théorème A_{17} .

Les conditions (25) permettent de trouver les nombres positifs $\rho_i > 0, \theta_j > 0$ tels que pour $|x_i| = \rho_i, |y_j| = \theta_j$ les termes $\varphi_i(t) x_i^{2k_i+1}, \Psi_j(t) y_j^{2l_j+1}$ déterminent le signe des deuxièmes membres des équations du système.

Soit $\rho = \max \rho_i, \theta = \max \theta_j$.

Pour $|x_i| = \rho, |y_j| = \theta$ les termes $\varphi_i(t) x_i^{2k_i+1}, \Psi_j(t) y_j^{2l_j+1}$ donnent bien sûr le signe aux deuxièmes membres des équations correspondantes.

Considérons le tuyau

$$|x_i| < \rho, |y_j| < \theta, 0 < t < +\infty.$$

D'après le théorème W_4 nous avons les faces positives suivantes

$$(28) \quad \begin{aligned} |y_1| = \theta, \quad |y_j| < \theta, \quad |x_i| < \rho, \quad 0 < t < +\infty, \\ |y_2| = \theta, \quad |y_j| < \theta, \quad |x_i| < \rho, \quad 0 < t < +\infty, \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|y_q| = \theta, \quad |y_j| < \theta, \quad |x_i| < \rho, \quad 0 < t < +\infty.$$

Soit, par exemple, $y_1 > 0$.

Alors, $l^\gamma(v. W_4)$ sera l^1 , c'est-à-dire

$$y_1 - \theta = 0.$$

La pente $\frac{dl_1}{dt} = \frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$ est, d'après les hypothèses, positive.

Alors, la face

$$y_1 = \theta, \quad |y_j| < \theta, \quad |x_i| < \rho$$

sera une face positive.

Pour $y_1 < 0$, l^γ sera l^1 , c'est-à-dire

$$-y_1 - \theta = 0.$$

La pente $\frac{dl_2}{dt} = -\frac{dy_1}{dt}$, $-\frac{dy_1}{dt}$ est aussi positive, d'après les hypothèses.

Alors, la face

$$-y_1 = \theta, \quad |y_j| < \theta, \quad |x_i| < \rho$$

sera une face positive.

Les faces négatives sont

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} |x_i| = \rho, \quad |x_i| < \rho, \quad |y_j| < \theta, \quad 0 < t < +\infty, \\ |x_p| = \rho, \quad |x_i| < \rho, \quad |y_j| < \theta, \quad 0 < t < +\infty. \end{aligned} \right.$$

L'ensemble de sortie stricte est donnée par (11).

Prenons comme Z un segment dont les bouts sont les points

$$\begin{aligned} P_1(t_0, x_1^*, \dots, x_p^*, \underbrace{\theta, \theta, \dots, \theta}_q), \\ |x_i^*| < \rho \\ P_2(t_0, x_1^*, \dots, x_p^*, \underbrace{-\theta, -\theta, \dots, -\theta}_q), \end{aligned}$$

qui sont évidemment les points de sortie stricte. $Z \cap S$ sont ces deux points. $Z \cap S$ n'est pas un rétracte de Z (les bouts du segment ne sont pas le rétracte du segment) et $Z \cap S$ est un rétracte de S (chaque face de sortie peut passer par rétraction soit dans le premier soit dans le second point). Il existe donc un point $P \in \text{Int } Z$ avec l'intégrale qui appartient au tuyau. Évidemment, il existe toute une classe de telles intégrales.

On démontre le reste du théorème A_{17} ainsi que le théorème A_{18} , d'une façon semblable, utilisant W_4 . Mais le choix de l'ensemble Z varie selon les circonstances.

Enfin, il est facile de voir que le théorème suivant a lieu.

Théorème A_{19} . — *Soit donné le système*

$$(30) \quad \frac{dx_i}{dt} = \rho_i(t, x_1, \dots, x_{p+q}), \quad i = 1, 2, \dots, p+q$$

(l'unicité remplie dans l'espace t, x_1, \dots, x_{p+q}). Les deuxièmes membres de ce système satisfont dans le même espace l'hypothèse H (voir § 2).

Si l'on a

$$X_i^{(1)} < \rho_i < X_i^{(2)} \quad i = 1, 2, \dots, p+q$$

où $X_i^{(1)}, X_i^{(2)}$ sont les deuxièmes membres des équations du type (24), alors, sous les hypothèses (α_1) ou (α_2) pour les systèmes de comparaison, le système (30) aura une classe de solutions asymptotiquement bornées.

On obtient la même conclusion si les systèmes de comparaison sont du type du théorème A_{18} .

Ce théorème est une conséquence des théorèmes A_{17} et A_{18} , ainsi que du théorème W_2 . Les résultats des passages III 1—III 6 sont publiés dans [48].

III 7. DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN CAS PARTICULIER DU THÉORÈME DE RÉTRACTE DE WAZEWSKI*

Étant donnée l'équation différentielle

$$(1) \quad y' = f(x, y),$$

$f(x, y)$ continue dans tout le plan XOY , y satisfaisant localement à la condition de Lipschitz, considérons le tuyau: $x > x_0, k_1 < y < k_2$ (k_1, k_2 les constantes). Si l'on a $f(x, y) > 0$ pour $y = k_2$ et $f(x, y) < 0$ pour $y = k_1$, l'équation (1) aura, suivant la méthode de rétracte due à M. T. Wazewski (voir [22]) au moins une solution bornée pour $x \rightarrow +\infty$, restant dans le tuyau envisagé.

Nous allons démontrer ce résultat d'une façon élémentaire, sans utiliser les rétractes, ce qui est facile dans le cas d'une équation tandis que le cas du système d'équations complique la possibilité d'une telle démonstration.

* Il s'agit du tuyau principal utilisé dans cette étude lorsqu'on agit de (1).

Envisageons la droite $x=x_1$ ($x_1 > x_0$) et son segment \overline{AB} (le point A (x_1, k_1), le point B (x_1, k_2)) entre les droites $y=k_1, y=k_2$. Chaque solution de l'équation considérée sortant du tuyau par les points des droites $y=k_1, y=k_2$ pour $x > x_1$ a un point sur \overline{AB} . Une hypothèse contraire contredit évidemment au fait que toutes les solutions sont uniformes, continues et aux dérivées continues. Ceci ne veut pas dire que tout point de \overline{AB} appartient à une solution sortant du tuyau soit coupant $y=k_1$, soit $y=k_2$. Nous allons démontrer qu'il existe au moins un point M sur \overline{AB} tel que la solution correspondante reste dans le tuyau.

Supposons, au contraire, qu'un tel point M n'existe pas. Les points \overline{AB} appartiennent donc tous à deux classes: les points de la première classe appartiennent aux solutions sortant du tuyau le long de $y=k_1$ et les points de la seconde classe appartiennent aux solutions sortant du tuyau le long de $y=k_2$.

Toutes les deux classes ont des éléments, parce que tout point $y=k_1$ où $y=k_2$ (pour $x > x_1$) est le point de sortie stricte d'une solution. Il n'y a, selon l'hypothèse, aucun point de \overline{AB} n'appartenant à une de deux classes. L'ordonnée de tout point de la première classe est plus petite que l'ordonnée du point arbitraire de la seconde classe, parce que dans le cas contraire les deux solutions correspondantes auraient au moins un point commun, ce qui contredit à l'unicité. On a, donc, sur \overline{AB} une coupure de Dedekind, déterminant un point M , qui doit être soit l'élément maximal de la première classe, soit l'élément minimal de la seconde.

Supposons que M soit l'élément maximal de la première classe. La solution correspondante sort du tuyau par un point (x_2, k_1) où $x_2 > x_1$. Envisageons une solution sortant du tuyau par le point (x_3, k_1) où $x_3 > x_2$. Cette solution doit avoir son point commun avec \overline{AB} . L'ordonnée de ce point doit être plus petite que celle de M , celui étant l'élément maximal de la première classe. Mais, dans ce cas les solutions provenant des points $(x_2, k_1), (x_3, k_1)$ devraient avoir un point commun, ce qui contredit à l'unicité. Le point M ne peut pas, donc, être le point maximal de la première classe. On prouve d'une façon complètement analogue qu'il ne peut pas être l'élément minimal de la seconde classe.

L'hypothèse de coupure de Dedekind est donc fautive, c'est-à-dire l'hypothèse que toutes les solutions partant de \overline{AB} sortent du tuyau. Il existe donc un point de \overline{AB} dont la solution reste dans le tuyau pour $x \rightarrow +\infty$. Cette démonstration est publiée dans [56].

III 8. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE, DU SECOND MEMBRE FACTORISÉ

Dans l'article [49] nous avons traité l'équation

$$(1) \quad y' = \prod_{i=1}^n (y - \varphi_i(x)),$$

c'est-à-dire ses solutions bornées, en appliquant la méthode de rétracte. Nous avons fixé aussi, dans un exemple, un tuyau curviligne, permettant d'établir la valeur limite fixe d'une solution. Voici les propositions démontrées.

Proposition 1. Les fonctions $\varphi_i(x)$ étant bornées pour $x > x_0$ et n impair, l'équation (1) a au moins une solution asymptotique.

Proposition 2. Étant donnée l'équation

$$(2) \quad y' = (y - \varphi_1(x))^{\alpha_1} (y - \varphi_2(x))^{\alpha_2} \cdots (y - \varphi_k(x))^{\alpha_k}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sont les nombres naturels $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$), où (α) $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \dots < \varphi_k(x)$ ($k < n$), supposons que $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, k$) soit une racine de l'ordre impair du deuxième membre de l'équation (2) traitée comme polynôme en y et qui satisfait à la condition

$$(\beta) \quad c_j < \varphi_j(x) < c_{j+1},$$

(c_j, c_{j+1} sont deux constantes telles qu'entre elles n'existe aucune des fonctions $\varphi_i(x)$, $i \neq j$ et qui n'ont pas de point communs avec ces fonctions).

Sous ces hypothèses l'équation (2) a au moins une solution asymptotique. Si le changement de signe du polynôme (2) est dans $\varphi_j(x)$ de positif à négatif (comptant de $\varphi_1(x)$), l'équation (2) a une classe de solutions asymptotiques.

Proposition 3. Dans le cas $k = n$, n impair, à l'index pair (de $\varphi_j(x)$) correspond une classe de solutions asymptotiques et à l'index impair au moins une solution asymptotique. Dans le cas $k = n$, n pair à l'index impair j (de $\varphi_j(x)$) correspond une classe de solutions bornées et à l'index pair au moins une solution asymptotique de l'équation (2).

Proposition 4. Dans le cas $k = n$, où existent deux fonctions $\varphi_{i_1}(x)$, $\varphi_{i_2}(x)$ telles comme $\varphi_i(x)$ dans la proposition 2, il existe une classe de solutions asymptotiques de l'équation (2).

Proposition 5. Dans le cas $k \neq n$, où toutes les fonctions $\varphi_i(x)$, ($i = 1, 2, \dots, k$) sont telles comme $\varphi_j(x)$ dans la proposition 2, pour l'existence d'une classe de solutions asymptotiques il suffit que le polynôme (2) change de signe deux fois si n est pair et trois fois si n est impair.

Proposition 6. Si $k = n > 2$, n pair et

$$(\gamma) \quad c_1 < \varphi_1(x) < c_2 < \dots < c_n < \varphi_n(x) < c_{n+1}$$

toutes les solutions de l'équation (2) appartenant aux points avec $y < c_n$ sont asymptotiquement bornées. Si $k = n > 3$, n impair et (γ), toutes les solutions de l'équation (2) appartenant aux points avec $c_2 < y < c_n$ sont asymptotiquement bornées.

Dans l'exemple $y' = (y + 2e^{-x^2})(y + e^{-x^2})(y - x)^2$ on fixe un „tuyau” curviligne.

Exemple du tuyau curviligne. Dans le cas de l'équation

$$y' = (y + 2e^{-x^2})(y + e^{-x^2})(y - x)^2$$

le long de la droite $y=0$ le second membre de l'équation est positif et le long de la courbe $y = -\varepsilon e^{-x^2}$ ($1 < \varepsilon < 2$) le second membre est négatif. Nous obtenons, pour $x > x_0$ un tuyau spécial limité par $y=0$ et $y = -\varepsilon e^{-x^2}$ qui garantit au moins une solution asymptotique restant dans le tuyau pour $x \rightarrow +\infty$. Etant, cependant $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\varepsilon e^{-x^2} = 0$, on déduit que notre solution asymptotique est négative, tendant vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$.

EXEMPLES ILLUSTRANT LES PROPOSITIONS 1-6.

Proposition 1.

$$y' = (y - \sin x)(y - \operatorname{th} x)(y - e^{-x^2})$$

a au moins une solution asymptotique.

Proposition 2.

$$y' = (y - \sin x)^3 (y - x)(y - e^{2x})$$

a au moins une solution asymptotique.

Proposition 3.

$$y' = (y + x) \left(y + \frac{x}{2} \right) (y - e^{-x^2})(y - x)$$

a une classe de solutions asymptotiques.

$$y' = (y + x^3)(y + x^2)(y - e^{-x^2})(y - x)(y - x^2)$$

a au moins une solution asymptotique.

$$y' = (y + x^3)(y + x^2)(y + \sqrt{x})(y - e^{-x^2})$$

a au moins une solution asymptotique.

Proposition 4.

$$y' = (y + x^3)(y - e^{-x^2})(y - e^{-x^2} - 2)$$

a une classe de solutions asymptotiques.

Proposition 6.

$$y' = (y - \sin x)(y - \cos x - 3)(y - e^{-x^2} - 5)(y - \operatorname{th} x - 2\pi)$$

a toutes les solutions appartenant au domaine $y < C_4$ ($6 < C_4 < 2\pi$) asymptotiquement bornées.

$$y' = (y - \sin x)(y - \cos x - 3)(y - e^{-x^2} - 5)(y - \operatorname{th} x - 2\pi)(y - e^{-x^2} - 9)$$

a toutes les solutions appartenant au domaine $C_2 < y < C_5$ ($1 < C_2 < 2$, $\frac{5\pi}{2} < C_5 < 9$) asymptotiquement bornées.

III 9. „TUYAUX” CURVILIGNES DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Ce passage est publié dans [50].

Dans notre travail [49] fut traitée l'équation

$$(1) \quad y' = \prod_{i=1}^n [y - \varphi_i(x)],$$

c'est-à-dire solutions asymptotiquement bornés de cette équation. On appliquait la méthode de rétracte due à *T. Ważewski* (voir [22] et [48]). Les „tuyaux” contenant les solutions asymptotiques étaient rectilignes ($x > x_0$, $C_1 < y < C_2$; C_1, C_2 étant des constantes).

Cependant, dans un exemple particulier

$$y' = (y + 2e^{-x^2})(y + e^{-x^2})(y - x)^2$$

on fixait un „tuyau” curviligne, encadrant une solution tendant vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$.

Il faut souligner que les „tuyaux” curvilignes permettent de fixer précisément les limites des solutions et non seulement que les solutions sont bornées.

Ces „tuyaux” caractérisent aussi la position des solutions dans le plan d'une façon plus précise, en les encadrant par deux courbes fixées, de plus en plus proches aux solutions considérées.

On donne, dans le présent passage deux propositions relatives à l'équation (1), sous les hypothèses différentes de celles du travail [49], utilisant les „tuyaux” curvilignes, qui permettent d'établir l'existence des solutions tendant vers zéro.

Proposition 1. *Soit donnée l'équation différentielle*

$$(2) \quad y' = [y + f(x)][y + mf(x)] \prod_{i=1}^k [y - f_i(x)]^{\alpha_i},$$

où $f_i(x)$ ($i = 1, \dots, k$), $f(x)$ sont des fonctions positives et continues pour $x > x_0$ et $f(x)$ est une fonction monotone, $f(x) \rightarrow +0$ $x \rightarrow +\infty$. Soit ensuite $m > 1$ un nombre

réel et soient α_i les nombres naturels tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n - 2$ ($n - 2$ étant pair).

Sous ces hypothèses l'équation (2) a une solution négative tendant vers -0 pour $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Posons $y = 0$ au deuxième membre de l'équation (2). On obtient

$$y' = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} m f^2(x) \prod_{i=1}^k f_i^{\alpha_i}(x) > 0.$$

Posons ensuite $y = -m_1 f(x)$, où $1 < m_1 < m$ au deuxième membre de l'équation (2). On obtient

$$y' = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} (1 - m_1)(m - m_1) f^2(x) \prod_{i=1}^k [m_1 f(x) + f_i(x)]^{\alpha_i} < 0.$$

Le „tuyau” $x > x_0$, $-m_1 f(x) < y < 0$ encadre une solution tendant vers zéro (parce que la frontière inférieure $-m_1 f(x) \rightarrow -0$ et $y = 0$ est la frontière supérieure du „tuyau”). Étant y' le long de $y = 0$ positive et le long de $-m_1 f(x)$ négative, on a un „tuyau” assurant, d'après la méthode de rétracte, l'existence d'une solution restant dans le „tuyau” pour $x \rightarrow +\infty$. La monotonie de $\varphi(x)$ assure „la sortie stricte” le long des frontières (voir [22] et [48]).

Proposition 2. Soit donnée l'équation différentielle

$$(3) \quad y' = [y - f_1(x)]^{\alpha_1} [y - f_2(x)]^{\alpha_2} [y - m f_2(x)]^{\alpha_3} \prod_{i=4}^k [y - f_i(x)]^{\alpha_i}$$

où f_i sont les fonctions continues pour $x > x_0$, α_i sont les nombres naturels $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$ (n un nombre impair et, particulièrement α_1 pair, α_2 impair, α_3 pair). Soit ensuite m un nombre réel $m > 1$. Supposons que la fonction $f_1(x)$ soit une fonction négative et monotone tendant vers -0 pour $x \rightarrow +\infty$. Les fonctions $f_i(x)$, ($i = 2, \dots, k$) sont positives, $f_2(x)$ est de plus une fonction monotone, tendant vers $+0$ pour $x \rightarrow +\infty$. Soit enfin $f_i > m f_2$ pour $i = 4, \dots, k$. Alors, l'équation (3) a une solution tendant vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Posons $y = m_1 f_2(x)$, ($1 < m_1 < m$) au deuxième membre de l'équation (3). On obtient

$$y' = [m_1 f_2 - f_1]^{\alpha_1} [m_1 f_2 - f_2]^{\alpha_2} [m_1 f_2 - m f_2]^{\alpha_3} \prod_{i=4}^k [m_1 f_2 - f_i]^{\alpha_i} > 0.$$

Posons $y = m_2 f_1(x)$, ($0 < m_2 < 1$) au deuxième membre de l'équation (3). On obtient

$$\begin{aligned} y' &= f_1^{\alpha_1} [m_2 - 1]^{\alpha_1} [m_2 f_1 - f_2]^{\alpha_2} [m_2 f_1 - m f_2]^{\alpha_3} \prod_{i=4}^k [m_2 f_1 - f_i]^{\alpha_i} = \\ &= (-1)^{\alpha_4 + \dots + \alpha_k} f_1^{\alpha_1} [m_2 - 1]^{\alpha_1} [m_2 f_1 - f_2]^{\alpha_2} [m_2 f_1 - m f_2]^{\alpha_3} \prod_{i=4}^k [f_i - m_2 f_1]^{\alpha_i} < 0. \end{aligned}$$

Le „tuyau” $x > x_0$, $m_2 f_1(x) < y < m_1 f_2(x)$ encadre une solution de l'équation (3) tendant vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$. Ce „tuyau” est curviligne par rapport à toutes les deux frontières (le „tuyau” formé dans la Proposition I fut curviligne seulement par rapport à la frontière inférieure).

III 10. REMARQUES CONCERNANT QUELQUES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS

Nous considérons ici quelques équations traitées déjà dans le chapitre II, où l'on appliquait la méthode d'inégalités tchaplighuiniennes. Ici, la méthode de rétracte donnera une autre espèce de résultats.

Considérons, pour $x > x_0$ l'équation abélienne

$$(1) \quad y' = \frac{f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2}{y + g(x)}$$

où $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ sont, pour $x > x_0$ les fonctions continues et bornées, avec $f_0(x) < 0$, $g(x) > 0$, $f_2(x) > 0$ pour $x > x_0$. Posons $y=0$ au second membre de l'équation. On obtient $y' = \frac{f_0}{g} < 0$. D'autre côté nous obtenons

$$y' = f_2(x)y + f_1(x) - f_2(x)g(x) + \frac{f_0(x) - g(x)(f_1(x) - f_2(x)g(x))}{y + g(x)}.$$

Les fonctions-coefficients étant bornées, le signe du second membre de (1) sera, pour y suffisamment grand celui du terme $f_2(x)y$. Il existe, donc y^* tellement que $y'(y^*) > 0$. Suivant la méthode de rétracte, le tuyau $x > x_0$, $0 < y < y^*$ garantit l'existence au moins d'une solution positive asymptotiquement bornée. La fonction $y = -g(x) < 0$ donnant les singularités se trouve au-dessous du tuyau mentionné, sans influencer à la conclusion obtenue.

La modification d'hypothèses $f_2 < 0$, $f_0 > 0$, $g > 0$ donne la conclusion que toutes les solutions positives sont asymptotiquement bornées.

Considérons l'équation

$$y' = \frac{f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^3}{y + g(x)}$$

semblable à l'équation abélienne. Soient pour $x > x_0$ les fonctions f_0 , f_1 , g , f_2 continues et bornées et soit $g > 0$, $f_2 > 0$, $f_1 > 0$, $f_0 < 0$.

On obtient, pour $y=0$ comme dans le cas précédent $y' = \frac{f_0}{g} < 0$. Pour y suffisamment grand le signe du second membre de l'équation est celui de $f_2(x)y^3$. Il existe, donc, le tuyau garantissant l'existence au moins d'une solution positive asymptotiquement bornée.

Considérons l'équation

$$(2) \quad y' = \frac{\sum_{i=1}^n a_i(x)y^i}{\sum_{i=0}^m b_i(x)y^i}, \quad (n > m).$$

Sous l'hypothèse que les fonctions-coefficients soient bornées et continues pour $x > x_0$, supposons encore que le polynôme $\sum_{i=0}^m b_i y^i$ n'ait pas de zéros.

Dans les résultats qui suivent on a utilisé deux sortes de tuyaux. Sans compter des tuyaux garantissant au moins une solution bornée, on rencontre aussi le tuyau $x > x_0$, $y^{**} < y < y^*$ avec $y'(y^{**}) > 0$, $y'(y^*) < 0$ assurant que toutes les solutions entrant dans le tuyau sont bornées. Dans les cas „au moins une solutions bornée”, où figure la condition avec $\frac{a_0}{b_0}$ déterminant le signe de la solution bornée, on a utilisé, pour la construction du tuyau, le terme $y'(0)$, c'est-à-dire l'axe x comme la partie de la frontière du tuyau correspondant. Pour y suffisamment grand les tuyaux furent déterminés par le membre $\frac{a_n}{b_m} y^{n-m}$.

Supposons, pour fixer les idées, $\sum_{i=1}^m b_i y^i > 0$ (ce qui implique m pair, $b_m, b_0 > 0$).

On obtient des résultats suivants:

1° $n-m$ impair (c'est-à-dire n impair), $a_n > 0$: il existe au moins une solution asymptotiquement bornée. Elle est positive ou négative suivant respectivement les signes $\frac{a_0}{b_0} < 0$ ou $\frac{a_0}{b_0} > 0$ (c'est-à-dire $a_0 < 0$, $a_0 > 0$).

2° $n-m$ impair (n impair), $a_n < 0$ toutes les solutions sont asymptotiquement bornées.

3° $n-m$ pair (n pair), $a_n > 0$: on ne peut rien conclure. Mais, si l'on ajoute $\frac{a_0}{b_0} < 0$ ($a_0 < 0$) on obtient que toutes les solutions négatives et au moins une solution positive sont asymptotiquement bornées.

4° $n-m$ pair (n pair), $a_n < 0$: on ne peut rien conclure. Mais, si l'on ajoute $\frac{a_0}{b_0} > 0$ ($a_0 > 0$), on obtient que toutes les solutions positives et au moins une solution négative sont asymptotiquement bornées.

Dans 3° et 4° (dans tous les deux cas) figurent deux tuyaux de deux sortes expliquées ci-dessus.

La condition $n > m$ dans le cas de la méthode de rétracte peut être omise. L'équation (2) n'est pas donc obligatoirement du type

$$y' = \varphi(x) y^n + \Psi(x, y)$$

dans le sens expliqué dans le chapitre II.

III 11. SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
AU SECOND MEMBRE RATIONNEL

§ 1

On considère dans ce passage l'existence des solutions asymptotiquement bornées (les solutions $y(x)$ telles qu'on a $|y(x)| < M$ pour $x_0 < x < +\infty$) de l'équation différentielle

$$(1) \quad y' = \Phi(x, y) = \frac{\prod_{j \in A} (y - \varphi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod_{i \in B} (y - \varphi_i(x))^{\alpha_i}}; \quad i \neq j$$

A, B étant deux permutations des nombres naturels sans éléments communs, telles qu'on a

$$A \cup B = \{1, 2, \dots, m\}; \quad A \cap B = \emptyset,$$

où α_i, α_j sont les nombres naturels. Il faut souligner qu'une partie de résultats reste valable pour l'équation

$$(2) \quad y' = \Phi(x, y) + \Psi(x, y)$$

sous l'hypothèse de l'unicité dans les régions $y \neq \varphi_i(x)$, et sous l'hypothèse que, pour x suffisamment grand, le signe du deuxième membre de l'équation (2) reste déterminé par le deuxième membre de l'équation (1). Pour simplifier les choses nous ne considérons que l'équation (1), c'est-à-dire quelques cas spéciaux dont la généralité est cependant suffisante pour donner le tableau qualitatif global des solutions de l'équation (1).

Pour donner un court historique nous remarquons que nous avons déjà traité l'équation du type semblable sous la forme non factorisée

$$(1') \quad y' = \frac{\sum_{i=0}^n a_i(x) y^i}{\sum_{i=0}^m b_i(x) y^i}$$

dans notre travail [53], en appliquant la méthode de *Tchaplguine*, à l'aide des équations de comparaison

$$(1'') \quad y' = \varphi(x) y^{k-\varepsilon}; \quad y' = \varphi(x) y^k.$$

Les équations (1'), (1'') étaient les cas particuliers de l'équation

$$(1''') \quad y' = \varphi(x) y^n + \Psi(x, y)$$

traitée d'une façon plus générale dans les travaux [46], [47], [48] ainsi que dans les travaux [49], [50], [51], [53]. La forme (1''') était particulièrement convenable pour se servir de la méthode de rétracte due à *M. T. Ważewski*.

Cette forme était cependant, d'une certaine manière, dépassée déjà dans le travail [53]. Dans le présent passage elle est dépassée complètement, les degrés du numérateur et du dénominateur du deuxième membre de l'équation (1) n'étant pas essentiels.

§ 2

On pose deux espèces d'hypothèses fondamentales. On a, d'abord,

$$(3) \quad \inf \varphi_k(x) > \sup \varphi_l(x)$$

pour $k > l$ et $x > x_0$. Toutes les fonctions $\varphi_s(x)$ ($s = 1, \dots, m$) sont supposées continues et bornées pour $x < x < +\infty$. Elles n'ont pas de points communs. Ces circonstances permettent l'existence des droites $y = y_{lk} = \text{const}$ telles que l'on ait

$$(4) \quad \sup \varphi_l(x) < y_{lk} < \inf \varphi_k(x).$$

Le second ensemble d'hypothèses modifie la condition (3) permettant la limite commune pour quelques fonction $\varphi_s(x)$. Ces hypothèses seront traitées dans le paragraphe 11. Dans ce moment nous restons sous les hypothèses (3). Le cas principal est $\alpha_i = \alpha_j = 1$. Dans le paragraphe 10 nous montrerons quelle est la variation de résultats dans le cas où α_s ne sont pas tous égaux à 1.

Remarquons que, le long des courbes $\varphi_i(x)$ (les courbes appartenant au dénominateur du deuxième membre de l'équation (1)) le dénominateur de l'équation (1) s'annule. Les fonctions $\varphi_i(x)$ pour tout $i \in B$ étant différentes des fonctions $\varphi_j(x)$ (les courbes appartenant au numérateur) pour tout $j \in A$, nous voyons que le deuxième membre de (1) tend vers l'infini pour y proche à une des fonctions $\varphi_i(x)$ ($i \in B$). Mais dans les régions entre deux courbes voisines du type $\varphi_i(x)$ ($i \in B$) toutes les conditions garantissant l'unicité des solutions sont remplies. On peut arriver, cependant, que ces solutions ne sont pas prolongeables pour $x \rightarrow +\infty$, s'approchant aux courbes $\varphi_i(x)$, leurs dérivées tendant vers l'infini. Naturellement, dans un tel „tuyau” (entre deux courbes voisines $\varphi_i(x)$) peuvent exister aussi les solutions prolongeables pour $x \rightarrow +\infty$, mais dont l'existence ne sera pas toujours prouvée.

Supposons qu'entre deux courbes $\varphi_i(x)$ ($i \in B$) il n'y a pas d'autres courbes de l'ensemble $\varphi_s(x)$ ($s = 1, \dots, n$). Les solutions appartenant à un tel „tuyau” nous nommerons par „classe réduite de solutions bornées” (CRB). Ces solutions sont en tout cas bornées, ne pouvant pas sortir du tuyau, limité par deux courbes le long desquelles le deuxième membre de l'équation (1) reste indéfini. Aux points de ces courbes limites n'appartiennent donc aucunes solutions.

Envisageons maintenant une courbe $\varphi_j(x)$ ($j \in A$) et considérons deux régions voisines à cette courbe. Il s'agit des régions obtenues par la division du plan XOY faite par les fonctions $\varphi_s(x)$ ($s = 1, \dots, m$). Entre deux courbes quelconques $\varphi_s(x)$ on peut poser au moins une droite du type (4). Soit $y = y_j^*$ une telle droite posée dans la région voisine „inférieure” de $\varphi_j(x)$, et $y = y_j^{**}$ une telle droite dans la région voisine „supérieure”. Soit dans les points le long de la droite $y = y_j^{**}$ le signe du deuxième membre de (1) positif, et le

long de la droite $y=y_j^*$ négatif. On aura alors, d'après la méthode de rétracte (voir [22], [23], [24]), dans le „tuyau” $x>x_0$, $y_j^*<y<y_j^{**}$ au moins une solution bornée, restant dans le tuyau pour $x\rightarrow+\infty$. Nous désignerons une telle solution par USB („une solution bornée”). Si le signe du deuxième membre de (1) est le long de $y=y_j^{**}$ négatif, et le long de $y=y_j^*$ positif, toutes les solutions entrent dans le „tuyau” et toutes sont bornées pour $x\rightarrow+\infty$. Une telle classe nous désignerons par CSB („classe de solutions bornées”). Il est facile d'établir l'existence d'une telle classe, par la méthode de rétracte, mais autrement aussi.

Soit $y=\varphi_1(x)<\varphi_k(x)$ ($k=2,\dots,n$) la fonction du type $\varphi_i(x)$ ($i\in B$). Soit le signe du deuxième membre de (1) positif pour $y<\varphi_1$. Toutes les solutions appartenant aux points $y<\varphi_1$ sont bornées au-dessus pour $x\rightarrow+\infty$, mais elles peuvent avoir les asymptotes verticales. Une telle classe nous désignerons par CRB*. En effet, ces solutions sont croissantes, mais ne peuvent pas passer la courbe $y=\varphi_1$. Cependant, elles peuvent „tomber” dans $-\infty$ au voisinage des points finis.

La circonstance $\alpha_i=\alpha_j=1$ (nous avons admis cette condition) assure le changement successif du signe du deuxième membre de l'équation (1) dans les régions entre les courbes $\varphi_s(x)$ ($s=1,\dots,m$). Nous pourrions donc déterminer l'existence CRB*, CRB, USB, CSB. Suivant les permutations A, B nous aurons les cas différents. Nous obtiendrons une ou plusieurs de classes CRB séparées l'une de l'autre par les courbes φ_i , une ou plusieurs de solutions USB séparées l'une de l'autre par les courbes φ_i ou non, une ou plusieurs de classes CSB séparées par φ_i ou non. Il y aura aussi de combinaisons plus compliquées que dans les situations exposées. Citons un tel exemple.

Soient $\varphi_j^*<\varphi_j^{**}<\varphi_j^{***}$ trois courbes voisines du type φ_j ($j\in A$) entre lesquelles il n'y a pas d'autres courbes φ_s . Soit le signe du deuxième membre de (1) positif dans la région $\varphi_j^*<y<\varphi_j^{**}$, négatif dans $\varphi_j^{**}<y<\varphi_j^{***}$, positif pour $y>\varphi_j^{***}$ (la région voisine „supérieure” de φ_j^{***}). Il existe donc CSB dans la région entre φ_j^* et φ_j^{***} . Mais, dans la région déterminée par la droite du type $y=y_{ki}$ (de la région $\varphi_j^{**}<y<\varphi_j^{***}$) et par une telle droite dans la région $y>\varphi_j^{***}$, il existe USB. Évidemment, les solutions appartenant aux points dont les ordonnées sont plus petites que celles de USB et plus grandes que celles des points appartenant au „tuyau” CSB, seront aussi bornées. L'existence de USB donne donc un élargissement de CSB, qui devient limitée par USB. Une telle classe nous désignerons par \overline{CSB} .

Il est facile maintenant de définir CSB et aussi \overline{CSB} . Il y a aussi d'autres nuances. Nous ne fixerons que CRB*, CRB, USB, CSB, \overline{CSB} , \overline{CSB} , c'est-à-dire sept situations. Par „USB séparée” et „CSB séparée” nous désignons la séparation des solutions en question par les courbes φ_i ($i\in B$) dans tous les cas où elle a lieu clairement.

L'hypothèse (3) permet d'introduire la convention

$$(3') \quad \varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \dots < \varphi_m(x).$$

Cette convention sera strictement appliquée dans tout le travail. Pour chaque hypothèse sur les permutations A, B tenant compte du changement successif

du signe du deuxième membre de (1), de la méthode de rétracte, de la nature des solutions au voisinage de φ_i et des théorèmes fondamentaux concernant l'existence, l'unicité et le prolongement des solutions, nous pourrions toujours faire un schéma auxiliaire (qui ne sera donné dans le texte pour tenir compte de l'économie de l'espace) nous donnant le tableau qualitatif des solutions. Ce schéma aura, en vérité, la valeur de démonstration. Nous traiterons quelques permutations principales A, B soulignant ce qui est essentiel dans le cas des autres.

§ 3

Considérons l'équation (1) pour $\alpha_i = \alpha_j = 1$, sous les hypothèses (3), (3') sur les fonctions $\varphi_s(x)$ ($s=1, \dots, n$) bornées et continues pour $x \geq x_0$.

Pour qu'il existe au moins une USB il suffit que dans le deuxième membre de l'équation (1) figure au moins une fonction $\varphi_j(x)$ ($j \in A$) (telle que l'on a pour $y = \varphi_j$, $y' \equiv 0$, y' étant le premier membre de l'équation (1)).

En effet, grâce au changement successif du signe du deuxième membre de (1), les signes de ce membre au dessous de φ_j et au-dessus d'elle sont différents. Deux droites $y = y_j^*$, $y = y_j^{**}$ du type (4) ($y_j^* < \varphi_j(x) < y_j^{**}$) donnent „le tuyau” garantissant soit USB soit CSB; en tout cas au moins une solution bornée.

Dans l'exemple, cependant,

$$y' = \frac{1}{(y - \varphi_1)(y - \varphi_2)}$$

où il n'existe aucune fonction φ_j on ne peut pas garantir des solutions bornées pour $x \rightarrow +\infty$, mais on y voit directement une CRB* et une CRB, la première pour $y < \varphi_1$, la seconde pour $\varphi_1 < y < \varphi_2$.

Dans l'exemple $y' = y - e^{-x}$ la solution USB sera la fonction $y = \frac{e^{-x}}{2}$.

On constate encore que cette solution tend vers zéro pour $x \rightarrow +\infty$. Elle appartient, notamment, au „tuyau” $0 < y < e^{-x}$, un „tuyau curviligne”. Nous parlerons sur les „tuyaux curvilignes”, en cadre du paragraphe 11.

Dans l'exemple $y' = y - x$ (où il n'existe qu'une fonction φ_s , plus précisément une fonction φ_j — le nombre minimal possible de telles fonctions), nous obtenons l'intégrale générale $y = x + 1 + Ce^x$. Évidemment, aucune solution n'est pas bornée pour $x \rightarrow +\infty$. La fonction $\varphi_1(x) = x$ ici n'est pas cependant bornée, ce qui signifie que toutes les hypothèses de ce paragraphe ne sont pas remplies,

§ 4

Considérons, l'équation

$$(5) \quad y' = \frac{(y - \varphi_{n+1})(y - \varphi_{n+2}) \cdots (y - \varphi_{2n})}{(y - \varphi_1)(y - \varphi_2) \cdots (y - \varphi_n)}$$

avec (3), (3') et φ_s continues et bornées pour $x \geq x_0$. Dans le cas n pair, on obtient une classe CRB* pour $y < \varphi_1$, et encore $n-1$ classes CRB séparés par φ_s ($s=1, \dots, n$), et enfin une classe \overline{CSB} bornée par la droite $y = y_{k1}$ du type (4) appartenant à la région voisine à φ_{2n} au-dessus. Dans le cas n impair, cette classe \overline{CSB} , devient \underline{CSB} , le signe de (1) entre φ_n et φ_{n+1} étant négatif.

L'équation „réciproque”

$$(5') \quad y' = \frac{(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)\cdots(y-\varphi_n)}{(y-\varphi_{n+1})(y-\varphi_{n+2})\cdots(y-\varphi_{2n})}$$

donne, pour n pair, une classe \overline{CSB} (toutes les solutions appartenant au points $y < USB$ (USB donnée par „le tuyau” encadrant $y = \varphi_n$) et $n-1$ classes CRB , séparées par φ_s ($s = n+1, \dots, 2n$). Pour n impair, la classe \overline{CSB} devient CSB (toutes les solutions appartenant au point $y < y_{kl}$ ($y = y_{kl}$ étant la droite du type (4) entre φ_n et φ_{n+1}). Les classes CRB ($n-1$) restent comme dans le cas n pair.

Dans les cas (5) et (5') sans compter les différences des détails, on peut conclure que, globalement, la fonction φ_{2n} donne la limite des solutions bornées, soit elle-même (5') soit $y = y_{kl}$ voisine à elle, au-dessus.

§ 5

Considérons l'équation

$$(6) \quad y' = \frac{(y-\varphi_2)(y-\varphi_4)\cdots(y-\varphi_{2n})}{(y-\varphi_1)(y-\varphi_3)\cdots(y-\varphi_{2n-1})}$$

avec les mêmes hypothèses sur φ_s ($s = 1, \dots, 2n$) comme dans le paragraphe précédent.

Comme dans le paragraphe précédent, nous avons, pour $y < \varphi_1$ une classe CRB^* . Le „tuyau” encadrant φ_{2n} donne une USB . Mais, on y voit encore $n-1$ „tuyaux” encadrant les fonctions $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n-2}$ et garantissant encore $n-1$ USB , séparées par les fonctions $\varphi_1, \varphi_3, \dots, \varphi_{2n-1}$. Il y a, en somme, n USB séparées.

L'équation „réciproque”

$$(6') \quad y' = \frac{(y-\varphi_1)(y-\varphi_3)\cdots(y-\varphi_{2n-1})}{(y-\varphi_2)(y-\varphi_4)\cdots(y-\varphi_{2n})}$$

donne $n-1$ classes CSB séparées par les courbes $\varphi_2, \varphi_4, \dots, \varphi_{2n}$, mais aussi une classe CSB très large, produite par le „tuyau” encadrant φ_1 , qui donne le résultat que toutes les solutions pour $y < y_{kl}$ (au-dessous de φ_1) sont bornées pour $x \rightarrow +\infty$.

Ici, la courbe φ_{2n} fait aussi une sorte de limite supérieure des solutions bornées. Les résultats de § 4 et de § 5 sont, donc, très semblables, concernant, en général, le cas où le nombre de facteurs du numérateur est égal à celui du dénominateur.

§ 6

Voyons maintenant les cas où les nombres de facteurs du numérateur et du dénominateur sont différents. La méthode de recherche est la suivante: on considère d'abord une des situations déjà traités dans § 4 et § 5 et l'on ajoute encore un facteur au numérateur ou au dénominateur.

Soit donnée l'équation

$$(7) \quad y' = \frac{(y-\varphi_{n+1})(y-\varphi_{n+2})\cdots(y-\varphi_{2n})(y-\varphi_{2n+1})}{(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)\cdots(y-\varphi_n)}$$

avec n impair, avec les mêmes hypothèses sur φ_s ($s = 1, \dots, 2n+1$) comme dans §4,5.

Traisons le résultat en comparasion avec celui sans le facteur $(y - \varphi_{2n+1})$. On obtient une classe \overline{CSB} limitée par la droite du type (4) voisine à la courbe $y = \varphi_n$ (au-dessus) et par USB provenant du „tuyau“ encadrant $y = \varphi_{2n+1}$. A cette classe correspond (dans le cas sans $(y - \varphi_{2n+1})$) une classe \overline{CSB} moins „riche“ que la nouvelle). Le nombre $(n-1)$ de classes CRB séparées reste le même mais il n'existe plus la classe CRB^* .

L'équation „réciproque“ est

$$(7') \quad y' = \frac{(y - \varphi_1)(y - \varphi_2)(y - \varphi_3) \cdots (y - \varphi_n)}{(y - \varphi_{n+1})(y - \varphi_{n+2}) \cdots (y - \varphi_{2n})(y - \varphi_{2n+1})}.$$

On obtient n classes CRB séparées (pour les régions entre les courbes φ_i ($i = n+1, \dots, 2n+1$)) et une classe \overline{CSB} dans la région au-dessous de la courbe $y = \varphi_{n+1}$. En comparasion avec la situation sans $(y - \varphi_{2n+1})$ on y voit une nouvelle CRB , tandis que la classe „riche“ CSB est restée essentiellement la même, parce que, dans la nouvelle situation, toutes les solutions pour $y < USB$ „inférieure“ de \overline{CSB} sont aussi bornées pour $x \rightarrow +\infty$, suivant l'unicité des solutions. On peut considérer le cas n pair d'une façon analogue.

§ 7

Considérons le cas

$$(8) \quad y' = \frac{(y - \varphi_2)(y - \varphi_4) \cdots (y - \varphi_{2n})}{(y - \varphi_1)(y - \varphi_3) \cdots (y - \varphi_{2n-1})(y - \varphi_{2n+1})}.$$

Entre les courbes $y = \varphi_i$ ($i = 1, 3, \dots, 2n+1$) on voit n classes CSB séparées. En comparasion avec la situation sans $(y - \varphi_{2n+1})$ nous constatons une situation essentiellement différente. La classe CRB^* n'existe plus, et n solutions séparées USB sont devenues n classes séparées CSB .

Dans le cas réciproque

$$(8') \quad y' = \frac{(y - \varphi_1)(y - \varphi_3) \cdots (y - \varphi_{2n-1})(y - \varphi_{2n+1})}{(y - \varphi_2)(y - \varphi_4) \cdots (y - \varphi_{2n})}$$

on obtient $n+1$ solutions USB séparées tandis que dans la situation sans $(y - \varphi_{2n+1})$ il y avait n classes CSB , dont une „riche“.

§ 8

Les paragraphes 6 et 7 traitèrent les cas où la différence des nombres de facteurs du numérateur et du dénominateur était égale à 1. Voyons maintenant les cas où cette différence est plus grande que 1.

Considérons d'abord la position (7). Nous ajouterons au numérateur successivement les nouveaux facteurs, par exemple pour obtenir

$$(9) \quad y' = \frac{(y - \varphi_{n+1}) \cdots (y - \varphi_{2n+1})(y - \varphi_{2n+2}) \cdots (y - \varphi_r)}{(y - \varphi_1)(y - \varphi_2) \cdots (y - \varphi_n)}.$$

Les dessins montrent tout de suite que le nombre de CRB reste invariable en

comparaison avec (7). Si nous ajoutons cependant 1, 3, 5, ... facteurs, on y voit une CRB^* de plus pour $y < \varphi_1$. Dans ce cas la classe \overline{CSB} devient \underline{CSB} . Dans le cas où l'on ajoute 2, 4, 6, ... facteurs, la classe \overline{CSB} reste \overline{CSB} devenant toujours plus „riche“. Étant n pair il n'y a qu'une petite nuance différente: à la classe \overline{CSB} ici correspond \underline{CSB} et réciproquement.

On peut déduire les conclusions analogues pour toutes les situations où, dans la première position, le nombre de facteurs diffère pour 1. Nous ne considérerons qu'un de tels cas; notamment, partant de (8) nous ajouterons les facteurs au dénominateur pour obtenir

$$(10) \quad y' = \frac{(y-\varphi_2)(y-\varphi_4)\cdots(y-\varphi_{2n})}{(y-\varphi_1)(y-\varphi_3)\cdots(y-\varphi_{2n-1})(y-\varphi_{2n+1})(y-\varphi_{2n+2})\cdots(y-\varphi_r)}$$

Dans la position (8) on a constaté n classes CSB séparées. Chaque nouveau facteur donne une nouvelle classe CRB , entre les nouvelles courbes ajoutées. Chaque nouveau facteur fait les USB passer dans CSB et réciproquement. Dans le cas où le nombre de nouveaux facteurs est impair, on obtient encore CRB^* pour $y < \varphi_1$.

§ 9

Dans les paragraphes 4, 5, 6, 7, 8 c'est-à-dire pour les équations (5), (5'), (6), (6'), (7), (7'), (8), (8'), (9), (10) nous avons les structures fixes du deuxième membre des équations en question, ce qui veut dire que les permutations A, B (voir (1)) étaient aussi fixes. Maintenant, nous examinons le cas de (1), pour $\alpha_i = \alpha_j = 1$ et sous les hypothèses (3) et (3') pour les fonctions φ_s ($s = 1, \dots, m$) continues et bornées, sans tenir compte des permutations A, B . Nous allons voir quelles sont les variations de la situation qualitative des solutions lorsque, partant d'une position quelconque un facteur du numérateur devient tout simplement un facteur du dénominateur et réciproquement.

Le nombre de facteur restant, en réalité, le même, les courbes φ_s restant dans la même position géométrique (les inégalités (3') restent invariables), il en résulte que le signe du deuxième membre de (1) entre φ_s reste aussi interchangeable. Les champs entre ces courbes réservent leurs orientations. Mais, malgré cela, la situation qualitative des solutions change, parce que les courbes du type φ_i ($i \in B$) deviennent les courbes φ_j ($j \in A$) et réciproquement.

Imaginons qu'une courbe φ_i devient la courbe φ_j . Considérons deux courbes φ_s voisines à φ_i ($\varphi^* < \varphi_i < \varphi^{**}$). Les courbes φ^*, φ^{**} peuvent être toutes les deux du type φ_i , ou toutes les deux du type φ_j , ou l'une du type φ_i et l'autre du type φ_j . Le signe du deuxième membre de (1) est dans les régions $\varphi^* < y < \varphi_i$ et $\varphi_i < y < \varphi^{**}$ contraire et il peut être dans la première positif et dans la seconde négatif ou inversement. Nous allons construire le schéma de la position primitive pour la courbe φ_i , avant sa transformation dans φ_j . Si φ^* est du type φ_i , on la désignera par φ_i^* . Le sens des désignations $\varphi_i^*, \varphi_i^{**}, \varphi_j^*, \varphi_j^{**}$ est maintenant clair. Tenant compte du signe du deuxième membre de (1) dans les régions en question et le résultat correspondant concernant les solutions bornées dans ces régions, on peut écrire, par exemple:

$$\varphi_i^* + \varphi_i - \varphi_j^{**} + : CRB, USB.$$

On peut lire: la courbe inférieure est du type φ_i , entre φ_i^* et φ_i le signe de (1) est positif, entre φ_i et φ_j^{**} le signe de (1) est négatif, la courbe supérieure est du type φ_j , au-dessus d'elle est, naturellement, le signe de (1) positif. Cela veut dire qu'on a (entre φ_i^* et φ_i) une classe CRB , et que l'encadrement du φ_j^{**} donne une USB . Supposons que φ_i soit devenu φ_j . L'analyse simple montre qu'on obtient une \overline{CSB} , tandis que CRB n'existe plus. Nous écrivons donc

$$\varphi_i^* + \varphi_i - \varphi_j^{**} + : CRB, USB; (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow \overline{CSB}.$$

Tous les cas possibles sont donnés par le tableau suivant:

$$\varphi_i^* + \varphi_i - \varphi_i^{**} + : CRB, CRB; (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow CSB$$

$$\varphi_i^* - \varphi_i + \varphi_i^{**} - : CRB, CRB; (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow USB$$

$$\varphi_j^* + \varphi_i - \varphi_i^{**} + : USB, CRB, (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow \overline{CSB}$$

$$\varphi_j^* - \varphi_i + \varphi_i^{**} - : CSB, CRB, (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow \overline{CSB}$$

$$\varphi_i^* + \varphi_i - \varphi_j^{**} + : CRB, USB, (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow \overline{CSB}$$

$$\varphi_i^* - \varphi_i + \varphi_j^{**} - : CRB, CSB, (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow \overline{CSB}$$

$$\varphi_j^* + \varphi_i - \varphi_j^{**} + : USB, USB, (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow \overline{CSB}$$

$$\varphi_j^* - \varphi_i + \varphi_j^{**} - : CSB, CSB, (\varphi_i \rightarrow \varphi_j) \Rightarrow CSB.$$

Il est évident que le même tableau peut servir pour illustrer la transformation inverse, lorsque les fonctions φ_j deviennent fonctions φ_i . Au lieu de φ_i il faut toujours écrire φ_j et changer la place des symboles entre „:“ et „ \Rightarrow “ d'un côté et à droite de „ \Rightarrow “ d'autre côté.

§ 10

Jetons un regard à l'équation (1) où n'est pas toujours $\alpha_i = \alpha_j = 1$, c'est-à-dire où, au deuxième membre, il y a de facteurs du type $(y - \varphi_s)^k$ (k -un nombre naturel) figurant au numérateur ou au dénominateur. Evidemment, pour k impair, rien ne change dans nos considérations — la situation est la même comme dans le cas $\alpha_i = \alpha_j = 1$. Mais, pour k pair, le signe du deuxième membre de (1) ne change pas au voisinage de φ_s . En général, les résultats sont semblables à ceux qu'on obtient sans le facteur $(y - \varphi_s)^k$, avec certaines modifications que nous allons expliquer exposant quelques exemples.

Envisageons l'équation

$$y' = \frac{(y - \varphi_1)(y - \varphi_2)^{2k}(y - \varphi_3)}{(y - \varphi_4)(y - \varphi_5)}$$

Toutes les solutions appartenant aux point pour $y < USB$ (USB provenant du „tuyau“ qui encadre φ_3) sont bornées. Il existe aussi une CRB entre φ_4 et φ_5 . L'équation sans le facteur $(y - \varphi_2)^{2k}$

$$y' = \frac{(y - \varphi_1)(y - \varphi_3)}{(y - \varphi_4)(y - \varphi_5)}$$

offre le même résultat.

Mais, posant un tel facteur au dénominateur, par exemple

$$y' = \frac{(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)}{(y-\varphi_3)(y-\varphi_4)^{2k}(y-\varphi_5)}$$

nous obtenons le résultat suivant: on a une classe \overline{CSB} et deux classes CRB . L'équation

$$y' = \frac{(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)}{(y-\varphi_3)(y-\varphi_4)^{2k}(y-\varphi_5)}$$

n'a cependant qu'une classe CRB . Cette variation n'est pas essentielle, φ_4 étant entre φ_3 et φ_5 — un nombre plus grand de CRB n'est que formel. Dans les autres cas l'adjonction de tels facteurs porte aussi quelques variations non-essentielle, diminuant parfois l'ampleur des classes de solutions bornées pour $x \rightarrow +\infty$ en faveur des solutions CRB .

La fonction φ_s provenant du facteur $(y-\varphi_s)^{2k}$ peut être φ_{\max} , φ_{\min} ou une courbe entre deux autres. Soit $\varphi_{\max} = \varphi_s$. La courbe voisine (au-dessous d'elle est φ_{s-1} . Soit φ_{s-1} du type φ_i . Dans la situation sans $(y-\varphi_s)^{2k}$ on ne peut dire rien sans considérer φ_{s-2} . Mais, après avoir ajouté $(y-\varphi_s)^{2k}$ on obtient CRB entre φ_{s-1} et φ_s . Soit φ_{s-1} du type φ_j . Son encadrement garantit USB . L'adjonction du facteur $(y-\varphi_s)^{2k}$ donne cette USB mais aussi une sorte de CRB^* entre la frontière supérieure du tuyau formant USB et φ_s . Soit $\varphi_{\min} = \varphi_1$. Soit φ_2 du type φ_i au voisinage duquel (1) change de signe qui est positif au-dessus. Sans $(y-\varphi_1)^{2k}$ on ne peut dire rien sans examiner φ_3 . Si l'on ajoute $(y-\varphi_1)^{2k}$ on obtient une CRB , entre φ_1 et φ_2 . Dans le cas où ce signe est au-dessus de φ_2 négatif, on a CRB^* . Si l'on ajoute $(y-\varphi_1)^{2k}$, on obtient CRB^* et CRB , mais l'ampleur de ces solutions reste la même. Pour φ_2 du type φ_j , on a USB pour (1) positif au-dessus de φ_2 . Si l'on ajoute $(y-\varphi_1)^{2k}$ on obtient une sorte de CRB^* de plus, entre φ_1 et la limite inférieure du tuyau. Pour φ_2 du type φ_j , on a CSB pour (1) négatif au-dessus de φ_2 . Si l'on ajoute $(y-\varphi_1)^{2k}$ cette classe CSB devient une CSB moins ample et une CRB^* .

Les cas où φ_s paraît entre deux courbes, nous donneront par le tableau suivant:

$$\begin{aligned} +\varphi_j^* - \varphi_j^{**} + \overline{CSB}(\varphi_s) &\Rightarrow CSB, USB \\ -\varphi_j^* + \varphi_j^{**} - \underline{CSB}(\varphi_s) &\Rightarrow USB, CSB \\ +\varphi_i^* - \varphi_i^{**} + CRB^*, CRB(\varphi_s) &\Rightarrow CRB^*, CRB, CRB, \\ -\varphi_i^* + \varphi_i^{**} - CRB(\varphi_s) &\Rightarrow CRB, CRB \\ +\varphi_j^* - \varphi_i^{**} + CSB(\varphi_s) &\Rightarrow CSB, CRB \\ -\varphi_j^* + \varphi_i^{**} - USB(\varphi_s) &\Rightarrow USB, CRB \\ +\varphi_i^* - \varphi_j^{**} + CRB^*, USB(\varphi_s) &\Rightarrow CRB^*, CRB, USB \\ -\varphi_i^* + \varphi_j^{**} - CSB(\varphi_s) &\Rightarrow CRB, CSB \end{aligned}$$

On lit, par exemple, la dernière ligne tellement: La situation primitive contient deux fonctions: φ_i^* du type φ_i et φ_j^{**} du type φ_j . La succession de signes est respectivement $- + -$. On a *CSB*. Si l'on ajoute φ_s du type $(y - \varphi_s)^{2k}$ (au dénominateur) entre ces deux courbes, on obtient *CRB*, *CSB*.

Une étude de ces 12 situations confirme notre conclusion que les variations des résultats ne sont pas essentielles, mais peuvent diminuer les classes bornées pour $x \rightarrow +\infty$. Naturellement, il s'agit des adjonctions dans le cas où les facteurs correspondants aux courbes voisines en question sont simples, ce qui donne la clarté à la discussion.

§ 11

Considérons aussi l'équation (1) mais sans les hypothèses $\alpha_i = \alpha_j = 1$, (3), conservant la condition $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m$ pour les fonctions φ_s continues et bornées pour $x \geq x_0$. Il y aura des cas où l'une des fonctions φ_s est monotone, croissante ou décroissante et qu'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi_s = l$ ($|l| < \infty$). Supposons que φ_s

soit une fonction dont le facteur appartient au numérateur, qu'elle est monotone et croissante et qu'elle tend vers l ($|l| < \infty$) pour $x \rightarrow +\infty$. Supposons encore que la droite $y = l$ se trouve, pour $x > x_0$, dans la région entre φ_s et φ_{s+1} et que le signe de (1) soit positif dans cette région. Soit le signe de (1) négatif dans $\varphi_{s-1} < y < \varphi_s$. On pourra construire, dans la dernière région, sous les hypothèses simples sur φ_{s-1} une courbe $y = \varphi(x)$ monotone et croissante tendant aussi vers l pour $x \rightarrow +\infty$. La droite $y = l$ et la courbe $y = \varphi(x)$ forment un „tuyau“ garantissant *USB*, qui tend aussi vers l pour $x \rightarrow +\infty$ (voir [50]).

Soient, enfin, $y = \varphi_s$ et $y = \varphi_{s+1}$ deux fonctions dont les facteurs appartiennent au numérateur de (1), où φ_s est monotone, croissante et tend vers l pour $x \rightarrow +\infty$ et φ_{s+1} est monotone, décroissante et tend vers la même valeur pour $x \rightarrow +\infty$. La droite $y = l$ est entre ces deux courbes. Soit dans la région $\varphi_{s+1} < y < \varphi_{s+2}$ le signe de (1) négatif ou positif, dans la région $\varphi_s < y < \varphi_{s+1}$ positif, et dans la région $\varphi_{s-1} < y < \varphi_s$ négatif. Sous les hypothèses simples concernant φ_{s-1} on peut construire deux fonctions $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$ ($\varphi_{s-1} < \Psi_1 < \varphi_s$ et $\varphi_s < \Psi_2 < \varphi_{s+1}$), par exemple $\Psi_2 = \frac{\varphi_s + l}{2}$ où $\Psi_1(x)$ est monotone, croissante et tend vers l pour $x \rightarrow +\infty$ et $\Psi_2(x)$ monotone, décroissante et tend vers l pour $x \rightarrow +\infty$. Ces deux courbes (voir [46], [50]) forment un „tuyau“ garantissant *USB* qui tend aussi vers l pour $x \rightarrow +\infty$.

Il est clair qu'on peut obtenir tellement une classe de théorèmes constatant l'existence des solutions qui sont bornées pour $x \rightarrow +\infty$ et qui, pour $x \rightarrow +\infty$, tendent vers les valeurs fixes, qui peuvent être différentes l'une de l'autre.

Remarque 1. Il faut remarquer que dans les cas les plus simples, où φ_s sont des constantes, les droites $y = \varphi_j$ (appartenant aux facteurs du numérateur) donnent les vraies solutions de l'équation (1). Si φ_s du dénominateur sont aussi constantes, les équations en question sont solubles par les quadratures. Cela permet, dans les cas simples, la vérification des résultats dont nous avons parlé.

Mais, même dans ces situations où nous obtenons facilement l'intégrale générale, celle sera donnée dans une forme implicite, difficile à étudier. La méthode qualitative, exposée dans ce article restera donc utile.

Remarque 2. M. Milosav Marjanović (Université de Belgrade) nous a remarqué que la condition

$$\inf \varphi_k(x) > \sup \varphi_l(x)$$

pour $k > l$ et $x > x_0$ peut être omise. Notamment, au lieu des droites se trouvant entre deux courbes voisines $\varphi_s(x)$ nous pouvons considérer des lignes polygonales composées de segments parallèles aux axes x et y . Les segments parallèles à l'axe x suffisent pour former l'ensemble S de sortie stricte. Il est toujours possible ($\varphi_s(x)$ bornées, continues pour $x > x_0$ et $\varphi_1 < \dots < \varphi_m$) de former les lignes polygonales en question. La condition dont on parle peut être omise, évidemment, dans III 8 aussi.

III 12. REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE MICHEL PETROVITCH

Nous traiterons dans ce passage le résultat suivant de Petrovitch ([32], [33], [34]) qui l'a démontré en se servant du théorème de la moyenne.

Étant donné l'équation

$$(1) \quad y'' = f(x)y$$

où $f(x)$ est une fonction réelle, finie et continue dans un intervalle (a, b) de x , toute courbe intégrale y dont la dérivée première s'annule dans un point (x_0, y_0) compris dans l'intervalle (a, b) où f est positive, est dans cet intervalle comprise entre deux courbes

$$(2) \quad y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0) \sqrt{N} \quad \text{et} \quad y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0) \sqrt{M}$$

où N et M désignent une limite inférieure et une limite supérieure de $f(\xi)$ pour les valeurs comprises entre x_0 et X . Si f est négative dans (a, b) supposé suffisamment étendu, la courbe y est oscillante, se composant de demi-ondes alternativement positives et négatives. Chaque demi-onde soit positive, soit négative, est comprise entre les deux courbes

$$(3) \quad y = y_0 \cos(x - x_0) \sqrt{N} \quad \text{et} \quad y = y_0 \cos(x - x_0) \sqrt{M}$$

N et M ayant des significations précédentes relatives à $-f(x)$.

Il est connu qu'on réduit (1) à l'équation de Riccati

$$(4) \quad z' + z^2 - f(x) = 0$$

après avoir posé $y = e^{\int z dx}$. Dans l'article ([45]) nous avons appliqué le théorème de Tchapliguine à l'équation (4) démontrant qu'on obtient les courbes (2), (3) à titre des courbes d'encadrement. On a démontré tellement le théorème de Petrovitch d'une autre manière. Utilisant les résultats du passage II 6 nous allons démontrer ce résultat d'une troisième manière, utilisant la méthode de rétracte.

Dans le passage en question on peut trouver que pour l'équation

$$L(y) = y'' + a(x)y' + b(x)y - f(x) = 0$$

de l'inégalité $L(y) > 0$ ($L(y) < 0$) dans $(x_0, x_1]$ suit $v(x) > y(x)$ ($v(x) < y(x)$) dans le même intervalle sous certaines conditions. La condition suffisante est l'existence au moins d'une solution continue de l'équation de Riccati

$$z' + z^2 + a(x)f + b(x) = 0$$

dans $[x_0, x_1]$.

Dans notre cas on a

$$L(y) = y'' - f(x)y = 0 \quad \text{et} \quad z' + z^2 - f(x) = 0.$$

Considérons d'abord le cas $0 < N < f(x) < M$ pour $y_0 > 0$. Si l'on pose au premier membre de l'équation la fonction $v(x) = y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0) \sqrt{M}$, on obtient $L(v) > 0$. Si l'on pose $u(x) = y = y_0 \operatorname{ch}(x - x_0) \sqrt{N}$, on obtient $L(u) < 0$. Il faut enfin considérer les conditions suffisantes en question.

Pour k suffisamment grand, grâce au fait que $f(x)$ est bornée, le second membre de l'équation $k' = -k^2 + f(x)$ sera négatif. Cependant pour $k = 0$, on a $k' = f(x) > 0$. Soient $k = k_1$ et $k = k_2$ ($k_2 < 0, k_1 > 0$) deux droites telles que l'on a $-k_1^2 + f(x) < 0$ et $-k_2^2 + f(x) < 0$. Le „tuyau“ $x > x_0, k_2 < k < 0$ garantit au moins une solution continue de „l'équation de garantie“ de Riccati dans $(x_0, +\infty)$, et le tuyau $x > x_0, 0 < k < k_1$ offre même un ensemble infini de telles solutions. Les conditions suffisantes sont remplies et $u(x)$ et $v(x)$ sont les courbes d'encadrement (la courbe inférieure et la courbe supérieure) Pour $y_0 < 0$ la courbe v devient inférieure et u devient la courbe supérieure.

Pour $0 < N < -f(x) < M$ c'est-à-dire pour $f(x) < 0$ le second membre de $k' = -k^2 + f(x)$ est toujours négative. On ne peut pas former des tuyaux semblables à ceux du cas précédent. Il est clair, cependant qu'il existe de voisinages où les solutions de l'équation de Riccati en question sont continues ce qui donne la validité à l'inégalité de Petrovitch, parce que dans ce cas, pour $y_0 > 0, u = u_0 \cos(x - x_0) \sqrt{N}, v = y_0 \cos(x - x_0) \sqrt{M}$ on obtient $L(u) > 0, L(v) < 0$ (pour $y_0 < 0: L(u) < 0, L(v) > 0$), ce qui est facile à vérifier.

On peut trouver dans notre travail [61] plusieurs commentaires concernant les résultats de Petrovitch.

CHAPITRE IV

SOLUTIONS APPROXIMATIVES PRESQUE STABLES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Nous allons généraliser dans ce chapitre la notion de stabilité dans le sens de Liapounoff, pour comprendre et définir exactement une classe de solutions et de solutions approximatives figurant dans quelques de nos travaux ([46], [48], [49], [50], [53], [55]).

Étant donnée l'équation

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, t),$$

($f(x, t)$ étant une fonction continue, satisfaisant à une des conditions d'unicité), la solution $x(t)$ est dite stable dans le sens de Liapounoff (ou, simplement, stable) si à tout nombre arbitraire $\varepsilon > 0$ correspond toujours un $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel qu'on a $|x(t) - x_1(t)| < \varepsilon$ pour $|x(t_0) - x_1(t_0)| < \delta$, dans l'intervalle infini $t > t_0$ ($x_1(t)$ une autre solution de (1)). Dans le cas où $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - x_1(t)| = 0$ la stabilité est dite asymptotique. Pour $\delta(\varepsilon, t_0)$ indépendant de t_0 , la stabilité est uniforme.

On traite très souvent la solution stable $x \equiv x_0 = \text{const}$ ou, enfin, $x \equiv 0$, ce qui ne diminue pas la généralité. Vraiment, la transformation des coordonnées $\bar{x} = x_0 + x - x(t)$ ou $\bar{x} = x - x(t)$ réduit la solution $x = x(t)$ à la solution $x \equiv x_0$ ou $x \equiv 0$ dans le système nouveau, pour l'équation ainsi transformée. La solution $x = x_0$ annule la fonction $f(x, t)$. On l'appelle aussi „le point singulier“.

Excepté les solutions du type $x = x_0$ annulant la fonction $f(x, t)$, dans la théorie qualitative sont souvent traitées les autres fonctions provenant de l'équation $f(x, t) = 0$. Les courbes obtenues sont les lieux géométriques des points stationnaires, jouissant parfois très bien le rôle des solutions approximatives.

Dans notre généralisation qui va suivre, la constante arbitraire ε ne pourra pas être tout à fait arbitraire.

Donnons, alors, la suivante

DEFINITION. Soit $x = \varphi(t)$ une fonction arbitraire définie pour $t > t_0$. La fonction $x = \varphi(t)$ sera dite la solution approximative presque stable de l'équation (1) si à tout nombre $\varepsilon > l > 0$ (l un nombre fixe) correspond un $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tel que l'on a $|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ pour $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$ dans l'intervalle infini $t > t_0$ ($x(t)$ une solution de (1)).

Ici, comme on a déjà souligné, le nombre ε est toujours plus grand qu'un nombre l fixe. Cette restriction imposée à ε permet cependant de comprendre les classes de solutions qui ne sont pas stables, mais jouissent tout de même une propriété assez régulière. Les solutions stables sont aussi comprises, étant aussi „presque stables“, parce que, ε étant arbitraire, la définition est valable pour tout $\varepsilon > l > 0$. Dans les cas où $x = \varphi(t)$ présente la vraie solution de (1), le mot „approximative“ doit être supprimée.

EXEMPLE* Envisageons une fonction $x = \varphi(t)$ telle qu'on a $m < \varphi(t) < M$ pour $t > t_0$ (m, M — les constantes). Soit $f(m, t) > 0$ et $f(M, t) < 0$. Dans ce cas évidemment toutes les solutions appartenant au points $m < x < M$, $t > t_0$ restent dans le tuyau envisagé pour $t > t_0$. La fonction $x = \varphi(t)$ est la solution presque stable. Vraiment, posons $M - m = l$. Le tuyau $m < x < M$ sera encadré par le tuyau curviligne $\varphi(t) - \varepsilon < x < \varphi(t) + \varepsilon$ ($\varepsilon > l$) parce qu'on a $\varphi(t) - \varepsilon < m$ et $\varphi(t) + \varepsilon > M$ pour $\varepsilon > l = M - m$. Étant $m < \varphi(t_0) < M$ et toutes les solutions appartenant aux points $m < x < M$, $t > t_0$ restant dans le tuyau rectiligne, on peut toujours choisir un $\delta(\varepsilon, t_0)$ tel que $x(t)$ reste dans le tuyau $t > t_0$.

$m < x < M$ si l'on a $|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$. Cette solution restera à fortiori dans le tuyau plus large $\varphi(t) - \varepsilon < x < \varphi(t) + \varepsilon$, toujours pour $t \geq t_0$.

Dans le cas où la différence $M - m$ est suffisamment petite, la fonction $\varphi(t)$ peut bien servir comme une solution approximative.

Il faut souligner aussi que les solutions de (1) appartenant aux points (t_1, x_1) ($t_1 > t_0$, $m < x < M$) sont presque stables. On peut, en réalité trouver toujours un x_2 proche à x_1 tel que la solution appartenant au point (t_1, x_2) reste dans le tuyau $t \geq t_1$, $m < x < M$ pour $t > t_1$ restant donc aussi dans le tuyau plus large $\varphi(t) - \varepsilon < x < \varphi(t) + \varepsilon$ pour $\varepsilon > M - m$.

La situation traitée dans cet exemple arrive très souvent dans les régions autour des fonctions $x = \varphi(t)$ annulant la fonction $f(x, t)$ lorsque la fonction y change de signe, $x = \varphi(t)$ formant la frontière des deux régions où $f(x, t) > 0$ et $f(x, t) < 0$.

Comme un exemple très simple citons l'équation

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = \prod_{i=1}^n (x - \varphi_i(t))$$

les fonctions $\varphi_i(t)$ étant continues pour $t \geq t_0$ avec

$$(3) \quad \inf \varphi_{i+1} > \sup \varphi_i; \quad \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n.$$

Sous ces hypothèses les courbes $\varphi_i(t)$ peuvent être séparées l'une de l'autre par les droites $x = \text{const}$.

La courbe, par exemple, $\varphi_{n-1}(t)$ est une solution approximative presque stable. Le rôle des droites $x = m$, $x = M$ jouissent ici les droites $x = x_{n-1} = \text{const}$ (la droite qu'on peut poser entre $\varphi_{n-2}(t)$ et $\varphi_{n-1}(t)$) et $x = x_n$ (la droite qu'on peut poser entre $\varphi_{n-1}(t)$ et $\varphi_n(t)$).

L'équation (2) fut traitée par Michel Petrovitch (voir [30]) sous le titre d'„équation chimique“. Nous l'avons déjà traitée dans nos articles ([49], [50]). Cependant nos travaux ([46], [48], [53], [55]) contiennent les cas des solutions approximatives concernant les équations plus générales. Au Congrès International des Mathématiciens, Moscou (16—26 août 1966) nous avons traité, par exemple, l'équation

$$(4) \quad y' = \frac{\prod_{i \in A} (y - \varphi_i(x))^{\alpha_i}}{\prod_{j \in B} (y - \varphi_j(x))^{\alpha_j}}$$

α_i, α_j les nombres naturels, A et B deux permutations des nombres $1, 2, \dots, m$ avec $A \cup B = \{1, 2, \dots, m\}$, $A \cap B = \emptyset$, où nous avons constaté dans plusieurs cas les solutions bornées qui sont, en réalité, presque stables, dans le sens que nous avons défini dans le présent article. Il faut admettre que les travaux de V. S. Loščinjin et B. Tulegenov ([19], [20], [21]) traitent aussi les fonctions $\varphi(t)$ annulant la fonction $f(x, t)$ sous les hypothèses semblables ou identiques aux hypothèses que nous avons citées.

Nous avons déjà dit que, pour $M-m$ petite la fonction $\varphi(t)$ sert très bien comme une solution approximative. On va voir qu'elle devient dans ce cas très semblable à une droite, dans le sens qui sera expliqué tout de suite.

Dans l'exemple $\frac{dx}{dt} = (x-1)(x-2)(x-3)$ la droite $x=2$ est la solution stable dans le sens de Liapounoff, d'une stabilité asymptotique et uniforme. La situation dans le cas $\frac{dx}{dt} = (x-\varphi_1(t))(x-\varphi_2(t))(x-\varphi_3(t))$ est très semblable par rapport à la fonction $x = \varphi_2(t)$. Elle sera autant plus semblable que $M-m$ est plus petite. Dans ce sens $\varphi_2(t)$ „tend“ vers une droite stable pouvant, d'autre côté, avoir la dérivée oscillante; ne possédant, donc, pas les autres propriétés géométriques des droites.

On pourrait facilement définir avec les exemples correspondants, des courbes presque stables d'une stabilité asymptotique et uniforme.

CHAPITRE V

ZONE D'INFLUENCE QUALITATIVE DE CERTAINES FONCTIONS

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad y' = F(x, y, \varphi(x))$$

où la fonction $\varphi(x)$ jouit d'une certaine propriété qualitative P .

Définition. La région $\Omega(x, y)$ est dite „zone d'influence qualitative de la fonction $\varphi(x)$ “ si l'on peut déduire, partant de la propriété P de $\varphi(x)$, que toutes les solutions de (1) appartenant à Ω jouissent de la même propriété P .

Cette définition, ainsi que le contenu général du présent passage nous avons donné dans notre lettre [59] et dans [60].

Parmi un grand nombre d'exemples nous soulignerons le cas de l'équation

$$(2) \quad y^m + y'^n = f(x)$$

(m, n — les nombres naturels, $f(x)$ continue et différentiable pour $x > x_0$), où le rôle de $\varphi(x)$ joue la fonction $y = \sqrt[m]{f(x)}$ (le lieu géométrique de points stationnaires). Sous les hypothèses différentes sur $\sqrt[m]{f(x)}$ (ayant la signification de P) nous avons démontré que dans les cas qui suivent, il existe une classe de solutions, appartenant à une région Ω , jouissant de la même propriété correspondante.

Nous allons systématiser les résultats de façon suivante: sous l'hypothèse commune que $f(x)$ et $\sqrt[m]{f(x)}$ sont continues et différentiables pour $x > x_0$, $f(x) > 0$, nous écrivons les résultats sous A, B, \dots relativement aux propriétés de $\sqrt[m]{f(x)}$ et sous 1°, 2°... relativement aux propriétés de m, n .

A La fonction $\sqrt[m]{f(x)} \rightarrow +\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$ (la monotonie n'est pas nécessaire).

1° m pair, n impair: il existe une classe de solutions tendant vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$.

2° m impair, n impair: toutes les solutions tendent vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$.

B La fonction $\sqrt[m]{f(x)}$ est monotone et tend vers $+\infty$ pour $x \rightarrow \infty$.

3° m pair, n pair: toutes les solutions tendent vers ∞ pour $x \rightarrow +\infty$.

4° m impair, n pair: il existe une classe de solutions tendant vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$.

C La fonction $\sqrt[m]{f(x)}$ bornée pour $x > x_0$.

5° m pair, n impair: il existe une classe de solutions bornées.

6° m impair, n pair: il existe une classe de solutions bornées, y impliquant le cas où ces solutions ne sont pas prolongeables pour $x \rightarrow +\infty$.

7° m impair, n impair: toutes les solutions sont bornées.

D La fonction $\sqrt[m]{f(x)} \rightarrow c \neq \infty$ (la monotonie n'est pas nécessaire)

8° m pair, n impair: il existe une classe de solutions tendant vers la même constante pour $x \rightarrow +\infty$.

9° m impair, n impair: toutes les solutions tendent vers la même constante pour $x \rightarrow +\infty$.

E La fonction $\sqrt[m]{f(x)}$ croissante et monotone, tend vers une constante $a > 0$ pour $x \rightarrow +\infty$.

10° m pair, n pair: il y a une classe de solutions tendant vers a et une classe tendant vers $-a$ pour $x \rightarrow +\infty$.

11° m impair, n pair: il existe une classe de solutions tendant vers a pour $x \rightarrow +\infty$.

F La fonction $\sqrt[m]{f(x)} \rightarrow +0$ pour $x \rightarrow +\infty$ (la monotonie n'est pas nécessaire)

Ce cas est compris dans D. 8°, mais le dessin est un peu différent.

12° m pair, n impair: il existe une classe de solutions tendant vers $+0$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Nous ne donnerons pas les démonstrations de tous les résultats (12), parce que elles sont semblables l'une à l'autre et le lecteur pourra facilement vérifier les autres après avoir vu les démonstrations de quelques des résultats en question, qui suivent.

Démonstration de A 1°. On a, donc, l'équation $y^{2k} + y^{2l+1} = f(x)$ ($k = 1, 2, 3, \dots; l = 0, 1, 2, \dots$). Écrivons la sous la forme $y' = \sqrt[2l+1]{f(x) - y^{2k}}$.

Le second membre sera positif dans la région $-\sqrt[2k]{f(x)} < y < \sqrt[2k]{f(x)}$, nul pour $y = \pm\sqrt[2k]{f(x)}$ et négatif dans le reste du plan ($|y| > \sqrt[2k]{f(x)}$). Les solutions ap-

partenant à la région $|y| < \sqrt[2k]{f(x)}$ sont, donc, croissantes et monotones. Elles ne peuvent pas tendre, pour $x \rightarrow +\infty$, vers une limite fixe $\neq \infty$, parce qu'on

aurait $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[2l+1]{f(x) - y^{2k}} = +\infty$ ce qui est impossible, la dérivée d'une fonction

monotone qui tend vers une limite fixe ne pouvant tendre que vers zéro dans le cas où elle possède une limite. La solution en question ne peut pas être bornée pour $x \rightarrow +\infty$, parce qu'elle aurait une limite fixe dans ce cas. La

solution soit tend vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$ sans jamais atteindre $\sqrt[2k]{f(x)}$, soit possède un point commun avec cette fonction. Dans ce point sa première dérivée s'annule. Les solutions en question sont prolongeables infiniment, mais elles ne peuvent pas avoir une asymptote verticale où elles tendraient vers $+\infty$,

parce que pour $|y| > \sqrt[2k]{f(x)}$ les solutions sont décroissantes. Pour $x > x_1$ (x_1 l'abscisse du point commun de notre solution et de $\sqrt[2k]{f(x)}$) la solution peut

entrer dans la région $|y| > \sqrt[2k]{f(x)}$ et y décroître, ne pouvant pas tendre vers une limite fixe à cause des raisons expliquées. Elle doit donc atteindre encore

une fois $\sqrt[2k]{f(x)}$ etc. Elle peut donc être de façon expliquée liée à la $\sqrt[2k]{f(x)}$

et tendre vers $+\infty$ avec celle-ci. Dans le cas $\sqrt[2k]{f(x)}$ monotone, par exemple,

la solution décroissante provenant de la région $|y| > \sqrt[2k]{f(x)}$ peut atteindre $\sqrt[2k]{f(x)}$,

y avoir son minimum, passer dans $|y| < \sqrt[2k]{f(x)}$ et puis, toujours croissant,

tendre vers $+\infty$. Dans les points $y = \sqrt[2k]{f(x)}$ l'unicité ne doit pas être obligatoirement remplie, ce qui n'a aucune influence à nos considérations. On a

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = -\frac{2ky^{2k-1}}{(2l+1)\left(\sqrt[2l+1]{f(x) - y^{2k}}\right)^{2l+1}}$$
 ce qui n'est pas définie pour $y = \pm\sqrt[2k]{f(x)}$.

Démonstration de B 4°. On a donc $y^{2l+1} + y^{2k} = f(x)$ ($l = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots$). On aura $y' = \pm\sqrt[2k]{f(x) - y^{2l+1}}$. Le second membre est défini seulement pour $y < \sqrt[2k]{f(x)}$.

Par chaque point de cette région passent deux courbes intégrales, une croissante et l'autre décroissante. Envisageons une solution croissante. Elle ne peut pas tendre vers une limite fixe pour $x \rightarrow +\infty$ (voir démonstration de A 1°).

Elle peut donc tendre vers $+\infty$ sans jamais atteindre $\sqrt[2l+1]{f(x)}$. Dans le cas où elle a un point commun avec $\sqrt[2l+1]{f(x)}$, soit $x = x_1$ ce point. Pour $x > x_1$ (un voisinage droit) on aura $\sqrt[2l+1]{f(x)} > y_1(x)$ (y_1 étant notre solution), parce que, suivant les hypothèses, $(\sqrt[2l+1]{f(x)})' > y_1'(x)$ dans ce point. La solution $y_1(x)$ ne peut pas avoir un point suivant $x_2 > x_1$ commun avec $\sqrt[2l+1]{f(x)}$, parce que, dans un voisinage gauche $x < x_2$ elle devrait être $y_1(x) > \sqrt[2l+1]{f(x)}$ où les solutions n'existent pas. La solution ne pourrait pas être continue, ce qui contredit à la nature continue, différentiable et prolongeable de la solution en question. Pour $x > x_1$ la solution pourrait donc rester dans $y < \sqrt[2l+1]{f(x)}$ et y tendre vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration de C 6. On a la même équation et presque la même situation comme dans le cas précédent. En général, la solution peut rester dans $y < \sqrt[2l+1]{f(x)}$ et y rester bornée, mais, prenant en égard que la fonction bornée $\sqrt[2l+1]{f(x)}$ n'est pas supposée obligatoirement monotone et croissante on peut arriver que, dans le point commun x_1 de $y_1(x)$ et de $\sqrt[2l+1]{f(x)}$ la fonction $\sqrt[2l+1]{f(x)}$ est décroissante, c'est-à-dire, elle devrait être, pour $x > x_1$ plus grande que $\sqrt[2l+1]{f(x)}$, c'est-à-dire, elle devrait entrer dans la zone „interdite“, ce qui est impossible. Elle peut rester, donc, inprolongeable, ayant la dérivée gauche nulle dans $x = x_1$. Elle est bornée, mais pas pour $x \rightarrow +\infty$.

Démonstration de D 9. On a l'équation

$$y^{2l+1} + y'^{2k+1} = f(x); \quad k, l = 0, 1, \dots$$

On a alors

$$y' = \sqrt[2k+1]{f(x) - y^{2l+1}}.$$

Les solutions sont croissantes pour $y < \sqrt[2l+1]{f(x)}$ et décroissantes pour $y > \sqrt[2l+1]{f(x)}$. Une solution, soit croissante, soit décroissante ne pourrait premièrement jamais atteindre la courbe $y = \sqrt[2l+1]{f(x)}$. Elle serait monotone et bornée dans ce-

cas et elle aurait une limite fixe $a > 0$. Sa dérivée $\sqrt[2k+1]{f(x)-y^{2l+1}}$, $f(x)$ tendant, d'après l'hypothèse, vers c^{2l+1} , tend aussi vers une limite fixe, qui doit être obligatoirement zéro. On a, donc, partant de $y' = \sqrt[2k+1]{f(x)-y^{2l+1}}$, pour $x \rightarrow +\infty$, $0 = \sqrt[2k+1]{c^{2l+1}-a^{2l+1}}$ ce qui donne $c = a$.

Si la solution a de points communs avec $\sqrt[2l+1]{f(x)}$, elle peut rester liée à cette fonction passant de la région de croissance dans la région de décroissance et inversement, tendant avec elle vers la même limite.

Démonstration de E 10°. On a $y^{2k} + y'^{2l} = f(x)$ ($k, l = 1, 2, \dots$).

On a alors, $y' = \pm \sqrt[2l]{f(x)-y^{2k}}$. Toutes les solutions appartiennent à la région $|y| < \sqrt[2k]{f(x)}$. Par chaque point de cette région passent deux courbes intégrales, l'une croissante et l'autre décroissante. On démontre analogiquement au cas précédent qu'une courbe croissante n'ayant pas de points commun avec $\sqrt[2k]{f(x)}$ ne peut tendre que vers a pour $x \rightarrow +\infty$. A cause de monotonie de la fonction $\sqrt[2k]{f(x)}$ croissante, une solution croissante ayant un point commun x_1 avec $\sqrt[2k]{f(x)}$ doit dans $x = x_1$ avoir la dérivée droite nulle et puis rester toujours $y(x) < \sqrt[2k]{f(x)}$ sans plus l'atteindre. Elle reste donc bornée et ne peut que tendre vers la même constante. Les solutions décroissantes tendent vers $-a$.

*

Citons enfin quelques exemples élémentaires des équations linéaires où la zone d'influence en question est évidente.

Exemple 1. Etant donnée l'équation

$$y' = \sin x - y$$

la zone de croissance des solutions est pour $y < \sin x$ et la zone de décroissance pour $y > \sin x$. La zone d'influence est tout le plan XOY , parce que chaque solution décroissante doit atteindre $\sin x$, y avoir son minimum, passer dans $y < \sin x$, croître, sur $y = \sin x$ atteindre son maximum, etc. et rester toujours liée à la fonction $y = \sin x$. La propriété P d'une solution est d'être oscillante de façon analogue à celle de $y = \sin x$, mais la périodicité n'est pas obligatoire. La même conclusion vaut pour les solutions croissantes de $y < \sin x$ deviennent de même oscillantes.

Si l'on voit l'intégrale générale

$$y = Ce^{-x} + \frac{\sin x - \cos x}{2},$$

il est évident que l'on obtient une solution oscillante seulement pour $C=0$, mais pour $x \rightarrow +\infty$ le membre Ce^{-x} tend vers 0 et les solutions „ressemblent“ de plus en plus à la fonction $y = \sin x$.

Exemple 2 Etant donnée l'équation

$$y' = e^x - y$$

tout le plan sera la zone d'influence de la fonction $y = e^x$ (les solutions tendent vers $+\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$). L'intégrale générale confirme la conclusion.

$$y = \frac{e^x}{2} + Ce^{-x}.$$

Les équations linéaires et bien d'autres offrent beaucoup d'exemples concernant la zone d'influence.

*

L'équation (2) devient, pour $m=n=2$ l'équation connue, étudiée par Michel Petrovitch (voir [33] et [34] et le petit article pédagogique: Osetljiva mesta običnih i diferencijalnih jednačina (M. Petrović, Članci, Beograd 1949)), et d'un autre point de vue par Tadija Pejović ([41]) et Dragoslav S. Mitri-nović ([42]). Les lieux géométriques de points stationnaires figurant dans le présent chapitre, dont le rôle important est bien connu, peuvent bien servir à titre des solutions approximatives. Nous avons, par exemple, défini la notion de „solution approximative presque stable“ (voir notre article [57] et le chapitre précédent), où la propriété P introduite dans le présent travail a un sens distantiel, proche à la stabilité au sens de Liapounoff.

*

Il est facile de voir que l'équation $y'^m - y^n = f(x)$ peut être aussi considérée de façon analogue. Par exemple, considérons l'équation $y'^{2k+1} - y^{2l} = f(x)$, avec $f(x) < 0$ pour $x > x_0$, la fonction $-\sqrt[2l]{-f(x)}$ monotone et tendant vers $-\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$. Alors, il existe une classe de solutions tendant vers $-\infty$ pour $x \rightarrow +\infty$. Les autres cas doivent être étudiés sous les hypothèses semblables au cas de $y^m + y^n = f(x)$ ou sous les hypothèses différentes de celles-ci. L'équation

$$y'^n - \prod_{i=1}^m (y - \varphi_i(x)) = f(x)$$

offre aussi une suite de possibilités.

*

Envisageons tous les cas où à la fonction $\varphi(x)$ bornée, pour $x > x_0$ par exemple, correspond une classe de solutions bornées pour $x > x_0$ de l'équation $y' = F(x, y, \varphi(x))$. Ceci veut-dire que l'équation $y' = F(x, y, \varphi(x))$ définit dans ce cas une transformation de l'ensemble de fonctions bornées $\varphi(x)$ en soi-même de façon qu'à toute fonction $\varphi(x)$ correspond un continu d'éléments du même ensemble. Il faudrait bien intéressant d'étudier les propriétés de

cette transformation ainsi que les généralisations possibles dans ce sens des idées.

Il est intéressant de remarquer que Michel Petrovitch donne des résultats (voir [36]) concernant l'équation $y' = F(x, y, \varphi(x))$ avec $\lambda(x) < \varphi(x) < \mu(x)$ et ces équations de comparaison $y' = F(x, y, \lambda(x))$, $y' = F(x, y, \mu(x))$. Pour les solutions des équations considérées il obtient $y_1(x) < y(x) < y_2(x)$. La propriété P dont nous parlons ici a le sens: „être encadré entre deux courbes fixes”. Nous avons tiré l'idée fondamentale de la zone d'influence en étudiant les travaux de Petrovitch.

SUPPLÉMENTS

Nous avons obtenu quelques résultats après le séminaire dont le contenu fait l'objet de la présente étude. Ces résultats ne sont pas encore publiés. Nous les citerons sans démonstration.

1° Soit donnée l'équation différentielle aux coefficients continus

$$(1) \quad L[y] \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Considérons sa solution $y(x)$ avec $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$. Soit définie, dans l'intervalle $[x_0, x_1]$ une fonction $v(x)$ avec $v(x_0) = y(x_0) = y_0$, ..., $v^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, pour laquelle on a

$$(2) \quad v^{(n)} + a_1(x)v^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)v' + a_n(x)v - f(x) = \varphi(x) > 0$$

dans $[x_0, x_1]$, ce qui veut dire que $v(x)$ satisfait à l'inégalité linéaire de Tchaplignine de l'ordre n . On pose la question: est-ce que on a

$$(3) \quad v(x) > y(x)$$

dans (x_0, x_1) ?

Il est bien connu que la condition nécessaire et suffisante pour la réponse positive à la question posée est la non-négativité de la fonction de Cauchy $K(x, \alpha)$, c'est-à-dire: $K(x, \alpha) > 0$ dans le triangle $x_0 < \alpha < x < x_1$. Nous avons démontré la proposition suivante:

Proposition 1. L'équation (1) aux coefficients constants a_1, \dots, a_n a la fonction $K(x, \alpha)$ non-négative dans le sens expliqué et pour x_1 arbitraire dans le cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont réelles et $r_1 < \dots < r_n$. La même conclusion a lieu pour l'équation caractéristique de la forme $(r - r_1)^n = 0$ (r_1 —nombre réel).

Excepté la condition $K(x, \alpha) > 0$ qui est nécessaire et suffisante il est possible de former plusieurs critères suffisantes pour

$$L[v] - f(x) = \varphi(x) > 0 \Rightarrow v > y \text{ dans } (x_0, x_1).$$

Inspirés par un procédé de démonstration du à A. D. Myškis nous avons donné pour $n=3$ ($n=3$ ne diminue pas la généralité, ce qui sera clairement montré dans nos démonstrations) certaines classes d'équations du type

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x)$$

pour lesquelles l'inégalité différentielle du type (2) dans $[x_0, x_1)$ a pour conséquence l'inégalité (3) dans (x_0, x_1) .

Proposition 2. *L'implication (2) \Rightarrow (3) a lieu pour les équations dont les coefficients $a(x)$, $b(x)$ sont données par les équations linéaires*

$$2\varphi a(x) + b(x) = -3\varphi' - 3\varphi^2$$

$$(\varphi' + \varphi^2)a(x) + \varphi b(x) = -\varphi'' - 3\varphi\varphi' - \varphi^3 - c(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction arbitraire deux fois différentiable et $\varphi^2 - \varphi' \neq 0$ dans $[x_0, x_1)$ et $c(x)$ étant une fonction arbitraire définie dans $[x_0, x_1)$. Le choix $\varphi = -\frac{a}{3}$ facilite la démonstration.

Proposition 3. *La même conclusion a lieu pour le système*

$$3\varphi a(x) + b(x) = -4\varphi' - 7\varphi^2$$

$$(\varphi' + \varphi^2)a(x) + \varphi b(x) = -\varphi'' - 3\varphi\varphi' - \varphi^3 - c(x)$$

avec $2\varphi^2 - \varphi' \neq 0$, où le rôle du choix $\varphi = -\frac{a}{3}$ précédent joue le choix $\varphi = \frac{a}{2}$.

Plusieurs exemples sont donnés, qui illustrent les possibilités provenant de nos propositions.

2° Suivant l'étude de l'équation d'Abel, cité en avance nous avons démontré le théorème suivant, permettant la conclusion sur l'asymptotique des solutions dans l'intervalle infini.

Proposition 4. *Soit donnée l'équation différentielle*

$$(y + g(x))y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$$

sous les hypothèses suivantes:

a) les fonctions $g(x)$, $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$

sont continues et bornées pour $x > x_0$

b) on a $g(x) > 0$, $f_0(x) < 0$, $f_1(x) - g(x)f_2(x) > 0$,

$$f_2(x) < 0 \text{ pour } x > x_0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f_2(t) dt = -\infty.$$

c) Il existe un $\varepsilon > 0$ tel qu'on on a

$$\varepsilon > -\frac{f_0}{g}, \quad \frac{\varepsilon}{f_2} > \sup \frac{f_0 + \varepsilon g}{gf_2 - f_1 - \varepsilon} \text{ pour } x > x_0.$$

Alors, il existe une classe de solutions avec $y(x) \rightarrow 0$.

$x \rightarrow +\infty$

Les exemples sont construits.

3° Généralisant „l'équation chimique” étudié par Michel Petrovitch

$$y' = (f_1 - y)(f_2 - y) \cdots (f_n - y)$$

nous avons démontré

Proposition 5. Soit donnée l'équation

$$(4) \quad y' = \prod_{i=1}^n [\varphi_i(f_i(x)) - \varphi_i(y)]$$

où $f_i(x)$ sont pour $x > x_0$ les fonctions différentiables et

$$f_1(x) < f_2(x) < \cdots < f_n(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_i(x) = C_i = \text{const.}$$

Soient $\varphi_i(y)$ des fonctions différentiables et monotones

$$(\varphi_i(y) \neq \varphi_j(y)); \quad i \neq j \quad \text{pour } -\infty < y < +\infty.$$

On a sous ces hypothèses:

Dans le cas n pair, à chacune des constantes C_i (i impair) correspond une classe de solutions de (4) telle qu'on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = C_i$ et à chacune des constantes C_i (i pair) correspond au moins une solution de (4) avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = C_i$.

2° Dans le cas n impair, φ_i des fonctions monotones et croissantes, le résultat est le même comme dans 1°, ce qui veut dire pour n impair, que toutes les solutions tendent vers les constantes.

3° Dans le cas n impair φ_i des fonctions monotones et décroissantes, aux index i pairs correspondent les classes de solutions tendant vers C_i , et aux index i impairs „au moins une solution”, contrairement au résultat 1°.

Les cas où parmi les φ_i il y a de fonctions croissantes et décroissantes sont étudiés aussi, ainsi que les cas

$$\varphi_1(y) \equiv \varphi_2(y) \equiv \cdots \equiv \varphi_n(y) \equiv \varphi(y)$$

et

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv \cdots \equiv f_n(x) \equiv f(x).$$

Les exemples sont construits.

LITTÉRATURE

- [1] С. А. Чаплыгин, *Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений*, Собрание сочинений, I, 1948.
- [2] С. А. Чаплыгин, *Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений*. Классики естествознания, Москва—Ленинград, 1950.
- [3] С. А. Чаплыгин, *Избранные труды по механике и математике*, Москва, 1954.
- [4] Н. Н. Лузин, *О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина*, УМН, Т. VI вып. 6 (46)—1951, (3—27).
- [5] Н. Н. Лузин, *Интегральное исчисление*, Москва 1949.
- [6] И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений II*, Москва 1960, 260—277.
- [7] В. В. Степанов, *Курс дифференциальных уравнений*, Москва, 1958.
- [8] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1951, (1961).
- [9] И. Т. Петровский: *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. Издание пятое. Москва 1964.
- [10] Э. Беккенбах, Р. Белман: *Неравенства*. Москва 1965.
- [11] Б. Н. Петров, *Граница применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах к линейным уравнениям с обыкновенными производными второго порядка*. ДАН СССР, LI, № 4 (1946), 251—254.
- [12] Б. Н. Петров, *Неприменимость теоремы о дифференциальном неравенстве С. А. Чаплыгина к некоторым нелинейным уравнениям с обыкновенными производными второго порядка*, ДАН СССР LI, № 7, (1946), 465—498.
- [13] Н. В. Азбелев и З. Б. Цалюк: *О задаче Чаплыгина*, УМЖ, т. X, № 1, 3—12.
- [14] Н. В. Азбелев: *О границах применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах*, Матем. сборник, т. 39, в. г. 1956, 161—178.
- [15] Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк: *К вопросу о дифференциальном неравенстве*, Дифференциальные уравнения, т I, 4, 1965, 431—438.
- [16] Н. А. Кащеев, *К вопросу о границе применимости теоремы С. А. Чаплыгина о диф. нер. к линейным диф. ур. высших порядков*, Уч. зап. Куйб. гос. пед. ин—та, 1956, вып 14, 53—56.
- [17] Н. А. Кащеев, *Точная граница применимости теоремы Чаплыгина для линейного уравнения*, ДАН СССР, т. 111, № 5, 937
- [18] А. Н. Черкасов, *Заметка о линейных дифференциальных уравнениях второго порядка*, Весн. Моск. Ун—та, Сер. мат. мех. астр. физ. хим., 1958, № 3, 13—17.
- [19] В. С. Лощинин, *Некоторые вопросы асимптотического поведения интегральных кривых уравнения первого порядка в целом*. Уч. зап. Ряз. пед. ин—та, Т. 15, 1958, 77—82.
- [20] В. С. Лощинин, *К вопросу о горизонтальных и вертикальных асимптотах решений уравнения первого порядка*, Уч. зап. Ряз. пед. ин—та, Т. 15, 1958, 83—87.

- [21] Б. Тулегенов, *О существовании квазипериодических решений нелинейного дифференциального уравнения первого порядка*, Изв. Акад. наук Казахской ССР, Сер. физ. мат. наук, вып. 2, 1964 (Мат. и мех. вып. 16), 72—76.
- [22] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*. Ann. de la Soc. pol. de Math. T. XX, 279—313.
- [23] T. Ważewski, *Sur une méthode topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles*. Proc. of the Int. Congr. of Math. 1954, Amsterdam, Sept. 9, Vol. III, 132—139.
- [24] T. Ważewski, *Une méthode topologique de l'examen du phénomène asymptotique relativement aux équations différentielles ordinaires*. Rend. dell. Accad. Naz. dei Lincei (Cl. di Sc. fis. mat. e nat.) ser. VIII, vol. III, fasc 3—4, 210—215.
- [25] T. Ważewski, *Systèmes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. de la Soc. polon. de math., T. XXIII, 1950, 112—166.
- [26] Tatarkiewicz K. *Quelques exemples de l'allure asymptotique de solutions d'équations différentielles*, Ann. Univ. Marie Curie Skłodowska, Vol. III, 9, 1954.
- [27] Kamke E., *Differentialgleichungen—Lösungsmethoden und Lösungen*. Leipzig, 1956.
- [28] K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. 17, (1931), p. 152.
- [29] J. G. Petrovski, *Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Vierte Auflage, Leipzig, 1954.
- *
- [30] Michel Petrovitch, *Sur l'équation différentielle de Riccati et ses applications chimiques*. Sitzungsberichte Königl. böhm. Ges. Wiss., Math-naturwiss. Classe, 1896, Prag, 1—25.
- [31] Michel Petrovitch, *Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre*, Math. Annalen, LIV Band, 3. Heft, 417—436, 1899.
- [32] Michel Petrovitch, *Intégration qualitative des équations différentielles*. Mémorial des Sci. math., Paris 1931.
- [33] M. Petrovitch, *Intégrales premières à restrictions*, Acad. roy. de Serbie, Posebna izdanja LXXII, 1929.
- [34] *Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch (1894—1921)*, Acad. roy. de Serb. Paris 1922.
- [35] М. Петровић, *О асимптотичним вредностима интеграла диференцијалних једначина првог реда*. СКАН, L, 1895.
- [36] Михаило Петровић, *Рачунање с бројним размацама*, Београд 1932.
- [37] Т. Пејовић, *Диференцијалне једначине—ејзисџениција решења*, Београд 1958.
- [38] Т. Реуович, *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles*, Belgrade 1952.
- [39] Т. Реуович, *Sur quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisés*. Comm. math. Univ. Sancti Pauli, T. V, 77—80, Tokyo, 1956.
- [40] Т. Реуович, *Quelques théorèmes élémentaires des intégrales généralisées et leurs applications*, Boll. U. M. I. (3), vol. 15, 1—6, Bologna, 1960.
- [41] Т. Пејовић, *Нови случајеви интеграбилности једне важне диференцијалне једначине* (докт. теза), Београд, 1923.
- [42] Д. С. Митриновић, *Истраживања о једној важној диференцијалној једначини првог реда* (докт. теза), Београд, 1935.
- [43] М. Бертолино, *Неке функционалне неједнакости добивене применом Чајли-инове методе и ујоређивање са резултатима М. Пејровића*, Bul. Soc. math. et phys de la R. P. de Serbie, IX, 1—2, Beograd 1957, pp 87—94.
- [44] M. Bertolino, *Procédés de l'encadrement des solutions des équations différentielles*, Bull. Soc. math. et phys. de la R. P. de Serbie, IX, 3—4, Belgrade 1957, pp. 261—268.

- [45] M. Bertolino, *Примедба у вези са једним сјаавом Михаила Пејровића*, Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, X, Beograd 1958, pp. 115—118.
- [46] M. Bertolino, „*Théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations différentielles*“. Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, XIII, Beograd 1961, pp. 23—34.
- [47] M. Bertolino, „*Jedna primena diferencijalnih nejednakosti*“. Matematička biblioteka 22, Beograd 1962, (pp. 37—45).
- [48] M. Bertolino, „*Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina*“ (doktorska teza) Bull. de la Soc. des math. et phys. de la R. P. de Serbie, XV, Beograd 1963, pp. 79—124.
- [49] M. Bertolino, „*Asimptotska rešenja jedne diferencijalne jednačine prvog reda faktorizovane desne strane*“. Matematički vesnik, 1 (16), Beograd, 1964, pp. 23—27.
- [50] M. Bertolino, „*Tuyaux curvilignes des solutions d'une équation différentielle*“. Matematički vesnik, 1 (16), Beograd, 1964, pp. 239—241.
- [51] M. Bertolino, „*L'intégration qualitative de l'équation d'Abel de deuxième espèce avec les généralisations*“. Matematički vesnik, 1 (16), Beograd 1964, pp. 335—338.
- [52] M. Bertolino, „*Sur la limitie (finie ou infinie) d'application des inégalités de Tchapliguine du second ordre*“. Ann. di mat. pura et appl. (IV) Vol. LXVII, pp. 113—126, Bologna, 1965.
- [53] M. Bertolino, „*Uokviravanje i asimptoska rešenja jedne diferencijalne jednačine prvog reda*“. Matematički vesnik, 2 (17), Beograd, 1965, pp. 223—231.
- [54] M. Bertolino, „*O maksimalnom intervalu primene Čapliginovih nejednakosti*“. Matematički vesnik, 3 (18), Beograd 1966, pp. 35—45.
- [55] M. Bertolino, „*Solutions asymptotiques d'une équation différentielle au deuxième membre rationnel*“. Matematički vesnik, 3 (18), Beograd, 1966, pp. 275—285.
- [56] M. Bertolino, „*Démonstration élémentaire d'un cas particulier du théorème de rétracte de Wazewski*“. Matematički vesnik, 3 (18), Beograd, 1966, pp. 302—303.
- [57] M. Bertolino, „*Solutions approximatives presque stables des équations différentielle*“. Matematički vesnik, 4 (19), Beograd, 1967, pp. 71—74.
- [58] M. Bertolino, „*Priorité de Michel Petrovitch relative au théorème de Tchapliguine sur les inégalités différentielles du premier ordre*“. Matematički vesnik, 4 (19), Beograd, 1967, pp. 165—168.
- [59] M. Bertolino, „*Zone d'influence qualitative de certaines fonctions figurant au deuxième membre des équations différentielles*“. Bull. sci., Conseil Acad. RSF Yougoslavie, Section A Zagreb, Tome 12, N^o—9—10. 1967 p. 241.
- [60] M. Bertolino, „*Zone d'influence qualitative de certaines fonctions*“. Matematički vesnik, 5 (20), Beograd, 1968, pp. 189—194.
- [61] M. Bertolino, *Пејровићево директно проучавање решења диференцијалних једначина*. Matematički vesnik, 5 (20) св 4, 1968, стр. 423—437.
- [62] M. Bertolino, *Inégalités différentielles et l'analyse qualitative d'équations différentielles*. Bilten na Društv. na mat. i fiz. od SR Makedonija, Skopje 1967, str. 17—29.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I		page
INTRODUCTION		61
CHAPITRE II		
APPLICATIONS D'INÉGALITÉS DE TCHAPLIGUINE		63
II 1. Une question de priorité		63
II 2. La méthode de Tchapliguine		67
II 3. Solutions asymptotiques de certaines équations différentielles		70
II 4. Estimation des solutions de l'équation d'Abel de deuxième espèce avec les généralisations		77
II 5. Encadrement et solutions asymptotiques d'une équation différentielle du premier ordre		82
II 6. Limite d'application des inégalités de Tchapliguine du second ordre		86
CHAPITRE III		
SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES ET LA MÉTHODE DE RÉTRACTE		96
III 1. Liaison avec les résultats précédents		96
III 2. Inégalités différentielles de T. Ważewski. La méthode de rétracte due à T. Ważewski		98
III 3. Interprétation de nos résultats précédents au point de vue de la méthode de rétracte		101
III 4. Généralisations		103
III 5. Système de deux équations différentielles		108
III 6. Solutions asymptotiques bornées d'un système à $p+q$ équations différentielles		114
III 7. Démonstration élémentaire d'un cas particulier du théorème de rétracte de Ważewski		117
III 8. Solution asymptotiques d'une équation différentielle du premier ordre du second membre factorisé		118
III 9. „Tuyaux“ curvilignes des solutions d'une équation différentielle		121
III 10. Remarques concernant quelques résultats précédents		123
III 11. Solutions asymptotiques d'une équation différentielle au second membre rationnel		125
III 12. Remarque sur un théorème de Michel Petrovitch		135
CHAPITRE IV		
SOLUTIONS APPROXIMATIVES PRESQUE STABLES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES		136
CHAPITRE V		
ZONE D'INFLUENCE QUALITATIVE DE CERTAINES FONCTIONS SUPPLÉMENTS		139 145

Remarque La littérature citée est divisée en quatre parties, où la première partie concerne la littérature soviétique, la deuxième partie la littérature aux langues occidentales, la troisième partie la littérature yougoslave, la quatrième partie les travaux de l'auteur lui même.

Le principe chronologique n'a pas eu lieu, mais le principe d'importance des références figure dans chaque partie séparément. Ce n'est pas toujours „l'importance absolue“ dans le domaine correspondant — on voulait aussi faciliter au lecteur d'approfondir ces connaissances. Dans l'article [62] le lecteur peut trouver un court aperçu concernant le travail de l'auteur dans le domaine d'équations différentielles — une sorte de résumé de la présente étude.

M. Bertolino

O. RAKIĆ

QUELQUES PROPRIÉTÉS
ASYMPTOTIQUES D'UN SYSTÈME
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

T. Peyovitch a considéré un système d'équations différentielles de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) e^{x_k} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

où les coefficients $a_{ik}(t)$, ($i, k=1, 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions réelles, continues et bornées de la variable réelle t . Il a montré comment les solutions de ce système se comportent lorsque la variable réelle t tend soit vers $-\infty$ soit vers $+\infty$.

Nous allons démontrer que les mêmes propriétés sont vérifiées par des solutions du système d'équations

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) e^{u_k(x_k)} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

où $a_{ik}(t)$ ($i, k=1, 2, 3, \dots, n$) sont des fonctions réelles, continues et bornées de la variable réelle t , tandis que $u_k(x_k)$ sont des fonctions réelles et dérivables et leurs dérivées $\frac{du_k(x_k)}{dx_k}$ bornées.

Théorème 1. *Si l'on a, pour $t > t_0$,*

$$(2) \quad -M < a_{ik}(t) < -m \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

et, pour $x_i \in (-\infty, +\infty)$,

$$(3) \quad g < \frac{du_i}{dx_i} < G \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

où m, M, g et G sont des constantes positives, on aura alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i = -\infty \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Pour démontrer ce théorème transformons le système d'équations (1) en introduisant la transformation suivante

$$(4) \quad e^{u_i(x_i)} = y_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

d'où l'on a

$$(5) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{u_i'} \cdot \frac{y_i'}{y_i} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

avec

$$u_i' \equiv \frac{du_i(x_i)}{dx_i}, \quad y_i' \equiv \frac{dy_i}{dt} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

En vertu des relations (4) et (5) le système d'équations (1) devient

$$(6) \quad y_i' = u_i' y_i \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) y_k \quad (i=1, 2, 3, \dots, n).$$

Tenant compte des conditions (2) et (3) le système d'équations (6) devient un système d'inégalités suivantes

$$(7) \quad -MG y_i \sum_{k=1}^n y_k < y_i' < -mg y_i \sum_{k=1}^n y_k, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

En faisant la somme de ces inégalités de $i=1$ à $i=n$, on aura

$$-MG \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^2 < \sum_{k=1}^n y_k' < -mg \left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^2.$$

Si l'on divise cette inégalité par $\left(\sum_{k=1}^n y_k \right)^2$, on peut l'écrire sous la forme

$$(8) \quad MG > \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sum_{k=1}^n y_k} \right) > mg.$$

En intégrant l'inégalité (8) de t_0 à t , on obtient

$$(9) \quad MG(t-t_0) + C > \frac{1}{\sum_{k=1}^n y_k(t)} > mg(t-t_0) + C,$$

où l'on a $C = \frac{1}{\sum_{k=1}^n y_k(t_0)}$. La constante C est positive, car l'expression

$$\sum_{k=1}^n y_k(t_0) = \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_0)}$$

est toujours positive. Puisque les expressions

$$MG(t-t_0) + C \text{ et } mg(t-t_0) + C$$

sont positives vu que $t > t_0$ et $C > 0$, l'inégalité (9) peut être mise sous la forme

$$(10) \quad \frac{1}{MG(t-t_0)+C} < \sum_{k=1}^n y_k = \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} < \frac{1}{mg(t-t_0)+C}.$$

En vertu de l'inégalité (10), on peut déterminer le comportement des solutions du système (1), lorsque t augmente indéfiniment. Par conséquent, de système d'équations (1) et à cause de la condition (2), il en résulte

$$(11) \quad -M \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} < \frac{dx_i}{dt} < -m \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Les inégalités (11), par suite de l'inégalité (10), peuvent être écrites sous la forme

$$(12) \quad -\frac{M}{mg(t-t_0)+C} < \frac{dx_i}{dt} < -\frac{M}{MG(t-t_0)+C}, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

En intégrant les inégalités (12) de t_0 à t , on aura

$$(13) \quad x_i(t_0) + \frac{M}{mg} \ln \frac{C}{mg(t-t_0)+C} < x_i(t) < x_i(t_0) + \frac{m}{Mg} \ln \frac{C}{MG(t-t_0)+C},$$

($i=1, 2, \dots, n$),

où les valeurs initiales $x_i(t_0)$ sont finies et déterminées. Les inégalités (12) et (13) donnent

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i = -\infty, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

ce qu'il fallu démontrer.

De même on démontre les théorèmes suivantes:

Théorème 2. Si l'on a, pour $t < t_0$,

$$-M < a_{ik}(t) < -m, \quad (i, k=1, 2, \dots, n),$$

et, pour $x_i \in (-\infty, +\infty)$,

$$-G < u'_i < -g, \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où m, M, g et G sont des constantes positives, on aura alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_i = +\infty, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Théorème 3. Si l'on a, pour $t < t_0$,

$$m < a_{ik}(t) < M \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

et, pour $x_i \in (-\infty, +\infty)$,

$$g < u'_i < G \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où m, M, g et G sont des constantes positives, on aura alors

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x_i = -\infty, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Théorème 4. Si l'on a, pour $t > t_0$,

$$m < a_{ik}(t) < M \quad (i, k=1, 2, 3, \dots, n),$$

et, pour $x_i \in (-\infty, +\infty)$

$$-G < u'_i < -g \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

où m, M, g et G sont des constantes positives, on aura alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_i = +\infty \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

2. Le système d'équations (1) peut être utilisé pour étudier le comportement de la solution du système d'équations différentielles

$$(14) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) f_k(x_k) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

lorsque les fonctions $a_{ik}(t)$ et $f_k(x_k)$ sont réelles et continues par rapport à leurs arguments.

Théorème — Si l'on a pour $t > t_0$,

$$(15) \quad -M < a_{ik}(t) < -m, \quad (i, k=1, 2, 3, \dots, n)$$

et, pour $x_i \in (-\infty, +\infty)$,

$$(16) \quad e^{u_k(x_k)} < f_k(x_k) < e^{v_k(x_k)} \quad (k=1, 2, 3, \dots, n),$$

tandis que les fonctions $u_k(x_k)$ et $v_k(x_k)$ sont réelles et dérivables pour toutes les valeurs de x_k et elles satisfont aux conditions suivantes

$$(17) \quad g_1 < \frac{du_k}{dx_k} < G_1 \quad \text{et} \quad g_2 < \frac{dv_k}{dx_k} < G_2, \quad (k=1, 2, 3, \dots, n),$$

où m, M, g_1, G_1, g_2 et G_2 sont constantes positives avec $g_1 > g_2, G_1 < G_2$ on aura alors

$$x_i(t_0) + \frac{M}{mg_2} \ln \frac{C_2}{mg_2(t-t_0) + C_2} < x_i(t) < x_i(t_0) + \frac{m}{MG_2} \ln \frac{C_1}{MG_2(t-t_0) + C_1} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

où l'on a

$$C_1 = \left(\sum_{k=1}^n e^{u_k [x_k(t_0)]} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \left(\sum_{k=1}^n e^{v_k [x_k(t_0)]} \right)^{-1}$$

En vertu des hypothèses (15) et (16) on obtient du système des équations (14) le système des inégalités

$$(18) \quad -M \sum_{k=1}^n e^{v_k(x_k)} < \frac{dx_i}{dt} < -m \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

Si pour les sommes

$$(19) \quad \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n e^{v_k(x_k)}$$

peuvent être trouver la minorante et la majorante, le système des inégalités (18) deviennent de la forme (12).

Pour déterminer ceci, nous partirons de deux systèmes d'équations suivantes

$$(20) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) e^{u_k(x_k)},$$

$$(21) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) e^{v_k(x_k)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Si l'on pose $e^{u_i(x_i)} = y_i$, $e^{v_i(x_i)} = z_i$ dans les systèmes (20) et (21) et on utilise les hypothèses (15), (16) et (17) alors avec le même procédé ainsi qu'auparavant, on obtient les relations

$$(22) \quad \frac{1}{MG_1(t-t_0) + C_1} < \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} < \frac{1}{mg_1(t-t_0) + C_1},$$

$$(23) \quad \frac{1}{G_2 M(t-t_0) + C_2} < \sum_{k=1}^n e^{v_k(x_k)} < \frac{1}{mg_2(t-t_0) + C_2}$$

où l'on a

$$C_1 = \left(\sum_{k=1}^n e^{u_k [x_k(t_0)]} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \left(\sum_{k=1}^n e^{v_k [x_k(t_0)]} \right)^{-1},$$

D'après l'hypothèse (16) on voit que

$$e^{u_k(x_k)} < e^{v_k(x_k)}$$

et par conséquent

$$\sum_{k=1}^n e^{u_k [x_k(t_0)]} < \sum_{k=1}^n e^{v_k [x_k(t_0)]},$$

ou bien

$$\left(\sum_{k=1}^n e^{u_k [x_k(t_0)]} \right)^{-1} > \left(\sum_{k=1}^n e^{v_k [x_k(t_0)]} \right)^{-1}.$$

Cette inégalité montre que

$$(24) \quad C_1 > C_2$$

Puisque l'on sait que

$$g_1 > g_2, \quad G_1 < G_2 \text{ et } C_1 > C_2,$$

il s'en suit que

$$mg_1(t-t_0) > mg_2(t-t_0) \text{ et } MG_2(t-t_0) > MG_1(t-t_0)$$

et l'on a

$$\begin{aligned} mg_1(t-t_0) + C_1 &> mg_2(t-t_0) + C_2, \\ mG_2(t-t_0) + C_1 &> MG_1(t-t_0) + C_1, \\ MG_2(t-t_0) + C_1 &> MG_2(t-t_0) + C_2. \end{aligned}$$

Nous écrivons ces inégalités sous la forme

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{1}{mg_1(t-t_0) + C_1} &< \frac{1}{mg_2(t-t_0) + C_2}, \\ \frac{1}{MG_2(t-t_0) + C_1} &< \frac{1}{MG_1(t-t_0) + C_1}, \\ \frac{1}{G_2 M(t-t_0) + C_1} &< \frac{1}{MG_2(t-t_0) + C_2}, \end{aligned}$$

En vertu des inégalités (25) on voit que les inégalités (22) et (23) peuvent être remplacées par des inégalités

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{G_2 M(t-t_0) + C_1} &< \sum_{k=1}^n e^{u_k(x_k)} < \frac{1}{g_2 m(t-t_0) + C_2}, \\ \frac{1}{G_2 M(t-t_0) + C_1} &< \sum_{k=1}^n e^{v_k(x_k)} < \frac{1}{g_1 m(t-t_0) + C_2}, \end{aligned}$$

La minorante cherchée et la majorante cherchée pour les sommes (19) sont le membre gauche et membre droit des inégalités obtenues (26). Puisque les sommes (19) ont la même minorante et la même majorante, alors les inégalités (18) peuvent être remplacées par les inégalités

$$(27) \quad -\frac{M}{g_2 m(t-t_0) + C_2} < \frac{dx_i}{dt} < \frac{m}{G_2 M(t-t_0) + C_1} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n).$$

En intégrant ces inégalités (27) de t à t_0 , on obtient

$$x_i(t_0) + \frac{M}{g_2 m} \ln \frac{C_2}{g_2 m(t-t_0) + C_2} < x_i(t) < x_i(t_0) + \frac{m}{G_2 M} \ln \frac{C_1}{G_2 M(t-t_0) + C_1}$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$

De cette manière nous avons démontré le théorème mentionné ci-dessus.

Remarquons que si l'on introduit pour les fonctions $a_{ik}(t)$, $u_k(x_k)$ et $v_k(x_k)$ autres hypothèses comme par exemple

$$-M < a_{ik}(t) < -m \quad (i, k=1, 2, 3, \dots, n),$$

pour $t > t_0$ et pour $x_i \in (-\infty, +\infty)$

$$-G_1 < \frac{du_k}{dx_k} < -g_1 \quad \text{et} \quad -G_2 < \frac{dv_k}{dx_k} < -g_2 \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

étant donné que m, M, g_1, G_1, g_2 et G_2 sont des constantes positives avec $g_1 > g_2$ et $G_1 < G_2$ avec le même procédé que dans le cas précédent, on obtiendra alors l'inégalité qui correspond aux hypothèses introduites plus haut.

3. Théorème — Si dans le système d'équations de la forme

$$(28) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) f_k(x_k) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

les fonctions $a_{ik}(t)$ ($i, k=1, 2, 3, \dots, n$), sont réelles, continues et telles que l'on a, pour $t > t_0$,

$$(29) \quad -M < a_{ik}(t) < -m, \quad M > m > 0 \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

et les fonctions $f_k(x_k)$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) sont réelles, continues et positives dans tout l'intervalle fini, alors les solutions réelles et continues $x_i(t)$ de ce système d'équations, pour la variable réelle t , ont les propriétés

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i = -\infty \quad (i=1, 2, 3, \dots, n).$$

En vertu de la condition (29) et de l'hypothèse concernant les fonctions $f_k(x_k)$, le système (28) donne

$$(30) \quad -M \sum_{k=1}^n f_k(x_k) < \frac{dx_i}{dt} < -m \sum_{k=1}^n f_k(x_k) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Tenant compte des inégalités (30), on conclut que les dérivées $\frac{dx_i}{dt}$ sont finies et bornées pour toutes valeurs finies de x_k puisque les fonctions $f_k(x_k)$ sont finies pour les valeurs finies de x_k . Les solutions

$$(31) \quad x_i = \varphi_i(t) \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

qui par hypothèse existent, sont continues et monotonement décroissantes lorsque $t \rightarrow +\infty$ et cela strictement monotonement, car pour x_k fini, on a toujours $\frac{dx_i}{dt} \neq 0$, ce que montrent les inégalités (30).

Pour montrer que $x_i \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ il suffit de montrer que x_i n'a point d'asymptote parallèle à l'axe de t à la distance finie

$$(32) \quad x_i = -A, \quad (A > 0), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dans ce but nous allons résoudre une des équations (31) par rapport à t , soit i -ième, et l'on a

$$(33) \quad t = \psi_i(x_i).$$

Si l'on remplace t dans les autres solutions $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$, on obtient

$$(34) \quad x_k = \varphi_k(t) = \varphi_k[\psi_i(x_i)] = \Phi_k(x_i) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Enfin, si l'on remplace les valeurs t et x_k de (33) et (34) dans des équations (28), on aura

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} [\psi_i(x_i)] f_k [\Phi_k(x_i)]$$

et pour $k=i$ on a

$$a_{ik} [\psi_i(x_i)] f_k [\Phi_k(x_i)] = a_{ii} [\psi_i(x_i)] f_i(x_i).$$

Pour que les courbes intégrales $x_i(t)$ aient des asymptotes parallèles à l'axe de t à la distance finie $x_i = -A$, il faut que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dx_i}{dt} = \lim_{x_i \rightarrow -A} \sum_{k=1}^n a_{ik} [\psi_i(x_i)] f_k(x_i) = \sum_{k=1}^n a_{ik} [\psi_i(-A)] f_k[\Phi_k(-A)]$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

soit égal à zéro. Par conséquent, puisque par hypothèse les fonctions $f_k(x_k) = f_k[\Phi_k(x_i)]$ sont positives et finies pour toute valeur finie de x_i et les fonctions $a_{ik}(t) = a_{ik}[\psi_i(x_i)]$ négatives et différentes de zéro pour $t > t_0$, cette limite ne peut pas être égale à zéro. Donc, les courbes intégrales $x_i(t)$ n'ont pas des asymptotes parallèles à l'axe de t à la distance finie de l'axe de t . Puisque les courbes intégrales sont monotonement décroissantes, on aura $\forall x \quad x_i(t) \rightarrow -\infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$, ce qu'il a fallu démontrer.

Ce théorème est plus générale que les précédents, mais il est moins précis, car les théorèmes précédents donnent les comportements des $x_i(t)$ pour $t \rightarrow \infty$.

4. Si les coefficients $a_{ik}(t)$ du système (2) sont des constantes réelles et si les fonctions réelles $u_k(x_k)$ ont les formes $u_k(x_k) = g_k x_k$, où g_k sont des constantes réelles, alors on aura le théorème suivant

Théorème — Soit $x_i(t)$, ($i=1, 2, \dots, n$) le système des solutions d'équations différentielles

$$(35) \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e^{g_k x_k} \quad (i=1, 2, 3, \dots, n),$$

où a_{ik} et g_k sont les constantes réelles. Ce système admet, sous les conditions

$$(36) \quad g_i^2 a_{ii} a_{i, k+1} - 2 g_i g_{k+1} a_{ii} a_{k+1, k+1} + g_{k+1}^2 a_{k+1, k} a_{k+1, k+1} = 0$$

$$i=1, 2, 3, \dots, n-1; \quad k=i, i+1, i+2, \dots, n-1$$

la propriété

$$\lim_{t \rightarrow \pm \infty} \sum_{i=1}^n g_i a_{ii} e^{g_i x_i} = 0.$$

Pour démontrer le théorème que l'on vient d'énoncer, transformons le système (35) par la substitution

$$(37) \quad y_s = \sum_{i=1}^n b_{si} e^{g_i x_i} \quad (s=1, 2, 3, \dots, n).$$

où b_{si} sont des constantes réelles. Déterminons les coefficients b_{si} de la manière que le système (35) se ramène au système d'équations de la forme

$$(38) \quad \frac{dy_s}{dt} = y_s^2 \quad (s=1, 2, 3, \dots, n).$$

Les relations (37) donnent

$$(39) \quad \frac{dy_s}{dt} = \sum_{i=1}^n g_i b_{si} e^{g_i x_i} \frac{dx_i}{dt} \quad (s=1, 2, 3, \dots, n).$$

Si l'on substitue les valeurs de y_s et $\frac{dy_s}{dt}$ exprimées par les formules (37) et (39) dans le système d'équations (38), on aura

$$(40) \quad \sum_{i=1}^n \left(g_i b_{si} e^{g_i x_i} \sum_{k=1}^n a_{ik} e^{g_k x_k} \right) = \left(\sum_{i=1}^n b_{si} e^{g_i x_i} \right)^2, \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

Le membre gauche et droit de ce système peuvent être écrit sous la forme

$$(41) \quad \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n g_i b_{si} a_{ik} e^{g_i x_i + g_k x_k} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{si} b_{sk} e^{g_i x_i + g_k x_k} \right).$$

Pour obtenir les équations de forme plus maniable pour déterminer les coefficients b_{si} , nous écrivons le système (41) sous la forme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n g_i b_{si} a_{ii} e^{2g_i x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i}^{n-1} g_i b_{si} a_{i, k+1} + g_{k+1} b_{s, k+1} a_{k+1, i} \right) e^{g_i x_i + g_{k+1} x_{k+1}} = \\ & = \sum_{i=1}^n b_{si}^2 e^{2g_i x_i} + 2 \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} b_{si} b_{s, k+1} e^{g_i x_i + g_{k+1} x_{k+1}}, \quad (s=1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

d'où l'on a

$$(42) \quad \begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (g_i b_{si} a_{ii} - b_{si}^2) e^{2g_i x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n-1} (g_i b_{si} a_{i, k+1} + \\ & + g_{k+1} b_{s, k+1} a_{k+1, i} - 2 b_{si} b_{s, k+1}) e^{g_i x_i + g_{k+1} x_{k+1}} = 0, \quad (s=1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned}$$

Puisque $e^{2g_i x_i} \neq 0$ et, $e^{g_i x_i + g_{k+1} x_{k+1}} \neq 0$ pour toutes les valeurs finies de x_i , les équations (42) seront alors identiquement égales à zéro si l'on a

$$(43) \quad g_i b_{si} a_{ii} - b_{si}^2 = 0 \quad (i, s=1, 2, 3, \dots, n);$$

$$(44) \quad g_i b_{si} a_{i, k+1} + g_{k+1} b_{s, k+1} a_{k+1, i} - 2 b_{si} b_{s, k+1} = 0,$$

$$s=1, 2, 3, \dots, n; \quad i=1, 2, 3, \dots, n-1; \quad k=i, i+1, \dots, n-1.$$

Les valeurs

$$(45) \quad b_{si} = g_i a_{ii}, \quad (i, s=1, 2, 3, \dots, n),$$

que l'on obtient du système d'équations (43) doivent satisfaire aussi au système (44)

Si l'on pose dans le système (44)

$$b_{si} = g_i a_{ii} \quad \text{et} \quad b_{s, k+1} = g_{k+1} a_{k+1, k+1},$$

il devient alors

$$(46) \quad \begin{aligned} & g_i^2 a_{ii} a_{i, k+1} - 2 g_i g_{k+1} a_{ii} a_{k+1, k+1} + g_{k+1}^2 a_{k+1, i} a_{k+1, k+1} = 0 \\ & (i=1, 2, 3, \dots, n-1), \quad (k=i, i+1, i+2, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Dans le système (44) ou bien (46) le nombre de relations en tout est égal à $\frac{1}{2} n(n-1)$ ce que l'on reconnaît facilement de la manière suivante;

1° Pour $i=1, k=1, 2, 3, \dots, n-1$ les relations (46) donnent $n-1$ équations; 2° pour $i=2, k=2, 3, 4, \dots, n-1$, les relations donnent $n-2$ équations et ainsi de suite. Enfin, pour $i=n-1$ les relations (46) donnent une équation. Donc, on aura en tout

$$(n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + [n-(n-1)] = \frac{1}{2} n(n-1)$$

de relations

Par conséquent, le système d'équations différentielles (35) sous la condition que les coefficients a_{ik} et g_k satisfassent aux relations (46), peut être ramené par la substitution (37) au système (38) et avec les relations (45).

Si l'on intègre les équations différentielles (38) de t_0 à t , on obtient

$$\int_{t_0}^t \frac{1}{y_s^2} dy_s = \int_{t_0}^t dt \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{y_s(t)} + \frac{1}{y_s(t_0)} = t - t_0 \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

ou bien

$$y_s(t) = \frac{y_s(t_0)}{1 - y_s(t_0)(t - t_0)} = \frac{y_s(t_0)}{y_s(t_0)(t_0 - t) + 1} \quad (s=1, 2, \dots, n).$$

D'où l'on a

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \sum_{i=1}^n g_i a_{ii} e^{g_i x_i} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y_s(t_0)}{y_s(t_0)(t_0 - t) + 1} = 0 \quad (s=1, 2, \dots, n),$$

parce que $y_s(t_0)$ sont des nombres finis et réels.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Peyovitch — *Sur la valeur à l'infini des intégrales de certaines équations différentielles*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences t. 208, N° 13, Paris, 1939, p.
- [2] T. Peyovitch — *L'existence de solutions asymptotiques de certaines équations différentielles*, Publications de l'Institut mathématique, t. I Belgrad, 1947.
- [3] T. Peyovitch — *Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles*, Publications de l'Institut mathématique, t. II, Belgrad, 1948.
- [4] J. Chazy — *Sur la valeur à l'infini des solutions de certaines équations différentielles*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 208/2 p. 1446, Paris, 1939.

