Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović, Boban Veličković

TEORIJA SKUPOVA

matematička teorija ∞sti

Matematički fakultet, Beograd

Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović, Boban Veličković,

Teorija skupova

Recenzenti:

Dr Žarko Mijajlović

Dr Miodrag Rašković

Lektor: Ksenija Jovanović

ISBN 978 - 86 - 7589 - 058 - 4

UDK 510.22

COBISS.SR - ID 138608140

Izdavač: Matematički fakultet, Beograd

Štampa: Akademska izdanja, Beograd

Izdavanje ove publikacije pomoglo je Ministarstvo za nauku i životnu sredinu Republike Srbije.

Žuti car
Jednom, dosta davno, pred povratak iz šetnje obalom Crvene reke, pa planinom Kuen-luen, car Huang Ti je izgubio svoj crni biser. Pošalje Inteligenciju da ga traži, ova ga ne nađe. Pošalje Oštroumnost koja ga ne nađe, a onda i Analizu koja se takođe vrati praznih ruku. Najzad posla Bezobličje i ono ga pronađe. Zar nije neobično, pomisli tada Huang Ti, da ga je baš Bezobličje pronašlo.

nasleđe Čuang Cea

Predgovor

Navršilo se 100 godina od rođenja Gödela, a imali smo i Kurepinu stogodišnjicu. Navršava se i 100 godina aksiome izbora i Zermelo Fraenkelove aksiomatizacije teorije skupova, koja je izrasla na velikim problemima koje je nametnula Cantorova infinitarna aritmetika. U tom velikom višedecenijskom poduhvatu neophodno je bilo preraditi logiku, pa je paralelno sa gradnjom teorije skupova izrasla i nova, rigoroznije postavljena matematička logika.

Kontrapunkt ove dve matematičke discipline počinje sa ekvivalencijom Gödelove teoreme potpunosti i teoreme o ultrafilteru, i nastavlja se u visinu Vavilonske kule modernog doba, čiji svaki novi sprat otkriva iznenađenja sa pojačanom rezonancom proširenih prethodnih harmonija. Gödelove teoreme nepotpunosti postavljaju oštru matematičku barijeru saznanju o izvesnosti matematičkog saznanja, čime je srušeno i Kantovo polazište - ubeđenje o apriornom znanju. Gödelovim dokazima relativne neprotivrečnosti u teoriji skupova otvoren je put neobičnom razrešavanju velikih problema i uspostavljanju višeg reda - hijerarhije svojstava po konsistentskoj moći, koja se penje u visine uz matematički opisano razređivanje izvesnosti: jabuka znanja izmiče čak i kada je reč o relativnom znanju.

Prva teorija skupova na našem jeziku je *Elementarna teorija množina* Jovana Karamate iz 1935. godine. Sledi *Teorija skupova* Đure Kurepe, izašla u Zagrebu 1951. godine, u kojoj se razmatra klasična teorija skupova - deo teorije skupova bez dokaza konsistentnosti i nezavisnosti. Krivineova *Aksiomatska teorija skupova*, prevod Devide, Zagreb 1978., pored aksiomatike daje i kratak pregled Gödelovog konstruktibilnog univerzuma. *Elementarna Teorija skupova* Aleksandra Krona iz 1992. godine se bavi isključivo aksiomatskom izgradnjom teorije skupova, sa posebnim osvrtom na razne ekvivalente aksiome izbora.

Učinilo nam se da bi dobro bilo da se nedostajući deo problematike savremene teorije skupova vezane za dokaze konsistentnosti i nezavisnosti predstave i na našem jeziku, i time dopuni bogatstvo matematičke literature i u ovom segmentu, što je za posledicu imalo ovu knjigu.

Građa u ovoj knjizi prikupljena je iz originalnih izvora ili prerada i teško ih je sve pobrojati. Predavanja Solovaya, Silvera, Kunena i njihovi publikovani radovi, zatim radovi i knjige drugih istaknutih matematičara u ovoj oblasti, pre svega Woodina, Shelaha, Magidora, Abrahama, Levyja, Shoenfielda, Changa, Keislera, Devlina, Drakea, Jensena, Jecha, Vopenke, Prikryja i drugih poslužili su u ovom pokušaju da se u ne prevelikom obimu predstave najvažnija klasična dostignuća i ilustruju neka modernija stremljenja. Na žalost, zarad dostižnosti i čitljivosti, žrtvovani su mnogi lepi i značajni rezultati koje nije obuhvatila ova knjiga.

Sadržaj ove knjige obuhvata u prvom delu elemente logike neophodne u prezentaciji značajnih rezultata teorije skupova, polazna aksiomatska pitanja i transfinitnu aritmetiku, kombinatornu teoriju skupova sa Booleovim algebrama i Booleovsko vrednosnim modelima, ultrafilterima i ultraproizvodima.

U poglavlju o unutrašnjim modelima detaljno se obrađuje koncept apsolutnosti, koji se potom primenjuje u teoremi kolapsa, Gódelovom dokazu relativne konsistentnosti aksiome izbora (AC) i generalisane kontinuum hipoteze (GCH) sa Zermelo-Frankelovom teorijom skupova (ZF) itd. Zatim se pokazuje da u konstruktibilnom univerzumu važi Jensenov $\diamondsuit$, kao i da $\diamondsuit$ povlači negaciju Suslinove hipoteze (SH).

U poglavljima o forsingu izložena je Cohenova konstrukcija kojom se dokazuje da iz pretpostavke neprotivrečnosti ZF sledi neprotivrečnost teorija ZFC + $\neg$CH, kao i teorije ZF + $\neg$AC, odakle se dobija da su sve navedene teorije ekvikonsistentne. Potom se izlažu Levyev kolaps, Eastonov forsing i iterirani forsing, s akcentom na konačno podržanu iteraciju. Time se prilično zaokružuje moderna osnovna teorija skupova.

U trećem delu sažetije su prikazani neki značajni doprinosi moderne teorije skupova. U glavi o merljivim kardinalima imamo značajna svojstva raznovrsnog porekla koja se koncentrišu na ove objekte. U poglavlju o realno - velikim kardinalima prikazana je Solovayova metoda kojom je dokazana ekvikonsistentnost teorija ZFC + "postoji totalno σ-aditivno proširenje Lebesgueove mere" i ZFC + "postoji merljiv kardinal", kao i uopštenja i primene njegovih rezultata, posebno na Keisler Rudin klasifikaciju složenosti ultrafiltera, rešenje problema metrizacije topoloških prostora, veza sa problemom kontinuuma.

Teorija Shelaha o mogućim kofinalnostima ultraproizvoda sa glavnom primenom na rešenje teškog slučaja kontinuum problema izložena je u odvojenom poglavlju - PCF.

Na taj način u ovoj knjizi, osim osnova i razvoja fundamentalnih metoda, prikazani su neki značajni dometi teorije skupova, čime je knjiga, nadamo se ostala unutar prihvatljivog obima, na račun kompletnosti. Priložena literatura upućuje čitaoca na šira i sveobuhvatnija dela.

Veći deo prezentovanog materijala pretrpeo je višestruke prerade tokom prethodnih decenija i tako se utopio u folklor. Pokušali smo da za važnije rezultate navedemo autore što nije do kraja bilo moguće. Već sam razvoj matematičkih pojmova to ograničava. Na primer, postupak binarnog pretraživanja sadržan je u dokazu Bolzano Weierstrassove teoreme. Ili uzmimo, na primer, samo pojam filtera. Tragajući za uopštenejm limesa (1937.), verovatno da Cartan nije uočio da je pojam filtera već bio prisutan preko sto godina u malo različitom odelu, kao kongruencija nad $\mathbb{Z}$ kod Gaussa: filter u Booleovoj algebri je isto što i homomorfizam Booleovih algebri.

Mnogo matematike polazi od stvari kao što su

$$\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \text{i} \qquad \lim_{\max \Delta x_n \to 0} \sum_n f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Nakon Cantorove teoreme o cepanju beskonačnosti oznake kao ove gore nisu dovoljno precizne. U prvom limesu n teži $\aleph_0$ - prvoj beskonačnosti. U drugom, broj malih pravougaonika čija je suma integral u limesu teži, tj. postaje kontinuum $2^{\aleph_0}$. Tu semantika postaje nestabilna i jača potreba za razmatranjima prisutnim u većem delu ove knjige.

Knjiga je namenjena matematičarima, fizičarima i matematički obrazovanim ljudima, studentima i đacima matematičke gimnazije, filozofima. Dokazi konsistentnosti i nezavisnosti - drugi deo, zahtevniji su i tu je potrebno nešto više strpljenja u čitanju, pa je taj deo više namenjen specijalistima. Izdvojene teme u trećem delu, bar jednim delom su relativno pristupačne, zaokružuju deo problematike razmatrane ranije u knjizi i odnose se i na interesantne primene u teoriji mere, topologiji i šire.

Za jedan broj čitalaca kojima su logičke osnove bliske ili nepotrebne, preradili smo tekst tako da smo ovo poglavlje izdvojili u Apendix, ali pošto nam nije bilo moguće da štampamo obe varijante, ova prerada je dostupna samo u elektronskom obliku od autora ili npr na

http://www.matf.bg.ac.yu/~aljosha/TeorijaSkupova_VerzijaB.pdf

Čitaocima koji bi želeli da se više upute u matematičku logiku, preporučujemo [79].

U radu na ovom rukopisu pomogli su nam razgovori i kritike Žarka Mijajlovića, Miodraga Raškovića, Predraga Tanovića, Miloša Kurilića i drugih kolega zbog čega smo im veoma zahvalni. Zahvalni smo i lektoru Kseniji Jovanović čije sugestije su ulepšale tekst i doprinele njegovoj čitljivosti. Za sve propuste i greške odgovorni smo sami.

U Beogradu, 2007. godine

Autori

Sadržaj

0

Uvod

Pojam skupa predstavlja jedinstveni osnovni pojam kojim se gradi cela matematika. Za ovaj poduhvat dovoljan je prazan skup-ništa-vakuum-ništavilo kao polazni gradivni element kao i neka fundamentalna svojstva - aksiome teorije skupova. Usredsređenost na ispitivanje beskonačnosti i bogatstvo u rezultatima već na samom početku (kraj XIX veka) izdvajaju ovu oblast u posebnu matematičku teoriju. Rešavanje nekih dosta elementarnih početnih pitanja dovelo je do velikih otkrića od najvećeg značaja za matematiku i matematičku logiku.

Problem beskonačnosti, odnos dela i celine, malog i velikog, privlači pažnju najranijih mislilaca i prisutan je u najstarijim sačuvanim tekstovima iz tog vremena. Posebno je interesantna detaljna rasprava između Parmenida, Zenona i Sokrata zabeležena u Platonovom dijalogu *Parmenid*. Nedugo zatim Euklid sastavlja čuvene *Elemente*[1], u kojima aksiomatski izlaže geometriju svoga doba. Implicitno se kod Euklida kao primitivni pojmovi javljaju pripadnost, presek, unija, komplement, kretanje i neprekidnost. Tako je tačka "ono čiji je deo ništa", tj. atom odnosno osnovni gradivni objekat, a složeniji geometrijski objekti se sastoje od tačaka, tj. predstavljaju skupove

[1] više od 1700 izdanja do 1900. godine

tačaka. Skupovni univerzum je sledeća apstrakcija geometrijskog univerzuma - prostora. Presek kao geometrijski koncept se javlja npr. kod preseka krugova, unija kod nadovezivanja duži, komplement kod dopunjavanja uglova do pravog ili opruženog ugla itd. Skupovi i operacije sa skupovima dobijaju u geometriji smisao koji je sasvim blizak i usklađen sa konceptima moderne teorije skupova.

Ne bez razloga, unutrašnji prostor uma u kome matematičari vide - razmišljaju, uobičajeno se poistovećuje sa nekom vrstom apstraktnijeg, svesadržavajućeg geometrijskog prostora, u čijim se dubinama, nakon raspakivanja kumulativnih definicija pomalja sveobuhvatni skupovni univerzum i sa njim velika dilema. Da li matematički sadržaji = svet matematičkih ideja postoji nekako nezavisno od nas i ovog sveta privida, što se uobličuje u matematički Platonizam, ili takav svet ne postoji, i matematičkim sadržajima, idejama i svojstvima pripada samo "postojanje" u našim umovima da ih mislimo i zapisima gde fizički postoje. Drugo stanovište deluje znatno "realnije", pragmatičnije, jednostavnije i po prinicpu minimuma obavezujuće prihvatljivije, i u tom slučaju matematičke konstrukcije i dokazi postoje samo kada su negde zapisani.

S druge strane, sama praksa Evropskog racionalizma, sa opšte impregniranom matematikom u rasponima od submikro fizike do dinamike celokupnog kosmosa, od Turingovih kinematičkih mašina u molekularnoj biologiji, do modela složenih sistema kao što su komponente - podsistemi koje istražuju neurolozi, embriolozi ili populacioni genetičari, itd. ukazuje veoma sugestivno na neophodnost prisustva višeg reda u pojavnom svetu i to mnogo pre pojave čoveka i prvih teorema, milijarde godina ranije. Matematika te prakse se može zameniti samo nekom drugom matematikom i ne može se odstraniti već se mora prihvatiti kao princip koji zrači osnovu za uvođenje organizacije i reda koji se tu posle i dese.

Imamo jednu analogiju koja je tu od neke koristi, muzika. Osnovni atom muzike je pojedinačni zvuk/ton. Komad ili muzičko delo ima svoju algebarsko–kombinatornu strukturu, celina je nesvodljiva na svoje delove ili atome i nosilac je estetskog intenziteta. Kada u vremenu slušamo neko dobro delo, onda tek kad ono završi zaokružujemo percepciju njegovog delovanja i stižemo do ocene celine - lepo. Uvid u muzičko delo stičemo u vremenskoj struji koja ga nosi i zaokružujemo nakon njegovog završetka, pa se da zaključiti da je estetska mera muzičkog dela, naravno najvažnija karakteristika dela, transvremenska. Pitanje kada i gde postoji jedno muzičko delo liči na naša polazna pitanja. Pre Platona, ima navoda o Pitagorinom uvidu u jedinstveno rešenje.

Interesantno u vezi ovakve diskusije imamo invarijantu: bez obzira na eventualno opredeljenje po gornjoj dilemi ili potpuno neopredeljenje, svaki rezultat individualnog matematičara dopunjava veliko bogatstvo uz iskrice sreće. Centralno mesto u ovom rasuđivanju pripada matematičkom dokazu. Najvažnije u matematičkom dokazu je da isti bude korektno izveden korak po korak, tj. da se u individualnom koraku ispravno obavi elementarno zaključivanje verodostojnim operacijama nad polaznim istinama. Onda ispravnost celog dokaza dolazi po snažnom uverenju, da ako smo u pojedinačnim koracima obezbedili očuvanje istinitosti, da se onda ona očuvala do kraja. Prema nekim pouzdanim svedocima, kod Gödela se na kraju pojavio strah da mali zločesti liliputanci idu po knjigama i prepravljaju - kvare dokaze. Ako bi matematika postojala samo kao kulturna baština, poštedom preostalog drveća i prelaskom na elektronske medije, razlozi za Gödelov strah bi se ozbiljno umnožili, a pitanje dinamičkih zakonistosti u matematičkom delu Virtuelnog sveta dobija na aktuelnosti: da li je moguća neka sintaksna Esherova pletenica, preko lokalno konsistentnog do globalno nekonsistentnog.

U moderno vreme, kojim dominira aksioma praktičnosti i pragmatičnosti, ne bez razloga, postavlja se pitanje smisla istraživanja u teoriji skupova kao i same teorije skupova u celini. Teorija skupova je verovatno prva matematička teorija za koju se to pitanje postavlja. Tu imamo možda malo čudnu situaciju. S jedne strane, istraživanja u teoriji skupova omogućila su rešavanje i karakterizaciju teških i značajnih matematičkih problema. S druge strane, neka od tih rešenja predstavljaju kumulus višedecenijskih napora i dosta su složena i nepodobna za kratke prezentacije, pa se zato već duže vremena nameće pitanje koliko je to sve uopšte potrebno radnoj matematici, i tu imamo analognu situaciju odnosa između matematike s jedne strane i primenjenih istraživanja, pre svega fizike i tehnike, s druge strane. Primeni nisu potrebni složeni postupci i konstrukcije u dokazima matematičkih teorema kao ni moderna uopštavanja, već pre svega gotove formule i poneki algoritam koji se koriste u praksi. Ako teorija skupova i nije u mogućnosti da se pravda pred ovakvim zahtevima, može se reći da je njen estetski značaj markantan i da se u tom aspektu nazire i opipljivije rešenje pitanja kojima su se bavili sveti Anselmo, sveti Toma, Descartes i drugi mislioci.

Savremena teorija skupova nije nastala odjednom, već postepeno tokom više od pola veka, nalazeći svoje korene u velikoj reformi matematike iz XIX veka. Cauchy koristi do tada neviđenu strogost i preciznost u izlaganju, čime počinje formalizacija analize, proces u kome su učestvovali mnogi slavni matematičari poput Weierstrassa, Dedekinda, Dirichleta, Cantora, Peana i drugih. Tako u analizi, umesto isključivo izrazovskih funkcija, polako počinju da se razmatraju sve realne i kompleksne funkcije: Weierstrass konstruiše primer neprekidne realne funkcije koja ni u jednoj tački nije diferencijabilna, Dirichlet navodi karakterističnu funkciju skupa racionalnih brojeva kao primer realne funkcije koja nije neprekidna ni u jednoj tački, Peano konstruiše neprekidnu bijekciju segmenta $[0,1]$ na kvadrat $[0,1]\times[0,1]$ itd. Takođe se uvode i operacije sa familijama skupova - tipičan primer je Boltzano-Weierstrassova teorema po kojoj svaki ograničen niz realnih brojeva ima tačku nagomilavanja, gde se u dokazu koristi metoda polovljenja intervala.

Otkriće geometrije Lobačevskog iz 1829. godine, koje postaje široko poznato tek nakon posthumnog objavljivanja Gaussovih pisama (šezdesete godine XIX veka), zajedno sa Booleovom algebrom logike iz 1848. godine dovodi do ozbiljnog preispitivanja logičkih osnova na kojima je počivala dotadašnja matematika. Pojam formalne teorije i kvantifikatorski račun uvodi Gottlob Frege 1879. godine. Hilbertovi "Osnovi geometrije" iz 1899. godine predstavljaju paradigmu savremenog izlaganja jedne aksiomatske teorije. Nastavljajući Fregeov rad, David Hilbert definitivno logiku uspostavlja kao matematičku disciplinu i formuliše osnovna pitanja vezana za formalni sistem poput potpunosti i neprotivrečnosti.

Sam početak teorije skupova vezuje se za decembar 1873. godine kada je Georg Cantor dokazao da realnih brojeva ima više od prirodnih, tj. da nijedno preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup realnih brojeva nije na. Osim samog rezultata, kojim je pokazano da beskonačnost nije jedinstvena, i način dokaza je izuzetno važan. Naime, tada je prvi put upotrebljena tehnika koju zovemo Cantorov dijagonalni argument.

Ubrzo Cantor dokazuje da je

$$|X| < |P(X)|$$

za svaki skup X, odakle sledi da, ukoliko za svaki skup X postoji njegov partitivni skup $P(X)$, onda ne samo da beskonačnost nije jedinstvena, već imamo pravo raslojavanje različito brojnih beskonačnosti.

Nastavljajući svoja istraživanja beskonačnih podskupova skupa realnih brojeva, Cantor uvodi transfinitne brojeve: ordinale kao tipove uređenja i kardinale kao tipove bijektivne korespondentnosti. Ordinalni broj (tip) skupa X Cantor je označavao sa $\overline{X}$, a kardinalni broj sa $\overline{\overline{X}}$.

Sa metodološke strane, posebno je važna Cantorova karakterizacija uređenja racionalnih brojeva, po kojoj se svako prebrojivo linearno uređenje može utopiti u uređenje racionalnih brojeva. Konstrukciju utapanja Cantor izvodi tehnikom koju danas zovemo Cantorov "back and forth" (nazad–napred) argument.

U prvoj polovini XX veka Cantorovu teoriju skupova nastavljaju da razvijaju Zermelo, Fraenkel, Hartogs, Hausdorff, von Neumann, Tarski, Banach, Kuratowski, Skolem, Zorn, Kurepa i drugi. Već na samom početku javljaju se pitanja - problemi koji u mnogome određuju dalji razvoj teorije skupova. Ovde izdvajamo četiri najznačajnija.

Aksioma izbora

Prvo formalno zasnivanje matematike bazirano na teoriji skupova predložio je Gottlob Frege. Njegov sistem se bazirao na dve aksiome:

- Aksioma ekstenzionalnosti : dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente;

- Shema sveobuhvatnosti: za svako svojstvo (formulu) φ postoji skup čiji su elementi tačno oni skupovi koji zadovoljavaju φ.

Protivrečnost Fregeovog sistema (tačnije sheme sveobuhvatnosti) dokazao je Russell 1903. sledećim čuvenim paradoksom: po shemi komprehensije postoji skup S takav da za svaki skup X važi

$$X \in S \text{ ako i samo ako } X \notin X.$$

Odavde sledi da $S \in S$ ako i samo ako $S \notin S$: kontradikcija.

Bez obzira na otkriće raznih paradoksa u Cantorovoj teoriji skupova (Cantor 1895., Burali-Forti 1896. itd) i kritika intuicionista (Brouwer, Weyl) i konstruktivista, preovladalo je uverenje da za formalni okvir izgradnje matematike treba uzeti neku neprotivrečnu modifikaciju naivne teorije skupova. Hilbertov odgovor na kritike Cantorove teorije skupova je odlučan:

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben könen

ili u prevodu: "Niko nas ne može isterati iz raja koji je za nas Cantor sazdao".

Russell i Whitehead su, pokušavajući da rešeproblem antinomija u Cantorovoj teoriji skupova, uveli teoriju tipova i u svojoj knjizi "Principia Mathematica" iz 1910. izložili izgradnju matematike na logičkim osnovama. U novije vreme teorija tipova nalazi primene u teorijskom računarstvu.

Prekretnicu u aksiomatizaciji nauke o skupovima predstavlja Zermelova *aksioma izbora*, formulisana 1908. godine:

Za svaku familiju X nepraznih skupova postoji funkcija izbora $f : X \longrightarrow \bigcup X$ takva da za svaki $x \in X$ važi $f(x) \in x$.

Pomoću nje Zermelo dokazuje da se svaki skup može dobro urediti. Generativne aksiome, posebno aksioma partitivnog skupa, inspirišu Zermela u formulaciji kumulativne hijerarhije skupova. Definitivan oblik kumulativna hijerarhija dobija nakon Mirimanovljeve askiome regularnosti iz 1917., von Neumannove kanonske reprezentacije ordinala i definicije uređenog para Kuratowskog.

Zermelo i Fraenkel su formulisali aksiome teorije skupova na jeziku drugog reda. Napomenimo da je jedina Frankelova aksioma shema zamene, koju on uvodi 1923. godine. Odgovarajuće formulacije u okviru predikatskog računa prvog reda dao je Skolem. Navedimo osnovne sisteme proistekle iz ove aksiomatizacije:

- ZFC se sastoji od aksioma praznog skupa, ekstenzionalnosti, para, unije, partitivnog skupa, beskonačnosti, regularnosti i izbora, kao i shema separacije i zamene, od kojih svaka ima prebrojivo mnogo instanci;
- ZF se dobija izostavljanjem aksiome izbora iz ZFC;
- ZF – P se dobija izostavljanjem aksiome partitivnog skupa iz ZF;
- ZFC$^-$ se dobija izostavljanjem aksiome regularnosti iz ZFC;
- ZF$^-$ – P – Inf se dobija izostavljanjem aksioma regularnosti, partitivnog skupa i beskonačnosti iz ZF.

Aksioma izbora je svakako najpoznatija aksioma teorije skupova, iz prostog razloga što su veoma brojni njeni važni ekvivalenti i posledice koje se javljaju u ostalim matematičkim disciplinama. Navedimo neke od njih:
Ekvivalenti

- **Zermelova teorema.** Svaki skup se može dobro urediti.
- **Zornova lema.** Ako svaki lanac u nekom parcijalnom uređenju ima majorantu, onda to uređenje ima maksimalni element.
- **Hausdorffov stav maksimalnosti.** Svaki lanac u proizvoljnom parcijalnom uređenju se može produžiti do maksimalnog lanca.
- **Tihonovljeva teorema o proizvodu.** Proizvod kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.
- **Donja Löwenheim-Skolem-Tarski teorema.** Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$ koja ima beskonačne modele. Tada za svaki beskonačan model $\mathcal{M}$ teorije T i svaki $X \subseteq \mathcal{M}$, postoji elementarni podmodel $\mathcal{N}$ modela $\mathcal{M}$ takav da je $X \subseteq \mathcal{M}$ i
$$|\mathcal{N}| = \max\{\aleph_0, |X|, |For\mathcal{L}|\}.$$

Značajne posledice koje sadrže veliki deo AC:

- Hahn-Banachova teorema.
- Svaki vektorski prostor ima bazu.
- **Teorema o ultrafilteru.** Svaki filter proizvoljne Booleove algebre sadržan je u nekom ultrafilteru te algebre.
- **Stav kompaktnosti.** Ako svaka konačna podteorija neke teorije prvog reda ima model, onda i sama ta teorija ima model.

Protivnici AC uglavnom zameraju njenu nekonstruktivnost, inkompatibilnost sa aksiomom determinacije i inkompatibilnost sa totalnošću Lebesgueove mere. O interakciji aksiome izbora i Lebesgueove mere ćemo sa nešto više detalja govoriti nešto kasnije.

Relativnu konsistentnost aksiome izbora sa ostalim aksiomama teorije skupova dokazao je Gödel 1939. godine metodom unutrašnjih modela, a nezavisnost je dokazao Paul Cohen 1963. godine, kombinujući metode forsinga i unutrašnjih modela.

Od slabijih oblika aksiome izbora (tvrđenja koja su posledice aksiome izbora ali nisu njeni ekvivalenti) za teoriju skupova je posebno važna aksioma *zavisnog izbora* DC:

Ako je A neprazan skup i ako je R binarna relacija na skupu A takva da za svako $a \in A$ postoji $b \in A$ tako da $b\,R\,a$, onda postoji niz elemenata $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ skupa A takav da

$$a_{n+1}\,R\,a_n$$

za svako $n \in \mathbb{N}$.

Aksioma zavisnog izbora je posebno značajna u kombinaciji sa aksiomom determinacije AD, koja je protivrečna sa punom aksiomom izbora. Mnoge važne rezultate teorije ZF+DC+AD dali su Solovay, Woodin i drugi.

Kontinuum problem

Svakako, najvažniji problem teorije skupova je kontinuum problem. Njegovo rešavanje, koje i dalje traje, dovelo je do izuzetnih otkrića poput konstruktibilnog univerzuma, metode forsinga, pcf teorije, Ω-logike itd.

Apstrahujući ideju brojanja kao uspostavljanje bijektivne korespodencije između dva skupa, Frege uvodi kardinalne brojeve kao klase međusobno istobrojnih skupova. Tako skupovi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ imaju isti kardinalni broj, skupovi $[0,1]$ i $\mathbb{R}$ imaju isti kardinalni broj, a skup $\mathbb{N}$ ima manji kardinalni broj od skupa $\mathbb{R}$. Ovo poslednje Cantor dokazuje na sledeći način: ako je $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N}\rangle$ proizvoljan niz realnih brojeva, onda realan broj $a \in \mathbb{R} \setminus \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definišemo na sledeći način:

- ceo deo broja a je 0;
- n-ta decimala broja a jednaka je 1 ukoliko je n-ta decimala broja a_n različita od 1, a inače je 0.

Dakle, niti jedan niz $\langle a_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ realnih brojeva ne iscrpljuje $\mathbb{R}$. Cantorova kontinuum hipoteza CH doslovno glasi: između kardinalnih brojeva skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ nema drugih kardinalnih brojeva. Njena savremena reformulacija glasi

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

pri čemu je $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$ transfinitni niz alefa, tj. kanonskih predstavnika kardinalnih brojeva. Prvi rezultat vezan sa kontinuum hipotezu dokazao je upravo Cantor: ako je X zatvoreni beskonačan podskup skupa realnih brojeva, onda je ili $|X| = |\mathbb{N}|$, ili je $|X| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$. Suslin dokazuje da kontinuum hipoteza važi za Borelove i analitičke skupove, tj. da za beskonačan analitički skup X važi $|X| = |\mathbb{N}|$ ili $|X| = \mathfrak{c}$. Njegovi radovi predstavljaju početak deskriptivne teorije skupova. Kontinuum hipoteza posebno dobija na značaju posle čuvenog Hilbertovog predavanja na svetskom kongresu matematičara 1900. godine, gde je kao prva uvrštena u spisak problema koje XIX vek ostavlja XX veku. Od tada je kontinuum hipoteza poznata i kao prvi Hilbertov problem.

Cantorova teorema, po kojoj je $|X| < |P(X)|$ za svaki skup X, nameće i potrebu da se generalno odrede vrednosti kardinalne funkcije $|X| \mapsto |P(X)|$. Bez aksiome izbora, već na samom početku nailazimo na teškoću:

$$|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$$

nalazi se van alef linije, koja predstavlja najbolju skalu za odmeravanje veličine beskonačnih skupova. Uz aksiomu izbora svaki beskonačan skup postaje dobro uređen, pa se za svaki skup X, $|X|$ i $|P(X)|$ smeštaju na alef pravu i zadatak se može zapisati kao određivanje funkcija F i f datih u identitetu

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{F(\alpha)} = \aleph_{\alpha + f(\alpha)}.$$

Navedimo samo poznatije rezultate vezane za kontinuum problem:

- **Gödel** Ako je teorija ZF neprotivrečna, onda je i teorija ZFC + GCH neprotivrečna;

- **Cohen** Ako je teorija ZF neprotivrečna, onda je i teorija ZFC + $\neg$CH neprotivrečna;

- **Easton** Na regularnim kardinalima kontinuum funkcija može imati maksimalnu moguću slobodu. Jedina ograničenja proističu iz Cantorove teoreme i Königove leme: $2^\kappa > \kappa$ i $\operatorname{cf} 2^\kappa > \kappa$;

- **Silver** Ako je κ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti i ako je $2^\lambda = \lambda^+$ za skoro sve (stacionarno mnogo) kardinala $\lambda < \kappa$, onda je i $2^\kappa = \kappa^+$;

- **Shelah** Ako je $\aleph_\omega$ jako granični kardinal, onda je $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.

S jedne strane, kontinuum hipoteza važi za mnoge važne klase skupova, poput zatvorenih, Borelovih i analitičkih. Posebno je interesantna Kuekerova teorema, po kojoj CH važi i za grupu automorfizama prebrojivog modela prebrojivog jezika. Alternativni dokaz Kuekerove teoreme čitalac može naći u [80].

S druge strane, posebno je interesantan sledeći poznati ekvivalent negacije kontinuum hipoteze:

($*$) Neka je $[\mathbb{R}]^{\leqslant\omega}$ familija svih najviše prebrojivih podskupova skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$. Tada za svaku funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\mathbb{R}]^{\leqslant\omega}$, postoje $x, y \in \mathbb{R}$ tako da

$$x \notin f(y) \quad \text{i} \quad y \notin f(x).$$

Intuitivno, ukoliko slučajno biramo x i y tako da oni budu međusobno nezavisni, onda je verovatnoća da $x \notin f(y)$ i $y \notin f(x)$ jednaka 1, jer su $f(x)$ i $f(y)$ najviše prebrojivi skupovi.

($*$) ekvivalentno možemo reformulisati na sledeći način:

($**$) Za proizvoljan $A \subseteq [0,1]^2$ i $r \in [0,1]$ neka je

$$A^T = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in A\} \text{ i } A_r = \{y \in [0,1] \mid \langle r, y\rangle \in A\}.$$

Tada, za svaki skup $A \subseteq [0,1]^2$ takav da je A_r najviše prebrojiv za svako $r \in [0,1]$, važi

$$A \cup A^T \subsetneqq [0,1]^2.$$

Pokažimo da ovaj princip važi za Lebesgue merljive skupove. Zaista, neka je A Lebesgue-merljiv podskup od $[0,1]^2$ koji zadovoljava uslove principa $(**)$. Na osnovu Fubinijeve teoreme za Lebesgueov integral imamo sledeće:

$$\begin{aligned} m(A) = m(A^T) &= \int\int_{[0,1]^2_{\mathbb{R}}} \chi(A) dm \\ &= \int_0^1 (\int_0^1 \chi(A)(x,y) dy) dx \\ &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \end{aligned}$$

gde je $\chi(A)$ karakteristična funkcija skupa A. Kako je $m([0,1]^2_{\mathbb{R}}) = 1$, mora biti i

$$A \cup A^{\mathrm{T}} \subsetneqq [0,1]^2_{\mathbb{R}}.$$

Brojni primeri interferencije kontinuum problema sa raznim delovima teorije skupova su obrađeni u ovoj knjizi.

Suslinov problem

Suslinov problem je vezan za karakterizaciju uređenja realnih brojeva. Naime, Cantor je pokazao da je uređenje realnih brojeva do na izomorfizam jedinstveno gusto linearno uređenje bez krajeva koje je povezano u topologiji uređenja i separabilno. Suslin je postavio pitanje da li se uslov separabilnosti može zameniti uslovom c.c.c.[2] i

[2]Countable Chain Condition. U ovom kontekstu u pitanju je prebrojiva celularnost, tj. uslov da nema neprebrojivo mnogo međusobno disjunktnih otvorenih intervala.

da tako dobijeno uređenje ostane izomorfno uređenju realnih brojeva. Ukoliko je odgovor negativan, tako dobijeno uređenje se naziva *Suslinovom linijom*. Suslinova hipoteza SH doslovno glasi:

Ne postoji Suslinova linija.

Prve rezultate vezane za Suslinov problem dao je naš matematičar Đuro Kurepa, koji je definisao pojmove Aronszajnovog, Suslinovog i Kurepinog drveta i dokazao da postoji Suslinova linija ako i samo ako postoji Suslinovo drvo. Preciziranje ovih pojmova zahteva sledeće definicije.

Pod *drvetom* podrazumevamo parcijalno uređen skup $\langle T, \leqslant \rangle$ takav da je za svako $x \in T$ skup $\{y \in T \mid y \leqslant x\}$ dobro uređen. Za proizvoljan ordinal (kanonsko dobro uređenje) α definišemo α-ti sloj $\mathrm{lev}(\alpha, T)$ drveta T kao skup svih $x \in T$ takvih da je

$$\langle \{y \mid y \leqslant x\}, \leqslant \rangle \cong \langle \alpha, \in \rangle.$$

Visina $\mathrm{ht}(T)$ je najmanji ordinal α takav da je $\mathrm{lev}(\alpha, T) = \emptyset$. Skup $A \subseteq T$ je antilanac ako su svaka dva međusobno različita elementa skupa A neuporediva. Maksimalne lance u drvetu zovemo i granama. Neka je κ beskonačan kardinal. Drvo T je κ drvo ako je $\mathrm{ht}(T) = \kappa$ i ako je $|\mathrm{lev}(\alpha, T)| < \kappa$ za svako $\alpha < \kappa$.

Sada možemo definisati pojmove Aronszajnovog, Suslinovog i Kurepinog drveta:

- κ-Aronszajnovo drvo je κ drvo u kome nema lanaca dužine κ. Posebno, Aronszajnovo drvo je ω_1-Aronszajnovo drvo;

- κ-Suslinovo drvo je κ drvo u kome nema ni lanaca ni antilanaca dužine κ. Posebno, Suslinovo drvo je ω_1-Suslinovo drvo, a Suslinova hipoteza SH je ekvivalentna rečenici

  Ne postoji Suslinovo drvo;

- κ-Kurepino drvo je κ-drvo koje ima bar κ^+ grana. Posebno, Kurepino drvo je ω_1-Kurepino drvo, a Kurepina hipoteza KH glasi

  Postoji Kurepino drvo.

Aronszajn je dokazao egzistenciju Aronszajnovog drveta. Jech i Tennenbaum su metodom forsinga dokazali da iz konsistentnosti teorije ZFC sledi konsistentnost teorije ZFC + ¬SH, a Solovay i Tennenbaum su metodom iteriranog forsinga dokazali da iz konsistentnosti teorije ZFC sledi konsistentnost teorije ZFC + SH.

Što se tiče Kurepine hipoteze, Levy je metodom forsinga dokazao da iz konsistentnosti teorije ZFC sledi konsistentnost teorije ZFC + KH, a Silver je metodom iteriranog forsinga dokazao da iz konsistentosti teorije ZFC + "postoji jako nedostiživ kardinal" sledi konsistentnost teorije ZFC + ¬KH.

Problem mere

Kada je Lebesgue uveo pojam mere skupa, što u stvari predstavlja apstrakciju dužine za skupove na realnoj pravoj, sigurno da niko nije razmišljao da može biti nemerljivih skupova. Bez aksiome izbora i nema problema mere. Uz pomoć aksiome izbora Vitali je 1908. godine konstruisao primer Lebesgue nemerljivog skupa. Navedimo Vitalijevu konstrukciju.

Na $[0,1]$ definišimo binarnu relaciju $\sim$ sa

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Lako se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije, kao i da je klasa ekvivalencije svakog $x \in \mathbb{Q}$ prebrojiva. Na osnovu aksiome izbora postoji skup A takav da za svako $x \in [0,1]$ važi

$$|A \cap \{y \mid y \sim x\}| = 1.$$

Tada je skup A Lebesgue nemerljiv. Zaista, u suprotnom bi svaki od skupova

$$q + A = \{x + q \mid x \in A\}, \quad -1 \leqslant q \leqslant 1 \wedge q \in \mathbb{Q},$$

imao istu meru kao i skup A (translatorna invarijantnost Lebesguove mere), a kako su skupovi $q + A$ međusobno disjunktni i kako je

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (q + A) \subseteq [-1,2],$$

zbog σ aditivnosti Lebesgueove mere mora biti i

$$\mu([0,1]) = 1 \leqslant \mu(\bigcup_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (q+A)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A) \leqslant \mu([-1,2]) = 3,$$

što je nemoguće, jer iz $1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A)$ sledi da je $\mu(A) > 0$, a iz $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A) \leqslant 3$ sledi da je $\mu(A) = 0$.

Ovaj Vitalijev primer je možda bio i prvi veliki razlog za odbacivanje aksiome izbora od strane samog Lebesguea i drugih velikana toga doba. Ipak, aksioma izbora, koja najlepše (dobro) uređuje moći skupova i unosi dosta reda u skupovni univerzum V opstala je kao princip koji se nikako ne može poništiti, a sa njom i nemerljivi skupovi tamo gde ona važi. Posebno za verovatnoću na realnim brojevima, to znači da obavezno postoje događaji bez verovatnoće kao i npr. da se svaki događaj može umetnuti između dva događaja bez verovatnoće. Da li i koje to posledice može eventualno da ima u naukama koje se bave realnim svetom, verovatno da niko još nije razmatrao.

Dakle, mera na $\mathbb{R}$ koja je totalna, σ-aditivna i translatorno invarijantna ne može da postoji uz aksiomu izbora. Pošto je opstala snažna želja da se sve nekako premeri, to se skupilo u tzv. problem mere. Prvo je još dvadesetih godina prošlog veka Banach dokazao da postoji mera koja širi Lebesgueovu meru na sve skupove realnih brojeva (tj. na ceo $P(\mathbb{R})$), ali da je ta totalna mera na Lebesgue nemerljivim skupovima samo konačno aditivna. Znači, slabljenjem σ-aditivnosti, dobijena je totalna mera koja širi Lebesgueovu meru i koja je saglasna sa aksiomom izbora. Ulam i Banach su 1930. dobili jedan neobičan rezultat. Uz ispuštanje translatorne invarijantnosti (dva skupa koji se translacijom dovode do poklapanja imaju istu meru), dokazali su da za totalnu σ-aditivnu meru μ na X mora da važi dihotomija

(i) $|X| \leqslant \mathfrak{c}$ i μ je bezatomična, a $|X|$ i kontinuum su veći ili jednaki od prvog slabo nedostižnog kardinala, ili

(ii) $|X| > \mathfrak{c}$ i μ je atomična - ultrafilter i $|X|$ je veći ili jednak od prvog jako nedostiživog kardinala.

Pitanje egzistencije ovakvih mera je ostalo otvoreno još blizu 40 godina. Prvo je prikupljena evidencija o stvarnoj veličini skupa nosača binarne σ-aditivne netrivijalne mere u slučaju (ii), što je povezano sa izuzetno jakim aksiomama beskonačnosti. Potom je Robert Solovay došao do sledećih otkrića. Dokazao je da ako je teorija ZF neprotivrečna, onda je neprotivrečna i teorija ZF + DC + "svaki skup realnih brojeva je Lebesgue merljiv". Time je tačno određen stepen konflikta aksiome izbora i želje da Lebesguova mera bude totalna. S druge strane, Solovay je dokazao ekvikonsistenciju sledećih teorija

1. ZFC + "postoji totalna σ-aditivna mera koja širi Lebesguevou meru" i

2. ZFC + "postoji merljiv kardinal",

čime je problem mere doveden u direktnu vezu sa vrlo jakom aksiomom beskonačnosti. Posledično, (i) i (ii) iz Ulam-Banach teoreme su ekvikonsistetni do na ZFC.

Solovayev metod je omogućio i rešenje preko pedeset godina otvorenog problema metrizacije topoloških prostora (Kunen, Nykos, Fleissner 80/84). Napomenimo da u modelu za 1. nastupa veliko nadimanje realnog kontinuuma $\mathbb{R}$, da tamo važi

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \cdots = 2^{\lambda}$$

za svaki kardinal $\lambda < \mathfrak{c}$, da između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ ima $\mathfrak{c}$ mnogo različitih beskonačnosti i da je kontinuum veći ili jednak od prvog slabo nedostiživog kardinala. Kao što neko reče, sve je povezano.

Banach Tarski paradoks

Izuzetno lep primer interakcije aksiome izbora i Lebesgueove mere je sledeći rezultat Banacha i Tarskog iz 1924. godine, poznatiji kao *Banach Tarski paradoks*:

Jedinična lopta $B = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ *se može razložiti na 11 delova, od kojih se izometrijskim transformacijama mogu sastaviti dve disjunktne jedinične lopte.*

U jačoj formi Banach Tarski paradoks ima sledeću formulaciju:

Svaka dva ograničena lika u $\mathbb{R}^3$ *sa nepraznim interiorom su razloživo jednaka, tj. postoji dekompozicija jednog od njih na konačno mnogo delova, od kojih se izometrijskim transformacijama dobija dekompozicija onog drugog.*

Naravno, paradkosalna dekompozicija je nemoguća sa Lebesgue merljivim delovima, odakle sledi da se aksioma izbora ne može ispustiti u dokazima ovih tvrđenja. Prvi korak učinio je Hausdorff 1914. godine dokažavši da grupa rotacija jedinične sfere

$$S = \{\langle x, y, z\rangle \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

čije ose sadrže koordinatni početak ima slobodnu podgrupu G sa dva generatora, recimo a i b. Koristeći ovo, Hausdorff pokazuje sledeći rezultat, tzv. *Hausdorffov paradoks*: Postoji $E \subseteq S$ takav da važi:

1. Četiri kopije skupa E pokrivaju sferu S;

2. S sadrži prebrojivo ($\aleph_0$) mnogo disjunktnih kopija skupa S.

Dokažimo ovo. Neka je G pomenuta slobodna grupa sa generatorima a i b. Na S definišimo relaciju $\sim$ sa

$$x \sim y \Leftrightarrow (\exists g \in G) y = g(x).$$

Očigledno je $\sim$ relacija ekvivalencije. Kako je grupa G prebrojiva, svaka klasa ekvivalencije relacije $\sim$ je takođe prebrojiva. Neka je A unija svih klasa koje sadrže bar jednu fiksnu tačku neke neidentičke rotacije iz G. Svaka rotacija ima tačno dve fiksne tačke (presečne tačke ose rotacije sa sferom S), pa kako je $|G| = \aleph_0$, i skup A je prebrojiv kao prebrojiva unija prebrojivih skupova.

Na osnovu aksiome izbora, postoji $B \subseteq S$ takav da je za svako $x \in S$,

$$|x_\sim \cap B| = 1$$

(ovde je $x_\sim = \{y \in S \mid x \sim y\}$). Neka $x \in S \setminus A$. Tada x nije fiksna tačka nijedne od rotacija iz G, pa $x \notin x_\sim \cap B$. Ako je $\{y\} = x_\sim \cap B$, onda je prema prethodnom $x \neq y$ i $x \sim y$, pa postoji $g_x \in G$ tako da je $x = g_x(y)$. Neka je

$$C = \{a^k f \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge f \in G\}$$

(npr. $a^2 f = a \circ a \circ f$) i neka je

$$E = \{x \in S \setminus A \mid g_x \in C\}.$$

Za $m \neq n$ su skupovi $b^m[E]$ i $b^n[E]$ disjunktni. Zaista, pretpostavimo da postoji $x \in E$ tako da je

$$b^m(x) = b^n(x).$$

Tada je

$$b^m b^{-n}(x) = x,$$

tj. x je fiksna tačka neidentičke rotacije $b^m b^{-n}$ iz G (b je slobodni generator), što je u suprotnosti sa definicijom skupa E.

Preostaje da pokažemo da četiri kopije skupa E pokrivaju sferu S. S jedne strane, $C \cup aC = G$ ($aC = \{ag \mid g \in C\}$), odakle sledi da je $S \setminus A \subseteq E \cup a[E]$. S druge strane, A je prebrojiv, a kako je grupa rotacija sfere S čiji centri sadrže koordinatni početak neprebrojiva, postoji rotacija r iz te grupe takva da je

$$A \cap r[A] = \emptyset.$$

Odavde je $r[A] \subseteq E \cup a[E]$, tj. $A \subseteq r^{-1}[E] \cup r^{-1}a[E]$, a time i

$$S \subseteq E \cup a[E] \cup r^{-1}[E] \cup r^{-1}a[E],$$

čime je Hausdorffov paradoks dokazan.

Da bismo dokazali Banach Tarski paradoks, dodatno precizirajmo razloživu jednakost. Kažemo da su skupovi $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ *razloživo jednaki* sa n delova, u oznaci $A \sim_n B$, ukoliko postoje međusobno disjunktni neprazni podskupovi $A_1, \ldots, A_n$ skupa A i izometrije $f_1, \ldots, f_n$ prostora $\mathbb{R}^3$ takvi da je:

- $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$;
- $B = f_1[A_1] \cup \cdots \cup f_n[A_n]$;
- $f_i[A_i] \cap f_j[A_j] = \emptyset$ za $i \neq j$.

Neposredna posledica Cantor-Bernstajnove teoreme je sledeće tvrđenje (u $\mathbb{R}^3$): ako je $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, $A \sim_m Y$ i $X \sim_n B$, onda je

$$A \sim_{m+n} B.$$

Paradoksalnu dekompoziciju jedinične lopte vršimo na sledeći način. Dodatno notaciji iz Hausdorffovog paradoksa, neka je

$$E^* = \bigcup\{xE \mid 0 < x \leqslant 1\}$$

i neka je t translacija prostora $\mathbb{R}^3$ takva da koordinatni početak pripada skupu $t[E^*]$. Primetimo da je tada

$$B \subseteq E^* \cup aE^* \cup r^{-1}[E^*] \cup r^{-1}a[E^*] \cup t[E^*].$$

Neka je $X_1, \ldots, X_5$ particija jedinične lopte određena prethodnim pokrivanjem i neka je B' jedinična lopta disjunktna sa loptom B. Kako se dve disjunktnie kopije skupa E moğu rasporediti na sferi S, to se dve disjunktne kopije skupa E^* translacijama i rotacijama mogu smestiti u loptu B. Ako u svaku od te dve kopije rasporedimo redom kopije $X_1', \ldots, X_5', X_1'', \ldots, X_5''$ skupova $X_1, \ldots, X_5$, dobijamo pokrivanje skupa $B \cup B'$. Dakle,

$$X_1' \cup \cdots \cup X_5' \cup X_1'' \cup \cdots X_5'' \sim_{10} B \cup B',$$

$B \sim_1 B$, $B \subseteq B \cup B'$ i $X_1' \cup \cdots \cup X_5' \cup X_1'' \cup \cdots X_5'' \subseteq B$, pa je na osnovu pomenute posledice $B \sim_{11} B \cup B'$.

Deo I

Uvod u teoriju skupova

1

Logičke osnove

Klasičnu teoriju skupova, u kojoj se ne koriste metode unutrašnjih modela i forsinga, moguće je izložiti i bez poznavanja matematičke logike. Međutim, dokazi konsistentnosti i nezavisnosti u sebi sadrže najfinije isprepletene sintaksu i semantiku. Razdvajanje ovih pojmova, što je osnovni preduslov za razumevanje, je nemoguće bez dobrog poznavanja matematičke logike, posebno metode interpretacije i Gödelove teoreme potpunosti. Ovo poglavlje je pre svega namenjeno onim čitaocima koji nisu upoznati sa osnovama matematičke logike.

1.1 O formalnoj metodi

Analizirajući strukturu svake definicije, vidimo da se novi pojmovi uvode preko nekih ranije uvedenih, što nužno dovodi do zaključka da neki pojmovi moraju ostati nedefinisani. Takve pojmove zovemo osnovnim ili primitivnim pojmovima.

Slično, u dokazu nekog tvrđenja pozivamo se na neka druga (ranija) tvrđenja, pa opet vidimo da se sva tvrđenja ne mogu dokazati. Polazna tvrđenja koja ne dokazujemo zovemo aksiomama.

Matematizacija deduktivne metode je dovela do pojma formalne teorije kao čisto sintaksnog okvira u kome se izlaže matematika.

1.1.1 Definicija *Formalna teorija* (formalni sistem) se sastoji od sledećih komponenti:

- Nepraznog skupa simbola, koji nazivamo i jezikom formalne teorije;
- Skupa svih konačnih nizova simbola jezika formalne teorije, koji nazivamo i skupom reči formalne teorije;
- Skupa formula, koji je podskup skupa svih reči;
- Skupa aksioma, koji je podskup skupa formula;
- Pravila izvođenja, koja su neke relacije među formulama. Ako je R $n+1$-arno pravilo izvođenja, onda se za formulu φ kaže da se dobija iz formula $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ po pravilu R ukoliko je

  $$R(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi).$$

  Uobičajeno je da se pravila izvođenja zapisuju na sledeći način:

  $$\frac{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}{\varphi} \quad R\ .$$

1.1.2 Primer Neka je $\mathcal{L} = \{a, b\}$ i neka se skup formula poklapa sa skupom reči nad $\mathcal{L}$. Dalje, neka su jedine dve aksiome a i b, i neka su R_1 i R_2 sledeća pravila izvođenja:

$$R_1 \ \frac{Xa}{Xab} \qquad\qquad R_2 \ \frac{Xb}{Xba},$$

pri čemu je X proizvoljna reč (moguće prazna). Na ovaj način smo definisali jednu formalnu teoriju.

1.1.3 Primer Iskazni račun kao formalnu teoriju definišemo na sledeći način:

- Jezik se sastoji iz dva dela i to:
  - logičkog dela, koji čine znak za negaciju $\neg$, znak za implikaciju $\Rightarrow$, leva i desna zagrada;
  - nepraznog skupa P, koji nazivamo skupom iskaznih slova.

  Menjajući skup iskaznih slova P dobijamo potencijalno različite iskazne račune. Ukoliko su skupovi P i P' iste kardinalnosti, onda su odgovarajući iskazni računi ekvivalentni, pa ih stoga i poistovećujemo;

- Skupa iskaznih fromula $ForP$, koji se definiše na sledeći način:
  - iskazna slova su iskazne formule;
  - ako su φ i ψ iskazne formule, onda su i $\neg\varphi$ i $(\varphi \Rightarrow \psi)$ takođe iskazne formule;
  - iskazne formule se dobijaju isključivo konačnom primenom prethodne dve stavke.

  Radi preglednosti zapisa, spoljne zagrade se najčešće izostavljaju. Takođe se uvode i formalna konjunkcija, disjunkcija i ekvivalencija na sledeći način:
  - $\varphi \wedge \psi$ je zamena za $\neg(\varphi \Rightarrow \neg\psi)$;
  - $\varphi \vee \psi$ je zamena za $\neg\varphi \Rightarrow \psi$;
  - $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je zamena za $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$;

- Aksiome se dobijaju primenom sledeće tri sheme:

  `S1` $\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \varphi)$;

  `S2` $(\varphi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \theta)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \theta))$;

  `S3` $(\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$.

Pritom su φ, ψ i θ proizvoljne iskazne formule;

- Jedino pravilo izvođenja je modus ponens:

$$\mathtt{MP}\ \frac{\varphi \quad \varphi \Rightarrow \psi}{\psi}.$$

1.1.4 Definicija Neka je T proizvoljna *teorija* (podskup skupa svih formula) nekog fiksiranog formalnog sistema. *Dokaz u teoriji* T u datoj formalnoj teoriji je svaki konačan niz formula takav da je svaka formula u nizu ili aksioma, ili pripada teoriji T, ili se dobija iz nekih prethodnih članova niza po nekom pravilu izvođenja. Sa

$$T \vdash \varphi$$

se označava činjenica da postoji dokaz u teoriji T koji se završava formulom φ. Za formulu φ kažemo da je *teorema* teorije T.

Ako je $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$, onda umesto $T \vdash \varphi$ pišemo

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi.$$

Dalje, umesto $T_1 \cup T_2 \vdash \varphi$ pišemo

$$T_1, T_2 \vdash \varphi.$$

Konačno, ako je $T = \emptyset$, onda umesto $\emptyset \vdash \varphi$ pišemo

$$\vdash \varphi.$$

1.1.5 Primer Pokažimo da važi $\vdash baba$ u formalnoj teoriji iz primera 1.1.2. Zaista, jedan od mogućih formalnih dokaza je i niz

$$b, ba, bab, baba.$$

Naime, prvi član niza je aksioma, drugi se dobija iz prvog po R_1, treći iz drugog po R_2 i četvrti iz trećeg po R_1.

1.1.6 Primer U iskaznom računu (primer 1.1.3), pokažimo da važi $\vdash \varphi \Rightarrow \varphi$ za proizvoljnu iskaznu formulu φ. Zaista:

$$
\begin{array}{llr}
a & (\varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) & \texttt{S2} \\
b & \varphi \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi) & \texttt{S1} \\
c & (\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) & \texttt{MP}(b,a) \\
d & \varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \varphi) & \texttt{S1} \\
e & \varphi \Rightarrow \varphi & \texttt{MP}(d,c)
\end{array}
$$

1.1.7 Teorema *Neka su T_1 i T_2 teorije unutar fiksiranog formalnog sistema. Tada važi:*

1. *Ako $T_1 \vdash \varphi$, onda i $T_1, T_2 \vdash \varphi$;*
2. *Ako $T_1 \vdash \varphi$ i $\varphi \vdash \psi$, onda i $T_1 \vdash \psi$.*

Dokaz

Ako je niz

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi$$

dokaz formule φ u teoriji T_1, onda je direktno po definiciji isti taj niz dokaz formule φ u teoriji $T_1 \cup T_2$, pa imamo da iz $T_1 \vdash \varphi$ sledi da $T_1, T_2 \vdash \varphi$.

Prelazimo na dokaz preostalog dela tvrđenja. Neka je niz

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi \tag{1.1}$$

dokaz u teoriji T_1 formule φ i neka je niz

$$\psi_1, \dots, \psi_m, \psi \tag{1.2}$$

dokaz formule ψ u teoriji $\{\varphi\}$. Sada dokaz formule ψ u T_1 dobijamo tako što umesto svakog javljanja formule φ u nizu (1.2) stavimo niz (1.1). $\square$

1.1.8 Zadatak Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka su φ i ψ proizvoljne iskazne formule. Dokazati:

1. Ako $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, onda $T \vdash \psi$;

2. Ako $T \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$, onda $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Formalne teorije ne predstavljaju puku igru simbolima već su, naprotiv, pokušaj da se čisto sintaksnim sredstvima sagledaju neki važni matematički koncepti. U slučaju iskaznog računa, postignuta je potpuna sintaksna karakterizacija tautologija, što ćemo u nastavku i obrazložiti.

Neformalno, iskaz je rečenica govornog jezika koja može biti ili tačna ili netačna. Polazeći od primitivnih (osnovnih) iskaza, složeniji iskazi se dobijaju upotrebom logičkih operacija negacije, implikacije, konjunkcije, disjunkcije i ekvivalencije. Pritom je konjunkcija dva iskaza tačna jedino ukoliko su oba iskaza tačna, negacija iskaza menja njegovu istinitosnu vrednost itd. Matematizacijom ovog koncepta dolazimo do *semantike* iskaznog računa, koja se ostvaruje u *iskaznoj algebri*

$$\mathbf{2} = \langle \{0,1\}, \wedge^{\mathbf{2}}, \vee^{\mathbf{2}}, \neg^{\mathbf{2}}, \Rightarrow^{\mathbf{2}}, \Leftrightarrow^{\mathbf{2}} \rangle$$

na sledeći način:

- Navedene operacije su definisane sledećim tablicama:

$$\begin{array}{c|cc} \wedge^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \vee^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \Rightarrow^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \Leftrightarrow^{\mathbf{2}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \neg^{\mathbf{2}} : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- *Valuacija* skupa iskaznih slova P je proizvoljna funkcija

$$\mu : P \longrightarrow \{0,1\};$$

- *Vrednost* iskazne formule φ pri valuaciji μ, u oznaci $\varphi[\mu]$, se definiše na sledeći način:

  – $p[\mu] = \mu(p)$, $p \in P$;

– $(\neg\varphi)[\mu] = \neg^{\mathbf{2}}(\varphi[\mu])$;

– $(\varphi \Rightarrow \psi)[\mu] = \varphi[\mu] \Rightarrow^{\mathbf{2}} \psi[\mu]$;

Za iskaznu formulu φ kažemo da je tačna pri valuaciji μ, u oznaci $\mu \models \varphi$, ukoliko je $\varphi[\mu] = 1$. U tom slučaju za valuaciju μ kažemo i da je *model* formule φ. Ako je T iskazna teorija, onda je valuacije μ njen model ukoliko je model za svaku formulu koja se javlja u njoj. Iskazna formula φ je *tautologija*, u oznaci $\models \varphi$, ukoliko je tačna pri svim valuacijama. Iskazna formula φ je *kontradickija* ukoliko je njena negacija tautologija;

- Kažemo da je iskazna formula φ *semantička posledica* iskazne teorije T, u oznaci $T \models \varphi$, ukoliko je svaki modeteorije T ujedno i model formule φ.

1.1.9 Zadatak Neka je φ proizvoljna iskazna formula i neka su μ i ν valuacije takve da za svako iskazno slovo p koje se javlja u formuli φ važi

$$\mu(p) = \nu(p).$$

Dokazati da tada $\mu \models \varphi$ akko $\nu \models \varphi$.

Uputstvo Koristiti indukciju po složenosti formule, pri čemu je složenost formule broj logičkih veznika (računajući višestrukost) koji se javljaju u njoj. □

Sledeći zadatak je poznatiji kao teorema saglasnosti iskaznog računa.

1.1.10 Zadatak Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka je φ proizvoljna iskazna formula. Ako $T \vdash \varphi$, dokazati da onda i $T \models \varphi$.

Uputstvo Koristiti indukciju po dužini dokaza formule φ u teoriji T. □

Vezu između sintakse i semantike daje nam sledeća *mala teorema potpunosti* iskaznog računa:

1.1.11 Teorema *Neka je φ proizvoljna iskazna formula. Tada je $\vdash \varphi$ ako i samo ako je formula φ tautologija.*

Kao što ćemo videti, mala teorema potpunosti je posledica sledeće tri leme:

1.1.12 Lema *Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka su φ, ψ i θ proizvoljne iskazne formule. Tada važi:*

1. $T, \varphi \models \varphi$;
2. $T, \varphi, \neg\varphi \models \psi$;
3. $T \models \varphi \Rightarrow \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \models \psi$;
4. $T \models \neg\neg\varphi$ *ako i samo ako* $T \models \varphi$;
5. $T \models \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ *ako i samo ako* $T \models \varphi$ *i* $T \models \neg\psi$;
6. $T, \neg\neg\varphi \models \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \models \psi$;
7. $T, \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \models \theta$ *ako i samo ako* $T, \varphi, \neg\psi \models \theta$;
8. $T, \varphi \Rightarrow \psi \models \theta$ *ako i samo ako* $T, \neg\theta \models \varphi$ *i* $T, \neg\theta \models \neg\psi$.

Dokaz

Kao ilustraciju dokažimo samo poslednju stavku. Pretpostavimo prvo da

$$T, \varphi \Rightarrow \psi \models \theta$$

i neka je valuacija μ model teorije $T, \neg\theta$. Ako je $\varphi[\mu] = 0$, onda je $(\varphi \Rightarrow \psi)[\mu] = 1$, pa po predpostavci mora biti $\mu \models \theta$, što je u kontradikciji sa $\mu \models \neg\theta$. Dakle, $\mu \models \varphi$. Odavde sledi da $\mu \models \neg\psi$, jer bi u suprotnom bilo $\mu \models \varphi \Rightarrow \psi$, pa dobijamo kontradikciju na isti način kao i malo pre.

Pretpostavimo sada da

$$T, \neg\theta \models \varphi \quad \text{i} \quad T, \neg\theta \models \neg\psi$$

i neka je valuacija μ proizvoljan model teorije $T, \varphi \Rightarrow \psi$. Ako je $\mu \models \neg\theta$, onda je po pretpostavci $\mu \models \varphi$ i $\mu \models \neg\psi$, pa je $\mu \models \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$, što je u kontradikciji sa $\mu \models \varphi \Rightarrow \psi$. Dakle, $\mu \models \theta$. $\square$

1.1.13 Lema *Neka je T proizvoljna iskazna teorija i neka su φ, ψ i θ proizvoljne iskazne formule. Tada važi:*

1. $T, \varphi \vdash \varphi$;
2. $T, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$;
3. *(teorema dedukcije)* $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \vdash \psi$;
4. $T \vdash \neg\neg\varphi$ *ako i samo ako* $T \vdash \varphi$;
5. $T \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ *ako i samo ako* $T \vdash \varphi$ *i* $T \vdash \neg\psi$;
6. $T, \neg\neg\varphi \vdash \psi$ *ako i samo ako* $T, \varphi \vdash \psi$;
7. $T, \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \theta$ *ako i samo ako* $T, \varphi, \neg\psi \vdash \theta$;
8. $T, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \theta$ *ako i samo ako* $T, \neg\theta \vdash \varphi$ *i* $T, \neg\theta \vdash \neg\psi$.

Dokaz

Kao ilustraciju ćemo pokazati samo teoremu dedukcije. Prvo pretpostavimo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. Tada i $T, \varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, a kako $T, \varphi \vdash \varphi$, po zadatku 1.1.8 imamo da

$$T, \varphi \vdash \psi.$$

Pretpostavimo sada da $T, \varphi \vdash \psi$. Potpunom indukcijom po dužini dokaza formule ψ u teoriji T, φ dokazujemo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Neka je dokaz dužine 1. Tada je formula ψ ili jednaka formuli φ, ili pripada teoriji T, ili je instanca neke od shema `S1`, `S2` i `S3`. Slučaj kada su formule ψ i φ jednake je već obrađen u primeru 1.1.6, pa prelazimo na preostala dva slučaja. Tada $T \vdash \psi$, a kako $T \vdash \psi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)$, po zadatku 1.1.8 imamo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.

Neka je dokaz formule ψ u teoriji T, φ oblika

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_n \Rightarrow \psi, \psi.$$

i neka tvrđenje važi za sva formule sa kraćim dokazom. Po induktivnoj hipotezi imamo da

$$T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi_n \ \text{ i } \ T \vdash \varphi \Rightarrow (\varphi_n \Rightarrow \psi).$$

Kako

$$T \vdash (\varphi \Rightarrow (\varphi_n \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \varphi_n) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi)),$$

dvostrukom primenom zadatka 1.1.8 dobijamo da $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$. □

Način korišćenja prethodne leme ilustrujmo sledećim primerom:

$$\begin{array}{lll} & \vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi) & \\ \text{akko} & \varphi \Rightarrow \psi \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi & \text{lema 1.1.13(3)} \\ \text{akko} & \varphi \Rightarrow \psi, \neg\psi \vdash \neg\varphi & \text{lema 1.1.13(3)} \\ \text{akko} & \neg\neg\varphi, \neg\psi \vdash \varphi \ \text{ i } \ \neg\neg\varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi & \text{lema 1.1.13(8)} \\ \text{akko} & \varphi, \neg\psi \vdash \varphi \ \text{ i } \ \varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi & \text{lema 1.1.13(6)} \end{array}$$

Kako po lemi 1.1.13(1) važi $\varphi, \neg\psi \vdash \varphi$ i $\varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi$, na osnovu prethodnog mora biti i

$$\vdash (\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi).$$

1.1.14 Lema *Neka su $p_1, \ldots, p_n, q$ proizvoljna iskazna slova, $a_1, \ldots, a_n, b \in \{0,1\}$, $p^0 = \neg p$ i $p^1 = p$. Tada*

$$p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash q^b$$

akko važi jedan od sledeća dva slučaja:

(1) $q^b = p_k^{a_k}$ za neko $k \in \{1, \ldots, n\}$;

(2) postoje $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $p_i^{a_i} = \neg p_j^{a_j}$.

Tvrđenje važi i ako $\vdash$ zamenimo sa $\models$.

Dokaz Ako važi (1) ili (2), onda definitivno važi i $p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash q^b$. Stoga pretpostavimo da

$$p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash q^b$$

i da ne važi (2). Tvrdimo da tada važi (1). Zaista, u suprotnom bi bilo koja valuacija μ takva da je $\mu(p_i) = a_i$ i $\mu(q) = 1 - b$ imala sledeća svojstva:

- $\mu \models p_1^{a_1} \wedge \cdots \wedge p_n^{a_n}$;
- $\mu \models \neg q^b$.

Po teoremi saglasnosti (zadatak 1.1.10) sledi da

$$p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \nvdash q^b,$$

sto je u kontradikciji sa $p_1^{a_1}, \ldots, p_n^{a_n} \vdash q^b$. □

Dokaz male teoreme potpunosti

Neka je φ proizvoljna iskazna formula. Primenom stavki (i_1), …, (i_m) leme 1.1.13 dobijamo da $\vdash \varphi$ akko

$$p_{11}^{a_{11}}, \ldots, p_{1n_1}^{a_{1n_1}} \vdash q_1^{b^1} \text{ i } \ldots \text{ i } p_{k1}^{a_{k1}}, \ldots, p_{kn_k}^{a_{kn_k}} \vdash q_k^{b^k}.$$

Na osnovu leme 1.1.14 imamo da je prethodno ekvivalentno sa

$$p_{11}^{a_{11}}, \ldots, p_{1n_1}^{a_{1n_1}} \models q_1^{b^1} \text{ i } \ldots \text{ i } p_{k1}^{a_{k1}}, \ldots, p_{kn_k}^{a_{kn_k}} \models q_k^{b^k},$$

što je, primenom stavki $(i_m), \ldots, (i_1)$ leme 1.1.12 ekvivalentno sa $\models \varphi$. Ovim je teorema dokazana u potpunosti. □

Kao što smo na primeru iskaznog računa videli, pitanje

"da li je formula φ teorema teorije T"

pokušavamo da rešimo nekakvom vrstom semanitčke potpunosti. U slučaju iskaznog računa imamo tzv. *jaku potpunost*:

$$T \vdash \varphi \quad \text{akko} \quad T \models \varphi.$$

O ovom rezultatu i njegovoj vezi sa predikatskim računom prvog reda će biti više reči nešto kasnije.

1.2 Predikatski račun prvog reda

Jezik $\mathcal{L}$ prvog reda (ili relacijsko operacijski jezik) je skup simbola koji pored logičkih simbola $(\neg, \Rightarrow, \forall, =)$, interpunkcijskih znakova i prebrojivog skupa promenljivih $Var = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ eventualno sadrži i simbole konstanti, relacijske simbole i funkcijske simbole. Uz svaki relacijski i funkcijski znak koji se nalazi u jeziku $\mathcal{L}$ data je i njegova arnost, odnosno broj argumentnih mesta. S obzirom da svaki jezik prvog reda sadrži logički deo, njega nećemo eksplicitno navoditi. Tako na primer, ako kažemo da $\mathcal{L}$ sadrži samo jedan simbol konstante c, to zapravo znači da je to jedini ne-logički simbol jezika $\mathcal{L}$.

Kako bi čitanje bilo nedvosmisleno, pomenute grupe simbola su međusobno disjunktne i nijedan simbol nije pravi početni komad ma kog drugog simbola. Sa $Const\mathcal{L}$, $Fun\mathcal{L}$ i $Rel\mathcal{L}$ ćemo redom označavati skupove simbola konstanti, funkcijskih i relacijskih znakova jezika $\mathcal{L}$.

1.2.1 Primer Jezik Peanove aritmetike $\mathcal{L}_{PA}$ sastoji se od dva binarna funkcijska simbola $+$ i $\cdot$, jednog unarnog funkcijskog simbola $'$ i jednog simbola konstante $\mathtt{0}$.

1.2.2 Primer Jezik teorije skupova $\mathcal{L}_{ZFC}$ sastoji se od jednog binarnog relacijskog simbola $\in$.

Terme (izraze) jezika $\mathcal{L}$ rekurzivno definišemo na sledeći način:

- Promenljive i simboli konstanti su termi jezika $\mathcal{L}$;
- Za proizvoljan funkcijski znak F jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne terme $t_1, \ldots, t_n$ jezika $\mathcal{L}$ zapis

  $$F(t_1, \ldots, t_n)$$

  takođe je term jezika $\mathcal{L}$;
- Svaki term jezika $\mathcal{L}$ se može dobiti isključivo konačnom primenom prethodne dve stavke.

Složenost terma je po definiciji broj (računajući višestrukost) funkcijskih znakova koji se javljaju u njemu.

Ako je F binarni funkcijski znak, onda umesto $F(t_1, t_2)$ pišemo uobičajeno $t_1\, F\, t_2$.

Formule jezika $\mathcal{L}$ rekurzivno uvodimo na sledeći način:

- Za proizvoljna dva terma t_1 i t_2 jezika $\mathcal{L}$ zapis
$$(t_1 = t_2)$$
je formula jezika $\mathcal{L}$;
- Za proizvoljan relacijski znak R arnosti n jezika $\mathcal{L}$ i ma koje terme $t_1, \ldots, t_n$ jezika $\mathcal{L}$, zapis
$$(R(t_1, \ldots, t_n))$$
je formula jezika $\mathcal{L}$;
- Neka su φ i ψ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}$ i neka je x proizvoljna promenljiva. Tada je svaki od zapisa
$$\neg\varphi \qquad (\varphi \Rightarrow \psi) \qquad \forall x \varphi$$
formula jezika $\mathcal{L}$;
- Formule jezika $\mathcal{L}$ se mogu dobiti isključivo konačnom primenom prethodnih stavki.

Radi preglednijeg zapisa, podrazumevamo uobičajenu konvenciju o brisanju zagrada i prioritetu logičkih veznika: najviši prioritet ima negacija, zatim univerzalni kvantor i na kraju implikacija.

Ostale logičke veznike uvodimo na isti način kao i u iskaznom računu. Dodatak je egzistencijalni kvantor, koji formalno uvodimo na sledeći način:

$$\exists x \varphi \text{ je formula } \neg\forall x \neg\varphi.$$

Ako je R binarni relacijski znak, onda umesto $R(t_1, t_2)$ pišemo uobičajeno $t_1\, R\, t_2$.

Složenost formule je broj logičkih veznika i kvantora, (računajući višestrukost) koji se javljaju u njoj. Posebno, formule složenosti 0 zovemo i *atomičnim formulama*.

Za promenljivu x koja se javlja u formuli φ kažemo da je *vezana* ukoliko je svako njeno javljanje pod dejstvom nekog kvantora. U suprotnom kažemo da je promenljiva x *slobodna* u formuli φ. Formule koje nemaju slobodne promenljive zovemo *rečenicama*.

1.2.3 Primer Neka je x proizvoljna promenljiva. U formuli

$$\forall x(x = x) \Rightarrow x = x$$

promenljiva x je slobodna, jer njeno javljanje u potformuli sa desne strane nije pod dejstvom kvantora.

Sa $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ćemo označavati činjenicu da su sve slobodne promenljive formule φ neke od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Dalje, sa

$$\varphi^x_t$$

označavaćemo formulu koja nastaje iz formule φ zamenom svih slobodnih javljanja promenljive x termom t. Pritom kažemo da je zamena *regularna* ako se ni jedna promenljiva koja se javlja u termu t ne javlja u formuli φ.

Aksiome predikatskog računa delimo u nekoliko grupa:

Iskazne aksiome: Supstitucione instance tautologija;

Aksiome jednakosti: Ovu grupu aksioma čine sledeće sheme:

- Za proizvoljne promenljive x, y i z formule

$$\begin{array}{l} \forall x(x = x) \\ \forall x \forall y(x = y \Rightarrow y = x) \\ \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z) \end{array}$$

  su aksiome;

- Neka su x i y proizvoljne promenljive i neka je φ formula u kojoj je promenljiva x slobodna i u kojoj se promenljiva y ne javlja. Tada je formula

$$(x = y) \Rightarrow (\varphi(\ldots, x, \ldots) \Rightarrow \varphi(\ldots, y, \ldots)),$$

aksioma, pri čemu formula $\varphi(\ldots, y, \ldots)$ nastaje iz formule φ zamenom nekih slobodnih javljanja promenljive x promenljivom y.

Aksiome kvantora: Ovu grupu aksioma čine sledeće dve sheme:

- Neka je x promenljiva, φ formula jezika $\mathcal{L}$ i neka je t term jezika $\mathcal{L}$ takav da je zamena u φ^x_t regularna. Tada je formula

$$\forall x \varphi \Rightarrow \varphi^x_t$$

aksioma;

- Neka se promenljiva x ne javlja slobodno u formuli ψ. Tada je formula

$$\forall x(\psi \Rightarrow \varphi) \Leftrightarrow (\psi \Rightarrow \forall x \varphi)$$

aksioma.

Pored modus ponensa, predikatski račun ima još jedno pravilo izvođenja, koje zovemo pravilom generalizacije:

$$\frac{\psi \Rightarrow \varphi}{\psi \Rightarrow \forall x \varphi} \quad \texttt{GEN} \ ,$$

pri čemu se promenljiva x ne javlja slobodno u formuli ψ.

1.2.4 Definicija Hijerarhiju formula rekurzivno definišemo na sledeći način:

- Skupove $\Sigma_0 = \Pi_0$ čine formule bez kvantora;

- Skup Σ_{n+1}-formula čine formule koje nastaju dodavanjem bloka egzistencijalnih kvantora na Π_n-formule;
- Skup Π_{n+1}-formula čine formule koje nastaju dodavanjem bloka univerzalnih kvantora na Σ_n formule.

Osnovne stavove o formalnom dokazivanju u predikatskom računu navodimo bez dokaza. Prethodno napomenimo da skupove rečenica u predikatskom računu zovemo i *teorijama*.

1.2.5 Lema o novoj konstanti *Neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$, T teorija jezika $\mathcal{L}$ i neka je c nov simbol konstante. Tada*

$$T \vdash \forall x\varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad T \vdash \varphi^x_c.$$

1.2.6 Pravilo c *Neka jezik $\mathcal{L}^*$ nastaje proširenjem jezika $\mathcal{L}$ novim simbolom konstante c i neka je $\varphi(x)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$. Tada su teorije T i $T \cup \{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)\}$ ekvikonsistentne.*

1.2.7 Preneksna normalna forma *Neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$. Tada postoje prirodan broj n i Σ_n ili Π_n formula ψ tako da*

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

1.2.8 Teorema dedukcije, proširena varijanta

Neka je T proizvoljna teorija jezika $\mathcal{L}$ i neka su φ, ψ i θ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}$. Tada važi:

1. $T, \varphi \vdash \varphi$;
2. $T, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$;
3. *(teorema dedukcije) Ako je φ rečenica, onda $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$ ako i samo ako $T, \varphi \vdash \psi$;*
4. $T \vdash \neg\neg\varphi$ *ako i samo ako* $T \vdash \varphi$;

5. *$T \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \psi)$ ako i samo ako $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \neg\psi$;*

6. *$T, \neg\neg\varphi \vdash \psi$ ako i samo ako $T, \varphi \vdash \psi$;*

7. *$T, \neg(\varphi \Rightarrow \psi) \vdash \theta$ ako i samo ako $T, \varphi, \neg\psi \vdash \theta$;*

8. *Ako su φ, ψ i θ rečenice, onda $T, \varphi \Rightarrow \psi \vdash \theta$ ako i samo ako $T, \neg\theta \vdash \varphi$ i $T, \neg\theta \vdash \neg\psi$;*

9. *Ako $T \vdash \varphi$ i $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$, onda $T \vdash \psi$;*

10. *$T \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$ ako i samo ako $T \vdash \varphi \Rightarrow \psi$.*

Napomenimo da treća stavka prethodne teoreme ne mora da važi ukoliko φ nije rečenica. Primera radi, neka je $\mathcal{L} = \{c, d\}$ pri čemu su c i d simboli konstanti i neka su x i y različite promenljive. Tada

$$\neg(c = d), x = c \vdash y = c,$$

ali $\neg(c = d) \nvdash x = c \Rightarrow y = c$.

1.2.9 Definicija Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Za teoriju T kažemo da je:

- *Neprotivrečna*, ako postoji formula φ jezika $\mathcal{L}$ takva da $T \nvdash \varphi$;
- *Kompletna*, ako za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}$ važi ili $T \vdash \varphi$, ili $T \vdash \neg\varphi$.

1.3 Primeri teorija prvog reda

U ovoj sekciji ćemo ukratko prikazati sledeće teorije prvog reda:

1. ZFC (Zermelo-Fraenkelova teorija skupova sa aksiomom izbora);
2. PA (Peanova aritmetika);

3. BA (teorija Booleovih algebri).

1 ZFC je formalna teorija u predikatskom računu prvog reda koja od nelogičkih simbola ima jedan binarni relacijski znak $\in$. Ona se sastoji od osam aksioma i dve sheme, svaka sa prebrojivo mnogo instanci. Prvo ćemo navesti aksiome, a zatim i sheme. Radi preglednosti, početni blok univerzalnih kvantora ćemo izostaviti.

Aksiome

1. $x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$

2. $\exists x \forall y \neg (y \in x)$

3. $\exists z \forall u(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y)$

4. $\exists y \forall z(z \in y \Leftrightarrow \exists u(u \in x \wedge z \in u))$

5. $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2(x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \forall x_3(x_3 \in x_2 \Rightarrow x_3 \in x_0))$

6. $\exists x_0(0 \in x_0 \wedge (\forall x_1 \in x_0)(x_1 \cup \{x_1\} \in x_0))$, pri čemu:
   - $0 \in x_0$ je formula $\exists x_2(x_2 \in x_0 \wedge \forall x_3 \neg (x_3 \in x_2))$;
   - $x_1 \cup \{x_1\} \in x_0$ je formula
   $$\exists x_2(x_2 \in x_0 \wedge \forall x_3(x_3 \in x_0 \Leftrightarrow (x_3 \in x_1 \vee x_3 = x_1)));$$
   - $(\forall x \in y)\varphi$ je formula $\forall x(x \in y \Rightarrow \varphi)$.

7. $(\forall x_0 \neq 0)(\exists x_1 \in x_0)(x_0 \cap x_1 = 0)$, pri čemu:
   - $x \notin y$ je formula $\neg(x \in y)$;
   - $x = 0$ je formula $\forall y(y \notin x)$;
   - $x \neq 0$ je formula $\exists y(y \in x)$;
   - $(\exists x \in y)\varphi$ je formula $\exists x(x \in y \wedge \varphi)$;

- $x \cap y = 0$ je formula

$$\forall z((z \in x \Rightarrow z \notin y) \wedge (z \in y \Rightarrow z \notin x)).$$

8. $\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_0 \wedge \exists x_3 (x_3 \in x_2) \Rightarrow \exists_1 x_4 (x_4 \in x_2 \wedge x_4 \in x_0))$,
   pri čemu je $\exists_1 x \varphi(x)$ skraćeni zapis formule
   $\exists x(\varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \Rightarrow x = y))$.

Aksiome 1-8 redom zovemo i aksiomom ekstenzionalnosti, aksiomom praznog skupa, aksiomom para, aksiomom unije, aksiomom partitivnog skupa, aksiomom beskonačnosti, aksiomom regularnosti i aksiomom izbora.

Shema separacije

Neka je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljiva x_2 javlja slobodno i u kojoj promenljiva x_1 nema slobodnih javljanja. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_0 \wedge \varphi)$$

instanca sheme separacije.

Shema zamene

Neka je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljive x_2 i x_3 javljaju slobodno i u kojoj promenljiva x_1 nema slobodnih javljanja. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$\forall x_0 (\forall x_2 (x_2 \in x_0 \Rightarrow \exists_1 x_3 \varphi) \Rightarrow \exists x_1 \forall x_3 (x_3 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_2 (x_2 \in x_0 \wedge \varphi)))$$

instanca sheme zamene.

2 PA je teorija prvog reda na jeziku $\mathcal{L}_{PA}$ koji se sastoji od dva binarna funkcijska znaka $+$ i $\cdot$, jednog unarnog funkcijskog znaka $'$ i jednog simbola konstante $\mathtt{0}$. Teoriju PA čini šest aksioma i jedna shema (shema indukcije) sa prebrojivo mnogo instanci. Navedimo aksiome i shemu indukcije:

Aksiome

1. $\forall x(x' \neq \mathsf{0})$;
2. $\forall x \forall y(x' = y' \Rightarrow x = y)$;
3. $\forall x(x + \mathsf{0} = x)$;
4. $\forall x \forall y(x + y' = (x + y)')$;
5. $\forall x(x \cdot \mathsf{0} = \mathsf{0})$;
6. $\forall x \forall y(x \cdot y' = x + (x \cdot y))$.

Shema indukcije

Neka je $\varphi(x, \bar{y})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$(\varphi(\mathsf{0}, y) \wedge \forall x(\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \varphi(x', \bar{y})) \Rightarrow \forall x \varphi(x, \bar{y})$$

instanca sheme indukcije.

3 BA je teorija prvog reda na jeziku $\mathcal{L}_{BA}$ koji se sastoji od dva binarna funkcijska simbola $\vee$ i $\wedge$, jednog unarnog funkcijskog simbola ^{c}, jednog binarnog relacijskog znaka $\leqslant$ i dva simbola konstanti $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$. Univerzalna zatvorenja sledećih jedanaest formula su aksiome teorije BA:

1. $x \vee y = y \vee x$;
2. $x \wedge y = y \wedge x$
3. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
4. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
5. $x \wedge (x \vee y) = x$;
6. $x \vee (x \wedge y) = x$;

7. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

8. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$;

9. $x \vee x^c = \mathbf{1}$;

10. $x \wedge x^c = \mathbf{0}$;

11. $x \leqslant y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

1.4 Modeli - relacija zadovoljenja

Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda i neka je M neprazan skup. Preslikavanje $\mathcal{I}$ sa domenom $\mathcal{L}$ je *interpretacija* jezika $\mathcal{L}$ u skupu M ako važi:

- Za svaki simbol konstante c imamo da $\mathcal{I}(c) \in M$;
- Za svaki funkcijski znak F arnosti n je $\mathcal{I}(F)$ funkcija sa domenom M^n i kodomenom M;
- Za svaki relacijski znak R arnosti n je $\mathcal{I}(R)$ podskup skupa M^n.

Model jezika $\mathcal{L}$ je par $\langle M, \mathcal{I} \rangle$, pri čemu je M neprazan skup a $\mathcal{I}$ je interpretacija jezika $\mathcal{L}$ u skupu M. Ako je jezik $\mathcal{L}$ konačan, onda eksplicitno navodimo interpretacije svih simbola.

Ako je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, onda interpretaciju proizvoljnog simbola s jezika $\mathcal{L}$ često označavamo sa

$$s^{\mathcal{M}}.$$

1.4.1 Primer Model jezika teorije skupova je par oblika $\langle M, E \rangle$, pri čemu je M neprazan skup a E je binarna relacija na skupu M.

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ proizvoljan model jezika $\mathcal{L}$. Svako preslikavanje $\mu : Var \longrightarrow M$ zovemo i *valuacijom* skupa promenljivih u modelu $\mathcal{M}$. *Vrednost* terma t jezika $\mathcal{L}$ pri valuaciji μ, u oznaci $t[\mu]$, rekurzivno definišemo na sledeći način:

- $c[\mu] = c^{\mathcal{M}}$, $c \in Const\mathcal{L}$;
- $x[\mu] = \mu(x)$, $x \in Var$;
- $F(t_1, \ldots, t_n)[\mu] = F^{\mathcal{M}}(t_1[\mu], \ldots, t_n[\mu])$, $F \in Fun\mathcal{L}$.

1.4.2 Zadatak Neka je t term jezika $\mathcal{L}$, $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$ i neka su $\mu, \nu : Var \longrightarrow M$ valuacije takve da je $\mu(x) = \nu(x)$ za svaku promenljivu x koja se javlja u termu t. Dokazati da je

$$t[\mu] = t[\nu].$$

U vezi sa prethodnim, ako su $x_1, \ldots, x_n$ sve promenljive koje se javljaju u termu t i ako je μ proizvoljna valuacija, onda ćemo umesto $t[\mu]$ pisati

$$t[a_1, \ldots, a_n],$$

pri čemu je $\mu(x_i) = a_i$.

Neka su $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ i $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$. Kažemo da je model $\mathcal{M}$ *podmodel* modela $\mathcal{N}$ ako važi:

- $M \subseteq N$;
- Za svaki simbol konstante c jezika $\mathcal{L}$ je $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$;
- Za svaki funkcijski znak F arnosti n jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne elemente $a_1, \ldots a_n \in M$ je

$$F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = F^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a^n);$$

- Za svaki relacijski znak R arnosti n jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne elemente $a_1, \ldots a_n \in M$ imamo da

$$R^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{ako i samo ako} \quad R^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Neka su $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ i $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$. Funkcija $f : M \longrightarrow N$ je *homomorfizam* ako važi:

- $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$;
- $f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{N}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$;
- $R^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$ ako i samo ako $R^{\mathcal{N}}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.

Posebno, modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *izomorfni*, u oznaci $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$, ako postoji bijektivni homomorfizam između njih.

1.4.3 Definicija Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, $\varphi(\bar{x})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$ i neka $a_1, \ldots, a_n \in M$. Predikat

"u modelu $\mathcal{M}$ važi formula φ pri valuaciji $x_i \mapsto a_i$",

u oznaci $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}]$, definišemo rekurzivno po složenosti na sledeći način:

- Ako je φ formula $t_1 = t_2$, onda
$$\mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \text{ akko } t_1[\bar{a}] = t_2[\bar{a}];$$
- Ako je φ formula $R(t_1, \ldots, t_m)$, onda
$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko važi } R^{\mathcal{M}}(t_1[\bar{a}], \ldots, t_m[\bar{a}]);$$
- Ako je φ formula $\neg\phi$, onda
$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko nije } \mathcal{M} \models \phi[\bar{a}];$$
- Ako je φ formula $\phi \Rightarrow \psi$, onda
$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko iz } \mathcal{M} \models \phi[\bar{a}] \text{ sledi da } \mathcal{M} \models \psi[\bar{a}];$$
- Ako je φ formula $\forall y \phi(y, \bar{x})$, onda
$$\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \text{ akko za svako } b \in M,\ \mathcal{M} \models \phi[b, \bar{a}].$$

Iz prethodne definicije neposredno sledi da istinitosna vrednost formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ u modelu pri nekoj valuaciji promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ zavisi samo od vrednosti koje dobiju slobodne promenljive. Ova primedba ima smisla pre svega zbog toga što $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ označava da su sve slobodne promenljive formule φ neke (ne obavezno sve) od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$.

1.4.4 Definicija Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$.

1. Modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ su *elementarno ekvivalentni*, u oznaci $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ako za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}$ važi

$$\mathcal{M} \models \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathcal{N} \models \varphi;$$

2. Model $\mathcal{M}$ se *elementarno utapa* u model $\mathcal{N}$ ako postoji funkcija $j : M \longrightarrow N$ takva da za svaku formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}$ i ma koje $a_1, \ldots, a_n \in M$ važi

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{akko} \quad \mathcal{N} \models \varphi[j(a_1), \ldots, j(a_n)];$$

3. Model $\mathcal{M}$ je *elementarni podmodel* modela $\mathcal{N}$, u oznaci $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, ukoliko je $\mathcal{M}$ podmodel modela $\mathcal{N}$ i ako je inkluzija $i : M \subseteq N$ $(i(a) = a)$ elementarno utapanje.

1.4.5 Zadatak Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ modeli istog jezika $\mathcal{L}$.

1. Ako se model $\mathcal{M}$ elementarno utapa u model $\mathcal{N}$, dokazati da je tada $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, tj. da su modeli $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentni;

2. Dokazati da polje racionalnih brojeva $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$ nije elementarno ekvivalentno polju realnih brojeva $\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$;

3. Dokazati da je $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ elementarni podmodel modela $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Uputstvo

Prvi deo zadatka sledi neposredno iz definicije elementarnog utapanja kada pređemo na rečenice. Što se tiče drugog dela zadatka, rečenica

$$\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$$

nije tačna u polju racionalnih brojeva a jeste tačna u polju realnih brojeva, pa ova dva polja ne mogu biti elementarno ekvivalentna.

Treći deo zadatka je najteži. I $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ su modeli teorije gustih linearnih uređenja bez krajeva DLO koja ima sledeće aksiome:

- $\forall x \neg (x < x)$;
- $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z)$;
- $\forall x \forall y(x = y \vee x < y \vee y < x)$;
- $\forall x \forall y(x < y \Rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y))$;
- $\forall x \exists y \exists z(y < x \wedge x < z)$.

Uputstvo se sastoji u sledećem:

- Prvo pokazati da teorija DLO dopušta eliminaciju kvantora, tj. da za svaku formulu φ jezika $\mathcal{L}_{DLO} = \{<\}$ postoji formula ψ jezika $\mathcal{L}_{DLO}$ bez kvantora takva da

  $$DLO \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

  Detalji ovog dokaza se mogu naći u [16] u poglavlju o eliminaciji kvantora;

- Lako se proverava (disjunktivna normalna forma) da je svaka formula φ jezika $\mathcal{L}_{DLO}$ bez kvantora ekvivalentna formuli oblika

  $$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_{ij},$$

pri čemu je svaka od formula φ_{ij} ili atomična, ili negacija atomične. Kako

$$DLO \vdash x \neq y \Leftrightarrow (x < y \vee y < x)$$

i

$$DLO \vdash \neg(x < y) \Leftrightarrow (x = y \vee y < x),$$

svaka formula bez kvantora je oblika

$$\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \theta_{ij},$$

pri čemu je θ_{ij} ili oblika $x < y$, ili oblika $x = y$. Preostaje da se za ovakve formule proveri uslov iz definicije elementarnog podmodela. □

1.4.6 Definicija Za formulu φ jezika $\mathcal{L}$ kažemo da je *valjana* ukoliko je tačna u svim modelima jezika $\mathcal{L}$ pri svim valuacijama.

1.4.7 Definicija Za formulu φ kažemo da je *semantička posledica* teorije T, u oznaci $T \models \varphi$, ako je svaki model teorije T ujedno i model formule φ.

1.4.8 Zadatak Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Dokazati da za proizvoljnu formulu φ jezika $\mathcal{L}$ iz $T \vdash \varphi$ sledi $T \models \varphi$.

Uputstvo

Koristiti potpunu indukciju po dužini najkraćeg dokaza formule φ. □

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$. *Elementarni dijagram* modela $\mathcal{M}$ je skup $Th(\mathcal{M})$ svih rečenica jezika $\mathcal{L}$ tačnih u modelu $\mathcal{M}$.

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, A neprazan podskup skupa M i neka je $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$, pri čemu su c_a novi simboli konstanti. *Prosta ekspanzija* modela $\mathcal{M}$ u jezik $\mathcal{L}_A$ je model $\mathcal{M}_A$ jezika $\mathcal{L}_A$ koji se od modela $\mathcal{M}$ dobija tako što se svaki novi simbol konstante c_a interpretira kao a.

1.4.9 Zadatak Neka je $\mathcal{M}$ model jezika $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{N}$ modeli jezika $\mathcal{L}_M$. Dokazati da se model $\mathcal{M}$ elementarno utapa u model $\mathcal{N} \upharpoonright \mathcal{L}$ (restrikcija modela $\mathcal{N}$ na jezik $\mathcal{L}$) ako i samo ako $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M}_M)$.

1.5 Booleove algebre

Booleova algebra je ma koji model $\mathcal{B} = \langle B, \wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ teorije BA. Radi pojednostavljenja notacije, sa $\mathcal{B}$ ćemo označavati i skup nosač B.

1.5.1 Primer Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra. Lako se proverava da za proizvoljne $a, b, c \in \mathcal{B}$ važi:

- $\mathbf{0}^c = \mathbf{1}$;
- $\mathbf{1}^c = \mathbf{0}$;
- $(a^c)^c = a$;
- $(a \vee b)^c = a^c \wedge b^c$;
- $(a \wedge b)^c = a^c \vee b^c$;
- $a \wedge b = \mathbf{0} \Leftrightarrow b \leqslant a^c$;
- $a \leqslant a$;
- $(a \leqslant b \wedge b \leqslant a) \Rightarrow a = b$, pri čemu je u ovom kontekstu $\wedge$ logički veznik;
- $(a \leqslant b \wedge b \leqslant c) \Rightarrow a \leqslant c$;
- $a \wedge b = \inf_{\mathcal{B}}\{a, b\}$;

- $a \vee b = \sup\limits_{\mathcal{B}}\{a, b\}$.

1.5.2 Primer Za proizvoljan skup X imamo da je

$$\langle P(X), \cap, \cup, ^c, \subseteq, 0, X\rangle$$

Booleova algebra. Posebno, $A^c = X \setminus A$.

1.5.3 Definicija Neka je X proizvoljan skup. Skup $A \subseteq P(X)$ je *algebra skupova* ako važi:

- $0 \in A \wedge X \in A$;
- $a \in A \Rightarrow X \setminus a \in A$;
- $(a \in A \wedge b \in A) \Rightarrow (a \cap b \in A \wedge a \cup b \in A)$.

1.5.4 Zadatak Dokazati da je svaka algebra skupova Booleova algebra.

Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra. *Dualna algebra* Booleove algebre $\mathcal{B}$ je struktura

$$\mathcal{B}^* = \langle B, \vee, \wedge, ^c, \geqslant, \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle.$$

Sasvim lako se proverava da je preslikavanje

$$a \mapsto a^c$$

izomorfizam Booleovih algebri $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}^*$.

1.5.5 Zadatak Parcijalno uređenje $\langle M, \leqslant\rangle$ je *mreža* ako svaki dvočlani podskup $\{a, b\}$ skupa M ima infimum $a \wedge b$ i supremum $a \vee b$. Dokazati:

1. Ako za svako $a, b, c \in M$ važi $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, onda za svako $a, b, c \in M$ važi i $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

2. Ako za svako $a, b, c \in M$ važi $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, onda za svako $a, b, c \in M$ važi i $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

1.5.6 Algebra otvoreno zatvorenih skupova Neka je $\langle X, \tau_X \rangle$ topološki prostor i neka je $Clopen(X)$ familija svih otvoreno - zatvorenih skupova u X. Sasvim lako se proverava da je struktura

$$\langle Clopen(X), \cap, \cup, ^c, 0, X \rangle$$

Booleova algebra.

1.5.7 Algebra regularno otvorenih skupova

Neka je $\langle X, \tau_X \rangle$ topološki prostor. Kažemo da je otvoren skup A regularno otvoren ako je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = A$. Laganu vežbu predstavlja dokaz činjenice da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A))$ regularno otvoren za svaki otvoren skup A. Sa r.o.X označimo familiju svih regularno otvorenih skupova u $\langle X, \tau_X \rangle$. Pokažimo da je $\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle$ Booleova algebra.

1. $\inf\limits_{\langle r.o.X, \subseteq \rangle} \{A, B\} = A \cap B$. Da bismo se uverili u ovo, dovoljno je da pokažemo da je skup $A \cap B$ regularno otvoren. S jedne strane, iz monotonosti operatora int i cl sledi

   $$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) = A \;\text{ i }\; \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)),$$

   odakle dobijamo da je $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)) \subseteq A \cap B$. S druge strane, $A \cap B \subseteq \mathrm{cl}(A \cap B)$, odakle sledi da je

   $$A \cap B = \mathrm{int}(A \cap B) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cap B)),$$

   što zajedno sa prethodnim povlači regularnu otvorenost skupa

   $$A \cap B.$$

2. $\sup\limits_{\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle} \{A, B\} = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B))$. Zaista, s jedne strane, iz

   $$\begin{aligned} A &= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \\ B &= \mathrm{int}(\mathrm{cl}(B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \end{aligned}$$

sledi da je skup $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B))$ majoranta skupa $\{A, B\}$ u r.o.X. S druge strane, ako je regularno otvoren skup Z majoranta skupa $\{A, B\}$ u r.o.X, onda je i

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \subseteq \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Z)) = Z,$$

odakle zajedno sa prethodnim sledi da je

$$\sup_{\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle} \{A, B\} = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)).$$

3. 0 je minimum, a X je maksimum u $\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle$. Primetimo da ovo neposredno sledi iz činjenice da su 0 i X regularno otvoreni u $\langle X, \tau_x \rangle$.

Ovim smo pokazali da je $\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle$ mreža sa krajevima. U cilju dokaza distributivnosti, dovoljno je da proverimo da važi distributivnost jedna od distributivnosti (videti zadatak 1.5.5). Lako se pokazuje da je

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup C)) \subseteq \mathrm{cl}((A \cup B) \cap (A \cup C)) = \mathrm{cl}(A \cup (B \cap C)),$$

a s obzirom da je skup $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup B)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup C))$ otvoren, on je i podskup skupa $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup (B \cap C)))$.

Obratna inkluzija trivijalno sledi iz činjenice da je $\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle$ mreža, čime smo pokazali distributivnost.

Preostaje da pokažemo da je $A^c = \mathrm{int}(X \setminus A)$, tj. da je

$$A \cap \mathrm{int}(X \setminus A) = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{int}(\mathrm{cl}(A \cup \mathrm{int}(X \setminus A))) = X.$$

Prva jednakost je trivijalno tačna, a druga neposredno sledi iz otvorenosti skupa X i činjenice da je

$$\mathrm{cl}(A \cup \mathrm{int}(X \setminus A)) = X.$$

1.5.8 Definicija Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra. $D \subseteq \mathcal{B}$ je *filter* ako za svako $a, b \in \mathcal{B}$ važi:

- $\mathbf{0} \notin D$ i $\mathbf{1} \in D$;

- Ako $a, b \in D$, onda i $a \wedge b \in D$;
- Ako $a \in D$ i $a \leqslant b$, onda i $b \in D$.

Skup $I \subseteq \mathcal{B}$ je *ideal* ako je skup $I^* = \{a^c \mid a \in I\}$ filter. Pritom skup I^* zovemo i *dualnim filterom* ideala I. Slično, za proizvoljan filter D ćemo sa D^* označavati njegov dualni ideal. Za proizvoljan ideal I Booleove algebre $\mathcal{B}$ neka je

$$I^+ = \{a \in \mathcal{B} \mid a \notin I\}.$$

1.5.9 Primer Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra i neka je $a > \mathbf{0}$. Tada je skup

$$D_a = \{b \in \mathcal{B} \mid a \leqslant b\}$$

filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. D_a zovemo i *glavnim filterom* generisanim elementom a.

1.5.10 Frechetov filter

Neka je D familija svih kofinitnih podskupova skupa ω. Pošto je presek dva kofinitna skupa takođe kofinitan skup, da je nadskup kofinitnog skupa opet kofinitan i da 0 nije kofinitan, zaključujemo da je D filter Booleove algebre $\langle P(\omega), \subseteq\rangle$. Filter D zovemo i Frechetovim filterom.

Frechetov filter nije glavni filter, jer je

$$\bigcap D \subseteq \bigcap_{n<\omega} \omega \setminus n = 0.$$

1.5.11 Lindenbaumova algebra

Neka je $\mathbb{P}$ beskonačan skup iskaznih slova i neka je $Prop$ odgovarajući skup iskaznih formula[1]. Dalje, neka je $\sim$ binarna relacija na $Prop$ definisana sa $\varphi \sim \psi$ akko je iskazna formula $\varphi \Leftrightarrow \psi$ tautologija. Lako se proverava da je $\sim$ kongruencija na $Prop$, tj. da je relacija ekvivalencije kompatibilna sa $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\Rightarrow$, pri čemu se kompatibilnost ogleda u sledećem:

[1] Strogo formalno, $Prop$ je skup kodova iskaznih formula.

- Ako je $\varphi \sim \psi$, onda je i $\neg\varphi \sim \neg\psi$;
- Ako je $\varphi_1 \sim \varphi_2$ i $\psi_1 \sim \psi_2$, onda je i $\varphi_1 \wedge \psi_1 \sim \varphi_2 \wedge \psi_2$, $\varphi_1 \vee \psi_1 \sim \varphi_2 \vee \psi_2$ i $\varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \sim \varphi_2 \Rightarrow \psi_2$.

Na osnovu prethodnog, strukturu Booleove algebre na količničkom skupu $\mathcal{B}(\mathbb{P}) = Prop_{/\sim}$ korektno definišemo na sledeći način:

- $\mathbf{0} = [\bot]$;
- $\mathbf{1} = [\top]$;
- $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \wedge \psi]$;
- $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$;
- $[\varphi]^c = [\neg\varphi]$;
- $[\varphi] \leqslant [\psi] \Leftrightarrow \models \varphi \Rightarrow \psi$.

Samu algebru $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ zovemo i Lindenbaumovom algebrom iskaznog računa nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$.

1.5.12 Lindenbaumova algebra teorije T

Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$. Na skupu $Sent\mathcal{L}$ rečenica jezika $\mathcal{L}$ definišimo binarnu relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{ako i samo ako} \quad T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi.$$

Sasvim slično kao i u prethodnom primeru, neka je

$$\mathcal{B}(T) = Sent\mathcal{L}_{/\sim}$$

i neka je Booleova struktura uvedena na isti način kao i u prethodnom primeru. Rezultujuću Booleovu algebru $\mathcal{B}(T)$ zovemo i Lindenbaumovom algebrom teorije T. Posebno, ako je T prazan skup, onda dobijamo Lindenbaumovu algebru jezika $\mathcal{L}$.

1.5.13 Primer Neka je $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ Lindenbaumova algebra, T neprotivrečna iskazna teorija i neka je

$$D = \{[\varphi] \in \mathcal{B}(\mathbb{P}) \mid T \vdash \varphi\}.$$

Lako se proverava da je D filter Lindenbaumove algebre.

U slučaju Booleovih algebri imamo finu korespodenciju između filtera i homomorfizama, a iz algebre znamo da takva korespodencija postoji između homomorfizama i kongruencija.

S jedne strane, ako je $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_1$ homomorfizam Booleovih algebri $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}_1$, onda je

$$D_h = \{a \in \mathcal{B} \mid h(a) = \mathbf{1}\}$$

filter u $\mathcal{B}$. Pokažimo ovo. Prvo, iz $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ sledi da $\mathbf{1} \in D_h$. Drugo, ako $a, b \in D_h$, onda je $h(a) = \mathbf{1}$ i $h(b) = \mathbf{1}$, a kako je

$$h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b),$$

imamo da je $h(a \wedge b) = \mathbf{1}$, pa $a \wedge b \in D_h$. Konačno, ako $a \in D_h$ i ako je $a \vee b = b$, onda je

$$h(b) = h(a \vee b) = h(a) \vee h(b) = \mathbf{1} \vee b = \mathbf{1},$$

pa i $b \in D_h$.

S druge strane, za proizvoljan filter D Booleove algebre $\mathcal{B}$ je sa

$$a \sim_D b \Leftrightarrow (\exists d \in D)(a \wedge d = b \wedge d)$$

dobro definisana jedna kongruencija algebre $\mathcal{B}$. Količnički homomorfizam $h_D : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_D$ definišemo sa

$$h(a) = a_D = \{b \in B \mid a \sim_D b\}.$$

1.5.14 Definicija Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i neka je skup $X \subseteq \mathcal{B}$ neprazan. Kažemo da skup X ima *svojstvo konačnog preseka* ako infimum svakog nepraznog konačnog podskupa A skupa X nije jednak $\mathbf{0}$.

Termin *konačan presek* dolazi otuda što je

$$\inf_{\langle P(X),\subseteq\rangle}\{A_1,\ldots,A_n\} = A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Izraze oblika $a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$ ćemo zvati konačnim presecima.

1.5.15 Primer Neka je X skup sa svojstvom konačnog preseka u Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ i neka je D skup svih onih elemenata b skupa $\mathcal{B}$ za koje postoji konačan neprazan $A \subseteq X$ takav da je

$$\inf_{\mathcal{B}} A \leqslant b.$$

Lako se pokazuje da je D filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. Za filter D kažemo i da je generisan skupom X.

1.5.16 Lema *Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i neka je D njen proizvoljan filter. Tada za svaki element a skupa B bar jedan od skupova $D \cup \{a\}$ i $D \cup \{a^c\}$ ima svojstvo konačnog preseka.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka postoje $d_1, d_2 \in D$ takvi da je

$$a \wedge d_1 = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad a^c \wedge d_2 = \mathbf{0}.$$

Tada iz prve jednakosti sledi da je $d_1 \leqslant a^c$, a iz druge sledi da je $d_2 \leqslant (a^c)^c = a$. Sada je $d_1 \wedge d_2 = \mathbf{0}$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je D filter. □

1.5.17 Definicija Kažemo da je filter D Booleove algebre $\mathcal{B}$ *ultrafilter* ako je maksimalan u smislu inkluzije.

Ako je D ultrafilter Booleove algebre $\mathcal{B}$, onda je količnicka algebra B_D izomorfna iskaznoj algebri. Navedimo još jednu važnu vezu između ultrafiltera u Lindenbaumovim algebrama i kompletnih neprotivrečnih teorija prvog reda.

S jedne strane, ako je T kompletna i neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$, onda je

$$D_T = \{[\varphi] \mid T \vdash \varphi\}$$

ultrafilter Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ jezika $\mathcal{L}$. S druge strane, ako je D ultrafilter u $\mathcal{B}(\mathcal{L})$, onda je

$$T_D = \{\varphi \mid [\varphi] \in D\}$$

kompletna i neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$. Korektnost uspostavljene korespodencije se sasvim lako proverava, te je ostavljamo za vežbu.

1.5.18 Teorema *Neka je D filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *D je ultrafilter;*
2. *$(\forall a \in \mathcal{B})(a \in D \ \vee a^c \in D)$;*
3. *$(\forall a, b \in \mathcal{B})(a \vee b \in D \Rightarrow a \in D \ \vee \ b \in D)$.*

Dokaz

1 ⇒ 2 Neka je $a \in \mathcal{B}$ proizvoljno. Na osnovu leme 1.5.16 bar jedan od skupova $D \cup \{a\}$ i $D \cup \{a^c\}$ ima svojstvo konačnog preseka. Pošto je svaki skup sa svojstvom konačnog preseka sadržan u nekom filteru (posmatramo sve elemente koji su veći od nekog konačnog preseka) i da je D ultrafilter, imamo da $a \in D$ ili $a^c \in D$.

2 ⇒ 3 Neka $a \vee b \in D$ i $a \notin D$. Tada po 2 imamo da $a^c \in D$, odakle sledi da $a^c \wedge (a \vee b) = a^c \wedge b \in D$. Kako je $a^c \wedge b \leqslant b$ i kako je D filter, mora biti i $b \in D$.

3 ⇒ 1 Neka $a \notin D$. S obzirom da $\mathbf{1} \in D$ i da je $\mathbf{1} = a \vee a^c$, po 3 sledi da $a^c \in D$. Odavde sledi da skup $D \cup \{a\}$ nema svojstvo konačnog preseka. Drugim rečima, D je inkluzijski maksimalan filter, tj. ultrafilter. □

1.5.19 Teorema o ultrafilteru

Svaki filter Booleove algebre $\mathcal{B}$ se može proširiti do ultrafiltera.

Dokaz

Neka je D proizvoljan filter Booleove algebre $\mathcal{B}$ i neka je F familija svih filtera Booleove algebre $\mathcal{B}$ koji su nadskupovi filtera D. Primetimo da je $F \neq 0$ jer $D \in F$. Lako se proverava da svaki lanac u parcijalnom uređenju $\langle F, \subseteq \rangle$ ima majorantu (unija po lancu), pa po Zornovoj lemi $\langle F, \subseteq \rangle$ ima maksimalni element, koji je zapravo traženi ultrafilter. $\square$

1.5.20 Lindenbaumova teorema

Svaka neprotivrečna teorija T jezika $\mathcal{L}$ se može proširiti do kompletne i neprotivrečne teorije jezika $\mathcal{L}$.

Dokaz

U ovom dokazu Lindenbaumove teoreme iskoristitićemo prethodno dokazanu teoremu o ultrafilteru. Dakle, neka je $\mathcal{B}(T)$ Lindenbaumova algebra teorije T. Tada skup

$$\{[\varphi] \mid \varphi \in T\}$$

ima svojstov konačnog preseka, pa je sadržan u nekom ultrafilteru D Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(T)$. Sada je

$$T_D = \{\varphi \mid [\varphi] \in D\}$$

kompletna i neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$ koja proširuje teoriju T. $\square$

1.5.21 Zadatak Dati direktan dokaz Lindenbaumove teoreme u slučaju kada je $\mathcal{L}$ najviše prebrojiv. Pomoću aksiome izbora uopštiti ovaj dokaz na slučaj jezika proizvoljno velike kardinalnosti.

Uputstvo

Kako je $\mathcal{L}$ najviše prebrojiv, to formula jezika $\mathcal{L}$ ima prebrojivo mnogo. Određenosti radi, neka je

$$For\mathcal{L} = \{\varphi_n \mid n \in \omega\}$$

(ω je prvi beskonačan ordinal - poistovećujemo ga sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$). Rekurzivno definišemo niz teorija $\langle T_n \mid n \in \omega\rangle$ na sledeći način:

- $T_0 = T$;
- $T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\varphi_n\} & , \quad T_n, \varphi_n \nvdash \perp \\ T_n \cup \{\neg\varphi_n\} & , \quad T_n, \varphi_n \vdash \perp \end{cases}$.

Pokazati da je teorija $T^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} T_n$ kompletno i neprotivrečno proširenje teorije T.

Ako je $|\mathcal{L}| = \kappa > \omega$, onda je

$$For\mathcal{L} = \{\ \varphi_\xi \mid \xi < \kappa\},$$

pa se konstrukcija kompletnog i neprotivrečnog proširenja T^* date teorije T vrši na sledeći način:

- $T_0 = T$;
- $T_{\xi+1} = \begin{cases} T_\xi \cup \{\varphi_\xi\} & , \quad T_\xi, \varphi_\xi \nvdash \perp \\ T_\xi \cup \{\neg\varphi_\xi\} & , \quad T_\xi, \varphi_\xi \vdash \perp \end{cases}$;
- $T_\alpha = \bigcup\limits_{\xi\in\alpha} T_\xi$, u slučaju graničnog $\alpha > 0$;
- $T^* = \bigcup\limits_{\xi\in\kappa} T_\xi$.

$\square$

1.5.22 Zadatak Neka su $F(\bar{x})$ i $G(\bar{x})$ proizvoljni termi jezika $\mathcal{L}_{BA}$. Dokazati da Booleovski identitet

$$\forall \bar{x}(F(\bar{x}) = G(\bar{x}))$$

važi u svim Booleovim algebrama ako i samo ako važi u iskaznoj algebri. Drugim rečima, Booleovski identiteti nisu ništa drugo do tautologije.

Uputstvo

Pretpostavimo da Booleovski identitet

$$\forall \bar{x}(F(\bar{x}) = G(\bar{x}))$$

ne važi u nekoj Booleovoj algebri $\mathcal{B}$, tj. da postoje $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{B}$ takvi da je

$$F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) \neq G^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Tada postoji ultrafilter D u $\mathcal{B}$ takav da

$$F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) \in D \;\text{ i }\; G^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n) \notin D.$$

Odavde sledi da je

$$h_D(F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)) \neq h_D(G^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

a kako je

$$h_D(F^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{B}_D}(h_D(a_1), \ldots, h_d(a_n))$$

(slično i za G) i kako je $\mathcal{B}_D$ iskazna algebra, imamo da ni u iskaznoj algebri ne važi pomenuti identitet. $\square$

1.5.23 Definicija Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra.

- Sa $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$ ćemo označavati familiju svih ultrafiltera Booleove algebre $\mathcal{B}$;

- Neka je $a \in \mathcal{B}$ proizvoljno. Sa a^* ćemo označavati familiju svih ultrafiltera Booleove algebre $\mathcal{B}$ koji sadrže a.

Neposredno se proverava da važi:

- $(a \wedge b)^* = a^* \cap b^*$;
- $(a \vee b)^* = a^* \cup b^*$;
- $(a^c)^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B}) \setminus a^*$;
- $\mathbf{0}^* = 0$;
- $\mathbf{1}^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B})$.

1.5.24 Stoneova dualnost

Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna Booleova algebra. Tada:

1. $\langle \mathcal{B}, \wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle \cong \langle S_{\mathcal{B}}, \cap, \cup, ^c, \subseteq, \mathbf{0}^*, \mathbf{1}^* \rangle$.

   Drugim rečima, svaka Booleova algebra izomorfna je nekoj algebri skupova;

2. *Familija $S_{\mathcal{B}} = \{a^* \mid a \in \mathcal{B}\}$ generiše topologiju na skupu* $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$ *u kojoj je* $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$ *totalno nepovezan kompaktan topološki prostor.*

Dokaz

2 Kako je $a^* \cap b^* = (a \wedge b)^*$ i kako je $\bigcup S_{\mathcal{B}} = \mathrm{uf}(\mathcal{B})$, familija $S_{\mathcal{B}}$ generiše topologiju na $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$. Pošto je svaki od skupova a^* otvoreno zatvoren ($a^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B}) \setminus (a^c)^*$) i da je $\langle \mathrm{uf}(\mathcal{B}), S_{\mathcal{B}} \rangle$ Hausdorffov prostor (za proizvoljne međusobno različite $D_1, D_2 \in \mathrm{uf}(\mathcal{B})$ i $a \in B$ tako da $a, a^c \neq \mathbf{0}$ imamo da su a^* i $(a^c)^*$ disjunktne bazne okoline koje separiraju D_1 i D_2), $\langle \mathrm{uf}(\mathcal{B}), S_{\mathcal{B}} \rangle$ je totalno nepovezan.

Ostaje da pokažemo kompaktnost. Neka je $\{a^*_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ bazni pokrivač skupa $\mathrm{uf}(\mathcal{B})$. Tada skup $\{a^c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ nema svojstvo konačnog preseka (u suprotnom bi bio sadržan u nekom ultrafilteru D koji ne može biti sadržan ni u jednom od skupova a_α^*), pa postoje $a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}$ takvi da je

$$(a_{\alpha_1}^c) \wedge \cdots \wedge (a_{\alpha_n}^c) = \mathbf{0},$$

odakle sledi da je

$$a_{\alpha_1}^* \cup \cdots \cup a_{\alpha_n}^* = (a_{\alpha_1} \vee \cdots \vee a_{\alpha_n})^* = \mathbf{1}^* = \mathrm{uf}(\mathcal{B}).$$

1 Neka je $a^* = b^*$. Tada je i $a \wedge b^c = \mathbf{0}$, jer bi u suprotnom postojao ultrafilter D takav da $a, b^c \in D$, što je u suprotnosti sa $a^* = b^*$. Sada iz $a \wedge b^c = \mathbf{0}$ sledi da je $a \leqslant b$, a kako se na potpuno isti način pokazuje da je $b \leqslant a$, mora biti $a = b$.

Ovim smo pokazali da je sa $a \mapsto a^*$ dobro definisano 1-1 preslikavanje skupa $\mathcal{B}$ na skup $S_{\mathcal{B}}$. Sasvim lako se proverava da je uočeno preslikavanje izomorfizam. □

1.5.25 Lema *Neka su $D_1, \dots, D_n, E_1, \dots, E_m$ različiti ultrafilteri Booleove algebre $\mathcal{B}$. Tada je*

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \cap (\mathcal{B} \setminus E_1) \cap \cdots \cap (\mathcal{B} \setminus E_m) \neq 0.$$

Dokaz

Kako su u pitanju različiti ultrafilteri, to postoje

$$a_{ij} \in D_i \cap (\mathcal{B} \setminus E_j),$$

pri čemu je $i \in \{1, \dots, n\}$ i $j \in \{1, \dots, m\}$. Neka je

$$b = (a_{11} \wedge \cdots \wedge a_{1m}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \wedge \cdots \wedge a_{nm}).$$

Lako se vidi da b pripada traženom preseku. □

1.5.26 Lema *Neka je I beskonačan skup iskaznih slova i neka je $\mathcal{B}(I)$ odgovarajuća Lindenbaumova algebra. Tada važi :*

1. $|\mathcal{B}(I)| = |I|$;
2. $S_{\mathcal{B}(I)} \approx {}^I 2$;
3. $|S_{\mathcal{B}(I)}| = 2^{|I|}$.

Dokaz

Primetimo da se 1 lako dobija korišćenjem idempotentnosti beskonačnih kardinala, dok je 3 neposredna posledica od 2. Stoga dokažimo 2.

Neka je D proizvoljan ultrafilter Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(I)$. Tada je

$$T_D = \{\varphi \mid [\varphi] \in D\}$$

kompletna i neprotivrečna iskazna teorija, pa ima jedinstveni model

$$v_D(i) = \begin{cases} 1 & , \ [i] \in D \\ 0 & , \ [\neg i] \in D \end{cases}$$

pri čemu $i \in I$. S druge strane, proizvoljnoj valuaciji

$$v : I \longrightarrow 2$$

odgovara tačno jedna maksimalna neprotivrečna (samim tim i kompletna) iskazna teorija T_v, pa je

$$D_v = \{[\varphi] \mid \varphi \in T_v\}$$

jedinstveni ultrafilter Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(I)$ koji odgovara valuaciji v. Dakle, preslikavanje $D \mapsto v_D$ je bijekcija. Homeomorfnost neposredno sledi iz činjenice da baznom skupu

$$(\bigvee_{r=1}^{n} \bigwedge_{s=1}^{m} [i_s^{a_{rs}}])^*$$

u $S_{\mathcal{B}(I)}$ (i^0 je po definiciji iskazna formula $\neg i$, dok je i^1 po definiciji iskazno slovo i) odgovara bazni skup

$$\bigcup_{r=1}^{n} \bigcap_{s=1}^{m} \pi_{i_s}^{-1}[\{a_{rs}\}]$$

u Cantorovom prostoru ${}^I 2$. □

1.5.27 Teorema *Neka je I beskonačan skup kardinalnosti κ. Tada Booleova algebra $\langle P(I), \subseteq\rangle$ ima 2^{2^κ} neglavnih ultrafiltera.*

Napomena Ova teorema je poznatija kao Kantorovič-Pospišl teorema. Mi smo se opredelili da prikažemo dokaz Žarka Mijajlovića (videti [79]).

Dokaz

Kako je svaki ultrafilter Booleove algebre $\langle P(I), \subseteq\rangle$ podskup skupa $P(I)$, to ultrafiltera ove algebre ne može biti više od 2^{2^κ}. Pošto je glavni filter ultrafilter ako i samo ako je generisan singltonom, vidimo da glavnih ultrafiltera Booleove algebre $\langle P(I), \subseteq\rangle$ ima tačno κ. Imajući na umu i lemu 1.5.26, vidimo da je dovoljno pokazati da Booleova algebra $\langle P(\mathcal{B}(I)), \subseteq\rangle$ ima bar 2^{2^κ} ultrafiltera (naravno, ovde je $\mathcal{B}(I)$ Lindenbaumova algebra nad skupom iskaznih slova I).

Neka je $v : S_{\mathcal{B}(I)} \longrightarrow 2$ proizvoljna funkcija. Uz dogovor da je $D^0 = \mathcal{S}_{\mathcal{B}(I)} \setminus D$ i $D^1 = D$, lema 1.5.25 nam obezbeđuje da familija

$$\{D^{v(D)} | D \in S_{\mathcal{B}(I)}\}$$

ima svojstvo konačnog preseka, pa je sadržana u nekom ultrafilteru E_v Booleove algebre $\langle P(\mathcal{B}(I)), \subseteq\rangle$. Kako različitim funkcijama v_1 i v_2 odgovaraju različiti ultrafilteri E_{v_1} i E_{v_2}, Booleova algebra $P(\mathcal{B}(I))$ ima bar

$$2^{|S_{\mathcal{B}(I)}|} = 2^{2^\kappa}$$

ultrafiltera, a to je i trebalo dokazati. □

Za $S \subseteq \mathcal{B}$ preslikavanje $\mu : S \longrightarrow [0,1]$ je *parcijalna mera* sa domenom S ako važi:

- $\mu(\mathbf{1}) = 1$, $\mu(\mathbf{0}) = 0$;
- ako je $a \leqslant b$, onda je $\mu(a) \leqslant \mu(b)$;
- ako je $\mathbf{0} < a, b$ i $a \wedge b = \mathbf{0}$, onda je

$$\mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b).$$

Interesuju nas samo takvi podskupovi S za koje prethodna definicija ima smisla. Ako je $S = \mathcal{B}$, mera μ je totalna (nema μ-nemerljivih elemenata $\mathcal{B}$).

Ako je $\mathcal{B} = P(X)$, onda skup X zovemo i *nosačem*, odnosno *indeksom* mere, i pišemo

$$X = \operatorname{ind}(\mu).$$

Pojmove *norme* i *aditivnosti* mere uvodimo redom sa

$$\|\mu\| = \min\{|X| \ \mid \ X \in \operatorname{dom}(\mu)\},$$

odnosno

$$\operatorname{add}(\mu) = \min\{|Y| \mid Y \subseteq \operatorname{dom}(\mu) \wedge (\forall y \in Y)(\mu(y) = 0) \wedge \mu(\bigcup Y) > 0\}.$$

Za meru μkažemo da je σ-*aditivna* ukoliko je $\operatorname{add}(\mu) = \omega_1$.

Uobičajeno je da se za meru odmah traži da bude σ-aditivna. Pošto su nam ovde interesantne i mere koje su samo konačno aditivne i pošto se ovde bavimo i detaljnijim ispitivanjem aditivnosti mere, određenje aditivnosti izdvajamo posebno. Ovako, svaki fulter u Booleovoj algebri je binarna mera. Naime, za filter D u $\mathcal{B}$ i dualni ideal I_D imamo da je $D \cup I_D \subseteq \mathcal{B}$ dobar domen mere koja se dobija sa

$$\mu_D(a) = \begin{cases} 1 & , \quad a \in D \\ 0 & , \quad a \notin D \end{cases} .$$

Elementi skupa $\mathcal{B} \setminus (D \cup I_D)$ su μ-nemerljivi.

Očigledno je mera μ_D totalna ukoliko je D ultrafilter. Takođe, na ultrafiltere se prenose definicije norme i aditivnosti. Na ovaj način dovedeni su u vezu i pojmovi mere i homomorfizma u proizvoljnim Booleovim algebrama, sa velikim preklapanjem u slučaju kada se radi o binarnim merama.

1.6 Gödelova teorema potpunosti

U ovoj sekciji ćemo dokazati medjusobnu ekvivalentnost nekoliko reformulacija teoreme potpunosti predikatskog računa prvog reda. Sami dokazi su preuzeti iz [79].

1.6.1 Gödelova teorema potpunosti

Svaka neprotivrečna teorija predikatskog računa prvog reda ima model.

1.6.2 Potpunost PR1

Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Tada za svaku formulu φ jezika $\mathcal{L}$ važi

$$T \vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad T \models \varphi.$$

1.6.3 Stav kompaktnosti PR1

Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$. Ako svaki konačan podskup teorije T ima model, onda i teorija T ima model.

1.6.4 Teorema o ultrafilteru

Neka je B proizvoljna Booleova algebra i neka skup $A \subseteq B$ ima svojstvo konačnog preseka. Tada postoji ultrafilter D Booleove algebre B takav da je $A \subseteq D$.

1.6.5 Kompaktnost ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \perp\}$

Neka je $\{\top, \perp\}$ snabdeven diskretnom topologijom (ceo partitivni skup) i neka je $\mathbb{P}$ beskonačan skup. Tada je ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \perp\}$ kompaktan topološki prostor u topologiji Tihonova.

1.6.6 Stav kompaktnosti IR

Neka je T iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Ako svaki konačan podskup teorije T ima model, onda i teorija T ima model.

1.6.7 Postojanje modela

Neka je T neprotivrečna iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Tada teorija T ima model.

1.6.8 Potpunost IR

Neka je T proizvoljna iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Tada za svaku iskaznu formulu φ nad istim skupom iskaznih slova važi

$$T \vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad T \models \varphi.$$

Dokazaćemo sledeće lance implikacija:

- 1.6.1 $\Rightarrow$ 1.6.2 $\Rightarrow$ 1.6.3 $\Rightarrow$ 1.6.4 $\Rightarrow$ 1.6.1;
- 1.6.5 $\Rightarrow$ 1.6.7 $\Rightarrow$ 1.6.8 $\Rightarrow$ 1.6.6 $\Rightarrow$ 1.6.5;
- 1.6.6 $\Leftrightarrow$ 1.6.4.

1.6.1 $\Rightarrow$ 1.6.2

Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$ i neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$. Ako $T \vdash \varphi$, onda na osnovu zadatka 1.4.8 imamo da $T \models \varphi$. Stoga pretpostavimo da $T \nvdash \varphi$. Tada je $T \cup \{\neg\varphi\}$ neprotivrečna teorija. Zaista,

$$\begin{array}{lll} & T, \neg\varphi \vdash \neg(\varphi \Rightarrow \varphi) & \\ \text{akko} & T \vdash \neg\varphi \Rightarrow \neg(\varphi \Rightarrow \varphi) & 1.2.8(3) \\ \text{akko} & T \vdash (\varphi \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi & 1.2.8(10) \\ \text{akko} & T \vdash \varphi & 1.2.8(9) \text{ i } \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \end{array}$$

a kako $T \nvdash \varphi$, na osnovu prethodnog teorija $T \cup \{\neg\varphi\}$ mora biti neprotivrečna. Na osnovu 1.6.1 teorija $T \cup \{\neg\varphi\}$ ima model, odakle po definiciji sledi da $T \not\models \varphi$.

1.6.2 $\Rightarrow$ 1.6.3

Pretpostavimo da teorija T nema model. Tada po 1.6.2

$$T \vdash \neg(x = x).$$

Kako je svaki formalni dokaz konačan niz formula, postoje formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ takve da

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \neg(x = x),$$

odakle sledi da teorija $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ nema model.

$1.6.3 \Rightarrow 1.6.4$

Neka je $\mathfrak{B} = \langle B, \wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ proizvoljna Booleova algebra i neka skup $A \subseteq B$ ima svojstvo konačnog preseka. Jezik Booleovih algebri $\mathcal{L} = \{\wedge, \vee, ^c, \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ proširimo unarnim relacijskim simbolom U i skupom novih simbola konstanti $\{c_b \mid b \in B\}$. Ovo proširenje jezika $\mathcal{L}$ označimo sa $\mathcal{L}^*$. Uočimo sledeće teorije jezika $\mathcal{L}^*$:

- $T_1 = Th(\mathfrak{B}_B)$;
- $T_2 = \{U(\mathbf{1}), \neg U(\mathbf{0})\}$;
- $T_3 = \{U(c_a) \wedge U(c_b) \Rightarrow U(c_{a \wedge b}) \mid a, b \in B\}$;
- $T_4 = \{U(c_a) \Rightarrow U(c_b) \mid a \leqslant b\}$;
- $T_5 = \{U(c_a) \mid a \in A\}$;
- $T_6 = \{U(c_b) \vee U(c_{b^c}) \mid b \in B\}$;
- $T = \bigcup\limits_{i=1}^{6} T_i$.

Dokažimo da svaki konačan podskup teorije T ima model. Neka su

$$X = \{U(c_{a_1}), \ldots, U(c_{a_m})\} \subseteq T_5$$

i

$$Y = \{U(c_{b_1}) \vee U(c_{b_1'}), \ldots, U(c_{b_n}) \vee U(c_{b_n'})\} \subseteq T_6$$

proizvoljni. Kako skup A ima svojstvo konačnog preseka, mora biti

$$a = a_1 \cdots a_m > 0.$$

Odavde sledi da postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ takvi da je

$$b_0 = a \wedge b_1^{\alpha_1} \wedge b_n^{\alpha_n} > 0,$$

pri čemu je $b^1 = b$ i $b^0 = b^c$. Sada se sasvim lako proverava da je model $\mathcal{M}$ jezika $\mathcal{L}^*$ definisan sa

- $M = B$
- $\wedge^{\mathcal{M}} = \wedge$
- $\vee^{\mathcal{M}} = \vee$
- $\leqslant^{\mathcal{M}} = \leqslant$
- $\mathbf{0}^{\mathcal{M}} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{1}^{\mathcal{M}} = \mathbf{1}$
- $c_b^{\mathcal{M}} = b$, $b \in B$
- $U^{\mathcal{M}} = \{b \in B \mid b_0 \leqslant b\}$

ujedno i model teorije $T_1 \cup \cdots \cup T_4 \cup X \cup Y$.

Ovim smo pokazali da svaki konačan podskup teorije T ima model, pa po 1.6.3, teorija T ima model $\mathcal{N}$. Kako $\mathcal{N} \models T_1$, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathfrak{B}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N} \restriction \mathcal{L}$, tj. da je

$$c_b^{\mathcal{N}} = b, \quad b \in B.$$

Neka je

$$D = U^{\mathcal{N}} \cap B.$$

Pošto je $\mathcal{N}$ model teorija T_2, T_3, T_4 i T_6, skup D je ultrafilter Booleove algebre B. Konačno, kako $\mathcal{N} \models T_5$, mora biti i $A \subseteq D$.

1.6.4 $\Rightarrow$ 1.6.1

Prvo ćemo dokazati sledeću pomoćnu lemu:

1.6.9 Lema *Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$, $\exists x\varphi(x)$ rečenica jezika $\mathcal{L}$ i neka je c novi simbol konstante. Tada je teorija $T \cup \{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)\}$ takođe neprotivrečna.*

Dokaz Pretpostavimo da je teorija $T \cup \{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)\}$ protivrečna. Tada

$$T, \exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c) \vdash \neg\forall x(x = x),$$

odakle po 1.2.8(3) sledi da

$$T \vdash (\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)) \Rightarrow \neg(x = x),$$

odakle po 1.2.8(10) sledi da

$$T \vdash \neg\neg\forall x(x = x) \Rightarrow \neg(\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)).$$

Pošto $T \vdash \neg\neg\forall x(x = x)$, po 1.2.8(9) imamo da

$$T \vdash \neg(\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)),$$

odakle po 1.2.8(5) sledi da

$$T \vdash \exists x\varphi(x) \quad \text{i} \quad T \vdash \neg\varphi(c).$$

Međutim, c je nov simbol konstante, pa na osnovu leme o novoj konstanti sledi da

$$T \vdash \forall x\neg\varphi(x).$$

Najzad, kako

$$\exists x\varphi(x), \forall x\neg\varphi(x) \vdash \psi,$$

teorija T mora biti protivrečna. Kontradikcija. $\square$

Neka je T neprotivrečna teorija jezika $\mathcal{L}$. Rekurzivno definišimo jezik $\mathcal{L}^*$ na sledeći način:

- $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}$;
- $\mathcal{L}_{n+1} = \{c_{\exists x\varphi(x)} \mid \exists x\varphi(x) \in Sent\mathcal{L}_n\}$, pri čemu je $Sent\mathcal{L}_n$ skup svih rečenica jezika $\mathcal{L}_n$, a $c_{\exists x\varphi(x)}$ su novi simboli konstanti;
- $\mathcal{L}^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{L}_n$.

Teoriju T^* jezika $\mathcal{L}^*$ rekurzivno definišimo na sledeći način:

- $T_0 = T$;

- T_{n+1} je kompletno i neprotivrečno proširenje teorije

$$T_n \cup \{\exists x\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c_{\exists x\varphi(x)}) \mid \exists x\varphi(x) \in Sent\mathcal{L}_n\};$$

- $T^* = \bigcup\limits_{n\in\omega} T_n$.

Primetimo da prethodna lema i Lindenbaumova teorema (teorema 1.5.20) obezbeđuju korektnost konstrukcije, kao i da iz konstrukcije neposredno sledi da je teorija T^* kompletna i neprotivrečna. Naravno, ovde se bitno koristi činjenica da smo Lindenbaumovu teoremu dokazali pomoću teoreme o ultrafilteru.

Na skupu $Const\mathcal{L}^*$ konstanti jezika $\mathcal{L}^*$ definišimo binarnu relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$c \sim d \quad \text{ako i samo ako} \quad T^* \vdash c = d.$$

Očigledno je $\sim$ relacija ekvivalencije. Sa $[c]$ ćemo označavati odgovarajuću klasu ekvivalencije simbola knstante c u relaciji $\sim$.

Henkinov model $\mathcal{M}$ teorije T^* definišemo na sledeći način:

- $M = Const\mathcal{L}^*/\sim$;
- $c^{\mathcal{M}} = [c]$;
- $F^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n]) = [c_{\exists x(x=F(c_1,\ldots,c_n))}]$;
- $R^{\mathcal{M}}([c_1], \ldots, [c_n])$ ako i samo ako $T^* \vdash R(c_1, \ldots, c_n)$.

Korektnost definicije neposredno sledi iz činjenice da ukoliko

$$T^* \vdash c_1 = d_1 \wedge \cdots \wedge c_n = d_n,$$

onda

$$T^* \vdash F(c_1, \ldots, c_n) = F(d_1, \ldots, d_n)$$

i

$$T^* \vdash R(c_1, \ldots, c_n) \Leftrightarrow R(d_1, \ldots, d_n).$$

Indukcijom po složenosti dokazujemo da za svaku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}^*$ važi

$$T^* \vdash \varphi \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathcal{M} \models \varphi. \tag{1.3}$$

U slučaju kada je φ atomična rečenica, (1.3) sledi direktno iz definicije modela $\mathcal{M}$. Pretpostavimo stoga da je rečenica φ veće složenosti i da (1.3) važi za svaku rečenucu jezika $\mathcal{L}^*$ složenosti manje od φ (induktivna hipoteza). Razlikujemo tri slučaja:

φ je oblika $\neg\psi$. S jedne strane, ako $T^* \vdash \neg\psi$, onda $T^* \nvdash \psi$, pa po induktivnoj hipotezi $\mathcal{M} \not\models \psi$, odakle sledi da $\mathcal{M} \models \neg\psi$. S druge strane, ako $\mathcal{M} \models \neg\psi$, onda $\mathcal{M} \not\models \psi$, odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $T^* \nvdash \psi$, odakle zbog kompletnosti teorije T^* sledi da $T^* \vdash \neg\psi$.

φ je oblika $\psi \wedge \theta$. S jedne strane, ako $T^* \vdash \psi \wedge \theta$, onda $T^* \vdash \psi$ i $T^* \vdash \theta$, odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $\mathcal{M} \models \psi$ i $\mathcal{M} \models \theta$, pa $\mathcal{M} \models \psi \wedge \theta$. Sasvim slično sledi i obratna implikacija.

φ je oblika $\exists x\psi(x)$. S jedne strane, ako $T^* \vdash \exists x\psi(x)$, onda zbog $T^* \vdash \exists x\psi(x) \Rightarrow \psi(c_{\exists x\psi(x)})$ i 1.2.8(9) imamo da

$$T^* \vdash \psi(c_{\exists x\psi(x)}),$$

odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $\mathcal{M} \models \psi(c_{\exists x\psi(x)})$, pa mora biti i $\mathcal{M} \models \exists x\psi(x)$.

S druge strane, ako $T^* \nvdash \exists x\psi(x)$, onda zbog kompletnosti teorije T^* imamo da $T^* \vdash \forall x\neg\psi(x)$. Neka je c proizvoljan simbol konstante jezika $\mathcal{L}^*$. Pošto $\vdash \forall x\neg\psi(x) \Rightarrow \neg\psi(c)$, na osnovu 1.2.8(9) imamo da

$$T^* \vdash \neg\psi(c),$$

odakle po induktivnoj hipotezi $\mathcal{M} \models \neg\psi(c)$. Kako ovo važi za svaki simbol konstante c jezika $\mathcal{L}^*$, imamo da

$$\mathcal{M} \not\models \exists x\psi(x)$$

(svaki element skupa M je oblika $[c]$ za neki simbol konstante c jezika $\mathcal{L}^*$).

1.6.5 $\Rightarrow$ 1.6.7

U dokazu ove implikacije neophodni su nam razni pojmovi opšte topologije, koje zbog obima ne možemo na ovom mestu navesti. Izuzetno lep uvod u topologiju čitalac može naći u [83].

Neka je T neprotivrečna iskazna teorija. S obzirom na posledicu **??**, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je svaka formula $\varphi \in T$ oblika

$$\bigvee_{i=1}^{m_\varphi} \bigwedge_{j=1}^{n_\varphi} \pm p_{ij}^{\varphi}.$$

Skup $M(\varphi)$ svih valuacija $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ pri kojima je formula φ tačna oblika

$$M(\varphi) = \bigcup_{i=1}^{m_\varphi} \bigcap_{j=1}^{n_\varphi} M(\pm p_{ij}^{\varphi}),$$

pa je otvoreno–zatvoren u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$, jer je konačna unija baznih skupova koji su otvoreno–zatvoreni. Napomenimo da je

$$M(p) = \{v \in {}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\} \mid v(p) = \top\}$$

i da je

$$M(\neg p) = \{v \in {}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\} \mid v(p) = \bot\}.$$

Sada je

$$X = \{M(\varphi) \mid \varphi \in T\}$$

familija zatvorenih skupova u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ sa svojstvom konačnog preseka, jer zbog neprotivrečnosti teorije T za prozivoljne iskazne formule $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in T$ važi

$$M(\varphi_1) \cap \dots \cap M(\varphi_n) = M(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \neq \emptyset.$$

Po 1.6.5 je ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ kompaktan topološki prostor, pa je $\bigcap X \neq \emptyset$. Odavde sledi da je svaka valuacija iz $\bigcap X$ model teorije T.

1.6.7 $\Rightarrow$ 1.6.8 $\Rightarrow$ 1.6.6

Sasvim slično kao i 1.6.1 $\Rightarrow$ 1.6.2 $\Rightarrow$ 1.6.3.

1.6.6 $\Rightarrow$ 1.6.5

Neka je $\{A_i \mid i \in I\}$ familija zatvorenih skupova u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ sa svojstvom konačnog preseka. Za svako $i \in I$ neka je T_i skup svih iskaznih formula φ koje su tačne pri svim valuacijama iz A_i i neka je

$$T = \bigcup\{T_i \mid i \in I\}.$$

Primetimo da je svaki od skupova T_i neprazan jer je svaki zatvoren skup u ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ presek skupova oblika

$$\bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}\pi^{-1}_{p_{ij}}(\pm\top)$$

($v \in \pi^{-1}_{p_{ij}}(\pm\top)$ akko $v(p_{ij}) = \pm\top$, $+\top = \top$, $-\top = \bot$), koji su ustvari skupovi svih modela formula oblika

$$\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n}\pm p_{ij}.$$

Neka $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in T$ i neka je svaka od formula φ_j tačna pri svim valuacijama iz A_{i_j}. Sada skup $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ima model jer je

$$A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n} \neq \emptyset.$$

Po 1.6.6 teorija T ima model. Konačno, na osnovu izbora teorije T neposredno sledi da svaki njen model pripada svim skupovima A_i, odakle sledi da je $\bigcap\{A_i \mid i \in I\}$ neprazan, čime je pokazano da je prostor ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ kompaktan.

1.6.6 $\Rightarrow$ 1.6.4

Neka je $\langle B, \wedge, \vee, {}^c \leqslant, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ proizvoljna Booleova algebra i neka skup $A \subseteq B$ ima svojstvo konačnog preseka. Definišimo iskaznu teoriju T na sledeći način:

- $\mathbb{P} = \{p_b \mid b \in B\}$;
- $T_1 = \{p_1, \neg p_0\}$;

- $T_2 = \{p_a \mid a \in A\}$;
- $T_3 = \{p_a \wedge p_b \Rightarrow p_{a \wedge b} \mid a, b \in B\}$;
- $T_4 = \{p_a \Rightarrow p_b \mid a \leqslant b\}$;
- $T_5 = \{p_b \vee p_{b^c} \mid b \in B\}$;
- $T = T_1 \cup \cdots \cup T_5$.

Dokažimo da svaki konačan podskup iskazne teorije T ima model. U tom cilju, neka su

$$X = \{p_{a_1}, \ldots, p_{a_m}\} \subseteq T_2$$

i

$$Y = \{p_{b_1} \vee p_{b_1^c}, \ldots, p_{b_n} \vee p_{b_n^c}\} \subseteq T_5$$

proizvoljni. Skup A ima svojstvo konačnog preseka u B, pa je

$$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_m > \mathbf{0}.$$

Odavde sledi da postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \{0, 1\}$ takvi da je

$$b_0 = a \wedge b_1^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge b_n^{\alpha_n} > \mathbf{0},$$

pri čemu je $b^1 = b$ i $b^0 = b^c$. Sada se sasvim lako proverava da je valuacija $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ definisana sa

$$v(p_b) = \begin{cases} \top & , \quad b_0 \leqslant b \\ \bot & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

model teorije $T_1 \cup T_3 \cup T_4 \cup X \cup Y$. Na osnovu 1.6.6 teorija T ima model v. Definišimo skup D sa

$$D = \{b \in B \mid v(p_b) = \top\}.$$

Lako se proverava da je D ultrafilter Booleove algebre B koji proširuje dati skup A.

1.6.4 $\Rightarrow$ 1.6.6

Neka je T iskazna teorija nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$ čiji svaki konačan podskup ima model i neka je $B(\mathbb{P})$ Lindenbaumova algebra iskaznog računa nad skupom iskaznih slova $\mathbb{P}$. Definišimo skup $A \subseteq B(\mathbb{P})$ sa

$$A = \{[\varphi] \mid \varphi \in T\}.$$

Kako svaki konačan podskup teorije T ima model, na osnovu teoreme 1.1.11 sledi da skup A ima svojstvo konačnog preseka u Lindenbaumovoj algebri $B(\mathbb{P})$, pa je po 1.6.4 sadržan u nekom ultrafilteru D iste algebre. Valuaciju $v : \mathbb{P} \longrightarrow \{\top, \bot\}$ definišimo na sledeći način:

$$v(p) = \begin{cases} \top & , \quad [p] \in D \\ \bot & , \quad [\neg p] \in D \end{cases} .$$

Napomenimo da korektnost definicije sledi iz činjenice da je D ultrafilter Lindenbaumove algebre, pa za svako iskazno slovo p tačno jedna od klasa ekvivalencije $[p]$ i $[\neg p]$ pripada D. Pokažimo da je valuacija v model teorije T. Neka $\varphi \in T$ i neka je

$$\vdash \varphi \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \pm p_{ij}.$$

Tada je $[\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \pm p_{ij}] = [\varphi] \in D$, a kako je

$$[\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} \pm p_{ij}] = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} [\pm p_{ij}]$$

i kako je D ultrafilter, to postoji $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tako da

$$\prod_{j=1}^{n} [\pm p_{i_0 j}] \in D.$$

Sada je svaka od iskaznih formula $\pm p_{i_0 j}$ tačna pri valuaciji v, odakle sledi da je i formula φ tačna pri valuaciji v.

1.7 Löwenheim–Skolem-Tarski teoreme

Neka su $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ i $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ modeli jezika prvog reda $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{M}$ podmodel modela $\mathcal{N}$. Za formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}$ reći ćemo da je *apsolutna* za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ ako za svaki izbor elemenata $a_1, \ldots, a_n$ skupa M važi

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathcal{N} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]. \tag{1.4}$$

Iz definicije pojma podmodela neposredno sledi da su atomične formule apsolutne za $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, a iz definicije relacije zadovoljenja neposredno sledi da je skup formula apsolutnih za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoren za Booleovske kombinacije (ako su formule φ i ψ apsolutne, onda su takve i formule $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ i $\varphi \Leftrightarrow \psi$).

1.7.1 Teorema[Tarski-Vaught] *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ modeli jezika prvog reda $\mathcal{L}$ i neka je $\mathcal{M}$ podmodel modela $\mathcal{N}$. Tada je $\mathcal{M}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N}$ ako i samo ako je svaka formula jezika $\mathcal{L}$ oblika $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ apsolutna za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$.*

Dokaz

Ako je model $\mathcal{M}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N}$, onda su po definiciji sve formule jezika $\mathcal{L}$ apsolutne za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, pa time i one oblika $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Obratno, ako su formule oblika $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ apsolutne za modele $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$, onda skup apsolutnih formula za ove modele sadrži atomične formule i zatvoren je za Booleovske kombinacije i egzistencijalnu kvantifikaciju, pa sadrži sve formule. $\square$

1.7.2 Donja Löwenheim-Skolem-Tarski teorema

Neka je $\mathcal{N} = \langle N, \ldots \rangle$ beskonačan model (N je beskonačan skup) jezika $\mathcal{L}$ i neka je A proizvoljan podskup skupa N. Tada model $\mathcal{N}$ ima elementarni podmodel $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ takav da je

$$|M| = \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}.$$

Dokaz

Neka je $f : P(N) \longrightarrow N$ funkcija izbora skupa N (za svaki neprazan $X \subseteq N$ je $f(X) \in X$). Skup M rekurzivno konstruišemo na sledeći način:

- $M_0 = \{c^{\mathcal{N}} \mid c \in Const\mathcal{L}\} \cup A$;
- Neka je skup M_n konstruisan. Skup M_{n+1} je jedinstveni nadskup skupa M_n sa sledećim svojstvima:
  1. Za proizvoljan funkcijski znak F jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne elemente $a_1, \ldots, a_m \in M_n$ (m je arnost znaka F) važi
  $$F^{\mathcal{N}}(a_1, \ldots, a_m) \in M_{n+1};$$
  2. Za proizvoljnu formulu $\exists x \varphi(x, y_1, \ldots, y_k)$ (ako je $k = 0$, podrazumevamo da je x jedina slobodna promenljiva) jezika $\mathcal{L}$ i proizvoljne $a_1, \ldots, a_k \in M_n$, ako je
  $$\{a \in N \mid \mathcal{N} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_k]\} \neq \emptyset,$$
  onda
  $$f(\{a \in N \mid \mathcal{N} \models \varphi[a, a_1, \ldots, a_k]\}) \in M_{n+1};$$
- $M = \bigcup\limits_{n<\omega} M_n$.

Na osnovu idempotentnosti beskonačnih kardinala (videti poglavlje o kardinalnoj aritmetici) imamo da je

$$|For\mathcal{L}| = \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\},$$

pa u koraku 2 skupu M_{n+1} dodajemo

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |M_n|^k + \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\} &= \aleph_0 \cdot |M_n| + \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|\} \\ &= \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |M_n|\} \\ &= \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}\end{aligned}$$

elemenata, uz uslov da je $|M_n| \leqslant \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}$. Isto kardinalno ograničenje važi i u slučaju 1, a kako je po definiciji

$$|M_0| \leqslant \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\},$$

zaključujemo da je, počevši od M_1 svaki od skupova M_n kardinalnosti $\max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |A|\}$, odakle sledi da je i skup M iste kardinalnosti.

Traženi model M definišemo na sledeći način:

- $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{N}}$;
- $F^{\mathcal{M}}$ je odgovarajuća restrikcija operacije $F^{\mathcal{N}}$ na skup M;
- $R^{\mathcal{M}}$ je odgovarajuća restrikcija relacije $R^{\mathcal{N}}$ na skup M.

Da je $\mathcal{M}$ elementarni podmodel modela $\mathcal{N}$ neposredno sledi iz konstrukcije (korak 2) i Tarski-Vaught teoreme. $\square$

1.7.3 Gornja Löwenheim-Skolem-Tarski teorema

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ beskonačan model jezika $\mathcal{L}$ i neka je $\kappa \geqslant \max\{|M|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$. Tada model $\mathcal{M}$ ima elementarnu ekstenziju $\mathcal{N}$ kardinalnosti $\geqslant \kappa$.

Dokaz

Jezik $\mathcal{L}$ proširimo skupom $\{c_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ novih simbola konstanti. Dati model $\mathcal{M}$ koristimo za dokaz činjenice da svaki konačan podskup teorije

$$T = Th(\mathcal{M}_M) \cup \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha < \beta\}$$

ima model: iz beskonačnosti skupa M neposredno sledi da za proizvoljne formule

$$c_{\alpha_1} \neq c_{\beta_1}, \ldots, c_{\alpha_k} \neq c_{\beta_k}$$

postoje $a_{\alpha_1}, a_{\beta_1}, \ldots, a_{\alpha_k}, a_{\beta_k} \in M$ takvi da

$$\mathcal{M} \models \bigwedge_{i=1}^{k} a_{\alpha_i} \neq a_{\beta_i},$$

odakle sledi da teorija $Th(\mathcal{M}_M) \cup \{c_{\alpha_1} \neq c_{\beta_1}, \ldots, c_{\alpha_k} \neq c_{\beta_k}\}$ ima model.

Na osnovu stava kompaktnosti teorija T ima model $\mathcal{N}$. Kako

$$\mathcal{N} \models \{c_\alpha \neq c_\beta \mid \alpha < \beta\},$$

to je $|N| \geqslant \kappa$, a pošto $\mathcal{N} \models Th(\mathcal{M}_M)$, imamo da se model $\mathcal{M}$ elementarno utapa u model $\mathcal{N} \restriction \mathcal{L}$. Sada bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je odgovarajuće elementarno utapanje inkluzija. $\square$

1.8 Definabilnost

Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ proizvoljan model jezika $\mathcal{L}$. Tada:

- Element $a \in M$ je *definabilan* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji formula $\varphi(x)$ jezika $\mathcal{L}$ takva da

  $$\mathcal{M} \models \varphi[a] \wedge \exists_1 x \varphi(x).$$

  Element $a \in M$ je *definabilan sa parametrima* u modelu $\mathcal{M}$ ako je definabilan u modelu $\mathcal{M}_{M \setminus \{a\}}$;

- Funkcija $f : M^n \longrightarrow M$ je *definabilna* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji formula $\varphi(\bar{x}, y)$ jezika $\mathcal{L}$ takva da

  $$f(\bar{a}) = b \text{ ako i samo ako } \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}, b].$$

  Funkcija $f : M^n \longrightarrow M$ je *definabilna sa parametrima* u modelu $\mathcal{M}$ ako je definabilna u modelu $\mathcal{M}_M$;

- Relacija $R \subseteq M^n$ je *definabilna* u modelu $\mathcal{M}$ ako postoji formula $\varphi(\bar{x})$ jezima $\mathcal{L}$ takva da

  $$R(\bar{a}) \text{ ako i samo ako } \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}].$$

  Relacija $R \subseteq M^n$ je *definabilna sa parametrima* u modelu $\mathcal{M}$ ako je definabilna u modelu $\mathcal{M}_M$.

1.8.1 Zadatak Neka je $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ standardni model formalne aritmetike PA. Dokazati:

1. Svaki prirodan broj n je definabilan u $\mathcal{M}$;
2. Poredak prirodnih brojeva je definabilan u $\mathcal{M}$;
3. Skup prirodnih brojeva deljivih sa $n > 1$ je definabilan u $\mathcal{M}$;
4. Skup prostih brojeva je definabilan u $\mathcal{M}$.

U nastavku ćemo opisati postupak konzervativnog širenja jezika date teorije. Konzervativnost se sastoji u tome da se svaki novo uvedeni simbol može efektivno eliminisati bez uticaja na deduktivne posledice (do na ekvivalenciju).

1.8.2 Teorema *Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$, c novi simbol konstante i $\varphi(x)$ formula jezika $\mathcal{L}$ takva da*

$$T \vdash \exists_1 x \varphi(x).$$

Dalje, neka je $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c\}$, $T^* = T \cup \{\varphi(c)\}$ i neka je $\phi(c)$ proizvoljna rečenica jezika $\mathcal{L}^*$ u kojoj se ne javlja promenljiva x. Tada važi:

1. *Teorije T i T^* su ekvikonsistentne;*
2. $T^* \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x)) \Leftrightarrow \phi(c)$;
3. $T \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$ *ako i samo ako* $T^* \vdash \phi(c)$.

Dokaz

1 Ako je teorija T^* konsistentna, onda je očigledno i teorija T konsistentna zbog $T \subseteq T^*$. Stoga pretpostavimo da je teorija T^* protivrečna. Tada

$$T, \varphi(c) \vdash \perp,$$

odakle prvo prebacivanjem $\varphi(c)$ sa desne strane rampe (znaka $\vdash$), a potom kontrapozicijom dobijamo da

$$T \vdash \neg\varphi(c),$$

pa, na osnovu leme o novoj konstanti, imamo da $T \vdash \forall x \neg\varphi(x)$. Kako po pretpostavci $T \vdash \exists x \varphi(x)$, na osnovu prethodnog sledi da je i teorija T protivrečna.

2 Neka je $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ proizvoljan model teorije T^*. Tada

$$\mathcal{M} \models \varphi(c) \text{ i } \mathcal{M} \models \exists_1 x \varphi(x),$$

pa za svaki element $a \in M$ takav da

$$\mathcal{M} \models \varphi[a] \wedge \phi[a]$$

mora biti $a = c^{\mathcal{M}}$, odakle neposredno sledi da

$$\mathcal{M} \models \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x)) \Leftrightarrow \phi(c).$$

Sada tvrđenje sledi na osnovu teoreme potpunosti.

3 Ako $T \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$, onda i $T^* \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$, odakle zajedno sa prethodnom stavkom sledi da $T^* \vdash \phi(c)$. Obratno, ako $T^* \vdash \phi(c)$, onda prvo prebacivanjem $\varphi(c)$ sa desne strane rampe pa potom primenom leme o novoj konstanti dobijamo da

$$T \vdash \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \phi(x)).$$

S obzirom da $T \vdash \exists_x \varphi(x)$ i da je

$$(\exists_1 x \varphi(x) \wedge \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \phi(x))) \Rightarrow \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$$

valjana formula, imamo da $T \vdash \exists_1 x(\varphi(x) \wedge \phi(x))$ $\square$

Na sličan način se mogu dokazati i sledeće dve teoreme, te ih ovde navodimo bez dokaza.

1.8.3 Teorema *Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$, R novi n-arni relacijski simbol, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R\}$ i $T^* = T \cup \{\forall \bar{x}(R(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}))\}$. Dalje, neka je ϕ proizvoljna rečenica jezika $\mathcal{L}^*$. Tada važi:*

1. *Teorije T i T^* su ekvikonsistentne;*
2. *$T^* \vdash \phi \Leftrightarrow \phi^R_\varphi$;*
3. *$T \vdash \phi^R_\varphi$ ako i samo ako $T^* \vdash \phi$.*

1.8.4 Teorema *Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$, F novi n-arni funkcijski znak, $\varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ formula jezika $\mathcal{L}$ takva da*

$$T \vdash \forall \bar{x} \exists_1 y \varphi(\bar{x}, y),$$

$\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{F\}$ i $T^* = T \cup \{\forall \bar{x} \forall y (F(\bar{x}) = y \Leftrightarrow \varphi(\bar{x}, y))\}$. Tada su teorije T i T^* ekvikonsistentne i za svaku rečenicu ϕ^* jezika $\mathcal{L}^*$ postoji rečenica ϕ jezika $\mathcal{L}$ takva da $T^* \vdash \phi^* \Leftrightarrow \phi$ i

$$T \vdash \phi \text{ ako i samo ako } T^* \vdash \phi^*.$$

Teorije T^* definisane u prethodnim teoremama zovemo i *definicionim ekstenzijama* teorije T. Same definicione ekstenzije koristimo kako bi pojednostavili notaciju, što se posebno odnosi na teoriju ZFC, jer ćemo skoro uvek raditi u nekoj njenoj definicionoj ekstenziji.

1.9 Metod interpretacije

Neka su $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}'$ jezici prvog reda. *Interpretacija* jezika $\mathcal{L}$ u jeziku $\mathcal{L}'$ se sastoji od:

- Unarnog predikatskog simbola $\mathtt{M}$ jezika $\mathcal{L}'$, koji se naziva univerzumom interpretacije;

- Skupa $\{s_M \mid s \in \mathcal{L}\} \subseteq \mathcal{L}'$, pri čemu su simboli s i s_M istog tipa: ako je s simbol konstante, onda je i s_M simbol konstante; ako je s funkcijski (relacijski) znak, onda je s_M takođe funkcijski (relacijski) znak iste arnosti kao i s.

Ako je t term jezika $\mathcal{L}$, sa $t_{\mathtt{M}}$ ćemo označavati term jezika $\mathcal{L}'$ koji nastaje zamenom svakog simbola s jezika $\mathcal{L}$ koji se javlja u termu t odgovarajućim simbolom $s_{\mathtt{M}}$ jezika $\mathcal{L}'$.

Pretpostavimo da smo fiksirali neku interpretaciju jezika $\mathcal{L}$ u jeziku $\mathcal{L}'$ čiji je univerzum $\mathtt{M}$. Za proizvoljnu formulu φ jezika $\mathcal{L}$ definišimo njenu *relativizaciju* $\varphi^{\mathtt{M}}$ na sledeći način:

- Ako je φ atomična formula, onda $\varphi^{\mathtt{M}}$ nastaje zamenom svakog simbola s jezika $\mathcal{L}$ koji se javlja u formuli φ odgovarajućim simbolom $s_{\mathtt{M}}$ jezika $\mathcal{L}'$;
- Ako je φ formula $\neg\phi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\neg\phi^{\mathtt{M}}$;
- Ako je φ formula $\phi \Rightarrow \psi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\phi^{\mathtt{M}} \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}$;
- Ako je φ formula $\forall x\phi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\forall x(\mathtt{M}(x) \Rightarrow \phi^{\mathtt{M}})$;
- Ako je φ formula $\exists x\phi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\exists x(\mathtt{M}(x) \wedge \phi^{\mathtt{M}})$.

Interpretacija teorije T u teoriji T' je po definiciji interpretacija jezika $\mathcal{L}$ teorije T u jeziku $\mathcal{L}'$ teorije T' sa sledećim svojstvima:

1. $T' \vdash \exists x\mathtt{M}(x)$;
2. Za svaki n-arni funkcijski znak F jezika $\mathcal{L}$,
$$T' \vdash \forall\bar{x}((\mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n)) \Rightarrow \mathtt{M}(F_{\mathtt{M}}(x_1, \ldots, x_n));$$
3. $T' \vdash \varphi^{\mathtt{M}}$ za svaku aksiomu φ teorije T, pri čemu podrazumevamo da T ne sadrži ni jednu valjanu formulu.

1.9.1 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ univerzum interpretacije teorije T u teoriji T'. Dokazati:

1. Ako je $t(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljan term jezika $\mathcal{L}$, onda
$$T' \vdash \forall \bar{x}(\mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \mathtt{M}(t_m(\bar{x})));$$
2. Ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ instanca neke od aksioma predikatskog računa, onda
$$T' \vdash \forall \bar{x}(\mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x})).$$

1.9.2 Teorema *Neka je* $\mathtt{M}$ *univerzum interpretacije teorije* T *u teoriji* T' *i neka je* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *proizvoljna formula jezika* $\mathcal{L}$. *Ako* $T \vdash \varphi(\bar{x})$, *onda*
$$T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x}).$$

Dokaz

Dokaz izvodimo potpunom indukcijom po dužini l dokaza formule φ iz hipoteza T. Ako je $l = 1$, onda tvrđenje sledi na osnovu prethodnog zadatka i definicije interpretacije.

Pretpostavimo da je formula φ dokazana iz hipoteza T primenom modus ponensa na formule ψ i $\psi \Rightarrow \varphi$, kao i da tvrđenje važi za svaku formulu sa kraćim dokazom od formule φ. Tada po induktivnoj hipotezi
$$T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}(\bar{x})$$
i
$$T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow (\psi^{\mathtt{M}}(\bar{x}) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x})),$$
odakle sledi da $T' \vdash \mathtt{M}(x_1) \wedge \cdots \wedge \mathtt{M}(x_n) \Rightarrow \varphi^{\mathtt{M}}$.

Pretpostavimo da je φ formula $\forall x \psi(x)$ i da je prilikom njenog dokaza korišćena generalizacija po x. Tada po induktivnoj hipotezi
$$T' \vdash \mathtt{M}(x) \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}(x),$$
a time i $T' \vdash \forall x(\mathtt{M}(x) \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}}(x))$, tj. $T' \vdash \varphi^{\mathtt{M}}$. $\square$

1.9.3 Posledica *Uz prethodnu simboliku, ako je teorija T' konsistentna, onda je i teorija T takođe konsistentna.*

Dokaz

Neka je $\mathcal{M}$ model teorije T' i neka je $\mathtt{M}^{\mathcal{M}}$ interpretacija unarnog predikata $\mathtt{M}$ u modelu $\mathcal{M}$. Na osnovu prethodne teoreme je struktura

$$\langle \mathtt{M}^{\mathcal{M}}, s^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}} \rangle_{s\in\mathcal{L}}$$

model teorije T, pri čemu je $c^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}} = c_{\mathtt{M}}^{\mathcal{M}}$, a u slučaju relacijskih i funkcijskih znakova, $s^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}}$ je restrikcija $s_{\mathtt{M}}^{\mathcal{M}}$ na skup $\mathtt{M}^{\mathcal{M}}$. □

Konstruisani model $\langle \mathtt{M}^{\mathcal{M}}, s_{\mathtt{M}}^{\mathtt{M}^{\mathcal{M}}} \rangle_{s\in\mathcal{L}}$ zovemo i *unutrašnjim modelom* teorije T. Posebno, ukoliko je $s_{\mathtt{M}} = s$ za svaki simbol jezika $\mathcal{L}$, unutrašnji model $\mathtt{M}^{\mathcal{M}}$ će ujedno biti i podmodel modela $\mathcal{M}$.

1.9.4 Primer Ovde ćemo neformalno (semantički) opisati interpretaciju teorije $T = \mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf}$ (Inf je askioma beskonačnosti) u teoriji PA, tj. opisaćemo konstrukciju unutrašnjeg modela teorije T u standardnom modelu aritmetike $\mathbb{N}$. Univerzum interpretacije se poklapa sa univerzumom aritmetike $\mathbb{N}$ (formalno, $\mathtt{M}(x) \Leftrightarrow x = x$). Dalje, za svaki prirodan broj n postoji jedinstveni skup $X_n \subseteq \mathbb{N}$ takav da je

$$n = \sum_{a\in X_n} 2^a,$$

pri čemu je po definiciji $0 = \sum\limits_{a\in\emptyset} 2^a$. Relaciju pripadanja $\in$ interpretiramo kao binarnu aritmetičku relaciju $\in_{\mathbb{N}}$ definisanu sa

$$m \in_{\mathbb{N}} n \Leftrightarrow m \in X_n.$$

Nije teško pokazati da $\langle \mathbb{N}, \in_{\mathbb{N}} \rangle \models T$. Mi ćemo verifikovati samo neke od aksioma teorije T. Za početak,

$$m = n \quad \text{akko} \quad \sum_{a\in X_m} 2^a = \sum_{a\in X_n} 2^a$$

$$\begin{array}{ll} \text{akko} & X_m = X_n \\ \text{akko} & \text{za svako } x \in \mathbb{N},\ x \in X_m \text{ akko } x \in X_n \\ \text{akko} & \text{za svako } x \in \mathbb{N},\ x \in_{\mathbb{N}} m \text{ akko } x \in_{\mathbb{N}} n, \end{array}$$

pa u $\langle \mathbb{N}, \in_{\mathbb{N}} \rangle$ važi aksioma ekstenzionalnosti. Što se tiče aksioma praznog skupa, para, unije i partitivnog skupa, imamo sledeće:

- $\emptyset_{\mathbb{N}} = 0$;
- $\{m, n\}_{\mathbb{N}} = \begin{cases} 2^m & , \quad m = n \\ 2^m + 2^n & , \quad m \neq n \end{cases}$;
- $\bigcup_{\mathbb{N}} m = \sum\limits_{a \in X_m} a$;
- $P_{\mathbb{N}}(m) = \sum\limits_{A \in P(X_m)} 2^{\sum\limits_{a \in A} 2^a}$.

1.10 Gödelove teoreme nepotpunosti

U ovoj sekciji ćemo sa $\mathbb{N}$ označavati metateorijski skup prirodnih brojeva ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$). Pod *n-arnom* ($n > 0$) *aritmetičkom funkcijom* podrazumevamo svaku funkciju $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ čiji je domen A podskup skupa $\mathbb{N}^n$. Funcija f je *parcijalna* ako je A pravi podskup skupa $\mathbb{N}^n$; u suprotnom je *totalna*. Sada ćemo precizirati nekoliko formalnih sistema izračunljivosti.

1.10.1 Definicija Za aritmetičku funkciju f kažemo da je *rekurzivna* ako postoji konačan niz $f_0, \ldots, f_n$ aritmetičkih funkcija takav da je $f_n = f$ i da za svako $k \leqslant n$ važi bar jedna od sledećih stavki:

1. f_k je nula funkcija $\mathtt{null}(x) = 0$;
2. f_k je sledbenik funkcija $\mathtt{S}(x) = x + 1$;
3. f_k je i-ta n-arna projekcija $\mathtt{proj}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$;

4. $f_k(\bar{x}) = f_i(f_{j1}(\bar{x}), \ldots, f_{j_m}(\bar{x}))$, $i, j_1, \ldots, j_m < k$;

5. $f_k(\bar{x}, 0) = f_i(\bar{x})$, $f_k(\bar{x}, y+1) = f_j(\bar{x}, y, f_k(\bar{x}, y))$, $i, j < k$;

6. $f_k(\bar{x}) = \mu y f_i(\bar{x}, y)$, pri čemu je

$$\mu y f_i(\bar{x}, y) = \begin{cases} z & , \ f_i(\bar{x}, z) = 0 \land \\ & \ (\forall y < z)(f_i(\bar{x}, y) \neq 0) \\ \text{nedefinisano} & , \ \text{inače} \end{cases}$$

i $i < k$.

Za aritmetičku relaciju kažemo da je rekurzivna ako je takva njena karakterištična funkcija.

1.10.2 Definicija Za n-arnu aritmetičku funkciju f kažemo da je *predstavljiva* u PA ako postoji formula $\varphi(\bar{x}, y)$ takva da za proizvoljne prirodne brojeve $k_1, \ldots, k_n, m$ važi:

- $f(k_1, \ldots, k_n) = m$ povlači $PA \vdash \varphi(\mathtt{k}_1, \ldots, \mathtt{k}_n, \mathtt{m})$;
- $f(k_1, \ldots, k_n) \neq m$ povlači $PA \vdash \neg\varphi(\mathtt{k}_1, \ldots, \mathtt{k}_n, \mathtt{m})$.

Pritom je $\mathtt{1} = \mathtt{0}'$, $\mathtt{2} = \mathtt{0}''$, $\mathtt{3} = \mathtt{0}'''$ itd. Same termove $\mathtt{k}$ zovemo i *numeralima*. Posebno, za aritmetičku relaciju kažemo da je predstavljiva u PA ako je takva njena karakteristična funkcija.

Sledeća teorema uspostavlja ekvivalenciju između raznih formalnih sistema izračunljivosti. Sam dokaz je tehnički zahtevan, te ga ovde izostavljamo. Neki od detalja se mogu naći u [85].

1.10.3 Teorema *Neka je f proizvoljna aritmetička funkcija. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *f je rekurzivna;*

2. *f je predstavljiva u PA pomoću Σ_1-formule;*

3. f je Turing izračunljiva.

U vezi sa prethodnom teoremom je i čuvena *Churchova teza* po kojoj je svaka intuitivno izračunljiva funkcija rekurzivna. U dokazima rekurzivnosti aritmetičkih funkcija i relacija uglavnom ćemo koristiti Churchovu tezu. Bez obzira na status ove teze, za efektivne postupke koje budemo koristili, može se formalno pokazati da su rekurzivni.

Prelazimo na kodiranje prirodnim brojevima, koje pre svega podrazumeva kodiranje konačnih nizova prirodnih brojeva prirodnim brojevima. Funkcije $\mathtt{C}_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ i $(\ )_1, (\ )_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definisane sa

$$\mathtt{C}_2(x, y) = 2^x(2y + 1) - 1$$

$$(x)_1 = \max\{y \in \mathbb{N} \mid 2^y \text{ deli } x + 1\}$$

$$(x)_2 = 2^{-1}(2^{-(x)_1}(x + 1) - 1)$$

su očigledno rekurzivne (Churchova teza). Pritom je funkcija $\mathtt{C}_2$ bijekcija i za svaki prirodan broj x važi

$$x = \mathtt{C}_2((x)_1, (x)_2).$$

Za $n = 3$ odgovarajuće kodirajuće funkcije definišemo na sledeći način:

$$\mathtt{C}_3(x, y, z) = \mathtt{C}_2(\mathtt{C}_2(x, y), z);$$

$$(x)^{(3)}_1 = ((x)_1)_1;$$

$$(x)^{(3)}_2 = ((x)_1)_2;$$

$$(x)^{(3)}_3 = (x)_2.$$

Koristeći opisanu proceduru, definišemo kodirajuće funkcije i za preostale vrednosti n. Ako je $l : \{0, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{N}$ konačan niz prirodnih brojeva, onda njegov kôd definišemo sa

$$\mathtt{C}(l) = \mathtt{C}_2(n + 1, \mathtt{C}_{n+1}(l_0, \ldots, l_n)),$$

pri čemu je $l_i = l(i)$.

Neka je f proizvoljna aritmetička funkcija i neka je f^* unarna aritmeti
-v cka funkcija definisana sa

$$f^*(x) = f((x)_1^{(n)}, \dots, (x)_n^{(n)}).$$

Tada za proizvoljne prirodne brojeve $x_1, \dots, x_n, y$ važi

$$f(\bar{x}) = y \Leftrightarrow f^*(\mathtt{C}_n(\bar{x})) = y,$$

odakle sledi da se n-arne aritmetičke funkcije efektivno mogu kodirati unarnim aritmetičkim funkcijama.

1.10.4 Definicija Neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$. *Gödelov broj* $\ulcorner\varphi\urcorner$ formule φ definišemo na sledeći način: ako je formula φ konačan niz simbola $s_0, \dots, s_n$, onda je

$$\ulcorner\varphi\urcorner = \mathtt{C}(\ulcorner s_0\urcorner, \dots, \ulcorner s_n\urcorner),$$

pri čemu je $\ulcorner\mathtt{0}\urcorner = 0$, $\ulcorner+\urcorner = 1$, $\ulcorner\cdot\urcorner = 2$, $\ulcorner'\urcorner = 3$, $\ulcorner(\urcorner = 4$, $\ulcorner)\urcorner = 5$, $\ulcorner=\urcorner = 6$, $\ulcorner\neg\urcorner = 7$, $\ulcorner\Rightarrow\urcorner = 8$, $\ulcorner\forall\urcorner = 9$, $\ulcorner x_n\urcorner = 10^{n+1}$ ($x_0, x_1, x_2, \dots$ je lista svih promenljivih).

Ako je $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dokaz u PA, onda njegov kôd definišemo sa

$$\mathtt{C}(\ulcorner\varphi_1\urcorner, \dots, \ulcorner\varphi_n\urcorner).$$

1.10.5 Zadatak Dokazati da su sledeći aritmetički predikati rekurzivni:

1. $Term(n)$: "n je kôd terma jezika $\mathcal{L}_{PA}$";
2. $For(n)$: "n je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$";
3. $Var(m, n)$: "promenljiva čiji je kôd m javlja se u formuli jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji je kôd n";

4. $Fv(m,n)$: "promenljiva čiji je kôd m javlja se slobodno u formuli jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji je kôd n";

5. $Sent(n)$: "n je kôd rečenice jezika $\mathcal{L}_{PA}$";

6. $Ax(n)$: "n je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja je instanca neke od aksioma predikatskog računa prvog reda";

7. $PA(n)$: "n je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja je instanca neke od aksioma teorije PA";

8. $MP(k,m,n)$: "k je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja se dobija primenom modus ponensa na formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji su kodovi m i n";

9. $Gen(k,m,n)$: "k je kôd formule jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja se dobija primenom generalizacije po promenljivoj čiji je kôd m na formulu jezika $\mathcal{L}_{PA}$ čiji je kôd n";

10. $Prov(m,n)$: m je kôd dokaza u PA formule čiji je kôd n.

Definišimo funkciju $Sub : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ sa

$$Sub(m,n) = \begin{cases} \ulcorner\varphi(\mathtt{n})\urcorner & , \quad m = \ulcorner\varphi(x)\urcorner \text{ za neku formulu} \\ & \quad\;\; \varphi(x) \text{ jezika } \mathcal{L}_{PA} \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Funkcija Sub je rekurzivna, pa po teoremi 1.10.3 postoji Σ_1 formula $\mathtt{Sub}(x,y,z)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ koja predstavlja funkciju Sub. Posebno, za svaki prirodan broj n i svaku formulu $\varphi(x)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ važi

$$PA \vdash \mathtt{Sub}(\ulcorner\varphi(x)\urcorner, \mathtt{n}, \ulcorner\varphi(\mathtt{n})\urcorner),$$

pri čemu u ovom kontekstu $\ulcorner\varphi(x)\urcorner$ i $\ulcorner\varphi(\mathtt{n})\urcorner$ tretiramo kao numerale.

Za prelazak na Gödelove teoreme neophodne su nam i neke dodatne osobine teorije PA, koje navodimo u sledećem zadatku.

1.10.6 Zadatak Neka je $x < y$ zamena za $\exists z(y = x + z')$. Dokazati da su univerzalna zatvorenja sledećih formula teoreme teorije PA:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $\mathtt{0} + x = x$;
3. $x + y = y + x$;
4. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
5. $\mathtt{0} \cdot x = \mathtt{0}$;
6. $x \cdot \mathtt{1} = x$;
7. $\mathtt{1} \cdot x = x$;
8. $x \cdot y = y \cdot x$;
9. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
10. $x \neq \mathtt{0} \Rightarrow \exists y(x = y')$;
11. $\neg(x < x)$;
12. $(x < y \wedge y < z) \Rightarrow x < z$;
13. $x < y \Leftrightarrow \forall z(x + z < y + z)$;
14. $x < y \Leftrightarrow \forall z(x \cdot z' < y \cdot z')$;
15. $\exists x\varphi(x, \bar{y}) \Rightarrow \exists x(\varphi(x, y) \wedge (\forall z < x)\neg\varphi(z, \bar{y}))$, pri čemu je $\varphi(x, \bar{y})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$.

1.10.7 Gödelova lema

Neka je $\psi(x)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{PA}$ sa tačno jednom promenljivom x. Tada postoji rečenica φ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ takva da

$$PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

pri čemu u ovom kontekstu $\ulcorner\varphi\urcorner$ tretiramo kao numeral.

Dokaz

Neka je $\theta(x, y, z)$ formula

$$\mathtt{Sub}(x, y, z) \wedge (\forall z_0 < z)\neg\mathtt{Sub}(x, y, z_0).$$

Na osnovu poslednje stavke u prethodnom zadatku,

$$PA \vdash \forall x \forall y \forall u \forall v((\theta(x, y, u) \wedge \theta(x, y, v)) \Rightarrow u = v). \tag{1.5}$$

Dalje, neka je

$$n = \ulcorner \exists z(\theta(x, x, z) \wedge \psi(z)) \urcorner.$$

Tvrdimo da rečenica φ definisana sa

$$\exists z(\theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, z) \wedge \psi(z))$$

zadovoljava uslove tvrđenja. Zaista, kako je po definiciji funkcije Sub

$$Sub(n, n) = \ulcorner \varphi \urcorner,$$

to je $Sub(n, n) \neq m$ za svako $m < \ulcorner \varphi \urcorner$, pa po teoremi 1.10.3 imamo da

$$PA \vdash \theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, \ulcorner \varphi \urcorner), \tag{1.6}$$

pri čemu u ovom kontekstu $\ulcorner \varphi \urcorner$ tretiramo kao numeral. Sada na osnovu (1.5) i (1.6) sledi da je $\ulcorner \varphi \urcorner$ jedinstveni svedok formule

$$\theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, \ulcorner \varphi \urcorner),$$

pa mora biti

$$PA \vdash \exists z(\theta(\mathtt{n}, \mathtt{n}, \ulcorner \varphi \urcorner) \wedge \psi(z)) \Leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner),$$

tj. $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi(\ulcorner \varphi \urcorner)$. $\Box$

Uz simboliku iz prethodne leme, rečenicu φ zovemo i *dijagonalizacijom* formule $\psi(x)$.

Kako je aritmetički predikat $Prov(m, n)$ rekurzivan, postoji Σ_1 formula $\mathtt{Prov}(x, y)$ jezika $\mathcal{L}_{PA}$ takva da važi:

- $Prov(m,n)$ povlači $PA \vdash \mathtt{Prov}(\mathtt{m},\mathtt{n})$;
- nije $Prov(m,n)$ povlači $PA \vdash \neg\mathtt{Prov}(\mathtt{m},\mathtt{n})$.

1.10.8 Prva Gödelova teorema nepotpunosti

Neka je $\psi(x)$ formula $\neg\exists y\mathtt{Prov}(y,x)$ i neka je φ njena dijagonalizacija. Tada:

1. *Ako je PA neprotivrečna teorija, onda $PA \nvdash \varphi$;*
2. *Ako je PA neprotivrečna teorija i ako iz $PA \vdash \exists y\mathtt{Prov}(y,\ulcorner\varphi\urcorner)$ sledi da $PA \vdash \varphi$, onda $PA \nvdash \neg\varphi$.*

Dokaz

1 Pretpostavimo da $PA \vdash \varphi$. Tada po lemi 1.10.7

$$PA \vdash \neg\exists y\mathtt{Prov}(y,\ulcorner\varphi\urcorner).$$

Ako je m kôd dokaza rečenice φ u PA, onda važi $Prov(m,\ulcorner\varphi\urcorner)$ pa mora biti i $PA \vdash \mathtt{Prov}(\mathtt{m},\ulcorner\varphi\urcorner)$, a time i $PA \vdash \exists y\mathtt{Prov}(y,\ulcorner\varphi\urcorner)$. Dakle, iz $PA \vdash \varphi$ sledi da je teorija PA protivrečna, pa neprotivrečnost teorije PA povlači da $PA \nvdash \varphi$.

2 Preptostavimo da $PA \vdash \neg\varphi$. Tada po lemi 1.10.7 sledi da

$$PA \vdash \exists y\mathtt{Prov}(y,\ulcorner\varphi\urcorner),$$

odakle iz uslova teoreme sledi da $PA \vdash \varphi$, a time i protivrečnost teorije PA. $\square$

Radi pojednostavljenja notacije ćemo sa $\mathtt{Pr}(x)$ označavati formulu $\exists y\mathtt{Prov}(y,x)$. Može se pokazati da formula $\mathtt{Pr}(x)$ ima sledeća svojstva:

D1 Ako $PA \vdash \psi$, onda $PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)$;

D2 $PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)\urcorner)$;

D3 $PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\psi \Rightarrow \theta\urcorner) \Rightarrow (\mathtt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\theta\urcorner))$.

Ako je m kôd dokaza formule ψ u teoriji PA, onda po definiciji važi $Prov(m, \ulcorner\psi\urcorner)$, pa mora biti i $PA \vdash \mathtt{Prov}(\mathtt{m}, \ulcorner\psi\urcorner)$, odakle sledi da $PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\psi\urcorner)$. D2 se dokazuje formalizacijom u PA upravo opisanog dokaza za D1, a D3 je posledica činjenice da se nadovezivanjem dokaza dobija dokaz.

Napomenimo da se u dokazu svostva D2 bitno koristi Σ_1 predstavljivost relacije $Prov(m, n)$. Naime, postoje primeri Π_1 predstavljanja $Prov(m, n)$ za koje je odgovarajuća rečenica $Con(PA)$ dokaziva u PA.

1.10.9 Druga Gödelova teorema nepotpunosti

Neka je $Con(PA)$ formula $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner)$ i neka je φ dijagonalizacija formule $\neg\mathtt{Pr}(x)$. Tada

$$PA \vdash Con(PA) \Leftrightarrow \varphi.$$

Posebno, ako je teorija PA neprotivrečna, onda $PA \nvdash Con(PA)$.

Dokaz

Kako je formula $\mathtt{0} = \mathtt{1} \Rightarrow \varphi$ valjana, na osnovu D1 imamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1} \Rightarrow \varphi\urcorner),$$

odakle po D3

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner),$$

odakle kontrapozicijom dobijamo

$$PA \vdash \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner).$$

S obzirom da $PA \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ (lema 1.10.7), kao i da je $Con(PA)$ upravo rečenica $\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner)$, imamo da

$$PA \vdash \varphi \Rightarrow Con(PA).$$

S druge strane, iz $PA \vdash \varphi \Rightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)$ i D1 sledi da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi \Rightarrow \neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner),$$

odakle na osnovu D3 dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner). \tag{1.7}$$

S druge strane, po D2

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner). \tag{1.8}$$

Primenom prvo D1 a zatim D3 na valjanu formulu

$$\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow (\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{0} = \mathtt{1})$$

dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner).$$

Primenom D3 na konsekvent (desnu stranu implikacije) u gornjoj formuli, na osnovu tranzitivnosti implikacije dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner) \Rightarrow (\mathtt{Pr}(\ulcorner\neg\mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner),$$

pa primenom (1.7) i (1.8) dobijamo da

$$PA \vdash \mathtt{Pr}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Rightarrow \mathtt{Pr}(\ulcorner\mathtt{0} = \mathtt{1}\urcorner),$$

odakle primenom prvo kontrapozicije, a zatim zamene ekvivalenata dobijamo da

$$PA \vdash Con(PA) \Rightarrow \varphi.$$

Preostali deo tvrđenja sledi iz prve Gödelove teoreme nepotpunosti.

$\square$

Upravo prikazani dokaz u slučaju teorije PA se može sprovesti u svakoj teoriji prvoga reda sa rekurzivnim skupom aksioma koja zadovoljava uslov da se u njoj mogu predstaviti aritmetičke funkcije i relacije Σ_1 formulama. Kako teorija ZFC zadovoljava ove uslove, imamo da

$$\mathrm{ZFC} \nvdash Con(\mathrm{ZFC})$$

ukoliko je teorija ZFC neprotivrečna.

2

Aksiomatska teorija skupova

Uobičajena je praksa da su primitivni matematički pojmovi skup i pripadnost. Neophodnost strogog formalnog izlaganja javlja se usled činjenice da je govorni jezik suviše bogat, pa omogućava konstrukcije raznih paradoksa. Moguće "zloupotrebe" jezika najbolje ilustruje sledeći *Richardov paradoks*:

Neka je X skup svih prirodnih brojeva koji se mogu definisati sa ne više od sto reči srpskog jezika. Kako prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo a reči srpskog jezika konačno mnogo, zaključujemo da je skup X konačan. S obzirom da princip najmanjeg elementa važi za prirodne brojeve i da je komplement $\mathbb{N} \setminus X$ skupa X neprazan, zaključujemo da skup $\mathbb{N} \setminus X$ ima najmanji element, recimo n. Ovim smo upravo definisali broj n sa manje od sto reči, pa on pripada skupu X. Sada smo došli u paradoksalnu situaciju: skup X i njegov komplement imaju neprazan presek.

Prvi korak u prevazilaženju problema ovoga tipa sastoji se u tome što u opisu skupova koristimo isključivo formalni jezik prvog reda $\mathcal{L}_{ZFC}$ koji se sastoji od tačno jednog binarnog relacijskog simbola $\in$. Bez obzira što smo jezik popriličnо skratili, i dalje možemo formulisati "vratolomije" poput skupa svih skupova ili skupa svih skupova koji ne pripadaju sami sebi: prvi od njih zapisujemo sa $\{x \mid x = x\}$ a drugi sa

$\{x \mid x \notin x\}$. Naravno, obe ove konstrukcije su protivrečne, što ćemo i dokazati u ovom poglavlju.

Drugi korak u otklanjanju paradoksa sastoji se u odgovarajućem izboru aksioma, kojima se dodatno kontroliše formiranje novih skupova. Pomenuto formiranje skupova podrazumeva sledeće: ako neki skup uvodimo na nivou α, onda svi njegovi elementi moraju biti ranije uvedeni. Nevolja sa "skupovima" $\{x \mid x = x\}$ i $\{x \mid x \notin x\}$ je u tome što oni imaju elemente na svim nivoima, a ispostavlja se da je ovakva kofinalna (neograničena po nivoima) dijagonalizacija u kumulativnoj hijerarhiji skupova protivrečna.

Naš stil izlaganja ZFC teorije skupova je samo prividno neformalan: koristimo semantički pristup, s tim da ne naglašavamo da se razmatranje vrši u nekom fiksiranom modelu teorije ZFC budući da je argumentacija univerzalna pa se odnosi na sve modele. Teorema potpunosti predikatskog računa prvog reda nam garantuje da se sve može iskazati i čisto sintaksno - konačnim nizovima formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$.

2.1 ZF$^-$

Kao što smo u uvodu napomenuli, teorija ZF$^-$ se sastoji od aksioma ekstenzionalnosti, praznog skupa, unije, para i beskonačnosti, kao i shema separacije i zamene. Ona predstavlja formalizaciju tzv. naivne teorije skupova.

Aksioma 1 (Aksioma ekstenzionalnosti)

$$\forall x_0 \forall x_1 (x_0 = x_1 \Leftrightarrow \forall x_2 (x_2 \in x_0 \Leftrightarrow x_2 \in x_1)).$$

Prevedeno na govorni jezik, dva skupa su jednaka ako i samo ako imaju iste elemente.

Kažemo da je skup A *podskup* skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B. Za skup A kažemo da je *pravi podskup* skupa B, u oznaci $A \subset B$, ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$. Binarnu relaciju $\subseteq$ zovemo i *inkluzijom*, a binarnu relaciju $\subset$ zovemo i *strogom inkluzijom*.

Podrazumevamo da je skupovna pripadnost relacija među skupovima. Zapis $A \in B$ čitamo na sledeći način: skup A pripada skupu B. Zapis $A \notin B$ čitamo na sledeći način: skup A ne pripada skupu B.

2.1.1 Zadatak Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Pokazati da važi:

1. $A \subseteq A$;
2. Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda su skupovi A i B jednaki;
3. Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq C$, onda je i $A \subseteq C$;
4. Ako je $A \subset B$ onda nije $B \subset A$;
5. Ako je $A \subset B$ i $B \subset C$, onda je i $A \subset C$;

2.1.2 Teorema *Neka je $\varphi(x)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova. Ako postoji skup A takav da su svi njegovi elementi upravo svi skupovi X za koje važi $\varphi(X)$, onda je on jedinstven.*

Dokaz

Neka su skupovi A i B takvi da su svi njihovi elementi upravo svi skupovi za koje važi $\varphi(x)$. Sada za proizvoljan skup a važi:

$$\begin{array}{rll} a \in A & \text{akko} & \varphi(a) \\ & \text{akko} & a \in B. \end{array}$$

Odavde sledi da skupovi A i B imaju iste elemente, pa su na osnovu aksiome ekstenzionalnosti međusobno jednaki. $\Box$

Aksioma 2 (Aksioma praznog skupa)

$$\exists x_0 \forall x_1 \neg (x_1 \in x_0).$$

Aksiomom praznog skupa se postulira uverenje da postoji prazan skup.

Neka je A skup čija se egzistencija postulira aksiomom praznog skupa. Sada rečenica: "Svi elementi skupa A su upravo svi skupovi sa svojstvom $x \neq x$" ima logičku strukturu $\perp \Leftrightarrow \perp$ $(x \in A \Leftrightarrow x \neq x)$ pa je trivijalno tačna. Na osnovu teoreme 2.1.2 sledi jedinstvenost skupa A.

Prazan skup ćemo označavati sa 0.

2.1.3 Zadatak Neka je A proizvoljan skup. Pokazati da je $0 \subseteq A$.

Aksioma 3 (Aksioma para)

$$\forall x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \in x_2 \Leftrightarrow x_3 = x_0 \vee x_3 = x_1).$$

Prevedeno na govorni jezik, za svaka dva skupa A i B postoji skup C čiji su jedini elementi upravo A i B. Jedinstvenost skupa C sledi iz teoreme 2.1.2 i činjenice da su svi elementi skupa C upravo svi skupovi x sa svojstvom

$$x = A \vee x = B.$$

Skup čiji su jedini elementi skupovi A i B ćemo označavati sa $\{A, B\}$.

2.1.4 Zadatak Neka su A i B proizvoljni skupovi. Pokazati da je

$$\{A, B\} = \{B, A\}.$$

S obzirom da

$$\begin{aligned} x \in \{A, A\} &\Leftrightarrow x = A \vee x = A \\ &\Leftrightarrow x = A, \end{aligned}$$

skup $\{A, A\}$ ima tačno jedan element: A. Stoga umesto $\{A, A\}$ pišemo kratko $\{A\}$.

2.1.5 Definicija [Uređen par] Neka su A i B proizvoljni skupovi. Odgovarajući uređen par definišemo sa

$$\langle A, B \rangle =_{\text{def}} \{\{A\}, \{A, B\}\}.$$

U vezi sa uređenim parom $\langle A, B\rangle$, skup A zovemo njegovom prvom koordinatom, a skup B njegovom drugom koordinatom.

2.1.6 Zadatak Neka su a, b, c i d proizvoljni skupovi. Pokazati da je $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$ ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Uređenu trojku skupova a, b i c definišemo sa

$$\langle a, b, c\rangle =_{\text{def}} \langle\langle a, b\rangle, c\rangle.$$

Slično se definišu uređene četvorke, petice itd.

Aksioma 4 (Aksioma unije)

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_3 (x_3 \in x_0 \wedge x_2 \in x_3)).$$

Prevedeno na govorni jezik, za svaki skup A postoji unija B njegovih elemenata, tj. svaki element skupa B pripada nekom od elemenata skupa A.

Kako

$$x \in B \Leftrightarrow \exists a (a \in A \wedge x \in a),$$

na osnovu teoreme 2.1.2 imamo jedinstvenost skupa B, koji ćemo nadalje označavati sa $\bigcup A$.

2.1.7 Definicija Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Skupove $A \cup B$ i $\{A, B, C\}$ definišemo na sledeći način:

- $A \cup B =_{\text{def}} \bigcup\{A, B\}$;
- $\{A, B, C\} =_{\text{def}} \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\}$.

2.1.8 Zadatak Neka su a, b i c proizvoljni skupovi. Pokazati da važi:

1. $a \cup a = a$;
2. $a \cup 0 = a$;

3. $a \cup b = b \cup a$;

4. $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$;

5. $\bigcup(a \cup b) = (\bigcup a) \cup (\bigcup b)$;

6. $b \in a \Rightarrow b \subseteq \bigcup a$;

7. $\bigcup\langle a, b\rangle = \{a, b\}$.

2.1.9 Definicija $1 =_{\text{def}} \{0\}$, $2 =_{\text{def}} \{0, 1\}$, $3 =_{\text{def}} \{0, 1, 2\}$, $4 =_{\text{def}} \{0, 1, 2, 3\}$ itd.

2.1.10 Zadatak Pokazati da je $2 \neq 5$.

Uputstvo

Pokazati da $2 \notin 2$ (tj. da je $2 \neq 0$ i $2 \neq 1$) i iskoristiti aksiomu ekstenzionalnosti i činjenicu da po definiciji $2 \in 5$. $\square$

Aksioma 5 (Aksioma partitivnog skupa)

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \in x_2 \Rightarrow x_3 \in x_0)).$$

Prevedeno na govorni jezik, za svaki skup A postoji njegov partitivni skup, odnosno skup svih njegovih podskupova.

S obzirom da

$$x \in B \Leftrightarrow \forall y (y \in x \Rightarrow y \in A),$$

na osnovu teoreme 2.1.2 skup B je jedinstven i nadalje ćemo ga označavati sa $P(A)$.

2.1.11 Definicija Za skup A kažemo da je *tranzitivan* ako je svaki njegov element ujedno i njegov podskup.

2.1.12 Zadatak Pokazati da je skup A tranzitivan ako i samo ako je

$$\bigcup A \subseteq A.$$

Takođe pokazati da je prazan skup tranzitivan.

2.1.13 Zadatak Neka je a tranzitivan skup. Dokazati da je tada relacija pripadanja $\in$ tranzitivna na skupu a.

2.1.14 Teorema *Neka je A proizvoljan skup. Tada važi:*

1. *Ako je skup A tranzitivan, onda je i skup $A \cup \{A\}$ tranzitivan;*
2. *Ako je skup A tranzitivan, onda je i njegov partitivni skup $P(A)$ tranzitivan;*
3. *Ako su svi elementi skupa A tranzitivni, onda je i skup $\bigcup A$ tranzitivan.*

Dokaz

1 Pretpostavimo da je skup A tranzitivan i pokažimo da je skup $A \cup \{A\}$ takođe tranzitivan. Pošto je

$$x \in A \cup \{A\} \Leftrightarrow x \in A \vee x = A,$$

imamo sledeće: ako je $x \in A$, onda iz tranzitivnosti skupa A sledi da je $x \subseteq A$, a ako je $x = A$, onda je $x \subseteq A$ trivijalno tačno jer je isto što i $A \subseteq A$. U svakom slučaju, pokazali smo da je svaki element skupa $A \cup \{A\}$ ujedno i njegov podskup, odakle po definiciji sledi tranzitivnost skupa $A \cup \{A\}$.

2 Pretpostavimo tranzitivnost skupa A i dokažimo tranzitivnost skupa $P(A)$. U tom cilju uočimo proizvoljan element X skupa $P(A)$ i pokažimo da je on njegov podskup. Neka je $x \in X$ proizvoljno. Kako je $X \subseteq A$, imamo da $x \in A$, odakle zbog tranzitivnosti skupa A sledi da je $x \subseteq A$, tj. da $x \in P(A)$, što je i trebalo pokazati.

3 Neka su svi elementi skupa A tranzitivni. Pokažimo da je skup $\bigcup A$ tranzitivan, tj. da je svaki njegov element ujedno i njegov podskup. Stoga uočimo proizvoljno $x \in \bigcup A$. Tada postoji skup $X \in A$ takav da $x \in A$. Pošto je skup X tranzitivan, imamo da je $x \subseteq X$, a kako je $X \subseteq \bigcup A$, mora biti i $x \subseteq \bigcup A$. $\Box$

Shema 1 (Shema separacije) Neka je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljiva x_2 javlja slobodno i u kojoj promenljiva x_1 nema slobodnih javljanja. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_0 \wedge \varphi)$$

instanca sheme separacije.

Prevedeno na govorni jezik, za svaki skup A i svaku formulu $\varphi(x)$, postoji skup B svih elemenata skupa A koji su svedoci za φ. Po do sada već standardnoj proceduri zaključujemo da je skup B jedinstven; označavaćemo ga sa

$$\{x \mid x \in A \wedge \varphi(x)\}, \text{ ili sa } \{x \in A \mid \varphi(x)\}.$$

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Skupove $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A \triangle B$ definišemo na sledeći način:

- $A \cap B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$;
- $A \setminus B =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$;
- $A \triangle B =_{\text{def}} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

2.1.15 Zadatak Neka su A, B i C proizvoljni skupovi. Pokazati da važi:

1. $A \cap 0 = 0$;
2. $A \cap A = A$;
3. $A \cap B = B \cap A$;
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
5. $A \cap (A \cup B) = A$;
6. $A \cup (A \cap B) = A$;

7. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
8. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
9. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
10. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
11. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = 0$;
12. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$;
13. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;
14. $A = B \Leftrightarrow A \bigtriangleup B = 0$;
15. $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$;
16. $A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C) = (A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C$.

2.1.16 Teorema *Za svaki skup A postoji skup B koji ne pripada skupu A.*

Dokaz

Na osnovu sheme separacije postoji skup

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\}.$$

Pokažimo da skup B ne pripada skupu A. Zaista, u suprotnom, bilo bi

$$\begin{aligned} B \in B \quad &\Leftrightarrow \quad B \in A \wedge B \notin B \\ &\Leftrightarrow \quad B \notin B, \end{aligned}$$

što je nemoguće (dobijamo iskaz oblika $p \Leftrightarrow \neg p$, koji očigledno nikad nije tačan). $\square$

Shema 2 (Shema zamene) Neka je φ formula ZFC teorije skupova u kojoj se promenljive x_2 i x_3 javljaju slobodno i u kojoj promenljiva x_1 nema slobodnih javljanja. Tada je univerzalno zatvorenje formule

$$\forall x_0(\forall x_2(x_2 \in x_0 \Rightarrow \exists_1 x_3 \varphi) \Rightarrow \exists x_1 \forall x_3(x_3 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_2(x_2 \in x_0 \wedge \varphi)))$$

instanca sheme zamene.

Shemom zamene se zapravo tvrdi sledeće: za proizvoljan skup A postoji skup B koji nastaje zamenom svakog elementa a skupa A odgovarajućim jedinstvenim skupom b takvim da važi $\varphi(a, b)$. Na uobičajeni način zaključujemo da je skup B jedinstven; označavaćemo ga sa

$$\{b_a \mid a \in A\},$$

pri čemu je za svako $a \in A$ skup b_a jedinstveni svedok za $\varphi(a, b_a)$. Takođe ćemo koristiti i oznaku

$$\{b \mid \exists a(a \in A \wedge \varphi(a, b))\}.$$

2.2 Relacije i funkcije

Descartesov proizvod skupova A i B, u oznaci $A \times B$, definišemo kao skup svih uređenih parova čija prva koordinata pripada skupu A a druga koordinata pripada skupu B. Descartesov proizvod skupova A, B i C je po definiciji skup $(A \times B) \times C$. Slično se uvodi i Descartesov proizvod četiri skupa, pet skupova itd.

2.2.1 Zadatak Pokazati da je gornja definicija korektna, tj. pokazati egzistenciju i jedinstvenost skupa C čiji su elementi upravo svi uređeni parovi čija je prva koordinata iz skupa A, a druga koordinata iz skupa B.

Uputstvo

Pokazati da iz $a \in A$ i $b \in B$ sledi da $\langle a, b\rangle \in P(P(A \cup B))$. Iskoristiti ovo i shemu separacije za dokaz egzistencije. U dokazu jedinstvenosti koristiti teoremu 2.1.2. $\square$

2.2.2 Definicija Neka je A proizvoljan skup. Odgovarajući *domen*, u oznaci $\mathrm{dom}(A)$, i *kodomen*, u oznaci $\mathrm{rng}(A)$ definišemo na sledeći način:

- $\mathrm{dom}(A) =_{\mathrm{def}} \{x \mid x \in \bigcup\bigcup A \wedge \exists y(\langle x, y\rangle \in A)\}$;
- $\mathrm{rng}(A) =_{\mathrm{def}} \{x \mid x \in \bigcup\bigcup A \wedge \exists y(\langle y, x\rangle \in A)\}$.

Neka su A i B proizvoljni skupovi. Za skup $f \subseteq A \times B$ kažemo da je *funkcija* ako za sve $a, a' \in A$ i svako $b \in B$, iz

$$\langle a, b\rangle \in f \quad \text{i} \quad \langle a', b\rangle \in f$$

sledi da je

$$a = a'.$$

2.2.3 Zadatak Formalizovati predikat $\mathrm{Fun}(x)$: "x je funkcija".

Umesto $\langle a, b\rangle \in f$ pišemo uobičajeno $b = f(a)$. Primetimo da je za funkciju $f \subseteq A \times B$

$$\mathrm{dom}(f) = \{a \in A \mid (\exists b \in B)(\langle a, b\rangle \in f)\},$$

kao i da je

$$\mathrm{rng}(f) = \{b \in B \mid (\exists a \in A)(\langle a, b\rangle \in f)\}.$$

Ako je $\mathrm{dom}(f)$ pravi podskup skupa A, za funkciju f kažemo da je *parcijalna*. U slučaju da je $\mathrm{dom}(f) = A$, za funkciju f kažemo da je *totalna*. Ukoliko ne naglasimo drugačije, podrazumevaćemo da su funkcije sa kojima radimo totalne. Radi dodatnog pojednostavljenja notacije definišemo sledeća dva predikata:

- $f : A \longrightarrow B$ je formula $(\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = A \wedge \mathrm{rng}(f) \subseteq B)$;
- $f : A \longrightarrow V$ je formula $(\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = A)$.

Neka $f : A \longrightarrow B$. Za f kažemo da je:

- *Injekcija* (1-1), ako za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ iz $a_1 \neq a_2$ sledi da je $f(a_1) \neq f(a_2)$;
- *Surjekcija* (na), ako za svako $b \in B$ postoji $a \in A$ tako da je $f(a) = b$;
- *Bijekcija*, ako je 1-1 i na.

Neka $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$. Kompoziciju funkcija f i g, u oznaci $g \circ f$, definišemo sa

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A.$$

Da $g \circ f : A \longrightarrow C$ neposredno sledi iz sheme separacije, aksiome ekstenzionalnosti i činjenice da je
$g \circ f = \{x \mid \exists a \exists b \exists c (a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C \wedge f(a) = b \wedge g(b) = c \wedge x = \langle a, c \rangle)\}$.

2.2.4 Zadatak Pokazati da je kompozicija funkcija asocijativna.

2.2.5 Zadatak Neka $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$. Pokazati da važi:

1. Ako je $g \circ f$ 1-1, onda je f 1-1;
2. Ako je $g \circ f$ na, onda je g na.

Inverznu i *direktnu* sliku za funkciju $f : A \longrightarrow B$ definišemo na sledeći način:

- Inverzna slika skupa $X \subseteq B$ je definisana sa

  $$f^{-1}[X] = \{x \mid x \in A \wedge \exists y (y \in X \wedge y = f(x))\}.$$

  Ako je funkcija f bijekcija, onda postoji jedinstvena funkcija

  $$g : B \longrightarrow A$$

takva da za proizvoljne $a \in A$ i $b \in B$ važi

$$g(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b.$$

Funkciju g zovemo i *inverznom funkcijom* funkcije f i označavamo je sa f^{-1};

- Direktna slika skupa $X \subseteq A$ je skup

$$f[X] = \{x \mid x \in B \wedge \exists y(y \in X \wedge x = f(y))\}.$$

2.2.6 Zadatak Neka je $f : A \longrightarrow B$ proizvoljna funkcija, X, Y proizvoljni podskupovi skupa B i U, V proizvoljni podskupovi skupa A. Dokazati:

1. $f^{-1}[X \cap Y] = f^{-1}[X] \cap f^{-1}[Y]$;
2. $f^{-1}[X \cup Y] = f^{-1}[X] \cup f^{-1}[Y]$;
3. $f[U \cap V] \subseteq f[U] \cap f[V]$. Primerom pokazati da obratna inkluzija ne mora da važi;
4. $f[U \cup V] = f[U] \cup f[V]$.

Neka je A proizvoljan skup. *Identičko preslikavanje* skupa A, u oznaci id_A, definišemo sa

$$id_A(a) = a, \ a \in A.$$

Neka je $f : A \longrightarrow B$ proizvoljna funkcija i neka je X neprazan podskup skupa A. *Restrikciju* funkcije f na skup X, u oznaci $f \upharpoonright X$, definišemo sa

$$(f \upharpoonright X)(x) = f(x), \ x \in X.$$

2.2.7 Definicija Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Skup ${}^XY$ svih funkcija čiji je domen skup X a kodomen skup Y definišemo sa

$${}^XY =_{\text{def}} \{x \mid x \in P(X \times Y) \wedge x : X \longrightarrow Y\}.$$

Skup R je *binarna relacija* na skupu A ako je $R \subseteq A \times A$. Umesto $\langle a, b\rangle \in R$ pišemo uobičajeno aRb. Za binarnu relaciju R na skupu A kažemo da je:

- *Refleksivna*, ako je aRa za svako $a \in A$;
- *Irefleksivna*, ako nije aRa ni za jedno $a \in A$;
- *Simetrična*, ako za proizvoljne $a, b \in A$ iz aRb sledi bRa;
- *Antisimetrična*, ako za proizvoljne $a, b \in A$ iz aRb i bRa sledi da je $a = b$;
- *Tranzitivna*, ako za proizvoljne $a, b, c \in A$ iz aRb i bRc sledi aRc;
- *Relacija ekvivalencije*, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna;
- *Relacija poretka*, ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna;
- *Relacija strogog poretka*, ako je irrefleksivna i tranzitivna.

Sa $<_A$ ćemo po pravilu označavati relaciju strogog poretka na skupu A, a sa $\leqslant_A$ odgovarajuću dopunu relacije $<_A$ do relacije poretka. Preciznije,

$$\leqslant_A = <_A \cup \{x \mid x \in A \times A \wedge \exists a(a \in A \wedge x = \langle a, a\rangle)\}.$$

2.2.8 Definicija Par $\langle A, \leqslant_A\rangle$ je *parcijalno uređen skup* (parcijalno uređenje) ako je $\leqslant_A$ relacija poretka na skupu A. Par $\langle A, <_A\rangle$ je *strogo parcijalno uređenje* ako je $<_A$ relacija strogog poretka na skupu A.

2.2.9 Zadatak Neka je A proizvoljan skup. Pokazati da je sa

$$X \leqslant_{P(A)} Y \Leftrightarrow_{\text{def}} X \subseteq Y$$

korektno definisana relacija poretka na skupu $P(A)$. Definisati odgovarajuću relaciju strogog poretka.

2.2.10 Definicija Parcijalno uređenje $\langle A, \leqslant_A \rangle$ je *linearno* ako su svaka dva elementa uporediva, tj. ako za proizvoljne $a, b \in A$ je $a \leqslant_A b$, ili je $b \leqslant_A a$.

2.2.11 Zadatak Naći potreban i dovoljan uslov koji treba da zadovolji skup A da bi uređenje $\langle P(A), \subseteq \rangle$ bilo linearno.

Neka je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ parcijalno uređenje, X neprazan podskup skupa A i neka $a \in A$.

- Za $a \in A$ kažemo da je *majoranta* (gornje ograničenje) skupa X ako za proizvoljno $x \in X$ važi $x \leqslant_A a$. Ako za proizvoljno $x \in X$ važi $a \leqslant_A x$, onda za a kažemo da je *minoranta* (donje ograničenje) skupa X.

- Ukoliko postoji, jedinstveno najmanje gornje ograničenje skupa X zovemo *supremumom* skupa X i označavamo ga sa $\sup X$. Ako $\sup X$ pripada skupu X, onda za njega kažemo da je *maksimum* skupa X.

- Ukoliko postoji, jedinstveno najveće donje ograničenje skupa X zovemo *infimumom* skupa X i označavamo ga sa $\inf X$. Ako $\inf X$ pripada skupu X, onda za njega kažemo da je *minimum* skupa X.

- Kažemo da je a *minimalni element* ukoliko ni za jedno $b \neq a$ nije $b \leqslant_A a$. Za a kažemo da je *maksimalni element* ukoliko ni za jedno $b \neq a$ nije $a \leqslant_A b$.

2.2.12 Zadatak Navesti primer parcijalnog uređenja $\langle A, \leqslant_A \rangle$ i skupa $X \subseteq A$ tako da X ima majorante u poretku $\leqslant_A$, ali nema supremum. Uraditi isto i za minorante i infimum.

Neka je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ parcijalno uređenje. Intervale definišemo na sledeći način:

$$(a, b) \quad = \quad \{x \mid x \in A \wedge a <_A x <_A b\}$$

$$\begin{aligned}
[a,b) &= \{x \mid x \in A \wedge a \leqslant_A x <_A b\}\\
(a,b] &= \{x \mid x \in A \wedge a <_A x \leqslant_A b\}\\
[a,b] &= \{x \mid x \in A \wedge a \leqslant_A x \leqslant_A b\}\\
(\cdot,a) &= \{x \mid x \in A \wedge x <_A a\}\\
(\cdot,a] &= \{x \mid x \in A \wedge x \leqslant_A a\}\\
(a,\cdot) &= \{x \mid x \in A \wedge a <_A x\}\\
[a,\cdot) &= \{x \mid x \in A \wedge a \leqslant_A x\}.
\end{aligned}$$

2.3 Dobro uređeni skupovi

Za parcijalno uređen skup $\langle A, \leqslant_A \rangle$ kažemo da je *dobro uređen* ako svaki neprazan podskup skupa A ima minimum.

2.3.1 Zadatak Pokazati da je svako dobro uređenje ujedno i linearno.

Uputstvo

Iskoristiti činjenicu da svaki dvočlani podskup ima minimum.

□

2.3.2 Definicija Neka su $\langle A, \leqslant_A \rangle$ i $\langle B, \leqslant_B \rangle$ proizvoljna uređenja. Bijekcija $f : A \longrightarrow B$ je *izomorfizam* ako za proizvoljne $a_1, a_2 \in A$ važi

$$a_1 \leqslant_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leqslant_B f(a_2).$$

Sa $\langle A, \leqslant_A \rangle \cong \langle B, \leqslant_B \rangle$ ćemo označavati činjenicu da su navedena uređenja međusobno izomorfna.

2.3.3 Zadatak Neka je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ dobro uređenje i neka je X proizvoljan neprazan podskup skupa A. Pokazati da je $\langle X, \leqslant_A \rangle$ takođe dobro uređenje[1].

[1]Strogo formalno, umesto $\langle X, \leqslant_A \rangle$ posmatra se uređenje $\langle X, \leqslant_X \rangle$, pri čemu je $\leqslant_X$ restrikcija uređenja $\leqslant_A$ na skup X.

2.3.4 Zadatak Neka je $f : A \longrightarrow B$ izomorfizam uređenja $\langle A, \leqslant_A \rangle$ i $\langle B, \leqslant_B \rangle$. Pokazati da je tada i inverzna funkcija $f^{-1} : B \longrightarrow A$ takođe izomorfizam.

2.3.5 Teorema *Neka je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ dobro uređenje i neka je a proizvoljan element skupa A. Tada su $\langle A, \leqslant_A \rangle$ i $\langle (\cdot, a), \leqslant_A \rangle$ međusobno neizomorfna uređenja.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka je funkcija $f : A \longrightarrow (\cdot, a)$ izomorfizam pomenutih uređenja. Po shemi separacije postoji skup

$$X = \{x \mid x \in A \wedge x \neq f(x)\}.$$

obzirom da je f bijekcija i da je $(\cdot, a)$ pravi podskup skupa A, skup X mora biti neprazan. Kako je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ dobro uređenje, skup X ima minimum, recimo m_X. Sada važi sledeće:

- Za svako $x <_A m_X$ je $f(x) = x$;
- Ili je $f(m_X) <_A m_X$, ili je $m_X <_A f(m_X)$.

Ako bi bilo $f(m_X) <_A m_X$, onda bi zbog monotonosti funkcije f moralo biti i

$$f(f(m_X)) <_A f(m_X),$$

a ovo je nemoguće jer iz $f(m_X) <_A m_X$ sledi da je

$$f(f(m_X)) = f(m_X).$$

Preostaje jedino slučaj $m_X <_A f(m_X) <_A a$ (poslednja nejednakost sledi iz činjenice da $f : A \longrightarrow (\cdot, a)$). Kako je i f^{-1} izomorfizam, mora biti i

$$f^{-1}(m_X) <_A f^{-1}(f(m_X)) = m_X,$$

odakle sledi da je $f^{-1}(m_X)$ fiksna tačka funkcije f, tj.

$$f(f^{-1}(m_X)) = f^{-1}(m_X).$$

Dakle
$$m_X = f(f^{-1}(m_X)) = f^{-1}(m_X),$$
odakle sledi da je $f(m_X) = m_X$, što je u kontradikciji sa
$$m_X <_A f(m_X).$$

$\square$

2.3.6 Teorema *Neka su $\langle A, \leqslant_A\rangle$ i $\langle B, \leqslant_B\rangle$ dobra uređenja i neka su*
$$f, g : A \longrightarrow B$$
izomorfizmi. Tada je $f = g$.

Dokaz

Neka je $X = \{x \mid x \in A \wedge f(x) \neq g(x)\}$. Da bi dokazali teoremu dovoljno je da pokažemo da je skup X prazan. U tom cilju, pretpostavimo da je skup X neprazan i sa m_X označimo njegov minimum u $\langle A, \leqslant_A\rangle$. Tada važi sledeće:

- Za svako $x <_A m_X$ je $f(x) = g(x)$;
- Ili je $f(m_X) <_B g(m_X)$, ili je $g(m_X) <_B f(m_X)$.

Pretpostavimo da je $f(m_X) <_B g(m_X)$. Pošto je
$$g^{-1} : B \longrightarrow A$$
takođe izomorfizam, imamo da je $g^{-1}(f(m_X)) <_A m_X$, odakle sledi da je
$$f(g^{-1}(f(m_X))) = g(g^{-1}(f(m_X))) = f(m_X).$$
Kako je
$$\begin{aligned} f(g^{-1}(f(m_X))) = f(m_X) \quad &\Leftrightarrow \quad g^{-1}(f(m_X)) = m_X \\ &\Leftrightarrow \quad g(g^{-1}(f(m_X))) = g(m_X) \\ &\Leftrightarrow \quad f(m_X) = g(m_X), \end{aligned}$$

na osnovu prethodnog, sledi da je $f(m_X) = g(m_X)$, što je po izboru skupa m_X nemoguće. Sasvim slično se pokazuje da pretpostavka $g(m_X) <_B f(m_X)$ dovodi do kontradikcije, odakle sledi da skup X mora biti prazan.

□

2.3.7 Teorema *Neka su $\langle A, \leqslant_A\rangle$ i $\langle B, \leqslant_B\rangle$ proizvoljna dobra uređenja. Tada važi tačno jedna od sledeće tri mogućnosti:*

1. $\langle A, \leqslant_A\rangle \cong \langle B, \leqslant_B\rangle$;
2. *Postoji* $a \in A$ *tako da* $\langle(\cdot, a), \leqslant_A\rangle \cong \langle B, \leqslant_B\rangle$;
3. *Postoji* $b \in B$ *tako da* $\langle(\cdot, b), \leqslant_B\rangle \cong \langle A, \leqslant_A\rangle$.

Dokaz

Neka je X skup svih $a \in A$ za koje postoji (jedinstveno) $b_a \in B$ tako da je

$$\langle(\cdot, a), \leqslant_A\rangle \cong \langle(\cdot, b_a), \leqslant_B\rangle.$$

Na osnovu teoreme 2.3.6, za svako $a \in X$ postoji jedinstveni izomorfizam $f_a : (\cdot, a) \longrightarrow (\cdot, b_a)$. Slično, skup Y definišemo kao skup svih $b \in B$ za koje postoji $a_b \in A$ tako da je

$$\langle(\cdot, b), \leqslant_B\rangle \cong \langle(\cdot, a_b), \leqslant_A\rangle.$$

Primetimo da je neposredna posledica teoreme 2.3.6 činjenica da iz $a_1 <_A a_2$ sledi da je $f_{a_1} = f_{a_2} \upharpoonright (\cdot, a_1)$. Odavde sledi da je sa

$$f =_{\text{def}} \bigcup\{f_a \mid a \in X\}$$

korektno definisan izomorfizam dobrih uređenja $\langle X, \leqslant_A\rangle$ i $\langle Y, \leqslant_B\rangle$. Da bismo dokazali teoremu u potpunosti, preostaje još samo da pokažemo da je $X = A$ ili $Y = B$.

Pretpostavimo suprotno, neka je $X \neq A$ i $Y \neq B$. Tada postoje

$$m_1 = \min_{\leqslant_A}(A \setminus X) \quad \text{i} \quad m_2 = \min_{\leqslant_B}(B \setminus Y).$$

Međutim, odavde neposredno sledi da je $X = (\cdot, m_1)$ i $Y = (\cdot, m_2)$, što je nemoguće jer bi u tom slučaju funkcija f bila izomorfizam između $\langle(\cdot, m_1), \leqslant_A\rangle$ i $\langle(\cdot, m_2), \leqslant_B\rangle$, pa bismo imali da $m_1 \in X$ i $m_2 \in Y$. □

2.4 Indukcija i rekurzija

U ovoj sekciji ćemo fiksirati neko dobro uređenje $\langle A, \leqslant_A \rangle$.

2.4.1 Teorema [Indukcija] *Neka je skup X podskup skupa A takav da za svako $a \in A$ iz $(\cdot, a) \subseteq X$ sledi da $a \in X$. Tada je $X = A$.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka je $A \setminus X$ neprazan. Tada postoji

$$a = \min_{\leqslant_A}(A \setminus X).$$

No odavde neposredno sledi da je $(\cdot, A) \subseteq X$, odakle po uslovima teoreme sledi da $a \in X$, što je u suprotnosti sa izborom skupa a. $\square$

2.4.2 Teorema [Rekurzija] *Neka je f proizvoljna funkcija sa domenom $P(A \times A)$. Tada postoji jedinstvena funkcija g sa domenom A takva da za svako $a \in A$ važi*

$$g(a) = f(g \restriction (\cdot, a)). \tag{2.1}$$

Dokaz

Jedinstvenost. Neka funkcije g_1 i g_2 zadovoljavaju (2.1). Indukcijom pokazujemo da je $g_1 = g_2$. Neka je $a \in A$ tako da je $g_1 \restriction (\cdot, a) = g_1 \restriction (\cdot, a)$. Tada je

$$g_1(a) = f(g_1 \restriction (\cdot, a)) = f(g_2 \restriction (\cdot, a)) = g_2(a),$$

odakle na osnovu teoreme indukcije sledi da je $g_1 = g_2$.

Egzistencija. Neka je X skup svih $a \in A$ za koje postoji jedinstvena funkcija g_a sa domenom $(\cdot, a)$ takva da za svako $x <_A a$ važi

$$g_a(x) = f(g_a \restriction (\cdot, x)).$$

Odavde proizilazi da za proizvoljne $a, b \in X$, iz $b <_A a$ sledi da je

$$g_b = g_a \restriction (\cdot, b).$$

I više od toga, ako postoji $M_a = \max_{\leqslant_A}(\cdot, a)$ onda je

$$g_a = (\bigcup\{g_b \mid b <_A a\}) \cup \{\langle M_a, g_{M_a}\rangle\},$$

a u suprotnom je $g_a = \bigcup\{g_b \mid b <_A a\}$. Primetimo da smo ovim zapravo pokazali da iz $(\cdot, a) \subseteq X$ sledi da $a \in X$, odakle po teoremi 2.4.1 sledi da je $X = A$. Sada traženu funkciju g definišemo na sledeći način:

- Ako je $A = (\cdot, a]$, onda je

$$g =_{\text{def}} (\bigcup\{g_b \mid b \in A\}) \cup \{\langle a, g_a\rangle\};$$

- Ako A nema maksimum, onda je

$$g =_{\text{def}} \bigcup\{g_a \mid a \in A\}.$$

□

2.5 Prirodni brojevi

Kažemo da je skup A *induktivan* ako važi sledeće:

- $0 \in A$;
- Ako $a \in A$, onda i $a \cup \{a\} \in A$.

2.5.1 Zadatak Pokazati da je svojstvo *biti induktivan* zatvoreno za presek, tj. da je presek dva induktivna skupa takođe induktivan skup.

Primetimo da svaki induktivan skup sadrži sve numerale, pa mora biti beskonačan. Na osnovu do sada uvedenih aksioma se ne može dokazati egzistencija induktivnog skupa. Pošto je teorija skupova suštinski teorija beskonačnosti, egzistenciju induktivnih skupova postuliramo sledećom aksiomom:

Aksioma 6 (Aksioma beskonačnosti)

$$\exists x_0(0 \in x_0 \land (\forall x_1 \in x_0)(x_1 \cup \{x_1\} \in x_0)).$$

Prevedeno na govorni jezik, postoji induktivan skup.

2.5.2 Teorema *Postoji najmanji induktivan skup (u smislu inkluzije).*

Dokaz

Neka je A proizvoljan induktivan skup. Po shemi separacije postoji skup

$$\omega =_{\text{def}} \{x \mid x \in A \land \forall y(y \subseteq A \land \text{“}y \text{ je induktivan”} \Rightarrow x \in y)\}.$$

Odavde neposredno sledi da je ω induktivan skup koji je podskup svakog induktivnog podskupa skupa A. Neka je sada B ma koji induktivan skup različit od A. Pošto je $A \cap B$ induktivan podskup skupa A, imamo da je

$$\omega \subseteq A \cap B \subseteq B.$$

Ovim smo pokazali da je ω za inkluziju najmanji induktivan skup.

$\square$

2.5.3 Zadatak Pokazati da za svako $x \in \omega$ važi $x \notin x$.

Uputstvo

Pokazati da je skup $X = \{x \mid x \in \omega \land x \notin x\}$ induktivan. $\square$

2.5.4 Zadatak Pokazati da je skup ω tranzitivan.

Uputstvo

Pokazati da je skup $X = \{x \mid x \in \omega \land x \subseteq \omega\}$ induktivan. $\square$

2.5.5 Zadatak Pokazati da je $\bigcup \omega = \omega$.

Uputstvo
Iz tranzitivnosti skupa ω sledi da je $\bigcup\omega \subseteq \omega$. Što se tiče obratne inkluzije, ako $x \in \omega$, onda zbog induktivnosti skupa ω mora biti i

$$x \cup \{x\} \in \omega.$$

Sada je $x \cup \{x\} \subseteq \bigcup\omega$ i $x \in x \cup \{x\}$, odakle sledi da $x \in \bigcup\omega$. □

2.5.6 Zadatak Pokazati da je svaki element skupa ω tranzitivan skup.

Uputstvo
Pokazati da je skup $X = \{x \mid x \in \omega \wedge \bigcup x \subseteq x\}$ induktivan. U tom cilju iskoristiti teoremu 2.1.14. □

2.5.7 Zadatak Pokazati da relacija $\in$ skupovne pripadnosti na svakom $x \in \omega$ generiše strogo dobro uređenje.

Uputstvo
Pokazati da je skup $X = \{x \mid x \in \omega \wedge$ "$\langle x, \in\rangle$ je dobro uređenje"$\}$ induktivan. □

2.5.8 Zadatak Pokazati da je $\langle\omega, \in\rangle$ strogo dobro uređenje.

Uputstvo
Na osnovu zadataka 2.5.3 i 2.5.4 sledi da je $\langle\omega, \in\rangle$ strogo parcijalno uređenje. Neka je X neprazan podskup skupa ω i neka $x \in X$. Pokazati da je $\min_{\in} X = \min_{\in} x$. □

Na osnovu teoreme 2.4.2, sa

- $n + 0 = 0$;
- $n + (m \cup \{m\}) = (n + m) \cup \{n + m\}$;
- $n \cdot 0 = 0$;
- $n \cdot (m \cup \{m\}) = n + (n \cdot m)$;

- $n^0 = 1$;
- $n^{m\cup\{m\}} = n \cdot (n^m)$

su korektno definisane operacije *sabiranja*, *množenja* i *stepenovanja* prirodnih brojeva. Umesto $m \cup \{m\}$ ćemo pisati $m+1$. Sličnom tehnikom kao i u prethodnim zadacima (izborom odgovarajućeg induktivnog podskupa skupa ω) se pokazuju uobičajena svojstva ovih operacija.

2.5.9 Definicija Kažemo da je skup A *konačan* ako postoje $n \in \omega$ i bijekcija $f : A \longrightarrow n$. U suprotnom kažemo da je skup A *beskonačan*.

2.5.10 Zadatak Pokazati da za svako $n \in \omega$ nijedna funkcija

$$f : n+1 \longrightarrow n$$

nije 1-1.

Uputstvo

Neka je X skup svih prirodnih brojeva za koje tvrđenje važi i neka je $n \in X$. Pretpostavimo da postoji 1-1 funkcija

$$f : (n+1)+1 \longrightarrow n+1.$$

Neka je $f(n+1) = a$. Ako je $a = n$, onda je

$$f \restriction (n+1) : n+1 \longrightarrow n$$

1-1, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $n \in X$. Preostaje slučaj $a < n$. Ako $n \notin f[(n+1)+1]$, onda je funkcija

$$g : (n+1)+1 \longrightarrow n+1$$

definisana sa

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq n+1 \\ n & , \quad x = n+1 \end{cases}$$

1-1, pa je i $g \restriction (n+1) : n+1 \longrightarrow n$ takođe 1-1, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $n \in X$. Neka je $b < n+1$ takvo da je $f(b) = n$. Tada je funkcija $h : (n+1)+1 \longrightarrow n+1$ definisana sa

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \neq n+1 \wedge x \neq b \\ n & , \quad x = n+1 \\ a & , \quad x = b \end{cases}$$

1-1, pa je i $h \restriction (n+1) : n+1 \longrightarrow n$ takođe 1-1, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $n \in X$.

Ovim smo pokazali da i $n+1 \in X$. Kako trivijalno $0 \in X$, skup X je induktivan, pa mora biti $X = \omega$. □

2.6 Klase

Za formulu (svojstvo) jezika teorije skupova $\varphi(x)$ kažemo da je *skupovnog tipa* ako postoji skup kome pripadaju svi skupovi sa svojstvom $\varphi(x)$. Sheme separacije i zamene nam obezbeđuju mnoštvo (beskonačno mnogo) primera takvih svojstava.

2.6.1 Teorema [Russellov paradoks] *Formula $x \notin x$ nije skupovnog tipa.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka postoji skup A takav da važi

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin x,$$

tj. $x \notin x$ je definiciono svojstvo skupa A, pa mora važiti za svaki skup x, pa i za skup $x = A$. No tada dobijamo kontradikciju:

$$A \in A \Leftrightarrow A \notin A.$$

□

2.6.2 Posledica *Formula $x = x$ nije skupovnog tipa.*

Dokaz
Pretpostavimo suprotno, neka postoji skup V takav da važi

$$x \in V \Leftrightarrow x = x.$$

Tada, po shemi separacije, postoji skup A takav da

$$x \in A \Leftrightarrow x \in V \wedge x \notin x.$$

Međutim, $x \in V$ je uvek tačno jer je ekvivalentno sa $x = x$, pa imamo da

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin x.$$

Ali ovo je na osnovu prethodne teoreme kontradiktorno, pa polaznu pretpostavku moramo odbaciti. □

Mada Cantor nije eksplicitno navodio aksiome, analizom njegovih radova došlo se do zaključka da su se implicitno podrazumevale aksiome ekstenzionalnosti i izbora, kao i shema komprehensije:

Svako svojstvo je skupovnog tipa.

Protivrečnost sheme komprehensije je dokazao Russell (teorema 2.6.1) elegantnom primenom Cantorovog dijagonalnog argumenta. Sheme zamene i separacije su zapravo zdrave (neprotivrečne) instance sheme komprehensije.

Kao što smo ranije videli, formule omogućuju definisanje novih relacijskih znakova, ili, semantički gledano, novih relacija. Posebno, interpretacije unarnih predikata u modelima su podskupovi skupa nosača, što je posebno značajno za primene metode unutrašnjih modela u dokazima relativne konsistentnosti. Primera radi, u dokazu relativne konsistentnosti aksiome izbora i generalisane kontinuum hipoteze sa sistemom ZF definisaćemo predikat $L(x)$: "x je konstruktibilan" i pokazati da će za svaki model $\mathcal{M}$ teorije ZF u podmodelu čiji je skup nosač $L^{\mathcal{M}}$ pored ZF važiti i AC i GCH.

Stoga uvodimo pojam *klase* kao definabilnog sa parametrima unarnog predikata. Ako je $\mathtt{K}$ klasa, umesto $\mathtt{K}(x)$ pisaćemo $x \in \mathtt{K}$. Ova konvencija nameće skupovni tretman klasa u smislu da ćemo umesto $\mathtt{J} \Leftrightarrow \mathtt{K}$ pisati $\mathtt{J} = \mathtt{K}$, umesto $\mathtt{J} \wedge \mathtt{K}$ pisati $\mathtt{J} \cap \mathtt{K}$ itd. Takođe ćemo za klasu $\mathtt{K}$ koristiti i oznaku

$$\{x \mid \mathtt{K}(x)\}.$$

2.6.3 Definicija Klasu svih skupova V definišemo sa

$$V =_{\text{def}} \{x \mid x = x\}.$$

Neka je A proizvoljan skup. Tada klasu $\{x \mid x \in A\}$ čine upravo svi elementi skupa A, pa je stoga možemo identifikovati sa skupom A. Ukoliko formula $\varphi(x)$ nije skupovnog tipa, za odgovarajuću klasu $\{x \mid \varphi(x)\}$ kažemo da je *prava klasa.*

2.6.4 Teorema *Neka je $\{x \mid \varphi(x)\}$ neprazna klasa. Tada je*

$$\bigcap\{x \mid \varphi(x)\} =_{\text{def}} \{x \mid \forall y(\varphi(y) \Rightarrow x \in y)\}$$

skup.

Dokaz

Neka je skup A takav da važi $\varphi(A)$. Pretpostavimo da skup X pripada klasi $\bigcap\{x \mid \varphi(x)\}$. Tada za svaki skup Y takav da važi $\varphi(Y)$ mora biti i $X \in Y$, odakle sledi da $X \in A$. Znači da je

$$\bigcap\{x \mid \varphi(x)\} \subseteq A$$

(ovde smo inkluziju upotrebili u kontekstu klasa), pa je po shemi separacije $\bigcap\{x \mid \varphi(x)\}$ skup. $\square$

2.6.5 Primer Ako sa Ind označimo klasu svih induktivnih skupova, onda iz teoreme 2.5.2, aksiome beskonačnosti i prethodne teoreme neposredno sledi da je

$$\omega = \bigcap \text{Ind}.$$

2.7 Ordinali i kardinali

Tranzitivan skup A je *ordinal* ako je strogo dobro uređen relacijom pripadanja $\in$. Ordinale ćemo beležiti malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ uz korišćenje indeksa, a sa Ord ćemo označavati klasu svih ordinala.

S obzirom da relacija pripadanja po definiciji na svakom ordinalu indukuje strogo dobro uređenje, za svaki ordinal α važi

$$\alpha \notin \alpha.$$

2.7.1 Primer Prazan skup 0 je ordinal. Takođe, za ma koji ordinal α se sasvim lako pokazuje da je i njegov *sledbenik*

$$\alpha + 1 =_{\text{def}} \alpha \cup \{\alpha\}$$

ordinal. Skup prirodnih brojeva ω je ordinal; isto važi i za sve njegove elemente (videti zadatke 2.5.3–2.5.7).

2.7.2 Zadatak Neka je α proizvoljan ordinal. Dokazati da su svi njegovi elementi takođe ordinali.

Uputstvo

Neka je $a \in \alpha$ proizvoljno. Pošto je α tranzitivan skup, imamo da je $a \subseteq \alpha$, pa kako je $\langle \alpha, \in \rangle$ strogo dobro uređenje, i par $\langle a, \in \rangle$ takođe mora biti strogo dobro uređenje. U dokazu tranzitivnosti skupa a iskoristiti tranzitivnost ordinala α. $\square$

2.7.3 Zadatak Neka su α i β ordinali takvi da je $\alpha \subseteq \beta$. Dokazati da je ili $\alpha = \beta$ ili $\alpha \in \beta$.

Uputstvo

Neka je $\beta \setminus \alpha$ neprazan skup i neka je a njegov $\in$-minimum. To posebno znači da je $a \subseteq \alpha$, a kako je $\alpha \subseteq a$, mora biti i $a = \alpha$, tj. $\alpha \in \beta$. $\square$

2.7.4 Zadatak Neka su α i β proizvoljni ordinali. Pokazati da je $\alpha \subseteq \beta$, ili je $\beta \subseteq \alpha$.

Uputstvo

Pretpostavimo da je skup $\alpha \setminus \beta$ neprazan. S obzirom da relacija pripadanja $\in$ na svakom ordinalu indukuje dobro uređenje, skup $\alpha \setminus \beta$ ima $\in$-minimum, recimo a. To posebno znači da je $a \in \alpha \setminus \beta$ i da je $a \subseteq \beta$ ($\in$-minimalnost skupa a: ako bi za neko $x \in a$ bilo $x \notin \beta$, onda bi zbog $a \subseteq \alpha$ bilo $x \in \alpha \setminus \beta$, što je u suprotnosti sa izborom elementa a).

Ali tada mora biti i $a = \beta$, jer bi u suprotnom, na osnovu prethodnog zadatka, važilo i $a \in \beta$, što je u suprotnosti sa izborom skupa a.

□

2.7.5 Zadatak Neka je A proizvoljan skup čiji su svi elementi ordinali. Pokazati da je tada i skup $\bigcup A$ ordinal.

Uputstvo

Primetimo da na osnovu zadatka 2.7.2 sledi da su svi elementi skupa $\bigcup A$ ordinali, a da iz primera 2.7.3, 2.7.4 sledi da relacija pripadanja $\in$ indukuje na $\bigcup A$ linearno uređenje. Neka je X neprazan podskup skupa $\bigcup A$ i neka $x \in X$. Tada postoji ordinal $\alpha \in A$ takav da $x \in \alpha$. Iz tranzitivnosti α sledi da je $x \subseteq \alpha$. Ako je $X \cap x \cap \alpha = 0$, onda je $\min\limits_{\in} X = x$. U suprotnom je

$$\min_{\in} X = \min_{\in}(X \cap x \cap \alpha).$$

S obzirom da iz teoreme 2.1.14 sledi i tranzitivnost skupa $\bigcup A$, on mora biti ordinal. □

2.7.6 Zadatak Neka je A proizvoljan skup. Pokazati da postoji ordinal α takav da $\alpha \notin A$.

Uputstvo

Prvo pokazati da je $\bigcup \mathrm{Ord} = \mathrm{Ord}$. Ako bi postojao skup koji sadrži sve ordinale, onda bi i klasa svih ordinala Ord po shemi separacije bila skup. Ali tada bi klasa Ord bila i ordinal, pa bi važilo $\mathrm{Ord} \in \mathrm{Ord}$, što je u suprotnosti sa definicijom pojma ordinala. □

Prethodna razmatranja sumirajmo sledećom teoremom:

2.7.7 Teorema *Neka je na klasi Ord svih ordinala definisana binarna relacija $\leqslant$ sa*

$$\alpha \leqslant \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$$

i neka je $\alpha < \beta$ ako $\alpha \in \beta$, tj. ako $\alpha \leqslant \beta$ i $\alpha \neq \beta$. Tada važi:

- *$\leqslant$ je dobro uređenje klase Ord;*
- *Ako je x proizvoljan skup čiji su svi elementi ordinali, onda je ordinal $\bigcup x$ $\leqslant$–supremum skupa x u klasi Ord;*
- *Za svaki ordinal α je ili $\alpha = \bigcup \alpha$, ili $\alpha = \bigcup \alpha \ + \ 1$;*
- *Za svaki ordinal α je $\alpha < \alpha + 1$ i između α i $\alpha + 1$ nema drugih ordinala;*
- *Za svaki skup x postoji ordinal α takav da $\alpha \notin x$.*

□

Iz teoreme 2.3.7 neposredno sledi da je svaki dobro uređen skup izomorfan tačno jednom ordinalu. Ordinali zapravo predstavljaju *kanonsku reprezentaciju* dobro uređenih skupova.

Ordinal α ćemo zvati *graničnim* ordinalom ako je $\bigcup \alpha = \alpha$. U suprotnom je $\alpha = \bigcup \alpha + 1$, pa u tom slučaju ordinal α zovemo i *sledbenikom*. Na primer, 0 i ω su granični ordinali, a $\omega + 1$ je sledbenik ordinal.

2.7.8 Posledica [Transfinitna indukcija] *Neka je $\mathtt{A}$ podklasa klase svih ordinala Ord takva da za svaki ordinal α važi*

$$\alpha \subseteq \mathtt{A} \Rightarrow \alpha \in \mathtt{A}.$$

Tada je $\mathtt{A} = \mathrm{Ord}$.

Dokaz

U suprotnom, klasa Ord $\setminus$ $\mathtt{A}$ bi imala $\in$–minimum α. Međutim, tada bi bilo $\alpha \subseteq \mathtt{A}$, odakle bi sledilo $\alpha \in \mathcal{A}$. Kontradikcija. □

2.7.9 Teorema [Transfinitna rekurzija] *Neka* $\mathtt{F} : V \longrightarrow V$ *definabilna funkcija na univerzumu* V. *Tada postoji jedinstvena definabilna funkcija* $\mathtt{G} : \mathrm{Ord} \longrightarrow V$ *takva da za svaki ordinal* α *važi*

$$\mathtt{G}(\alpha) = \mathtt{F}(\mathtt{G} \restriction \alpha). \tag{2.2}$$

Dokaz

Neznatna modifikacija dokaza teoreme 2.4.2. □

Napomenimo da teorema transfinitne rekurzije nije teorema teorije ZFC već predstavlja tzv. shema teoremu - za definabilnu funkciju $\mathtt{F}$ na ordinalima rečenica

$$\forall\alpha(\exists_1 f : \alpha + 1 \longrightarrow V)(f(\alpha) = \mathtt{F}(f \restriction \alpha))$$

je teorema teorije ZFC. Problem se sastoji u tome što se metateorijski predikat "svaka definabilna funkcija na ordinalima" ne može iskazati formalnim ZFC sredstvima. Naime, metateorijskim prirodnim brojevima u ZFC formalizmu odgovaraju *numerali*, tj. termovi

$$0, \{0\}, \{0, \{0\}\}, \{0, \{0\}, \{0, \{0\}\}\}, \ldots,$$

pa je bilo koje kodiranje skupa formula u metateoriji zapravo definisano na numeralima, a predikat "biti numeral" nije predstavljiv unutar ZFC (u suprotnom ne bi postojali nestandardni modeli aritmetike).

2.7.10 Definicija[Ordinalna aritmetika] Sabiranje, množenje i stepenovanje ordinala formalno definišemo transfinitnom rekurzijom na sledeći način:

- $\alpha + 0 = \alpha$;
- $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$;
- $\alpha + \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha + \gamma$, ako je β granični ordinal;
- $\alpha \cdot 0 = 0$;

- $\alpha \cdot (\beta + 1) =_{\text{def}} \alpha \cdot \beta + \alpha$ (podrazumevamo da $\cdot$ ima veći prioritet od $+$);
- $\alpha \cdot \beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha \cdot \gamma$, ako je β granični ordinal;
- $\alpha^0 = 1$;
- $\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha =_{\text{def}} (\alpha^\beta) \cdot \alpha$;
- $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha^\gamma$, ako je β granični ordinal.

2.7.11 Zadatak Neka su α, β i γ proizvoljni ordinali. Pokazati da važi:

1. $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
2. $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
3. $0 + \alpha = \alpha \wedge \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
5. $\alpha < \beta \Leftrightarrow (\exists \gamma > 0)\beta = \alpha + \gamma$
6. $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$
7. $\beta < \gamma \Leftrightarrow \forall \alpha(\alpha + \beta < \alpha + \gamma)$
8. $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^\alpha \cdot \gamma^\beta$
9. $(\gamma^\alpha)^\beta = \gamma^{\alpha \cdot \beta}$
10. $(\forall \gamma > 1)\forall \alpha \forall \beta(\alpha < \beta \Rightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta)$.

Uputstvo Koristiti teoremu transfinitne indukcije. Primera radi, u dokazu asocijativnosti sabiranja ordinala, za proizvoljne ordinale α i β transfinitnom indukcijom treba pokazati da je klasa

$$\mathtt{A} =_{\mathrm{def}} \{\gamma \mid \gamma \in \mathrm{Ord} \wedge \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma\}$$

jednaka klasi Ord. $\square$

2.7.12 Primer Sabiranje i množenje ordinala nisu komutativne operacije. Takođe u opštem slučaju $(\alpha + \beta) \cdot \gamma$ ne mora biti jednako sa $\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. Pomenute činjenice ilustrujmo sledećim primerima:

- $1 + \omega = \omega < \omega + 1$;
- $2 \cdot \omega = \omega < \omega \cdot 2 = \omega + \omega$;
- $(1 + 1) \cdot \omega = \omega < 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega$.

Navedimo nekoliko važnih konstrukcija transfinitnom rekurzijom:

2.7.13 Primer Neka su α_ξ , $\xi \in \gamma$ proizvoljni ordinali. Ordinal $\sum\limits_{\xi \in \gamma} \alpha_\xi$ definišemo rekurzijom po γ na sledeći način:

- $\sum\limits_{\xi \in 0} \alpha_\xi = 0$
- $\sum\limits_{\xi \in \beta+1} \alpha_\xi = \sum\limits_{\xi \in \beta} \alpha_\xi \, + \, \alpha_\beta$
- $\sum\limits_{\xi \in \beta} \alpha_\xi = \bigcup\limits_{\eta \in \beta} \sum\limits_{\xi \in \eta} \alpha_\xi$, ako je β granični ordinal.

2.7.14 Kanonska bijekcija Γ Transfinitnom rekurzijom definišemo kanonsko preslikavanje Γ klase svih parova ordinala u klasu svih ordinala Ord na sledeći način:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum\limits_{\xi \in \beta} (\xi + \xi + 1) \, + \, \alpha & , \quad \alpha < \beta \\ \sum\limits_{\xi \in \alpha} (\xi + \xi + 1) \, + \, \alpha + \beta & , \quad \alpha \geqslant \beta > 0. \end{cases}$$

Pokažimo da je Γ bijekcija. Prvo ćemo pokazati surjektivnost. U tom cilju uočimo proizvoljan ordinal α. Kako je

$$\alpha < \sum_{\xi<\alpha+1} \xi+\xi+1 = (\sum_{\xi<\alpha} \xi+\xi+1) + \alpha+\alpha+1,$$

to postoji najmanji ordinal m_α takav da je $\alpha < \sum_{\xi<m_\alpha} \xi+\xi+1$. Minimalnost automatski povlači da je m_α sledbenik ordinal, jer bi u suprotnom bilo

$$\alpha \geqslant \bigcup\{\sum_{\xi<\beta} \xi+\xi+1 \mid \beta < m_\alpha\} = \sum_{\xi<m_\alpha} \xi+\xi+1,$$

što je u suprotnosti sa izborom ordinala m_α. Dakle,

$$m_\alpha = \bigcup m_\alpha \ + \ 1,$$

odakle sledi da je

$$\sum_{\xi<\bigcup m_\alpha} \xi+\xi+1 \leqslant \alpha < (\sum_{\xi<\bigcup m_\alpha} \xi+\xi+1) \ + \ \bigcup m_\alpha \ + \bigcup m_\alpha \ +1.$$

Sada ili postoji $\beta < m_\alpha$ tako da je $\alpha = (\sum_{\xi<\bigcup m_\alpha} \xi+\xi+1)+\beta$, ili postoji $\gamma \leqslant m_\alpha$ tako da važi $\alpha = (\sum_{\xi<\bigcup m_\alpha} \xi+\xi+1) \ + \ \bigcup m_\alpha \ +\gamma$. U prvom slučaju je $\alpha = \Gamma(\beta, \bigcup m_\alpha)$, a u drugom slučaju je $\alpha = \Gamma(\bigcup m_\alpha, \gamma)$.

Prelazimo na dokaz injektivnosti. Prvo, primetimo da je neposredna posledica definicije Γ činjenica da iz $\max_{\leqslant}\{\alpha,\beta\} < \max_{\leqslant}\{\alpha',\beta'\}$ sledi da je $\Gamma(\alpha,\beta) < \Gamma(\alpha',\beta')$. Dalje, za $\alpha,\beta < \gamma$ imamo da je

$$\Gamma(\alpha,\gamma) = (\sum_{\xi<\gamma} \xi+\xi+1)+\alpha < (\sum_{\xi<\gamma} \xi+\xi+1)+\gamma+\beta = \Gamma(\gamma,\beta).$$

Neka je $\alpha < \beta < \gamma$. Tada je

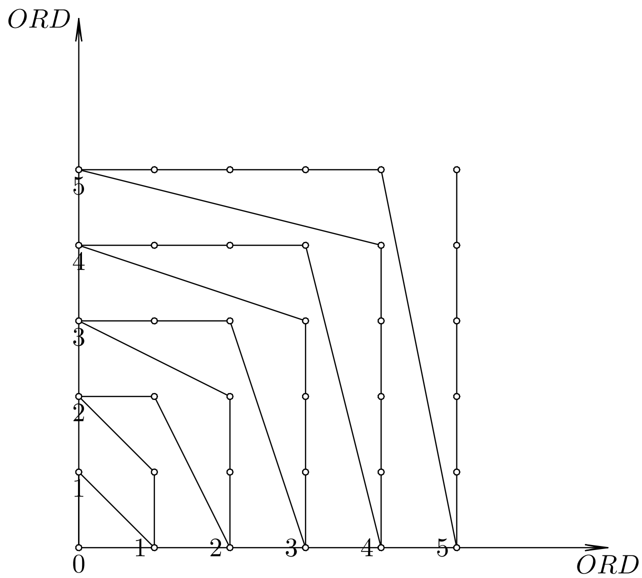
$$\Gamma(\alpha,\gamma) = (\sum_{\xi<\gamma} \xi+\xi+1)+\alpha < (\sum_{\xi<\gamma} \xi+\xi+1)+\beta = \Gamma(\beta,\gamma),$$

kao i

$$\Gamma(\alpha,\gamma) = (\sum_{\xi<\gamma} \xi + \xi + 1) + \alpha < (\sum_{\xi<\gamma} \xi + \xi + 1) + \beta = \Gamma(\beta,\gamma),$$

odakle zajedno sa prethodnim sledi injektivnost Γ.

Definisanu klasa-funkciju $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ zovemo i *kanonskom bijekcijom*. Odgovarajuće dobro uređenje koje Γ indukuje na $\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ shematski prikazujemo na sledeći način:



2.1: Kanonska bijekcija

2.7.15 Definicija[Nizovi] Neka je $\delta > 0$ proizvoljan granični ordinal. *δ–niz* je ma koja funkcija a sa domenom δ.

Nizove ćemo uglavnom označavati sa $\langle a_\xi \mid \xi < \delta\rangle$, pri čemu podrazumevamo da je $a_\xi = a(\xi)$. Posebno, za niz ordinala

$$\langle \alpha_\xi \mid \xi < \delta\rangle$$

kažemo da je *neprekidan* ako za svaki granični ordinal $\beta < \delta$ važi

$$\alpha_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} \alpha_\xi.$$

2.7.16 Teorema[Cantor, Bernstein] *Neka su A i B skupovi i neka su funkcije $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow A$ 1-1. Tada postoji bijekcija $h : A \longrightarrow B$.*

Dokaz

Teorema trivijalno važi ukoliko je jedna od funkcija f i g bijekcija, te stoga predpostavimo da ni jedna od njih nije surjekcija. Nizove

$$\langle A_n \mid n < \omega\rangle \text{ i } \langle B_n \mid n < \omega\rangle$$

definišimo rekurzivno na sledeći način:

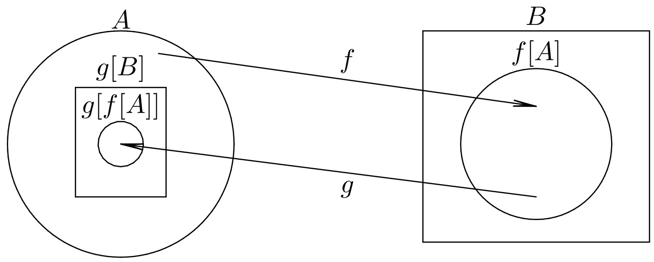
- $A_0 = A$;
- $B_0 = g[B]$;
- $A_{n+1} = g[f[A_n]]$;
- $B_{n+1} = g[f[B_n]]$.

Iz konstrukcije nizova $\langle A_n \mid n < \omega\rangle$ i $\langle B_n \mid n < \omega\rangle$ neposredno sledi da je

$$A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n,$$

kao i da je $(g \circ f) \restriction A_n : A_n \longrightarrow A_{n+1}$ bijekcija.
Definišimo funkciju $F : A \longrightarrow B_0$ na sledeći način:

$$F(x) = \begin{cases} g(f(x)) & , \quad \text{postoji } n < \omega \text{ tako da } x \in A_n \setminus B_n \\ x & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$



2.2: Cantor-Bernsteinova teorema

Funkcija F je očigledno bijekcija, pa je tražena bijekcija $h : A \longrightarrow B$ korektno definisana sa $h = g^{-1} \circ F$.

$\square$

Za dva skupa kažemo da imaju *isti kardinalni broj* ukoliko postoji bijekcija između njih. Posebno, za ordinal α kažemo da je *kardinal* ukoliko za svako $\xi < \alpha$ ni jedna funkcija $f : \alpha \longrightarrow \xi$ nije 1–1. Više reči o kardinalima će biti u poglavlju o elementarnoj kardinalnoj aritmetici.

2.8 Aksioma izbora

Neka je A proizvoljan skup. Funkcija $f : P(A) \longrightarrow A$ je *funkcija izbora* skupa A ako za svaki neprazan podskup X skupa A važi

$$f(X) \in X.$$

2.8.1 Zadatak Neka je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ dobro uređenje. Pokazati da tada skup A ima funkciju izbora.

Uputstvo

Iskoristiti činjenicu da svaki neprazan podskup skupa A ima minimum u uređenju $\leqslant_A$. $\square$

2.8.2 Zadatak Neka je A neprazan skup, α ordinal i neka je $f : A \longrightarrow \alpha$ bijekcija. Pokazati da se skup A može dobro urediti.

Uputstvo

Pokazati da je sa $x \leqslant_A y \Leftrightarrow_{\text{def}} f(x) \leqslant f(y)$ korektno definisano dobro uređenje skupa A. □

2.8.3 Teorema [Hartogs] *Za svaki skup A postoji najmanji ordinal o_A takav da ni jedna funkcija $f : o_A \longrightarrow A$ nije 1-1.*

Dokaz

Ako je skup A konačan, onda iz zadatka 2.5.10 sledi da je

$$o_A = n + 1,$$

pri čemu je n jedinstveni prirodan broj za koji postoji bijekcija $f : A \longrightarrow n$. Pretpostavimo stoga da je skup A beskonačan.

Skup H definišimo na sledeći način: $h \in H$ ako i samo ako postoje skup $X \subseteq A$ i binarna relacija R na skupu X takvi da je $\langle X, R \rangle$ dobro uređenje i da je

$$h = \langle X, R \rangle.$$

Korektnost definicije je neposredna posledica sheme separacije. Za svaki element $h = \langle X, R \rangle$ skupa H neka je α_h jedinstveni ordinal takav da je $h \cong \alpha_h$, tj. $\langle X, R \rangle \cong \langle \alpha_h, \leqslant \rangle$. Na osnovu sheme zamene postoji skup

$$O = \{\alpha_h \mid h \in H\}.$$

Sa o_A označimo njegov supremum u Ord. Primetimo da iz beskonačnosti skupa A sledi da je $o_A \geqslant \omega$. Da bismo pokazali da je o_A traženi ordinal, dovoljno je pokazati da $o_A \notin O$.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $X \subseteq A$ i bijekcija

$$f : o_A \longrightarrow X.$$

Pošto je $o_A \geqslant \omega$, sa

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = o_A \\ x + 1 & , \quad x < \omega \\ x & , \quad \omega \leqslant x < o_A \end{cases}$$

je korektno definisana bijekcija $g : o_A + 1 \longrightarrow o_A$. Tada je

$$f \circ g : o_A + 1 \longrightarrow X$$

takođe bijekcija, odakle sledi da $o_A + 1 \in O$, što je u suprotnosti sa izborom ordinala o_A. $\square$

Ordinal o_A zovemo i *Hartogsovim brojem* skupa A. U sledećim zadacima su navedene neke osobine Hartogsovog broja.

2.8.4 Zadatak Neka je A beskonačan skup i neka je o_A njegov Hartogs-ov broj. Pokazati da je o_A granični ordinal.

Uputstvo
Uz simboliku iz teoreme 2.8.3, ako je $o_A = \alpha + 1$, onda $\alpha \in O$ i $\alpha \geqslant \omega$. Sada se kontradikcija dobija konstruisanjem bijekcije između α i $o_A = \alpha + 1$ (videti dokaz činjenice da $o_A \notin O$). $\square$

2.8.5 Zadatak Neka je o_A Hartogsov broj beskonačnog skupa A. Pokazati da za svaki ordinal $\alpha < o_A$ ni jedna funkcija $f : o_A \longrightarrow \alpha$ nije bijekcija.

Uputstvo
Pretpostaviti da za neko $\alpha < o_A$ postoji bijekcija $f : o_A \longrightarrow \alpha$. Iskoristiti da $\alpha \in O$ u dokazu kontradikcije: $o_A \in O$. $\square$

2.8.6 Teorema *Pretpostavimo da skup A ima funkciju izbora. Tada se skup A može dobro urediti.*

Dokaz
Neka su $f : P(A) \longrightarrow A$ i o_A redom funkcija izbora i Hartogsov broj skupa A. Rekurzijom po o_A definišimo funkciju

$$g : o_A \longrightarrow A \cup \{A\}$$

na sledeći način:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(A \setminus \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\}) & , \quad A \setminus \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\} \neq 0 \\ A & , \quad A \setminus \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\} = 0 \end{cases} .$$

Ako bi za svako $\alpha < A$ bilo $g(\alpha) \neq A$, onda bi funkcija g bila 1-1, što je po teoremi 2.8.3 nemoguće. Otuda postoji najmanji ordinal $\alpha_A < o_A$ takav da je $g(\alpha_A) = A$. Sada je $g \restriction \alpha_A : \alpha_A \longrightarrow A$ bijekcija, odakle sledi da se skup A može dobro urediti (videti zadatak 2.8.2).

□

2.8.7 Posledica *Skup A se može dobro urediti ako i samo ako ima funckiju izbora.*

Dokaz

Direktna posledica prethodne teoreme i zadatka 2.8.1. □

2.8.8 Definicija Neka je $\langle A, \leqslant_A \rangle$ parcijalno uređenje. Za skup $X \subseteq A$ kažemo da je *lanac* ako je uređenje $\langle X, \leqslant_A \rangle$ linearno.

2.8.9 Teorema [Hausdorff]

Pretpostavimo da neprazan skup A ima funkciju izbora. Tada za proizvoljnu relaciju poretka $\leqslant_A$ na skupu A i proizvoljan lanac X u parcijalnom uređenju $\langle A, \leqslant_A \rangle$ postoji maksimalni lanac M u $\langle A, \leqslant_A \rangle$ takav da je $X \subseteq M$.

Dokaz

Neka je $f : P(A) \longrightarrow A$ funkcija izbora i neka je o_A Hartogsov broj skupa A. Dalje, neka je $\leqslant_A$ proizvoljna relacija poretka na skupu A i neka je X lanac u $\langle A, \leqslant_A \rangle$ koji nije maksimalan. Za proizvoljan lanac Y neka je

$$H(Y) = \{x \mid x \in A \setminus Y \wedge \text{“}Y \cup \{x\} \text{ je lanac u } \langle A, \leqslant_A \rangle\text{”}\}.$$

Primetimo da je Y maksimalan lanac ako i samo ako je $H(Y) = 0$. Rekurzivno definišimo funkciju $g : o_A \longrightarrow A \cup \{A\}$ na sledeći način:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(H(X)) & , \quad \alpha = 0 \\ f(H(X \cup g[\alpha]) & , \quad \alpha > 0 \wedge H(X \cup g[\alpha]) \neq 0 \\ A & , \quad \text{inače} \end{cases},$$

pri čemu je $g[\alpha] = \{g(\xi) \mid \xi < \alpha\}$. Ako bi za svako $\alpha < o_A$ bilo $g(\alpha) \neq A$, onda bi funkcija G bila 1-1, što je prema teoremi 2.8.3

nemoguće. Odavde sledi da postoji najmanji ordinal $\alpha_A < o_A$ takav da je $g(\alpha_A) = A$. Sada je

$$M =_{\text{def}} X \cup \{g(\xi) \mid \xi < \alpha_A\}$$

traženi maksimalni lanac. $\square$

2.8.10 Teorema [**Zorn**] *Pretpostavimo da skup A ima funkciju izbora i neka je $\leqslant_A$ relacija poretka na skupu A takva da svaki lanac u $\langle A, \leqslant_A\rangle$ ima majorantu. Tada uređenje $\langle A, \leqslant_A\rangle$ ima maksimalni element.*

Dokaz

Neznatna modifikacija dokaza prethodne teoreme. $\square$

2.8.11 Teorema *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. **Aksioma izbora** *Svaki skup ima funkciju izbora;*
2. **Hausdorffov stav maksimalnosti** *Svaki lanac u proizvoljnom parcijalnom uređenju se može produžiti do maksimalnog lanca;*
3. **Zornova lema** *Ako u nekom uređenju svaki lanac ima majorantu, onda to uređenje ima maksimalan element;*
4. **Zermelova teorema** *Svaki skup se može dobro urediti.*

Dokaz

Već smo pokazali da je $1 \Leftrightarrow 4$, kao i da $1 \Rightarrow 2$ i $1 \Rightarrow 3$. Ostaje da pokažemo da $2 \Rightarrow 3$ i da $3 \Rightarrow 4$.

2⇒3 Neka je $\langle A, \leqslant_A\rangle$ parcijalno uređenje u kojem svaki lanac ima majorantu. Iz 2 sledi da postoji maksimalan lanac M u

$$\langle A, \leqslant_A\rangle.$$

No tada je njegova majoranta očigledno i maksimalni element datog uređenja.

3⇒4 Neka je A proizvoljan neprazan skup (prazan skup se trivijalno može dobro urediti). Skup W definišimo kao skup svih parova $\langle X, R\rangle$ takvih da je $X \subseteq A$ i da je $R \subseteq X \times X$ dobro uređenje skupa X. Na skupu W definišimo binarnu relaciju $\leqslant_W$ na sledeći način:

$$\langle X, R\rangle \leqslant_W \langle X', R'\rangle \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} X \subseteq X' \wedge R \subseteq R'.$$

Očigledno je $\leqslant_W$ relacija poretka na skupu W. Dalje, sasvim lako se proverava da je za proizvoljan lanac M sa $\langle \bigcup \mathrm{dom}(M), \bigcup \mathrm{rng}(M)\rangle$ korektno definisana njegova majoranta u $\langle W, \leqslant_W\rangle$. Na osnovu 4 sledi da $\langle W, \leqslant_W\rangle$ ima maksimalan element, recimo $\langle X, R\rangle$. Preostaje da pokažemo da je $X = A$. Pretpostavimo suprotno: neka $a \in A \setminus X$. Tada je

$$\langle X, R\rangle <_W \langle X \cup \{a\}, R \cup (X \times \{a\})\rangle,$$

što je u suprotnosti sa maksimalnošću $\langle X, R\rangle$. □

Aksioma 7 (Aksioma izbora)

$$\forall x_0(\exists f : P(x_0) \longrightarrow x_0)(\forall x_1 \in P(x_0))(x_1 \neq 0 \Rightarrow f(x_1) \in x_1).$$

Prevedeno na govorni jezik, svaki skup ima funkciju izbora.

Brojni su ekvivalenti i posledice aksiome izbora koji se javljaju u raznim matematičkim disciplinama. U funkcionalnoj analizi imamo Hahn-Banachovu teoremu, u topologiji teoremu Tihonova o proizvodu, u teoriji modela gornju i donju Skolemovu teoremu itd. Posebno su interesantne posledice aksiome izbora u teoriji mere, kao što su egzistencija Lebesgue-nemerljivih skupova i tzv. *paradoksalna dekompozicija*, tj. Banach-Tarski teorema o razloživoj ekvivalentnosti ma koje dve otvorene kugle u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

2.8.12 Definicija Neka je $f : I \longrightarrow X$ proizvoljna funkcija i neka za svako $i \in I$ važi $X_i = f(i)$. Tada:

- $\bigcup\limits_{i \in I} X_i =_{\mathrm{def}} \bigcup f[I]$;

- $\prod\limits_{i\in I} X_i =_{\text{def}} \{g : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} X_i \mid (\forall i \in I) g(i) \in X_i\}$.

Posebno, *projekcije* $\pi_j : \prod\limits_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$ definišemo sa $\pi_j(g) = g(j)$.

U vezi sa prethodnom definicijom, skup $\prod\limits_{i\in I} X_i$ zovemo i *proizvodom* familije skupova $\{X_i \mid i \in I\}$. Kako je I skup, po shemi zamene je i $\{X_i \mid i \in I\}$ takođe skup.

2.8.13 Zadatak Pokazati da su sledeći iskazi ekvivalentni:

1. Aksioma izbora;
2. Proizvod neprazne familije nepraznih skupova je neprazan;
3. Za svaku familiju nepraznih skupova H postoji skup S koji sa svakim skupom iz H ima tačno jedan zajednički element.

2.9 Dobro zasnovane relacije

Neka je $\mathtt{E}$ definabilna binarna relacija (može biti i prava klasa). Kažemo da je relacija $\mathtt{E}$:

- *Skupovnog tipa*, ako svaki skup a formula $x \mathbin{\mathtt{E}} a$ je skupovnog tipa;
- *Dobro zasnvoana* (WF), ako ne postoji beskonačna $\mathtt{E}$ regresija, tj. ne postoji niz skupova $\langle x_n \mid n \in \omega\rangle$ takav da za svako $n \in \omega$ važi
$$x_{n+1} \mathbin{\mathtt{E}} x_n.$$

2.9.1 Teorema[WF indukcija] *Neka je* $\mathtt{A}$ *neprazna klasa i neka je* $\mathtt{E}$ *dobro zasnovana relacija skupovnog tipa na klasi* $\mathtt{A}$. *Dalje, neka je klasa* $\mathtt{B}$ *podklasa klase* $\mathtt{A}$ *takva da za svako* $x \in \mathtt{A}$ *važi*

$$\forall y (y \mathbin{\mathtt{E}} x \Rightarrow y \in \mathtt{B}) \Rightarrow x \in \mathtt{B}. \tag{2.3}$$

Tada je $\mathtt{B} = \mathtt{A}$.

Dokaz

Pretpostavimo da klasa $\mathtt{B}$ nije jednaka klasi $\mathtt{A}$. Tada iz dobre zasnovanosti relacije $\mathtt{E}$ na klasi $\mathtt{A}$ sledi da klasa $\mathtt{A} \setminus \mathtt{B}$ ima $\mathtt{E}$-minimalni element, recimo a. No odavde sledi da (2.3) važi u slučaju $x = a$, što je u kontradikciji sa izborom skupa a. $\square$

2.9.2 Teorema [WF rekurzija] *Neka je $\mathtt{A}$ neprazna klasa, $\mathtt{E}$ na njoj dobro zasnovana relacija skupovnog tipa i neka je $f : V \longrightarrow V$ proizvoljna definabilna funkcija. Tada postoji jedinstvena funkcija $g : \mathtt{A} \longrightarrow V$ takva da za svaki skup $a \in \mathtt{A}$ važi*

$$g(a) = f(g \restriction \{x \in \mathtt{A} \mid x \,\mathtt{E}\, a\}).$$

Dokaz

Neznatna modifikacija dokaza teoreme 2.4.2. $\square$

2.9.3 Definicija Skup A je *dobro zasnovan* ako je na njemu relacija pripadanja $\in$ dobro zasnovana.

2.9.4 Zadatak Dokazati:

1. Prazan skup je dobro zasnovan;
2. Ako je skup A dobro zasnovan, onda je i skup $P(A)$ dobro zasnovan;
3. Ako su svi elementi skupa A dobro zasnovani, onda su i skupovi A i $\bigcup A$ takođe dobro zasnovani.

Sa WF ćemo takođe označavati i klasu svih dobro zasnovanih skupova. Pokažimo da dobro zasnovani skupovi čine *kumulativnu hijerarhiju*, tj. da se klasa WF može konstruisati polazeći od praznog skupa korišćenjem operacija partitivnog skupa i unije. U tom cilju prvo rekurzijom po Ord definišimo skupove V_α na sledeći način:

- $V_0 = 0$;

- $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$;
- $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_\beta$, u slučaju graničnog ordinala α.

Na osnovu zadatka 2.9.4 sledi da je svaki od skupova V_α dobro zasnovan, kao i da su svi elementi skupa V_α takođe dobro zasnovani. S obzirom da operacije partitivnog skupa i unije čuvaju tranzitivnost i da je prazan skup tranzitivan, svaki od skupova V_α je i tranzitivan i iz $\alpha < \beta$ sledi da je $V_\alpha \in V_\beta$ i $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Ostaje da pokažemo da je svaki dobro zasnovan skup sadržan u nekom od skupova V_α. Ovo pokazujemo $\in$-indukcijom po WF.

Neka je $\mathtt{A}$ klasa svih dobro zasnovanih skupova koji su sadržani u nekom V_α. Uočimo proizvoljan dobro zasnovan skup $A \subseteq \mathcal{A}$. Tada za svako $a \in A$ postoji ordinal α_a takav da $a \in V_{\alpha_a}$. Neka je α_A supremum u Ord skupa $\{\alpha_a \mid a \in A\}$. Sada je $A \subseteq V_{\alpha_A}$, odakle sledi da $A \in V_{\alpha_A+1}$. Na osnovu teoreme 2.9.1 sledi da su klase $\mathtt{A}$ i WF jednake.

Aksioma 8 (Aksioma regularnosti)

$$\forall x_0(x_0 \neq 0 \Rightarrow (\exists x_1 \in x_0)(x_1 \cap x_0 = 0)).$$

Prevedeno na govorni jezik, svaki skup ima $\in$–minimalni element, tj. svaki skup je dobro zasnovan.

2.9.5 Teorema *Neka je A proizvoljan skup. Tada postoji najmanji tranzitivan nadskup skupa A.*

Dokaz

Na osnovu aksiome regularnosti postoji ordinal α takav da $A \in V_\alpha$, pa je klasa $\mathtt{K}$ svih tranzitivnih nadskupova skupa A neprazna. Sada je traženi skup upravo $\bigcap \mathtt{K}$. $\square$

Jedinstveni najmanji tranzitivni nadskup skupa A zovemo i *tranzitivnim zatvorenjem* skupa A i označavamo ga sa $\mathrm{tc}(A)$.

2.9.6 Zadatak Dokazati da je za svaki skup A,

$$\mathrm{tc}(A) = \bigcup_{n\in\omega} A_n,$$

pri čemu je $A_0 = A$ i $A_{n+1} = \bigcup A_n$.

2.9.7 Zadatak Koristeći aksiomu regularnosti dokazati sledeća tvrđenja:

1. Neka je A tranzitivan skup linearno uređen relacijom pripadanja. Tada je skup A ordinal;
2. Svaki neprazan tranzitivan skup sadrži prazan skup;
3. Ne postoji skup A takav da važi $A \in A$.

2.9.8 Zadatak Koristeći $\in$-indukciju pokazati sledeće tvrđenje: Neka su $\mathtt{A}$ i $\mathtt{B}$ tranzitivne klase i neka je $f : \mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{B}$ bijekcija takva da za svako $A, B \in \mathtt{A}$ važi

$$A \in B \Leftrightarrow f(A) = f(B).$$

Tada je $f = id_{\mathtt{A}}$.

2.9.9 Definicija *Rang* skupa A, u oznaci $\mathrm{rank}(A)$, je najmanji ordinal α takav da $A \in V_{\alpha+1}$.

2.9.10 Zadatak Neka su A i B proizvoljni skupovi. Dokazati da iz $A \in B$ sledi da je $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(B)$.

Za binarnu relaciju $\mathtt{E}$ kažemo da je *ekstenzionalna* na nepraznoj klasi $\mathtt{A}$ ako za svako $a, b \in \mathtt{A}$ važi:

- $\{x \mid x \,\mathtt{E}\, a\} \subseteq \mathtt{A}$;
- $\forall x(x \,\mathtt{E}\, a \Leftrightarrow x \,\mathtt{E}\, b) \Rightarrow a = b$.

2.9.11 Teorema [**Mostowski kolaps**]

Neka je $\mathtt{A}$ *neprazna klasa i neka je* $\mathtt{E}$ *ekstenzionalna, dobro zasnovana relacija skupovnog tipa na klasi* $\mathtt{A}$*. Tada postoji jedinstvena tranzitivna klasa* $\mathtt{M}$ *i jedinstvena bijekcija* $f : \mathtt{A} \longrightarrow \mathtt{M}$ *takva da za svako* $a, b \in \mathtt{A}$ *važi*

$$a \,\mathtt{E}\, b \Leftrightarrow f(a) \in f(b). \tag{2.4}$$

Dokaz

Na osnovu teoreme 2.9.2 postoji jedinstvena funckija f sa domenom $\mathtt{A}$ takva da za svako $a \in \mathtt{A}$ važi

$$f(a) = \{f(x) \mid x \,\mathtt{E}\, a\}. \tag{2.5}$$

Neka je

$$\mathtt{M} =_{\text{def}} \{f(a) \mid a \in \mathtt{A}\}.$$

Primetimo da je neposredna posledica (2.5) činjenica da je klasa $\mathtt{M}$ tranzitivna, kao i da iz $a \,\mathtt{E}\, b$ sledi da $f(a) \in f(b)$. Takođe primetimo da iz same definicije klase $\mathtt{M}$ neposredno sledi surjektivnost funkcije f. Ako pokažemo da je f 1-1, onda će iz (2.5) slediti i preostala implikacija u (2.4).

$\mathtt{E}$-indukcijom po $\mathtt{A}$ pokažimo da je f 1-1. U tom cilju, neka su skupovi $a, b \in \mathtt{A}$ takvi da je restrikcija funkcije f na skup

$$\{x \mid x \,\mathtt{E}\, a\} \cup \{x \mid x \,\mathtt{E}\, b\}$$

1-1. Pretpostavimo da je $f(a) = f(b)$ i neka je skup x takav da $x \,\mathtt{E}\, a$. Tada $f(x) \in f(a)$, odakle zbog $f(a) = f(b)$ sledi da postoji skup y takav da $y \,\mathtt{E}\, b$ i $f(x) = f(y)$. No sada po induktivnoj hipotezi mora biti i $x = y$, odakle sledi da $x \,\mathtt{E}\, b$. Kako se na isti način pokazuje da iz $y \,\mathtt{E}\, b$ sledi da $y \,\mathtt{E}\, a$, na osnovu ekstenzionalnosti relacije $\mathtt{E}$ mora biti i $a = b$.

Ovim smo pokazali da je f 1-1, a time i teoremu u potpunosti. $\square$

3

Kombinatorna teorija skupova

3.1 Kardinali

Aksioma izbora obezbeđuje da se svaki skup može dobro urediti. Posebno, kažemo da je skup x dobro uređen ordinalom α ako postoji bijekcija $f : \alpha \longrightarrow x$.

3.1.1 Definicija Neka je x proizvoljan skup. *Kardinalni broj* skupa x, u oznaci $|x|$, je najmanji ordinal kojim se skup x može dobro urediti. Posebno, ordinal α je *kardinal* ako je $\alpha = |\alpha|$.

3.1.2 Primer Svi elementi skupa ω su kardinali. Primetimo da je ω takođe kardinal, ali $\omega + 1$ nije, jer je $|\omega + 1| = \omega$. Jedna od mogućih bijekcija između ova dva ordinala je definisana sa

- $f(\omega) = 0$;
- $f(n) = n + 1$, $n \in \omega$.

Sličnom argumentacijom se pokazuje da za bilo koji beskonačan ordinal α važi $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

3.1.3 Teorema [Cantor] *Za svaki skup x je $|x| < |P(x)|$.*

Dokaz

Neka je x proizvoljan skup. S jedne strane, funkcija

$$f : X \longrightarrow P(x)$$

definisana sa

$$f(x) = \{x\}$$

je 1–1, pa je $|x| \leqslant |P(x)|$.

Ostaje da pokažemo da je $|x| \neq |P(x)|$. U suprotnom, postojala bi bijekcija $g : x \longrightarrow P(x)$. Tada po Shemi separacije postoji skup

$$a = \{y \in x \mid y \notin g(y)\}.$$

Pošto je g "na", postoji $y \in x$ tako da je $a = g(y)$. Sada dobijamo kontradikciju $y \in a \Leftrightarrow y \notin a$.

$\square$

Kardinal α je *konačan* ukoliko je $\alpha < \omega$, a u suprotnom je *beskonačan*. Beskonačne kardinale ćemo beležiti malim grčkim slovima κ, λ, μ, uz korišćenje indeksa, a klasu svih kardinala ćemo označavati sa Card. Neposredna posledica prethodne teoreme je činjenica da je Card prava klasa. Cantorova teorema, zajedno sa dobrom uređenošću ordinala nam obezbeđuje sledeće:

Za svaki kardinal κ postoji najmanji kardinal veći od njega, u oznaci κ^+.

3.1.4 Definicija Za kardinal κ kažemo da je *sledbenik* ako postoji kardinal λ tako da je $\kappa = \lambda^+$. U suprotnom za κ kažemo da je *granični* kardinal.

Sve beskonačne kardinale ređamo po veličini u transfinitni niz *alefa* na sledeći način:

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;
- $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$;
- $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$, u slučaju graničnog ordnala β.

Dvostruke oznake za iste skupove ($\aleph_\alpha$ i ω_α) smo uveli zbog razlike u ordinalnoj i kardinalnoj aritmetici. Kad budemo koristili oznaku $\aleph_\alpha$ podrazumevaćemo kardinalnu aritmetiku, a kad budemo koristili oznaku ω_α podrazumevaćemo ordinalnu aritmetiku.

3.1.5 Primer Ako je α proizvoljan ordinal, onda je $\aleph_{\alpha+1}$ sledbenik kardinal. U slučaju kada je α granični ordinal, $\aleph_\alpha$ je granični kardinal.

3.1.6 Definicija [**Kofinalnost**] Neka je $\langle x, \leqslant_x\rangle$ parcijalno uređen skup. Kažemo da je skup $a \subseteq x$ *kofinalan* u $\langle x, \leqslant_x\rangle$ ako za svaki element y skupa x postoji element b skupa a takav da

$$y \leqslant_x b.$$

Pod *kofinalnošću* parcijalnog uređenja $\langle x, \leqslant_x\rangle$, u oznaci

$$\mathrm{cf}\,\langle x, \leqslant_x\rangle,$$

podrazumevamo najmanji kardinal među kardinalima kofinalnih skupova u x.

U slučaju beskonačnih kardinala umesto $\mathrm{cf}\,\langle \kappa, \leqslant\rangle$ pisaćemo samo $\mathrm{cf}\,\kappa$. Iz definicije neposredno sledi da za svaki beskonačni kardinal κ važi:

- $\mathrm{cf}\,\mathrm{cf}\,\kappa = \mathrm{cf}\,\kappa$;
- $\omega \leqslant \mathrm{cf}\,\kappa \leqslant \kappa$.

3.1.7 Definicija Za beskonačni kardinal κ kažemo da je *regularan* ako je $\mathrm{cf}\,\kappa = \kappa$. U suprotnom je κ *singularan* kardinal.

3.1.8 Primer Pokažimo da za svaki ordinal α važi

$$\alpha \leqslant \aleph_\alpha. \tag{3.1}$$

Neka je $\mathcal{A}$ klasa svih ordinala za koje važi (3.1) i neka je ordinal α takav da je $\alpha \subseteq \mathcal{A}$. Tada za svako $\beta < \alpha$ važi $\beta \leqslant \aleph_\beta$, što zajedno sa $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \beta \leqslant \alpha$ i $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha$ povlači (3.1).

No ovo upravo znači da posmatrani ordinal α pripada klasi $\mathcal{A}$, odakle na osnovu teoreme transfinitne indukcije zaključujemo da klase $\mathcal{A}$ i Ord moraju biti jednake.

3.1.9 Primer [Fiksne tačke niza alefa] Beskonačni kardinal κ zovemo i fiksnom tačkom niza alefa ukoliko je

$$\kappa = \aleph_\kappa.$$

Pokažimo da niz alefa ima proizvoljno velike fiksne tačke, odnosno da za svaki ordinal α postoji kardinal $\kappa > \alpha$ takav da važi

$$\aleph_\alpha < \aleph_\kappa = \kappa.$$

Neka je α proizvoljan ordinal. Definišimo niz kardinala $\langle \kappa_n \mid n \in \omega \rangle$ indukcijom po ω na sledeći način:

- $\kappa_0 = \aleph_\alpha$;
- $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$.

Dalje, neka je $\kappa = \bigcup\limits_{n<\omega} \kappa_n$. Iz konstrukcije kardinala κ neposredno sledi da je $\alpha \leqslant \aleph_\alpha < \kappa$ kao i da važi

$$\kappa = \bigcup_{n<\omega} \kappa_n = \bigcup_{n<\omega} \aleph_{\kappa_n} = \aleph_{\bigcup\limits_{n<\omega} \kappa_n} = \aleph_\kappa.$$

3.1.10 Definicija [Kardinalna aritmetika] Neka su κ i λ proizvoljni kardinali. Kardinale $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ i κ^λ definišemo na sledeći način:

- $\kappa + \lambda = |(\kappa \times \{\kappa\}) \cup (\lambda \times \{\lambda\})|$;
- $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$;
- $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

3.1.11 Primer Lako se proverava da se na konačnim kardinalima (podsetimo da su to upravo svi ordinali manji od ω) kardinalna i ordinalna aritmetika poklapaju. No na beskonačnim kardinalima se kardinalna i ordinalna aritmetika drastično razlikuju. Recimo, u smislu ordinalnog stepenovanja je

$$2^\omega = \bigcup_{n<\omega} 2^n = \omega,$$

dok je u smislu kardinalnog stepenovanja $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ (neposredna posledica Cantorove teoreme).

3.1.12 Teorema *Neka je α proizvoljan ordinal. Tada je*

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Dokaz

Neka je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija. Uočimo klasu $\mathtt{A}$ svih ordinala α takvih da je

$$\Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha] = \omega_\alpha.$$

Dovoljno je pokazati da su klase $\mathtt{A}$ i Ord jednake. Neka je $\alpha \subseteq \mathcal{A}$. Na osnovu konstrukcije Γ neposredno sledi da je

$$\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\omega_\alpha \times \omega_\alpha].$$

Pretpostavimo da postoje ordinali $\xi, \eta < \omega_\alpha$ takvi da je

$$\omega_\alpha = \Gamma(\xi, \eta).$$

Neka je γ maksimum od ξ i η . Tada je

$$|\gamma| < \aleph_\alpha,$$

pa postoji ordinal $\beta < \alpha$ takav da je

$$|\gamma| = \aleph_\beta.$$

No tada je $|\gamma \times \gamma| = \aleph_\beta$, pa zbog $\omega_\alpha \subseteq \Gamma[\gamma \times \gamma]$, mora biti $\aleph_\beta \geqslant \aleph_\alpha$. Kontradikcija.

Dakle, $\alpha \in \mathtt{A}$, pa su na osnovu teoreme transfinitne indukcije klase $\mathtt{A}$ i Ord jednake. $\square$

3.1.13 Posledica *Neka su κ i λ proizvoljni kardinali, s tim da je bar jedan od njih beskonačan. Tada je*

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Dokaz

Neka je $\lambda \leqslant \kappa$. Pošto je κ beskonačan kardinal, važi

$$\kappa \leqslant \kappa + \lambda \leqslant \kappa + \kappa \leqslant \kappa \cdot \kappa = \kappa,$$

odakle sledi tvrđenje. $\square$

3.1.14 Primer S obzirom na idempotentnost beskonačnih kardinala, za svaki ordinal α imamo da je $\aleph_{\alpha+1}$ regularan kardinal. Ako je α granični ordinal, onda $\aleph_\alpha$ ne mora biti regularan kardinal. Primera radi,

$$\mathrm{cf}\, \aleph_\omega = \omega < \aleph_\omega,$$

tj. $\aleph_\omega$ je singularan kardinal kofinalnosti ω. Posebno, ako je κ regularan kardinal i ako je α ordinal veći ili jednak κ, onda je $\aleph_{\alpha+\kappa}$ singularan kardinal kofinalnosti κ.

3.1.15 Definicija Za proizvoljne skupove X i I i proizvoljne kardinale κ i κ_i, $i \in I$ definišemo sledeće skupove i kardinale:

- $[X]^{\kappa} =_{\text{def}} \{x \subseteq X \mid |x| = \kappa\}$;
- $[X]^{<\kappa} =_{\text{def}} \{x \subseteq X \mid |x| < \kappa\}$;
- $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i =_{\text{def}} |\bigcup\limits_{i \in I} (\kappa_i \times \{i\})|$;
- $\prod\limits_{i \in I} \kappa_i =_{\text{def}} |\{f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} \kappa_i \mid (\forall i \in I) f(i) \in \kappa_i\}|$.

3.1.16 Primer Konstrukcijom odgovarajućih bijekcija lako se proverava da važi:

1. Neka je $f : I \longrightarrow I$ bijekcija. Tada :
   - $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i = \sum\limits_{i \in I} \kappa_{f(i)}$
   - $\prod\limits_{i \in I} \kappa_i = \prod\limits_{i \in I} \kappa_{f(i)}$;
2. Neka je $A_j,\ j \in J$ particija skupa I. Tada je $\prod\limits_{i \in I} \kappa_i = \prod\limits_{j \in J} \prod\limits_{i \in A_j} \kappa_i$;
3. $\prod\limits_{i \in I} \kappa^{\lambda_i} = \kappa^{\sum\limits_{i \in I} \lambda_i}$
4. Neka je $\kappa_i > 1\ ,\ i \in I$. Tada je $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i \leqslant \prod\limits_{i \in I} \kappa_i$;
5. Za svaki beskonačan kardinal κ je $2^{\kappa} = \kappa^{\kappa}$;
6. Neka je $\kappa \geqslant \lambda$ i neka je $\kappa \geqslant \omega$. Tada je $\kappa^{\lambda} = |[\kappa]^{\lambda}|$;
7. Neka je $\kappa_i > 0\ ,\ i \in I$ i neka je $\kappa = \sup\limits_{i \in I} \kappa_i = \bigcup\limits_{i \in I} \kappa_i$. Tada :
   - $\sum\limits_{i \in I} \kappa_i = |I| \cdot \kappa$

- $\prod_{i \in I} \kappa_i = \kappa^{|I|}$.

3.1.17 Definicija [Jako granični kardinali] Za kardinal κ kažemo da je *jako granični* (strong limit) ako za svako $\lambda < \kappa$ važi $2^\lambda < \kappa$.

3.1.18 Definicija [Bethi] *Bethi se rekurzivno definišu na sledeći način:*

- $\beth_0 = \aleph_0$;
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ *(u smislu kardinalnog stepenovanja);*
- $\beth_\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beth_\beta$, *u slučaju graničnog ordinala* α.

Za svaki granični ordinal α kardinal $\beth_\alpha$ je jako granični. Iz definicije neposredno sledi da je

$$\beth_\alpha = |V_{\omega+\alpha}|.$$

Posebno, kardinal

$$\mathfrak{c} =_{\text{def}} \beth_1 = |P(\omega)|$$

zovemo i *kontinuumom* .

Kontinuum hipoteza (CH):

$$\beth_1 = \aleph_1 \ .$$

Generalisana kontinuum hipoteza (GCH):

$$\forall \alpha (\beth_\alpha = \aleph_\alpha).$$

3.1.19 Teorema [Königova lema] *Neka je* $\kappa_i < \lambda_i$, $i \in I$. *Tada je*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i \ .$$

Dokaz

Neka je $\lambda = \bigcup\limits_{i\in I} \lambda_i$ i neka je $P = \{f : I \longrightarrow \lambda \mid (\forall i \in I) f(i) \in \lambda_i\}$. Uočimo proizvoljnu funkciju $F : \bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\}) \longrightarrow P$. Dovoljno je pokazati da F nije "na".

Za svako $i \in I$ neka je $F_i = \pi_j \circ F$. Kako za svako $i \in I$ važi $\kappa_i < \lambda_i$, to za svako $i \in I$ postoji $a_i \in \lambda_i \setminus F_i[\kappa_i \times \{i\}]$. Lako se proverava da funkcija $\langle a_i \mid i \in I\rangle$ ne pripada $\mathrm{rng}(F)$. □

Navedimo neke posledice Königove leme:

1. $\forall x(|x| < |P(x)|)$

   Kako je $1 < 2$, po Königovoj lemi sledi da je

   $$|x| = \sum_{i\in x} 1 < \prod_{i\in x} 2 = 2^{|x|} = |P(x)| \ .$$

2. $\forall \alpha(\mathrm{cf}\ 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha)$

   Neka je κ_i , $i \in \aleph_\alpha$ niz kardinala manjih od $2^{\aleph_\alpha}$. Tada je

   $$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} \ ,$$

   odakle sledi da je $\mathrm{cf}\ 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

3. $\forall \alpha \forall \beta(\mathrm{cf}\ \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} > \aleph_\beta)$;

4. $\forall \alpha(\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha)$.

3.2 Kontinuum funkcija

3.2.1 Definicija Pod *kontinuum funkcijom* podrazumevamo funkciju

$$\aleph_\alpha \mapsto 2^{\aleph_\alpha}.$$

Ordinalnu funkciju $f : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ takvu da za svaki ordinal α važi

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+f(\alpha)}$$

zovemo i *kontinuum odstupanjem.*

Konvencija Ukoliko se ne kaže drugačije, za aritmetičke operacije koje se eventulano javljaju u indeksu nekog alefa ili beta podrazumevamo da su ordinalne.

Cantorova teorema i Königova lema nameću sledeća ograničenja za kontinuum funkciju:

- $\kappa < \lambda \Rightarrow 2^\kappa \leqslant 2^\lambda$
- $\mathrm{cf}\ 2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha$.

Za beskonačan kardinal λ i proizvoljan kardinal κ neka je

$$\kappa^{<\lambda} =_{\mathrm{def}} \bigcup_{\mu<\lambda} \kappa^\mu \ .$$

3.2.2 Lema *Neka je $\kappa \geqslant \aleph_0$. Tada je*

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa}.$$

Dokaz

Kako je $2^\kappa \geqslant 2^{<\kappa}$, to je $2^\kappa = (2^\kappa)^{\mathrm{cf}\,\kappa} \geq (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa}$. Ostaje da pokažemo obratnu nejednakost. Neka je $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}\,\kappa} \kappa_i$, $\kappa_i < \kappa$. Tada je

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i\in\mathrm{cf}\,\kappa} \kappa_i} = \prod_{i\in\mathrm{cf}\,\kappa} 2^{\kappa_i} \leqslant \prod_{i\in\mathrm{cf}\,\kappa} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa}.$$

□

3.2.3 Teorema [**Bukovský, Hechler**] *Neka je* $\kappa > \mathrm{cf}\,\kappa$ *i neka je kontinuum funkcija skoro konstantna na* κ*, tj. neka postoji kardinal* $\lambda_0 < \kappa$ *(*$\lambda_0 \geqslant \mathrm{cf}\,\kappa$*) takav da za svaki kardinal* $\lambda_0 \leqslant \lambda < \kappa$ *važi* $2^\lambda = 2^{\lambda_0}$*. Tada je* $2^\kappa = 2^{<\kappa}$*.*

Dokaz

S jedne strane,

$$2^{<\kappa} = \sum_{\lambda_0 \leqslant \lambda < \kappa} 2^\lambda = \sum_{\lambda_0 \leqslant \lambda < \kappa} 2^{\lambda_0} = \kappa \cdot 2^{\lambda_0}.$$

S druge strane, neka je $\langle \kappa_\alpha \mid \alpha < \mathrm{cf}\,\kappa \rangle$ rastući niz kardinala manjih od κ takav da je $\kappa = \sum\limits_{\alpha \in \mathrm{cf}\,\kappa} \kappa_\alpha$. Tada je

$$\kappa = \sum_{\alpha \in \mathrm{cf}\,\kappa} \kappa_\alpha \leqslant \sum_{\alpha \in \mathrm{cf}\,\kappa} 2^{\kappa_\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathrm{cf}\,\kappa} 2^{\lambda_0} = \mathrm{cf}\,\kappa \cdot 2^{\lambda_0} = 2^{\lambda_0}\ .$$

Dakle, $2^{<\kappa} = 2^{\lambda_0}$. Sada je

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa} = 2^{\lambda_0 \cdot \mathrm{cf}\,\kappa} = 2^{\lambda_0} = 2^{<\kappa}\ .$$

□

Primetimo da je zbog monotonosti kontinuum funkcije uslov skoro konstantnosti ekvivalentan konstantnosti kontinuum funkcije na proizvoljnom kofinalnom skupu u κ.

3.2.4 Posledica *Pretpostavimo da je kontinuum odstupanje konstantno, tj. da postoji ordinal* β *takav da za svaki ordinal* α *važi*

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta}.$$

Tada $\beta \in \omega$*.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka je $\beta \geqslant \omega$. Pošto je $\beta + \beta > \beta$, postoji

$$\alpha = \min\{\gamma \mid \gamma + \beta > \beta\}.$$

Iz izbora ordinala α neposredno sledi:

- Ordinal α je granični;
- $\omega \leqslant \alpha \leqslant \beta$;
- Za svaki ordinal $\xi < \alpha$ važi $\xi + \beta = \beta$;
- $\operatorname{cf} \aleph_{\alpha+\alpha} = \operatorname{cf} \alpha$.

Sada za svaki ordinal $\xi < \alpha$ važi

$$2^{\aleph_{\alpha+\xi}} = \aleph_{\alpha+\xi+\beta} = \aleph_{\alpha+\beta} = 2^{\aleph_\alpha},$$

odakle sledi da je kontinuum funkcija skoro konstantna na $\aleph_{\alpha+\alpha}$. Na osnovu Bukovský–Hechler teoreme imamo da je

$$2^{\aleph_{\alpha+\alpha}} = 2^{<\aleph_{\alpha+\alpha}} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Međutim, kako je $\alpha + \beta > \beta$ to je

$$2^{\aleph_{\alpha+\alpha}} = \aleph_{\alpha+\alpha+\beta} > \aleph_{\alpha+\beta} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

Kontradikcija. Dakle, mora biti $\beta \in \omega$. □

3.2.5 Lema *Neka je* $\aleph_\beta < \operatorname{cf} \aleph_\alpha$ *. Tada je*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma \in \alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} .$$

Dokaz

Kako je $\aleph_\beta < \operatorname{cf} \aleph_\alpha$, to je svaka funkcija $f : \aleph_\beta \longrightarrow \aleph_\alpha$ ograničena, tj. postoji $\gamma \in \alpha$ tako da je $f[\aleph_\beta] \subseteq \aleph_\gamma$. Samim tim, $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant \sum\limits_{\gamma \in \alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}$. Kako obratna nejednakost trivijalno važi, imamo tvrđenje.

□

3.2.6 Posledica [Hausdorffova formula] *Za proizvoljne ordinale* α *i* β *važi*

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

Dokaz

Treba pokazati da je $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$. Ako je $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$, onda je

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\beta} \ .$$

Ako je $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\beta$, onda je po prethodnoj lemi

$$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma\in\alpha+1} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}.$$

□

3.2.7 Lema *Neka je κ granični kardinal i neka je $\lambda \geqslant \operatorname{cf}\kappa$. Tada je*

$$\kappa^\lambda = (\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\operatorname{cf}\kappa}.$$

Dokaz

Neka je $\langle \kappa_i \mid i \in \operatorname{cf}\kappa\rangle$ rastući niz kardinala manjih od κ takav da je $\kappa = \sum_{i\in\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i$. Tada je

$$\kappa \leqslant \sum_{i\in\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i^\lambda \leqslant \prod_{i\in\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i^\lambda \leqslant \prod_{i\in\operatorname{cf}\kappa} \sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda = (\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\operatorname{cf}\kappa}.$$

S druge strane,

$$(\sup_{\mu<\kappa} \mu^\lambda)^{\operatorname{cf}\kappa} \leqslant (\kappa^\lambda)^{\operatorname{cf}\kappa} = \kappa^\lambda.$$

□

3.2.8 Teorema [Rekurzivno izračunavanje $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$] *Neka je β proizvoljan ordinal. Tada za svaki ordinal α važi:*

(1) $\alpha \leqslant \beta \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$;

(2) $\alpha > \beta \wedge ((\exists\gamma \in \alpha)\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha \Rightarrow (\exists\gamma \in \alpha)\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta})$;

(3) $\alpha > \beta \wedge (\forall\gamma \in \alpha)\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. *Tada :*

(3.1) $\aleph_\alpha = \mathrm{cf}\,\aleph_\alpha \vee \mathrm{cf}\,\aleph_\alpha > \aleph_\beta \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$;

(3.2) $\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\alpha \Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha}$.

Dokaz

Primetimo da je (1) ranije dokazano, tako da ostaje da pokažemo (2) i (3).

(2) Neka je $\alpha > \beta$ i neka je $\gamma \in \alpha$ tako da je $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \geqslant \aleph_\alpha$. Tada je

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \leqslant (\aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta}.$$

(3) Neka je $\alpha > \beta$ i neka je za svako $\gamma \in \alpha$ $\aleph_\gamma^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha$. Ako je $\alpha = \gamma + 1$, onda je po Hausdorffovoj formuli

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_\alpha \leqslant \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Stoga je od interesa slučaj kada je α granični ordinal.

(3.1) Neka je $\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha > \aleph_\beta$. Tada je

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \sum_{\gamma\in\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta} \leqslant \sum_{\gamma\in\alpha} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

(3.2) Neka je $\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\alpha$. Tada je

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = (\sup_{\gamma\in\alpha} \aleph_\gamma^{\aleph_\beta})^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha}.$$

□

3.2.9 Posledica *Neka važi GCH. Tada je*

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & , \ \aleph_\beta < \mathrm{cf}\,\aleph_\alpha \\ \aleph_{\alpha+1} & , \ \mathrm{cf}\,\aleph_\alpha \leqslant \aleph_\beta < \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1} & , \ \aleph_\beta \leqslant \aleph_\alpha \end{cases} .$$

Dokaz

S obzirom na prethodnu teoremu i GCH, treba samo pokazati da za za svaki ordinal α važi

$$\aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Primetimo da prethodne jednakosti važe kad god je $\aleph_\alpha$ regularan kardinal, pa ostaje da proverimo slučaj kada je $\aleph_\alpha$ singularan kardinal.

S obzirom na GCH, tada za svako $\beta \in \alpha$ važi $2^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1} < \aleph_\alpha$, pa je samim tim $\aleph_\alpha = 2^{<\aleph_\alpha}$. Sada je $2^{\aleph_\alpha} = (2^{<\aleph_\alpha})^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha^{\mathrm{cf}\,\aleph_\alpha}$. □

3.2.10 Primer Ako je kardinal κ jako granični, onda je $2^{<\kappa} = \kappa$, a time i

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\,\kappa} = \kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa}.$$

Ako je κ jako nedostiživ kardinal, onda na osnovu teoreme 3.2.8 za svako $\lambda < \kappa$ važi $\kappa^\lambda = \kappa$, odakle sledi da je $\kappa^{<\kappa} = \kappa = 2^{<\kappa}$.

Najzad, ako je kardinal κ slabo nedostiživ kardinal i nije nedostiživ, onda postoji kardinal $\lambda < \kappa$ takav da je $2^\lambda \geqslant \kappa$. Sada je

$$\kappa^{<\kappa} \leqslant (2^\lambda)^{<\kappa} = 2^{<\kappa},$$

odakle, pošto obratna nejednakost trivijalno važi, sledi da je

$$\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}.$$

3.3 Stacionarni skupovi

Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal. Za skup $x \subseteq \kappa$ kažemo da je neograničen u κ ako je on kofinalan u κ. Skup $x \subseteq \kappa$ je zatvoren u κ ako za svaki granični ordinal α iz κ i svaki niz

$$\langle x_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$$

u x važi da

$$\bigcup_{\xi<\alpha} x_\xi \in x.$$

Napomenimo da smo ovde implicitno iskoristili regularnost kardinala κ, tj. činjenicu da supremum niza elemenata iz κ dužine manje od κ mora pripadati kardinalu κ.

Primetimo da su na prethodni način definisani zatvoreni skupovi u κ upravo zatvoreni skupovi u intervalnoj topologiji na κ (bazu topologije čine otvoreni intervali).

Umesto "zatvoren i ograničen" ćemo često pisati samo "club" (closed unbounded).

3.3.1 Primer Neka je α proizvoljan ordinal u regularnom kardinalu κ. Lako se proverava da je skup C definisan sa

$$C = [\alpha, \kappa) = \{\alpha + \xi \mid \xi < \kappa\}$$

zatvoren i neograničen u κ. Napomenimo da smo u definiciji skupa C upotrebili ordinalno sabiranje.

3.3.2 Primer Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal. Pokažimo da je skup

$$C = \{\alpha < \kappa \mid \bigcup \alpha = \alpha\}$$

zatvoren i neograničen u κ.

Zatvorenost Neka je $\alpha < \kappa$ granični ordinal i neka je

$$\langle c_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$$

niz u C. Očigledno je $c = \bigcup\limits_{\xi < \alpha} c_\xi$ granični ordinal. Kako je κ regularan kardinal, imamo da je $c < \kappa$, odakle sledi da $c \in C$.

Neograničenost Neka je α proizvoljan ordinal u κ. Tada zbog regularnosti κ važi

$$\alpha < \bigcup_{n < \omega} \alpha + n = \alpha + \omega < \kappa,$$

a kako je $\alpha + \omega$ granični ordinal, mora biti i $\alpha + \omega \in C$.

3.3.3 Lema *Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal. Tada je presek $< \kappa$ zatvorenih i neograničenih skupova u κ takođe zatvoren i neograničen.*

Dokaz

S obzirom da je presek proizvoljne familije zatvorenih skupova zatvoren skup, ostaje da se pokaže neograničenost. Neka je λ beskonačan kardinal manji od κ i neka su $C_\xi,\ \xi < \lambda$ zatvoreni i neograničeni skupovi u κ. Uočimo proizvoljan ordinal $\alpha_0 < \kappa$. Pošto je svaki od skupova C_ξ neograničen, možemo izabrati $c_{\xi,0} \in C_\xi$ tako da je $\alpha_0 < c_{\xi,0}$. Neka je

$$\alpha_1 = \bigcup_{\xi<\lambda} c_{\xi,0}.$$

Zbog regularnosti kardinala κ imamo da $\alpha_1 \in \kappa$. Ponovimo prethodni postupak ω puta. Dobijamo nizove $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ i

$$\langle c_{\xi,n} \mid n < \omega \rangle \subseteq C_\xi,\ \xi < \lambda.$$

Iz konstrukcije neposredno sledi da za svako $\xi < \lambda$ važi

$$\bigcup_{n<\omega} \alpha_n = \bigcup_{n<\omega} c_{\xi,n},$$

što upravo znači da

$$\bigcup_{n<\omega} \alpha_n \in \bigcap_{\xi<\lambda} C_\xi.$$

$\Box$

3.3.4 Definicija Neka su X_α , $\alpha \in \kappa$ podskupovi neprebrojivog regularnog kardinala κ. *Dijagonalni presek* skupova X_α , $\alpha \in \kappa$ definišemo na sledeći način:

$$\Delta_{\alpha\in\kappa} X_\alpha =_{\mathrm{def}} \{\xi \in \kappa \mid \xi \in \bigcap_{\alpha\in\xi} X_\alpha\}.$$

Primetimo da je $\Delta_{\alpha\in\kappa}X_\alpha = \Delta_{\alpha\in\kappa}\bigcap\limits_{\xi\leqslant\alpha} X_\xi$.

3.3.5 Teorema *Familija zatvorenih i neograničenih skupova u κ je zatvorena za dijagonalne preseke.*

Dokaz

Neka su C_α , $\alpha \in \kappa$ proizvoljni zatvoreni i neograničeni skupovi u κ. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je data familija skupova opadajuća. Dalje, neka je $C = \Delta_{\alpha\in\kappa}C_\alpha$. Pokažimo da je C zatvoren i neograničen.

Zatvorenost Neka je α granični ordinal u κ i neka je $\langle c_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ proizvoljan niz u C dužine α. Pošto je κ regularan kardinal, supremum c uočenog niza takođe pripada κ. Pokažimo da $c \in C$. Po definiciji $c \in C$ akko $c \in \bigcap_{\xi<c} C_\xi$, a kako je

$$\bigcap_{\xi<c} C_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha} C_{c_\xi}$$

(ovde smo iskoristili činjenicu da je $C_\xi \subseteq C_\eta$ za $\eta < \xi$ i da je $c = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} c_\xi$), dovoljno je pokazati da $c \in C_{c_\xi}$ za svako $\xi < \alpha$. Neka je $\xi < \alpha$ proizvoljno. S obzirom da $c_\xi \in C$, važi i

$$c_\xi \in \bigcap_{\eta<c_\xi} C_\eta \subseteq C_{c_\xi},$$

odakle sledi da $c_\xi \in C_{c_\xi}$. Pošto je $C_\eta \subseteq C_{c_\xi}$ za svako $\eta > c_\xi$, iz prethodnog sledi da je niz $\langle c_\eta \mid c_\xi < \eta < \alpha\rangle$ sadržan u C_{c_ξ}, pa i njegov supremum, a to je c, takođe pripada skupu C_{c_ξ}.

Neograničenost Neka je α proizvoljan ordinal u κ i neka je

$$f : P(\kappa) \setminus \{0\} \longrightarrow \kappa$$

funkcija izbora. Formirajmo rekurzivno niz $\langle \beta_n \mid n < \omega\rangle$ na sledeći način:

- $\beta_0 = f(C_0 \setminus (\alpha + 1))$
- $\beta_{n+1} = f(C_{\beta_{n+1}} \setminus (\beta_n + 1))$.

Neka je $\beta = \bigcup_{n\in\omega} \beta_n$. Sasvim slično kao malo pre pokazuje se da

$$\beta \in \bigcap_{n\in\omega} C_{\beta_n} = \bigcap_{\alpha\in\beta} C_\alpha,$$

tj. $\beta \in C$ i $\beta > \alpha$. □

3.3.6 Definicija [Stacionarni skupovi] Za skup $S \subseteq \kappa$ kažemo da je *stacionaran* ako seče sve zatvorene i neograničene skupove u κ.

Primetimo da za svaki stacionaran $S \subseteq \kappa$ važi $|S| = \kappa$.

3.3.7 Primer Na osnovu leme 3.3.3, svaki zatvoren i neograničen skup u κ je i stacionaran u κ.

3.3.8 Primer [S^λ_κ] Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal i neka je λ regularan kardinal manji od κ. Sa S^λ_κ označimo skup svih ordinala u κ kofinalnosti λ. Pokažimo da je S^λ_κ stacionaran skup u κ.

Uočimo proizvoljan zatvoren i neograničen skup $C \subseteq \kappa$ i u njemu rastući niz $\langle c_\alpha \mid \alpha < \lambda \rangle$. Neka je c supremum uočenog niza. Pošto je κ regularan kardinal, imamo da $c \in \kappa$, a iz regularnosti λ i činjenice da je c supremum rastućeg niza sledi da je $\mathrm{cf} c = \lambda$, pa $c \in S^\lambda_\kappa$. Najzad, $c \in C$ jer je C zatvoren u κ.

3.3.9 Primer Neka je skup S stacionaran u κ i neka je skup C zatvoren i neograničen u κ. Tada je skup $S \cap C$ stacionaran u κ.

3.3.10 Definicija [Regresivne funkcije] Za funkciju $f : S \longrightarrow \kappa$ kažemo da je *regresivna* na stacionarnom skupu $S \subseteq \kappa$ ako za svaki ordinal $\alpha \in S$ veći od 0 važi

$$f(\alpha) < \alpha.$$

3.3.11 Teorema [Fodor] *Neka je funkcija $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ regresivna na stacionarnom skupu $S \subseteq \kappa$. Tada postoji stacionaran skup $S_1 \subseteq S$ na kojem je funkcija f konstantna.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno. Tada je za svako $\gamma \in \kappa$ skup

$$A_\gamma = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$$

nije stacionaran. Izaberimo zatvoren i neograničen u κ skup C_γ disjunktan sa A_γ. Po teoremi 3.3 je skup $C = \Delta_{\gamma\in\kappa} C_\gamma$ takođe zatvoren i neograničen u κ.

Neka je $S_1 = S \cap C$. Primetimo da je S_1 stacionaran skup jer je presek stacionarnog skupa i zatvorenog i neograničenog skupa.

Neka je $\alpha > 0$ iz S_1 proizvoljno. Tada $\alpha \in \bigcap\limits_{\gamma\in\alpha} C_\gamma$ (jer je $S_1 \subseteq C$), odakle neposredno sledi da je $f(\gamma) \neq \gamma$ za svako $\gamma < \alpha$, pa mora biti i $f(\gamma) \geqslant \gamma$. Međutim, ovo je u kontradikciji sa činjenicom da je $S_1 \subseteq S$ i da je funkcija f regresivna na S. $\square$

3.3.12 Posledica *Postoji κ disjunktnih stacionarnih skupova u κ.*

Dokaz

Sledeći oznake iz primera 3.3.8, neka je S^ω_κ skup svih ordinala iz κ kofinalnosti ω. Naravno, S^ω_κ je stacionaran skup. Za svaki ordinal $\alpha \in W$ izaberimo rastući niz $\langle \xi_{n,\alpha} \mid n < \omega \rangle$ u κ čiji je supremum baš α. Pokažimo sledeće pomoćno tvrđenje:

(1) Postoji $m < \omega$ tako da je za svako $\beta < \kappa$ skup

$$W_\beta = \{\alpha \in S^\omega_\kappa \mid \xi_{m,\alpha} \geqslant \beta\}$$

stacionaran u κ.

Pretpostavimo suprotno. Tada za svako $n < \omega$ postoji $\beta_n < \kappa$ tako da skup $\{\alpha \in S^\omega_\kappa \mid \xi_{n,\alpha} \geqslant \beta_n\}$ nije stacionaran. Neka je β supremum niza $\langle \beta_n \mid n < \omega \rangle$.

Tada za svako $n < \omega$ skup $A_n = \{\alpha \in S^\omega_\kappa \mid \xi_{n,\alpha} \geqslant \beta\}$ nije stacionaran. Međutim, $A_n \supseteq S^\omega_\kappa \cap [\beta, \kappa)$, odakle bi sledilo da je A_n stacionaran. Kontradikcija.

Neka je $m < \omega$ svedok za (1). Definišimo funkciju $f : S^\omega_\kappa \longrightarrow \kappa$ na sledeći način:

$$f(\alpha) = \xi_{m,\alpha}.$$

Sada je f regresivna funkcija na svakom od skupova W_β, pa po Fodorovoj teoremi za svako $\beta \in \kappa$ postoji stacionaran $S_\beta \subseteq W_\beta$ na kome je f konstantna. Neka je $\{\gamma_\beta\} = f[S_\beta]$. Primetimo da je $\beta_\beta \geqslant \beta$.

Niz $\langle \gamma_\beta \mid \beta < \kappa \rangle$ je kofinalan u regularnom kardinalu κ, pa među skupovima S_β mora biti κ disjunktnih. □

Za neglavni filter F nad κ kažemo da je *normalan* ako je zatvoren za dijagonalne preseke. Za neglavni filter F nad κ kažemo da je κ–*kompletan* ako je zatvoren za preseke $< \kappa$ mnogo svojih elemenata.

3.3.13 Teorema *Neka je F normalan filter nad κ koji sadrži sve intervale oblika $[\alpha, \kappa)$, $\alpha \in \kappa$. Tada važi:*

- *F je κ–kompletan ;*
- *F sadrži sve zatvorene i neograničene skupove u κ.*

Dokaz

Neka je $\lambda < \kappa$ i neka je X_α , $\alpha \in \lambda$ familija skupova u F. Definišimo skupove A_α , $\alpha \in \kappa$ na sledeći način:

$$A_\alpha = \begin{cases} X_\alpha \cap [\lambda, \kappa) & , \quad \alpha < \lambda \\ [\lambda, \kappa) & , \quad \lambda \leqslant \alpha < \kappa \ . \end{cases}$$

Sada je $\bigcap_{\alpha \in \lambda} X_\alpha \supseteq \Delta_{\alpha\in\kappa} A_\alpha$, pa $\bigcap_{\alpha \in \lambda} X_\alpha \in F$.

Neka je C_0 skup svih graničnih ordinala u κ. Kako je

$$C_0 = \Delta_{\alpha\in\kappa}[\alpha + 2, \kappa) \ ,$$

C_0 je zatvoren i neograničen i $C_0 \in F$. Dalje, neka je C proizvoljan zatvoren i neograničen skup u κ i neka je $\langle \xi_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ rastuća numeracija skupa C. Odavde sledi da je $\alpha \leqslant \xi_\alpha$ za svako $\alpha \in \kappa$. Sada skup

$$D = C_0 \cap \Delta_{\alpha\in\kappa}[\xi_\alpha + 1, \kappa)$$

pripada filteru F .

Neka je $\beta \in D$ proizvoljno. S jedne strane, zbog $D \subseteq C_0$ je β granični ordinal. S druge strane, kako $\beta \in \Delta_{\alpha\in\kappa}[\xi_\alpha + 1, \kappa)$, iz definicije dijagonalnog preseka i činjenice da je β granični ordinal sledi da

$$\beta \in \bigcap_{\alpha\in\beta}[\xi_\alpha + 1, \kappa) = [\xi_\beta, \kappa) \ ,$$

pa mora biti $\beta = \xi_\beta$. Dakle, $D \subseteq C$, pa $C \in F$. $\square$

3.4 Nedostiživi kardinali

Neka je kardinal κ neprebrojiv. Tada za kardinal κ kažemo da je:

- *slabo nedostiživ*, ako je regularan i granični;
- *jako nedostiživ*, ako je regularan i jako granični.

Iz definicije neposredno sledi da je svaki jako nedostiživ kardinal ujedno i slabo nedostiživ.

3.4.1 Primer Iz GCH neposredno sledi da je svaki slabo nedostiživ kardinal ujedno i jako nedostižan. Zaista, ako je κ slabo nedostiživ kardinal, onda za proizvoljan kardinal $\lambda < \kappa$ mora biti i

$$2^\lambda \overset{\mathrm{GCH}}{=} \lambda^+ < \kappa,$$

tj. κ je i jako granični kardinal.

3.4.2 Teorema *Pretpostavimo da je kardinal κ slabo nedostiživ. Tada je*

$$\kappa = \aleph_\kappa.$$

Dokaz

Dovoljno je pokazati da za svaki ordinal $\alpha < \kappa$ važi $\aleph_\alpha < \kappa$. Naime, u tom slučaju je

$$\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \aleph_\alpha = \aleph_\kappa.$$

Stoga indukcijom po κ pokazujemo da je $\aleph_\alpha < \kappa$.

1. $\aleph_0 < \kappa$ jer je κ slabo nedostiživ kardinal;
2. Neka je $\aleph_\alpha < \kappa$. Kako je κ granični kardinal, tada je i $\aleph_{\alpha+1} < \kappa$;
3. Neka je $\alpha < \kappa$ granični ordinal i neka je $\aleph_\beta < \kappa$ za svaki ordinal $\beta < \alpha$. S obzirom da je κ regularan kardinal, mora biti i

$$\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta < \kappa.$$

□

3.4.3 Zadatak Neka je M neprazan tranzitivan skup. Pokazati da u modelu $\langle M, \in\rangle$ važe aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa i regularnosti.

Uputstvo

Što se tiče aksiome praznog skupa, dovoljno je pokazati da $0 \in M$. Neka je x $\in$-minimalni element skupa M (on postoji na osnovu aksiome regularnosti). Zbog tranzitivnosti skupa M je $x \subseteq M$, a kako je $x \cap M = 0$ ($\in$-minimalnost x), mora biti $x = 0$.

Da bismo pokazali važenje aksiome regularnosti u $\langle M, \in\rangle$, dovoljno je pokazati da $\in$-minimalni element svakog skupa iz M takođe pripada M. No ovo je direktna posledica tranzitivnosti skupa M: ako $x \in M$, onda je i $x \subseteq M$.

Prelazimo na aksiomu ekstenzionalnosti. Primetimo da

$$\langle M, \in\rangle \models \forall x \forall y(x = y \Leftrightarrow \forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y))$$

ako i samo ako važi

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(x = y \Leftrightarrow (\forall z \in M)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)).$$

Neka su $x, y \in M$ proizvoljni. Hoćemo da pokažemo da važi

$$x = y \Leftrightarrow (\forall z \in M)(z \in x \Leftrightarrow z \in y).$$

Implikacija sleva u desno je direktna posledica predikatskog računa prvog reda (instanca jedne od akssoma jednakosti), dok je obratna implikacija direktna posledica tranzitivnosti skupa M i aksiome ekstenzionalnosti. Naime, uočeni skupovi x i y su zbog tranzitivnosti skupa M ujedno i njegovi podskupovi, pa je

$$(\forall z \in M)(z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

ekvivalentno sa

$$\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y),$$

odakle po aksiomi ekstenzionalnosti sledi da je $x = y$. $\Box$.

3.4.4 Zadatak Neka je δ granični ordinal veći od ω. Pokazati da u modelu $\langle V_\delta, \in\rangle$ važe aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa, para, unije, partitivnog skupa, beskonačnosti, izbora i regularnosti, kao i da važi shema separacije.

Uputstvo

Na osnovu prethodnog zadatka u $\langle V_\delta, \in\rangle$ važe aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa i regularnosti. Neka su $x, y \in V_\delta$ proizvoljni i neka je

$$\alpha = \max\{\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)\}.$$

Tada $x, y \in V_{\alpha+1}$ i $V_{\alpha+1} \in V_\delta$. Odavde sledi:

- $\{x, y\} \subseteq V_{\alpha+1}$, pa $\{x, y\} \in V_{\alpha+2}$. Kako je δ granični ordinal veći od α, imamo da $V_{\alpha+2} \in V_\delta$, odakle zbog tranzitivnosti V_δ sledi da
$$\{x, y\} \in V_\delta.$$
Ovim je pokazano važenje aksiome para u V_δ;

- $P(x) \in V_{\alpha+2}$, pa na sličan način kao malo pre zaključujemo da $P(x) \in V_\delta$, odakle sledi važenje aksiome partitivnog skupa u V_δ. Odavde zajedno sa tranzitivnošću V_δ dobijamo da u V_δ važi i shema separacije:
$$A = \{z \in x \mid \varphi\} \subseteq x,$$
pa $A \in P(x)$, odakle zbog $P(x) \subseteq V_\delta$ sledi da $A \in V_\delta$;

- $\bigcup x \in V_{\alpha+2}$, pa imamo da $\bigcup x \in V_\delta$, odakle sledi da u V_δ važi aksioma unije;

- Neka je R dobro uređenje skupa x. Kako je $R \subseteq x \times x$, imamo da $R \in V_{\alpha+4}$, odakle sledi da $R \in V_\delta$. Dakle, u V_δ važi i aksioma izbora.

Konačno, $\omega \in V_\delta$, pa u V_δ važi i aksioma beskonačnosti. □

3.4.5 Teorema *Neka je κ jako nedostiživ kardinal. Tada za svaku funkciju $f : V_\kappa \longrightarrow V_\kappa$ i svaki skup $X \in V_\kappa$ važi*
$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \in V_\kappa.$$
Posebno, u modelu $\langle V_\kappa, \in\rangle$ važi shema zamene.

Dokaz

Neka je X proizvoljan skup u V_κ i neka je $\alpha = \mathrm{rank}(X)$. Naravno, $\alpha + 1 < \kappa$. Iz jake nedostiživosti κ sledi da je
$$|V_\xi| < \kappa$$

za svako $\xi < \kappa$, pa imamo da je

$$|X| < |V_{\alpha+1}| < \kappa.$$

Za $x \in X$ neka je $\lambda_x = \mathrm{rank}(x)$ i neka je

$$\lambda = \sup\{\lambda_x \mid x \in X\}.$$

Kako je $|X| < \kappa$ i kako je κ regularan kardinal, imamo da je $\lambda < \kappa$. Sada je $f[X] \subseteq V_\lambda$, pa $f[X] \in V_{\lambda+1}$, a kako je κ granični ordinal, imamo da $V_{\lambda+1} \in V_\kappa$, odakle zbog tranzitivnosti V_κ sledi da $f[X] \in V_\kappa$.

Posebno, prethodno važi i za svaku definabilnu sa parametrima iz V_κ funkciju $f : V_\kappa \longrightarrow V_\kappa$, pa u modelu $\langle V_\kappa, \in\rangle$ važi shema zamene. □

3.4.6 Posledica *Ako je teorija ZFC neprotivrečna, onda se ZFC sredstvima ne može dokazati egzistencija jako nedostiživih kardinala.*

Dokaz

Pretpostavimo da je teorija ZFC neprotivrečna. Na osnovu prethodne teoreme je $\langle V_\kappa, \in\rangle$ model teorije ZFC za svaki jako nedostižan kardinal κ. Ako bi se ZFC sredstvima mogla dokazati egzistencija jako nedostižnog kardinala κ, onda bi na osnovu prethodnog imali da

$$\mathrm{ZFC} \vdash Con(\mathrm{ZFC}),$$

što je u suprotnosti sa Gödelovim teoremama nepotpunosti. □

3.4.7 Posledica *Ako je teorija ZFC neprotivrečna, onda se ZFC sredstvima ne može dokazati egzistencija slabo nedostiživih kardinala.*

Dokaz

Potrebna je mala modifikacija dokaza prethodne posledice koja zahteva neka znanja o Gödelovom konstruktibilnom univerzumu L, koja ćemo ovde samo kratko napomenuti.

Za proizvoljan skup X sa $D(X)$ označavamo skup svih definabilnih sa parametrima iz $X \cup \{X\}$ podskupova skupa X. Konstruktibilni univerzum L konstruišemo rekurzivno po Ord na sledeći način:

- $L_0 = 0$;
- $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$;
- $L_\alpha = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} L_\xi$ u slučaju graničnog ordinala $\alpha > 0$;
- $L = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Ord}} L_\alpha$.

Napomenimo da u $\langle L, \in\rangle$ važi GCH.

Prelazimo na dokaz posledice. Ako je κ slabo nedostiživ kardinal, onda je on zbog važenja GCH u L jako nedostiživ u L, pa je $\langle L_\kappa, \in\rangle$ model teorije ZFC. Dalje nastavljamo isto kao i u dokazu prethodne posledice. $\square$

Za jako nedostiživ kardinal κ kažemo da je *Mahloov* ako je skup regularnih kardinala u κ stacionaran u κ.

3.4.8 Teorema *Neka je κ Mahloov kardinal. Tada je κ κ–ti jako nedostiživ kardinal.*

Dokaz

Neka je C skup svih jako graničnih kardinala u κ. Pokažimo da je C zatvoren i neograničen u κ. Primetimo da zatvorenost skupa C direktno sledi iz činjenice da je unija jako graničnih kardinala takođe jako granični kardinal.

Neka je $\alpha < \kappa$ proizvoljno. Konstruišimo rekurzivno kardinal $\lambda > \alpha$ na sledeći način:

- $\lambda_0 = \alpha^+$
- $\lambda_{n+1} = 2^{\lambda_n}$
- $\lambda = \bigcup\limits_{n<\omega} \lambda_n$.

Iz konstrukcije neposredno sledi da je λ jako granični i da je $\lambda > \alpha$, a kako je κ nedostiživ, mora biti $\lambda < \kappa$. Ovim smo pokazali da je skup C neograničen.

Pošto je κ Mahloov kardinal, skup S svih regularnih kardinala u κ je stacionaran u κ, pa je i skup S_1 svih jako nedostiživih kardinala u κ takođe stacionaran, jer je $S_1 = S \cap C$.

Sada je $|S_1| = \kappa$, odakle neposredno sledi da je κ κ–ti nedostiživ kardinal. □

3.4.9 Primer Pokažimo da najmanja fiksna tačka niza jako nedostižnih kardinala nije Mahloov kardinal.

Neka je κ najmanja fiksna tačka niza jako nedostiživih kardinala, S skup svih regularnih kardinala u κ i neka je C skup svih jako graničnih kardinala u κ.

Ako bi skup S bio stacionaran, onda bi i skup $S_1 = S \cap C$ takođe bio stacionaran. Neka je $\langle \lambda_\alpha \mid \alpha < \kappa \rangle$ rastuća numeracija skupa S_1. Tada je sa

$$f(\lambda_\alpha) = \alpha$$

definisana regresivna funkcija na stacionarnom skupu S_1, pa po Fodorovoj teoremi postoji stacionaran S_2 na kome je funkcija f konstantna. Međutim, f je 1–1, pa mora biti $|S_2| = 1$. Kontradikcija.

Dakle, S nije stacionaran u κ, pa κ nije Mahloov kardinal.

3.5 Kompletne Booleove algebre

Booleova algebra $\mathcal{B}$ je *kompletna* ako svaki neprazan podskup skupa $\mathcal{B}$ ima supremum i infimum. Precizirajmo notaciju:

- $\sum X =_{\mathrm{def}} \sup_{\mathcal{B}} X$;
- $\prod X =_{\mathrm{def}} \inf_{\mathcal{B}} X$;
- $X^c =_{\mathrm{def}} \{x^c \mid x \in X\}$;

- $X \wedge Y =_{\text{def}} \{x \wedge y \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$;
- $X \vee Y =_{\text{def}} \{x \vee y \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$;
- $\sum 0 =_{\text{def}} \mathbf{0}$;
- $\prod 0 =_{\text{def}} \mathbf{1}$.

3.5.1 Zadatak Neka je X proizvoljan skup. Pokazati da je Booleova algebra $\langle P(X), \subseteq \rangle$ kompletna.

3.5.2 Zadatak Neka je $\langle X, \tau_X \rangle$ proizvoljan topološki prostor. Pokazati da je Booleova algebra regularno otvorenih skupova $\langle \text{r.o.}X, \subseteq \rangle$ kompletna.

3.5.3 Zadatak Navesti primer Booleove algebre koja nije kompletna.

Uputstvo

Neka je A algebra skupova generisana svim konačnim podskupovima skupa prirodnih brojeva ω. Tada familija X svih konačnih podskupova skupa parnih brojeva nema supremum u $\langle A, \subseteq \rangle$. $\square$

3.5.4 Zadatak Dokazati da u kompletnim Booleovim algebrama važi:

1. $(\sum X)^c = \prod X^c$;
2. $(\prod X)^c = \sum X^c$;
3. $(\sum X) \wedge (\sum Y) = \sum (X \wedge Y)$;
4. $(\prod X) \vee (\prod Y) = \prod (X \vee Y)$.

3.5.5 Definicija $W \subseteq \mathcal{B}$ je *antilanac* u Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ ako $\mathbf{0} \notin W$ i ako za svako $x, y \in W$ važi $x \wedge y = \mathbf{0}$. Antilanac W je *particija* algebre $\mathcal{B}$ ukoliko je $\sum W = \mathbf{1}$.

3.5.6 Zadatak Neka je W maksimalan antilanac Booleove algebre $\mathcal{B}$. Pokazati da je onda $\sum W = \mathbf{1}$.

Uputstvo

Neka je W antilanac u $\mathcal{B}$ takav da je $a = \sum W < \mathbf{1}$. Tada je $\mathbf{0} < a^c$, a kako je $a^c \wedge w = \mathbf{0}$ za svako $w \in W$, skup $W \cup \{a^c\}$ je takođe antilanac u $\mathcal{B}$, pa antilanac W nije maksimalan. □

3.5.7 Lema *Neka je $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra, X neprazan podskup skupa $\mathcal{B}$ takav da je $X \wedge \mathcal{B} = \mathcal{B}$ i neka je W maksimalan antilanac u X. Tada je*

$$\sum X = \sum W.$$

Dokaz

Pošto je $W \subseteq X$ trivijalno mora biti i $\sum W \leqslant \sum X$, pa ostaje da se pokaže obratna nejednakost. Neka je $x \in X$ proizvoljno. Kako je $X \wedge \mathcal{B} = X$, to

$$b = x \wedge \prod W^c$$

pripada skupu X. Sada je $b \wedge \sum W = \mathbf{0}$, a kako $b \in X$ i kako je W maksimalan antilanac u X, mora biti $b = \mathbf{0}$, odakle sledi da je $x^c \vee \sum W = \mathbf{1}$. Odavde neposredno sledi da je $x \wedge \sum W = x$, a time i nejednakost $\sum X \leqslant \sum W$. □

3.5.8 Zadatak Neka je $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra. Dokazati da je $D \subseteq \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gust ako i samo ako za svako $b \in \mathcal{B}$ postoji $D_b \subseteq D$ tako da $b = \sum D_b$.

Uputstvo

Ako je svaki element Booleove algebre $\mathcal{B}$ supremum nekih elemenata skupa D, onda je po definiciji skup D gust u uočenoj algebri. Pretpostavimo da je skup D gust u $\mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Primetimo da je dovoljno pokazati da je $\sum D = \mathbf{1}$, jer za $\mathbf{0} < b < \mathbf{1}$ prelazimo na kompletnu Booleovu algebru $b \wedge \mathcal{B}$ i u njoj gust skup $D \cap b \wedge \mathcal{B}$.

Pretpostavimo stoga da je $s = \sum D < \mathbf{1}$. Tada je $\mathbf{0} < s^c$, pa postoji $d \in D$ tako da je $d \leqslant s^c$. Odavde izvodimo kontradikciju na sledeći način:

$$s = \sum D = \sum \{x \vee d \mid x \in D\} = s \vee d > s,$$

jer je $s \wedge d = \mathbf{0}$. □

3.5.9 Definicija Neka je κ beskonačan kardinal i $\mathcal{B}$ Booleova algebra. Kažemo da je $\mathcal{B}$ *κ-distributivna* ako za svako $I = \bigcup_{\alpha \in \kappa} I_\alpha$ i svako $\{u_{\alpha,i} \mid \alpha \in \kappa, i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ važi

$$\prod_{\alpha \in \kappa} \sum_{i \in I_\alpha} u_{\alpha,i} = \sum_{f \in \prod_{\alpha \in \kappa} I_\alpha} \prod_{\alpha \in \kappa} u_{\alpha,f(\alpha)}.$$

Neka su W_1 i W_2 particije Booleove algebre $\mathcal{B}$. Kažemo da je W_1 *profinjenje* particije W_2 ako

$$(\forall u \in W_1)(\exists v \in W_2) u \leqslant v.$$

Skup $X \subseteq \mathcal{B}$ je *otvoren* ako je $(\cdot, x] \subseteq X$ za svako $x \in X$.

3.5.10 Teorema *Neka je κ kardinal i neka je $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{B}$ je κ–distributivna ;

(b) Neka su D_α, $\alpha \in \kappa$ otvoreni gusti skupovi u $\mathcal{B}$. Tada je skup

$$D = \bigcap_{\alpha \in \kappa} D_\alpha$$

otvoren i gust u $\mathcal{B}$;

(c) Svaka familija $\{W_\alpha \mid \alpha \in \kappa\}$ particija Booleove algebre $\mathcal{B}$ ima zajedničko profinjenje.

Dokaz

(a)$\Rightarrow$(b) :
Neka su $D_\alpha,\ \alpha \in \kappa$ gusti u $\mathcal{B}$ i neka je

$$D = \bigcap_{\alpha \in \kappa} D_\alpha .$$

Očigledno je D otvoren. Neka je $u > 0$ proizvoljno. Pošto je svaki od skupova D_α gust, za svako $\alpha \in \kappa$ će postojati

$$\{u_{\alpha,i} \mid \alpha \in \kappa,\ i \in I_\alpha\} \subseteq D_\alpha$$

tako da je

$$u = \sum_{i \in I_\alpha} u_{\alpha,i} .$$

Samim tim je i

$$\prod_{\alpha \in \kappa} \sum_{i \in I_\alpha} u_{\alpha,i} = \prod_{\alpha \in \kappa} u = u .$$

Pošto je $\mathcal{B}$ κ–distributivna, imamo da je

$$u = \sum_{f \in \prod\limits_{\alpha \in \kappa} I_\alpha} \prod_{\alpha \in \kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} ,$$

a kako za svako $f \in \prod_{\alpha \in \kappa} I_\alpha$

$$\prod_{\alpha \in \kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \in D\ ,$$

skup D je gust u $\mathcal{B}$.

(b)$\Rightarrow$(c) :
Neka su $W_\alpha,\ \alpha \in \kappa$ particije Booleove algebre $\mathcal{B}$. Za svako $\alpha \in \kappa$ neka je

$$D_\alpha = \{u \in \mathcal{B} \mid (\exists v \in W_\alpha) u \leqslant v\} .$$

Sada je na osnovu (b) skup $D = \bigcap\limits_{\alpha\in\kappa} D_\alpha$ otvoren i gust u $\mathcal{B}$. Neka je W maksimalan antilanac u $D \setminus \{\mathbf{0}\}$. Očigledno je W zajedničko profinjenje particija $W_\alpha,\ \alpha \in \kappa$.

(c)⇒(a) :
S jedne strane, za svako $f \in \prod\limits_{\alpha\in\kappa} I_\alpha$ je

$$(\forall\alpha \in \kappa)(\prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} \leqslant \sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i}),$$

odakle sledi da je

$$\prod_{\alpha\in\kappa}\sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} \geqslant \sum_{f\in \prod\limits_{\alpha\in\kappa} I_\alpha}\prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)}.$$

S druge strane, neka je $u = \prod\limits_{\alpha}\sum\limits_{i} u_{\alpha,i}$. Obratnu nejednakost je dovoljno pokazati u slučaju kada je $u = \mathbf{1}$ (ako je $u < \mathbf{1}$, onda odgovarajući dokaz sprovedemo u algebri $u \wedge \mathcal{B}$).

Neka je $u = \mathbf{1}$. Tada je za svako $\alpha \in \kappa$

$$\sum_{i\in I_\alpha} u_{\alpha,i} = \mathbf{1}.$$

Odavde sledi da za svako $\alpha \in \kappa$ postoji particija W_α Booleove algebre $\mathcal{B}$ tako da

$$(\forall v \in W_\alpha)(\exists i \in I_\alpha) v \leqslant u_{\alpha,i}.$$

Neka je particija W zajedničko profinjenje za $W_\alpha,\ \alpha \in \kappa$. Dakle, za svako $v \in W$ postoji $f \in \prod\limits_{\alpha\in\kappa} I_\alpha$ tako da je

$$v \leqslant \prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)},$$

odakle sledi da je

$$\sum_{f\in \prod\limits_{\alpha\in\kappa} I_\alpha}\prod_{\alpha\in\kappa} u_{\alpha,f(\alpha)} = \mathbf{1}.$$

□

3.5.11 Definicija Kompletna Booleova algebra $\mathcal{B}$ je $\langle\kappa,\lambda\rangle$-*distributivna* ako važi

$$\prod_{\alpha<\kappa}\sum_{\beta<\lambda} b_{\alpha,\beta} = \sum_{f\in{}^{\kappa}\lambda}\prod_{\alpha<\kappa} b_{\alpha,f(\alpha)}$$

Primetimo da je $\mathcal{B}$ κ-distributivna ako i samo ako je $\langle\kappa,\lambda\rangle$ – *distributivna* za svaki kardinal λ.

3.6 Booleovsko vrednosni modeli

Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda, $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra, M neprazan skup i neka je $\mathcal{L}_M = \mathcal{L} \cup M$, pri čemu elemente skupa M tretiramo kao nove simbole konstanti. Funkciju

$$\|\ \| : Sent\mathcal{L}_M \longrightarrow \mathcal{B}$$

zovemo $\mathcal{B}$-*vrednošću* ako važi:

- $\|a = a\| = \mathbf{1}$, $a \in M$;
- $\|a = b\| = \|b = a\|$, $a, b \in M$;
- $\|a = b\| \wedge \|b = c\| \leqslant \|a = c\|$, $a, b, c \in M$;
- $\|a = b\| \wedge \|R(\ldots, a, \ldots)\| \leqslant \|R(\ldots, b, \ldots)\|$, $R \in Rel\mathcal{L}$, $a, b \in M$;
- $\|a = b\| \leqslant \|F(\ldots, a, \ldots) = F(\ldots, b, \ldots)\|$, $F \in Fun\mathcal{L}$, $a, b \in M$;
- $\|\neg\varphi\| = \|\varphi\|^c$;
- $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \wedge \|\psi\|$;
- $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \vee \|\psi\|$;
- $\|\exists x\varphi(x)\| = \sum_{a\in M} \|\varphi(a)\|$;

- $\|\forall x\varphi(x)\| = \prod_{a\in M} \|\varphi(a)\|$.

Par $\langle M, J\rangle$ je $\mathcal{B}$-*model* u odnosu na $\mathcal{B}$-vrednost $\|\ \|$ ukoliko važi:

- J je funkcija sa domenom $\mathcal{L}$;
- Za svaki simbol konstante c, $J(c) \in M$;
- Za svaki funkcijski znak F arnosti n, $J(F)$ je n-arna operacija na skupu M;
- Za svaki relacijski znak R arnosti n, $J(r)$ je funkcija sa domenom M^n i kodomenom $\mathcal{B}$ takva da je

$$J(R)(a_1, \ldots, a_n) = \|R(a_1, \ldots, a_n)\|.$$

3.6.1 Primer Neka je $\mathcal{B}$ iskazna algebra i neka je $\mathcal{M}$ proizvoljan model jezika $\mathcal{L}$. Sasvim lako se proverava da je sa

$$\|\varphi(\bar{a})\| = \begin{cases} \top & , \quad \mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}] \\ \bot & , \quad \mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}] \end{cases}$$

korektno definisana $\mathcal{B}$-vrednost, tj. da je $\langle \mathcal{M}, \|\ \|\rangle$ $\mathcal{B}$-model.

3.6.2 Primer Neka je $\langle \mathcal{M}, \|\ \|\rangle$ $\mathcal{B}$-model i neka je D filter Booleove algebre $\mathcal{B}$. Binarna relacija $\sim$ na $\mathcal{B}$ definisana sa

$$a \sim b \Leftrightarrow (\exists d \in \mathcal{B})(a \wedge d = b \wedge d)$$

je kongruencija, pa je i količnička struktura $\mathcal{B}_D = \mathcal{B}_{/\sim}$ takođe kompletna Booleova algebra, a $\langle \mathcal{M}, \|\ \|_D\rangle$ je $\mathcal{B}_D$-model. Posebno, ako je D ultrafilter, onda je $\langle \mathcal{M}, \|\ \|_D\rangle$ klasičan model.

3.6.3 Zadatak Neka je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$. Dokazati da je

$$\|a = b\| \wedge \|\varphi(\ldots, a, \ldots)\| \leqslant \|\varphi(\ldots, b, \ldots)\|.$$

Kažemo da u $\mathcal{B}$-modelu $\langle \mathcal{M}, \| \ \| \rangle$ važi rečenica φ jezika $\mathcal{L}_M$ ukoliko je $\|\varphi\| = \mathbf{1}$. $\mathcal{B}$-model $\langle \mathcal{M}, \| \ \| \rangle$ je *pun* ako za svaki maksimalan antilanac W u $\mathcal{B}$ i svaki $\{a_u \mid u \in W\} \subseteq M$ postoji $a \in M$ tako da za svako $u \in W$ važi

$$u \leqslant \|a = a_u\|.$$

Uz prethodnu simboliku, neka su $a, b \in A$ takvi da je za svako $u \in W$

$$u \leqslant \|a = a_u\| \quad \text{i} \quad u \leqslant \|b = a_u\|.$$

Tada je

$$u \leqslant \|a = a_u\| \wedge \|b = a_u\| \leqslant \|a = b\|,$$

odakle sledi da je

$$\mathbf{1} = \sum W \leqslant \|a = b\| \ , \quad \text{tj.} \ \ \|a = b\| = \mathbf{1}.$$

3.6.4 Teorema *Neka je $\langle \mathcal{M}, \| \ \| \rangle$ pun $\mathcal{B}$-model jezika $\mathcal{L}$ i neka je $\varphi(x, \bar{y})$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}$. Tada za proizvoljne $\bar{b} \in M$ postoji $a \in M$ tako da*

$$\|\exists x \varphi(x, \bar{b})\| = \|\varphi(a, \bar{b})\|.$$

Dokaz

Neka je

$$X = \{u \in B \mid (\exists a_u \in M) u \leqslant \|\varphi(a_u, \bar{b})\|\}$$

i neka je W maksimalan antilanac u X. Kako je $X \wedge \mathcal{B} = X$, to je $\sum X = \sum W$. Pošto je $\langle \mathcal{M}, \| \ \| \rangle$ pun model, postojaće $a \in M$ tako da

$$(\forall u \in W) u \leqslant \|a = a_u\|.$$

Hoćemo da pokažemo da je a odgovarajući svedok. S jedne strane, očigledno je

$$\|\varphi(a, \bar{b})\| \leqslant \|\exists x \varphi(x, \bar{b})\|.$$

S druge strane

$$
\begin{aligned}
\|\exists x\varphi(x,\bar{b})\| &= \sum_{c\in A}\|\varphi(c,\bar{b})\| \\
&= \sum X \\
&= \sum W \\
&= \sum_{u\in W} u \wedge \|a = a_u\| \\
&\leqslant \sum_{u\in W} \|\varphi(a_u,\bar{b})\| \wedge \|a = a_u\| \\
&\leqslant \sum_{u\in W} \|\varphi(a,\bar{b})\| \\
&= \|\varphi(a,\bar{b})\|.
\end{aligned}
$$

$\square$

Teorema 3.1 *Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda, $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra, $\langle \mathcal{M}, \| \ \| \rangle$ $\mathcal{B}$-model i φ valjana formula jezika $\mathcal{L}$. Tada je $\|\varphi\| = \mathbf{1}$.*

Dokaz

Neka je φ formula jezika $\mathcal{L}$ takva da je $\|\varphi\| < \mathbf{1}$. Tada postoji ultrafilter D u $\mathcal{B}$ takav da $\|\varphi\| \notin D$. Sada je $\|\varphi\|_D = \mathbf{0}$, a kako je $\mathcal{B}_D$ iskazna algebra, to je $\langle \mathcal{M}, \| \ \|_D \rangle$ klasičan model u kome ne važi φ, pa φ nije valjana formula. $\square$

Koristeći Booleovsko vrednosne modele, Dana Scott i Robert Solovay su dali alternativno zasnivanje forsinga godinu dana posle Cohena, i o tome će biti više reči u poglavlju o forsingu. Interesantna je primena Booleovsko vrednosnih modela u dokazu Gödelove teoreme potpunosti. Čitaoca upućujemo na [79].

3.7 Ultrafilteri

Nešto detaljnije ćemo se pozabaviti filterima u Booleovoj algebri $P(I)$, gde je I proizvoljan skup, kao i ultraproizvodima - konstrukcijom koja je značajna i u teoriji modela i u teoriji skupova, što će biti ilustrovano raznim primerima (karakterizacija elementarnih klasa, sintaksna svojstava infinitarnih jezika, uvid u fundamentalna svojstva realnih/verovatnosnih mera, fino merenje jačine jakih aksioma beskonačnosti, kontinuum problem).

Filter F nad skupom I je filter Booleove algebre $\langle P(I), \subseteq \rangle$, pa onda za F važi:

1. $I \in F$;
2. Ako x i y pripadaju F, onda i $x \cap y$ pripada F;
3. Ako $x \in F$, onda i svaki njegov nadskup $y \in P(I)$ takođe pripada F.

Pravi filter F (ako $0 \notin F$) je *ultrafilter* ako je maksimalan u smislu inkluzije, tj. ako ne postoji pravi filter u $P(I)$ čiji je F pravi (strogi) podskup. Ekvivalentno, za svaki $x \in P(I)$ ili $x \in F$ ili $I \setminus x \in F$.

Dualan pojam filteru je pojam *ideala*. Za dati filter F odgovarajući dualni ideal J_F je definisan sa

$$J_F = \{x \subseteq I \mid I \setminus x \in F\}.$$

Primetimo da je $F \cup J_F$ Booleova algebra u kojoj je F ultrafilter.

Iz 2. sledi da svaki (pravi) filter ima svojstvo konačnog preseka (finite intersection property). Takođe, svaka familija sa svojstvom konačnog preseka se širi do filtera, a svaki filter do maksimalnog - ultrafiltera (videti teoremu 1.5.19).

Za filter F kažemo da je *glavni* ako je generisan jednim svojim elementom, tj. ako postoji $x \in F$ tako da je

$$x = \bigcap F.$$

Primetimo da je glavni filter ultrafilter ako i samo ako je $\bigcap F$ singlton (jednočlani skup). Glavni filteri i ultrafilteri, kao i ceo $P(I)$ nisu interesantni, pa će nas nadalje interesovati isključivo *neglavni* filteri i ultrafilteri, tj. pravi filteri F kod kojih je $\bigcap F = 0$.

3.7.1 Zadatak Naći primer niza $\langle a_n \mid n < \omega \rangle$ pozitivnih realnih brojeva i ultrafiltera D nad ω sa sledećim svojstvima:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;
2. $\sum\limits_{n\in X} a_n = +\infty$ za svako $X \in D$.

Uputstvo Neka je $a_n = \frac{1}{n+1}$, $n < \omega$ i neka je

$$A = \{X \subseteq \omega \mid \sum_{n\in\omega\setminus X} \frac{1}{n+1} < +\infty\}.$$

Pokazati:

- Ako $X \in A$, onda je $\sum\limits_{n\in X} \frac{1}{n+1} = +\infty$;
- A ima svojstvo konačnog preseka.

Za traženi ultrafilter D možemo uzeti bilo koji ultrafilter nad ω koji širi A. $\square$

3.7.2 Zadatak Za $A \subseteq \omega$ neka je

$$x_A = \sum_{n\in A} \frac{1}{10^{n+1}}.$$

Neka je D proizvoljan neglavni ultrafilter nad ω. Dokazati da tada skup

$$\{x_A \mid A \in D\}$$

nije Lebesgue merljiv.

U ispitivanju filtera važni su sledeći pojmovi:

3.7.3 Definicija *Norma* filtera F, u oznaci $\|F\|$, definiše se sa

$$\|F\| = \min\{|x| \mid x \in F\}.$$

Posebno, filter F je *uniforman* ako su svi njegovi elementi iste (maksimalne) kardinalnosti : $|I|$.

3.7.4 Definicija Neka su α i β beskonačni kardinali. Filter F nad skupom I je (α, β)-*regularan* ako postoji $E \subseteq F$ tako da je $|E| = \beta$ i za svaki $X \subseteq E$, ako je $|X| \geqslant \alpha$ onda je $\bigcap X = 0$.

Posebno, filter F je β-regularan ako je (ω, β)-regularan, a regularan ukoliko je $|I|$-regularan.

3.7.5 Definicija Neka je α beskonačan kardinal. Filter F je α-*kompletan* ako je zatvoren za $< \alpha$ preseke:

$$X \subseteq F \wedge |X| < \alpha \Rightarrow \bigcap X \in F.$$

U vezi sa prethodnom definicijom, svojstvo konačnog preseka nam obezbeđuje ω-kompletnost svakog filtera. Uvedene pojmove ćemo ilustrovati sledećim primerima:

3.7.6 Primer Svi kofinitni (komplement im je konačan) podskupovi skupa ω čine jedan filter nad ω, koji se zove *Frechetov filter*:

$$F = \{x \subseteq \omega \mid |\omega \setminus x| < \omega\}.$$

Lako uočavamo da za Frechetov filter F važi da je uniforman, regularan (ovde isto što i (ω, ω)-regularan i tačno ω-kompletan.

3.7.7 Primer Neka je κ beskonačan neprebrojiv kardinal. Frechetov filter nad κ je filter

$$F_\kappa = \{x \subseteq \kappa \mid |\kappa \setminus x| < \kappa\}.$$

Lako se vidi da važi: F_κ je uniforman; $\|F_\kappa\| = \kappa$; F_κ je (κ, κ)-regularan; ako je κ regularan kardinal, onda je F_κ i κ-regularan.

3.7.8 Primer Neka je D glavni filter nad I. Očigledno je D α-kompletan za svaki beskonačan kardinal α i nije (α,α)-regularan ni za jedan kardinal α iz intervala $(\omega, |D|)$. Štaviše, filter F nad I je $|I|^+$-kompletan ako i samo ako je filter F glavni.

3.7.9 Primer Neka je $f : I \longrightarrow J$ i neka je D filter (ultrafilter) nad I. Neka je

$$E = \{x \subseteq J \mid f^{-1}[x] \in D\}.$$

Lako se proverava da je i E filter (ultrafilter). Takođe, ako je D (α,β)-regularan, onda to važi i za E. Napomenimo da se i α-kompletnost sa D prenosi na E. Koristimo i oznaku $E = f_*(D)$.

3.7.10 Primer Za svaki kardinal κ postoji regularan ultrafilter nad κ. Zaista, neka je $I = [\kappa]^{<\omega}$, tj. neka je I familija svih konačnih podskupova kardinala κ. Definišimo $E \subseteq P(I)$ sa

$$E = \{\{i \in I \mid \alpha \in i\} \mid \alpha \in \kappa\}$$

Očigledno skup E ima svojstvo konačnog preseka i zadovoljava uslov (ω,κ)-regularnosti, pa će i svaki ultrafilter koji sadrži E biti κ-regularan; prema prethodnom primeru, dobija se regularan ultrafilter nad κ.

Iz prethodnog primera sledi da je dovoljno razmatrati filtere nad kardinalima.

3.7.11 Primer Neka je D neglavni ultrafilter nad beskonačnim kardinalom κ i neka je norma $\|D\| = |x|$ za neko $x \in D$. Jednostavnosti radi neka je $x = \lambda$. Tada D sadrži Frechet-ov filter F_λ nad λ, jer bi u suprotnom bilo $\|D\| < \lambda$ (D je ultrafilter, pa za svaki $y \in F_\lambda$ imamo da ili $y \in D$, ili $\lambda \setminus y \in D$). Odavde sledi (λ,λ)-regularnost ultrafiltera D (D sadrži familiju završnih intervala u λ). Takođe, D je $(\mathrm{cf}\,\lambda, \mathrm{cf}\,\lambda)$-regularan.

Specijalno, ako je ultrafilter D uniforman, onda je D (κ,κ)-regularan. Odavde takođe imamo da D ne može biti κ^+-kompletan (osim ako je glavni).

Za filter kažemo da je *prebrojivo kompletan* ili σ kompletan ako je ω_1-kompletan. Odmah se vidi da je svaki filter prebrojivo nekompletan ili kompletan. Sledeće oslabljenje kompletnosti je korisno.

3.7.12 Definicija Filter F nad I je *α-silazno kompletan* ako je zatvoren za sva α-silazne preseke, tj. ako je $\langle x_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ inkluzijski opadajući niz skupova u F, onda $\bigcap_{\xi<\alpha} x_\xi \in F$.

Sledeća lema povezuje silaznu kompletnost i regularnost.

3.7.13 Lema *Neka je α regularan kardinal. Tada su pojmovi α-silazne nekompletnosti i $\langle \alpha, \alpha \rangle$ regularnosti ekvivalentni. Ako je α singularan kardinal, onda α-silazna nekompletnost povlači $\langle \alpha, \alpha \rangle$ regularnost.*

Dokaz

Ako ultrafilter D nad I nije α-silazno kompletan, onda postoji inkluzijski opadajuća familija $E \subseteq D$ kardinalnosti α takva da je $\bigcap E = 0$, odakle po definiciji sledi (α, α)-regularnost ultrafiltera D - odgovarajuća familija je upravo E.

Ostatak dokaza: vežba. □

3.7.14 Primer Pokažimo da je ultrafilter D nad skupom I α-kompletan ako i samo ako za svaku particiju skupa I na manje od α delova jedan deo pripada D.

Neka je D α-kompletan i neka je $I = \bigcup_{i<\beta} X_i$ particija $(\beta < \alpha)$. Pošto je D ultrafilter, to za svako $i < \beta$ imamo da ili $X_i \in D$ ili $I \setminus X_i \in D$. Kako je

$$\bigcap_{i<\beta} (I \setminus X_i) = 0$$

i kako je D zatvoren za $< \alpha$ preseke, imamo da bar jedan od skupova $I \setminus X_i$ ne pripada D, tj. da bar jedan (ustvari tačno jedan, s obzirom da su u pitanju međusobno disjunktni skupovi) od skupova X_i pripada D.

Obratno, neka važi uslov za particije. Neka je $E \subseteq D$ kardinalnosti $< \alpha$: $E = \{e_i \mid i < \beta\}$ za neko $\beta < \alpha$. Definišimo $f : I \longrightarrow \beta + 1$ na sledeći način:

$$f(i) = \begin{cases} \beta & , \quad i \in \bigcap E \\ \min\{\xi \mid \xi < \beta \wedge i \notin e_\xi\} & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

$f^{-1}[\beta + 1]$ je $< \alpha$ particija skupa I, pa za neko $\xi < \beta$ imamo da $f^{-1}[\xi] \in D$. Po definiciji f imamo sledeće: za svako $\eta < \beta$, $f(i) = \eta$ povlači da $i \notin e_\eta$, pa je $f^{-1}[\eta] \cap e_\eta = 0$. Pošto $e_\eta \in D$, sledi da $f^{-1}[\eta] \notin D$.

Dakle, mora biti $f^{-1}[\beta] \in D$. Po definiciji f je $f^{-1}[\beta] = \bigcap E$, pa zato $\bigcap E \in D$, tj. imamo α-kompletnost.

3.7.15 Primer Neka je D neglavni ultrafilter nad κ. Kao što smo ranije napomenuli, D nije κ^+-kompletan (takvi su jedino glavni ultrafilteri). Označimo sa

$$\text{add}(D) =_{\text{def}} \max\{\alpha \mid D \text{ je } \alpha\text{-kompletan}\}$$

i stavimo $\lambda = \text{add}(D)$. Pokažimo da je λ merljiv, tj. da nad λ postoji λ-kompletan neglavni ultrafilter E. Po prethodnom primeru postoji particija $\{x_i \mid i < \lambda\}$ takva da ni jedan od skupova x_i ne pripada D. Funkciju $f : \kappa \longrightarrow \lambda$ definišimo sa

$$f(\xi) = i \Leftrightarrow \xi \in x_i.$$

Primetimo da svako $\xi < \kappa$ pripada tačno jednom od skupova x_i. Traženi ultrafilter E nad λ je dobro definisan sa

$$E = f_*(D) = \{x \subseteq \lambda \mid f^{-1}[x] \in D\}.$$

Navedenim primerima pokazano je da su svojstva regularnosti i kompletnosti suprotstavljena. Za netrivijalne - neglavne ultrafiltere, sve što se sigurno može reći vezano za kompletnost i regularnost sumiramo u sledećoj lemi, što ćemo koristiti u kasnijim ispitivanjima.

3.7.16 Lema *Neka je D uniforman ultrafilter nad κ. Onda važi:*

1. *D je (κ, κ)-regularan i $(\mathrm{cf}\,\kappa, \mathrm{cf}\,\kappa)$-regularan;*

2. *Ako je $\alpha \leqslant \alpha' \leqslant \beta' \leqslant \beta$ i ako je D (α, β)-regularan, onda je i (α', β')-regularan;*

3. *D je $(\mathrm{add}(D), \mathrm{add}(D))$-regularan;*

4. *$\mathrm{add}(D) = \omega$ (i D je (ω, ω)-regularan) ili $\omega < \mathrm{add}(D)$ (= merljiv kardinal) i za svaki kardinal $\alpha < \mathrm{add}(D)$ D nije (α, α)-regularan.*

Egzistencija neregularnih ultrafiltera je stari problem iz 1974. godine (Gillman i Keisler) koji je duže izmicao rešenju i karakterizaciji, koji se pojvaljivao u raznim verzijama udružen sa jakim aksiomama. Štaviše, jake aksiome beskonačnosti uvek imaju neki ekvivalent - karakterizaciju u nekom obliku ultrafiltera koje odlikuju specifična varijanta neregularnosti i kompletnosti. Kasnije, od značaja će biti i skup svih intervala (videti tačku 2 u prethodnoj lemi) u kojima je ultrafilter regularan (trag regularnosti):

$$\mathrm{trace}_{Reg}(D) =_{\mathrm{def}} \{\langle \alpha, \beta \rangle \mid D \text{ je } (\alpha, \beta)\text{-regularan}\}.$$

Prikry je 1971. godine dokazao da aksioma konstruktibilnosti $V = L$ implicira da je svaki uniforman ultrafilter nad ω_1 regularan. Jensen je ovo uopštio: isto važi za uniforman ultrafilter nad $\aleph_n$ za svako $n < \omega$. A Prikry je dokazao da iz $V = L$ sledi da je svaki uniformni ultrafilter nad κ^+ ujedno i (κ, κ^+)-regularan. Posle ovih rezultata postalo je prilično jasno da će se pitanje egzistencije neregularnih uniformnih ultrafiltera teže rešavati, o čemu će u ovoj knjizi još biti reči.

3.8 Ultraproizvodi

Prelazimo na Skolemovu konstrukciju ultraproizvoda modela. Uočimo Descartesov proizvod $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$, gde su skupovi I i A_i $(i \in I)$ neprazni. Neka je D filter nad I. Uvedimo relaciju $=_D$ među funkcijama iz A na sledeći način:

$$f =_D g \Leftrightarrow \{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in D.$$

Rečnikom teorije mere, u slučaju kada je $f =_D g$ kažemo još i da su funkcije f i g jednake skoro svuda (modulo D). Sasvim lako se proverava da je uvedena relacija $=_D$ jedna relacija ekvivalencije na skupu A. Sa f_D označavamo odgovarajuću klasu ekvivalencije funkcije f. Dakle,

$$f_D = \{g \in \prod_{i \in I} A_i \mid g =_D f\}.$$

Količnik skup $A/ =_D$ označavamo sa $\prod\limits_D A_i$ i nazivamo ga *redukovanim proizvodom* skupova A_i, $i \in I$ po filteru D. Ako je D ultrafilter, onda imamo *ultraproizvod*. U slučaju kada su skupovi A_i međusobno jednaki imamo redukovani stepen, odnosno ultrastepen.

Neka su $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, \ldots \rangle$, $i \in I$ modeli jezika prvog reda $\mathcal{L}$ i neka je D filter nad skupom indeksa I. Redukovani proizvod $\prod\limits_D \mathfrak{A}_i$ modela $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ je model jezika $\mathcal{L}$ koji definišemo na sledeći način:

- Univerzum modela (skup nošač) je skup $\prod\limits_D A_i$;
- Simbol konstante c jezika $\mathcal{L}$ interpretiramo sa

$$\begin{aligned} c^{\prod_D \mathfrak{A}_i} &= \langle c \mid i \in I \rangle_D \\ &= \{f \in \prod_D A_i \mid \{i \in I \mid f(i) = c^{\mathfrak{A}_i}\} \in D\}; \end{aligned}$$

- Funkcijski znak F arnosti n jezika $\mathcal{L}$ interpretiramo sa

$$F^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(f_{1D}, \ldots, f_{nD}) = \langle F^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \mid i \in I \rangle_D;$$

- Relacijski znak R arnosti n jezika $\mathcal{L}$ interpretiramo sa

$$R^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(f_{1D}, \ldots, f_{nD}) \Leftrightarrow \{i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in D.$$

U slučaju kada je D ultrafilter, model $\prod\limits_D \mathfrak{A}_i$ zovemo i *ultraproizvodom* modela $\mathfrak{A}_i = \langle A_i, \ldots \rangle$ $(i \in I)$. Značaj ultraproizvod konstrukcije najbolje ilustruje fundamentalna Łośova teorema:

3.8.1 Teorema [**Łoś 1955**] *Neka su $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ modeli jezika prvog reda $\mathcal{L}$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ proizvoljna formula tog jezika i neka je D ultrafilter nad skupom I. Tada za proizvoljne $f_1, \ldots, f_n \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ važi*

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi(f_{1D}, \ldots, f_{nD})$$

ako i samo ako

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in D.$$

Dokaz

Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule. Prvo pretpostavimo da je formula φ atomična. Razlikujemo dva slučaja:

(1) Formula φ je oblika

$$F(u_1(\bar{x}), \ldots, u_k(\bar{x})) = G(v_1(\bar{x}), \ldots, v_m(\bar{x})),$$

pri čemu je $\bar{x}$ n-torka promenljivih jezika $\mathcal{L}$, u_i, v_j su termi jezika $\mathcal{L}$, a F i G su funkcijski znaci jezika $\mathcal{L}$. Indukcijom po složenosti terma se sasvim lako proverava da za proizvoljan term $t(\bar{x})$ jezika $\mathcal{L}$ važi

$$t^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(f_{1D}, \ldots, f_{nD}) = \langle t^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \mid i \in I \rangle_D,$$

(napomenimo da sa $t^{\mathfrak{A}}$ označavamo interpretaciju terma t u modelu $\mathfrak{A}$) odakle sledi da je

$$F^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(\bar{u}^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(\bar{f}_D)) = G^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(\bar{v}^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(\bar{f}_D))$$

ako i samo ako

$$\{i \in I \mid F^{\mathfrak{A}_i}(\bar{u}^{\mathfrak{A}_i}(\bar{f}(i))) = G^{\mathfrak{A}_i}(\bar{v}^{\mathfrak{A}_i}(\bar{f}(i)))\} \in D.$$

(2) Formula φ je oblika

$$R(t_1(\bar{x}), \ldots, t_k(\bar{x})).$$

Tada po definiciji važi

$$R^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(\bar{t}^{\prod_D \mathfrak{A}_i}(\bar{f}_D))$$

ako i samo ako

$$\{i \in I \mid R^{\mathfrak{A}_i}(\bar{t}^{\mathfrak{A}_i}(\bar{f}(i)))\} \in D,$$

pri čemu sa $R^{\mathfrak{A}}$ označavamo interpretaciju relacijskog znaka R u modelu $\mathfrak{A}$.

Prethodnim smo pokazali da je teorema tačna u slučaju atomičnih formula, pa prelazimo na formule veće složenosti. Razlikujemo tri slučaja:

(i) Formula φ je oblika $\neg\psi$. Tada

$$\begin{aligned}
\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi(\bar{f}_D) \quad & \Leftrightarrow \quad \prod_D \mathfrak{A}_i \models \neg\psi(\bar{f}_D) \\
& \Leftrightarrow \quad \prod_D \mathfrak{A}_i \not\models \psi(\bar{f}_D) \\
& \Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(\bar{f}(i))\} \notin D \ \text{\scriptsize (induktivna hipoteza)} \\
& \Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \neg\psi(\bar{f}(i))\} \in D \ \text{\scriptsize (D je uf)} \\
& \Leftrightarrow \quad \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi(\bar{f}(i))\} \in D.
\end{aligned}$$

(ii) Formula φ je oblika $\psi \wedge \theta$. Tada

$$\begin{aligned}
& \prod_D \mathfrak{A}_i \models \psi(\bar{f}_D) \wedge \theta(\bar{f}_D) \\
\Leftrightarrow \quad & \prod_D \mathfrak{A}_i \models \psi(\bar{f}_D) \text{ i } \prod_D \mathfrak{A}_i \models \theta(\bar{f}_D) \\
\overset{\text{IH}}{\Leftrightarrow} \quad & \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(\bar{f}(i))\} \in D \text{ i } \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \theta(\bar{f}(i))\} \in D \\
\Leftrightarrow \quad & \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(\bar{f}(i)) \wedge \theta(\bar{f}(i))\} \in D.
\end{aligned}$$

(iii) Formula φ je oblika $\exists y \psi(y, \bar{x})$. Prvo pretpostavimo da

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \exists y \psi(y, \bar{f}_D).$$

Tada postoji $g \in \prod\limits_{i \in I} A_i$ tako da

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \psi(g_D, \bar{f}_D),$$

odakle po induktivnoj hipotezi sledi da

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(g(i), \bar{f}(i))\} \in D.$$

Kako je

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(g(i), \bar{f}(i))\} \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists y \psi(y, \bar{f}(i))\},$$

mora biti i

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists y \psi(y, \bar{f}(i))\} \in D.$$

Obratno, pretpostavimo da

$$J = \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \exists y \psi(y, \bar{f}(i))\} \in D.$$

Tada za svako $i \in J$ postoji $a_i \in A_i$ tako da

$$\mathfrak{A}_i \models \psi(a_i, \bar{f}(i)).$$

Neka je $h \in \prod_{i \in I} A_i$ proizvoljno. Definišimo $g \in \prod_{i \in I} A_i$ sa

$$g(i) = \begin{cases} a_i & , \quad i \in J \\ h(i) & , \quad i \in I \setminus J \end{cases}.$$

Sada imamo da

$$J \subseteq \{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \psi(g(i), \bar{f}(i))\} \in D,$$

odakle po induktivnoj hipotezi sledi da

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \psi(g_D, \bar{f}_D),$$

odakle sledi da

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \exists y \psi(y, \bar{f}_D).$$

□

Navedimo i uopštenje Łoś-ove teoreme na infinitarne jezike koje se dobija korišćenjem kompletnih ultrafiltera. Infinitarni jezik $\mathcal{L}_\kappa$ ima κ promenljivih i pored uobičajenih pravila izgradnje formula ima i dva dodatna:

- Ako je X skup formula jezika $\mathcal{L}_\kappa$ kardinalnosti $< \kappa$, onda je i

  $$\bigwedge X$$

  (konjunkcija $< \kappa$ formula) takođe formula jezika $\mathcal{L}_\kappa$;

- Ako je X skup promenljivih jezika $\mathcal{L}_\kappa$ kardinalnosti $< \kappa$, onda je za ma koju formulu φ jezika $\mathcal{L}_\kappa$ i

  $$(\forall X)\varphi$$

  (kvantifikacija $< \kappa$ promenljivih) takođe formula jezika $\mathcal{L}_\kappa$.

3.8.2 Posledica *Neka je* $\prod_D \mathfrak{A}_i$ *ultraproizvod, pri čemu je* D κ*-kompletan ultrafilter nad skupom* I*. Tada za svaku formulu*

$$\varphi(x_\xi \mid \xi < \alpha)$$

($\alpha < \kappa$) *jezika* $\mathcal{L}_\kappa$ *i proizvoljne* $f_\xi \in \prod_{i \in I} A_i$ ($\xi < \alpha$) *važi*

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_{\xi_D} \mid \xi < \alpha]$$

ako i samo ako

$$\{i \in I \mid \mathfrak{A}_i \models \varphi[f_\xi(i) \mid \xi < \alpha]\} \in D.$$

Videćemo da su uvedena kombinatorna svojstva ultrafiltera povezana sa strukturnim svojstvima ultraproizvoda i njihovom kardinalnošću. Biće izložena finija razmatranja strukture ultraproizvoda unutar poglavlja o Shelahovoj PCF teoriji.

Razmotrimo par jednostavnih slučajeva.

3.8.3 Primer Neka je $D = \{I\}$. Tada je $\prod_D \mathfrak{A}_i \cong \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, tj. redukovani proizvod se svodi na direktan proizvod uočenih struktura.

Ako je D glavni filter sa korenom $J \subseteq I$ ($X \in D \Rightarrow J \subseteq X$), onda za proizvoljne $f, g \in \prod_{i \in I} A_i$ važi

$$f =_D g \Leftrightarrow f \restriction J = g \restriction J,$$

odakle sledi da je

$$\prod_D \mathfrak{A}_i \cong \prod_{i \in J} \mathfrak{A}_i.$$

Dakle, redukovani proizvod po glavnom filteru je običan Descartesov proizvod modela, pa se zbog toga razmatraju isključivo redukovani proizvodi po neglavnim filterima.

Od posebne važnosti su i ultrastepeni ($\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$, $i \in I$). Kao neposrednu posledicu Łoś-ove teoreme imamo činjenicu da se model $\mathfrak{A}$ elementarno utapa u ultrastepen $\prod\limits_D \mathfrak{A}$. Odgovarajuće kanonsko elementarno utapanje $d : \mathfrak{A} \longrightarrow \prod\limits_D \mathfrak{A}$ je dato sa

$$d(a) = \langle a \mid i \in I \rangle_D.$$

3.8.4 Primer Neka je model $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ konačan ($|A| < \aleph_0$). Pokažimo da je tada kanonsko elementarno utapanje d "na", što će kao posledicu imati činjenicu da je $\mathfrak{A} \cong \prod\limits_D \mathfrak{A}$.

Neka je D neglavni ultrafilter nad beskonačnim skupom I i neka je $f : I \longrightarrow A$ proizvoljno. Neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Uočimo skupove

$$X_j = \{i \in I \mid f(i) = a_j\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Kako su skupovi X_j međusobno disjunktni i kako

$$\bigcup_{j=1}^{n} X_j = I \in D,$$

tačno jedan od skupova X_j pripada ultrafilteru D. Ako je to, recimo, X_1, na osnovu prethodnog imamo da je

$$f =_D \langle a_1 \mid i \in I \rangle,$$

tj. da je $d(a_1) = f_D$.

Prethodni primer lako uopštavamo na sledeći način: ako je $|A| < \mathrm{add}(D)$ onda je $\mathfrak{A} \cong \prod\limits_D \mathfrak{A}$. Zaista, za proizvoljno $f : I \longrightarrow A$ je familija $\{f^{-1}[i] \mid i \in I\}$ particija skupa indeksa I, pa na osnovu primera 3.7.14 imamo da tačno jedan od skupova $f^{-1}[i_0]$ pripada ultrafilteru D, odakle sledi da je

$$f =_D \langle f(i_0) \mid i \in I \rangle,$$

tj. kanonsko utapanje d je “na”.

Sličnu argumentaciju ćemo primeniti na početke dobrih uređenja. Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \leqslant \rangle$ dobro uređenje, npr. $\langle \omega, \in \rangle$. Po Łośovoj teoremi biće $\prod_D \mathfrak{A}$ linearno uređen. Neka je $f : I \longrightarrow \omega$ takvo da je $|\mathrm{rng}(f)| < \aleph_0$. Po prethodnom sledi da je f konstantno skoro svuda modulo D, tj. za neko $n \in \omega$ je

$$f_D = \langle n \mid i \in I \rangle_D = d(n).$$

Odavde sledi da ultraproizvod $\prod_D \mathfrak{A}$ ima početni komad izomorfan sa ω.

Sasvim slično, ako je $\mathfrak{A} = \langle \kappa, \in \rangle$, onda ultraproizvod $\prod_D \mathfrak{A}$ ima početni komad izomorfan sa $\langle \mathrm{add}(D), \in \rangle$ (dakle dobro uređen). Ako je $\kappa < \mathrm{add}(D)$, onda će i $\prod_D \mathfrak{A}$ biti dobro uređen.

3.8.5 Primer Ultraproizvodi dobrih uređenja. Neka je D neglavni ultrafilter nad κ. Posmatrajmo ultrastepen

$$\langle B, E \rangle = \prod_D \langle \lambda, \in \rangle,$$

pri čemu je λ beskonačan kardinal. Ovaj ultrastepen je linearno uređen po Łośovoj teoremi. Pitanje njegovog dobrog uređenja je nešto složenije: da je relacija E dobro uređenje ne možemo iskazati formulom prvog reda. Ali zato da E nema beskonačnih opadajućih lanaca možemo zapisati infinitarnom rečenicom

$$\varphi \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} (\forall x_0, x_1, \ldots) \bigvee_{i \in \omega} \neg(x_{i+1} \,\mathbf{E}\, x_i)$$

(ovde je $\mathbf{E}$ binarni relacijski simbol). Kako je λ dobro uređenje (umesto $\langle \lambda \in \rangle$ pišemo kratko λ), imamo da $\lambda \models \varphi$. Ukoliko je $\omega_1 \leqslant \mathrm{add}(D)$, po teoremi 3.8.2 mora biti i $\prod_D \langle \lambda, \in \rangle \models \varphi$, odakle sledi da je i ultrastepten dobro uređen.

Dakle, ako je $\omega < \mathrm{add}(D)$, onda je ultrastepen dobrog uređenja takođe dobro uređenje sa početnim komadom rednog tipa $\mathrm{add}(D)$. Ako je $\mathrm{add}(D) = \omega$, onda znamo da imamo početni komad tipa ω koji se sastoji od konstanti i to je sve.

Konstrukcija ultraproizvoda modela u više različitih varijanti je značajna u teoriji skupova, pre svega po rezultatima Scotta, ali je veoma važna i šire u logici i primenama. Ovde izdvajamo dve teoreme čije dokaze ne navodimo, a koji se mogu naći npr. u [16], kojima se precizira sadržaj klase svih modela teorija prvog reda.

3.8.6 Definicija Klasa $\mathcal{K}$ modela jezika $\mathcal{L}$ je *elementarna* ako postoji teorija T jezika $\mathcal{L}$ takva da je $\mathcal{K}$ baš klasa modela teorije T. $\mathcal{K}$ je *bazna elementarna* klasa ako postoji rečenica φ jezika $\mathcal{L}$ takva da je $\mathcal{K}$ klasa svih modela rečenice φ.

3.8.7 Definicija Za klasu modela $\mathcal{K}$ jezika $\mathcal{L}$ kažemo da je zatvorena za elementarnu ekvivalenciju ako iz $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ i $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ sledi da $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}$. Kažemo da je klasa $\mathcal{K}$ zatvorena za ultraproizvode ako svaki ultraproizvod modela iz $\mathcal{K}$ takođe pripada $\mathcal{K}$.

3.8.8 Teorema [Kochen, Frayne, Morel, Scott] *Neka je $\mathcal{K}$ proizvoljna klasa modela jezika $\mathcal{L}$. Tada:*

- *$\mathcal{K}$ je elementarna klasa ako i samo ako je zatvorena za ultraproizvode i elementarnu ekvivalenciju.*
- *$\mathcal{K}$ je bazna elementarna klasa ako i samo ako su i $\mathcal{K}$ i komplement od $\mathcal{K}$ zatvorene za ultraproizvode i elementarnu ekvivalenciju.*

Sledeću teoremu je prvo dokazao Keisler koristeći GCH, a potom je Shelah ispustio ovaj uslov.

3.8.9 Teorema *Modeli $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ jezika $\mathcal{L}$ su elementarno ekvivalentni ako i samo ako imaju izomorfne ultrastepene, tj. ako postoji ultrafilter D takav da je*

$$\prod_D \mathfrak{A} \cong \prod_D \mathfrak{B}.$$

Kardinalnost redukovanog (ultra) proizvoda $\prod\limits_D A_i$ svakako pripada intervalu $[\min |A_i|, |\prod\limits_{i\in I} A_i|]$. Pokazaćemo da ona zavisi od uvedenih kombinatornih svojstava ultrafiltera kompletnosti i regularnosti, kao i da je usko povezana i sa strukturom ultraproizvoda, posebno strukturom ultraproizvoda dobrih uređenja, što će biti od koristi u analizi Keisler-Rudin klasifikacije ultrafiltera, model teoretskim primenama kao i u rešavanju kontinuum problema.

Neki aspekti određivanja kardinalnosti ultraproizvoda i ultrastepena su dosta teški i ima dugo otvorenih problema. Kardinalnost ultraproizvoda po regularnim i kompletnim ultrafilterima je odavno razrešena. Tu su najznačajniji rezultati pre svega Keislera. Međutim, teška situacija nastupa kada ultrafilter nije ni regularan, ni kompletan. Već sama egzistencija neregularnih ultrafiltera je teško pitanje, čije je delimično razrešavanje povezano sa najjačim aksiomama. Povrh toga kardinalnost predstavlja dodatno otežavanje i ovde ćemo ukazati na neka rešenja, pre svega inspirisana Magidorovim rezultatima.

Shelahova PCF teorja (mogućih kofinalnosti ultraproizvoda) data je naknadno u posebnom poglavlju zajedno sa glavnom teoremom o kontinuum problemu na $\aleph_\omega$.

Ovde izlažemo samo neka važnija određenja, ispuštajući veću količinu detaljnih razmatranja.

3.8.10 Lema *Ako su D i D' filteri takvi da je $D \subseteq D'$ onda:*

1. $|\prod\limits_{D'} A_i| \leqslant |\prod\limits_{D} A_i|$;

2. $|\prod\limits_{D} A_i| \leqslant |\prod\limits_{i\in I} A_i|$;

3. $|A| \leqslant |\prod_D A| \leqslant |\prod_{\{I\}} A| = |A|^{|I|}$;

4. *Ako je* $|A_i| \leqslant |B_i|$ *za sve* $i \in I$, *onda je*

$$|\prod_D A_i| \leqslant |\prod_D B_i|;$$

5. *Za* $X \in D$ *je* $|\prod_D A_i| = |\prod_{D \cap P(X)} A_i|$, *pa je dovoljno tretirati samo uniformne ultrafiltere.*

Dokaz

Sasvim lak te se stoga ostavlja za vežbu. □

3.8.11 Primer Neka $f : \kappa \longrightarrow \kappa$. Tada je

$$(\cdot, f_D)_{\prod_D \langle \kappa, < \rangle} \cong \prod_D \langle f(i), < \rangle.$$

Raspisano, leva strana je

$$\{g_D \in \prod_D \langle \kappa, < \rangle \mid g <_D f\}.$$

Što se tiče desne strane, za svako $i \in I$ je $f(i)$ ordinal, odakle sledi da je $\langle f(i), < \rangle$ dobro uređenje, a ultraproizvod $\prod_D \langle f(i), < \rangle$ se sastoji od onih funkcija iz ${}^{\kappa}\kappa$ koje su ograničene funkcijom f skoro svuda modulo D.

U sledećoj teoremi su sažeta uopštenja dve značajne Keislerove teoreme o kardinalnosti regularnih ultraproizvoda, što će biti korisno u razmatranju opštih slučajeva i analizi strukture ultraproizvoda.

3.8.12 Teorema *Neka je* D *uniforman ultrafilter nad kardinalom* γ. *Ako je* D (α, β)*-regularan i ako su* $\nu, \kappa \in [\alpha, \beta]$ *kardinali takvi da je* $\kappa^{<\nu} = \kappa$, *onda važi:*

1. $|\prod_D \kappa'| \geqslant \kappa'^{\beta}$ *za sve kardinale* $\kappa' \in [\kappa, \beta]$*. Posebno,*

$$|\prod_D \kappa|^{\nu} = |\prod_D \kappa|;$$

2. Ako je $(\mathrm{cf}\ \gamma)^{<\mathrm{cf}\ \gamma} = \mathrm{cf}\ \gamma$*, onda je*

$$|\prod_D \mathrm{cf}\ \gamma|^{\mathrm{cf}\ \gamma} = |\prod_D \mathrm{cf}\ \gamma|.$$

Dokaz

1. Po pretpostavci je $\kappa^{<\nu} = \kappa$, odakle sledi da je

$$|\prod_D {}^{<\nu}\kappa| = |\prod_D \kappa|,$$

kao i $\nu \leqslant \kappa$ (napomenimo da je ${}^{<\nu}\kappa = \bigcup_{\xi<\nu} {}^{\xi}\kappa$). Pošto je D (α, β)-regularan i da $\nu \in [\alpha, \beta]$, ultrafilter D je i (ν, β)-regularan. Neka je familija $E \subseteq D$ takva da važi:

- $|E| = \beta$;
- Za $X \subseteq E$ iz $|X| \geqslant \nu$ sledi da je $\bigcap X = 0$.

Neka je familija E dobro uređena sa $\leqslant$. Za svako $i \in \bigcup E \in D$ definišimo:

- $X(i) = \{e \in E \mid i \in e\}$;
- $\mathrm{seq}(i)$ je niz elemenata $e \in X(i)$ dobro uređen sa $\leqslant$.

Za dato $g : E \longrightarrow \nu$ definišemo g' na sledeći način: ako je $\mathrm{seq}(i) = \langle e_\xi \mid \xi < \nu_i \rangle$, onda je

$$g'(i) = \langle g(e_\xi) \mid \xi < \nu_i \rangle.$$

Kako je $X(i) \subseteq E$ i kako $i \in \bigcap X(i)$, onda je $|X(i)| < \nu$, pa $g'(i) \in {}^{<\nu}\kappa$. Definišimo $\pi : {}^E\nu \longrightarrow \prod_D {}^{<\nu}\kappa$ sa $\pi g = g'_D$. Pokažimo da je π 1–1.

Neka $g, h : E \longrightarrow \nu$, $g \neq h$. Tada postoji $e \in E$ tako da je $g(e) \neq h(e)$. Neka je e λ-ti član niza seq(i). Sada za svako $i \in e$ imamo da je

$$\begin{aligned} g'(i) &= \langle g(e_0), \ldots, g(e_\lambda), \ldots, g(e_\xi), \ldots \mid \xi < \nu_i < \nu\rangle \\ &\neq \langle h(e_0), \ldots, h(e_\lambda), \ldots, h(e_\xi), \ldots \mid \xi < \nu_i < \nu\rangle \\ &= h'(i), \end{aligned}$$

pa kako $e \in D$, imamo da je $g'_D \neq h'_D$.

Sada imamo da je

$$|\prod_D \kappa| \geqslant |{}^E\nu| = 2^\beta.$$

Pokažimo da je

$$|\prod_D \kappa|^\nu \leqslant |\prod_D {}^{<\nu}\kappa|.$$

Za ovo je dovoljno pokazati da postoji funkcija τ koja neki podskup skupa $\prod_D {}^{<\nu}\kappa$ slika na ${}^\nu \prod_D \kappa$. Ukoliko pokažemo da postoji funkcija $\sigma : {}^\nu({}^\gamma\kappa) \longrightarrow {}^\gamma({}^{<\nu}\kappa)$ takva da

$$g, h \in {}^\nu({}^\gamma\kappa) \wedge \sigma g =_D \sigma h \Rightarrow (\forall \xi < \nu) g(\xi) =_D h(\xi), \tag{3.2}$$

onda je tražena funkcija τ dobro definisana sa

$$\sigma g = f \Rightarrow \tau(f_D) = \langle g(\xi)_D \mid \xi < \nu\rangle.$$

Prelazimo na konstrukciju funkcije σ. Ultrafilter D je $\langle \alpha, \alpha\rangle$-regularan pa je i (α, ν)-regularan, odakle sledi da postoji familija $E \subseteq D$ kardinalnosti ν takva da je $\bigcap X = 0$ za svaku podfamiliju $X \subseteq E$ kardinalnosti $\geqslant \alpha$. Neka je $E = \{e_\xi \mid \xi < \nu\}$. Na osnovu izbora familije E, za ma koje $i \in \bigcup E$ postoji $\nu_i < \nu$ tako da

$$i \in e_{\nu_i} \wedge (\forall \xi > \nu_i) i \notin e_\xi.$$

Definišimo funkciju σ sa

$$g : \nu \longrightarrow {}^{\gamma}\kappa \Rightarrow (\sigma g)(i) = \langle g(\xi) \mid \xi \leqslant \nu_i \rangle.$$

Dokažimo (3.2). Neka je $\sigma g =_D \sigma h$ i neka

$$X = \{i \in \gamma \mid (\sigma g)(i) = (\sigma h)(i)\} \in D.$$

Za $\xi < \nu$ neka je $d_\xi = \{i \in \gamma \mid \nu_i > \xi\}$. Kako je

$$\{i \in \gamma \mid \nu_i > \xi\} = \bigcup_{\eta > \xi} e_\eta,$$

imamo da $d_\xi \in D$ i da $\gamma \setminus d_\xi \notin D$ $(\xi < \nu)$, pa za svako $\xi < \nu$ važi $d_\xi \cap X \in D$. S druge strane, za svako $i \in d_\xi \cap X$ imamo da je $\nu_i > \xi$ i $(\sigma g)(i) = (\sigma h)(i)$. Odavde sledi da je

$$\{i \in \gamma \mid g(\xi)(i) = h(\xi)(i)\} \supseteq d_\xi \cap X \in D,$$

a time i $g(\xi) =_D h(\xi)$.

2. D je uniforman ultrafilter nad γ pa je i $(\mathrm{cf}\ \gamma, \mathrm{cf}\ \gamma)$-regularan. Po pretpostavci je $(\mathrm{cf}\ \gamma)^{<\mathrm{cf}\ \gamma} = \mathrm{cf}\ \gamma$, pa na osnovu upravo dokazanog prvog dela teoreme imamo da je

$$|\prod_D \mathrm{cf}\ \gamma|^{\mathrm{cf}\ \gamma} = |\prod_D \mathrm{cf}\ \gamma|.$$

$\square$

Navedimo i neke posledice prethodne teoreme. Ako je γ jako nedostiživ kardinal, onda je $\mathrm{cf}\ \gamma = \gamma$ i $\gamma^{<\gamma} = \gamma$, pa je po prethodnoj teoremi

$$|\prod_D \gamma| = |\prod_D \gamma|^\gamma = 2^\gamma.$$

Ako je γ sledbenik kardinal, recimo $\gamma = \lambda^+$, onda je on i regularan kardinal, tj. $\mathrm{cf}\ \gamma = \gamma$. Pretpostavimo da je $2^\lambda = \lambda^+ = \gamma$. Tada je

$$\gamma^{<\gamma} = \gamma^\lambda = (2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda = \gamma,$$

pa je po prethodnoj teoremi

$$|\prod_D \gamma| = |\prod_D \gamma|^\gamma = 2^\gamma.$$

Na osnovu teoreme Fraynea, Morella i Scotta za uniformni ultrafilter D važi

$$|\prod_D \gamma| > \gamma.$$

U prethodna dva primera je $|\prod_D \gamma| = 2^\gamma$, pa vidimo da $|\prod_D \gamma|$ ne zavisi od kontinuum hipoteze na γ.

Prethodne kardinalne ocene omogućuju detaljniji uvid u strukturu ultraproizvoda dobrih uređenja, što je povezano sa Keisler Rudin klasifikacijom ultrafiltera a koristi se i u teoriji modela. Finija strukturna svojstva ultraproizvoda ispituju se i u PCF teoriji usmerenoj prema teškim slučajevima kontinuum problema.

Neka je D uniforman ultrafilter nad κ. Označimo ovde kardinale sa λ, μ, ν, ordinale sa $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta$. Pođimo od ultrastepena $\prod_D \langle \lambda, < \rangle$ dobrog uređenja $\langle \lambda, < \rangle$ $(\lambda \geqslant \kappa)$. Kako je za $\nu < \mu$ ultrastepen $\prod_D \langle \nu, < \rangle$ izomorfan inicijalnom segmentu uređenja $\prod_D \langle \mu, < \rangle$, možemo smatrati da je $\prod_D \nu \subseteq \prod_D \mu$.

Za $\alpha \leqslant \lambda$ definišimo familiju

$$F_\alpha = (\prod_D \alpha) \setminus \bigcup_{\xi \in \alpha} F_\xi.$$

Primetimo da je $F_{\alpha+1} = \{\langle \alpha \mid i \in I \rangle_D\}$. Stoga u zapisu F_α nadalje podrazumevamo da je α granični ordinal. Niz intervala F_α popunjava polazni ultrastepen

$$\prod_D \langle \lambda, < \rangle = \bigcup_{\alpha \leqslant \lambda} F_\alpha.$$

3.8.13 Primer Ako je ultrafilter D κ-kompletan, onda za sve granične ordinale $\alpha \geqslant \lambda$, ako je cf $\alpha < \kappa$, onda je $F_\alpha = 0$, F_κ je dobro uređen i njegov tip uređenja je između 2^κ i $(2^\kappa)^+$.

Po prethodnom, ultrastepen $\prod_D \langle \lambda, < \rangle$ je dobro uređen čim je D prebrojivo kompletan i ima početni komad koji sadrži samo konstante $\{d(\alpha) \mid \alpha < \mathrm{add}(D) = \kappa\}$. Po teoremama o kardinalnosti ultraproizvoda sledi ostatak.

3.8.14 Primer Za svako $\alpha \leqslant \lambda$ i svako $f_D \in F_\alpha$ je

$$|(\cdot, f_D)_{F\alpha}| \leqslant |(f_D, \cdot)_{F_\alpha}|,$$

tj.

$$|\{g_d \in F_\alpha \mid g <_D f\}| \leqslant |\{g_D \in F_\alpha \mid f <_D g\}|.$$

Zaista, translirajmo $(\cdot, f_D)_{F_\alpha}$ za f_D:

$$f_D + (\cdot, f_D)_{F_\alpha} = \{(f+g)_D \mid g_D \in (\cdot, f_D)_{F_\alpha}\} \subseteq (f_D, \cdot)_{F_\alpha},$$

jer je α granični ordinal i $f_D + (\cdot, f_D)_{F_\alpha} \cong (\cdot, f_D)_{F_\alpha}$.

3.8.15 Primer *Neka je $\alpha \leqslant \lambda$ proizvoljno. Tada:*

- $F_{\mathrm{cf}\ \alpha} = 0$ *ako i samo ako je* $F_\alpha = 0$*;*
- $|F_{\mathrm{cf}\ \alpha}| \leqslant |F_\alpha|$.

U cilju dokaza, neka je $\nu = \mathrm{cf}\ \alpha$ i neka je α supremum rastućeg niza $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \nu \rangle$. Za $f_D \in F_\nu$ definišimo funkciju $\bar{f}$ sa

$$\bar{f}(i) = \alpha_\xi \Leftrightarrow f(i) = \xi.$$

Tada $\bar{f}_D \in F_\alpha$, jer bi u suprotnom $\bar{f}_D \in F_{\alpha_\xi}$, odakle bi sledilo da $f_D \in F_\xi$, a to je u suprotnosti sa $f_D \in F_\nu$.

S druge strane, za $f_D \in F_\alpha$ definišimo $f' : \kappa \longrightarrow \nu$ sa

$$f'(i) = \xi_i \Leftrightarrow \xi_i = \min\{\eta \in \nu \mid f(i) \in \alpha_\eta\}.$$

Ako ${f'}_D \notin F_\nu$, onda za neko $\xi < \nu$ važi ${f'}_D \in F_\xi$, pa je $f' < \xi$ skoro svuda modulo D, odakle sledi da $f_D \in F_{\alpha_\xi}$, što je u kontradikciji sa $f_D \in F_\alpha$. $\square$

3.8.16 Primer Ako je $\alpha < \beta$ i $\mathrm{cf}\ \alpha = \mathrm{cf}\ \beta$, onda je $|F_\alpha| \leqslant |F_\beta|$.

Navedeno svojstvo se dobija modifikacijom prethodnog dokaza.

3.8.17 Primer Neka je D prebrojivo nekompletan ultrafilter. Tada je, za ma koje A_i, $|\prod\limits_D A_i|$ ili konačan ili $\geqslant 2^{\aleph_0}$.

Dokaz - vežba.

3.8.18 Primer Neka je D prebrojivo nekompletan ultrafilter, $\mathrm{cf}\ \alpha = \omega$ i neka $f_D \in F_\alpha$. Tada je

$$|F_\alpha| \geqslant |(\cdot, f_D)_{F_\alpha}| \geqslant 2^{\aleph_0}.$$

Navedeno je posledica primera 3.8.14, 3.8.15 i 3.8.17.

3.8.19 Primer $F_\mu \neq 0$ *povlači da je* $|F_\mu| \geqslant \sum\limits_{\alpha<\mu} |F_\alpha|$ *i* $|F_\mu| = |\prod\limits_D \mu|$.

Za dato $f_D \in F_\mu$ i proizvoljno $\alpha < \mu$ imamo da je $f_D + F_\alpha \subseteq F_\mu$. Ako je $g <_D f$ i $g \in \prod_D \mu$, onda je $(f+g)_D \in F_\mu$. Sada tvrđenje sledi na osnovu primera 3.8.14.

3.8.20 Primer $F_{|\alpha|} \neq 0$ povlači da je $|F_{|\alpha|}| \geqslant |F_\alpha|$.

3.8.21 Teorema *Ultrafilter D je ν-silazno kompletan ako i samo ako je $d(\nu)$ kofinalan u $\prod\limits_D \langle \alpha, < \rangle$.*

Dokaz
Vežba. $\square$

3.8.22 Teorema *Ako je ultrafilter D ν-regularan, onda je D ν-silazno nekompletan.*

Dokaz
Vežba. $\square$

3.8.23 Primer Sledeći iskazi su ekvivalentni:

- $F_\alpha = 0$;
- D je cf α-silazno kompletan.

Tvrđenje sledi na osnovu teoreme 3.8.21 i primera 3.8.15.

3.8.24 Primer Ako je ultrafilter D μ-regularan, onda je $|F_\alpha| \geqslant 2^\mu$ za svako $\alpha \leqslant \mu$.

Zaista, za svako $\nu < \mu$ je D ν-regularan, pa je na osnovu teoreme 3.8.22 i ν-silazno nekompletan. Na osnovu primera 3.8.23 imamo da je $F_\alpha \neq 0$ za svako $\alpha \leqslant \mu$. Sada tvrđenje sledi na osnovu primera 3.8.19 i teoreme 3.8.12.

3.8.25 Teorema *Ako je μ regularan kardinal, onda je svaki μ-silazno kompletan ultrafilter ujedno i μ^+-silazno kompletan.*

Dokaz
Vežba. □

3.8.26 Posledica *Ako je $\kappa = \aleph_n$, onda za svako $m \leqslant n$ ultrafilter D nije $\aleph_m$-silazno kompletan.*

3.8.27 Primer Ako je $\kappa = \aleph_n$, onda je $|F_\alpha| \geqslant 2^{\aleph_0}$ za svako $\alpha \geqslant \kappa$.

3.8.28 Primer Ako je $F_\nu = 0$ za neko ν, onda je $\kappa > \nu^n$ za svako $n < \omega$.

Videćemo u poglavlju o realno merljivim kardinalima da ako je κ realno vrednosno merljiv kardinal, onda ma koji ultrafilter koji proširuje filter skupova mere 1 nije μ-regularan ni za jedno μ različito od κ i ω (Silver). Može se pokazati da takvi ultrafilteri nisu (μ, μ)-regularni ni za jedan kardinal μ čija je kofinalnost različita od κ i ω. Otuda za svaki granični ordinal α kofinalnosti različite od κ i ω ultrafilter D nije cf α-silazno kompletan.

3.8.29 Primer Uz prethodnu simboliku, ako je cf $\alpha \neq \kappa, \omega$, onda je $F_\alpha = 0$.

3.8.30 Primer [Uslovi normalnosti]

Polazeći od egzistencije merljivih kardinala, Scott je konstruisao na njemu normalan ultrafilter koji se značajno koristi u ultraproizvodima.

Za κ-kompletan ultrafilter D nad κ kažemo da je *normalan* ukoliko je svaka skoro svuda regresivna funkcija na κ skoro svuda konstantna, tj. ako za svako $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ iz

$$\{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\} \in D$$

sledi da postoji $\alpha < \kappa$ tako da

$$\{\xi < \kappa \mid g(\xi) = \alpha\} \in D.$$

Ekvivalentno svojstvo je: iz $g <_D id_\kappa$ sledi $g =_D const$ (id_κ je identička funkcija na κ).

Neka je kardinal κ merljiv i neka je E κ-kompletan neglavni ultrafilter nad κ. Onda je $\prod\limits_E \langle \kappa, < \rangle$ dobro uređen. Neka je funkcija f takva da je f_E minimalna neograničena funkcija (prvi element iza konstanti). Ako je $f =_D id_\kappa$, onda je ultrafilter E normalan. Ako je $f \neq_D id_\kappa$, uzmimo projekciju

$$D = f_*(E) = \{x \subseteq \kappa \mid f^{-1}[x] \in E\}.$$

Prema primerima 3.7.9 i 3.7.15 D je neglavni κ-kompletan ultrafilter nad κ. Treba pokazati da je D normalan. Neka je g regresivna funkcija po filteru D:

$$Y = \{\xi < \kappa \mid g(\xi) < \xi\} \in D.$$

Ako je $h = g \circ f$, onda je

$$h(\xi) = g(f(\xi)) < f(\xi)$$

za $\xi \in f^{-1}[Y] \in E$, tj. $h <_E f$, pa pošto je f_E minimalna neograničena funkcija, imamo da je

$$h =_E const = \langle \beta \mid \xi < \kappa \rangle_E .$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \{\xi < \kappa \mid h(\xi) = \beta\} &= \{\xi < \kappa \mid g(f(\xi)) = \beta\} \\ &= f^{-1}[\{\xi < \kappa \mid g(\xi) = \beta\}] \in E, \end{aligned}$$

pa $\{\xi < \kappa \mid g(\xi) = \beta\} \in D$, odakle sledi normalnost ultrafiltera D.

Slabljenjem - ispuštanjem uslova kompletnosti u definiciji normalnog ultrafiltera dobijamo *slabo normalne* ultrafiltere:

Ultrafilter D nad κ je slabo normalan ako je svaka regresivna funkcija na D iz ${}^{\kappa}\kappa$ ograničena konstantom skoro svuda na D.

Slično kao i za normalnost, ekvivalentan uslov navedenom biće: D je slabo normalan ako i samo ako u $\prod_D \langle \kappa, < \rangle$ (koji ne mora biti dobro uređen) postoji minimalna neograničena funkcija, i to je id_κ. Opet, analogno konstrukciji normalnog polazeći od neglavnog κ-kompletnog ultrafiltera nad κ, imamo: ako u $\prod_E \langle \kappa, < \rangle$ postoji minimalna neograničena funkcija f, onda je $D = f_*(E)$ slabo normalan ultrafilter. Dakle, i za normalnost i za slabu normalnost je esencijalno postojanje minimalne neograničene funkcije.

Uopštavamo normalnost do nivoa α u $\prod_D \langle \kappa, < \rangle$:

Ultrafilter D nad κ je *α-slabo normalan* ($\alpha \leqslant \kappa$) ako u ultrastepenu $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$ postoji minimalna neograničena funkcija, tj. u F_α postoji prvi element (prva funkcija iznad konstanti u $\prod_D \langle \alpha, < \rangle$).

Prvi primeri za normalnost i α-slabu normalnost su dati na merljivim i većim kardinalima. Za konstrukciju ovih filtera na manjim kardinalima korisno je i sledeće tvrđenje koje omogućava konstrukciju ovakvih ultrafiltera polazeći od velikih kardinala.

3.8.31 Lema *c.c.c. forsing čuva trag slabe normalnosti ultrafiltera, pri čemu se pomenuti trag definiše sa*

$$\mathrm{trace}_{WN}(D) = \{\lambda \mid D \textit{ je } \lambda\textit{-slabo normalan}\}.$$

Deo II

Dokazi konsistentnosti i nezavisnosti

4

Unutrašnji modeli

Za teoriju T jezika $\mathcal{L}$ kažemo da je *relativno konsistentna* u odnosu na teoriju T' istoga jezika, ukoliko se rečenica

$$Con(T') \Rightarrow Con(T)$$

može dokazati ZF (ili ZFC) sredstvima. Semantički, teorija T je relativno konsistentna u odnosu na teoriju T' ukoliko iz postojanja modela teorije T' sledi postojanje modela teorije T.

Što se tiče teorije skupova i dokaza relativne konsistentnosti, koristimo metode unutrašnjih modela i forsinga. U ovom poglavlju ćemo primenom metode unutrašnjih modela dokazati relativnu konsistentnost aksiome izbora, generalisane kontinuum hipoteze i Jensenovog $\Diamond$ principa sa teorijom ZF.

Sama primena metode unutrašnjih modela u dokazima relativne konsistentnosti se sastoji u sledećem: polazeći od proizvoljnog modela $\mathcal{M}$ teorije ZF, mi ćemo konstruisati njegov podmodel $L^{\mathcal{M}}$ - tzv. konstruktibilni univerzum, u kome će važiti ZF, AC, GCH i $\Diamond$. Sintaksno, mi ćemo teoriju

$$\text{ZFL} = \text{ZF} + \text{“svaki skup je konstruktibilan”}$$

interpretirati unutar teorije ZF sa konstruktibilnim univerzumom L kao univerzumom interpretacije i pokazati da su relativizacije svih aksioma teorije ZF, asiome izbora, generalisane kontinuum hipoteze i Jensenovog principa $\Diamond$ na L teoreme teorije ZF. Ukoliko čitalac nije upoznat sa metodom interpretacije, jako preporučujemo da prethodno pročita sekciju 1.9.

Neformalno, Gödelov konstruktibilni univerzum L rekurzivno gradimo na sledeći način:

- $L_0 = 0$;
- $L_\alpha = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} L_\alpha$ za granični ordinal α;
- $x \in L_{\alpha+1}$ akko x je podskup od L_α definabilan sa parametrima u $\langle L_\alpha, \in\rangle$. Drugim rečima, postoje formula $\varphi(y, z_1, \ldots, z_n)$ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ i $a_1, \ldots a_n \in L_\alpha$ tako da
$$x = \{y \in L_\alpha \mid \langle L_\alpha, \in\rangle \models \varphi[y, a_1, \ldots, a_n]\};$$
- $x \in L \Leftrightarrow \exists\alpha(x \in L_\alpha)$.

Aksioma konstruktibilnosti $V = L$ ("svaki skup je konstruktibilan") se uvodi sa
$$\forall x \exists\alpha(x \in L_\alpha).$$

ZF formalizacija ovog predikata se postiže odgovarajućom formalizacijom sledbenik koraka u rekurzivnoj izgradnji konstruktibilnog univerzuma L, u čemu ključnu ulogu imaju Gödelove operacije (sekcija 4.3).

Kako bismo pojednostavili notaciju, često ćemo koristiti fraze poput "važi φ", "φ je ekvivalentno sa ψ", "neka je A proizvoljan skup", "neka je A skup takav da važi $\varphi(A)$" itd. Ovim zapravo podrazumevamo sledeće:

sintaksa	**semantika**
$T \vdash \varphi$	φ važi u svakom modelu teorije T
$T \vdash \varphi \Leftrightarrow \psi$	formule φ i ψ su ekvivalentne u svakom modelu teorije T
A je nov simbol konstante	A je proizvoljan element proizvoljnog modela $\mathcal{M}$ teorije T
A je nov simbol konstante i radimo u teoriji $T + \varphi(A)$	A je element proizvoljnog modela teorije T takav da $\mathcal{M} \models \varphi[A]$

Napomenimo da je ovde T nekakva teorija skupova (ZF, ZFC, ZFL itd).

Koristeći Gödelovu teoremu potpunosti, tvrđenja oblika

$$\mathrm{ZF} \vdash \varphi$$

nećemo dokazivati tako što ćemo tražiti formalni ZF dokaz (konačan niz formula), već ćemo u proizvoljnom modelu teorije ZF pokazati da važi φ. Mada ume da izazove konfuziju, uobičajena je praksa da se ne ističe konkretan model, pa ćemo u dokazima često nailaziti na prethodno pomenute fraze, čije smo značenje precizirali tabelom. Čitaoca molimo da se ne da zbuniti domenom važenja nekog predikata φ. Još jednom da ponovimo, kad kažemo

“važi φ”

mi zapravo podrazumevamo da φ važi u *svakom modelu* teorije T (ZF, ZFC, ZFL itd.), tj. da je φ *teorema* teorije T.

4.1 Apsolutnost

Univerzum ma koje interpretacije je definabilan unarni predikat, što u slučaju teorije skupova znači da su univerzumi interpretacija klase. Bez obzira na izbor klase $\mathtt{M}$ u kojoj želimo da interpretiramo neku teoriju T jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$, jezik $\mathcal{L}_{ZFC}$ ćemo uvek interpretirati na isti način: $\in_{\mathtt{M}}=\in$. Ovo posebno znači da će unutrašnji model koji odgovara klasi $\mathtt{M}$ ujedno biti i podmodel posmatranog modela teorije ZF (ZFC). Dalje, kako je $\in_{\mathtt{M}}=\in$, relativizacija proizvoljne formule φ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ na klasu $\mathtt{M}$ ima sledeći oblik:

- Ako je φ atomična formula, onda se formule φ i $\varphi^{\mathtt{M}}$ poklapaju;
- Ako je φ formula $\neg\psi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\neg(\psi^{\mathtt{M}})$;
- Ako je φ formula $\phi \wedge \psi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $\phi^{\mathtt{M}} \wedge \psi^{\mathtt{M}}$;
- Ako je φ formula $\forall x\psi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $(\forall x \in \mathtt{M})\psi^{\mathtt{M}}$, tj. u razvijenom obliku $\forall x(x \in \mathtt{M} \Rightarrow \psi^{\mathtt{M}})$;
- Ako je φ formula $\exists x\psi$, onda je $\varphi^{\mathtt{M}}$ formula $(\exists x \in \mathtt{M})\psi^{\mathtt{M}}$, tj. u razvijenom obliku $\exists x(x \in \mathtt{M} \wedge \psi^{\mathtt{M}})$.

4.1.1 Definicija Neka je $\mathtt{M}$ proizvoljna klasa, T teorija jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ i neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$. Kažemo da je formula φ T-*apsolutna* za $\mathtt{M}$ ukoliko

$$T \vdash (\forall \bar{x} \in \mathtt{M})(\varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x}) \Leftrightarrow \varphi(\bar{x})).$$

Semantički gledano, za svaki model $\mathcal{M}$ model teorije T i proizvoljne $a_1, \dots, a_n \in \mathtt{M}^{\mathcal{M}}$ imamo da

$$\mathtt{M}^{\mathcal{M}} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ ako i samo ako } \mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

Na osnovu teoreme potpunosti očigledno važi i obrat: ako prethodna relacija važi za svaki model $\mathcal{M}$ teorije T, onda je formula φ T-apsolutna za $\mathtt{M}$. Posebno, ako je T-apsolutna za $\mathtt{M}$ formula φ ujedno i teorema teorije T, onda $\mathtt{M}^{\mathcal{M}} \models \varphi$. Otuda se konstrukcija unutrašnjeg modela teorije T svodi na konstrukciju klase $\mathtt{M}$ za koju će sve aksiome teorije T biti apsolutne. Na ovaj način imamo ujednačenje ranije definisane semantičke apsolutnosti i ovde uvedene sintaksne apsolutnosti.

Apsolutnost se javila u teoriji skupova kao prirodno razrešenje problema poznatijeg kao *Skolemov paradoks*:

Ukoliko teorija ZFC ima $\in$-model (elementi skupa nosača su skupovi u metateorijskom smislu, a $\in$ se interpretira kao metateorijska relacija pripadnosti), on mora biti beskonačan, pa po donjoj LST teoremi on ima prebrojivi elementarni $\in$-podmodel $\mathcal{M}$. Kako je svaki $\in$-model dobro zasnovan, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{M}$ prebrojiv tranzitivan skup (ukoliko nije, prelazimo na njegov tranzitivni kolaps).

Neka je $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ realizacija skupa realnih brojeva u $\mathcal{M}$. S jedne strane,

$$\mathcal{M} \models \text{"}\mathbb{R}^{\mathcal{M}} \text{ je neprebrojiv"},$$

tj., posmatrano iz $\mathcal{M}$, $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ je neprebrojiv skup. Međutim, $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ je podskup od $\mathcal{M}$ (tranzitivnost skupa $\mathcal{M}$), pa je zbog prebrojivosti skupa $\mathcal{M}$ i skup $\mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ takođe prebrojiv.

Odavde zapravo sledi da pojam kardinalnog broja zavisi od ugla posmatranja, tj. onaj skup koji je bio kardinal u nekom modelu teorije ZFC može da prestane da bude kardinal u nekoj elementarnoj ekstenzji pomenutog modela. Drugim rečima, pojam kardinalnosti nije apsolutan.

4.1.2 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ proizvoljna neprazna tranzitivna klasa.

1. Dokazati da su formule bez kvantora ZF-apsolutne za $\mathtt{M}$.
2. Ako su formule φ i ψ ZF-apsolutne za $\mathtt{M}$, dokazati da su tada i $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \phi$ i $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ZF-apsolutne za $\mathtt{M}$.

Ispitivanje apsolutnosti je usled definicije relativizacije povezano sa strukturom formula. Levyjevu hijerarhiju formula jezika teorije skupova definišemo na sledeći način:

- Σ_0-formule, odnosno Π_0-formule su one formule u kojima je svako javljanje kvantora ograničeno nekom promenljivom. Preciznije:

1. Atomične formule su Σ_0-formule;
2. Booleovske kombinacije Σ_0-formula su Σ_0-formule;
3. Ako je φ Σ_0-formula, onda su $(\forall x \in y)\varphi$ i $(\exists x \in y)\varphi$ takođe Σ_0-formule;
4. Σ_0-formule se mogu dobiti isključivo konačnom primenom prethodne tri stavke;

- Σ_{n+1}-formule su oblika $\exists\bar{x}\varphi$, pri čemu je φ Π_n-formula;
- Π_{n+1}-formue su formule oblika $\forall\bar{x}\varphi$, pri čemu je φ Σ_n-formula.

4.1.3 Teorema Σ_0-*formule su ZF-apsolutne za tranzitivne klase.*

Dokaz

Jedino što nije direktna posledica definicije je apsolutnost formula sa ograničenim kvantorima. Stoga pretpostavimo da je formula $\varphi(x, \bar{y})$ apsolutna za tranzitivnu klasu $\mathtt{M}$ i dokažimo da je tada i formula

$$(\exists x \in z)\varphi(x, \bar{y})$$

apsolutna za $\mathtt{M}$. U tom cilju, neka su $z, \bar{y} \in \mathtt{M}$ proizvoljni. Tada je u ZF dokaziv sledeći lanac ekvivalencija:

$$\begin{aligned} ((\exists x \in z)\varphi(x, \bar{y}))^{\mathtt{M}} &\Leftrightarrow (\exists x(x \in z \wedge \varphi(x, \bar{y})))^{\mathtt{M}} \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in \mathtt{M})((x \in z)^{\mathtt{M}} \wedge \varphi^{\mathtt{M}}(x, \bar{y})) \\ &\overset{(1)}{\Leftrightarrow} (\exists x \in \mathtt{M})(x \in z \wedge \varphi(x, \bar{y})) \\ &\Leftrightarrow \exists x(x \in \mathtt{M} \wedge x \in z \wedge \varphi(x, \bar{y})) \\ &\overset{(2)}{\Leftrightarrow} \exists x(x \in z \wedge \varphi(x, \bar{y})) \\ &\Leftrightarrow (\exists x \in z)\varphi(x, \bar{y}). \end{aligned}$$

(1) sledi iz apsolutnosti formula $x \in z$ i φ za $\mathtt{M}$, a (2) sledi iz tranzitivnosti klase $\mathtt{M}$. $\square$

4.1.4 Primer Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna klasa. Sledeće formule su ZF-apsolutne za $\mathtt{M}$:

1. $x = y$, jer je atomična formula;
2. $x \in y$, jer je atomična formula;
3. $x = 0$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli $(\forall y \in x)(y \neq y)$;
4. $0 \in x$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli $(\exists y \in x)(y = 0)$;
5. $x = \{y, z\}$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli
$$y \in x \wedge z \in x \wedge (\forall u \in x)(u = y \vee u = z);$$
6. $x \subseteq y$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli $(\forall z \in x)(z \in y)$;
7. $y = x \cup \{x\}$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli
$$x \in y \wedge x \subseteq y \wedge (\forall z \in y)(z \in x \vee z = x);$$
8. $x \cup \{x\} \in y$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli $(\exists z \in y)(z = x \cup \{x\})$;
9. $y = \bigcup x$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli
$$(\forall z \in y)(\exists u \in x)(z \in u) \wedge (\forall z \in x)(\forall u \in z)(u \in y);$$
10. $y = \bigcup^2 x = \bigcup \bigcup x$, jer je ekvivalentna konjunkciji Σ_0-formula
$$(\forall z_0 \in x)(\forall z_1 \in z_0)(\forall z_2 \in z_1)(z_2 \in y)$$
i
$$(\forall z \in y)(\exists u_0 \in x)(\exists u_1 \in u_0)(z \in u_1);$$
11. $y = \bigcup^n x$, $n > 2$;
12. $\bigcup x \in y$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli $(\exists z \in y)(z = \bigcup x)$;
13. $y \in \bigcup x$, jer je ekvivalentna Σ_0-formuli $(\exists z \in x)(y \in z)$;
14. $y \in \bigcup^n x$, $n > 1$;

15. $x \in \mathrm{Ord}$, jer je ekvivalentna konjunkciji sledeće četiri Σ_0-formule:
    (a) $\bigcup x \subseteq x$
    (b) $(\forall y \in x)(y \notin y)$
    (c) $(\forall y \in x)(\forall z \in x)(y = z \vee y \in z \vee z \in y)$
    (d) $(\forall x_0 \in x)(\forall x_1 \in x)(\forall x_2 \in x)(x_0 \in x_1 \wedge x_1 \in x_2 \Rightarrow x_0 \in x_2)$;
16. $x = \omega$, jer je ekvivalentna konjunkciji sledeće četiri Σ_0-formule:
    (a) $x \in \mathrm{Ord}$
    (b) $0 \in x$
    (c) $\bigcup x = x$
    (d) $(\forall y \in x)(y \neq 0 \Rightarrow (\exists z \in x)(y = z \cup \{z\}))$.

    Posebno, klasa $\mathtt{M}$ je apsolutna za aksiomu beskonačnosti ako i samo ako $\omega \in \mathtt{M}$;
17. $\mathrm{Fun}(x)$, jer je ekvivalentna konjunkciji sledeće dve Σ_0-formule:
    (a) $(\forall y \in x)(\exists a \in \bigcup^2 x)(\exists b \in \bigcup^2 x)(y = \{\{a\}, \{a, b\}\})$
    (b) $(\forall a \in \bigcup^2 x)(\exists_1 b \in \bigcup^2 x)(\{\{a\}, \{a, b\}\} \in x)$.

    Napomenimo da je $\mathrm{Fun}(x)$ predikat "x je funkcija";
18. $y = \mathrm{dom}(x)$, jer je ekvivalentna konjunkciji sledeće dve Σ_0-formule:
    (a) $(\forall u \in y)(\exists v \in \bigcup^2 x)(\langle u, v\rangle \in x)$
    (b) $(\forall u, v \in \bigcup^2 x)(\langle u, v\rangle \in x \Rightarrow u \in y)$;
19. $y = \mathrm{rng}(x)$, jer je ekvivalentna konjunkciji sledeće dve Σ_0-formule:
    (a) $(\forall v \in y)(\exists u \in \bigcup^2 x)(\langle u, v\rangle \in x)$
    (b) $(\forall u, v \in \bigcup^2 x)(\langle u, v\rangle \in x \Rightarrow v \in y)$;

20. $x \in \mathrm{Ord} \wedge \bigcup x = x$ (predikat "x je granični ordinal");

21. $x \in \mathrm{Ord} \wedge \bigcup x \in x$ (predikat "x je sledbenik ordinal).

Neka je F definabilna n-arna skupovna operacija čija je definiciona formula $\varphi(\bar{x}, y)$ i neka je $\mathtt{M}$ klasa. $\mathtt{M}$-interpretaciju $F_{\mathtt{M}}$ operacije F definišemo sa

$$\forall \bar{x} \forall y (\bar{x}, y \in \mathtt{M} \Rightarrow (F_{\mathtt{M}}(\bar{x}) = y \Leftrightarrow \varphi^{\mathtt{M}}(\bar{x}, y))).$$

Za operaciju F ćemo reći da je T-apsolutna za klasu $\mathtt{M}$ ukoliko:

- Definiciona formula $\varphi(\bar{x}, y)$ operacije F je T-apsolutna za $\mathtt{M}$;
- $T \vdash (\forall \bar{x} \exists_1 y \varphi(x, y))^{\mathtt{M}}$.

Ukoliko ispustimo drugi uslov, restrikcija operacije F na $\mathtt{M}$, tj. $F_{\mathtt{M}}$, ne mora biti operacija. Ilustrujmo ovo sledećim primerom. Neka je F nularna operacija (konstanta) 0 i neka je $\mathtt{M} = \{0, \{\{0\}\}\}$. Definiciona formula praznog skupa

$$\forall x (x \notin y)$$

je ZF-apsolutna za $\mathtt{M}$. Međutim,

$$ZF \vdash (\forall x \in \mathtt{M})(x = 0^{\mathtt{M}} \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = \{\{0\}\})),$$

čime se gubi jedinstvenost.

Primetimo da apsolutnost operacije F za klasu $\mathtt{M}$ povlači da je

$$F_{\mathtt{M}}(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)$$

za sve $\bar{x} \in \mathtt{M}$.

4.1.5 Primer Sledeće operacije su ZF-apsolutne za tranzitivne klase:

1. $x \mapsto \bigcup x$, jer je za $x \in \mathtt{M}$ zbog tranzitivnosti klase $\mathtt{M}$ i $\bigcup x \subseteq \mathtt{M}$, pa kako je i formula $y \in \bigcup x$ apsolutna za $\mathtt{M}$, imamo da je

$$\begin{aligned}\bigcup\nolimits_{\mathtt{M}} x &= \{y \mid (y \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (y \in \bigcup x)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{y \mid y \in \mathtt{M} \wedge y \in \bigcup x\} \\ &= \{y \mid y \in \bigcup x\} \\ &= \bigcup x,\end{aligned}$$

pri čemu je $\bigcup_{\mathtt{M}}$ interpretacija $\bigcup$ u $\mathtt{M}$. Posebno, aksioma unije će biti ZF-apsolutna za klasu $\mathtt{M}$ ako i samo ako je zatvorena za operaciju $x \mapsto \bigcup x$;

2. $\langle x, y\rangle \mapsto \{x, y\}$, jer je za $x, y \in \mathtt{M}$

$$\begin{aligned}\{x, y\}_{\mathtt{M}} &= \{z \mid (z \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (z = x \vee z = y)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{z \mid z \in \mathtt{M} \wedge (z = x \vee z = y)\} \\ &= \{x, y\}.\end{aligned}$$

Posebno, aksioma para će biti ZF-apsolutna za klasu $\mathtt{M}$ ako i samo ako je zatvorena za operaciju $\langle x, y\rangle \mapsto \{x, y\}$;

3. $\langle x, y\rangle \mapsto x \cup y$, jer za $x, y \in \mathtt{M}$ zbog tranzitivnosti klase $\mathtt{M}$ imamo da je $x \subseteq \mathtt{M}$ i $y \subseteq \mathtt{M}$, odakle sledi da je

$$\begin{aligned}x \cup_{\mathtt{M}} y &= \{z \mid (z \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (z \in x \vee z \in y)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{z \mid z \in \mathtt{M} \wedge (z \in x \vee z \in y)\} \\ &= \{z \mid z \in x \vee z \in y\} \\ &= x \cup y;\end{aligned}$$

4. $\langle x, y\rangle \mapsto x \cap y$, jer je za $x, y \in \mathtt{M}$

$$\begin{aligned}x \cap_{\mathtt{M}} y &= \{z \mid (z \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (z \in x \wedge z \in y)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{z \mid z \in \mathtt{M} \wedge (z \in x \wedge z \in y)\} \\ &= \{z \mid z \in x \wedge z \in y\} \\ &= x \cap y;\end{aligned}$$

5. $\langle x, y\rangle \mapsto x \setminus y$, jer je za $x, y \in \mathtt{M}$

$$\begin{aligned} x \setminus_{\mathtt{M}} y &= \{z \mid (z \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (z \in x \wedge z \notin y)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{z \mid z \in \mathtt{M} \wedge (z \in x \wedge z \notin y)\} \\ &= \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\} \\ &= x \setminus y. \end{aligned}$$

4.1.6 Primer Operacija partitivnog skupa u opštem slučaju nije ZF-apsolutna za neprazne tranzitivne klase. Naime,

$$\begin{aligned} P_{\mathtt{M}}(x) &= \{y \mid (y \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (y \subseteq x)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{y \mid y \in \mathtt{M} \wedge y \subseteq x\} \\ &= P(x) \cap \mathtt{M}. \end{aligned}$$

Posebno, aksioma partitivnog skupa će biti ZF-apsolutna za klasu $\mathtt{M}$ ako i samo ako je zatvorena za operaciju $x \mapsto P(x) \cap \mathtt{M}$.

4.1.7 Primer Operacija $\langle x, y\rangle \mapsto {}^{y}x$ nije u opštem slučaju ZF-apsolutna za tranzitivne klase. Naime,

$$\begin{aligned} ({}^{y}x)_{\mathtt{M}} &= \{z \mid (z \in \mathtt{M})^{\mathtt{M}} \wedge (\mathrm{Fun}(z))^{\mathtt{M}} \wedge (\mathrm{dom}(z) = x)^{\mathtt{M}} \wedge (\mathrm{rng}(z) \subseteq y)^{\mathtt{M}}\} \\ &= \{z \mid z \in \mathtt{M} \wedge \mathrm{Fun}(z) \wedge \mathrm{dom}(z) = x \wedge \mathrm{rng}(z) \subseteq y\} \\ &= {}^{y}x \cap \mathtt{M}. \end{aligned}$$

4.1.8 Primer Formula $x \in \mathrm{Card}$ u opštem slučaju nije ZF-apsolutna za tranzitivne klase. Naime,

$$\begin{aligned} (x \in \mathrm{Card})^{\mathtt{M}} \quad \Leftrightarrow \quad & x \in \mathrm{Ord} \\ & \wedge (\forall y \in x)(\forall f \in ({}^{y}x) \cap \mathtt{M})(\mathrm{rng}(f) \neq x). \end{aligned}$$

4.1.9 Zadatak Dokazati da su aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa i regularnosti ZF-apsolutne za neprazne tranzitivne klase.

Uputstvo

Kombinovati zadatak 3.4.3 i teoremu 1.9.2 □

4.1.10 Zadatak Neka su formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i funkcije

$$F(x_1, \dots, x_n),\ G_1(y_1, \dots, y_m), \dots, G_n(y_1, \dots, y_m)$$

ZF-apsolutni za klasu $\mathtt{M}$. Dokazati da su tada formula

$$\varphi(G_1(\bar{y}), \dots, G_n(\bar{y}))$$

i funkcija

$$F(G_1(\bar{y}), \dots, G_n(\bar{y}))$$

ZF-apsolutni za $\mathtt{M}$.

4.1.11 Teorema *Neka je* $\mathtt{E}$ *dobro zasnovana relacija skupovnog tipa na klasi* $\mathtt{N}$ *i neka su* $F : \mathtt{N} \times V \longrightarrow V$ *i* $G : \mathtt{N} \longrightarrow V$ *definabilne funkcije takve da je*

$$(\forall x \in \mathtt{M})(G(x) = F(x, G \restriction \{y \in \mathtt{N} |\ y \,\mathtt{E}\, x\}).$$

Neka je teorija $\mathrm{ZF} - P$ *ZF-apsolutna za tranzitivnu klasu* $\mathtt{M}$ *i neka važi:*

1. *Funkcija* F *je ZF-apsolutna za* $\mathtt{M}$*;*

2. $\mathtt{E}$ *i* $\mathtt{N}$ *su ZF-apsolutni za* $\mathtt{M}$*;*

3. $\mathrm{ZF} \vdash$ (*"*$\mathtt{E}$ *je skupovnog tipa na* $\mathtt{N}$*"*$)^{\mathtt{M}}$*;*

4. $\mathrm{ZF} \vdash (\forall x \in \mathtt{M})(\{y \in \mathtt{N} \mid y \,\mathtt{E}\, x\} \subseteq \mathtt{M})$*.*

Tada je i funkcija G *ZF-apsolutna za* $\mathtt{M}$*.*

Dokaz

Kako je relacija

$$\mathtt{E}_{\mathtt{M}} = \mathtt{E} \cap (\mathtt{M} \times \mathtt{M})$$

dobro zasnovana na

$$\mathtt{N}_{\mathtt{M}} = \mathtt{N} \cap \mathtt{M},$$

svaki neprazan podskup od $\mathtt{N}_\mathtt{M}$ koji se nalazi u $\mathtt{M}$ ima $\mathtt{E}_\mathtt{M}$-minimalni element. Stoga

$$\mathrm{ZF} \vdash (\text{“}\mathtt{E} \text{ je dobro zasnovana na } \mathtt{N}\text{”})^{\mathtt{M}},$$

pa možemo primeniti WF-rekurziju u $\mathtt{M}$ kako bismo definisali funkciju $G_\mathtt{M} : \mathtt{N}_\mathtt{M} \longrightarrow \mathtt{M}$ takvu da je

$$(\forall x \in \mathtt{N}_\mathtt{M})(G_\mathtt{M}(x) = F_\mathtt{M}(x, G_\mathtt{M} \restriction \{y \in \mathtt{N} |\ y \,\mathtt{E}\, x\}_\mathtt{M}).$$

Odavde sledi da mora biti i

$$G_\mathtt{M} = G \restriction \mathtt{N}_\mathtt{M}.$$

Zaista, u suprotnom bi $\mathtt{E}$-minimalni element klase

$$\{x \in \mathtt{N}_\mathtt{M} \mid G_\mathtt{M}(x) \neq G(x)\}$$

na osnovu polaznih pretpostavki o apsolutnosti doveo do kontradikcije.
□

Sledeća teorema je neposredna posledica upravo dokazane teoreme o apsolutnosti rekurzivnih definicija, pa je navodimo bez dokaza.

4.1.12 Teorema *Sledeće funkcije su ZF-apsolutne za one tranzitivne klase za koje je teorija ZF−P ZF-apsolutna:*

1. *Ordinalno stepenovanje;*
2. *Funkcija ranga* $\mathrm{rank}(x)$*;*
3. *Funkcija tranzitivnog zatovrenja* $\mathrm{tc}(x)$*.*

4.1.13 Primer Neka je neprazna tranzitivna klasa $\mathtt{M}$ zatvorena za operaciju $\langle x, y\rangle \mapsto \{x, y\}$. Tada je kanonsko dobro uređenje klase $\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ definisano sa

$$\langle \alpha, \beta\rangle < \langle \gamma, \delta\rangle \Leftrightarrow \Gamma(\alpha, \beta) < \Gamma(\gamma, \delta)$$

apsolutno za $\mathtt{M}$. Naime, kako je $\Gamma(0,0) = 0$ i

$$\Gamma(\alpha,\beta) = \sum_{\xi<\max\{\alpha,\beta\}} (\xi+\xi+1) + \begin{cases} \alpha & , \quad \alpha < \beta \\ \alpha+\beta & , \quad \alpha \geqslant \beta > 0 \end{cases} ,$$

formula $\langle\alpha,\beta\rangle < \langle\gamma,\delta\rangle$ ekvivalentna je disjunkciji sledećih pet Σ_0-formula:

- $\alpha \in \gamma \wedge \beta \in \gamma$;
- $\alpha \in \delta \wedge \beta \in \delta$;
- $\alpha \in \beta \wedge \beta = \gamma$;
- $\beta = \delta \wedge \alpha \in \beta \wedge \gamma \in \delta \wedge \alpha \in \gamma$;
- $\alpha = \gamma \wedge \beta \in \alpha \wedge \beta \in \delta$.

4.1.14 Zadatak Neka je tranzitivna klasa $\mathtt{M}$ zatvorena za operaciju $\langle x,y\rangle \mapsto \{x,y\}$. Dokazati da su tada sledeće operacije i formule ZF-apsolutne za $\mathtt{M}$:

1. $\langle x,y\rangle \mapsto x \times y$;
2. $x \mapsto \mathrm{dom}(x)$;
3. $x \mapsto \mathrm{rng}(x)$;
4. $x \mapsto \{\langle y,z\rangle \mid z \in x \wedge y \in z\}$;
5. $x \mapsto x \cup \{x\}$;
6. $\langle\alpha,\beta\rangle \mapsto \Gamma(\alpha,\beta)$, pri čemu je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija.

Kao prvi korak u ilustraciji važnosti koncepta apsolutnosti u teoriji skupova navodimo sledeću karakterizaciju tranzitivnih modela teorije ZFC.

4.1.15 Teorema *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ tranzitivni modeli teorije ZFC takvi da za svaki skup $X \subseteq \mathrm{Ord}$ važi*

$$X \in \mathcal{M} \quad \textit{ako i samo ako} \quad X \in \mathcal{N}.$$

Tada je $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

Dokaz

Prvo pokazujemo da $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ imaju iste skupove parova ordinala, tj. da za svaki skup $X \subseteq \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$ važi da $X \in \mathcal{M}$ ako i samo ako $X \in \mathcal{N}$.

Neka $X \in \mathcal{M}$, pri čemu je $X \subseteq \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}$. Kako u $\mathcal{M}$ važi shema zamene, skup

$$Y = \{\Gamma^{\mathcal{M}}(\alpha, \beta) \mid \langle \alpha, \beta \rangle \in X\}$$

pripada modelu $\mathcal{M}$. Pošto u $\mathcal{M}$ važi aksioma para, $\mathcal{M}$ mora biti zatvoren za operaciju $\langle x, y \rangle \mapsto \{x, y\}$. Na osnovu prethodnog zadatka je kanonska bijekcija Γ apsolutna za $\mathcal{M}$, pa je

$$Y = \Gamma \restriction X.$$

Po pretpostavci $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ imaju iste skupove ordinala, pa $Y \in \mathcal{N}$. Sada iz $\mathcal{N} \models ZFC$, apsolutnosti Γ za tranzitivne modele, apsolutnosti pojma funkcije za tranzitivne modele i činjenice da $\Gamma \restriction X \in \mathcal{N}$ sledi da

$$X = \Gamma^{-1}[\Gamma[X]] \in \mathcal{N}.$$

Zbog očigledne simetrije imamo i obrat.

Ostaje da pokažemo da je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, jer se obratna inkluzija dokazuje sasvim slično. Neka je $x \in \mathcal{M}$ proizvoljan skup. S obzirom na apsolutnost i činjenicu da je $\mathcal{M} \models \mathrm{ZFC}$, imamo da $\mathrm{tc}(\{x\}) \in \mathcal{M}$ i da postoje $\alpha \in \mathrm{Ord} \cap \mathcal{M}$ i bijekcija $f : \alpha \longrightarrow \mathrm{tc}(\{x\})$, $\ f \in \mathcal{M}$. Na ordinalu α definišimo binarnu relaciju R na sledeći način:

$$\beta R \gamma \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} f^{-1}(\beta) \in f^{-1}(\gamma)$$

Sada $R \in \mathcal{M}$ i $(\mathrm{tc}(\{x\}), \in) \cong (\alpha, R)$, a kako $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ imaju iste skupove ordinala i parova ordinala i kako je N model teorije ZFC, par $\langle \alpha, R \rangle$

pripada $\mathcal{N}$. No u $\mathcal{N}$ važi teorema kolapsa, pa postoji jedinstven tranzitivan skup $z \in \mathcal{M}$ takav da je

$$\langle \alpha, R \rangle \cong \langle z, \in \rangle.$$

Zbog apsolutnosti pojma funkcije ovaj izomorfizam važi i spolja, pa mora biti $\mathrm{tc}(\{x\}) = z$, odakle sledi da $x \in \mathcal{N}$. $\square$

4.2 Teorema refleksije

Došli smo do mesta gde se najfinije prepliću sintaksa i semantika. Stoga, pre nego što uopšte i formulišemo teoremu refleksije, moramo dati dodatna pojašnjenja.

Prvo, podsetimo na konvenciju sa početka poglavlja: ako kažemo "neka je X proizvoljan skup", mi zapravo podrazumevamo sledeće:

sintaksa: uvodimo novi simbol konstante X;

semantika: u proizvoljnom modelu $\mathcal{M}$ teorije ZFC (ili neke druge teorije skupova) biramo njegov proizvoljan element X.

Drugo, često ćemo koristiti pojam koji do sada nismo definisali, a to je pojam *relativizacije formule na skup.* Sintaksno, relativizacija formule φ na skup (dakle, novi simbol konstante) M, u oznaci φ^M, se dobija od formule φ ograničavanjem svih kvantora na M. Semantički, φ^M je predikat "u M važi φ", tj.

$$\langle M, \in \rangle \models \varphi.$$

Teorema refleksije je centralna teorema o modelima konačnih fragmenata teorije ZFC. Naime, za proizvoljne formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ i proizvoljan skup X postoji skup $M \supseteq X$ takav da je formula $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ ZFC-apsolutna za M. U tom slučaju kažemo i da skup M *reflektuje* formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Posebno, ako su $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ teoreme teorije ZFC, imamo da

$$\mathrm{ZFC} \vdash \varphi_1^M \wedge \dots \wedge \varphi_n^M,$$

odakle sledi da

$$\langle M, \in \rangle \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n.$$

Kako se ovo može formalizovati ZFC sredstvima, imamo da

$$\mathrm{ZFC} \vdash Con(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n).$$

Važno je istaći da ovaj rezultat nikako nije u koliziji sa Gödelovim teoremama nepotpunosti, jer odavde ne sledi da se ZFC sredstvima može dokazati da svaki konačan podskup teorije ZFC ima model (odakle bi po stavu kompaktnosti sledilo Con(ZFC)).

Kao što smo i ranije istakli, predikat "svaki konačan" se nalazi sa leve strane $\vdash$, dakle u metateoriji, a bilo koje metateorijsko kodiranje prirodnim brojevima, što je neophodan korak u predstavljanju konačnih skupova formula, formalno odgovara kodiranju numeralima. Naravno, predikat "biti numeral" nije predstavljiv unutar ZFC, pa se metateorijski predikat "svaki konačan podskup teorije ZFC" ne može formalno zapisati.

4.2.1 Lema *Neka su $\varphi_1(x_1, \bar{y_1}), \dots, \varphi_n(x_n, \bar{y_n})$ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ i neka je X proizvoljan skup. Tada postoji njegov nadskup $M \supseteq X$ takav da važi*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} (\forall \bar{y_i} \in M)(\exists x_i \varphi_i(x_i, \bar{y_i}) \Rightarrow (\exists x_i \in M)\varphi_i(x_i, \bar{y_i})).$$

Posebno :

1. *M možemo izabrati tako da bude tranzitivan;*

2. *M možemo izabrati tako da je $M = V_\alpha$, za neki granični ordinal α;*

3. *Ako dodatno pretpostavimo AC, skup M možemo izabrati tako da je* $|M| = \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Napomenimo da navedeno tvrđenje (sem poslednje stavke) predstavlja shema teoremu teorije ZF. Naime, ako su $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ proizvoljne formule, onda

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall X (\exists M \supseteq X) \bigwedge_{i=1}^{n} (\forall \bar{y}_i \in M)(\exists x_i \varphi_i(x_i, \bar{y}_i) \Rightarrow (\exists x_i \in M)\varphi_i(x_i, \bar{y}_i)).$$

Dokaz

Prvo primetimo da je za svaku formulu $\varphi(x, \bar{y})$ i svaki skup A klasa

$$\mathtt{A} = \{x \mid (\exists \bar{y} \in A)(\varphi(x, \bar{y}) \wedge \forall z(\varphi(z, \bar{y}) \Rightarrow \mathrm{rank}(x) \leqslant \mathrm{rank}(z)))\}$$

takođe skup. Sada konstrukciju skupa M rekurzivno po ω izvodimo na sledeći način:

- $M_0 = X$
- $M_{n+1} = M_n \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{x \mid (\exists \bar{y}_i \in M_n)(\varphi_i(x, \bar{y}_i) \wedge \forall z(\varphi_i(z, \bar{y}_i) \Rightarrow \mathrm{rank}(x) \leqslant \mathrm{rank}(z)))\}$
- $M = \bigcup_{n \in \omega} M_n$.

Lako se proverava da M zadovoljava uslove tvrđenja.

Ako bismo hteli da važi $M = V_\alpha$ za neki granični ordinal α, vršimo sledeću modifikaciju prethodne konstrukcije:

- $M_0 = V_{\alpha_0}$, pri čemu je α_0 najmanji ordinal takav da je skup X sadržan u V_{α_0};
- $M_{n+1} = V_{\alpha_{n+1}}$, pri čemu je α_{n+1} najmanji ordinal za koji je skup $M_n \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{x \mid (\exists \bar{y}_i \in M_n)(\varphi_i(x, \bar{y}_i) \wedge \forall z(\varphi_i(z, \bar{y}_i) \Rightarrow \mathrm{rank}(x) \leqslant \mathrm{rank}(z)))\}$ sadržan u $V_{\alpha_{n+1}}$;

- $M = V_\alpha$, pri čemu je $\alpha = \bigcup\limits_{n\in\omega} \alpha_n$.

Što se tiče kontrole kardinalnosti skupa M, vršimo sledeću modifikaciju konstrukcije:

- $M_0 = X$
- $M_{n+1} = M_n \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{a_{i,\bar{y}_i} \mid \bar{y}_i \in M_n\}$, pri čemu je $a_{i,\bar{y}_i}$ ili svedok minimalnog ranga u V formule $\exists x \varphi_i(x, \bar{y}_i)$, ili je $a_{i,\bar{y}_i} = 0$;
- $M = \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n$. $\square$

4.2.2 Teorema refleksije

Neka je $\varphi(\bar{x})$ formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ i neka je X proizvoljan skup. Tada postoji skup $M \supseteq X$ koji reflektuje formulu φ, tj. formula φ^M je ZF-apsolutna za M. Posebno:

1. *M možemo izabrati tako da bude tranzitivan;*
2. *M možemo izabrati tako da je $M = V_\alpha$ za neki granični ordinal α;*
3. *Ako dodatno pretpostavimo AC, skup M možemo izabrati tako da je $|M| = \max\{\aleph_0, |X|\}$.*

Dokaz

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\varphi(\bar{x})$ u preneksnoj normalnoj formi, s tim da je univerzalni kvantor izražen preko egzistencijalnog. Dalje, s obzirom da je formula

$$(\psi \Leftrightarrow \theta) \Leftrightarrow (\neg\psi \Leftrightarrow \neg\theta)$$

valjana, možemo pretpostaviti da formula $\varphi(\bar{x})$ ne počinje negacijom.

Neka je n broj egzistencijalnih kvantora koji se javljaju u φ. Ako je $n = 0$ možemo uzeti da je $M = X$.

Neka je $n > 0$ i neka je $\varphi(\bar{x})$ oblika

$$\exists y_1 \neg^{a_1} \ldots \exists y_n \psi(y_1, \ldots, y_n, \bar{x}),$$

pri čemu je ψ formula bez kvantora, $a_i \in \{-1, 1\}$, $\neg^1\theta \Leftrightarrow_{\text{def}} \neg\theta$ i $\neg^{-1}\theta \Leftrightarrow_{\text{def}} \theta$. Dalje, neka je φ_i po složenosti maksimalna potformula formule φ koja sadrži tačno i kvantora, $i < n$.

Na osnovu leme 4.2.1 postoji skup $M \supseteq X$ takav da za svako $i \in n$ i svako $\bar{y}(i), \bar{x} \in M$ važi

$$\exists y_{n-i}\varphi_i(\bar{y}(i), y_{n-i}, \bar{x}) \Rightarrow (\exists y_{n-i} \in M)\varphi_i(\bar{y}(i), y_{n-i}, \bar{x}),$$

pri čemu je $\bar{y}(n-1)$ prazan niz, a za ostale vrednosti i je $\bar{y}(i) = y_1, \ldots, y_{n-i-1}$. Neka je ψ_0 formula φ_0 i neka je ψ_{i+1} formula $\exists y_{n-i}\varphi_i$.

Tvrdimo da za svako $i \in n$ važi

$$(\forall \bar{y}(i), \bar{x} \in M)(\varphi_i^M \Leftrightarrow \varphi_i).$$

Dokaz izvodimo indukcijom po n. Neka tvrđenje važi za i i neka su $\bar{y}(i+1), \bar{x} \in M$ proizvoljni. Tada važi:

$$\begin{aligned}
\psi_{i+1}^M &\Leftrightarrow (\exists y_{n-i-1}\varphi_i(\bar{y}(i+1), y_{n-i-1}, \bar{x}))^M \\
&\Leftrightarrow (\exists y_{n-i-1} \in M)\varphi_i^M(\bar{y}(i+1), y_{n-i-1}, \bar{x}) \\
&\Leftrightarrow (\exists y_{n-i-1} \in M)\varphi_i(\bar{y}(i+1), y_{n-i-1}, \bar{x}) \quad \text{(ind. hipoteza)} \\
&\Rightarrow \exists y_{n-i-1}\varphi_i(\bar{y}(i+1), y_{n-i-1}, \bar{x}) \\
&\Leftrightarrow \psi_{i+1}.
\end{aligned}$$

Kako obratna implikacija važi na osnovu leme 4.2.1, važi

$$(\forall \bar{y}(i+1), \bar{x} \in M)(\psi_{i+1}^M \Leftrightarrow \psi_{i+1}),$$

odakle neposredno sledi da je za svako $i \leqslant n$ važi $\varphi_i^M \Leftrightarrow \varphi_i$. Pošto je φ_0 formula bez kvantora, imamo tvrđenje. $\square$

4.2.3 Primer U vezi sa teoremom refleksije i kontrolom kardinalnosti reflektujućeg skupa, postoji formula $\varphi(x)$ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ takva da je svaki neprazan tranzitivan skup M koji je reflektuje (φ^M je ZFC-apsolutna za M) neprebrojiv.

Zaista, neka je θ konjunkcija aksioma para, unije partitivnog skupa i beskonačnosti i neka je $\varphi(x)$ formula

$$\theta \wedge (x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \in \mathrm{Ind})(P(y) \in x)),$$

pri čemu je Ind klasa svih induktivnih skupova. Neka je M neprazan tranzitivan skup takav da je

$$(\forall x \in M)(\varphi^M(x) \Leftrightarrow \varphi(x)).$$

Posebno, tada $0 \in M$, pa je $\varphi^M(0) \Leftrightarrow \varphi(0)$, pa je i $\theta^M \Leftrightarrow \theta$, odakle neposredno sledi da u $\langle M, \in \rangle$ važe aksiome ekstenzionalnosti, praznog skupa, para, unije, partitivnog skupa, beskonačnosti i regularnosti.

Neka je skup $a \in M$ takav da

$$\langle M, \in \rangle \models a \in \mathrm{Ind}.$$

Kako je $x \in \mathrm{Ind}$ apsolutna formula za tranzitivne klase, skup a je induktivan. U M važi aksioma partitivnog skupa, pa

$$P(a) \cap M \in M \quad \text{i} \quad b = P(P(a) \cap M) \cap M \in M.$$

Posebno, $\varphi^M(b) \Leftrightarrow \varphi(b)$, što je na osnovu prethodnih razmatranja ekvivalentno sa

$$(\exists y \in M)(y \in \mathrm{Ind} \wedge P(y) \in b) \Leftrightarrow (\exists y \in \mathrm{Ind})(P(y) \in b)\ .$$

Kako $M \models a \in \mathrm{Ind} \wedge (P(a) \cap M) \in b$, važi i

$$(\exists y \in \mathrm{Ind})(P(y) \in b).$$

Dakle, $|b| \geqslant 2^{|y|} \geqslant 2^{\aleph_0}$, a kako je M tranzitivan, mora biti i $b \subseteq M$, odakle sledi da je M neprebrojiv.

4.2.4 Napomena Na osnovu prethodnog primera smo videli da, u opštem slučaju, prebrojivi skup M koji reflektuje neku rečenicu φ ne mora biti tranzitivan. Međutim, M je kao $\in$-model dobro zasnovan, pa na osnovu teoreme kolapsa dobijamo prebrojiv tranzitivan model koji reflektuje φ. Ovo je upravo i razlog što se bez umanjenja opštosti u dokazima nezavisnosti možemo ograničiti na prebrojive tranzitivne modele.

4.2.5 Posledica *Uz pretpostavku da je teorija* ZFC *neprotivrečna, teorija* ZFC *nije konačno aksiomatska.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, da postoji konačan skup formula T takav da je teorija T ekvivalentna sa ZFC. Tada je prema prethodnoj teoremi već u teoriji ZF dokazivo da postoji tranzitivan model M čiji je nosač skup, a koji reflektuje svaku aksiomu teorije T. Pošto je teorija T ekvivalentna sa ZFC, isti iskaz je dokaziv i u teoriji T. Svaka aksioma teorije T je dokaziva u teoriji T kao aksioma. Stoga je u teoriji T dokazivo da postoji model teorije T (zahvaljujući tome što teorija T ima konačan broj aksioma), pa samim tim i da je teorija T neprotivrečna. Prema Gödelovim teoremama nepotpunosti znači da je teorija T, pa samim tim i njoj ekvivalentna teorija ZFC protivrečna.

$\square$

Istaknimo da važi i jači rezultat: ukoliko je neprotivrečna, teorija ZFC nema Σ_n-aksiomatizaciju. Ovo je posledica teoreme refleksije i činjenice da je predikat

"postoji skup M koji je model svih Σ_n-instanci teorije ZFC"

predstavljiv u ZFC.

Neka je T neko rekurzivno proširenje teorije ZF i neka je rečenica ϕ teorema teorije T. Da bi konstruisali model M rečenice ϕ (tj. skup M koji reflektuje ϕ), dovoljno je da M reflektuje onih konačno mnogo aksioma teorije T koje se koriste u dokazu za ϕ. Umesto da za svaku konkretnu rečenicu ϕ eksplicitno navodimo aksiome teorije T koje M treba da reflektuje, mi ćemo koristiti frazu

"M reflektuje sve na vidiku".

4.3 Gödelove operacije

Kao što smo u uvodu u ovo poglavlje istakli, Gödelove operacije ćemo koristiti u formalizaciji predikata

"$x \subseteq A$ je definabilan sa parametrima u modelu $\langle A, \in \rangle$".

Tranzitivna klasa $\mathtt{M}$ je apsolutna za shemu separacije ukoliko za svaku formulu $\varphi(x, z, \bar{y})$ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ važi

$$(\forall z, \bar{y} \in \mathtt{M})(\{x \mid x \in z \wedge \varphi^{\mathtt{M}}(x, z, \bar{y})\} \in \mathtt{M}).$$

Drugim rečima, ako $a \in \mathtt{M}$, onda i svaki u $\langle a, \in \rangle$ definabilni podskup skupa a takođe pripada $\mathtt{M}$. Ispostavlja se da sledećih devet Gödelovih operacija ima važnu ulogu i u konstrukciji klasa apsolutnih za shemu separacije.

- $\mathcal{G}_1(x, y) = \{x, y\}$
- $\mathcal{G}_2(x, y) = x \times y$
- $\mathcal{G}_3(x, y) = \{\langle u, v \rangle \mid u \in x \wedge v \in y \wedge u \in v\}$
- $\mathcal{G}_4(x, y) = x \setminus y$
- $\mathcal{G}_5(x) = \bigcup x$
- $\mathcal{G}_6(x) = \mathrm{dom}(x)$

- $\mathcal{G}_7(x) = \{\langle u, v\rangle \mid \langle v, u\rangle \in x\}$
- $\mathcal{G}_8(x) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle u, w, v\rangle \in x\}$
- $\mathcal{G}_9(x) = \{\langle u, v, w\rangle \mid \langle v, w, u\rangle \in x\}$.

Primetimo da važi:

- $\mathcal{G}_1(x, y) = \{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$
- $\mathcal{G}_2(x, y) = x \times y = \{z \mid (\exists u \in x)(\exists v \in y) z = \langle u, v\rangle\}$
- $\mathcal{G}_3(x, y) = \{z \mid (\exists u \in x)(\exists v \in y)(u \in v \wedge z = \langle u, v\rangle)\}$
- $\mathcal{G}_4(x, y) = x \setminus y = \{z \mid z \in x \wedge z \notin y\}$
- $\mathcal{G}_5(x) = \bigcup x = \{z \mid (\exists y \in x) z \in y\}$
- $\mathcal{G}_6(x) = \mathrm{dom}(x) = \{z \mid z \in \bigcup^2 x \wedge (\exists y \in \bigcup^2 x)(\langle z, y\rangle \in x)\}$
- $\mathcal{G}_7(x) = \{z \mid (\exists u, v \in \bigcup^2 x)(z = \langle u, v\rangle \wedge \langle v, u\rangle \in x)\}$
- $\mathcal{G}_8(x) = \{z \mid (\exists u, v \in \bigcup^4 x)(\exists w \in \bigcup^2 x)(z = \langle u, w, v\rangle \wedge \langle u, v, w\rangle \in x)\}$;
- $\mathcal{G}_9(x) = \{z \mid (\exists u, v \in \bigcup^4 x)(\exists w \in \bigcup^2 x)(z = \langle u, w, v\rangle \wedge \langle u, v, w\rangle \in x)\}$.

U ovom kontekstu, $\bigcup^2 x = \bigcup\bigcup x$ itd. Lako se proverava da su uočene operacije ZF-apsolutne za tranzitivne klase zatvorene za operaciju $\langle x, y\rangle \mapsto \{x, y\}$. Takođe,

$$x \cap y = x \setminus (x \setminus y) \ \text{ i } \ \mathrm{rng}(x) = \mathrm{dom}(\mathcal{G}_7(x)).$$

Za formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ neka je

$$S_\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \mid \bigwedge_{i=1}^{n}(x_i \in X_i) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

4.3.1 Lema *Neka je $n \geqslant 2$ proizvoljan prirodan broj i neka je $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Tada postoji kompozicija $\mathcal{G}$ Gödelovih operacija takva da*

$$ZF \vdash \forall X_1 \ldots \forall X_n (S_{x_i \in x_j}(X_1, \ldots, X_n) = \mathcal{G}(X_1, \ldots, X_n)).$$

Dokaz

Ako je $i = j$, onda je $S_{x_i \in x_j}(\bar{X}) = 0$, pa možemo uzeti da je

$$\mathcal{G}(\bar{X}) = X_1 \setminus X_1.$$

Neka je $i \neq j$. Dokaz teoreme izvodimo potpunom indukcijom po n. Ako je $n = 2$, onda imamo sledeća dva slučaja:

- $S_{x_1 \in x_2}(X_1, X_2) = \mathcal{G}_3(X_1, X_2)$;
- $S_{x_2 \in x_1}(X_1, X_2) = \mathcal{G}_7(\mathcal{G}_3(X_2, X_1))$.

Neka je $n > 2$. Razlikujemo sledeća četiri podslučaja:

1. $S_{x_{n-1} \in x_n}(\bar{X}) = \mathcal{G}_9\mathcal{G}_7(X_1 \times \cdots \times X_{n-2} \times \mathcal{G}_3(X_{n-1}, X_n))$;
2. $S_{x_n \in x_{n-1}}(\bar{X}) = \mathcal{G}_9\mathcal{G}_7(X_1 \times \cdots \times X_{n-2} \times \mathcal{G}_7(\mathcal{G}_3(X_n, X_{n-1})))$
3. Neka je $i, j \neq n$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoji kompozicija Gödelovih operacija $\mathcal{G}$ takva da je

   $$S_{x_i \in x_j}(X_1, \ldots, X_{n-1}) = \mathcal{G}(X_1, \ldots, X_{n-1}).$$

   Tada je

   $$S_{x_i \in x_j}(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n) = \mathcal{G}(X_1, \ldots, X_{n-1}) \times X_n;$$

4. Neka je $i, j \neq n - 1$. Uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, postoji kompozicija Gödelovih operacija $\mathcal{G}$ takva da je

   $$S_{x_i \in x_j}(X_1, \ldots, X_{n-2}) = \mathcal{G}(X_1, \ldots, X_{n-2}, X_n).$$

   Tada je

   $$S_{x_i \in x_j}(\bar{X}) = \mathcal{G}_8(\mathcal{G}(X_1, \ldots, X_{n-2}, X_n) \times X_{n-1}).$$

□

4.3.2 Teorema *Neka je $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ proizvoljna Σ_0-formula jezika teorije skupova. Tada postoji kompozicija Gödelovih operacija $\mathcal{G}$ takva da*

$$ZF \vdash \forall X_1 \dots \forall X_n (S_\varphi(X_1, \dots, X_n) = \mathcal{G}(X_1, \dots, X_n)).$$

Dokaz

Teoremu dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Kako je zbog aksiome ekstenzionalnosti

$$S_{x_i = x_j}(\bar{X}) = S_{(\forall x \in x_i)(x \in x_j) \wedge (\forall x \in x_j)(x \in x_i)}(\bar{X}),$$

lema 4.3.1 u potpunosti pokriva slučaj atomičnih formula. Dalje, ako je

$$S_\varphi(\bar{X}) = \mathcal{G}(\bar{X}) \quad \text{i} \quad S_\psi(\bar{X}) = \mathcal{H}(\bar{X}),$$

onda je

$$S_{\neg\varphi}(\bar{X}) = (X_1 \times \dots \times X_n) \setminus \mathcal{G}(\bar{X}),$$

kao i

$$S_{\varphi \wedge \psi}(\bar{X}) = \mathcal{G}(\bar{X}) \cap \mathcal{H}(\bar{X}),$$

čime su pokrivene Booleovske kombinacije. Preostaje da se dokaže slučaj kada je formula φ oblika

$$\exists x (x \in x_i \wedge \psi(x_1, \dots, x_n)).$$

Po induktivnoj hipotezi je

$$S_{x \in x_i \wedge \psi(x_1, \dots, x_n)}(X_1, \dots, X_n, X) = \mathcal{G}(X_1, \dots, X_n, X).$$

Ako sa θ označimo formulu $x \in x_i \wedge \psi(\bar{x})$, onda je

$$\begin{aligned} S_\theta(\bar{X}, X) &= \{\langle \bar{x}, x \rangle \mid \bigwedge_{j=1}^{n} (x_j \in X_j) \wedge x \in X \wedge x \in x_i \wedge \psi(\bar{x})\} \\ &= \{\langle \bar{x}, x \rangle \mid \bigwedge_{j=1}^{n} (x_j \in X_j) \wedge x \in \bigcup X_i \wedge x \in x_i \wedge \psi(\bar{x})\} \\ &= S_\theta(\bar{X}, \bigcup X_i), \end{aligned}$$

pa mora biti

$$S_{x\in x_i\wedge\psi(x_1,\dots,x_n)}(X_1,\dots,X_n,X)=\mathcal{G}(X_1,\dots,X_n,\bigcup X_i).$$

Sada je $S_\varphi(\bar{X})=\operatorname{dom}(\mathcal{G}(\bar{X},\bigcup X_i))$. □

4.3.3 Posledica *Neka je* $\mathtt{M}$ *tranzitivna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Tada u* $\mathtt{M}$ *važi* Σ_0*-shema separacije, tj. svaka* Σ_0*-instanca sheme separacije je ZF-apsolutna za* $\mathtt{M}$.

Dokaz

Neka je $\varphi(x,y,z_1,\dots,z_n)$ Σ_0-formula i neka su skupovi $Y,\bar{Z}\in\mathtt{M}$ proizvoljni. Po prethodnoj teoremi postoji kompozicija Gödelovih operacija $\mathcal{G}$ takva da je skup

$$A=\{\langle x,Y\rangle\mid x\in Y\wedge Y\in\{Y\}\wedge\bigwedge_{i=1}^{n}Z_i\in\{Z_i\}\wedge\varphi(x,Y,\bar{Z})\}$$

jednak skupu $\mathcal{G}(Y,\bar{Z})$. Zbog zatvorenosti $\mathtt{M}$ za Gödelove operacije imamo da $A\in\mathtt{M}$. Konačno,

$$B=\{x\mid x\in Y\wedge\varphi(x,Y,\bar{Z})\}=\operatorname{dom}(A),$$

pa zbog zatvorenosti klase $\mathtt{M}$ za Gödelove operacije uočeni skup B pripada klasi $\mathtt{M}$, čime je tvrđenje dokazano. □

Za klasu $\mathtt{M}$ kažemo da je *skoro univerzalna* ako važi

$$(\forall x\subseteq\mathtt{M})(\exists y\in\mathtt{M})(x\subseteq y).$$

Naravno, u prethodnoj formuli promenljiva x je kvantifikovana, pa se ona odnosi na skupove. Primetimo da je svaka skoro univerzalna klasa prava klasa. Zaista, ako bi postojao skoro univerzalan skup X, onda bi zbog $X\subseteq X$ i skoro univerzalnosti postojao $x\in X$ tako da je $X\subseteq x$, što je u kontradikciji sa $\operatorname{rank}(x)<\operatorname{rank}(X)$.

Za proizvoljan skup X definišimo njegovo *zatvorenje za Gödelove operacije*, u oznaci $\operatorname{gcl}(X)$, rekurzivno na sledeći način:

- $\mathrm{gcl}_0(X) = X$
- $\mathrm{gcl}_{n+1} = \mathrm{gcl}_n(X) \cup \bigcup_{i=1}^{4} \{\mathcal{G}_i(x, y) \mid x, y \in \mathrm{gcl}_n(X)\}$
  $\cup \bigcup_{i=5}^{9} \{\mathcal{G}_i(x) \mid x \in \mathrm{gcl}_n(X)\}$
- $\mathrm{gcl}(X) = \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{gcl}_n(X)$.

4.3.4 Zadatak Neka je skup X tranzitivan. Dokazati da je tada i skup $\mathrm{gcl}(X)$ tranzitivan.

4.3.5 Lema *Neka je* $\mathtt{M}$ *tranzitivna skoro univerzalna klasa i neka je* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *formula jezika* $\mathcal{L}_{ZFC}$ *u kojoj se javlja tačno* m *neograničenih kvantora. Sa* $\varphi^*(\bar{x}, y_1, \ldots, y_m)$ *označimo formulu koja nastaje iz formule* φ *ograničavanjem svih kvantora na promenljive* y_i *(svaki neograničeni kvantor se ograničava jednom od promenljivih* y_i *i svaka od promenljivih* y_i *ograničava tačno jedan neograničeni kvantor). Tada za svaki skup* $X \in \mathtt{M}$ *postoje* $Y_1, \ldots, Y_m \in \mathtt{M}$ *takvi da važi*

$$\varphi^{\mathtt{M}}(a_1, \ldots, a_n)$$

ako i samo ako važi $\varphi^*(\bar{a}, \bar{Y})$*, za svaki izbor skupova* $a_1, \ldots, a_n \in X$*.*

Kao i mnogo puta do sada, u pitanju je shema teorema. Ovim zapravo tvrdimo da za datu formulu φ i tranzitivnu skoro univerzalnu klasu $\mathtt{M}$ važi

$$\mathrm{ZF} \vdash (\forall X \in \mathtt{M})(\exists \bar{Y} \in \mathtt{M})(\forall \bar{a} \in X)(\varphi^M(\bar{a}) \Leftrightarrow \varphi^*(\bar{a}, \bar{Y})).$$

Dokaz

Dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule. Ako je formula φ atomična, onda su formule φ^* i φ identične, pa tvrđenje trivijalno važi. Slučaj Booleovskih kombinacija se lako raspravlja, te prelazimo na slučaj kada je formula φ oblika

$$\exists x \psi(x, x_1, \ldots, x_n).$$

Na osnovu teoreme refeksije, postoji skup $A \supseteq X$ takav da

$$\langle A, \in\rangle \models (\exists x \in \mathtt{M})\psi^{\mathtt{M}}[x, a_1, \ldots, a_n]$$

ako i samo ako važi $(\exists x \in \mathtt{M})\psi^{\mathtt{M}}(x, a_1, \ldots, a_n)$, za svaki izbor elemenata $a_1, \ldots, a_n$ skupa X. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $A \subseteq \mathtt{M}$. Klasa $\mathtt{M}$ je skoro univerzalna, pa postoji $Y \in \mathtt{M}$ tako da je $A \subseteq Y$. Sada imamo da

$$\langle A, \in\rangle \models (\exists x \in \mathtt{M})\psi^{\mathtt{M}}[x, a_1, \ldots, a_n]$$

ako i samo ako važi

$$(\exists x \in Y)\psi^{\mathtt{M}}(x, a_1, \ldots, a_n),$$

za svaki izbor elemenata $a_1 \ldots, a_n$ skupa X. Odavde sledi i tvrđenje u potpunosti. $\square$

4.3.6 Lema *Neka je* $\mathtt{M}$ *tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Tada u* $\mathtt{M}$ *važi shema separacije.*

Dokaz

Direktno sledi iz posledice 4.3.3 i leme 4.3.5. $\square$

4.3.7 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Dokazati da klasa $\mathtt{M}$ sadrži sve ordinale.

Uputstvo

Neka je $\mathtt{A}$ klasa svih ordinala iz $\mathtt{M}$. Transfinitnom indukcijom pokazujemo da je $\mathtt{A} = \mathrm{Ord}$. Neka je ordinal $\alpha \subseteq \mathtt{A}$. Tada je po definiciji klase $\mathtt{A}$ ordinal α ujedno i podskup klase $\mathtt{M}$, pa iz skoro univerzalnosti klase $\mathtt{M}$ sledi da postoji skup $a \in \mathtt{M}$ takav da je $\alpha \subseteq a$. Kako u $\mathtt{M}$ važi shema separacije, skup

$$b = \{x \mid (x \in a)^{\mathtt{M}} \wedge (x \in \mathrm{Ord})^{\mathtt{M}}\}$$

pripada klasi $\mathtt{M}$. Pošto su formule $x_0 \in x_1$ i $x_0 \in \mathrm{Ord}$ apsolutne za tranzitivne klase,

$$b = \{x \mid x \in a \wedge x \in \mathrm{Ord}\}.$$

Dakle, b je skup ordinala, pa je $\beta = \bigcup b$ takođe ordinal. Zbog zatvorenosti klase $\mathtt{M}$ za Gödelove operacije imamo da $\beta \in \mathtt{M}$, a kako je $\alpha \subseteq b$, ili je $\alpha \in \beta$, ili je $\alpha = \beta$. U svakom slučaju $\alpha \in \mathtt{M}$. Sada na osnovu teoreme transfinitne indukcije sledi da je $\mathtt{A} = \mathrm{Ord}$. □

4.3.8 Zadtak Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Dokazati da u $\mathtt{M}$ važe aksiome beskonačnosti i partitivnog skupa.

Uputstvo

Na osnovu prethodnog zadatka, klasa Ord je sadržana u klasi $\mathtt{M}$, pa posebno $\omega \in \mathtt{M}$, odakle sledi da u $\mathtt{M}$ važi aksioma beskonačnosti.

Da bi dokazali da u $\mathtt{M}$ važi aksioma partitivnog skupa, treba pokazati da za svaki skup $a \in \mathtt{M}$ skup $P(a) \cap \mathtt{M}$ takođe pripada klasi $\mathtt{M}$. Neka je $a \in \mathtt{M}$ proizvoljan skup. Kako je $P(a) \cap \mathtt{M} \subseteq \mathtt{M}$, zbog skoro univerzalnosti klase $\mathtt{M}$ postoji skup $b \in \mathtt{M}$ takav da je $P(a) \cap \mathtt{M} \subseteq b$. U $\mathtt{M}$ važi shema separacije, pa skup

$$d = \{x \mid (x \in b)^{\mathtt{M}} \wedge (x \subseteq a)^{\mathtt{M}}\}$$

pripada klasi $\mathtt{M}$. Kako su formule $x_0 \in x_1$ i $x_0 \subseteq x_1$ apsolutne za tranzitivne klase, imamo da je

$$d = \{x \mid x \in b \wedge x \subseteq a\} = P(a) \cap \mathtt{M}.$$

□

4.3.9 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Dokazati da u $\mathtt{M}$ važi shema zamene.

Uputstvo

Ako je $F : \mathtt{M} \longrightarrow \mathtt{M}$ proizvoljna definabilna funkcija, treba pokazati da za svaki skup $X \in \mathtt{M}$ skup $F \upharpoonright X$ takođe pripada klasi $\mathtt{M}$. Slično kao i u prethodnim zadacima, koristiti skoro univerzalnost i apsolutnost sheme separacije. $\square$

Prethodna razmatranja sumirajmo sledećom shema teoremom teorije ZF:

4.3.10 Teorema *Neka je* $\mathtt{M}$ *tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Tada:*

- *U* $\mathtt{M}$ *važe sve aksiome teorije ZF;*
- *Klasa* $\mathtt{M}$ *sadrži sve ordinale.*

4.3.11 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije. Dokazati da je tada klasa $\mathtt{M}$ zatvorena i za operaciju $x \mapsto \mathrm{gcl}(x)$.

Uputstvo

S obzirom da je klasa $\mathtt{M}$ apsolutna za ZF i da je rečenica

$$\forall x \exists y (y = \mathrm{gcl}(x))$$

teorema teorije ZF (u konstrukciji $\mathrm{gcl}(x)$ se nigde ne koristi AC), njena relativizacija na $\mathtt{M}$ je takođe teorema. No to upravo znači da važi

$$(\forall x \in \mathtt{M})(\exists y \in \mathtt{M})(y = \mathrm{gcl}(x)),$$

odakle sledi zatvorenost klase $\mathtt{M}$ za operaciju $x \mapsto \mathrm{gcl}(x)$. $\square$

4.3.12 Definicija Operaciju $x \mapsto D(x)$ definišimo sa

$$D(x) = P(x) \cap \mathrm{gcl}(x \cup \{x\}).$$

Neka je A proizvoljan skup i neka je $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$. Tada se za proizvoljne elemente $a_1, \ldots, a_n$ skupa $A \cup \{A\}$ skup

$$B = \{x \mid x \in A \land \varphi^A(x, a_1, \ldots, a_n)\}$$

može predstaviti kao $\mathcal{G}(a_1, \ldots, a_n)$, pri čemu je $\mathcal{G}$ neka kompozicija Gödelovih operacija. Ovo upravo znači da $B \in D(A)$, odakle sledi da je $D(A)$ upravo skup svih definabilnih u $\langle A, \in\rangle$ podskupova skupa A.

Ono što nismo pokazali je da je svaka kompozicija Gödelovih operacija elemenata skupa $A \cup \{A\}$ takođe definabilna u $\langle A, \in\rangle$. No ovo je neposredna posledica definicije Gödelovih operacija.

4.3.13 Zadatak Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna klasa zatvorena za operaciju $\langle x, y\rangle \mapsto \{x, y\}$.

1. Dokazati da je $D_{\mathtt{M}}(x) = D(x) \cap \mathtt{M}$, $x \in \mathtt{M}$;

2. Ako je klasa $\mathtt{M}$ zatvorena za operaciju $x \mapsto \mathrm{gcl}(x)$, dokazati da je tada $\mathtt{M}$ apsolutna i za operaciju $x \mapsto D(x)$, tj. da je

$$D_{\mathtt{M}}(x) = D(x), \quad x \in \mathtt{M}.$$

Uputstvo

Razmotrimo samo drugi deo zadatka.

$$\begin{aligned} D_{\mathtt{M}}(x) &= D(x) \cap \mathtt{M} \\ &= (P(x) \cap \mathrm{gcl}(x \cup \{x\})) \cap \mathtt{M} \\ &= P(x) \cap (\mathrm{gcl}(x) \cap \mathtt{M}) \\ &= P(x) \cap \mathrm{gcl}(x) \\ &= D(x). \end{aligned}$$

Napomenimo da zbog pretpostavljene zatvorenosti klase $\mathtt{M}$ za operaciju gcl imamo da $\mathrm{gcl}(x) \in \mathtt{M}$, odakle iz tranzitivnosti $\mathtt{M}$ sledi da je $\mathrm{gcl}(x) \subseteq \mathtt{M}$, a time i $\mathrm{gcl}(x) \cap \mathtt{M} = \mathrm{gcl}(x)$. $\square$

Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi

4.3.14 Teorema *Neka je* $\mathtt{M}$ *neprazna tranzitivna klasa apsolutna za sledeće tri teoreme teorije ZF:*

- $\forall x \forall y \exists z (z = \{x, y\})$
- $\forall x \exists y (y = \mathrm{gcl}(x))$
- $\forall x \exists y (y = P(x))$.

Tada je klasa $\mathtt{M}$ *zatvorena za operaciju* $x \mapsto D(x)$.

4.4 Ordinalna definabilnost

Klasa OD ordinalno definabilnih skupova, kao i klasa HOD nasledno ordinalnih skupova, nemaju direktne veze sa Gödelovim dokazima relativne konsistentnosti aksiome izbora i generalisane kontinuum hipoteze. Međutim, ovde ih navodimo iz razloga što su one ipak nezaobilazni primeri unutrašnjih modela. Takođe, u njihovoj konstrukciji se koristi definabilnost - koncept koji je dominantan u Gödelovom metodu.

Za skup a kažemo da je *ordinalno definabilan* ako postoje formula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ i ordinali $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takvi da je

$$a = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}.$$

4.4.1 Primer Svaki ordinal α je ordinalno definabilan jer je

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \alpha \mid x \in \alpha\} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

4.4.2 Primer Pokažimo da je svaki od skupova V_α ordinalno definabilan. Koristimo transfinitnu indukciju po Ord. Kako je

$$V_0 = 0 = \{x \mid x \in 0\},$$

V_0 je ordinalno definabilan. Ako je

$$V_\alpha = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\},$$

onda je

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha) = \{x \mid \exists y(\forall z(z \in y \Leftrightarrow \varphi(z, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \land x \subseteq y)\},$$

tj. i $V_{\alpha+1}$ je ordinalno definabilan. Konačno, neka je $\alpha > 0$ granični ordinal. Ako sa $\varphi(x, \alpha)$ označimo formulu

$$\begin{aligned}\exists f \quad (\quad & \mathrm{Fun(f)} \land \mathrm{dom}(f) = \alpha \land f(0) = 0 \\ & \land (\forall \xi < \alpha)(f(\xi + 1) = P(f(\xi))) \\ & \land (\forall \beta < \alpha)(\bigcup \beta = \beta \Rightarrow f(\beta) = \bigcup_{\xi < \beta} f(\xi)) \\ & \land (\exists \xi < \alpha)(x \in f(\xi)) \quad),\end{aligned}$$

onda je

$$V_\alpha = \{x \mid \varphi(x, \alpha)\},$$

odakle sledi ordinalna definabilnost skupa V_α.

Neka je a proizvoljan ordinalno definabilan skup, tj. neka je

$$a = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}.$$

Po teoremi refleksije, postoji ordinal α takav da je

$$a = \{x \mid x \in V_\alpha \land \varphi^{V_\alpha}(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\}.$$

Kako je još i svaki ordinal β Σ_0-definabilan preko skupova V_β ($\beta = \{x \mid x \in V_\beta \land x \in \mathrm{Ord}\}$), ordinalno definabilni skupovi su upravo kompozicije Gödelovih operacija primenjene na skupove V_β. Odavde sledi da su elementi klase OD definisane sa

$$x \in \mathrm{OD} \Leftrightarrow \exists \alpha(x \in \mathrm{gcl}(\{V_\beta \mid \beta < \alpha\}))$$

upravo svi ordinalno definabilni skupovi.

U opštem slučaju klasa OD nije tranzitivna, o čemu govori sledeća lema.

4.4.3 Lema *Klasa OD je tranzitivna ako i samo ako je* $\mathrm{OD} = V$.

Dokaz

Ako je $\mathrm{OD} = V$, onda je očigledno klasa OD tranzitivna, pa preostaje da pokažemo obratnu implikaciju. Neka je klasa OD tranzitivna. Kako svaki od skupova V_α pripada OD, iz tranzitivnosti klase OD sledi da je svaki od skupova V_α podskup klase OD, pa mora biti $\mathrm{OD} = V$. □

Za skup x kažemo da je *nasledno ordinalno definabilan*, u oznaci $x \in \mathrm{HOD}$, ako $x \in \mathrm{OD}$ i $\mathrm{tc}(x) \subseteq \mathrm{OD}$. Iz definicije klase HOD neposredno sledi da je ona tranzitivna. Kako

$$V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$$

za svaki ordinal α, klasa HOD je i skoro univerzalna. Dakle, HOD je tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije, pa je apsolutna za ZF.

Što se tiče međusobnih odnosa klasa HOD, OD i V, napomenimo da je svaka od sledećih situacija moguća:

- $\mathrm{HOD} \subset \mathrm{OD} \subset V$;
- $\mathrm{HOD} \subset \mathrm{OD} = V$;
- $\mathrm{HOD} = \mathrm{OD} = V$.

4.5 Konstruktibilni skupovi

Gödelov *konstruktibilni univerzum* L definišemo transfinitnom rekurzijom po Ord na sledeći način:

- $L_0 = 0$;
- $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$;

- $L_\alpha = \bigcup\limits_{\beta\in\alpha} L_\beta$, u slučaju kada je α granični ordinal.

Posebno,

$$x \in L \Leftrightarrow_{\text{def}} \exists\alpha(x \in L_\alpha).$$

4.5.1 Teorema *Klasa L svih konstruktibilnih skupova je tranzitivna, skoro univerzalna i zatvorena za Gödelove operacije. Posebno, ako je $\mathtt{M}$ proizvoljna tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije, onda je $L \subseteq \mathtt{M}$.*

Dokaz

Tranzitivnost neposredno sledi iz definicije klase L i činjenice da je za tranzitivan skup x skup $D(x)$ takođe tranzitivan.

Što se tiče skoro univerzalnosti, prvo primetimo da za svaki ordinal α imamo da $L_\alpha \in L$, kao i da iz $\alpha < \beta$ sledi da $L_\alpha \in L_\beta$.

Neka je $X \subseteq L$. Tada za svako $x \in X$ postoji ordinal α_x takav da $x \in L_{\alpha_x}$. Neka je $\alpha = \bigcup\limits_{x\in X} \alpha_x$. Sada imamo da je $X \subseteq L_\alpha$ i da $L_\alpha \in L$, odakle sledi skoro univerzalnost.

Zatvorenost klase L za Gödelove operacije je direktna posledica njihove definicije.

Ako $x, y \in L_\alpha$, onda $\mathcal{G}_i(x, y), \mathcal{G}_5(x) \in D(L_\alpha)$, pa imamo zatvorenost L za prvih pet Gödelovih operacija. Ako je α ordinal takav da skupovi $x, \bigcup^2 x, \bigcup^4 x \in L_\alpha$, onda i $\mathcal{G}_i(x) \in D(L_\alpha)$, pa imamo zatvorenost L i za preostale četiri Gödelove operacije.

Ostaje da pokažemo poslednji deo tvrđenja. Neka je $\mathtt{M}$ proizvoljna tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije.

Ako $L_\alpha \in \mathtt{M}$, onda zbog zatvorenosti klase $\mathtt{M}$ za D imamo da je $L_{\alpha+1} = D(L_\alpha) \in \mathtt{M}$. Ako je $L_\alpha \subseteq \mathtt{M}$ (ordinal α je granični > 0), onda zbog apsolutnosti klase $\mathtt{M}$ za ZF važi

$$\{L_\beta \mid \beta \in \alpha\} \in \mathtt{M},$$

odakle iz istog razloga sledi da $L_\alpha = \bigcup\{L_\beta \mid \beta \in \alpha\} \in \mathtt{M}$. $\square$

Na osnovu prethodne teoreme neposredno sledi da je predikat

$$x \in L$$

apsolutan za tranzitivne skoro univerzalne klase zatvorene za Gödelove operacije. Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi

4.5.2 Teorema *Neka je Λ konjunkcija sledećih šest teorema teorije ZF:*

- $\forall x \forall y \exists z (z = \{x, y\})$
- $\forall x \exists y (y = \bigcup x)$
- $\forall x \exists y (y = P(x))$
- $\forall x \exists y (y = \mathrm{gcl}(x))$
- $\exists x (0 \in x \wedge (\forall y \in x)(y + 1 \in x))$
- $\forall \alpha \exists_1 f (\mathrm{Fun}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha + 1 \wedge f(0) = 0 \wedge (\forall \beta \in \alpha)(f(\beta + 1) = D(f(\beta))) \wedge (\forall \beta \in \alpha + 1)(\bigcup \beta = \beta \Rightarrow f(\beta) = \bigcup_{\gamma \in \beta} f(\gamma)))$.

Ako je klasa $\mathtt{M}$ *apsolutna za* Λ, *onda je*

$$(\forall x \in \mathtt{M})((x \in L)^{\mathtt{M}} \Rightarrow x \in L).$$

Sa $V = L$ označimo rečenicu

$$\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha) \ ,$$

a sa ZFL označimo teoriju ZF + $V = L$. Samu rečenicu $V = L$ zovemo i *aksiomom konstruktibilnosti*.

Na kraju ove sekcije razmotrimo relativnu konstruktibilnost. Neka je A proizvoljan skup i neka je M neprazan tranziivan skup. Definišimo skup $D_A(M)$ sa

$$D_A(M) = \mathrm{gcl}(M \cup \{M\} \cup (A \cap M)) \cap P(M).$$

Može se pokazati da je $D_A(M)$ ustvari skup svih podskupova od M definabilnih u modelu $\langle M, \in, A\rangle$.

Relativni konstruktibilni univerzum $L[A]$ definišemo na sledeći način:

- $L_0[A] = 0$;
- $L_{\alpha+1}[A] = D_A(L_\alpha[A])$;
- $L_\alpha[A] = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} L_\xi[A]$, za granični ordinal $\alpha > 0$;
- $x \in L[A] \Leftrightarrow \exists\alpha(x \in L_\alpha[A])$.

Slično kao i za L se pokazuje da je $L[A]$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije, pa je apsolutna za ZF. Napomenimo da postoji globalno dobro uređenje klase $L[A]$, odakle sledi da je klasa $L[A]$ apsolutna i za aksiomu izbora. Detalje ovog dokaza ćemo sprovesti u sledećoj sekciji u slučaju konstruktibilnog univerzuma L. Što se tiče GCH u $L[A]$, ona će važiti počevši od nekog ordinala α_A, tj. za svako $\alpha \geqslant \alpha_0$ će biti $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. U slučaju konstruktibilnog univerzuma L ($A = 0$) je $\alpha_A = 0$, što ćemo takođe pokazati u sledećoj sekciji.

4.6 Relativna konsistentnost AC i GCH

Neka je $\mathtt{M}$ tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije i neka je $\Gamma : \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ kanonska bijekcija. Iz dosadašnjih razmatranja neposredno sledi da je $\Gamma \subseteq \mathtt{M}$.

Dalje, neka je funkcija $\mathcal{J} : 10 \times \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ definisana sa

$$\mathcal{J}(n, \alpha, \beta) = 10 \cdot \Gamma(\alpha, \beta) + n.$$

Lako se proverava da je $\mathcal{J}$ bijekcija i da je $\mathcal{J} \subseteq \mathtt{M}$. Sada postoje jedinstvene definabilne funkcije $(\ )_1 : \mathrm{Ord} \longrightarrow 10$ i $(\ )_2, (\ )_3 : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ takve da je

$$\forall \alpha (\alpha = \mathcal{J}((\alpha)_1, (\alpha)_2, (\alpha)_3)).$$

Naravno, mora biti i $(\ )_1, (\ )_2, (\ )_3 \subseteq \mathtt{M}$.

Koristeći ove funkcije, pokazaćemo da se ceo konstruktibilni univerzum L može dobro urediti. Naime, važi sledeća Gödelova teorema:

4.6.1 Teorema[Gödel]

$$\mathrm{ZFL} \vdash \mathrm{AC}.$$

Dokaz

Pošto je L tranzitivna skoro univerzalna klasa zatvorena za Gödelove operacije, važi

$$\Gamma, \mathcal{J}, (\ )_1, (\ )_2, (\ )_3 \subseteq L.$$

Definišimo $\mathcal{L} : \mathrm{Ord} \longrightarrow L$ $\in$–rekurzijom na sledeći način:

$$\mathcal{L}(\alpha) = \begin{cases} L_{(\alpha)_2} & , \quad (\alpha)_1 = 0 \\ \mathcal{G}_{(\alpha)_1}(\mathcal{L}((\alpha)_2), \mathcal{L}((\alpha)_3)) & , \quad 1 \leqslant (\alpha)_1 \leqslant 4 \\ \mathcal{G}_{(\alpha)_1}(\mathcal{L}((\alpha)_2)) & , \quad (\alpha)_1 > 4 \end{cases}$$

Primetimo da je i $\mathcal{L} \subseteq L$. Dalje, iz definicije $\mathcal{L}$ neposredno sledi da je za svaki ordinal α

$$L_\alpha = \mathcal{L}(\mathcal{J}(0, \alpha, 0)).$$

Neka su $x, y, z \in L$ proizvoljni. Ako je $x = \mathcal{G}_i(y, z)$ i ako je $y = \mathcal{L}(\alpha)$ i $z = \mathcal{L}(\beta)$, onda je

$$x = \mathcal{L}(\mathcal{J}(i, \alpha, \beta)).$$

Ako je $x = \mathcal{G}_i(y)$ i $y = \mathcal{L}(\alpha)$, onda je

$$x = \mathcal{L}(\mathcal{J}(i, \alpha, 0)).$$

Odavde neposredno sledi da za proizvoljne konstruktibilne skupove $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$ i proizvoljnu kompoziciju Gödelovih operacija $\mathcal{G}$ konstruktibilni skup $x = \mathcal{G}(a_1, \ldots, a_n)$ takođe pripada $\mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$.

Neka je $L_\alpha \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$. Tada je i $L_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$. S obzirom da za svako $x \in L_{\alpha+1} = D(L_\alpha)$ postoje $a_1, \ldots, a_n \in L_{\alpha+1}$ i kompozicija Gödelovih operacija $\mathcal{G}$ tako da je

$$x = \mathcal{G}(a_1, \ldots, a_n),$$

na osnovu prethodnih razmatranja, sledi da je $L_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$.

Sada se transfinitnom indukcijom lako pokazuje da je za svaki ordinal α, $L_\alpha \subseteq \mathcal{L}[\mathrm{Ord}]$. Samim tim, $\mathcal{L}$ je "na".

Primetimo da je sa

$$x <_L y \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} \min\{\alpha \mid x = \mathcal{L}(\alpha)\} < \min\{\alpha \mid y = \mathcal{L}(\alpha)\}$$

dobro definisano dobro uređenje na L. Dakle, ako je $V = L$, onda imamo globalno dobro uređenje, odakle neposredno sledi AC. $\square$

4.6.2 Posledica

$$\mathrm{ZF} \vdash Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZFC}).$$

Dokaz

Ako je $\mathcal{M}$ proizvoljan model teorije ZF, onda je njegov konstruktibilni univerzum $L^{\mathcal{M}}$ model teorije ZFC, odakle neposredno sledi navedena relativna konsistentnost. $\square$

4.6.3 Teorema [Gödel]

$$\text{ZFL} \vdash \text{GCH}.$$

Dokaz

Neka je $V = L$. Treba pokazati da proizvoljan za $x \subseteq \omega_\lambda$ važi $x \in L_{\omega_{\lambda+1}}$. Naime, tada će zbog $|L_{\omega_{\lambda+1}}| = \aleph_{\lambda+1}$ biti $|P(\omega_\lambda)| = \aleph_{\lambda+1}$.

Neka je $x \subseteq \omega_\lambda$ proizvoljan. Iz aksiome konstruktibilnosti sledi da postoji ordinal β takav da $x \in L_\beta$. Na osnovu teoreme refleksije postoji skup A takav da važi:

1. Λ i aksioma ekstenzionalnosti su apsolutni za A
2. $\omega_\lambda \cup \{\beta, x\} \subseteq A$
3. $|A| = \aleph_\lambda$
4. $\beta \in \text{Ord}$ i $x \in L_\beta$ su apsolutni za A.

Po teoremi kolapsa, postoje jedinstveni tranzitivan skup M i izomorfizam $f : \langle A, \in \rangle \cong \langle M, \in \rangle$. Kako je ω_λ tranzitivan skup, to je $f|_{\omega_\lambda} = 1_{\omega_\lambda}$, pa mora biti $f(x) = x$.

Dalje, kako su ordinali apsolutni za tranzitivne modele, i $f(\beta)$ je ordinal (i u M i spolja). M je tranzitivan, pa je $f(\beta) \subseteq M$, a kako je $|M| = \aleph_\lambda$, to $f(\beta) \in \omega_{\lambda+1}$.

Rečenica Λ važi u M, pa su svi u M konstruktibilni skupovi zaista konstruktibilni (konstruktibilni i spolja), pa imamo da je

$$f(x) = x \in L_{f(\beta)},$$

odakle sledi $x \in L_{\omega_{\lambda+1}}$, čime je teorema dokazana. $\square$

Posebno, ako je $\mathtt{M}$ model teorije ZF, onda je njegov konstruktibilni univerzum $L^{\mathtt{M}}$ model teorije ZFC + GCH, odakle sledi relativna konsistentnost generalisane kontinuum hipoteze sa Zermelo-Fraenkelovom teorijom skupova, tj.

$$\text{ZF} \vdash \text{Con(ZF)} \Rightarrow \text{Con(ZFC + GCH)}.$$

4.7 $\diamondsuit$ u L

4.7.1 Definicija Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal. $\diamondsuit_\kappa$ je sledeća rečenica: postoji familija skupova $\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ sa sledećim svojstvima:

- $A_\alpha \subseteq \alpha$;
- za svaki podskup A kardinala κ skup $\{\alpha < \kappa \mid A \cap \alpha = A_\alpha\}$ je stacionaran u κ.

Posebno, $\diamondsuit_{\aleph_1}$ označavamo sa $\diamondsuit$.

4.7.2 Zadatak Dokazati da $\diamondsuit$ povlači CH.

Uputstvo

Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ $\diamondsuit$-familija i neka je $X \subseteq \omega$. Kako je skup $S = \{\alpha < \kappa \mid X \cap \alpha = A_\alpha\}$ stacionaran u ω_1 i kako je $\omega < \omega_1$, imamo da je $S \cap [\omega + 1, \kappa) \neq 0$. Neka je $\alpha_X = \min S \cap [\omega + 1, \omega_1)$. Sada je

$$X \cap \alpha_X = \alpha_X,$$

a kako je $\alpha_X > \omega$, mora biti i $\omega \subseteq \alpha_X$, odakle sledi da je $X \cap \alpha_X = X$. Dakle, svaki podskup od ω je neki od skupova A_α, pa imamo da je $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$. Kako po Cantorovoj teoremi važi i obratna nejednakost, imamo da važi CH. $\square$

4.7.3 Zadatak Dokazati da $ZFC \nvdash \diamondsuit$.

Uputstvo

Iskoristiti prethodni zadatak i činjenicu da $ZFC \nvdash CH$. $\square$

Kao ilustraciju međusobnog odnosa predikata $\diamondsuit_\kappa$ (variramo κ) bez dokaza navodimo sledeće dve činjenice:

- $ZFC + GCH \nvdash \diamondsuit$ (Jensen);
- $ZFC + GCH \vdash \diamondsuit_{\aleph_2}$.

Pokažimo da u L važi $\diamondsuit_\kappa$. Radi pojednostavljenja argumentacije, nadalje podrazumevamo da radimo u L. Parove $\langle A_\alpha, C_\alpha\rangle$, $\alpha < \kappa$ rekurzivno definišimo na sledeći način:

- Ako je α granični ordinal > 0, onda je $\langle A_\alpha, C_\alpha\rangle$ $<_{\text{lex}}$-najmanji (leksikografski poredak u odnosu na $<_L$) par podskupova A i C od α takvih da je C club (zatvoren i neograničen) u α i da je $A \cap \xi \neq A_\xi$ za svako $\xi < \alpha$, ukoliko takav par skupova postoji;
- U svim ostalim slučajevima neka je $\langle A_\alpha, C_\alpha\rangle = \langle 0, 0\rangle$.

Tvrdimo da je $\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ $\diamondsuit_\kappa$-familija. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $<_{\text{lex}}$-najmanji par $\langle A, C\rangle$ sa sledećim svojstvima:

1. $A \subseteq \kappa$;
2. C je club u κ;
3. $(\forall \alpha \in C)(A \cap \alpha \neq A_\alpha)$.

Na osnovu teoreme refleksije, postoji L_ξ sa sledećim svojstvima:

- $\langle L_\xi, \in\rangle \models \Lambda + V = L$;
- L_ξ reflektuje sve na vidiku. Posebno, $A, C, \kappa, \{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ pripadaju L_ξ, i u L_ξ važe gore navedena svojstva skupova A i C.

Na osnvou donje Lövenheim-Skolemove teoreme, postoji elementarni podmodel $\langle M, \in\rangle$ modela $\langle L_\xi, \in\rangle$ takav da:

- $|M| < \kappa$;
- $A, C, \kappa, \{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\} \in M$;
- $M \cap \kappa$ je ordinal $\lambda < \kappa$.

Sada je tranzitivni kolaps od M (tj. modela $\langle M, \in\rangle$ upravo L_η, za neko $\eta < \xi$ (sledi iz $M, L_\xi \models \Lambda + V = L$). Neka je $\pi : M \longrightarrow L_\xi$ jedinstveni $\in$-izomorfizam. Da bi izveli kontradikciju, dovoljno je da pokažemo sledeće:

(a) $\pi(\kappa) = \lambda$;

(b) $\pi(A) = A \cap \lambda = A_\lambda$;

(c) $\lambda \in C$.

Naime, (a), (b) i (c) direktno protivreče svojstvima 1–3.

(a): Kako $M \models \kappa \in \mathrm{Ord}$, to i $L_\eta \models \pi(\kappa) \in \mathrm{Ord}$, a kako je $\mathrm{Ord}^{L_\eta} = \mathrm{Ord} \cap L_\eta$ (apsolutnost predikata $x \in \mathrm{Ord}$ za tranzitivne klase), imamo da $\pi(\kappa) \in \mathrm{Ord}$. Kako je

$$\pi(\kappa) = \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in M \cap \kappa\} = \{\pi(\alpha) \mid \alpha < \lambda\},$$

imamo da je $\pi(\kappa) \cong \lambda$, pa zbog $\pi(\kappa) \in \mathrm{Ord}$ mora biti $\pi(\kappa) = \lambda$. Posebno, odavde sledi da je $\pi(\alpha) = \alpha$ za svako $\alpha < \lambda$.

(b), (c): Prvo ćemo pokazati da je $\pi(x) = x \cap \lambda$ za svako $x \in M \cap P(\kappa)$.

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in x \cap M\} \\ &= \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in (x \cap \kappa) \cap M\} \\ &= \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in x \cap (\kappa \cap M)\} \\ &= \{\pi(\alpha) \mid \alpha \in x \cap \lambda\} \\ &= \{\alpha \mid \alpha \in x \cap \lambda\} \\ &= x \cap \lambda. \end{aligned}$$

Posebno, $\pi(A_\alpha) = A_\alpha$ za $\alpha < \lambda$ i $\pi(\{A_\alpha \mid \alpha < \kappa\}) = \{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$.

Sada u L_ξ važi da je $\langle A \cap \lambda, C \cap \lambda\rangle <_{L_\xi}$ najmanji kontra primer za $\Diamond$-ost familije $\{A_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$. Međutim, $<_L$ i $<_{L_\xi}$ se poklapaju na L_ξ, pa po konstrukciji parova $\langle A_\alpha, C_\alpha\rangle$ mora biti $A_\lambda = A \cap \lambda$ i $C_\lambda = C \cap \lambda$, odakle neposredno slede (b) i (c).

4.8 Suslinova linija u L

Parcijalno uređenje $\langle T, \leqslant\rangle$ je *drvo* ako ima minimum i ako je za svako $x \in T$ interval $(\cdot, x)$ dobro uređen. *α-ti sloj* drveta T je skup

$$\mathrm{lev}(\alpha, T) = \{x \in T \mid \mathrm{ot}(\cdot, x) = \alpha\},$$

pri čemu je $\mathrm{ot}(\cdot, x)$ jedinstveni ordinal izomorfan sa $(\cdot, x)$. *Visina* drveta T, u oznaci $\mathrm{ht}(T)$ je najmanji ordinal α takav da je $\mathrm{lev}(\alpha, T) = 0$. *Antilanac* u drvetu T je svaki skup međusobno neuporedivih elemenata. *Grana* u drvetu T je proizvoljan maksimalni lanac. Za drvo T kažemo da je *totalno razgranato* ako za svako $x \in T$ interval $(x, \cdot)$ nije linearno uređen. Konačno, drvo T je *κ-drvo* ako je $\mathrm{ht}(T) = \kappa$ i za svako $\alpha < \kappa$ je $|\mathrm{lev}(\alpha, T)| < \kappa$.

4.8.1 Definicija Drvo T je *κ-Suslinovo drvo* ako je $|T| = \kappa$ i ako je svaki lanac i svaki antilanac drveta T kardinalnosti $< \kappa$.

4.8.2 Zadatak Neka je κ singularan kardinal. Dokazati da postoji κ-Suslinovo drvo.

Uputstvo

Neka je $\lambda = \mathrm{cf}\,\kappa < \kappa$ i neka je $\langle \alpha_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ strogo rastući niz kofinalan u κ. Drvo T definišimo na sledeći način:

- $T = \bigcup\limits_{\xi < \lambda} \{\langle x, \xi \rangle \mid x \in \alpha_\xi\}$;
- $\langle x, \xi \rangle \leqslant \langle y, \eta \rangle \Leftrightarrow \xi = \eta \wedge x \leqslant y$.

Dokazati da je T κ-Suslinovo drvo. □

Suslinova linija je gusto linearno uređenje bez krajeva $\langle S, \leqslant \rangle$ koje nije separabilno i u kome je svaka familija disjunktnih otvorenih intervala najviše prebrojiva. Suslinova linija je prirodno uopštenje realne linije $\langle \mathbb{R}, \leqslant \rangle$ koja je gusto linearno uređenje bez krajeva, povezano i separabilno u odnosu na topologiju čiju bazu čine otvoreni intervali.

4.8.3 Definicija *Suslinova hipoteza* SH je rečenica

“ne postoji Suslinova linija”.

Đuro Kurepa je uveo pojmove drveta, κ-Suslinovog i κ-Kurepinog drveta i dokazao da je SH ekvivalentna rečenici

$$\text{“ne postoji } \omega_1\text{-Suslinovo drvo”.}$$

Što se tiče međusobnog odnosa CH i SH, navedimo sledeće činjenice:

- (Jech, Tennenbaum) $Con(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZFC} + \neg SH \pm \mathrm{CH})$;
- (Tennenbaum, Solovay) $Con(\mathrm{ZFC}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZFC} + \mathrm{SH} + \neg\mathrm{CH})$;
- (Jensen) $\mathrm{ZF} \vdash V = L \Rightarrow \neg\mathrm{SH}$.

U nastavku ćemo pokazati da

$$\mathrm{ZFC} \vdash \Diamond \Rightarrow \text{“postoji } \omega_1\text{-Suslinovo drvo”},$$

odakle posebno sledi da u L važi negacija Suslinove hipoteze.

4.8.4 Zadatak Neka je T totalno razgranato ω_1-drvo u kome je svaki maksimalan antilanac najviše prebrojiv. Dokazati da je tada T ω_1-Suslinovo drvo.

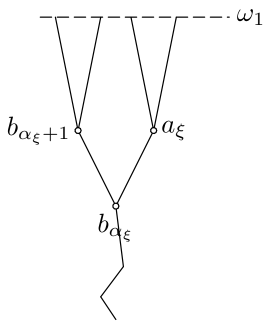
Uputstvo

Treba dokazati da drvo T nema neprebrojivu granu. Pretpostavimo suprotno, neka je $B = \langle b_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle$ grana drveta T, pri čemu $b_\alpha \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$. Kako je drvo T totalno razgranato, postoji podniz $\langle b_{\alpha_\xi} \mid \xi < \omega_1 \rangle$ od B takav da za svako b_{α_ξ} postoji $a_\xi \in \mathrm{lev}(\alpha_\xi + 1, T)$ tako da važi $b_{\alpha_\xi} \leqslant b_{\alpha_\xi+1},\ b_{\alpha_\xi} \leqslant a_\xi,\ a_\xi \not\leqslant b_{\alpha_\xi+1},\ b_{\alpha_\xi+1} \not\leqslant a_\xi$.

Kako je još i $(b_{\alpha_\xi+1}, \cdot) \cap (a_\xi, \cdot) = 0$, skup $A = \{a_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ je neprebrojivi antilanac u T; kontradikcija. $\square$

Sledeća dva zadatka se odnose na ekvivalentnost postojanja Suslinovog ω_1 drveta i Suslinove linije.

4.8.5 Zadatak Neka je $\langle T, \leqslant \rangle$ ω_1-Suslinovo drvo. Dokazati da tada postoji Suslinova linija.



4.1: drvo

Uputstvo

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da T nema maksimalnih elemenata. Neka je

$$S = \{X \subseteq T \mid \text{“}X \text{ je max lanac u } T\text{”}\}$$

i neka je $\preccurlyeq$ proizvoljno linearno uređenje na T. Za $X \in S$ ćemo sa $h(X)$ označavati visinu lanca X u T. Kako je T Suslinovo drvo, imamo da je $h(X) < \omega_1$, a iz dobre razgranatosti (T nema max elemenata) sledi da je $h(T)$ granični ordinal. Dalje, ako su X i Y međusobno različiti max lanci u T, onda postoji najmanji ordinal $\xi_{XY} < \omega_1$ takav da je

$$X_{\xi_{XY}} \neq Y_{\xi_{XY}},$$

pri čemu je $X = \langle X_\xi \mid \xi < h(X)\rangle$ i $Y = \langle Y_\eta \mid \eta < h(Y)\rangle$.

Na S definišemo uređenje $\leqslant_S$ na sledeći način:

$$X \leqslant_S Y \Leftrightarrow X_{\xi_{XY}} \preccurlyeq Y_{\xi_{XY}}.$$

Pokazati da je $\langle S, \leqslant_S\rangle$ Suslinova linija. $\square$

4.8.6 Zadatak Neka je $\langle S, \leqslant\rangle$ Suslinova linija. Dokazati da tada postoji ω_1-Suslinovo drvo.

Uputstvo

Videti teoremu 5.13 u [53]. □

4.8.7 Zadatak Neka je $T = \langle \omega_1, \leqslant_T \rangle$ ω_1-drvo i neka je

$$T_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} \operatorname{lev}(\xi, T).$$

Dokazati:

1. Skup $C = \{\alpha < \omega_1 \mid T_\alpha = \alpha\}$ je club u ω_1;

2. Ako je A maksimalan antilanac u T, onda je skup

$$D = \{\alpha < \omega_1 \mid T_\alpha = \alpha \ \wedge \ \text{“}A \cap T_\alpha \text{ je maks. antilanac u } T_\alpha\text{”}\}$$

club u ω_1.

Uputstvo

1. Zatvorenost skupa C je očigledna, pa ostaje da pokažemo neograničenost. Neka je $\mathcal{L} = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}$, pri čemu su $\mathtt{f}$ i $\mathtt{g}$ unarni funkcijski znaci. Model $\mathcal{M} = \langle \omega_1, f, g \rangle$ jezika $\mathcal{L}$ definišimo na sledeći način:

- $f(\xi) = \min\{\zeta < \omega_1 \mid \xi \in T_\zeta\}$;
- $g(\xi) = \sup\{\zeta < \omega_1 \mid \zeta \in \operatorname{lev}(\xi, T)\}$.

Neka je $\alpha_0 < \omega_1$ proizvoljno. Na osnovu donje LST teoreme, postoji prebrojivi elementarni podmodel $\mathcal{M}_0 = \langle M_0, f \restriction M_0, g \restriction M_0 \rangle$ modela $\mathcal{M}$ takav da je $\alpha_0 \subseteq M_0$. Neka je $\alpha_1 < \omega_1$ najmanji ordinal koji je strogi nadskup skupa a_0. Na osnovu donje LST, postoji prebrojiv elementarni podmodel $\mathcal{M}_1 = \langle M_1, f \restriction M_1, g \restriction M_1 \rangle$ modela $\mathcal{M}$ takav da je $\alpha_1 \subseteq M_1$. Nastavljajući ovaj postupak ω puta konstruišemo elementarni lanac $\langle \mathcal{M}_n \mid n < \omega \rangle$ takav da je

$$\alpha_0 \subseteq M_0 \subseteq \alpha_1 \subseteq M_1 \subseteq \alpha_2 \subseteq \cdots$$

Kako je $\bigcup\{\alpha_n \mid n < \omega\} = \bigcup\{M_n \mid n < \omega\} = \alpha$ i kako je unija elementarnog lanca elementarna ekstenzija svakog od članova lanca, model $\langle \alpha, f \upharpoonright \alpha, g \upharpoonright \alpha\rangle$ je ujedno i elementarni podmodel od $\mathcal{M}$. Pokažimo da je $\alpha = T_\alpha$. S jedne strane, za proizvoljno $\xi < \alpha$ zbog zatvorenosti α za f imamo da je i $f(\xi) < \alpha$, odakle sledi da

$$\xi \in T_{f(\xi)} \subseteq T_\alpha,$$

a time i $\alpha \subseteq T_\alpha$. S druge strane, za proizvoljno $\xi \in T_\alpha$ postoji $\zeta < \alpha$ tako da $\xi \in \mathrm{lev}(\zeta, T)$, odakle zbog zatvorenosti α za g imamo da

$$\xi \leqslant g(\zeta) < \alpha,$$

tj. $T_\alpha \subseteq \alpha$. Ovim smo pokazali da je skup C neograničen.

2. Skup D je očigledno zatvoren. Neograničenost skupa D se dokazuje modifikacijom dokaza neograničenosti skupa C. Jezik $\mathcal{L}$ iz prethodne stavke ćemo proširiti novim unarnim funkcijskim znakom `h`, koji ćemo u ω_1 interpretirati na sledeći način:

$$h(\xi) = \min_{\langle \omega_1, \in\rangle}\{\zeta \in \ A \mid \xi \leqslant_T \zeta \vee \zeta \leqslant_T \xi\}.$$

Na isti način kao malo pre pokazuje se da za svako $\beta < \omega_1$ postoji $\alpha < \omega_1$ tako da je $\beta < \alpha$ i da je ordinal α zatvoren za funkcije f, g i h. Iz zatvorenosti α za f i g sledi da je $\alpha = T_\alpha$, a iz zatvorenosti α za h sledi da je $A \cap \alpha = A \cap T_\alpha$ maksimalan antilanac u T_α. $\Box$

4.8.8 Lema *Neka je $T = \langle \omega_1, \leqslant_T\rangle$ totalno razgranato ω_1 drvo i neka je $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ $\Diamond$-familija. Ako za svaki granični ordinal $\alpha < \omega_1$ važi*

$$\varphi(\alpha, T_\alpha, A_\alpha) \Rightarrow (\forall x \in \mathrm{lev}(\alpha, T))(\exists y \in A_\alpha)(y \leqslant_T x), \tag{4.1}$$

pri čemu je $\varphi(\alpha, T_\alpha, A_\alpha)$ formula

$$\alpha = T_\alpha \wedge \text{“}A_\alpha \textit{ je maks. antilanac u } \alpha\text{”},$$

onda je T ω_1-Suslinovo drvo.

Dokaz

Na osnovu zadatka 4.8.4 dovoljno je pokazati da je svaki maksimalan antilanac drveta T prebrojiv. Na osnovu zadatka 4.8.7 skup

$$C = \{\alpha < \omega_1 \mid \bigcup \alpha = \alpha \wedge \alpha = T_\alpha \wedge \text{“}A \cap T_\alpha \text{ je maks. antilanac u } \alpha\text{”}\}$$

je club u ω_1. Kako je $S = \{\xi < \omega_1 \mid A \cap \xi = A_\xi\}$ stacionaran u ω_1 ($\{A_\xi \mid \xi < \omega_1\}$ je $\Diamond$-familija), $S \cap C$ je neprazan. Neka je $\alpha \in S \cap C$ proizvoljan ordinal. Tada važi $\varphi(\alpha, T_\alpha, A_\alpha)$, odakle zajedno sa (4.1) sledi da je $A = A_\alpha$, a time i $|A| < \aleph_1$. $\square$

Prelazimo na konstrukciju ω_1-Suslinovog drveta $T = \langle \omega_1, \leqslant_T \rangle$. Fiksirajmo $\Diamond$-familiju $\{A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$. Drvo T treba da zadovoljava sledeće uslove:

1. $|\mathrm{lev}(\alpha, T)| < \aleph_1$, $\alpha < \omega_1$;
2. T je totalno razgranato;
3. Za svaki $x \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$ i svako $\beta > \alpha$ ($\alpha, \beta < \omega_1$) postoji $y \in \mathrm{lev}(\beta, T)$ tako da je $x \leqslant_T y$;
4. Važi (4.1).

Uslovi 1–3 obezbeđuju da je T totalno razgranato ω_1-drvo, a uslov 4 obezbeđuje da je svaki maksimalan antilanac u T prebrojiv. Konstrukciju izvodimo rekurzivno na sledeći način:

- $T_0 = 0$;
- $T_1 = 1$;
- Ako je $\alpha > 0$ granični ordinal, onda je $T_\alpha = \bigcup\limits_{\xi < \alpha} T_\xi$;
- Pretpostavimo da smo konstruisali $T_{\alpha+1}$ tako da važe stavke 1–4. Drvo $T_{\alpha+2}$ konstruišemo tako što drvo $T_{\alpha+1}$ produžimo dodatnim slojem na sledeći način: svako x iz poslednjeg sloja drveta $T_{\alpha+1}$

(α-ti sloj drveta T) ima tačno dva neposredna $\leqslant_T$ sledbenika $y, z \in \omega_1$, pri čemu y i z biramo tako da budu $\in$-najmanji. Preciznije, ako je $\mathrm{lev}(\alpha, T) = \{x_n \mid n < \omega\}$, onda

$$y_n = \min(\omega_1 \setminus (T_{\alpha+1} \cup \{y_m, z_m \mid m < n\}))$$
$$z_n = \min(\omega_1 \setminus (T_{\alpha+1} \cup \{y_m, z_k \mid m \leqslant n, k < n\}))$$
$$x_n \leqslant_T y_n \text{ i } x_n \leqslant_T z_n$$
$$T_{\alpha+2} = T_{\alpha+1} \cup \{y_n, z_n \mid n < \omega\};$$

- Neka je $\alpha > 0$ granični ordinal i pretpostavimo da smo konstruisali drvo T_α tako da važe 1–4. Neka je $T_\alpha = \{x_n \mid n < \omega\}$ i neka je $y_n = \min(\omega_1 \setminus (T_\alpha \cup \{y_m \mid m < n\}))$. Na osnovu 3, za svako x_n postoji grana B_n drveta T_α takva da $x_n \in B_n$. Ukoliko je $\alpha = T_\alpha$ i A_α je maksimalan antilanac u T_α, onda na osnovu 4 granu B_n možemo izabrati tako da seče A_α. Sada drvo T_α produžujemo novim slojem na sledeći način:

$$T_{\alpha+1} = T_\alpha \cup \{y_n \mid n < \omega\};$$
$$x_n \leqslant_T y_m \Leftrightarrow x_n \in B_m.$$

Iz konstrukcije neposredno sledi da drvo T zadovoljava 1–4, odakle sledi da je T ω_1-Suslinovo drvo.

Zadaci

Zadaci 4.1–4.5 su posvećeni relativnoj konsistentnosti KH, odnosno sledećoj teoremi:

$$\mathrm{ZF} \vdash V = L \Rightarrow KH.$$

Prethodno definišimo kombinatorne principe $\Diamond^+$ i $\Diamond^-$.

$\Diamond^+$ je sledeći iskaz: Postoje skupovi $A_\alpha \in P(\alpha)$, $\alpha < \omega_1$, takvi da za svaki skup $A \subseteq \omega_1$ postoji club C u ω_1 sa sledećim svojstvima:

- $(\forall \alpha \in C)(A \cap \alpha \in A\alpha)$;

- $(\forall\alpha \in C)(C \cap \alpha \in A\alpha)$.

Niz $\langle A_\alpha \mid \alpha < \omega_1\rangle$ zovemo i $\Diamond^+$-nizom.

$\Diamond^-$ je sledeći iskaz: Postoje skupovi $A_\alpha \in P(\alpha)$, $\alpha < \omega_1$, takvi da za svaki skup $A \subseteq \omega_1$, skup

$$\{\alpha < \omega_1 \mid A \cap \alpha \in A_\alpha\}$$

je stacionaran.

4.1 Dokazati da $\Diamond^+$ implicira da postoji familija $F \subseteq P(\omega_1)$ sa sledećim svojstvima:

1. $(\forall\alpha < \omega_1)|\{x \cap \alpha \mid x \in F\}| \leqslant \aleph_0$;
2. $(\forall A \subseteq \omega_1)(|A| = \aleph_1 \Rightarrow (\exists x \in F)(|x| = \aleph_1 \wedge x \subseteq A))$.

4.2 Dokazati da $\Diamond^+$ povlači postojanje $\aleph_1$-Kurepinog drveta koje ima $2^{\aleph_1}$ grana.

4.3 Dokazati da $\Diamond^+ \Rightarrow \Diamond^-$, kao i da $\Diamond^- \Rightarrow \Diamond$.

4.4 Dokazati da je skup

$$\{\xi < \omega_1 \mid L_\xi \prec L_{\omega_1}\}$$

neograničen u ω_1, pri čemu je $L_\xi \prec L_{\omega_1}$ zamena za "$\langle L_\xi, \in\rangle$ je elementarni podmodel od $\langle L_{\omega_1}, \in\rangle$".

4.5 Dokazati da $V = L$ povlači $\Diamond^+$.

Uputstvo

Videti dokaz teoreme 5.2 u [53]. $\square$

5

Forsing

Prekretnicu u istoriji teorije skupova predstavlja 1963. godina, kada Paul Cohen uvodi metodu forsinga i njom dokazuje nezavisnost kontinuum hipoteze, a kombinacijom forsinga i metode unutrašnjih modela dokazuje i nezavisnost aksiome izbora. Obilje izuzetnih rezultata koji se dobijaju forsingom i u današnje vreme najbolje svedoči o značaju ove metode. Četrdesetogodišnji burni razvoj onemogućuje prezentaciju svih aspekata forsinga na jednom mestu. Mi smo se ovde odlučili za detaljan prikaz samih osnova, pre svega vođeni predavanjima Roberta Solovaya, Jacka Silvera, Kennetha Kunena i drugih, kao i originalnim radovima i drugim izvorima.

Šta je ustvari forsing? Ukratko, to je tehnika kojom se, polazeći od prebrojivog tranzitivnog modela M teorije T (T je neka teorija jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$) i skupa $G \notin M$, konstruiše model $M[G]$ sa sledećim svojstvima:

- $M[G] \models T$;
- $M[G]$ je prebrojiv i tranzitivan;
- $M \subseteq M[G]$ i $G \in M[G]$;
- M i $M[G]$ imaju iste ordinale, tj. istu visinu;

- predikat “$M \models \varphi$” je odlučiv u M;
- $M[G]$ je u odnosu na inkluziju najmanji model sa prethodnim svojstvima.

Ovde kao gratis (bez obzira na G) dobijamo dokaz nezavisnosti aksiome konstruktibilnosti $V = L$ i teorije ZF. S jedne strane, metodom unutrašnjih modela smo pokazali da

$$\mathrm{ZF} \vdash Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + V = L)$$

(Gödelov konstruktibilni univerzum). S druge strane, primenjujući forsing, ako je T teorija $\mathrm{ZF} + V = L$, onda je $M = L_\alpha$ za neki granični prebrojivi ordinal α. Odavde će slediti da je

$$M = L^M = L^{M[G]} = L_\alpha,$$

pa kako $G \in M[G] \setminus M$, imamo da

$$M[G] \models \neg(V = L).$$

Da li odavde sledi da

$$Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + V \neq L)?$$

Prividno ne, jer je, u opštem slučaju, pretpostavka o egzistenciji tranzitivnog modela jača od pretpostavke o egzistencij bilo kakvog modela, pa, makar i samo teoretski, postoji mogućnost da su svi modeli teorije ZF loše zasnovani (svaki dobro zasnovan se može “kolapsirati” do tranzitivnog). Međutim, da bismo (ZF sredstvima) dokazali da

$$Con(\mathrm{ZF}) \Rightarrow Con(\mathrm{ZF} + V \neq L),$$

dovoljno je da za svaku konačnu podteoriju T teorije ZF pokažemo da

$$Con(T) \Rightarrow Con(T + V \neq L).$$

Ovo dokazujemo na sledeći način:

Neka je $\langle \mathcal{M}, E \rangle$ proizvoljan model teorije ZF. U $\langle \mathcal{M}, E \rangle$ važi teorema refleksije, pa postoji $M \in \mathcal{M}$ tako da

$$\langle \mathcal{M}, E \rangle \models \text{“}M \text{ je prebrojiv tranzitivan model teorije } T\text{”}.$$

Primenom forsinga u $\langle \mathcal{M}, E \rangle$ dobijamo $M[G] \in \mathcal{M}$ tako da

$$\langle \mathcal{M}, E \rangle \models \text{“}M[G] \text{ je prebrojiv tranzitivan model teorije } T + V \neq L\text{”},$$

čime je dokaz završen.

Važno je istaći da skup G nije baš sasvim proizvoljan. O tome šta sve mora da zadovoljava skup G i kako se do njega dolazi ćemo detaljno govoriti u sekcijama koje slede.

Kako izgleda forsing konstrukcija? Detaljno ćemo izložiti dva pristupa: pristup preko separativnih uređenja, i pristup preko Booleovski vrednosnih modela, koji su uveli Dana Scott i Robert Solovay 1964. godine. U BVM (Booloevsko vrednosni modeli) pristupu, forsing plan izgleda ovako:

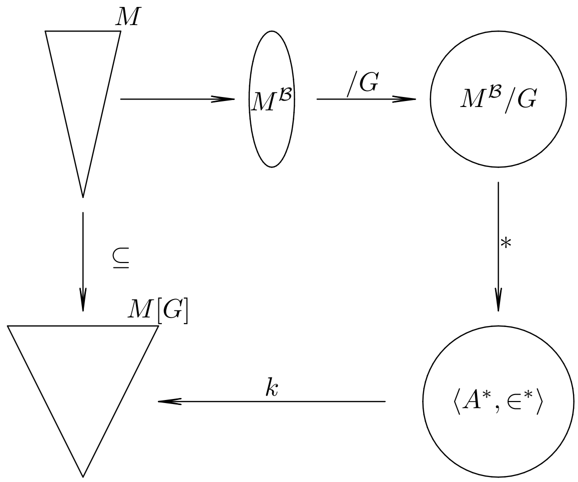
Dakle, polazimo od prebrojivog modela M npr. teorije ZFC i u njemu kompletne bezatomične Booleove algebre $\mathcal{B}$. U njemu konstruišemo unutrašnji $\mathcal{B}$-model $M^{\mathcal{B}}$. Zatim izaberemo proizvoljan tzv. M-generički ultrafilter G u $\mathcal{B}$, i pomoću njega dobijemo $\mathbf{2}$-model $M^{\mathcal{B}}/G$:

$$\|\varphi\|_{\mathbf{2}} = \begin{cases} \mathbf{1} & , \quad \|\varphi\| \in G \\ \mathbf{0} & , \quad \|\varphi\| \notin G \end{cases}$$

za proizvoljnu rečenicu φ. Na primer, u dokazu nezavisnosti CH ćemo izabrati $\mathcal{B}$ tako da $\|\neg\mathrm{CH}\| \in G$ za svaki tzv. M-generički ultrafilter G. Dalje, $\langle A^*, \in^* \rangle$ je klasičan dobro zasnovan model koji se dobija od $M^{\mathcal{B}}/G$. Njegov tranzitivni kolaps je $M[G]$. Na osnovu teorije Booleovsko vrednosnih modela imamo da

$$M[G] \models \varphi \quad \text{akko} \quad \|\varphi\| \in G,$$

kao i da svaka valjana formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$ ima Booleovsku vrednost $\mathbf{1}$. Mi ćemo konstruisati $M^{\mathcal{B}}$ tako da svaka aksioma teorije ZFC ima Booleovsku vrednsot $\mathbf{1}$ bez obzira na izbor Booleove algebre $\mathcal{B}$.



5.1: Forsing plan

5.1 Separativna uređenja

5.1.1 Definicija Neka je $\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle$ proizvoljno parcijalno uređenje.

- $U \subseteq \mathcal{P}$ je *rez* ako za svako $p \in U$ važi $(\cdot, p] \subseteq U$;
- Rez $U \subseteq \mathcal{P}$ je *regularan* ako za svako $p \in \mathcal{P} \setminus U$ postoji $q \leqslant p$ tako da je $(\cdot, q] \cap U = 0$;
- Neka uređenje $\mathcal{P}$ nema minimalnih elemenata. Za $p, q \in \mathcal{P}$ kažemo da su *kompatibilni* ako je

$$(\cdot, p] \cap (\cdot, q] \neq 0.$$

  U suprotnom za p i q kažemo da su *inkompatibilni*, u oznaci $p \perp q$. Posebno, ako je $\mathcal{P}$ bezatomična Booleova algebra, onda za $a, b \in \mathcal{B}$ kažemo da su inkompatibilni ukoliko je $(\cdot, a] \cap (\cdot, b] = \{\mathbf{0}\}$;

- $p, q \in \mathcal{P}$ su *kompatibilni preko* $G \subseteq \mathcal{P}$ ukoliko je
$$G \cap (\cdot, p] \cap (\cdot, q] \neq 0;$$
- $G \subseteq \mathcal{P}$ je *kompatibilan* ukoliko su svaka dva njegova elementa međusobno kompatibilna;
- $\mathcal{P}$ je *separativno* ako za proizvoljne $p, q \in \mathcal{P}$ važi
$$p \nleqslant q \Rightarrow (\exists r \leqslant p) r \perp q;$$
- $D \subseteq \mathcal{P}$ je *gust* ako za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji $q \in D$ tako da je $q \leqslant p$;
- $D \subseteq \mathcal{P}$ je *gust ispod* $p \in \mathcal{P}$ ako je skup $D \cap (\cdot, p]$ gust u $(\cdot, p]$;
- $D \subseteq \mathcal{P}$ je *predgust* ako za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji $q \in D$ kompatibilno sa p.

5.1.2 Lema *Neka je uređenje $\mathcal{P}$ separativno. Tada važi:*

1. *Familija $X = \{(\cdot, p] \mid p \in \mathcal{P}\}$ je baza neke topologije na $\mathcal{P}$;*
2. *$(\cdot, p]$ je regularan rez za svako $p \in \mathcal{P}$;*
3. *U je regularno otvoren u topologiji generisanoj familijom X ako i samo ako je regularan rez.*

Dokaz

Kako je prva stavka očigledna a druga direktna posledica definicije separativnosti, preostaje da dokažemo poslednju stavku.

$\Leftarrow$: Neka je U regularan rez i neka $p \notin U$. Tada postoji $q \leqslant p$ tako da je $(\cdot, q] \cap U = 0$. Odavde je, $q \notin \mathrm{cl}U$, a time i $(\cdot, p] \nsubseteq \mathrm{cl}U$, pa $p \notin \mathrm{int}\ \mathrm{cl}U$. Dakle, U je regularno otvoren.

$\Rightarrow$: Neka rez U nije regularan. Tada postoji $p \notin U$ tako da
$$(\cdot, q] \cap U \neq 0$$
za svako $q < p$. Odavde sledi da je $(\cdot, p] \subseteq \mathrm{cl}U$, pa $p \in \mathrm{int}\ \mathrm{cl}U$. Dakle, U nije regularno otvoren. □

5.1.3 Lema *Neka je $\mathcal{P}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata gusto u kompletnim Booleovim algebrama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Tada su algebre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ izomorfne.*

Dokaz

Treba pokazati da je odgovarajući izomorfizam korektno definisan sa

$$f(x) = \sum_{\mathcal{B}'} \{p \in \mathcal{P} \mid p \leqslant_1 x\}, \quad x \in \mathcal{B}.$$

Ključni korak je dokaz sledećeg pomoćnog tvrđenja:

$$(\forall x \in \mathcal{B})(p \leqslant_1 x \Leftrightarrow p \leqslant_2 f(x)).$$

Neka je $x \in \mathcal{B}$ proizvoljno i neka x nije minimalni element. S obzirom na definiciju $f(x)$, to očigledno za svako $p \in \mathcal{P}$ važi

$$p \leqslant_1 x \Rightarrow p \leqslant_2 f(x).$$

Neka je $p \in \mathcal{P}$ i neka $p \not\leqslant_1 x$. Pošto je svaka Booleova algebra separativno uređenje, postoji $\mathbf{0} <_1 q \leqslant_1 p$ inkompatibilno sa x. Pošto je $\mathcal{P}$ gust u $\mathcal{B}$, možemo pretpostaviti da $q \in \mathcal{P}$. Sada je

$$q \wedge f(x) = q \sum_{\mathcal{B}'} \{r \in \mathcal{P} \mid r \leqslant_1 x\} = \sum_{\mathcal{B}'} \{q \wedge r \mid r \leqslant_1 x \wedge r \in \mathcal{P}\}.$$

Ako je $\mathbf{0} <_2 q \wedge r$, onda bi zbog gustine $\mathcal{P}$ u $\mathcal{B}'$ postojalo $s \in \mathcal{P}$ tako da je

$$s \leqslant_2 q \quad \text{i} \quad s \leqslant_2 r\ ,$$

pa bi bilo i

$$s \leqslant_1 q \quad \text{i} \quad s \leqslant_1 r\ ,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da su q i x inkompatibilni. Dakle,

$$q \wedge f(x) = \sum_{\mathcal{B}'} \{q \wedge r \mid r \leqslant_1 x \wedge r \in \mathcal{P}\} = \mathbf{0},$$

pa ne može biti $p \leqslant_2 f(x)$. $\square$

Direktna posledica prethodne dve leme je sledeća

5.1.4 Teorema *Za svako separativno uređenje postoji do na izomorfizam jedinstvena kompletna Booleova algebra u koju se ono gusto utapa.*

Posebno, jedinstvenu kompletnu Booleovu algebru u koju se separativno uređenje $\mathcal{P}$ gusto utapa označavaćemo sa r.o.$\mathcal{P}$.

Nadalje ćemo podrazumevati da radimo isključivo sa separativnim uređenjima bez minimalnih elemenata sa maksimumom, koji ćemo uniformno označavati sa $\mathbf{1}$. Navedimo nekoliko važnih primera ovakvih uređenja.

5.1.5 Primer Neka je κ beskonačan kardinal i neka je $Fn(\kappa \times \omega, 2)$ skup svih funkcija čiji je domen konačan podskup od $\kappa \times \omega$ i čiji je kodomen podskup od 2. Tada je

$$\langle Fn(\kappa \times \omega, 2), \supseteq \rangle$$

separativno uređenje bez minimalnih elemenata, čiji je maksimum 0. Primetimo da su $p, q \in Fn(\kappa \times \omega, 2)$ inkompatibilni ako i samo ako postoji $x \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ tako da je $p(x) \neq q(x)$.

5.1.6 Primer Neka je κ beskonačan kardinal i neka je $coll(\kappa, \omega)$ skup svih funkcija p čiji je domen konačan podskup od $\kappa \times \omega$ takvih da za svako $\langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{dom}(p)$ važi da $p(\alpha, n) \in \alpha$. Tada je

$$\langle coll(\kappa, \omega) \supseteq \rangle$$

separativno uređenje bez minimalnih elemenata čiji je maksimum 0.

5.2 Definicija forsinga

Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC i neka je

$$\mathcal{P} = \langle \mathcal{P}, \leqslant, \mathbf{1} \rangle \in M$$

separativno uređenje bez minimalnih elemenata sa maksimumom **1**. Elemente uređenja $\mathcal{P}$ ćemo zvati *uslovima* i označavati ih sa p, q, r, s i t, uz korišćenje indeksa. Za uslov p kažemo da je *jači* od uslova q ukoliko je $p \leqslant q$. Klasu (u M) $\mathcal{P}$*-imena* $M^{\mathcal{P}}$ definišemo rekurzivno na sledeći način:

- $M_0^{\mathcal{P}} = 0$;
- $M_{\alpha+1}^{\mathcal{P}} = M_\alpha^{\mathcal{P}} \cup (M \cap P(M_\alpha^{\mathcal{P}} \times \mathcal{P}))$;
- $M_\alpha^{\mathcal{P}} = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} M_\xi^{\mathcal{P}}$, u slučaju graničnog $\alpha \in M$;
- $x \in M^{\mathcal{P}} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in M)(x \in M_\alpha^{\mathcal{P}})$.

Dakle, $M_1^{\mathcal{P}} = \{0\}$, $M_2^{\mathcal{P}} = \{0\} \cup (M \cap P(\{0\} \times \mathcal{P}))$ itd. Imena ćemo označavati sa π, σ i τ, uz korišćenje indeksa. *Rang* imena σ je najmanji ordinal $\alpha \in M$ takav da $\sigma \in M_{\alpha+1}^{\mathcal{P}}$.

Kanonsko ime $\check{x}$ proizvoljnog skupa $x \in M$ definišemo na sledeći način:

- $\check{0} = 0$;
- $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle \mid y \in x\}$.

5.2.1 Zadatak Dokazati da za svako $x \in M$, $\check{x}$ takođe pripada M.

Skup $G \subseteq \mathcal{P}$ je *filter* u $\mathcal{P}$ ako važi:

- $\mathbf{1} \in G$;
- za svako $p, q \in G$ postoji $r \in G$ tako da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$;
- za svako $p \in G$ je $[p, \cdot) \subseteq G$.

Filter G u $\mathcal{P}$ je *M-generički* ako seče sve guste skupove u $\mathcal{P}$ koji su elementi modela M.

Pokažimo da za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji M generički filter G u $\mathcal{P}$ takav da $p \in G$. Zaista, kako je M prebrojiv, to se svi gusti skupovi u $\mathcal{P}$ koji se nalaze u M mogu poređati u niz, recimo $\langle D_n \mid n \in \omega\rangle$. Pošto je svaki od ovih skupova gust ispod p, to postoji niz uslova $\langle p_n \mid n \in \omega\rangle$ takav da $p_n \in D_n,\ n \in \omega$, kao i

$$p \geqslant p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots$$

Traženi M-generički filter G je dobro definisan sa

$$G = \{q \in \mathcal{P} \mid (\exists n \in \omega) p_n \leqslant q\}.$$

Varijanta prethodnog u slučaju Booleovsko-vrednsonog pristupa je poznata i kao Rasiowa-Sikorski lema.

5.2.2 Definicija Neka su, u M, $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ kompletne Booleove algebre i neka je $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}'$ Booleovski homomorfizam. Kažemo da je homomorfizam h *M-kompletan* ako za svako $X \in M \cap P(\mathcal{B})$ važi

$$h[\sum_{\mathcal{B}} X] = \sum_{\mathcal{B}'} h[X].$$

5.2.3 Zadatak Neka je $\mathcal{B}$ kompletna Booleova algebra i neka je $D \subseteq \mathcal{B}$. Dokazati da je D gust (u smislu uređenja), ako i samo ako je $\sum D = \mathbf{1}$.

5.2.4 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{B}$ u M kompletna bezatomična Booleova algebra i neka je $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{2}$ M-kompletan homomorfizam. Dokazati da je

$$G_h = \{b \in \mathcal{B} \mid h(b) = \mathbf{1}\}$$

M-generički ultrafilter u $\mathcal{B}$.

5.2.5 Rasiowa-Sikorski lema *Neka je, u M, $\mathcal{B}$ kompletna bezatomična Booleova algebra i neka je $a > \mathbf{0}$. Tada postoji M-kompletan homomorfizam $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{2}$ takav da je $h(a) = \mathbf{1}$.*

Dokaz S obzirom da je M prebrojiv, svi gusti podskupovi od $\mathcal{B}$ koji su u M se mogu poređati u niz, recimo $\langle D_n \mid n < \omega \rangle$. Slično kao u slučaju separativnih uređenja, konstruiše se prebrojiv niz

$$a \geqslant b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots$$

takav da $b_n \in D_n$. Skup $\{a\} \cup \{b_n \mid n < \omega\}$ ima svojstvo konačnog preseka, pa je sadržan u nekom ultrafilteru G. Traženi M-kompletni homomorfizam $h : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{2}$ je dobro definisan sa

$$h(x) = \mathbf{1} \Leftrightarrow b \in G.$$

□

5.2.6 Lema *Ako je $\mathcal{P}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, onda ni jedan M-generički filter u $\mathcal{P}$ ne pripada modelu M.*

Dokaz

Neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}$. Tada je skup

$$D = \mathcal{P} \setminus G$$

gust u $\mathcal{P}$. Zaista, kako je $\mathcal{P}$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, za svako $p \in \mathcal{P}$ postoje $q, r \in \mathcal{P}$ takvi da je $q \leqslant p$, $r \leqslant p$ i $q \perp r$. Kako je G kompatibilan skup, to bar jedan od elemenata q i r pripada skupu D, odakle sledi da je D gust u $\mathcal{P}$.

Pošto G seče sve guste podskupove od $\mathcal{P}$ koji su u M, na osnovu prethodnog sledi da $D \notin M$, a odatle i $G \notin M$. □

Za proizvoljno ime σ, njegovu G-interpretaciju $\mathtt{I}_G(\sigma)$ definišemo rekurzivno sa

$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{\mathtt{I}_G(\tau) \mid (\exists p \in G)\langle \tau, p \rangle \in \sigma\}.$$

5.2.7 Zadatak Za proizvoljan skup $x \in M$ dokazati da je $\check{x}_G = x$.

Uputstvo

Tvrđenje se dokazuje indukcijom po rangu. Za proizvoljan $x \in M$ imamo:

$$\begin{aligned} \mathtt{I}_G(\check{x}) &= \{\mathtt{I}_G(\check{y}) \mid y \in x\} \\ &= \{y \mid y \in x\} \text{ (induktivna hipoteza)} \\ &= x. \end{aligned}$$

□

5.2.8 Zadatak Navesti primer imena $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ za koje je $\mathtt{I}_G(\sigma) = G$.

Uputstvo

Uočimo ime $\sigma = \{\langle \check{p}, p\rangle \mid p \in \mathcal{P}\}$. Prvo pokazati da $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$. Tada:

$$\begin{aligned} \mathtt{I}_G(\sigma) &= \{\mathtt{I}_G(\check{p}) \mid \langle \check{p}, p\rangle \in \sigma \wedge p \in G\} \\ &= \{p \mid p \in G\} \\ &= G. \end{aligned}$$

□

Ime σ konstruisano u prethodnom zadatku zovemo i *kanonskim imenom* filtera G i označavamo ga sa $\tilde{G}$. Pređimo na definicije generičkog proširenja i forsinga.

5.2.9 Definicija Uz prethodnu simboliku, skup

$$M[G] = \{\mathtt{I}_G(\sigma) \mid \sigma \in M^{\mathcal{P}}\}$$

zovemo i *generičkim proširenjem* modela M.

Iz definicije neposredno sledi da je $M[G]$ tranzitivan skup, a na osnovu prethodna dva zadatka imamo da $G \in M[G]$ kao i da je $M \subseteq M[G]$.

5.2.10 Definicija Kažemo da uslov p *forsira* rečenicu $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, u oznaci

$$p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

ako i samo ako za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ takav da $p \in G$ imamo da

$$M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma_1), \ldots, \mathtt{I}_G(\sigma_n)].$$

U sledećim jednostavnim zadacima navodimo neke elementarne osobine forsinga.

5.2.11 Zadatak Dokazati da su sledeći iskazi ekvivalentni:

1. $p \Vdash \varphi$;
2. $(\forall q \leqslant p) q \Vdash \varphi$;
3. $(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)(r \Vdash \varphi)$, tj. skup

   $$D = \{q \leqslant p \mid q \Vdash \varphi\}$$

   je gust ispod p.

5.2.12 Zadatak Dokazati:

1. $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ akko $p \Vdash \varphi$ i $p \Vdash \psi$;
2. $p \Vdash \neg\varphi$ akko ne postoji uslov $q \leqslant p$ takav da $q \Vdash \varphi$;
3. $p \Vdash \varphi \vee \psi$ akko za svako $q \leqslant p$ postoji $r \leqslant q$ tako da $r \Vdash \varphi$ ili $r \Vdash \psi$.

Sada smo spremni da formulišemo ključnu forsing teoremu:

5.2.13 Forsing teorema

Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{P} \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Tada:

1. *$M[G]$ je tranzitivan skup;*
2. *$M \subseteq M[G]$ i $G \in M[G]$;*
3. *$M[G] \models ZFC$;*
4. *M i $M[G]$ imaju iste ordinale;*
5. *Ako je N tranzitivan model teorije ZFC takav da je $M \subseteq N$ i da $G \in N$, onda je i $M[G] \subseteq N$;*
6. *Forsing relacija je definabilna u M;*
7. *$M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma_1), \ldots, \mathtt{I}_G(\sigma_n)]$ akko postoji uslov $p \in G$ takav da $p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$;*
8. *$p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ akko za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ takav da $p \in G$ važi $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma_1), \ldots, \mathtt{I}_G(\sigma_n)]$.*

Prve dve stavke smo već proverili, pretposlednja je direktna posledica definicije forsinga, a poslednja stavka je baš sama definicija. Što se tiče pete stavke, ako je $M \subseteq N$ onda je i $M^{\mathcal{P}} \subseteq N$, a kako i $G \in M$, zbog $N \models$ ZFC mora biti i

$$((\exists p \in G)(\langle \tau, p \rangle \in \sigma))^N \Leftrightarrow (\exists p \in G)(\langle \tau, p \rangle \in \sigma)$$

za proizvoljne $\sigma, \tau \in M^{\mathcal{P}}$ i $p \in \mathcal{P}$, odakle sledi da $\mathtt{I}_G(\sigma) \in N$ za svako $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$, a time i $M[G] \subseteq N$.

Da M i $M[G]$ imaju istu visinu, tj. da imaju iste ordinale, neposredno sledi iz činjenice da je za svako ime σ

$$\mathrm{rank}(\mathtt{I}_G(\sigma)) \leqslant \mathrm{rank}(\sigma),$$

što se sasvim lako proverava $\in$-indukcijom.

Kako je $M[G]$ neprazan tranzitivan skup, u $M[G]$ važe aksiome praznog skupa, ekstenzionalnosti i regularnosti. Pošto je

$$\mathtt{I}_G(\check{\omega}) = \omega,$$

imamo da $\omega \in M[G]$, pa u $M[G]$ važi i aksioma beskonačnosti. Sledeći zadatak posvećen je direktnom dokazu da u $M[G]$ važe aksiome para i unije.

5.2.14 Zadatak Neka je $M[G]$ generičko proširenje prebrojivog tranzitivnog modela M teorije ZFC. Dokazati:

1. Neka $x, y \in M[G]$ i neka su $\tilde{x}, \tilde{y} \in M^{\mathcal{P}}$ imena takva da je $\mathtt{I}_G(\tilde{x}) = x$ i $\mathtt{I}_G(\tilde{y}) = y$. Za ime $\sigma = \{\langle \tilde{x}, \mathbf{1}\rangle, \langle \tilde{y}, \mathbf{1}\rangle\}$ dokazati da je
$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{x, y\};$$
2. Neka $x \in M[G]$ i neka je $\tilde{x} \in M^{\mathcal{P}}$ ime takvo da je $\mathtt{I}_G(\tilde{x}) = x$. Za ime
$$\tau = \{\langle \pi, p\rangle \mid (\exists \langle \sigma, q\rangle \in \tilde{x})\exists r(\langle \pi, r\rangle \in \sigma \wedge p \leqslant r \wedge p \leqslant q)\}$$
dokazati da je $\mathtt{I}_G(\tau) = \bigcup x$.

Tačke 3 i 6 ćemo dokazati u sledećoj sekciji. Čitalac koji ne želi da se upušta u tehničke detalje ovog dokaza može bez problema preskočiti ovu sekciju.

5.2.15 Mixing Lemma *Neka je, u M, A antilanac u $\mathcal{P}$ i neka su σ_q, $q \in A$ proizvoljna imena iz $M^{\mathcal{P}}$. Tada postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ tako da*

$$q \Vdash \pi = \sigma_q$$

za svako $q \in A$.

Dokaz

U M π definišemo sa

$$\pi = \bigcup_{q \in A} \{\langle \tau, r \rangle \mid r \leqslant q \wedge r \Vdash \tau \in \sigma_q \wedge \tau \in \mathrm{dom}(\sigma_q)\}.$$

Primetimo da tačka 6 forsing teoreme obezbeđuje korektnost prethodne definicije.

Neka je $q \in A$ proizvoljno i neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}$ takav da $q \in G$. Na osnovu forsing teoreme dovoljno je pokazati da je

$$\mathtt{I}_G(\pi) = \mathtt{I}_G(\sigma_q).$$

S jedne strane, neka je $a \in \mathtt{I}_G(\pi)$ proizvoljno. Tada postoje ime $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $r \in G$ tako da $\langle \tilde{a}, r \rangle \in \pi$. Iz definicije imena π sledi da postoji uslov $p \in A$ takav da je $r \leqslant p$, $r \Vdash \tilde{a} \in \sigma_p$ i $\tilde{a} \in \mathrm{dom}(\sigma_p)$. Kako je A antilanac i kako su uslovi r i q kompatibilni, mora biti $p = q$. Dakle, $r \Vdash \tilde{a} \in \sigma_q$, odakle po forsing teoremi sledi da $a \in \mathtt{I}_G(\sigma_q)$. Ovim smo pokazali da je $\mathtt{I}_G(\pi) \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma_q)$.

S druge strane, neka je $b \in \mathtt{I}_G(\sigma_q)$ proizvoljno. Tada postoje ime $\tilde{b} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $p \in G$ tako da $\langle \tilde{b}, p \rangle \in \sigma_q$. Kako $p, q \in G$, postoji $r \in G$ tako da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$. Sada $\langle \tilde{b}, r \rangle \in \pi$, pa $b \in \mathtt{I}_G(\pi)$, čime je i obratna inkluzija dokazana. □

5.2.16 Princip maksimalnosti *Ako* $p \Vdash \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$*, onda postoji ime* $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ *tako da* $p \Vdash \varphi(\pi, \tau_1, \ldots, \tau_n)$.

Dokaz

Radi pojednostavljenja notacije parametre $\tau_1, \ldots, \tau_n$ ćemo izostaviti. Primenom Zornove leme u M, neka je skup $A \in M$ takav da važi:

- A je antilanac u $\mathcal{P}$;
- $(\forall q \in A)(q \leqslant p \wedge (\exists \sigma \in M^{\mathcal{P}})(q \Vdash \varphi(\sigma)))$;
- A je maksimalan u odnosu na prethodne dve stavke.

Koristeći AC u M, izaberimo imena $\sigma_q \in M^{\mathcal{P}}$, $q \in A$, tako da za svako $q \in A$ važi
$$q \Vdash \varphi(\sigma_q).$$
Na osnovu prethodne leme postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ tako da
$$q \Vdash \pi = \sigma_q$$
za svako $q \in A$. Dokažimo da $p \Vdash \varphi(\pi)$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji uslov $r \leqslant p$ takav da $r \Vdash \neg\varphi(\pi)$. Kako $p \Vdash \exists x \varphi(x)$, postoje uslov $s \leqslant r$ i ime $\tau \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $s \Vdash \varphi(\tau)$. Dalje, za svako $q \in A$ imamo da $q \Vdash \varphi(\pi)$, a kako $s \Vdash \neg\varphi(\pi)$, skup $A \cup \{s\}$ je antilanac u $\mathcal{P}$, što je u kontradikciji sa maksimalnošću A. □

Ispostavlja se da su generičke ekstenzije iste ukoliko se forsira po uređenjima od kojih se jedno gusto utapa u drugo. Naime, ako je $\mathcal{P}$ gusto podUređenje uređenja $\mathcal{Q}$ onda na osnovu zadatka 5.2.11 sledi:

- Za proizvoljno $p \in \mathcal{P}$,
$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi \quad \text{akko} \quad p \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi;$$
- Ako $q \in \mathcal{Q}$ i $q \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi$, onda je skup $\{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi\}$ gust ispod q.

Posebno, isto važi i ako je
$$\mathcal{Q} = \mathcal{B} = \text{r.o.}\mathcal{P}.$$
Prelazimo na definiciju forsinga preko Booleovsko vrednosnih modela, nagoveštenu u forsing planu iz uvoda u poglavlje. Kako bismo pojednostavili argumentaciju, podrazumevamo da se nalazimo unutar nekog prebrojivog tranzitivnog modela M teorije ZFC. Konstrukciju koja sledi treba relativizovati na pomenuti model M.

Neka je $\mathcal{B}$ kompletna bezatomična Booleova algebra. Booleovski univerzum $V^{\mathcal{B}}$ (u relativizovanom obliku $M^{\mathcal{B}}$) definišemo rekurzivno na sledeći način:

- $V_0^{\mathcal{B}} = 0$;
- $V_{\alpha+1}^{\mathcal{B}}$ je skup svih funkcija čiji je domen podskup od $V_\alpha^{\mathcal{B}}$ i čiji je kodomen podskup od $\mathcal{B}$;
- $V_\alpha^{\mathcal{B}} = \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi^{\mathcal{B}}$, u slučaju graničnog $\alpha > 0$;
- $x \in V^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \exists\alpha(x \in V_\alpha^{\mathcal{B}})$.

Elemente klase $V^{\mathcal{B}}$ ćemo zvati imenima i označavaćemo ih, isto kao i u slučaju separativnih uređenja, sa π, σ i τ, uz korišćenje indeksa. *Rang* imena σ je najmanji ordinal α takav da $\sigma \in V_\alpha^{\mathcal{P}}$.

Vidimo da se definicije $\mathcal{B}$-imena i $\mathcal{P}$-imena razlikuju u tome što u Booleovskoj varijanti ne uzimamo bilo kakve podskupove od $V^{\mathcal{B}} \times \mathcal{B}$, već samo funkcije. Razlog za ovo je kompletnost algebre $\mathcal{B}$. Naime, ako je $\mathcal{P} = \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$, i ako je σ proizvoljno $\mathcal{P}$-ime, onda za $\mathcal{B}$-ime τ definisano sa

$$\tau(x) = \sum\{b \in \mathcal{B} \mid \langle x, b\rangle \in \sigma\}, \quad x \in \mathrm{dom}(\sigma)$$

važi

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma = \tau.$$

Booleovsku vrednost definišemo rekurzivno i po rangu u $V^{\mathcal{B}}$ i po složenosti rečenica jezika $\mathcal{L}_{ZFC} \cup V^{\mathcal{B}}$ na sledeći način:

- $\|\tau \in \sigma\| = \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} (\sigma(x) \wedge \|x = \tau\|)$
- $\|\tau \subseteq \sigma\| = \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \|x \in \sigma\|)$
- $\|\tau = \sigma\| = \|\tau \subseteq \sigma\| \wedge \|\sigma \subseteq \tau\|$
- $\|\neg\varphi\| = \|\varphi\|^c$
- $\|\varphi \wedge \psi\| = \|\varphi\| \wedge \|\psi\|$

- $\|\varphi \vee \psi\| = \|\varphi\| \vee \|\psi\|$
- $\|\exists x\varphi\| = \sum_{\tau \in V^{\mathcal{B}}} \|\varphi(\tau)\|$
- $\|\forall x\varphi\| = \prod_{\tau \in V^{\mathcal{B}}} \|\varphi(\tau)\|$.

5.2.17 Lema *$\langle V^{\mathcal{B}}, \| \ \| \rangle$ je $\mathcal{B}$–model.*

Dokaz

S obzirom na definiciju Booleovsko vrednosnog modela dovoljno je pokazati sledeće:

1. $\|\tau = \tau\| = \mathbf{1}$
2. $\tau(x) \leqslant \|x \in \tau\|, \quad x \in \mathrm{dom}(\tau)$
3. $\|\tau = \sigma\| = \|\sigma = \tau\|$
4. $\|\tau = \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| \leqslant \|\tau = \rho\|$
5. $\|\tau \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| \leqslant \|\tau \in \rho\|$
6. $\|\tau \in \sigma\| \wedge \|\tau = \rho\| \leqslant \|\rho \in \sigma\|$.

(1.),(2.) : Dokaz izvodimo simultano indukcijom po rangu u $V^{\mathcal{B}}$ imena τ. Neka je $x \in \mathrm{dom}(\tau)$ proizvoljno. Po induktivnoj hipotezi imamo da je tada $\|x = x\| = \mathbf{1}$, pa je i $\tau(x) \wedge \|x = x\| = \tau(x)$, odakle sledi da je

$$\tau(x) \leqslant \sum_{y \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(y) \wedge \|x = y\|) \ = \ \|x \in \tau\|.$$

Koristeći ovo, dobijamo da je

$$\|\tau \subseteq \tau\| = \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \|x \in \tau\|) \geqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \tau(x)) \ = \ \mathbf{1},$$

odakle sledi da je $\|\tau = \tau\| = \mathbf{1}$.

(3.): Sledi direktno iz definicije.

(4.),(5.),(6.): Simultano indukcijom po trojkama rangova u $V^{\mathcal{B}}$ od τ, σ i ρ uređenim leksikografski.

$$\begin{aligned}
\|\tau \subseteq \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} ((\tau(x)^c \wedge \|\sigma = \rho\|) \vee (\|x \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\|)) \\
&\leqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee (\|x \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\|)) \\
&\leqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(x)^c \vee \|x \in \rho\|) \\
&= \|\tau \subseteq \rho\|.
\end{aligned}$$

Sasvim slično i $\|\sigma \subseteq \tau\| \wedge \|\sigma = \rho\| \leqslant \|\rho \subseteq \tau\|$.

$$\begin{aligned}
\|\tau \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| &= \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(x) \wedge \|x = \tau\| \wedge \|\sigma = \rho\| \\
&\leqslant \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \|x \in \sigma\| \wedge \|\sigma = \rho\| \wedge \|x = \tau\| \\
&\leqslant \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \|x \in \rho\| \wedge \|x = \tau\| \\
&\leqslant \sum_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \|\tau \in \rho\| \\
&= \|\tau \in \rho\|.
\end{aligned}$$

Sasvim slično se pokazuje i (6.). $\square$

5.2.18 Zadatak Dokazati da je sa

$$\|\varphi\| = \sup_{\mathrm{r.o.}\mathcal{P}} \{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash \varphi\}$$

definisana Booleovska vrednost na univerzumu $V^{\mathrm{r.o.}\mathcal{P}}$ koja se poklapa sa upravo uvedenom vrednošću.

Sledeća teorema je Booleovska varijanta principa maksimalnosti.

5.2.19 Teorema $\langle V^{\mathcal{B}}, \|\ \|\rangle$ *je pun model.*

Dokaz

Neka je W maksimalan antilanac u $\mathcal{B}$ i neka je $\{\tau_u \mid u \in W\}$ proizvoljan skup imena. Dalje, neka je

$$D = \bigcup_{u \in W} \mathrm{dom}(\tau_u).$$

Za svako $u \in W$ definišimo funkciju (ime) $\tau_u^* : D \longrightarrow \mathcal{B}$ sa

$$\tau_u^*(x) = \begin{cases} \mathbf{0} & , \quad x \in D \setminus \mathrm{dom}(\tau_u) \\ \tau_u(x) & , \quad x \in \mathrm{dom}(\tau_u) \end{cases} .$$

Pokažimo da je

$$||\tau_u = \tau_u^*|| \ .$$

S jedne strane, ako $x \notin \mathrm{dom}(\tau_u)$, onda je $\tau_u^*(x) = 0$, pa je

$$\tau_u^*(x)^c \vee ||x \in \tau_u|| = \mathbf{1}.$$

Ako $x \in \mathrm{dom}(\tau)$, onda je $||x \in \tau_u|| \geqslant \tau_u(x) = \tau_u^*(x)$, pa je opet

$$\tau_u^*(x)^c \vee ||x \in \tau_u|| = \mathbf{1}.$$

Dakle, $||\tau_u^* \subseteq \tau_u|| = \prod_{x \in D} (\tau_u^*(x)^c \vee ||x \in \tau_u||) = \mathbf{1}$.

S druge strane,

$$\begin{aligned} ||\tau_u \subseteq \tau_u^*|| &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)^c \vee ||x \in \tau_u^*||) \\ &\geqslant \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)^c \vee \tau_u^*(x)) \\ &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\tau_u)} (\tau_u(x)^c \vee \tau_u(x)) \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Neka je $\tau : D \longrightarrow B$ funkcija definisana sa

$$\tau(x) = \sum_{u \in W} (u \wedge \tau_u^*(x)), \quad x \in D.$$

Pokažimo da za svako $x \in D$ i svako $u \in W$ važi

$$u \leqslant \tau(x)^c \vee \tau_u^*(x) \quad \text{i} \quad u \leqslant \tau(x) \vee \tau_u^*(x)^c.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
u \wedge (\tau(x) \vee \tau_u^*(x)') &= (u \wedge \sum_{v \in W} v \wedge \tau_u^*(x)) \ \vee \ (u \wedge \tau_u^*(x)^c) \\
&= (u \wedge \tau_u^*(x)) \vee (u \wedge \tau_u^*(x)^c) \\
&= u \\
u \wedge (\tau(x)^c \vee \tau_u^*(x)) &= (u \wedge \tau(x)^c) \vee (u \wedge \tau_u^*(x)) \\
&= (u \wedge \tau(x)^c) \vee (u \wedge \tau(x)) \\
&= u.
\end{aligned}$$

Neka je $u \in W$ proizvoljno. Tada važi:

$$\begin{aligned}
u \wedge ||\tau \subseteq \tau_u^*|| &= u \wedge \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee ||x \in \tau_u^*||) \\
&\geqslant \prod_{x \in D} u \wedge (\tau(x)^c \vee \tau_u^*(x)) \\
&= \prod_{x \in D} u \\
&= u.
\end{aligned}$$

Sasvim slično se pokazuje da je i $||\tau_u^* \subseteq \tau|| = u$, odakle sledi da je

$$u \leqslant ||\tau = \tau_u^*||.$$

Pošto je $||\tau_u = \tau_u^*|| = \mathbf{1}$ i pošto je

$$||\tau = \tau_u^*|| \wedge ||\tau_u^* = \tau_u|| \leqslant ||\tau = \tau_u||,$$

to je
$$u \leqslant ||\tau = \tau_u||,$$
čime je tvrđenje dokazano. □

Za svaki skup x definišemo njegovo *kanonsko ime* $\check{x}$ isto kao i u slučaju separativnih uređenja:

- $\check{0} = 0$
- $\check{x} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle \mid y \in x\}$.

5.2.20 Lema *Neka su x, y proizvoljni. Tada važi:*

1. $x = y \Leftrightarrow \|\check{x} = \check{y}\| = \mathbf{1}$
2. $x \in y \Leftrightarrow \|\check{x} \in \check{y}\| = \mathbf{1}$.

Dokaz

Dovoljno je pokazati sledeće:

(a) $x \neq y \Rightarrow \|\check{x} = \check{y}\| = \mathbf{0}$

(b) $x \notin y \Rightarrow \|\check{x} \notin \check{y}\| = \mathbf{0}$.

(a) i (b) simultano pokazujemo transfinitnom indukcijom po parovima rangova u $V^{\mathcal{B}}$ od $\check{x}$ i $\check{y}$ uređenim leksikografski.

Neka je $x \neq y$. S obzirom na očiglednu simetriju, razmotrićemo samo slučaj kada postoji $z \in x$ tako da $z \notin y$. Za takvo z je uz odgovarajuću induktivnu hipotezu i $\|\check{z} \in \check{y}\| = \mathbf{0}$ i $\|\check{z} = \check{z}\| = \mathbf{1}$. Sada je

$$\begin{aligned} \|\check{z} \in \check{x}\| &= \sum_{t \in x} \check{x}(\check{t}) \wedge \|\check{t} = \check{z}\| \\ &= \sum_{t \in x} \|\check{t} = \check{z}\| \\ &\geqslant \|\check{z} = \check{z}\| = \mathbf{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\check{x} \subseteq \check{y}\| &= \prod_{t \in x} (\check{x}(\check{t})^c \vee \|\check{t} \in \check{y}\|) \\ &= \prod_{t \in x} \|\check{t} \in \check{y}\| \\ &\leqslant \|\check{z} \in \check{y}\| = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Odavde neposredno sledi da je $\|\check{x} = \check{y}\| = \mathbf{0}$.

Neka $x \notin y$. Tada je za svako $z \in y$ $z \neq x$, pa je, uz odgovarajuću induktivnu hipotezu, $\|\check{z} = \check{x}\| = \mathbf{0}$. Sada je

$$\|\check{x} \in \check{y}\| = \sum_{z \in y} (\check{y}(\check{z}) \wedge \|\check{z} = \check{x}\|) = \sum_{z \in y} \mathbf{1} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

□

Forsing definišemo na sledeći način:

$$b \Vdash \varphi \quad \text{akko} \quad b \leqslant \|\varphi\|.$$

5.2.21 Zadatak Neka je $\mathcal{P} = \mathcal{B} \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dokazati da

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi \quad \text{akko} \quad p \Vdash_{\mathcal{B}} \varphi.$$

Generička proširenja definišemo na sledeći način:

- Ultrafilter G algebre $\mathcal{B}$ je M-generički ukoliko za svaki skup $D \in M$ koji je gust podskup od $\mathcal{B}$ važi

$$G \cap D \neq 0;$$

- $M[G] = \{\mathtt{I}_G(\sigma) \mid \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$, pri čemu je

$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{\mathtt{I}_G(\tau) \mid \tau \in \operatorname{dom}(\sigma) \wedge \sigma(\tau) \in G\}.$$

Alternativno, $M[G]$ možemo dobiti i na sledeći način:

1. Od $\mathcal{B}$-modela $M^{\mathcal{B}}$ (relativizacija $V^{\mathcal{B}}$ na M) prelazimo na $\mathbf{2}$-model $M^{\mathcal{B}}/G = \langle M^{\mathcal{B}}, \| \ \|_G\rangle$, pri čemu

$$\|\varphi\|_G = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & , & \|\varphi\| \in G \\ \mathbf{0} & , & \|\varphi\| \notin G \end{array} \right. ;$$

2. Od $M^{\mathcal{B}}/G$ dobijamo klasičan dobro zasnovan model $\langle A^*, \in^*\rangle$ na sledeći način:

   - $A^* = \{\sigma_\sim \mid \sigma \in M^{\mathcal{B}}\}$, pri čemu je

   $$\sigma_\sim = \{\tau \in M^{\mathcal{B}} \mid \|\sigma = \tau\| \in G\};$$

   - $\sigma_\sim \in^* \tau_\sim$ akko $|\sigma \in \tau\} \in G$.

3. $M[G]$ je tranzitivni kolaps modela $\langle A^*, \in^*\rangle$.

Forsing teorema ima istu formulaciju kao i u slučaju separativnih uređenja.

Sledeći zadatak se dodatno odnosi na ujednačavanje pristupa forsingu preko separativnih uređenja i preko kompletnih Booleovih algebri:

5.2.22 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{P} \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata, $\mathcal{B} = \text{r.o.}\mathcal{P}$ i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$.

1. Dokazati da je

   $$G' = \{b \in \mathcal{B} \mid (\exists p \in \mathcal{P})(p \leqslant b\}$$

   M-generički ultrafilter u $\mathcal{B}$.

2. Dokazati da je $M[G] = M[G']$.

5.3 Dokaz forsing teoreme

Ova tehnička sekcija nije neophodna prilikom prvog čitanja, jer se u primenama koristi forsing teorema, ne i tehnika njenog dokaza.

Prvo ćemo dati definiciju unutrašnjeg (sintaksnog) forsinga $\Vdash^*$ i pokazati da

$$p \Vdash \varphi \ \text{ akko } \quad M \models p \Vdash^* \varphi.$$

Zatim ćemo dokazati da $M[G] \models$ ZFC, i na taj način kompletirati dokaz forsing teoreme.

Vezano za $V^{\mathcal{B}}$ (odnosno $M^{\mathcal{B}}$), u ovoj sekciji ćemo takođe pokazati da svaka aksioma teorije ZFC ima $\mathcal{B}$-vrednost $\mathbf{1}$.

5.3.1 Definicija Binarnu relaciju $\Vdash^*$ između uslova i rečenica jezika $\mathcal{L}_{ZFC} \cup V^{\mathcal{P}}$ (imena tretiramo kao nove simbole konstanti) rekurzivno po rangu u $V^{\mathcal{P}}$ i složenosti formule definišemo na sledeći način:

1. $p \Vdash^* \sigma = \tau$ ako važi:

   (a) za svako $\langle \sigma_1, s_1 \rangle \in \sigma$ skup

   $$\{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow (\exists \langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau)(q \leqslant t_1 \wedge q \Vdash^* \sigma_1 = \tau_1)\}$$

   je gust ispod p;

   (b) za svako $\langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau$ skup

   $$\{q \leqslant p \mid q \leqslant t_1 \Rightarrow (\exists \langle \sigma_1, s_1 \rangle \in \tau)(q \leqslant s_1 \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \sigma_1)\}$$

   je gust ispod p;

2. $p \Vdash^* \sigma \in \tau$ ako je skup

   $$\{q \leqslant p \mid (\exists \langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau)(q \leqslant t_1 \wedge q \Vdash^* \sigma = \tau_1)\}$$

   gust ispod p;

3. $p \Vdash^* \neg\varphi$ ako $q \not\Vdash^* \varphi$ za svaki uslov $q \leqslant p$;

4. $p \Vdash^* \varphi \vee \psi$ ako je skup
$$\{q \leqslant p \mid q \Vdash^* \varphi \ \vee \ q \Vdash^* \psi\}$$
gust ispod p;

5. $p \Vdash^* \exists x \varphi(x)$ ako je skup
$$\{q \leqslant p \mid (\exists \sigma \in V^{\mathcal{P}})(q \Vdash^* \varphi(\sigma))\}$$
gust ispod p.

Napomenimo da smo umesto klauzula 2.a i 2.b ekvivalentno mogli staviti redom sledeće dve klauzule:

- za svako $\langle \sigma_1, s_1 \rangle \in \sigma$ skup
$$\{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow q \Vdash^* \sigma_1 \in \tau\}$$
je gust ispod p;

- za svako $\langle \tau_1, t_1 \rangle \in \sigma$ skup
$$\{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow q \Vdash^* \tau_1 \in \sigma\}$$
je gust ispod p.

Takođe je važno istaći da su klauzule 1 i 2 apsolutne za tranzitivne modele teorije ZFC, ali da preostale klauzule ne moraju da budu apsolutne.

5.3.2 Teorema *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $p \Vdash^* \varphi$;
2. $(\forall q \leqslant p)(q \Vdash^* \varphi)$;
3. *Skup* $\{q \leqslant p \mid q \Vdash^* \varphi\}$ *je gust ispod* p.

Dokaz

Prvo, primetimo da 2 očigledno povlači 1 i 3. Da 2 povlači 1 neposredno sledi iz definicije $\Vdash^*$: ako je skup D gust ispod p, onda je D gust i ispod svakog $q \leqslant p$, odakle po definiciji neposredno sledi da 2 važi za atomične rečenice, disjunkcije rečenica i egzistencijalne rečenice. Najzad, važenje iskaza 2 za recenice koje počinju negacijom je očigledna posledica stavke 3 u definiciji $\Vdash^*$.

Preostali deo tvrđenja (npr 3 povlači 1) predstavlja pravolinijsku indukciju po složenosti rečenice φ, pa ga zbog toga ostavljamo čitaocu za vežbu. □

5.3.3 Zadatak Dokazati:

1. Ne postoji uslov p takav da $p \Vdash^* \varphi$ i $p \Vdash^* \neg\varphi$;
2. $\mathbf{1} \Vdash^* \varphi \vee \neg\varphi$;
3. $\mathbf{1} \Vdash^* \sigma = \sigma$;
4. Ako $\langle \sigma, s \rangle \in \tau$ onda $s \Vdash^* \sigma \in \tau$;
5. $p \Vdash^* \neg\neg\varphi$ akko $p \Vdash^* \varphi$;
6. $p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$ akko $p \Vdash^* \varphi$ i $p \Vdash^* \psi$;
7. $p \Vdash^* \forall x \varphi(x)$ akko $p \Vdash^* \varphi(\sigma)$ za svako ime $\sigma \in V^{\mathcal{P}}$;
8. Ako $p \Vdash^* \varphi$ i $p \Vdash^* \varphi \Rightarrow \psi$, onda $p \Vdash^* \psi$.

Uputstvo

1: Neposredna posledica stavke 3 u definiciji forsinga.

2: Treba pokazati da je skup

$$D = \{p \in \mathcal{P} \mid p \Vdash^* \varphi \ \vee \ p \Vdash^* \neg\varphi\}$$

gust u $\mathcal{P}$. Neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljan uslov. Ako $p \Vdash \neg\varphi$, onda $p \in D$. U suprotnom, po trećoj stavki u definiciji forsinga postoji $q \leqslant p$ tako da $q \Vdash^* \varphi$, pa $q \in D$. Dakle, D je gust u $\mathcal{P}$, odakle sledi da $\mathbf{1} \Vdash \varphi \vee \neg\varphi$.

3: Koristiti indukciju po rangu imena σ u $V^{\mathcal{P}}$. $\square$

5.3.4 Teorema

Neka je $\varphi(\bar{x})$ formula jezika $\mathcal{L}_{ZFC}$, M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC, $\mathcal{P}$ u M separativno uređenje bez minimalnih elemenata i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Tada:

(a) Ako $p \in G$ i $M \models p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, onda

$$M[G] \models \varphi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}];$$

(b) Ako $M[G] \models \varphi[\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG}]$, onda postoji uslov $p \in G$ takav da

$$M \models p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n).$$

Dokaz

Tvrđenja (a) i (b) dokazujemo simultano indukcijom i po imenskom rangu i po složenosti formule. Prvo obrađujemo slučaj kada je φ atomična formula. Kako su atomične formule apsolutne za tranzitivne modele, $(p \Vdash^* \sigma = \tau)^M$ je ekvivalentno sa $p \Vdash^* \sigma = \tau$ i $(p \Vdash^* \sigma \in \tau)^M$ je ekvivalentno sa $p \Vdash^* \sigma \in \tau$.

Pretpostavimo da $p \Vdash^* \sigma = \tau$ i pokažimo da je $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\tau)$. Zbog očigledne simetrije dovoljno je pokazati da je $\mathtt{I}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{I}_G(\tau)$. Neka je $x \in \mathtt{I}_G(\sigma)$ proizvoljno. Tada postoje $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ i $s \in \mathcal{P}$ takvi da

$$\langle \pi, s \rangle \in \sigma \text{ i } s \in G \text{ i } x = \pi_G.$$

Kako $p \Vdash^* \sigma = \tau$, skup

$$D = \{q \leqslant p \mid q \leqslant s \Rightarrow q \Vdash^* \pi \in \tau\}$$

je gust ispod p, a kako $D \in M$ (relacija $\Vdash^*$ je apsolutna za Σ_0-formule u tranzitivnim modelima), postoji $r \in G \cap D$ takvo da je $r \leqslant s$. Par imenskih rangova od π i τ je manji (u leksikografskom poretku) od odgovarajućeg para rangova od σ i τ, pa po induktvnoj hipotezi ((a) važi za atomične formule i imena manjeg ranga), iz $r \Vdash^* \pi \in \tau$ sledi da je $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, čime je pokazano da je $\mathtt{I}_G(\sigma) \subseteq \mathtt{I}_G(\tau)$.

Pretpostavimo sada da je $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\tau)$. Neka je D skup svih uslova $p \in P$ za koje važi tačno jedan od sledeća tri iskaza:

1. $p \Vdash^* \sigma = \tau$;
2. postoji $\langle \pi, s \rangle \in \sigma$ tako da je $p \leqslant s$ i da za svako $q \leqslant p$,
$$q \nVdash^* \pi \in \tau;$$
3. postoji $\langle \pi, s \rangle \in \tau$ tako da je $p \leqslant s$ i da za svako $q \leqslant p$,
$$q \nVdash^* \pi \in \sigma.$$

Kako su 1,2 i 3 apsolutna svojstva za M, imamo da $D \in M$. Sasvim lako se proverava da je D gust u $\mathcal{P}$, pa postoji uslov $p \in D \cap G$. Pokažimo da 2 (sasvim slično i 3) ne važi za p. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji $\langle \pi, s \rangle \in \sigma$ tako da je $p \leqslant s$ i za svako $q \leqslant p$ imamo da $q \nVdash^* \pi \in \tau$. Međutim, $s \in G$, pa $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\sigma)$, odakle sledi da $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, pa po induktivnoj hipotezi postoji uslov $r \in G$ takav da $r \Vdash^* \pi \in \tau$, što je u kontradikciji sa 2.

Pretpostavimo da $p \Vdash^* \sigma \in \tau$. Tada je skup
$$D = \{q \leqslant p \mid (\exists \langle \pi, s \rangle \in \tau)(q \leqslant s \wedge q \Vdash^* \sigma = \pi)\}$$
gust ispod p, a kako je definiciona formula skupa D apsolutna za M, imamo da $D \in M$, pa postoji $q \in D \cap G$. Dalje, neka je $\langle \pi, s \rangle \in \tau$ tako da $q \leqslant s$ i $q \Vdash^* \sigma = \pi$. Tada je po induktivnoj hipotezi $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\pi)$, a kako $s \in G$ ($q \in G$ i $q \leqslant s$) imamo da $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, a time i $\mathtt{I}_G(\sigma) \in \mathtt{I}_G(\tau)$.

Pretpostavimo da $\mathtt{I}_G(\sigma) \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tada po definiciji $\mathtt{I}_G(\tau)$ postoji $\langle \pi, s \rangle \in \tau$ tako da $s \in G$ i $\mathtt{I}_G(\sigma) = \mathtt{I}_G(\pi)$. Po induktivnoj hipotezi postoji uslov $q \in G$ takav da $q \Vdash^* \sigma = \pi$. G je filter, pa postoji $p \in G$ tako da je $p \leqslant q$ i $p \leqslant s$. No sada je

$$(\cdot, p] = \{r \leqslant p \mid (\exists \langle \tau_1, t_1 \rangle \in \tau)(r \leqslant t_1 \wedge r \Vdash^* \sigma = \tau_1)\}$$

(svedok je $\langle \pi, s \rangle$), pa po definiciji $p \Vdash^* \sigma \in \tau$.

Prelazimo na slučaj formula veće složenosti. Razlikujemo sledeće podslučajeve:

(a)$\neg$: Pretpostavimo da (a) i (b) važe za φ i dokazujemo (a) za $\neg\varphi$. Neka je $p \in G$ tako da $M \models p \Vdash^* \neg\varphi$. Suprotno (a), pretpostavimo da $M[G] \models \varphi$. Tada po induktivnoj hipotezi postoji $q \in G$ tako da $M \models q \Vdash^* \varphi$. G je filter, pa postoji uslov $r \in G$ takav da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$. No tada dobijamo kontradikciju:

$$M \models r \Vdash^* \varphi \text{ i } M \models r \Vdash^* \neg\varphi.$$

(b)$\neg$: Neka $M[G] \models \neg\varphi$ i neka je

$$D = \{p \in \mathcal{P} \mid (p \Vdash^* \varphi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\varphi)^M\}.$$

D je gust u $\mathcal{P}$ ($\mathbf{1} \Vdash^* \varphi \vee \neg\varphi$) i $D \in M$ (definiciona formula skupa D je apsolutna za M), pa neka $p \in D \cap G$. Slučaj $M \models p \Vdash^* \varphi$ je nemoguć, jer bi tada po induktivnoj hipotezi bilo $M[G] \models \varphi$, što je u suprotnosti sa pretpostavljenim $M[G] \models \neg\varphi$. Dakle, $M \models p \Vdash^* \neg\varphi$.

(a)$\wedge$: Pretpostavimo da (a) i (b) važe za φ i ψ i dokažimo da (a) važi za $\varphi \wedge \psi$. Neka je $p \in G$ uslov takav da $M \models p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$. Tada po definiciji $\Vdash^*$ $M \models p \Vdash^* \varphi$ i $M \models p \Vdash \psi$, odakle po induktivnoj hipotezi sledi da $M[G] \models \varphi$ i $M[G] \models \psi$, odakle po definiciji sledi da $M[G] \models \varphi \wedge \psi$.

(b)$\wedge$: Sasvim slično kao prethodna stavka.

(a)$\exists$: Neka $p \in G$ i neka $M \models p \Vdash^* \exists x \varphi(x)$. Tada je skup

$$D = \{q \leqslant p \mid (\exists \sigma \in M^{\mathcal{P}})(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M\}$$

gust u $\mathcal{P}$. Kako i $D \in M$, postoji $q \in D \cap G$. Neka je $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $M \models p \Vdash^* \varphi(\sigma)$. Tada po induktivnoj hipotezi $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma)]$, odakle po definiciji sledi da $M[G] \models \exists x \varphi(x)$.

(b)$\exists$: Neka $M[G] \models \exists x \varphi(x)$. Tada postoji ime $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ tako da $M[G] \models \varphi[\mathtt{I}_G(\sigma)]$. Po induktivnoj hipotezi, postoji uslov $p \in G$ takav da $M \models p \Vdash^* \varphi(\sigma)$. Sada se po definiciji $\Vdash^*$ sasvim lako proverava da $M \models p \Vdash^* \exists x \varphi(x)$. $\square$

5.3.5 Posledica *Uz prethodnu simboliku,*

$$p \Vdash \varphi \quad \textit{akko} \quad M \models p \Vdash^* \varphi.$$

Dokaz

Direktna posledica prethodne teoreme. $\square$

Za kompletiranje dokaza forsing teoreme ostalo nam je da pokažemo da je $M[G]$ model teorije ZFC. U prethodnoj sekciji smo dokazali da u $M[G]$ važe aksiome ekstenzionalnosti, para unije, praznog skupa, regularnosti i beskonačnosti, te su nam ostale aksiome partitvnog skupa i izbora, kao i sheme separacije i zamene.

Prvo dokazujemo shemu zamene u $M[G]$. Radi pojednostavljenja notacije, parametre koji se javljaju u definicionim formulama skupova nećemo isticati. Shodno tome, treba da pokažemo da

$$A = \{x \in \mathtt{I}_G(\sigma) \mid \varphi(x)^{M[G]}\} \in M[G].$$

Uočimo skup

$$\tau = \{\langle \pi, p \rangle \in \mathrm{dom}(\sigma) \times \mathcal{P} \mid p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi))\}.$$

Kako smo pokazali da je forsing relacija $\Vdash$ definabilna u M, imamo da $\tau \in M^{\mathcal{P}}$. Tvrdimo da je

$$\mathtt{I}_G(\tau) = A.$$

Neka $x \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tada postoji $\langle \pi, p \rangle \in \tau$ tako da $p \in G$, $x = \mathtt{I}_G(\pi)$ i $p \Vdash \pi \in \sigma \wedge \varphi(\pi)$. Odavde po definiciji forsinga sledi da $x \in \mathtt{I}_G(\sigma)$ i da u $M[G]$ važi $\varphi[x]$, čime smo pokazali da je $\mathtt{I}_G(\tau) \subseteq A$.

S druge strane, neka je $a \in A$ proizvoljno. Tada

$$M[G] \models a \in \mathtt{I}_G(\sigma) \wedge \varphi(a),$$

pa po forsing teoremi postoje ime $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $p \in G$ takvi da je $\mathtt{I}_G(\tilde{a}) = a$, kao i

$$p \Vdash \tilde{a} \in \sigma \wedge \varphi(\tilde{a}).$$

Ovo upravo znači da $\langle \tilde{a}, p \rangle \in \tau$, a kako $p \in G$, imamo i da $a \in \mathtt{I}_G(\tau)$.

Dokažimo sada da u $M[G]$ važi shema zamene. Kao i kod dokaza sheme separacije, radi preglednosti zapisa ćemo parametre koji se javljaju u formulama izostaviti. Dakle, pretpostavimo da

$$M[G] \models (\forall x \in A)(\exists_1 y)\varphi(x, y),$$

i neka je $\tilde{A} \in M^{\mathcal{P}}$ ime skupa $A \in M[G]$. Tvrdimo da postoji ime $\pi \in M^{\mathcal{P}}$ takvo da

$$M[G] \models (\forall x \in A)(\exists y \in \mathtt{I}_G(\pi))\varphi(x, y).$$

Kako teorema refleksije važi u M, postoji $B \in M$ tako da je $B \subseteq M^{\mathcal{P}}$ i da za svako $\sigma \in \mathrm{dom}(\tilde{A})$ i svako $p \in \mathcal{P}$ važi

$$(\exists \tau \in M^{\mathcal{P}})(p \Vdash \varphi(\sigma, \tau)) \Rightarrow (\exists \tau \in B)(p \Vdash \varphi(\sigma, \tau)).$$

Neka je $\pi = B \times \{\mathbf{1}\}$. Tada je

$$\mathtt{I}_G(\pi) = \{\mathtt{I}_G(\tau) \mid \tau \in B\}.$$

Neka $a \in A$ i neka je $\tilde{a}$ ime elementa a. Po pretpostavci, postoji jedinstveno $b \in M[G]$ tako da

$$M[G] \models \varphi[a, b].$$

Neka je $\tilde{b}$ ime skupa b. Po forsing teoremi imamo da postoji uslov $p \in G$ takav da

$$p \Vdash \varphi(\tilde{a}, \tilde{b}).$$

Iz izbora skupa B sledi da postoji $\tau \in B$ tako da $p \Vdash \varphi(\tilde{a}, \tau)$, odakle na osnovu forsing teoreme sledi da

$$M[G] \models \varphi[a, \mathtt{I}_G(\tau)],$$

pa mora biti $b = \mathtt{I}_G(\tau)$ (koristimo jedinstvenost skupa b). Najzad, iz prethodnih razmatranja sledi da $b \in \mathtt{I}_G(\pi)$, što je i trebalo pokazati.

Prelazimo na dokaz aksiomu partitivnog skupa. Neka $A \in M[G]$ i neka je $\tilde{A} \in M^{\mathcal{P}}$ ime skupa A. Uočimo skup

$$S = P(\mathrm{dom}(\tilde{A}) \times \mathcal{P}) \cap M$$

i ime $\pi = S \times \{\mathbf{1}\}$. Kako u $M[G]$ važi shema separacije, dovoljno je da pokažemo da je

$$P(A) \cap M[G] \subseteq \mathtt{I}_G(\pi),$$

jer je u tom slučaju

$$P(A) \cap M[G] = \{x \in \mathtt{I}_G(\pi) \mid x \subseteq A\} \in M[G].$$

U cilju dokaza uožimo proizvoljan $B \subseteq A$ takav da $B \in M[G]$. Kao i ranije, neka je $\tilde{B}$ ime skupa B. Ostaje da pokažemo da $B \in \mathtt{I}_G(\pi)$. Neka je τ ime definisano sa

$$\tau = \{\langle \sigma, p \rangle \mid \sigma \in \mathrm{dom}(\tilde{A}) \land p \Vdash \sigma \in \tilde{B}\}.$$

Tada $\tau \in S$, pa $\mathtt{I}_G(\tau) \in \mathtt{I}_G(\pi)$. Dokažimo da je $\mathtt{I}_G(\tau) = B$. S jedne strane, neka $x \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tada na osnovu forsing teoreme postoje ime $\tilde{x} \in M^{\mathcal{P}}$ i uslov $p \in G$ takvi da $\langle \tilde{x}, p \rangle \in \tau$i da je $\mathtt{I}_G(\tilde{x}) = x$. Po definiciji imena τ tada imamo da

$$p \Vdash \tilde{x} \in \tilde{B},$$

pa kako $p \in G$, na osnovu forsing teoreme imamo da $x \in B$, čime smo pokazali da je $\mathtt{I}_G(\tau) \subseteq B$.

S druge strane, neka je $b \in B$ proizvoljno. Po forsing teoremi postoje, ime $\tilde{b}$ i uslov $p \in G$ takvi da $p \Vdash \tilde{b} \in \tilde{B}$ i da je $\mathtt{I}_G(\tilde{b}) = b$. Kako je $B \subseteq A$, ime $\tilde{b}$ možemo izabrati tako da $\tilde{b} \in \mathrm{dom}(\tilde{A})$. Sada $\langle \tilde{b}, p\rangle \in \tau$, a kako $p \in G$, po forsing teoremi imamo da $b = \mathtt{I}_G(\tilde{b}) \in \mathtt{I}_G(\tau)$, čime smo pokazali i obratnu inkluziju, tj. da je $B \subseteq \mathtt{I}_G(\tau)$.

Ovim smo verifikovali ZF u $M[G]$, te ostaje još da pokažemo da u $M[G]$ važi i aksioma izbora. Neka $A \in M[G]$. Dovoljno je pokazati da postoje ordinal $\alpha \in M$ i surjekcija $f : \alpha \longrightarrow A$, $f \in M[G]$. Neka je $\tilde{A}$ ime skupa A. Kako u M važi AC, postoji ordinal $\alpha \in M$ takav da je

$$\mathrm{dom}(\tilde{A}) = \{\sigma_\xi \mid \xi < \alpha\}.$$

Dalje, za proizvoljna imena σ i τ primetimo da je

$$\langle \mathtt{I}_G(\sigma), \mathtt{I}_G(\tau)\rangle = \mathtt{I}_G(\{\langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle, \langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle, \langle\tau, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle\}),$$

tj.

$$\mathrm{op}(\sigma, \tau) = \{\langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle, \langle\{\langle\sigma, \mathbf{1}\rangle, \langle\tau, \mathbf{1}\rangle\}, \mathbf{1}\rangle\}$$

je ime uređenog para $\langle \mathtt{I}_G(\sigma), \mathtt{I}_G(\tau)\rangle$. Neka je

$$\tau = \{\mathrm{op}(\sigma_\xi, \check{\xi}) \mid \xi < \alpha\} \times \{\mathbf{1}\}.$$

Lako se proverava da je $f = \mathtt{I}_G(\tau)$ funkcija sa domenom α čiji je kodomen nadskup skupa A.

5.3.6 Zadatak Dokazati da $\mathbf{1} \Vdash V \neq L$.

Uputstvo

Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC i neka je $\mathcal{P}$ u M separativno uređenje bez minimalnih elemenata. Treba pokazati da je skup

$$D = \{p \in \mathcal{P} \mid (p \Vdash V \neq L)^M\}$$

gust u $\mathcal{P}$. U tom cilju, neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljan uslov i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$ koji sadrži p. Kako M i $M[G]$ imaju iste visine, imamo da je

$$L^M = L^{M[G]},$$

odakle zbog $G \notin M$ sledi da $M[G] \models G \notin L$, a time i $M[G] \models V \neq L$. Po forsing teoremi postoji uslov $q \in G$ takav da $M \models q \Vdash V \neq L$. G je kompatibilan skup, pa postoji $r \in G$ tako da je $r \leqslant p$ i $r \leqslant q$, odakle sledi da $r \in D$, čime smo dokazali da je D gust. $\square$

Kao što smo najavili, sekciju završavamo verifikacijom svih aksioma teorije ZFC u $V^{\mathcal{B}}$.

5.3.7 Teorema $\langle V^{\mathcal{B}}, \|\ \| \rangle \models$ ZFC.

Dokaz

Ekstenzionalnost :
Neka su $\tau, \sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall z(z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma) \Rightarrow \tau = \sigma\| = \mathbf{1}.$$

Prvo primetimo da je

$$\|(\forall z \in \tau) z \in \sigma\| = \|\tau \subseteq \sigma\| \quad \text{i} \quad \|(\forall z \in \sigma) z \in \tau\| = \|\sigma \subseteq \tau\|.$$

Sada je

$$\|(\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau \Rightarrow \tau = \sigma\| = \|\tau = \sigma\|^c \vee \|\tau = \sigma\| = \mathbf{1}.$$

Kako je

$$\forall z(z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma) \Leftrightarrow (\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau$$

valjana formula, mora biti

$$\|\forall z(z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma)\| = \|(\forall z \in \tau) z \in \sigma \wedge (\forall z \in \sigma) z \in \tau\| = \|\tau = \sigma\|,$$

odakle neposredno sledi da je

$$\|\forall z(z \in \tau \Leftrightarrow z \in \sigma) \Rightarrow \tau = \sigma\| = \mathbf{1}.$$

Prazan skup :
Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \notin 0)\| = \mathbf{1}.$$

Ovo neposredno sledi iz činjenice da je za svako $\tau \in V^{\mathcal{B}}$

$$\|\tau \in 0\| = \prod_{x \in \emptyset}(0(x)^c \vee \|x = \tau\|) = \prod \emptyset = \mathbf{1}.$$

Separacija :
Neka je $\varphi = \varphi(x, y_1, \ldots, y_n$ proizvoljna formula jezika teorije skupova i neka su $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da :

- $\mathrm{dom}(\tau) = \mathrm{dom}(\sigma) = D$
- $\tau(x) = \sigma(x) \wedge \|\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|, \quad x \in D.$

Nadalje ćemo umesto $\|\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)\|$ pisati kratko $\|\varphi\|$. Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \in \tau \Leftrightarrow x \in \sigma \wedge \varphi)\| = \mathbf{1}.$$

Kako je

$$\forall x(x \in \tau \Leftrightarrow x \in \sigma \wedge \varphi) \Leftrightarrow (\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi) \wedge (\forall x \in \sigma)(\varphi \Rightarrow x \in \tau)$$

valjana formula, dovoljno je pokazati da je

$$\|(\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi)\| = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \|(\forall x \in \sigma)(\varphi \Rightarrow x \in \tau)\| = \mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned}
\|(\forall x \in \tau)(x \in \sigma \wedge \varphi)\| &= \prod_{x \in D}(\tau(x)^c \vee \|x \in \sigma\| \wedge \|\varphi\|) \\
&= \prod_{x \in D}((\sigma(x) \wedge \|\varphi\|)^c \vee \|x \in \sigma\| \wedge \|\varphi\|) \\
&\geqslant \prod_{x \in D}((\sigma(x) \wedge \|\varphi\|)^c \vee \sigma(x) \wedge \|\varphi\|) = \mathbf{1} \\
\|(\forall x \in \sigma)(\varphi \Rightarrow x \in \tau)\| &= \prod_{x \in D}(\sigma(x)^c \vee \|\varphi\|^c \vee \|x \in \tau\|) \\
&\geqslant \prod_{x \in D}(\tau(x)^c \vee \tau(x)) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Aksioma para :
Neka su $\tau, \sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni i neka je $\rho \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\rho) = \{\sigma, \tau\}$
- $\rho(\tau) = \rho(\sigma) = \mathbf{1}$.

Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \in \rho \Leftrightarrow x = \tau \vee x = \sigma)\| = \mathbf{1}.$$

Ovo neposredno sledi iz činjenice da je

$$\begin{aligned}\|x \in \rho\| &= (\rho(\tau) \wedge \|x = \tau\|) \vee (\rho(\sigma) \wedge \|x = \sigma\|)\\ &= \|x = \tau\| \vee \|x = \sigma\|\\ &= \|x = \rho \vee x = \sigma\|.\end{aligned}$$

Unija :
Neka je $\sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljno. Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \bigcup\limits_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \mathrm{dom}(y) \ = D$
- $\tau(x) = \|(\exists y \in \sigma) x \in y\|, \quad x \in D$.

Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x(x \in \tau \Leftrightarrow (\exists y \in \sigma) x \in y)\| = \mathbf{1}.$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je

$$\|(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) x \in y\| = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \|(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau)\| = \mathbf{1}.$$

$$\begin{aligned}\|(\forall x \in \tau)(\exists y \in \sigma) x \in y\| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \|(\exists y \in \sigma) x \in y\|)\\ &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \tau(x)) = \mathbf{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau\| &= \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} (\sigma(y)^c \vee \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} (y(x)^c \vee \|x \in \tau\|)) \\
&= \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} (\sigma(y)^c \vee y(x)^c \vee \|x \in \tau\|) \\
&\geqslant \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} ((\sigma(y) \wedge y(x))^c \vee \tau(x)).
\end{aligned}$$

Kako je

$$\tau(x) = \sum_{z \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sigma(z) \wedge \|x \in z\| \geqslant \sigma(y) \wedge \|x \in y\| \geqslant \sigma(y) \wedge y(x),$$

to je,

$$\begin{aligned}
\|(\forall y \in \sigma)(\forall x \in y) x \in \tau\| &\geqslant \prod_{y \in \mathrm{dom}(\sigma)} \prod_{x \in \mathrm{dom}(y)} \big((\sigma(y) \wedge y(x))^c \vee (\sigma(y) \wedge y(x))\big) \\
&= \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Partitivni skup :
Neka je $\sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljno. Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = {}^{\mathrm{dom}(\sigma)}\mathcal{B} = D$
- $\tau(x) = \|x \subseteq \sigma\|, \quad x \in D.$

Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\forall x (x \in \tau \Leftrightarrow x \subseteq \sigma)\| = \mathbf{1}.$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je

$$\|(\forall x \in \tau) x \subseteq \sigma\| = \mathbf{1} \quad \text{i} \quad \|\forall x (x \subseteq \sigma \Rightarrow x \in \tau)\| = \mathbf{1}.$$

Što se tiče prve jednakosti,

$$\begin{aligned}
\|(\forall x \in \tau) x \subseteq \sigma\| &= \prod_{x \in D} (\tau(x)^c \vee \|x \subseteq \sigma\|) \\
&= \prod_{x \in D} (\|x \subseteq \sigma\|^c \vee \|x \subseteq \sigma\|) \ = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Da bismo pokazali da je

$$\|\forall x(x \subseteq \sigma \Rightarrow x \in \tau)\| = \mathbf{1},$$

dovoljno je pokazati da je za svako $x \in V^{\mathcal{B}}$

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x \in \tau\|.$$

Za proizvoljno $x \in V^{\mathcal{B}}$ neka je $x^* \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(x^*) = {}^{\mathrm{dom}(\sigma)}\mathcal{B} = D$
- $x^*(t) = \|t \in x\|, \quad t \in D.$

Kako je

$$\|x = x^*\| \wedge \|x^* \in \tau\| \leqslant \|x \in \tau\|,$$

to je za $\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x \in \tau\|$ dovoljno pokazati da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x = x^*\|.$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \|x^* \subseteq x\| &= \prod_{t \in D}(x^*(t)^c \vee \|t \in x\|) \\ &= \prod_{t \in D}(\|t \in x\|^c \vee \|t \in x\|) \;=\; \mathbf{1}, \end{aligned}$$

ostaje da se pokaže da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \|x \subseteq x^*\|.$$

Neka su $t \in \mathrm{dom}(x)$ i $s \in D$ proizvoljni. Tada je

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \|t = s\| \wedge \sigma(s) \leqslant \|s \in x\|,$$

pa je i

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \|t = s\| \wedge \sigma(s) \leqslant \|s \in x\| \wedge \|t = s\|.$$

Odavde sledi da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \sum_{s \in D} \sigma(s) \wedge \|t = s\| \leqslant \sum_{s \in D} \|s \in x\| \wedge \|s = t\|,$$

tj.

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \wedge \|t \in \sigma\| \leqslant \|t \in x^*\|.$$

Kako je

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \leqslant (x(t)^c \vee \|t \in \sigma\|) \wedge x(t) \leqslant \|t \in \sigma\|,$$

imamo da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \wedge x(t) \leqslant \|t \in x^*\|,$$

tj.

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant x(t)^c \vee \|t \in x^*\|,$$

odakle sledi da je

$$\|x \subseteq \sigma\| \leqslant \prod_{t \in \mathrm{dom}(x)} (x(t)^c \vee \|t \in x^*\|) \;=\; \|x \subseteq x^*\|.$$

Beskonačnost :
Pokazujemo da je $\|\check{\omega} \in \mathrm{Ind}\| = \mathbf{1}$ tj. da je

$$\|\check{0} \in \check{\omega} \wedge (\forall x \in \check{\omega})(x \cup \{x\} \in \check{\omega})\| = \mathbf{1}.$$

Kako $0 \in \omega$, to je $\|\check{0} \in \check{\omega}\| = \mathbf{1}$. Dalje,

$$\begin{aligned}
\|(\forall x \in \check{\omega})(x \cup \{x\} \in \check{\omega})\| &= \prod_{x \in \omega} (\check{\omega}(\check{x})^c \vee \|\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}\|) \\
&= \prod_{x \in \omega} \|\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}\| \;=\; \mathbf{1},
\end{aligned}$$

jer $x \cup \{x\} \in \omega$, pa je $\|\check{x} \cup \{\check{x}\} \in \check{\omega}\| = \mathbf{1}$.
Zamena :

Neka je $\varphi(x, z, y_1, \ldots, y_n)$ proizvoljna formula jezika teorije skupova. Uočimo sledeći ekvivalent aksiome zamene:

$$\forall u \exists v (\forall x \in u)(\exists z \in v)(\exists t \varphi(x, t, \overline{y}) \Rightarrow \varphi(x, z, \overline{y})).$$

Za ovaj oblik aksiome zamene smo se odlučili zbog ograničenih kvantora i činjenice da zbog teoreme refleksije nije potrebna jedinstvenost z–a.

Neka su $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Napomenimo da ćemo radi preglednosti koristiti skraćenicu $\overline{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Hoćemo da pokažemo da je

$$\|\exists v (\forall x \in \sigma)(\exists z \in v)(\exists t \varphi(x, t, \overline{\sigma}) \Rightarrow \varphi(x, z, \overline{\sigma}))\| = \mathbf{1}.$$

Neka je

$$a(x, z) = \|\exists t \varphi(x, t, \overline{\sigma}) \Rightarrow \varphi(x, z, \overline{\sigma})\|, \quad x, z \in V^{\mathcal{B}}.$$

Kako je

$$\forall x \exists z (\exists t \varphi(x, t, \overline{y}) \Rightarrow \varphi(x, z, \overline{y}))$$

valjana formula, mora biti

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in V^{\mathcal{B}}} a(x, z) \ = \ \mathbf{1}.$$

Kako je

$$\{a(x, z) \mid x \in \mathrm{dom}(\sigma), z \in V^{\mathcal{B}}\}$$

skup, postoji ordinal α takav da je

$$\prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in V^{\mathcal{B}}} a(x, z) = \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in V_\alpha^{\mathcal{B}}} a(x, z) \ = \ \mathbf{1}.$$

Neka je $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da je

- $\mathrm{dom}(\tau) = M_\alpha^{\mathcal{B}}$

- $\tau(x) = \mathbf{1}, \quad x \in M_\alpha^{\mathcal{B}}$.

Sada je

$$\begin{aligned}\|(\forall x \in \sigma)(\exists z \in \tau)a(x,z)\| &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M_\alpha^{\mathcal{B}}} \tau(z) \wedge a(x,z) \\ &= \prod_{x \in \mathrm{dom}(\sigma)} \sum_{z \in M_\alpha^{\mathcal{B}}} a(x,z) \ = \mathbf{1}.\end{aligned}$$

Regularnost :
Pođimo od sledećeg ekvivalenta aksiome regularnosti :

$$\forall x((\forall t \in x)\varphi(t,\overline{y}) \Rightarrow \varphi(x,\overline{y})) \Rightarrow \forall x \varphi(x,\overline{y}).$$

Neka je

$$b = \|\forall x((\forall t \in x)\varphi(t,\overline{y}) \Rightarrow \varphi(x,\overline{y}))\|.$$

Neka su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljni. $\in$–indukcijom pokazujemo da je

$$b \leqslant \|\varphi(\tau,\overline{\sigma})\|, \quad \tau \in V^{\mathcal{B}}.$$

Uočimo proizvoljno $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ i neka za svako $t \in \mathrm{dom}(\tau)$ važi

$$b \leqslant \|\varphi(t,\overline{\sigma})\|.$$

Tada je

$$b \leqslant \prod_{t \in \mathrm{dom}(\tau)} (\tau(t)^c \vee \|\varphi(t,\overline{\sigma})\|) = \|(\forall t \in \tau)\varphi(t,\overline{\sigma})\|.$$

S druge strane,

$$b \leqslant \|(\forall t \in \tau)\varphi(t,\overline{\sigma})\|^c \vee \|\varphi(\tau,\overline{\sigma})\|,$$

pa mora biti $b \leqslant \|\varphi(\tau,\overline{\sigma})\|$.
Izbor :
Neka je $\sigma \in V^{\mathcal{B}}$ proizvoljno. S obzirom na dužinu dokaza, ovde ćemo samo dati konstrukciju odgovarajuće Booleovske funkcije izbora za σ.

Prvo definišimo pojam *Booleovskog para*. Za proizvoljne $x, y \in V^{\mathcal{B}}$ neka je $\{x,y\}^{\mathcal{B}} \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\{x,y\}^{\mathcal{B}}) = \{x,y\}$
- $\{x,y\}^{\mathcal{B}}(x) = \{x,y\}^{\mathcal{B}}(y) = \mathbf{1}$.

Sada Booleovski par definišemo sa

$$\langle x,y\rangle^{\mathcal{B}} = \{\{x,y\}^{\mathcal{B}}, \{x\}^{\mathcal{B}}\}^{\mathcal{B}}.$$

Neka je β ordinal takav da je

$$\mathrm{dom}(\sigma) = \{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \beta\}.$$

Za svako $\alpha \in \beta$ neka je

$$y_\alpha = \sigma(\sigma_\alpha) \wedge \prod_{\xi\in\alpha} \|\sigma_\xi = \sigma_\alpha\|.$$

Pokažimo da za svako $\alpha \in \beta$ postoji $\pi_\alpha \in V^{\mathcal{B}}$ tako da je

$$\|\sigma_\alpha \neq 0 \Rightarrow \pi_\alpha \in \sigma_\alpha\| = \mathbf{1}.$$

S obzirom da je $V^{\mathcal{B}}$ pun model, to je dovoljno pokazati da je

$$\|0 \neq \sigma_\alpha \Rightarrow \exists x(x \in \sigma_\alpha)\| = \mathbf{1}.$$

Zaista,

$$\begin{aligned}
\|0 \neq \sigma_\alpha \Rightarrow \exists x(x \in \sigma_\alpha)\| &= \|0 = \sigma_\alpha\| \vee \sum_{x\in V^{\mathcal{B}}} \|x \in \sigma_\alpha\| \\
&= \|\sigma_\alpha \subseteq 0\| \vee \sum_{x\in V^{\mathcal{B}}} \|x \in \sigma_\alpha\| \\
&= \prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x)^c \vee \sum_{x\in V^{\mathcal{B}}} \|x \in \sigma_\alpha\| \\
&\geqslant \prod_{x\in\mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x)^c \vee \sum_{x\in\mathrm{dom}(\sigma_\alpha)} \sigma_\alpha(x) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

Uz prethodnu simboliku, neka je za svako $\alpha \in \beta$

$$x_\alpha = \langle \sigma_\alpha, \pi_\alpha\rangle^{\mathcal{B}}.$$

Uočimo $\tau \in V^{\mathcal{B}}$ tako da

- $\mathrm{dom}(\tau) = \{x_\alpha \mid \alpha \in \beta\}$
- $\tau(x_\alpha) = y_\alpha, \quad \alpha \in \beta.$

Može se pokazati da je τ Booleovska funkcija izbora za σ, tj. da je

$$\|\sigma \neq 0 \Rightarrow \tau : \sigma \longrightarrow \bigcup \sigma \wedge (\forall x \in \sigma)\tau(x) \in x\| = \mathbf{1}.$$

$\square$

5.4 Očuvanje kardinala i kofinalnosti

Za uređenje $\mathcal{P}$ kažemo da:

- *Čuva kofinalnosti*, ako za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ i svaki granični ordinal $\alpha \in M$ važi
$$(\mathrm{cf}\,\alpha)^M = (\mathrm{cf}\,\alpha)^{M[G]};$$
- *Čuva kardinale*, ukoliko za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ i svaki granični ordinal $\alpha \in M$ važi
$$M \models \alpha \in \mathrm{Card} \quad \text{akko} \quad M[G] \models \alpha \in \mathrm{Card}.$$

5.4.1 Zadatak Neka $\mathcal{P}$ čuva kofinalnosti. Dokazati da tada $\mathcal{P}$ čuva kardinale.

5.4.2 Napomena Prikry je pokazao da, u opštem slučaju, forsing koji čuva kardinale ne mora da čuva kofinalnosti. Preciznije, za proizvoljan prebrojiv tranzitivan model M teorije ZFC takav da

$$M \models \text{“}\kappa \text{ je merljiv kardinal”},$$

Prikry je u M konstruisao uređenje $\mathcal{P}$ koje čuva kardinale, koje ne kolapsira kardinale, i koje ima dodatno svojstvo da

$$M[G] \models \mathrm{cf}\,\kappa = \omega$$

za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$.

Prelazimo na opis svojstava koje treba da ima uređenje $\mathcal{P}$ kako bi očuvalo kardinale i kofinalnosti. To su pre svega κ-c.c. i κ-zatvorenost. Pokazaćemo da prvo od njih obezbeđuje očuvanje kardinala i kofinalnosti $\geqslant \kappa$, dok drugo čuva kardinale i kofinalnosti ispod κ.

5.4.3 Definicija Uređenje $\mathcal{P}$ zadovoljava κ-c.c. (κ chain condition) ako u $\mathcal{P}$ nema antilanaca (antilanac je skup međusobno inkompatibilnih elemenata) kardinalnosti $\geqslant \kappa$.

5.4.4 Definicija Uređenje $\mathcal{P}$ je *κ-zatvoreno* ako za svako $\gamma < \kappa$ i svaki niz $\langle p_\xi \mid \xi < \gamma \rangle$ u $\mathcal{P}$ takav da je

$$p_0 \geqslant p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots,$$

postoji $p \in \mathcal{P}$ tako da je $p \leqslant p_\xi$ za svako $\xi < \gamma$.

5.4.5 Lema *Neka $\mathcal{P} \in M$, $M \models$ "$\mathcal{P}$ zadovoljava κ-c.c.", $A, B \in M$, G je M-generički filter u $\mathcal{P}$, i neka je $f \in M[G]$ funkcija čiji je domen skup A, a kodomen skup B. Tada postoji funkcija $F \in M$ sa sledećim svojstvima:*

1. $F : A \longrightarrow P(B)$;
2. $(\forall a \in A)(f(a) \in F(a))$;
3. $(\forall a \in A)(M \models |F(a)| < \kappa)$.

Dokaz

Neka je $\tilde{f}$ ime funkcije f i neka je $p \in G$ uslov takav da

$$p \Vdash \tilde{f} : \check{A} \longrightarrow \check{B}.$$

Traženu funkciju F definišimo sa

$$F(a) = \{b \in B \mid (\exists q \leqslant p)(q \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b})\}.$$

Na osnovu forsing teoreme $F \in M$ (relacija $\Vdash$ je definabilna u M). Pokažimo da F zadovoljava 1–3. Prva stavka je očigledno zadovoljena, pa prelazimo na drugu. Neka je $a \in A$ proizvoljno i neka je $b = f(a)$. Tada postoji $r \in G$ tako da

$$r \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b},$$

a kako su uslovi $r, p \in G$ kompatibilni, postoji uslov $q \in G$ manji i od p i od r. Dakle, $q \leqslant p$ i $q \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b}$ $(q \leqslant r)$, odakle sledi da $b \in F(a)$.

Prelazimo na dokaz poslednjeg svojstva. Neka je $a \in A$ proizvoljno. U M važi AC, pa postoji funkcija $g \in M$, $g : F(a) \longrightarrow \mathcal{P}$ takva da za svako $b \in F(a)$, $g(b) \leqslant p$ i $g(b) \Vdash \tilde{f}(\check{a}) = \check{b}$. Ako je $b \neq b'$ $(b, b' \in F(a))$, onda uslovi $g(b)$ i $g(b')$ moraju biti inkompatibilni, jer forsiraju međusobno inkonsistentne rečenice. Dakle,

$$\{g(b) \mid b \in F(a)\}$$

je antilanac u $\mathcal{P}$, a kako $g \in M$, zajedno sa prethodnim imamo da

$$M \models |g(a)| = |F(a)| < \kappa.$$

$\square$

5.4.6 Teorema *Neka $\mathcal{P} \in M$ i $M \models$ "$\mathcal{P}$ zadovoljava κ-c.c.". Tada $\mathcal{P}$ čuva kofinalnosti $\geqslant \kappa$. Ako još i $M \models \kappa \in \mathrm{Reg}$, onda $\mathcal{P}$ čuva kardinale $\geqslant \kappa$.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno. Tada postoji ordinal $\lambda \geqslant \kappa$ takav da $M \models \lambda \in \mathrm{Reg}$ i $M[G] \models \lambda \notin \mathrm{Reg}$. Odavde sledi da postoji ordinal $\alpha \in M$ i funkcija $f \in M[G]$ koja kofinalno slika α u λ. Na osnovu prethodne leme, postoji funkcija $F \in M$ takva da važi:

1. $F : \alpha \longrightarrow P(\lambda)$;

2. $(\forall a \in \alpha)(f(a) \in F(a))$;

3. $(\forall a \in \alpha)(M \models |F(a)| < \kappa)$.

Neka je

$$S = \bigcup \{F(a) \mid a \in \alpha\}.$$

Primetimo da $S \in M$ i da je S neograničen podskup od λ. Međutim, računajući u M,

$$|S| = \sum_{a\in\alpha} |F(A)| < \sum_{a\in\alpha} \kappa.$$

Kako u M važi $|\alpha| < \lambda$, $\kappa \leqslant \lambda$ i $\sum\limits_{a\in\alpha} \kappa = \max\{\kappa, |\alpha|\}$, imamo da

$$M \models |S| < \lambda,$$

što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je λ regularan kardinal u M.

□

Skup $D \subseteq \mathcal{P}$ je *otvoren* u $\mathcal{P}$ ako sadrži donji konus svakog svog elementa, tj. ako $p \in D$ onda i $q \in D$ za svako $q \leqslant p$.

5.4.7 Lema *Neka je $\mathcal{P}$ κ–zatvoreno. Tada je za proizvoljnu familiju $\{D_\alpha \mid \alpha \in \lambda\}$ ($\lambda < \kappa$) gustih otvorenih skupova u $\mathcal{P}$ skup*

$$D = \bigcap_{\alpha\in\lambda} D_\alpha$$

gust i otvoren u $\mathcal{P}$.

Dokaz

Iz definicije skupa D neposredno sledi njegova otvorenost, te ostaje još da pokažemo i da je gust u $\mathcal{P}$.

Neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljno. Pošto je svaki od skupova D_α gust i da je $\mathcal{P}$ κ-zatvoreno, indukcijom po λ se sasvim lako pokazuje da postoji opadajući niz $\langle p_\alpha \mid \alpha < \lambda\rangle$ u $\mathcal{P}$ takav da je $p_0 \leqslant p$ i da je $p_\alpha \in D_\alpha$ za svako $\alpha < \lambda$.

Sada iz κ-zatvorenosti uređenja $\mathcal{P}$ sledi egzistencija $q \in \mathcal{P}$ takvog da je

$$r \leqslant p_\alpha$$

za svako $\alpha < \lambda$. Ovo upravo znači da je $q \leqslant p$ i da $q \in D$, što je i trebalo dokazati. □

5.4.8 Teorema *Neka je $\mathcal{P}$ κ-zatvoreno, neka $A \in M$ i neka*

$$M[G] \models a : \lambda \longrightarrow A,$$

pri čemu $M \models \lambda < \kappa \wedge \lambda \in \mathrm{Card}$. Tada $a \in M$. Posebno, u $M[G]$ su očuvani kardinali i kofinalnosti manji od κ i u $M[G]$ nema novih podskupova od λ.

Dokaz

Neka je $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}}$ ime funkcije a. Na osnovu teoreme 5.2.13 postoji uslov $p \in G$ takav da $p \Vdash \tilde{a} : \check{\lambda} \longrightarrow \check{A}$, tj.

$$p \Vdash (\forall x \in \check{\lambda})(\exists_1 y \in \check{A})\langle x, y\rangle \in \tilde{a}.$$

Odavde sledi da

$$p \Vdash (\exists x \in A)\langle \check{\alpha}, \check{x}\rangle \in \tilde{a}$$

za svako $\alpha < \lambda$, što povlači da je za svako $\alpha < \lambda$ skup

$$D_\alpha = \{q \leqslant p \mid (\exists x \in A)(q \Vdash a(\check{\alpha}) = \check{x})\}$$

otvoren i gust ispod p. Primetimo da $D_\alpha \in M$. Neka je

$$D = \bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha.$$

Na osnovu prethodne leme je D otvoren i gust ispod p. Da $D \in M$ neposredno sledi iz činjenice da je M model teorije ZFC koji sadrži λ i svaki od skupova D_α, $\alpha < \lambda$. Pošto je G M-generički filter, možemo izabrati uslov $p_a \in D \cap G$. Funkciju $f : \lambda \longrightarrow A$ definišimo na sledeći način:

$$f(\alpha) = x \Leftrightarrow_{\mathrm{def}} p_a \Vdash \tilde{a}(\check{\alpha}) = \check{x}.$$

S obzirom da se u M može odlučiti da li $p_a \Vdash \tilde{a}(\check{\alpha}) = \check{x}$, vidimo da $f \in M$. Kako

$$p_a \Vdash \tilde{a} = \check{f},$$

imamo da $M[G] \models a = f$, odakle zbog tranzitivnosti modela $M[G]$ mora biti i $a = f$. □

5.4.9 Posledica *Ako je $\mathcal{P}$ κ-zatvoreno, pri čemu je κ regularan kardinal u M, onda je u $M[G]$ očuvan i κ.*

Dokaz Pretpostavimo suprotno. Tada je u $M[G]$ postoji kardinal $\lambda < |kappa|^{M[G]}$ i funkcija $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ takva da je niz $\langle f(\xi) \mid \xi < \lambda \rangle$ kofinalan u κ. Međutim, po prethodnoj teoremi, $f \in M$, odakle sledi da κ nije regularan kardinal u M - kontradikcija. □.

Iz prethodnih razmatranja neposredno sledi da κ-zatvoreno i κ-c.c. uređenje $\mathcal{P}$, pri čemu je κ regularan kardinal u M, čuva kardinale i kofinalnosti. Od posebnog interesa su tzv. c.c.c. uređenja, odnosno uređenja koja zadovoljavaju $\aleph_1$-c.c. Kako je ω apsolutan kardinal, c.c.c. uređenja čuvaju sve kardinale i kofinalnosti.

Sekciju završavamo kombinatornim tvrđenjem koje ćemo koristiti u utvrđivanju κ-c.c. za razna uređenja $\mathcal{P}$. Prethodno definišimo pojam Δ-*sistema* odnosno *kvazi-disjunktne familije*:

5.4.10 Definicija

Familija skupova A je *kvazi-disjunktna* (Δ-*sistem*) ako postoji skup r, koji zovemo i korenom familije A, takav da je $a \cap b = r$ za svaka dva međusobno različita skupa $a, b \in A$.

5.4.11 Δ-sistem lema *Neka je κ beskonačan kardinal i neka je $\lambda > \kappa$ regularan kardinal takav da je*

$$(\forall \xi < \lambda)(|[\xi]^{<\kappa}| < \lambda).$$

Tada, za svaku familiju skupova A takvu da je $|A| \geqslant \lambda$ i da

$$(\forall a \in A)(|a| < \kappa),$$

postoji Δ-sistem $B \subseteq A$ kardinalnosti λ.

Dokaz

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $|A| = \lambda$. Tada je $|\bigcup A| \leqslant \lambda$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\bigcup A \subseteq \lambda$. Tada svaki element a skupa A ima tip uređenja $< \kappa$ (kao podskup od λ). Kako je λ regularan kardinal veći od κ, postoji $\rho < \kappa$ tako da je skup

$$A_1 = \{a \in A \mid \mathrm{tp}\langle a, \in\rangle = \rho\}$$

kardinalnosti λ.

Primetimo da je $\bigcup A_1 = \lambda$. Zaista, za proizvoljno $\alpha < \lambda$, kako je $|[\alpha]^{<\kappa}| < \lambda$, iz regularnosti kardinala λ i izbora skupa A_1 sledi da postoji $x_\alpha \in A_1$ tako da $x_\alpha \not\subseteq \alpha$. Odavde sledi da je skup $\bigcup A_1$ neograničen u λ, a kako je $\bigcup A_1 \subseteq \lambda$, mora biti i $\bigcup A_1 = \lambda$.

Za $x \in A_1$ i $\xi < \rho$, sa $x(\xi)$ označimo ξ-ti element skupa x (uređenje je indukovano sa $\in$). Kako je

$$\lambda = \bigcup A_1 = \bigcup_{\xi<\rho} \{x(\xi) \mid x \in A_1\}$$

i kako je λ regularan kardinal, postoji $\xi < \rho$ tako da je

$$|\xi < \rho\{x(\xi) \mid x \in A_1\}| = \lambda.$$

Neka je ξ_0 najmanje takvo $\xi < \rho$. Definišimo ordinal α_0 sa

$$\alpha_0 = \bigcup \{x(\eta) + 1 \mid x \in A_1 \wedge \eta < \xi_0\}.$$

Tada je $\alpha_0 < \lambda$ i $x(\eta) < \alpha_0$ za svako $x \in A_1$ i svako $\eta < \xi_0$. Transfinitnom rekurzijom po $\mu < \lambda$ biramo $x_\mu \in A_1$ tako da je

$$x_\mu(\xi_0) > \max\{\alpha_0, \sup\{x_\nu(\eta) \mid \eta < \rho \wedge \nu < \mu\}\}.$$

Neka je

$$A_2 = \{x_\mu \mid \mu < \lambda\}.$$

Tada je $|A_2| = \lambda$ i $x \cap y \subseteq \alpha_0$ za svak dva medjusobno različita skupa x i y iz familije A_2. Najzad, kako je $\{\alpha_0]^{<\kappa}| < \lambda$, postoje $r \subseteq \alpha_0$ i familija $B \subseteq A_2$ kardinalnosti λ takva da za svako $x \in B$ važi

$$x \cap \alpha_0 = r,$$

odakle sledi da je B traženi Δ-sistem. $\square$.

5.5 Nezavisnost kontinuum hipoteze

Pod *Cohenovim uređenjem* podrazumevamo uređenje oblika

$$\langle Fn(I,J), \supseteq \rangle,$$

pri čemu je I proizvoljan skup, J je najviše prebrojiv skup ($|J| \geqslant 2$), a elementi skupa $Fn(I,J)$ su sve funkcije čiji je domen konačan podskup skupa I i čiji je kodomen podskup skupa J.

Neka su $p, q \in Fn(I,J)$ proizvoljni uslovi. S obzirom na definiciju $Fn(I,J)$, vidimo da su p i q inkompatibilni ako i samo ako postoji $i \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ tako da $p(i) \neq q(i)$.

5.5.1 Lema *Svako Cohenovo uređenje zadovoljava c.c.c.*

Dokaz

Neka je $\langle Fn(I,J), \supseteq \rangle$ proizvoljno Cohenovo uređenje. S obzirom da tvrđenje trivijalno važi u slučaju kada je skup I najviše prebrojiv, od interesa je slučaj kada je skup I neprebrojiv.

Neka je $X \subseteq Fn(I,J)$ neprebrojiv i neka je

$$A = \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in X\}.$$

Na osnovu Δ-sistem leme, postoji neprebrojiva kvazi-disjunktna familija $B \subseteq A$. Ako su $p, q \in Fn(I,J)$ takvi da je $p \perp q$ i $\mathrm{dom}(p), \mathrm{dom}(q) \in B$, onda se inkompatibilnost ostvaruje na nekom $i \in r$. Kako je r konačan i kako je J najviše prebrojiv, međusobno inkompatibilnih uslova takvih da im je domen u B ne može biti neprebrojivo mnogo.

Dakle, u X postoje dva međusobno kompatibilna uslova. Kako ovo važi za svaki neprebrojivi $X \subseteq Fn(I,J)$, u $Fn(I,J)$ ne postoje neprebrojivi antilanci. $\square$

Generičko proširenje modela M dobijeno Cohenovim uređenjem zovemo i *Cohenovim modelom.* Na osnovu prethodne leme sledi da Cohenov forsing (Cohen forcing) čuva kardinale i kofinalnosti.

U nastavku ćemo posebnu paznju obratiti Cohenovim modelima koji nastaju pomoću uređenja

$$\langle Fn(\kappa \times \omega, 2), \supseteq \rangle,$$

pri čemu je κ u M neprebrojiv kardinal. Napomenimo da podrazumevamo da $Fn(\kappa \times \omega, 2) \in M$.

5.5.2 Lema *Neka je G M-generički filter u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Tada*

$$\bigcup G : \kappa \times \omega \longrightarrow 2.$$

Dokaz

Očigledno je $\bigcup G \subseteq (\kappa \times \omega) \times 2$. Kako su svaka dva uslova iz G kompatibilna, $\bigcup G$ mora biti funkcija. Ostaje još da se proveri da je $\mathrm{dom}(\bigcup G) = \kappa \times \omega$. Ovo je neposredna posledica činjenice da je za svako $\langle \alpha, n \rangle \in \kappa \times \omega$ skup

$$D(\alpha, n) = \{p \in Fn(\kappa \times \omega, 2) \mid \langle \alpha, n \rangle \in \mathrm{dom}(p)\}$$

gust u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$ (naravno, $D(\alpha, n) \in M$). $\square$

5.5.3 Definicija Neka je G proizvoljan M-generički filter u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Pod *Cohenovim realnim brojem* podrazumevamo skup

$$X_\alpha = \{n \in \omega \mid \bigcup G(\alpha, n) = 1\},$$

pri čemu je $\alpha < \kappa$.

Očigledno svaki Cohenov realan broj pripada generičkoj ekstenziji $M[G]$. Pokažimo da Cohenovi realni brojevi ne pripadaju polaznom modelu M.

5.5.4 Lema *Neka je X_α proizvoljan Cohenov realan broj. Tada*

$$X_\alpha \notin M.$$

Dokaz

Neka je S stari beskonačni podskup skupa ω ($S \in M$) i neka je $\chi_S : \omega \longrightarrow 2$ njegova karakteristična funkcija ($\chi_S(n) = 1 \Leftrightarrow n \in S$). Pokažimo da je skup

$$D = \{p \in Fn(\kappa \times \omega, 2) \mid (\exists n \in \omega)(p(\alpha, n) \neq \chi_S(n))\}$$

gust u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Neka je $q \in Fn(\kappa \times \omega, 2)$ proizvoljno. Izaberimo $n < \omega$ tako da $\langle \alpha, n \rangle \notin \mathrm{dom}(q)$. Neka je

$$p = \begin{cases} q \cup \{\langle \langle \alpha, n \rangle, 1 \rangle\} & , \quad n \notin S \\ q \cup \{\langle \langle \alpha, n \rangle, 0 \rangle\} & , \quad n \in S \end{cases} .$$

Očigledno je $p \supseteq q$ i $p \in D$, čime smo pokazali da je skup D gust u $Fn(\kappa \times \omega, 2)$. Kako još i $D \in M$, postoji uslov p_S koji pripada i G i D. Neka je $n_S < \omega$ takvo da je

$$p_S(\alpha, n_S) \neq \chi_S(n_S).$$

Kako je $\bigcup G(\alpha, n_S) = p(\alpha, n_S)$, imamo da

$$n_S \in (X_\alpha \setminus S) \cup (S \setminus X_\alpha),$$

tj. $X_\alpha \neq S$. $\square$

Kao neposrednu posledicu prethodne leme imamo činjenicu da u generičkom proširenju ω ima bar κ novih podskupova. Ako

$$M \models \kappa \geqslant \aleph_2,$$

onda iz prethodnih razmatranja neposredno sledi da

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \geqslant \kappa > \aleph_1,$$

tj. $M[G] \models \neg CH$. Ako još i $M \models \kappa^{\aleph_0} = \kappa$, onda će biti i

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa. \tag{5.1}$$

Kako bismo ovo dokazali, uvedimo pojam *finog imena*:

5.5.5 Definicija Ime $\tau \in M^{\mathcal{P}}$ je *fino ime* za podskup imena $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$, ukoliko je oblika

$$\bigcup\{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\},$$

pri čemu je svaki od skupova A_π antilanac u $\mathcal{P}$.

5.5.6 Lema *Neka su $\sigma, \sigma' \in M^{\mathcal{P}}$ proizvoljna imena. Tada postoji fino ime $\tau \in M^{\mathcal{P}}$ za podskup od σ takvo da*

$$1 \Vdash (\sigma' \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma' = \tau).$$

Dokaz

Za svako $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$ neka je A_π antilanac u $\mathcal{P}$ sa sledećim svojstvima:

1. $(\forall p \in A_\pi) p \Vdash \pi \in \sigma'$;

2. A_π je maksimalan u odnosu na prethodnu tačku.

Kako je $\Vdash$ definabilno u M i kako $M \models \mathrm{ZFC}$, imamo da

$$\{A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\} \in M.$$

Neka je

$$\tau = \bigcup\{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\}.$$

Preostaje da pokažemo da $1 \Vdash (\sigma' \subseteq \sigma \Rightarrow \sigma' = \tau)$. U dokazu koristimo forsing teoremu. Neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}$. Ako $\mathtt{I}_G(\sigma') \nsubseteq \mathtt{I}_G(\sigma)$, onda trivijalno

$$M[G] \models \mathtt{I}_G(\sigma') \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma) \Rightarrow \mathtt{I}_G(\sigma') = \mathtt{I}_G(\tau),$$

te je stoga od interesa slučaj kada je $\mathtt{I}_G(\sigma') \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma)$.

Prvo pokažimo da je $\mathtt{I}_G(\sigma') \subseteq I_G(\tau)$. Neka je $x \in \mathtt{I}_G(\sigma')$ proizvoljno. Tada postoje ime π i uslov p takvi da $\langle \pi, p\rangle \in \sigma$, $x = \mathtt{I}_G(\pi)$ i $p \in G$. Ako je $G \cap A_\pi \neq 0$, onda za jedinstveno $q \in G \cap A_\pi$ važi da

$$q \Vdash \pi \in \sigma' \wedge \pi \in \tau,$$

a time i $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\tau)$. Tvrdimo da je $G \cap A_\pi \neq 0$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji uslov $q \in G$ inkompatibilan sa svim uslovima iz A_π (svaki M-generički filter je i ultrafilter) takav da $q \Vdash \pi \in \sigma'$, pa bi $A_\pi \cup \{q\}$ bio antilanac koji zadovoljava 1., a ovo je u kontradikciji sa maksimalnošću antilanca A_π.

Preostaje da pokažemo da ej $\mathtt{I}_G(\tau) \subseteq \mathtt{I}_G(\sigma')$. Neka je $x \in \mathtt{I}_G(\tau)$ i neka su ime π i uslov p takvi da $\langle \pi, p\rangle \in \tau$, $p \in G$ i $\mathtt{I}_G(\pi) = x$. Iz definicije uslova τ tada neposredno sledi da $p \in A_\pi$, pa $p \Vdash \pi\sigma'$, a kako $p \in G$, imamo da $\mathtt{I}_G(\pi) \in \mathtt{I}_G(\sigma')$. $\square$

5.5.7 Teorema *Neka je $\mathcal{P} \in M$ separativno uređenje bez minimalnih elemenata takvo da važi:*

- $M \models |\mathcal{P}| = \kappa \geqslant \aleph_0$*;*
- $M \models$ *"$\mathcal{P}$ zadovoljava c.c.c.";*
- $M \models \nu = \kappa^\lambda \wedge \lambda \geqslant \aleph_0 \wedge \lambda \in \mathrm{Card}$.

Tada za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ imamo da

$$M[G] \models 2^\lambda \leqslant \nu.$$

Dokaz

U M, svaki antilanac uređenja $\mathcal{P}$ je najviše prebrojiv, odakle sledi da imamo najviše $\kappa^{\aleph_0}$ antilanaca u $\mathcal{P}$. Dalje,

$$|\mathrm{dom}(\check{\lambda})| = |\{\check{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}| = \lambda,$$

pa imamo najviše

$$(\kappa^{\aleph_0})^\lambda = \kappa^\lambda = \nu$$

finih imena za podskupove od $\check{\lambda}$. Neka je $\{\tau_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ skup svih takvih imena.

Neka je

$$\sigma = \{\langle \mathrm{op}(\check{\alpha}, \tau_\alpha), \mathbf{1}\rangle \mid \alpha < \nu\}$$

i neka je $f = \mathtt{I}_G(\sigma)$. Tada je $f(\alpha) = \mathtt{I}_G(\tau_\alpha), \alpha < \nu$. Na osnovu prethodne leme je

$$P(\lambda) \cap M[G] \subseteq \mathrm{rng}(f),$$

odakle sledi da

$$M[G] \models 2^\lambda < \nu.$$

□

Primetimo da smo prethodnom teoremom kompletirali dokaz za (5.1).

5.5.8 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZF. Pokazati da tada postoji prebrojiv tranzitivan model teorije

$$\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Uputstvo

Primetitmo da je L^M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFL, pa u njemu važe aksioma izbora i generalisana kontinuum hipoteza. Iskoristiti GCH u dokazu činjenice

$$L^M \models \aleph_2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

Traženi model je $L^M[G]$, pri čemu je G L^M-generički filter u

$$\langle Fn(\aleph_2 \times \omega, 2), \supseteq \rangle^{L^M}.$$

□

5.6 Nezavisnost aksiome izbora

Kao što smo ranije videli, ako u polaznom modelu M važi aksioma izbora, onda ona važi i u svakoj generičkoj ekstenziji. Ipak, forsing možemo koristiti u dokazu nezavisnosti aksiome izbora. Naime, krenućemo od prebrojivog tranzitivnog modela M teorije ZF + V=L, za skup uslova izabrati $(Fn(\omega \times \omega, 2))^M$ i pokazati da postoji podmodel N modela $M[G]$ takav da je $M \subseteq N \subseteq M[G]$, da je N model teorije ZF i da u N ne važi aksioma izbora. Prelazimo na konstrukciju modela N.

Neka je $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ automorfizam uređenja $\mathcal{P}$, tj. neka važe sledeći uslovi:

1. h je bijekcija;

2. $h(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$;

3. $(\forall p, q \in \mathcal{P})(p \leqslant q \Leftrightarrow h(p) \leqslant h(q))$.

Rekurzivno po imenskom rangu definišemo funkciju $h^* : V^{\mathcal{P}} \longrightarrow V^{\mathcal{P}}$ na sledeći način:

- $h^*(0) = 0$;

- $h^*(\sigma) = \{\langle h^*(\tau), h(t)\rangle \mid \langle \tau, t\rangle \in \sigma\}$.

Iz definicije h^* neposredno sledi da je h^* bijekcija kao i da je $h^*(\check{x}) = \check{x}$. Indukcijom po složenosti formule se sasvim lako pokazuje da

$$p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \text{ akko } h(p) \Vdash \varphi(h^*(\sigma_1), \ldots, h^*(\sigma_n)).$$

Primera radi, neka $p \Vdash \sigma = \tau$, $\langle h^*(\sigma_1), h(s_1)\rangle \in h^*(\sigma)$ i neka je D skup svih uslova $q \leqslant h(p)$ takvih da ako je $q \leqslant h(s_1)$, onda postoji $\langle h^*(\tau_1), h(t_1)\rangle \in h^*(\tau)$ tako da je $q \leqslant h(t_1)$ i da $q \Vdash h^*(\sigma_1) = h^*(\tau_1)$. Kako $p \Vdash \sigma = \tau$, skup

$$E = \{q \leqslant p \mid q \leqslant s_1 \Rightarrow (\exists \langle \tau_1, t_1\rangle \in \tau)(q \leqslant t_1 \wedge q \Vdash \sigma_1 = h^*\tau_1)\}$$

je gust ispod p, pa je i $D = h^*[E]$ gust ispod $h(p)$, odakle sledi da $h(p) \Vdash h^*(\sigma) \subseteq h^*(\tau)$. Na potpuno isti način se pokazuje da $h(p) \Vdash h^*(\tau) \subseteq h^*(\sigma)$, odakle sledi da $h(p) \Vdash h^*(\sigma) = h^*(\tau)$.

Neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Za svako $m < \omega$ neka je

$$a_m = \{n \in \omega \mid (\exists p \in G)p(m,n) = 1\}$$

i neka je

$$A = \{a_m \mid m \in \omega\}.$$

Kanonsko ime $\tilde{a}_m$ skupa a_m definišemo na sledeći način:

$$\tilde{a}_m = \{\langle \check{n}, p\rangle \mid p(m,n) = 1\}.$$

Iz definicije neposredno sledi da je $\tilde{a}_{mG} = a_m$ kao i da za svako $m \neq n$ važi

$$\mathbf{1} \Vdash \tilde{a}_m \neq \tilde{a}_n.$$

Kanonsko ime $\tilde{A}$ skupa A definišemo na sledeći način:

$$\tilde{A} = \{\langle \tilde{a}_m, \mathbf{1}\rangle \mid m \in \omega\}.$$

Neka je

$$N = (\mathrm{HOD}(A))^{M[G]},$$

tj. neka je N skup svih u $M[G]$ nasledno ordinalno definabilnih skupova sa parametrima iz $A \cup \{A\}$. Pokazaćemo da se A ne može dobro urediti u N, tj. da ne postoji injekcija $f : A \longrightarrow \mathrm{Ord}^{M[G]}$ ordinalno definabilna u $M[G]$. Naravno, na isti način kao i za HOD se pokazuje da je N tranzitivan model teorije ZF. Radi pojednostavljenja notacije nadalje radimo u $M[G]$.

Pretpostavimo suprotno, neka postoji injekcija $f : A \longrightarrow \mathrm{Ord}^{M[G]}$ koja je ordinalno definabilna iz A. Tada postoje formula ϕ, elementi $d_1, \ldots, d_m$ skupa A i ordinali $\beta_1, \ldots, \beta_n$ takvi da

$$f(a) = \alpha \Leftrightarrow \phi(a, \alpha, d_1, \ldots, d_m, \beta_1, \ldots, \beta_n, A).$$

Odavde sledi da je svaki element skupa A ordinalno definabilan iz $\bar{d}, A$. Izaberimo $a \in A$ tako da a nije član niza $\bar{d}$. Tada postoji formula φ i ordinali $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tako da je skup a jedinstveni svedok formule

$$\varphi(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \bar{d}, A).$$

Pokazaćemo da je ovo protivrečno. U tom cilju, na osnovu forsing teoreme je dovoljno pokazati sledeće:

5.6.1 Za svaki uslov $p \in G$ takav da

$$p \Vdash \varphi(\tilde{a}, \check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_k, \tilde{\bar{d}}, \tilde{A})$$

postoje uslov $q \leqslant p,\ q \in G$ i $b \in A$ takvi da $q \Vdash \tilde{a} \neq \tilde{b}$ i

$$q \Vdash \varphi(\tilde{b}, \check{\alpha}_1, \ldots, \check{\alpha}_k, \tilde{\bar{d}}, \tilde{A}).$$

Neka je $a = a_i,\ d_1 = a_{i_1}, \ldots, d_m = a_{i_m}$. Izaberimo $j \in \omega$ tako da za svako $l \in \omega$ imamo da $\langle j, l\rangle \notin \mathrm{dom}(p)$. Definišimo permutaciju $g : \omega \longrightarrow \omega$ na sledeći način:

- $g(i) = j$;
- $g(j) = i$;
- $g(x) = x$ za svako $x \in \omega \setminus \{i, j\}$.

Permutaciju g koristimo za definiciju automorfizma h uređenja $Fn(\omega \times \omega, 2)$ na sledeći način:

1. $\mathrm{dom}(h(s)) = \{\langle g(x), y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in \mathrm{dom}(s)\}$;
2. $h(s)(g(x), y) = s(x, y)$.

Iz definicije neposredno sledi da je $h^*(\tilde{A}) = \tilde{A}$, $h^*(\tilde{a}_x) = \tilde{a}_x$ za $x \in \omega \setminus \{i, j\}$, $h^*(\tilde{a}_i) = \tilde{a}_j$ i $h^*(\tilde{a}_j) = \tilde{a}_i$.

Kako $\langle j, x\rangle \notin \mathrm{dom}(p)$ ni za jedno $x \in \omega$, imamo da $\langle i, x\rangle \notin \mathrm{dom}(h(p))$ ni za jedno $x \in \omega$, pa su uslovi p i $h(p)$ kompatibilni. Neka je $q \in G$ proizvoljan uslov takav da je $q \supseteq p \cup s(p)$. Sasvim lako se proverava da q i $b = a_j$ zadovoljavaju 5.6.1.

5.7 ¬GCH na regularnim kardinalima

5.7.1 Definicija Neka su I i J neprazni skupovi i neka je κ beskonačan kardinal. *Cohenovo κ-uređenje* je uređenje

$$\langle Fn(I, J, \kappa) \supseteq\rangle,$$

pri čemu je $Fn(I, J, \kappa)$ skup svih funkcija čiji je domen podskup skupa I kardinalnosti manje od κ i čiji je kodomen podskup skupa J.

U ovoj sekciji ćemo pokazati sledeći Cohenov rezultat:

5.7.2 Teorema *Neka je M prebrojiv tranzitivan model ZFC, κ i λ kardinali u M takvi da*

$$M \models \kappa = \mathrm{cf}\ \kappa \wedge 2^{<\kappa} = \kappa \wedge \lambda^\kappa = \lambda.$$

Tada za proizvoljan M-generički filter G u $\langle Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa), \supseteq\rangle$ važi

$$M[G] \models 2^\kappa = \lambda.$$

Sasvim slično kao i u prethodnoj sekciji, proverava se da je $\bigcup G$ funkcija iz $\lambda \times \kappa$ u 2, kao i da je svaki od skupova

$$X_\alpha = \{\xi < \kappa \mid \bigcup G(\alpha, \xi) = 1\}$$

novi podskup skupa κ u $M[G]$. Ukoliko pokažemo da se u generičkoj ekstenziji čuvaju kardinali i kofinalnosti, na isti način kao i u prethodnoj sekciji možemo zaključiti da

$$M[G] \models 2^\kappa = \lambda.$$

Za ovo je dovoljno pokazati da je $\langle Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa), \supseteq\rangle$ ν-zatvoreno za svaki kardinal (u M) $\omega \leqslant \nu < \kappa$ i da zadovoljava κ^+CC.

5.7.3 Lema *Uz prethodnu simboliku, uređenje $\langle Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa), \supseteq\rangle$ je ν-zatvoreno za svaki u M beskonačan kardinal $\nu < \kappa$.*

Dokaz

Radi pojednostavljenja notacije, podrazumevamo da kompletnu argumentaciju sprovodimo unutar M. Neka je $\nu < \kappa$ beskonačan kardinal i neka je $\langle p_\xi \mid \xi < \nu \rangle$ opadajući niz u $\langle Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa), \supseteq \rangle$. Tada je očigledno

$$p = \bigcup_{\xi < \nu} p_\xi$$

funkcija sa domenom $\mathrm{dom}(p) = \bigcup_{\xi<\nu} \mathrm{dom}(p_\xi)$. Pošto je κ regularan, mora biti $|\mathrm{dom}(p)| < \kappa$, odakle sledi da

$$p \in Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa).$$

Kako je $p \supseteq p_\xi$ za svako $\xi < \nu$, imamo ν-zatvorenost. □

5.7.4 Teorema *Neka je κ regularan kardinal takav da je $2^{<\kappa} = \kappa$ i neka je λ kardinal takav da je $\lambda^\kappa = \lambda$. Tada $\langle Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa), \supseteq \rangle$ zadovoljava $\kappa^+ CC$.*

Dokaz

Neka je A proizvoljan podskup skupa $Fn(\lambda \times \kappa, 2, \kappa)$ kardinalnosti κ^+ i neka je

$$D = \{\mathrm{dom}(p) | \; p \in A\}.$$

Za $\alpha < \kappa^+$ je $|\alpha|^{<\kappa} \leqslant \kappa^{<\kappa}$. Neka je $\nu < \kappa$ beskonačan kardinal. Tada

$$\kappa^\nu \leqslant (2^\nu)^\nu = 2^\nu \leqslant \kappa, \tag{5.2}$$

jer je po pretpostavci $2^{<\kappa} = \kappa$. No sada iz (5.2) sledi da je

$$\kappa^{<\kappa} = \kappa < \kappa^+,$$

odakle na osnovu Δ-sistem leme sledi da postoji kvazi disjunktna familija $E \subseteq D$ kardinalnosti κ^+. Neka je $e \in [\lambda \times \kappa]^{<\kappa}$ koren familije E i neka je

$$A_E = \{p \in A \mid \mathrm{dom}(p) \in E\}.$$

Pošto je E kvazi disjunktna familija sa korenom e, inkompatibilnost uslova iz A_E može nastupiti samo za neko $\langle \alpha, \beta \rangle \in e$. Kako inkompatibilnih uslova sa domenom e ima

$$2^{<\kappa} = \kappa,$$

to A_E nije antilanac. □

5.7.5 Zadatak Neka je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZF. Dokazati da tada postoji prebrojiv tranzitivan model teorije

$$\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_2} = \aleph_{256}.$$

5.8 Levyjev kolaps

Neka je κ u M neprebrojivi regularan kardinal. *Levyjevo uređenje* je uređenje $\langle Lv(\kappa), \supseteq \rangle$, pri čemu je

$$Lv(\kappa) = \{p \in Fn(\kappa \times \omega, \kappa, \omega) \mid (\forall \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathrm{dom}(p))(p(\alpha, \beta) < \alpha)\}.$$

5.8.1 Lema *$\langle Lv(\kappa), \supseteq \rangle$ zadovoljava κCC.*

Dokaz
Neznatna modifikacija dokaza leme 5.5.1. □

5.8.2 Teorema *Neka je G proizvoljan M-generički filter u $Lv(\kappa)$. Tada je*

$$\omega_1^{M[G]} = \kappa.$$

Dokaz
S obzirom na prethodnu lemu, κ ostaje kardinal u $M[G]$. Uočimo proizvoljno $\alpha < \kappa$ i definišimo $f_\alpha \subseteq \omega \times \alpha$ na sledeći način:

$$\langle n, \xi \rangle \in f_\alpha \Leftrightarrow (\exists p \in G) p(\alpha, n) = \xi.$$

Kako su svaka dva uslova iz G kompatibilna, f_α je funckija. Pokažimo da je skup

$$D_{\alpha,\xi} = \{p \in Lv(\kappa) \mid (\exists n \in \omega) p(\alpha, n) = \xi\}$$

gust u $Lv(\kappa)$. U tom cilju, neka je p proizvoljan uslov iz $Lv(\kappa)$ i neka je $n \in \omega$ takvo da $\langle \alpha, n\rangle \notin \mathrm{dom}(p)$. Sada je $q = p \cup \{\langle \alpha, n, \xi\rangle\}$ traženi uslov manji od p koji pripada $D_{\alpha,\xi}$, što smo i hteli da pokažemo.

S druge strane, $D_{\alpha,\xi} \in M$, pa zbog M-generičnosti postoji uslov $p \in G \cap D_{\alpha,\xi}$. Neka je $n \in \omega$ takvo da je $p(\alpha, n) = \xi$. Tada je po definiciji $f_\alpha(n) = \xi$, čime smo zapravo pokazali da je funkcija f_α "na", pa je $|\alpha| \leqslant \omega$.

Ovo važi za svako $\alpha < \kappa$, pa

$$M[G] \models \kappa \leqslant \omega_1.$$

Pošto je κ neprebrojiv i u $M[G]$ ($\kappa\, CC$), imamo tvrđenje. $\square$

5.8.3 Posledica *Pretpostavimo da je κ jako nedostiživ u M. Tada za proizvoljan M-generički filter G u $Lv(\kappa)$ važi*

$$M[G] \models KH.$$

Dokaz

Neka je u M T puno binarno drvo visine κ. Zbog κ-c.c. Levyjev forsing ne kolapsira kardinale $\geqslant \kappa$, a kako u M T ima $\geqslant \kappa^+$ grana, imamo da

$$M[G] \models \text{“}T \text{ je } \omega_1 \text{ Kurepino drvo”}$$

(na osnovu prethodne teoreme je $\kappa = \omega_1^{M[G]}$). $\square$

5.9 Kompletna utapanja

Radi pojednostavljenja notacije, podrazumevamo da se kompletna argumentacija koja se ne odnosi na generička proširenja sprovodi unutar M.

5.9.1 Definicija Preslikavanje $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ je *kompletno utapanje* uređenja $\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle$ u uređenje $\langle \mathcal{Q}, \leqslant \rangle$ ako važi:

- $(\forall p_1, p_2 \in \mathcal{P})(p_1 \leqslant p_2 \Rightarrow i(p_1) \leqslant i(p_2))$;
- Uslovi p_1 i p_2 su inkompatibilni u $\mathcal{P}$ ako i samo ako su uslovi $i(p_1)$ i $i(p_2)$ inkompatibilni u $\mathcal{Q}$;
- Za svako $q \in \mathcal{Q}$ postoji $p_q \in \mathcal{P}$ tako da za svako $p \in \mathcal{P}$, ukoliko je $p \leqslant p_q$, onda su $i(p)$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$.

Posebno, ako je $\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle$ poduređenje uređenja $\langle \mathcal{Q}, \leqslant \rangle$, onda

$$\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle \subseteq_c \langle \mathcal{Q}, \leqslant \rangle$$

označava da je inkluzija kompletno utapanje $\mathcal{P}$ u $\mathcal{Q}$.

5.9.2 Zadatak Koristeći separativnost uređenja $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ pokazati da je svako kompletno utapanje $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ zaista utapanje, tj. da je 1–1 i da za svako $p_0, p_1 \in \mathcal{P}$ važi

$$p_0 \leqslant p_1 \Leftrightarrow i(p_0) \leqslant i(p_1).$$

Uputstvo

Neka je $i(p_0) \leqslant i(p_1)$. Ako nije $p_0 \leqslant p_1$, onda zbog separativnosti uređenja $\mathcal{P}$ postoji uslov $p_2 \leqslant p_0$ inkompatibilan sa p_1. Sada iz definicije kompletnog utapanja sledi da su $i(p_0)$ i $i(p_2)$ inkompatibilni. Međutim, zbog monotonosti i je

$$i(p_2) \leqslant i(p_0) \leqslant i(p_1),$$

čime smo dobili kontradikciju.

Neka je $i(p_0) = i(p_1)$. Prema upravo dokazanom mora biti i $p_0 \leqslant p_1$. Ako nije $p_1 \leqslant p_0$, onda zbog separativnosti $\mathcal{P}$ postoji $p_2 \leqslant p_1$ inkompatibilno sa p_0. Međutim, tada moraju biti $i(p_0)$ i $i(p_2)$ inkompatibilni, što je u suprotnosti sa $i(p_2) \leqslant i(p_1) = i(p_0)$.

$\square$

5.9.3 Zadatak Dokazati sledeće:

1. Svaki izomorfizam separativnih uređenja je i kompletno utapanje;

2. Ako je $I \subseteq I'$, onda je $Fn(I, J, \kappa) \subseteq_c Fn(I', J, \kappa)$

5.9.4 Zadatak Neka su $\langle \mathcal{P}, \leqslant \rangle$ i $\langle \mathcal{Q}, \leqslant \rangle$ u M separativna uređenja i neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ u M kompletno utapanje. Ako je H M-generički filter u $\mathcal{Q}$, pokazati da je $G = i^{-1}[H]$ M-generički filter u $\mathcal{P}$.

Uputstvo

Ako $p \in G$ i ako je $p \leqslant p'$, onda zbog monotonosti i mora biti i $i(p) \leqslant i(p')$. H je filter i $i(p) \in H$, pa je i $i(p') \in H$, odakle sledi da $p' \in H$.

Što se tiče preostale stavke iz definicije filtera, prvo primetimo da je G kompatibilan skup u $\mathcal{P}$, jer i čuva kompatibilnost i H je kompatibilan skup u $\mathcal{Q}$. Ukoliko pokažemo da je G M-generički, onda će G biti i filter u $\mathcal{P}$.

Pokažimo da je G M-generički skup. Neka je $D \in M$ gust u $\mathcal{P}$. Lako se proverava da je ili $H \cap i[D] \neq 0$, ili postoji $q \in H$ inkompatibilno sa svim elementima skupa $i[D]$. Pretpostavimo da postoji takvo q. Zbog kompletnosti i postoji $p_q \in \mathcal{P}$ tako da su za svaki uslov $p \leqslant p_q$ uslovi $i(p)$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$.

No D je gust u $\mathcal{P}$, pa postoji $p \in D$ tako da je $p \leqslant p_q$, odakle sledi da su $i(p)$ i q kompatibilni u $\mathcal{Q}$, što je u kontradikciji sa izborom q.

Dakle, takvo q ne postoji, pa je $H \cap i[D] \neq \emptyset$, tj. $G \cap D \neq \emptyset$. $\square$

5.9.5 Zadatak Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ izomorfizam i neka je $G \subseteq \mathcal{P}$ filter.

1. Dokazati da je $H = i[G]$ filter u $\mathcal{Q}$;

2. Dokazati da je G M generički ako i samo ako je H M-generički.

5.9.6 Teorema *Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ kompletno utapanje i neka je H M-generički filter u $\mathcal{Q}$. Tada je $i^{-1}[H]$ M-generički filter u $\mathcal{P}$ i*

$$M[i^{-1}[H]] \subseteq M[H]$$

Dokaz

Neka je $G = i^{-1}[H]$. Na osnovu zadatka 5.9.4 je G M-generički filter u M. S obzirom da $i \in M$ i da $H \in M[H]$, to i $G \in M[H]$. Kako je $M[G]$ najmanji prebrojivi tranzitivan model teorije ZFC takav da je $M \subseteq M[G]$ i da $G \in M[G]$, mora biti

$$M[G] \subseteq M[H].$$

$\square$

Primetimo da u slučaju kada je i izomorfizam imamo jednakost generičkih proširenja $M[G]$ i $M[H]$.

5.9.7 Zadatak Pokazati da je svako gusto utapanje ujedno i kompletno.

5.9.8 Zadatak Neka su G i H M-generički filteri u $\mathcal{P}$ takvi da je $G \subseteq H$. Dokazati da je $G = H$.

5.9.9 Definicija Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ u M gusto utapanje i neka je G filter u $\mathcal{P}$. Skup $G_i \subseteq \mathcal{Q}$ definišemo sa

$$G_i = \{q \in \mathcal{Q} \mid (\exists p \in \mathcal{P}) i(p) \leqslant q\}.$$

5.9.10 Zadatak Uz simboliku iz prethodne definicije, pokazati sledeće:

1. G_i je filter u $\mathcal{Q}$;
2. $G = i^{-1}[G_i]$;
3. G je M-generički ako i samo ako je G_i M-generički;

4. Ako je G M-generički, onda je $M[G] = M[G_i]$.

5.9.11 Definicija Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ utapanje. Za proizvoljno $\mathcal{P}$-ime σ rekurzivno definišemo odgovarajuće $\mathcal{Q}$ ime $i(\sigma)$ sa

$$i(\sigma) = \{\langle i(\tau), i(p)\rangle \mid \langle \tau, p\rangle \in \sigma\}.$$

5.9.12 Teorema *Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ u M kompletno utapanje. Tada važi:*

1. *Ako je H M-generički filter u $\mathcal{Q}$, onda je*

$$\sigma^{M[i^{-1}[H]]} = i(\sigma)^{M[H]}$$

   za svako $\mathcal{P}$-ime σ;

2. *Neka je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula apsolutna za tranzitivne modele teorije ZFC i neka su $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ proizvoljna $\mathcal{P}$-imena. Tada za svaki uslov $p \in \mathcal{P}$,*

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

   ako i samo ako

$$i(p) \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n));$$

3. *Ako je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{Q}$ gusto utapanje, onda za svaku formulu $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, proizvoljna $\mathcal{P}$-imena $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ i bilo koji uslov $p \in \mathcal{P}$ važi da*

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

   ako i samo ako

$$i(p) \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n)).$$

Dokaz

(1): Pošto je

$$\sigma^{M[i^{-1}[H]]} = \{\tau^{M[i^{-1}[H]]} \mid (\exists p \in i^{-1}[H])\langle \tau, p\rangle \in \sigma\},$$

kao i da je

$$0^{M[i^{-1}[H]]} = i(0)^{M[H]} = 0,$$

tvrđenje se sasvim lako dokazuje indukcijom po imenskom rangu.

(2): Pretpostavimo prvo da $p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ i uočimo proizvoljan M-generički filter H u $\mathcal{Q}$ takav da $i(p) \in H$. Da bismo pokazali da

$$i(p) \Vdash_{\mathcal{Q}} \varphi(i(\sigma_1), \ldots, i(\sigma_n)),$$

na osnovu forcing teoreme (teorema 5.2.13) je dovoljno pokazati da

$$M[H] \models \varphi(i(\sigma_1)^{M[H]}, \ldots, i(\sigma_n)^{M[H]}).$$

Kako je po (1)

$$i(\sigma_k)^{M[H]} = \sigma_k^{M[i^{-1}[H]]}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

u stvari treba dokazati da

$$M[H] \models \varphi(\sigma_1^{M[i^{-1}[H]]}, \ldots, \sigma_n^{M[i^{-1}[H]]}).$$

No formula φ je apsolutna za tranzitivne modele teorije ZFC, pa zbog $M[i^{-1}[H]] \subseteq M[H]$ imamo da

$$M[H] \models \varphi(\sigma_1^{M[i^{-1}[H]]}, \ldots, \sigma_n^{M[i^{-1}[H]]})$$

ako i samo ako

$$M[i^{-1}[H]] \models \varphi(\sigma_1^{M[i^{-1}[H]]}, \ldots, \sigma_n^{M[i^{-1}[H]]}).$$

No poslednje direktno sledi iz forcing teoreme i pretpostavke da $p \Vdash \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Što se tiče obratne implikacije, pretpostavimo da

$$p \nVdash \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n).$$

Tada postoji uslov $p_0 \leqslant p$ takav da

$$p_0 \Vdash \neg\varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_n),$$

pa po dokazanom smeru važi

$$i(p_0) \Vdash \neg\varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n)),$$

odakle zbog monotonosti i imamo da

$$ip \nVdash \neg\varphi(i(\sigma_1), \dots, i(\sigma_n)).$$

(3): Neznatna modifikacija dokaza stavke (2): treba primetiti da je $M[i^{-1}[H]] = M[H]$. □

5.9.13 Definicija Neka su $\langle \mathcal{P}_\xi, \leqslant, \mathbf{1}_\xi \rangle$, $\xi < \alpha$ separativna uređenja bez minimalnih elemenata. Njihov *proizvod* je uređenje

$$\langle \prod_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi, \leqslant, \mathbf{1} \rangle$$

definisano na sledeći način:

- $\langle p_\xi \mid \xi < \alpha \rangle \leqslant \langle q_\xi \mid \xi < \alpha \rangle \Leftrightarrow (\forall \xi < \alpha) p_\xi \leqslant q_\xi$;
- $\mathbf{1} = \langle \mathbf{1}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$.

Za proizvoljno $p \in \prod_{i\in I} P_i$ neka je

$$\operatorname{supp}(p) = \{i \in I \mid p(i) \neq \mathbf{0}\}.$$

Kanonsko utapanje $i_\eta : \mathcal{P}_\eta \longrightarrow \prod\limits_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi$ definišemo na sledeći način:

$$i_\eta(p)(\xi) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{1}_\xi & , & \xi \neq \eta \\ p & , & \xi = \eta \end{array} \right. .$$

U specijalnom slučaju kada je $\alpha = 2$ neka je

$$i_0(p) = \langle p, \mathbf{1} \rangle \ \text{ i } \ i_1(p) = \langle \mathbf{1}, p \rangle.$$

κ-podržan proizvod definišemo sa

$$\prod_{\xi<\alpha}^{<\kappa} \mathcal{P}_\xi = \{p \in \prod_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi \mid |\mathrm{supp}(p)| < \kappa\}.$$

5.9.14 Zadatak Pokazati da je svaka od funkcija i_η kompletno utapanje.

Kao što smo videli, gusta utapanja utapanja omogućavaju unifikaciju različitih forsinga. Posebno je interesantno da je forsing preko Lindenbaumove algebre $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ ekvivalentan Cohenovom forsingu preko $\mathrm{Fn}(\kappa, 2)$, pri čemu je $\kappa = |\mathbb{P}|$. Naime, ako je

$$\mathbb{P} = \{\mathtt{P}_\xi \mid \xi < \kappa\},$$

onda je funkcjia $i : \mathrm{Fn}(\kappa, 2) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{P})$ definisana sa

$$i(p) = [\bigwedge_{\xi \in \mathrm{dom}(p)} \mathtt{p}_\xi^{p(\xi)}],$$

pri čemu je $\mathtt{p}^0 = \neg\mathtt{p}$ i $\mathtt{p}^1 = \mathtt{p}$, gusto utapanje. Da bi smo ovo pokazali, treba zapravo da proverimo važenje prve dve stavke definicije 5.9.1, i da pokažemo da je $i[\mathrm{Fn}(\kappa, 2)]$ gust u $\mathcal{B}(\mathbb{P})$.

Ako je $p \supseteq q$, onda je formula

$$\bigwedge_{\xi \in \mathrm{dom}(q)} \mathtt{p}_\xi^{q(\xi)} \Rightarrow \bigwedge_{\xi \in \mathrm{dom}(p)} \mathtt{p}_\xi^{p(\xi)}$$

tautologija, odakle neposredno sledi da je $i(p) \leqslant_{\mathcal{B}(\mathbb{P})} i(q)$, čime je verifikovana prva stavka.

Ako su uslovi p i q inkompatibilni, onda psotoji $\xi \in \mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q)$ tako da je

$$p(\xi) = 1 - q(\xi).$$

Odavde neposredno sledi da je formula

$$\bigwedge_{\eta \in \mathrm{dom}(p)} \mathtt{p}_\eta^{p(\eta)} \ \wedge \bigwedge_{\zeta \in \mathrm{dom}(q)} \mathtt{p}_\zeta^{q(\zeta)}$$

kontradikcija ($\mathtt{p}_\xi^{p(\xi)}$ je negacija od $\mathtt{p}_\xi^{q(\xi)}$), pa $i(p)$ i $i(q)$ moraju biti inkompatibilni u $\mathcal{B}(\mathbb{P})$. Obratna implikacija se dokazuje sasvim slično, pa smo ovim proverili i drugu stavku.

Neka je φ proizvoljna iskazna formula koja nije kontradikcija i neka su $\mathtt{p}_{\xi_1}, \ldots, \mathtt{p}_{\xi_n}$ sva iskazna slova koja se javljaju u φ. Kako φ nije kontradikcija, postoje $a_1, \ldots, a_n \in \{0.1\}$ tako da je formula

$$\bigwedge_{k=1}^{n} \mathtt{p}_{\xi_k}^{a_k} \ \Rightarrow \ \varphi$$

tautologija. Ako je p uslov definisan sa

$$p = \{\langle \xi_1, a_1 \rangle, \ldots, \langle \xi_n, a_n \rangle\},$$

onda na osnovu prethodnog imamo da je $i(p) \leqslant_{\mathcal{B}(\mathbb{P})} [\varphi]$, odakle sledi da je $i[\mathrm{Fn}(\kappa, 2)]$ gust u $\mathcal{B}(\mathbb{P})$.

6

Proizvod forsing

Ukoliko ne naglasimo drukčije, podrazumevaćemo da su uređenja sa kojima radimo ili separativna bez minimalnih elemenata (uz dogovor da sva imaju zajednički maksimum koji ćemo označavati sa $\mathbf{1}$), ili kompletne bezatomične Booleove algebre.

Ovu restrikciju pravimo iz prostog razloga što nas zanimaju jedino ona uređenja koja u generičkim ekstenzijama daju nove skupove.

Kao i ranije, podrazumevamo da je M prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC.

6.1 Iteracija u dva koraka

6.1.1 Teorema [Proizvod lema] *Neka je G filter u $\mathcal{P}$ i neka je H filter u $\mathcal{Q}$. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *$G \times H$ je M-generički filter u $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$;*

2. *G je M-generički filter, a H je $M[G]$-generički filter;*

3. *H je M-generički filter, a G je $M[H]$-generički filter.*

U slučaju da je bilo koji od prethodna tri iskaza tačan imamo i da je

$$M[G \times H] = M[G][H] = M[H][G].$$

Dokaz

S obzirom na očiglednu simetriju, dokazaćemo samo da je (1) ekvivalentno sa (2).

(1) $\Rightarrow$ (2): Neka je $G \times H$ M-generički filter u $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. Pošto je

$$G = i_0^{-1}[G \times H]$$

i da je $i_0 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ kompletno utapanje, na osnovu zadatka 5.9.4 je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Pokažimo da je H $M[G]$-generički filter u $\mathcal{Q}$. U tom cilju, neka je $D \in M[G]$ gust u $\mathcal{Q}$ i neka je $\tilde{D} \in M^{\mathcal{P}}$ ime skupa D, tj. neka je

$$\tilde{D}^{M[G]} = D.$$

S obzirom na Forsing teoremu (teorema 5.2.13), postoji uslov $p_D \in G$ takav da

$$p_D \Vdash \tilde{D} \subseteq \check{\mathcal{Q}} \wedge (\forall x \in \check{\mathcal{Q}})(\exists y \in \tilde{D}) y \leqslant x.$$

Kako

$$\mathbf{1} \Vdash \check{q} \in \check{\mathcal{Q}}$$

za svako $q \in \mathcal{Q}$, imamo da

$$(\forall q \in \mathcal{Q})(p_D \Vdash \tilde{D} \subseteq \check{Q} \wedge (\exists x \in \tilde{D}) x \leqslant \check{q}). \tag{6.1}$$

Neka je

$$E = \{\langle p, q\rangle \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \mid p \leqslant p_D \wedge p \Vdash \check{q} \in \tilde{D}\}.$$

Pokažimo da postoji $\langle p, q\rangle \in (G \times H) \cap E$. S obzirom da $E \in M$ i da $\langle p_D, \mathbf{1}\rangle \in G \times H$, za ovo dovoljno je pokazati da je skup E gust ispod $\langle p_D, \mathbf{1}\rangle$ ($G \times H$ je M-generički).

U tom cilju uočimo proizvoljne $p \leqslant p_D$ i $q \in \mathcal{Q}$. Sada iz (6.1) sledi da

$$p \Vdash (\exists x \in \check{\mathcal{Q}})(x \in \tilde{D} \wedge x \leqslant \check{q}),$$

pa postoje $p_0 \leqslant p$ i $q_0 \leqslant q$ takvi da

$$p_0 \Vdash \check{q} \in \tilde{D} \wedge \check{q}_0 \leqslant \check{q}.$$

Dakle, $\langle p_0, q_0 \rangle \in E$, odakle sledi da je E gust ispod $\langle p_D, \mathbf{1} \rangle$.

Neka $\langle p, q \rangle \in E \cap (G \times H)$. Kako $p \Vdash \check{q} \in \tilde{D}$ i kako $p \in G$, po teoremi 5.2.13 imamo da $q \in D$, a kako $q \in H$, mora biti i $q \in D \cap H$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Očigledno je $G \times H$ filter u $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, pa prelazimo na dokaz generičnosti. Neka je $D \in M$ proizvoljan gust skup u $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ i neka je

$$E = \{q \in \mathcal{Q} \mid (\exists p \in G)\langle p, q \rangle \in D\}.$$

Uočimo proizvoljno $q \in \mathcal{Q}$. Neka je

$$E_q = \{p \in \mathcal{P} \mid (\exists q_0 \leqslant q)\langle p, q_0 \rangle \in D\}.$$

Zbog gustine skupa D u $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ imamo da je E_q gust u $\mathcal{P}$, a kako još i $E_q \in M$, postoji uslov $p \in \mathcal{P}$ takav da $p \in G \cap E_q$, odakle sledi da $q_0 \in E$.

Ovim smo pokazali da je E gust u $\mathcal{Q}$, a kako $E \in M[G]$, postoji $q \in H \cap E$. Odavde sledi da postoji uslov $p \in G$ takav da $\langle p, q \rangle \in D$, što upravo znači da je $(G \times H) \cap D \neq 0$.

Poslednji deo tvrđenja sledi direktno iz minimalnosti generičkih ekstenzija. $\square$

6.1.2 Teorema *Neka je κ beskonačan kardinal u M, $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ uređenja u M takva da je $\mathcal{P}$ κ–zatvoreno i da $\mathcal{Q}$ zadovoljava κ^+-c.c. Dalje, neka je $G \times H$ M-generički filter u $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. Tada za svako $A \in M$ i svaku funkciju $f : \kappa \longrightarrow A$ u $M[G \times H]$ važi da $f \in M$.*

Dokaz

Neka je $\tilde{f} \in M^{\mathcal{P} \times \mathcal{Q}}$ ime funkcije f i neka je $\langle p_f, q_f \rangle \in G \times H$ uslov takav da

$$\langle p_f, q_f \rangle \Vdash \tilde{f} : \check{\kappa} \longrightarrow \check{A}.$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\mathcal{Q}$ u M kompletna Booleova algebra. Za svako $\alpha < \kappa$ definišimo skup $D_\alpha \subseteq P$ na sledeći način:

$p \in D_\alpha \Leftrightarrow_{\text{def}}$ postoje particija $W \in M$ uslova q_f i skup

$$\{a_{\alpha,p,q} \mid q \in W\} \in M \cap P(A)$$

tako da za svako $q \in W$

$$\langle p, q\rangle \Vdash \tilde{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_{\alpha,p,q}.$$

Očigledno je D_α otvoren. Pokažimo da je D_α gust ispod p_f.

Neka je uslov $p \leqslant p_f$ proizvoljan. Rekurzivno ćemo konstrusati niz $\langle p_\xi \mid \xi < \beta\rangle$ u $\mathcal{P}$, antilanac $\{q_\xi \mid \xi < \beta\} \in M \cap (P(\mathcal{Q}) \setminus \{\mathbf{0}\})$ i skup $\{a_\xi \mid \xi < \beta\} \in M \cap P(A)$ tako da važi:

- $\beta < \kappa^+$;
- $p_0 \leqslant p$;
- $p_\eta \leqslant p_\xi$ za $\xi < \eta$;
- $\sum\{q_\xi \mid \xi < \kappa\} = q_f$ i $\{q_\xi \mid \xi < \beta\}$ je maksimalan antilanac ispod q_f;
- $\langle p_\xi, q_\xi\rangle \Vdash \tilde{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_\xi$.

Prelazimo na konstrukciju. Kako je $p \leqslant p_f$ i kako

$$\langle p_f, q_f\rangle \Vdash \tilde{f} : \check{\kappa} \longrightarrow \check{A},$$

to postoje $p_0 \leqslant p$, $q_0 \leqslant q_f$ i $a_0 \in A$ takvi da

$$\langle p_0, q_0\rangle \Vdash \tilde{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_0.$$

Pretpostavimo da smo konstrukciju obavili do nekog $\delta < \kappa^+$ (zbog κ^+-c.c. δ ne može biti $\geqslant \kappa^+$). Ako je $\sum\{q_\xi \mid \xi < \delta\} = q_f$, onda stajemo sa konstrukcijom i $\beta = \delta$. U suprotnom, zbog separativnosti postoji

$q \leqslant q_f$ inkompatibilno sa $\sum\{q_\xi \mid \xi < \delta\}$. S obzirom na κ-zatvorenost uređenja $\mathcal{P}$, postoji $p \in \mathcal{P}$ tako da je $p' \leqslant p_\xi$ za svako $\xi < \delta$. Na sasvim sličan način kao i malo pre zaključujemo da postoje $p_\delta \leqslant p'$, $q_\delta \leqslant q$ i $a_\delta \in A$ takvi da

$$\langle p_\delta, q_\delta \rangle \Vdash \tilde{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_\delta.$$

Naravno, konstrukcija staje u manje od κ^+ koraka zbog κ^+-c.c. koje zadovoljava $\mathcal{Q}$. Neka je $p' \leqslant p_\xi,\ \xi < \beta$ i neka je $a_{\alpha,p',\xi} = a_\xi$. Lako se proverava da $p' \in D_\alpha$.

Dakle, svi skupovi D_α su otvoreno gusti ispod p_f, pa je i $D = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} D_\alpha$ takođe otvoreno gust ispod p_f. Na osnovu proizvod leme G je M-generički filter u $\mathcal{P}$, pa kako $D \in M$, postoji uslov $p \in D \cap G$. S obzirom da p pripada svim skupovima D_α, za svako $\alpha \in \kappa$ možemo izabrati maksimalan antilanac W_α u $\mathcal{P}_2$ ($W_\alpha \in M$) i skup

$$\{a_{\alpha,p,q} \mid q \in W_\alpha\} \in M \cap P(A)$$

tako da za svako $q \in W_\alpha$

$$\langle p, q \rangle \Vdash \tilde{f}(\check{\alpha}) = \check{a}_{\alpha,p,q}.$$

Pošto je H generički ultrafilter u $\mathcal{Q}$, za svako $\alpha \in \kappa$ postoji jedinstveno $q_\alpha \in H \cap W_\alpha$. Definišimo u $M[H]$ funkciju $g : \kappa \longrightarrow A$ na sledeći način:

$$g(\alpha) = a_{\alpha,p,q_\alpha}\ ,\ \alpha \in \kappa\ .$$

Sada za svako $\alpha \in \kappa$ važi

$$\langle p, q_\alpha \rangle \Vdash \tilde{f}(\check{\alpha}) = \check{g}(\check{\alpha})\ ,$$

odakle sledi da je $f = g$. $\square$

6.2 Eastonov forsing

Easton je pokazao da kontinuum funkcija ima maksimalnu moguću slobodu na regularnim kardinalima, tj. da su jedina ograničenja ona koja se tiču monotonosti i kofinalnosti:

- $\kappa \leqslant \lambda \Rightarrow 2^\kappa \leqslant 2^\lambda$;
- $\operatorname{cf} 2^\kappa > \kappa$ za regularan κ.

U ovoj sekciji ćemo prikazati Eastonov forsing u slučaju kada se kontroliše vrednost kontinuum funkcije za skup mnogo regularnih kardinala.

6.2.1 Definicija

1. *Indeksna funkcija* je funkcija E čiji je domen skup regularnih kardinala;
2. *Eastonova indeksna funkcija* je indeksna funkcija sa sledećim svojstvima:
   (a) Za svako $\kappa \in \operatorname{dom}(E)$, $E(\kappa)$ je kardinal kofinalnosti $> \kappa$;
   (b) E je rastuća funkcija, tj. ako je $\kappa < \kappa'$, onda je $E(\kappa) \leqslant E(\kappa')$;
3. Ako je E indeksna funkcija, $\mathcal{P}_E$ je skup funkcija p sa sledećim svojstvima:
   (a) $\operatorname{dom}(p) = \operatorname{dom}(E)$;
   (b) $(\forall \kappa \in \operatorname{dom}(E))(p(\kappa) \in Fn(E(\kappa), 2, \kappa))$;
   (c) Za svaki regularan kardinal λ (ne obavezno u $\operatorname{dom}(E)$),
   $$|\{\kappa \in \lambda \cap \operatorname{dom}(E) \mid p(\kappa) \neq 0\}| < \lambda.$$

$\mathcal{P}_E$ uređujemo na sledeći način:

$$p \leqslant q \Leftrightarrow (\forall \kappa \in \operatorname{dom}(E))(q(\kappa) \subseteq p(\kappa)).$$

Ako je E indeksna funkcija i ako je λ proizvoljan kardinal, definišimo funkcija E^+_λ i E^-_λ na sledeći način:

- $E^+_\lambda = E \restriction \{\kappa \in \mathrm{dom}(E) \mid \kappa > \lambda\}$;
- $E^-_\lambda = E \restriction \{\kappa \in \mathrm{dom}(E) \mid \kappa \leqslant \lambda\}$.

6.2.2 Zadatak Dokazati:

1. $\mathcal{P}_E \cong \mathcal{P}_{E^+_\lambda} \times \mathcal{P}_{E^-_\lambda}$;
2. Ako je $\mathrm{dom}(E) \subseteq \lambda^+$, $2^{<\lambda} = \lambda$ i ako je λ regularan kardinal, onda $\mathcal{P}_E$ zadovoljava λ^+-c.c.;
3. Ako je $\mathrm{dom}(E) \cap \lambda^+ = 0$, onda je $\mathcal{P}_E$ λ^+-zatvoreno.

6.2.3 Lema *Neka je , u M, E indeksna funkcija, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_E$ i neka u M važi GCH. Tada $\mathcal{P}$ čuva kardinale i kofinalnosti.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$ i neka je $\theta > \omega$ regularan kardinal u M i singularan u $M[G]$. Dalje, neka je u $M[G]$ $\lambda = \mathrm{cf}\,\theta < \theta$. λ je regularan u $M[G]$ pa je regularan i u M.

U M, neka je $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{E^-_\lambda}$ i neka je $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{E^+_\lambda}$. Dalje, neka su $i_0 : \mathcal{P}_0 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1$ i $i_1 : \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1$ kanonska utapanja, $j : \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}$ izomorfizam i neka je $G_0 = i_0^{-1}[j^{-1}[G]]$ i $G_1 = i_1^{-1}[j^{-1}[G]]$.

Sada je $j^{-1}[G]$ M-generički filter u $\mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1$ i $M[G] = M[j^{-1}[G]]$, pa na osnovu proizvod leme imamo da je G_1 M-generički u $\mathcal{P}_1$, G_0 je $M[G_1]$-generički u $\mathcal{P}_0$ i

$$M[G] = M[G_1][G_0].$$

U $M[G]$, neka je $f : \lambda \longrightarrow \theta$ kofinalno. Kako je $\mathcal{P}_1$ λ^+-zatvoreno u M, imamo da

$$M[G_1] \models 2^{<\lambda} = \lambda,$$

pa imamo da $M[G_1] \models$ "$\mathcal{P}_0$ je λ^+-c.c.". Odavde sledi da postoji $F \in M[G_1]$ sa sledećim svojstvima:

1. $F : \lambda \longrightarrow P(\theta)$;

2. $(\forall \xi < \lambda)(f(\xi) \in F(\xi))$;

3. $M[G_1] \models |F(\xi| \leqslant \lambda$ za svako $\xi < \lambda$.

S obzirom da je $\mathcal{P}_1$ λ^+-zatvoreno u M, imamo da $F \in M$ i $M \models |F(\xi) \leqslant \lambda$ za svako $\xi < \lambda$.

Međutim, $M \models |\bigcup\limits_{\xi<\lambda} F(\xi)|" \leqslant \lambda$, pa kako je $\bigcup\limits_{\xi<\lambda} F(\xi)$ kofinalan u θ, θ nije regularan u M; kontradikcija. □

6.2.4 Teorema *Neka je , u M, E Eastonova indeksna funkcija, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_E$ i neka u M važi GCH. Tada $\mathcal{P}$ čuva kardinale i kofinalnosti i za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}$ imamo da*

$$M[G] \models (\forall \kappa \in \mathrm{dom}(E))(2^\kappa = E(\kappa)).$$

Dokaz

Očuvanje kardinala i kofinalnosti imamo na osnovu prethodne leme. Neka je $\kappa \in \mathrm{dom}(E)$ proizvoljno. Prvo pokažimo da je, u $M[G]$, $2^\kappa \geqslant E(\kappa)$. Neka je $\alpha < E(\kappa)$ proizvoljno, $f \in M$, $F : E(\kappa) \times \kappa \xrightarrow{1-1} E(\kappa)$ i neka je

$$A_\alpha = \{\xi < \kappa \mid (\exists p \in G)(p(\kappa)(f(\alpha, \xi) = 1))\}.$$

Tada svaki od skupova $A_\alpha \in M[G]$ i pritom je $A_\alpha \cap A_\beta = 0$ za $\alpha \neq \beta$, odakle sledi da u $M[G]$ κ ima bar $E(\kappa)$ podskupova.

Pređimo na dokaz obratne nejednakosti. Neka je $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{E_\kappa^-}$ i $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{E_\kappa^+}$. G_0 i G_1 uvodimo slično kao u prethodnoj lemi. Tada je $\mathcal{P}_0$ κ^+-c.c. a $\mathcal{P}_1$ je κ^+-zatvoreno. Prvo pokažimo da

$$M[G] \models |\mathcal{P}_0| \leqslant E(\kappa).$$

Zaista, za svako $\lambda \leqslant \kappa$ koje je u $\mathrm{dom}(E_\kappa^-)$ imamo da

$$M \models |\mathrm{Fn}(E(\lambda), 2, \kappa)| \leqslant |\mathrm{Fn}(E(\kappa), 2, \kappa)| \leqslant E(\kappa)^\kappa.$$

Kako u M važi GCH i kako $M \models \operatorname{cf} E(\kappa) > \kappa$, imamo da

$$M \models E(\kappa)^{\kappa} = E(\kappa).$$

Dalje, je $\mathcal{P}_1$ κ^+-zatvoreno u M, imamo da u $M[G_1]$ važi da je $E(\kappa)^{\kappa} = E(\kappa)$, $\mathcal{P}_0$ je κ^+-c.c. i $|\mathcal{P}_0| \leqslant E(\kappa)$. Dakle, u $M[G_1]$, imamo najviše

$$(E(\kappa)^{\kappa})^{\kappa} = E(\kappa)$$

finih $\mathcal{P}_0$-imena za podskupove od $\check{\kappa}$, odakle sledi da

$$M[G_1][G_0] = M[G] \models 2^{\kappa} \leqslant E(\kappa).$$

□

6.3 Nezavisnost Kurepine hipoteze

U ovoj sekciji ćemo prikazati sledeći Silverov rezultat: ako u M postoji jako nedostiživ kardinal, onda postoji generičko proširenje modela M u kome važi ¬KH.

6.3.1 Definicija Silverovo uređenje je uređenje oblika

$$\langle Sl(\kappa), \supseteq \rangle,$$

pri čemu je $Sl(\kappa)$ skup svih uslova $p \in Fn(\kappa \times \omega_1, \kappa, \omega_1)$ takvih da je

$$p(\alpha, \xi) < \alpha$$

za svako $\langle \alpha, \xi \rangle \in \operatorname{dom}(p)$.

6.3.2 Lema *Ako je κ jako nedostiživ, onda $Sl(\kappa)$ zadovoljava κ-c.c.*

Dokaz

Neka je $X \subseteq Sl(\kappa)$ kardinalnosti κ. Na osnovu Δ-sistem leme, postoji $Y \subseteq X$ kardinalnosti κ takav da je skup

$$E = \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in Y\}$$

Δ-sistem sa korenom e. Kako je κ jako nedostiživ, mogućnosti za $p \upharpoonright e$ $(p \in Y)$ imamo

$$|e|^{\aleph_1} < \kappa,$$

pa maksimalan inkompatibilan podskup od Y ne može biti kardinalnosti $\geqslant \kappa$, odakle sledi κ-c.c..

□

6.3.3 Posledica *Neka je κ jako nedostiživ u M i neka je G M-generički filter u $Sl(\kappa)$. Tada*

$$M[G] \models \kappa = \omega_1.$$

Dokaz

Na osnovu prethodne leme imamo da je κ regularan neprebrojiv kardinal u $M[G]$. Dokaz da je svaki ordinal $\alpha < \kappa$ prebrojiv u $M[G]$ sprovodimo sasvim slično kao u dokazu teoreme 5.8.2. □

6.3.4 Teorema *Neka je T ω_1-drvo u M, $\mathcal{P}$ ω-zatvoreno uređenje u M i neka je G M-generički filter u $\mathcal{P}$. Ako drvo T ima u $M[G]$ maksimalnu granu C, onda $C \in M$.*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno. Neka je $\mathcal{C} = P(T) \cap M$. Tada $C \notin \mathcal{C}$. Uočimo ime τ tako da je $C = \mathtt{I}_G(\tau)$ i uslov $p \in G$ takav da

$$p \Vdash (\text{“}\tau \text{ je grana u } \check{T}\text{”} \wedge \tau \notin \check{\mathcal{C}}). \tag{6.2}$$

Nadalje radimo u M i kontradikciju ćemo izvesti iz (6.2). Za $\alpha < \omega_1$ i $q \in \mathcal{P}$ ćemo sa $q \| \tau_\alpha$ označavati formulu

$$(\exists b \in \mathrm{lev}(\alpha, T))(q \Vdash \check{b} \in \tau).$$

Takođe ćemo umesto navedene formule koristiti i termin q *odlučuje* τ_α.

S jedne strane,

$$p \Vdash ((\exists x \in \mathrm{lev}(\check{\alpha}, T))x \in \tau),$$

pa za svako $\alpha < \omega_1$ imamo da je skup

$$D = \{q \leqslant p \mid q \| \tau_\alpha\}$$

gust ispod p. S druge strane,

$$q \leqslant p \Rightarrow \exists \alpha \neg (q \| \tau_\alpha). \tag{6.3}$$

Zaista, u suprotnom bi za svako $\alpha < \omega_1$ postojalo $b_\alpha \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$ tako da

$$q \Vdash \check{b}_\alpha \in \tau,$$

odakle za skup $B = \{b_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ važi da

$$q \Vdash \check{B} = \tau,$$

odakle dobijamo da $q \Vdash \tau \in \check{\mathcal{C}}$, što je u kontradikiciji sa $p \Vdash \tau \notin \check{\mathcal{C}}$ i $q \leqslant p$.

Dalje, važi i

$$(q \leqslant p \ \wedge \ q \| \tau_\beta \ \wedge \ \alpha < \beta) \ \Rightarrow \ q \| \tau_\alpha. \tag{6.4}$$

U cilju dokaza, neka je $b \in \mathrm{lev}(\beta, T)$ tako da $q \Vdash \check{b} \in \tau$. Kako

$$q \Vdash \text{“}\tau \text{ je grana”},$$

postoji $a \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$ ispod b tako da $q \Vdash \check{a} \in \tau$.

Na osnovu (6.3) i (6.4), ako je $q \leqslant p$, onda je $\{\alpha \mid q \| \tau_\alpha\}$ pravi početni komad (inicijalni segment) od ω_1. Neka je

$$\delta(q) = \{\alpha \mid q \| \tau_\alpha\} = \min\{\alpha \mid \neg(q \| \tau_\alpha)\}.$$

Pokažimo da za $q \leqslant p$ i $\alpha \geqslant \delta(q)$ postoje $r, s \leqslant q$ i međusobno različiti $a, b \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$ tako da $r \Vdash \check{a} \in \tau$ i $s \Vdash \check{b} \in \tau$ (svojstvo $(*)$).

Na osnovu (6.2) postoje $r \leqslant q$ i $a \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$ tako da $r \Vdash \check{a} \in \tau$. Kako $\neg(q \| \tau_\alpha)$ i $q \nVdash \check{a} \in \tau$, postoji $t \leqslant q$ tako da $t \Vdash \check{a} \notin \tau$. Opet na osnovu (6.2) postoje $s \leqslant t$ i $b \in \mathrm{lev}(\alpha, T)$ tako da $s \Vdash \check{b} \in \tau$. Kako $s \Vdash \check{a} \notin \tau$, mora biti $a \neq b$.

Primenom $(*)$ ω-puta konstruišemo poddrvo drveta T visine ω pomoću nizova $\langle \alpha_n \mid n < \omega \rangle$ u ω_1, $\langle p_l \mid l \in Seq \rangle$ u $\mathcal{P}$ (Seq je skup svih konačnih nizova nula i jedinica) i $\langle a_l \mid l \in Seq \rangle$ u T sa sledećim svojstvima:

1. $(\forall n < \omega)(\alpha_n < \alpha_{n+1})$;

2. $\alpha_n > \max\{\delta(p_l) \mid |l| = n\}$;

3. $p_{\langle\ \rangle} = p$, pri čemu je $\langle\ \rangle$ prazan niz;

4. $a_{\langle l,0 \rangle} \neq a_{\langle l,1 \rangle}$ i, za svako $i \in 2$, $p_{\langle l,i \rangle} \leqslant p_l$, $a_{\langle l,i \rangle} \in \mathrm{lev}(\alpha_n, T)$ i $p_{\langle l,i \rangle} \Vdash \check{a}_{\langle l,i \rangle} \in \tau$.

Neka je $\gamma = \sup\{\alpha_n \mid n < \omega\}$. Kontradikciju ćemo izvesti tako što ćemo pokazati da γ-ti sloj drveta T ima bar kontinuum elemenata. U tom cilju, neka je $f : \omega \longrightarrow 2$ proizvoljna funkcija. Po konstrukciji imamo da je

$$p \geqslant p_{\langle f(0) \rangle} \geqslant p_{\langle f(0), f(1) \rangle} \geqslant \cdots$$

$\mathcal{P}$ je ω_1-zatvoreno, pa postoji uslov $q_f \in \mathcal{P}$ manji od svih elemenata gornjeg niza. Neka su uslov $r_f \leqslant q_f$ i $b_f \in \mathrm{lev}(\gamma, T)$ takvi da

$$r_f \Vdash \check{b}_f \in \tau.$$

Kako takođe $r_f \Vdash \check{a}_{\langle f(0), \ldots, f(n-1) \rangle} \in \tau$ za svako $n < \omega$, imamo da je

$$a_{\langle f(0), \ldots, f(n-1) \rangle} < b_f \text{ za svako } n < \omega.$$

Dalje, ako je $f \neq g$, onda postoji $n \in \omega$ tako da je

$$a_{\langle f(0), \ldots, f(n-1) \rangle} \neq a_{\langle g(0), \ldots, g(n-1) \rangle},$$

odakle sledi da je $b_f \neq b_g$, pa γ-ti sloj drveta T ima bar kontinuum elemenata. $\square$

Ako u $M[G]$ postoji surjekcija $f : \omega_1^M \longrightarrow (2^{\aleph_1})^M$, onda T ne može biti Kurepino drvo u $M[G]$. Međutim, to još uvek ne kompletira dokaz nezavisnosti Kurepine hipoteze, jer drvo T ne mora pripadati polaznom modelu M. Razlog zbog koga $\neg$KH važi u $M[G]$ leži u činjenici da se $M[G]$ može dobiti preko dvostepene iteracije

$$M \subset M[G_0] \subset M[G_0][G_1] = M[G]$$

takve da $T \in M[G_0]$ i da G_1 kolapsira $(2^{\aleph_1})^{M[G_0]}$. Pređimo na dokaz nezavisnosti KH.

U M[G]: Neka je T proizvoljno ω_1 drvo. Pokažimo da T nije Kurepino drvo, tj. da T ima $\leqslant \omega_1$ grana. Kako je T ω_1-drvo, postoji binarana relacija R na ω_1 takva da je

$$\langle T, \leqslant \rangle \cong \langle \omega_1, R \rangle.$$

Kako je $R \subseteq \omega_1^M \times \omega_1^M$, postoji fino ime $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ tako da je $R = \mathtt{I}_G(\sigma)$.

U M:

$$\sigma = \bigcup \{\{\check{s}\} \times A_s \mid s \in \omega_1 \times \omega_1\},$$

pri čemu je A_s antilanac u $\mathcal{P}$. Neka je

$$B = \bigcup \{A_s \mid s \in \omega_1 \times \omega_1\},$$

$I = \kappa \times \omega_1$, $I_0 = \bigcup \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in B\}$ i $I_1 = I \setminus I_0$. Kako $\mathcal{P}$ zadovoljava κ-c.c., imamo da je svaki antilanac A_s kardinalnosti $< \kappa$, pa je i $|I_0| < \kappa$. Neka je $\mathcal{P}_0 = \{p \in \mathcal{P} \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq I_0\}$ i $\mathcal{P}_1 = \{p \in \mathcal{P} \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq I_1\}$. Lako se proverava da je $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_0 \times \mathcal{P}_1$.

Neka je $G_0 = G \cap \mathcal{P}_0$ i $G_1 = G \cap \mathcal{P}_1$. Primenom proizvod leme se lako proverava da je $M[G] = M[G_0][G_1]$ kao i da $T \in M[G_0]$.

$\mathcal{P}_1$ je prebrojivo zatvoreno u M. Dalje, ako je $\langle p_n \mid n < \omega \rangle \in M[G_0]$ proizvoljan niz elemenata od $\mathcal{P}_1$, onda $\langle p_n \mid n < \omega \rangle \in M$ jer je $\mathcal{P}_0$ prebrojivo zatvoreno u $M[G_0]$, odakle sledi da $\mathcal{P}_1$ ostaje prebrojivo zatvoreno i u $M[G_0]$. Sada na osnovu prethodne teoreme imamo da se svaka grana drveta $\langle \omega_1, R\rangle$ koja je u $M[G]$ nalazi u $M[G_0]$. Dakle, ako je $\lambda = (2^{\aleph_1})^{M[G_0]}$, onda imamo da

$$M[G] \models |\{C \mid \text{“}C \text{ je grana drveta } \langle \omega_1, R\rangle\text{”}\}| \leqslant \lambda.$$

Kako je $\omega_2^{M[G]} = \kappa$, tvrđenje smo dokazali ukoliko pokažemo da je $\lambda < \kappa$.

Neka je $\xi = |I_0|^M$. Svaki podskup od ω_1 u $M[G_0]$ je oblika $\mathtt{I}_{G_0}(\tau)$ za neko fino ime za podskup od $\check{\omega}_1$. U M,

$$|\mathcal{P}_0| \leqslant \xi^{\aleph_0} = \xi_1,$$

pa $\mathcal{P}_0$ ima ne više od

$$2^{\xi_1} = \xi_2$$

antilanaca, odakle sledi da finih imena nema više od

$$\aleph_1^{\xi_2} = \xi_3.$$

Međutim, κ je jako nedostiživ u M, pa je $\lambda \leqslant \xi_3 < \kappa$.

7

Iterirani forsing

Iterirani forsing je tehnika kojom se za neki ordinal $\delta \in M$ konstruiše lanac generičkih ekstenzija

$$M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_\delta,$$

pri čemu je $M_{\alpha+1} = M_\alpha[G_\alpha]$, a G_α je M_α-generički filter u $\mathcal{P}_\alpha \in M_\alpha$. Glavnu teškoću predstavlja izbor M_α za granižni ordinal α. Kao što smo već videli (zadatak 7.2), $\bigcup\limits_{n<\omega} M_n$ ne mora biti model teorije ZFC.

Ovaj problem se otklanja tako što se umesto lanca modela u M konstruiše lanac parcijalnih uređenja

$$\mathcal{P}_0 \subseteq_c \mathcal{P}_1 \subseteq_c \cdots \subseteq_c P_\delta.$$

Problem izbora graničnog modela se ovde prenosi na problem izbora graničnog uređnja. U iteriranim forsinzima koje mi budemo obrađivali, za granični α će biti $\mathcal{P}_\alpha = \bigcup\limits_{\xi<\alpha} \mathcal{P}_\xi$.

Kao i ranije, M je prebrojiv tranzitivan model teorije ZFC.

7.1 Konačno podržana iteracija

Neka su $\tilde{\mathcal{Q}}, \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}}, \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}}$ imena (elementi $M^{\mathcal{P}}$). Za trojku

$$\langle \tilde{\mathcal{Q}}, \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}}, \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rangle$$

kažemo da je *$\mathcal{P}$-ime za parcijalno uređenje* ukoliko važi:

- $\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}} \in \mathrm{dom}(\tilde{\mathcal{Q}})$;
- $\mathbf{1} \Vdash \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}} \in \tilde{\mathcal{Q}}$;
- $\mathbf{1} \Vdash$ "$\leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}}$ je uređenje na $\tilde{\mathcal{Q}}$ sa maksimumom $\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}}$".

Umesto $\langle \tilde{\mathcal{Q}}, \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}}, \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rangle$ ćemo pisati samo $\tilde{\mathcal{Q}}$, a $\tilde{\mathcal{Q}}$ ćemo u indeksima izostavljati ukoliko je kontekst jasan.

Uređenje $\mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}$ definišemo na sledeći način:

1. Nosač uređenja je skup
$$\{\langle p, \tilde{q} \rangle \mid p \in \mathcal{P} \wedge \tilde{q} \in \mathrm{dom}(\tilde{\mathcal{Q}}) \wedge p \Vdash \tilde{q} \in \tilde{\mathcal{Q}}\};$$
2. $\mathbf{1}_{\mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}} = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}} \rangle$;
3. $\langle p, \tilde{q} \rangle \leqslant \langle p_1, \tilde{q}_1 \rangle$ akko
$$p \leqslant p_1 \wedge p \Vdash \tilde{q} \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}} \tilde{q}_1.$$

Kako je iz konteksta uvek jasno o kom objektu se radi, umesto $\leqslant_{\leqslant_{\mathcal{Q}}}$ ćemo pisati samo $\leqslant$, a umesto $\mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}}$ samo $\tilde{\mathbf{1}}$.

7.1.1 Primer Kod iteracije u dva koraka proizvod $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ je izomorfan uređenju $\mathcal{P} * \check{\mathcal{Q}}$.

7.1.2 Zadatak Neka je $i : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}$ definisano sa

$$i(p) = \langle p, \tilde{\mathbf{1}} \rangle.$$

Dokazati:

1. $(\forall p, p_1 \in \mathcal{P})(p \leqslant p_1 \Leftrightarrow \langle p, \tilde{\mathbf{1}} \rangle \leqslant \langle p_1, \tilde{\mathbf{1}} \rangle)$;
2. $i(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_{\mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}}$;
3. $(\forall \langle p, \tilde{q} \rangle, \langle p_1, \tilde{q}_1 \rangle \in \mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}})(p \perp p_1 \Rightarrow \langle p, \tilde{q} \rangle \perp \langle p_1, \tilde{q}_1 \rangle)$;
4. $(\forall \langle p, \tilde{q} \rangle \in \mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}})(\forall p_1 \in \mathcal{P})(p \perp p_1 \Leftrightarrow \langle p, \tilde{q} \rangle \perp \langle p_1, \tilde{\mathbf{1}} \rangle)$;
5. $(\forall p, p_1 \in \mathcal{P})(p \perp p_1 \Leftrightarrow i(p) \perp i(p_1))$;
6. i je kompletno utapanje.

Ako je G M-generički filter u $\mathcal{P}$ i ako je $H \subseteq \mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$, onda $G * H$ definišemo sa

$$G * H = \{\langle p, \tilde{q} \rangle \in \mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}} \mid p \in G \wedge \mathtt{I}_G(\tilde{q}) \in H\}.$$

7.1.3 Teorema *Neka je $\mathcal{P}$ parcijalno uređenje u M, $\tilde{\mathcal{Q}}$ $\mathcal{P}$-ime za parcijalno uređenje i neka je K M-generički filter u $\mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}$. Dalje, neka je $G = i^{-1}[K]$ i*

$$H = \{\mathtt{I}_G(\tilde{q}) \mid \tilde{q} \in \mathrm{dom}(\tilde{\mathcal{Q}}) \wedge (\exists p \in \mathcal{P})(\langle p, \tilde{q} \rangle \in K)\}.$$

Tada važi:

1. *G je M-generički filter u $\mathcal{P}$;*
2. *H je $M[G]$-generički filter u $\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$;*
3. *$K = G * H$;*
4. *$M[K] = M[G][H]$.*

Dokaz

1. Direktno sledi iz kompletnosti utapanja i.

2. Prvo pokažimo da je H filter u $\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$. Neka $\mathtt{I}_G(\tilde{q}) \in H$ i neka je $\mathtt{I}_G(\tilde{q}) \leqslant \mathtt{I}_G(\tilde{q}_0)$, pri čemu $\tilde{q}_0 \in \mathrm{dom}(\tilde{Q})$. Hoćemo da pokažemo da $\mathtt{I}_G(\tilde{q}_0) \in H$. Neka $\langle p_0, \tilde{q}\rangle \in K$ i neka je $p \in G$ tako da $p \Vdash \tilde{q} \leqslant \tilde{q}_0$. Uočimo $\langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \in K$ tako da

$$\langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \leqslant \langle p, \tilde{\mathbf{1}}\rangle \quad \text{i} \quad \langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \leqslant \langle p_0, \tilde{q}\rangle.$$

Tada $p_1 \Vdash \tilde{q} \leqslant \tilde{q}_0$ (jer je $p_1 \leqslant p$ i $p \Vdash \tilde{q} \leqslant \tilde{q}_0$) i $p_1 \Vdash \tilde{q}_1 \leqslant \tilde{q}$, odakle sledi da $p_1 \Vdash \tilde{q}_1 \leqslant \tilde{q}_0$. Sada je po definiciji $\langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \leqslant \langle p_1, \tilde{q}_0\rangle$, pa $\langle p_1, \tilde{q}\rangle \in K$, odakle sledi da $\mathtt{I}_G(\tilde{q}_0) \in H$.

Sasvim lako se prvoverava da su svaka dva elementa iz H kompatibilna preko H (postoji element iz H manji od oba), odakle sledi da je H filter u $\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$.

Preostaje da pokažemo da je H $M[G]$-generički filter u $\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$. U tom cilju, uočimo proizvoljan skup $D \in M[G] \cap P(\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}}))$ koji je gust u $\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$. Neka su $\tilde{D} \in M^{\mathcal{P}}$ i $p_0 \in G$ takvi da

$$D = \mathtt{I}_G(\tilde{D}) \quad \text{i} \quad p_0 \Vdash \text{“}\tilde{D} \text{ je gust u } \tilde{\mathcal{Q}}\text{”},$$

i neka je skup $E \in M$ definisan sa

$$E = \{\langle p, \tilde{q}\rangle \in \mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}} \mid p \Vdash \tilde{q} \in \tilde{D}\}.$$

Pokažimo da je E gust ispod $\langle p_0, \tilde{\mathbf{1}}\rangle$. Neka je $\langle p, \tilde{q}\rangle \leqslant \langle p_0, \tilde{\mathbf{1}}\rangle$ proizvoljno. Kako $p_0 \Vdash$ “$\tilde{D}$ je gust u $\tilde{\mathcal{Q}}$”, postoji ime $\tilde{q}_0 \in \mathrm{dom}(\tilde{\mathcal{Q}})$ tako da $p_0 \Vdash \tilde{q}_0 \in \tilde{D}$ i $p_0 \Vdash \tilde{q}_0 \leqslant \tilde{q}$. Kako je $p \leqslant p_0$, imamo da je $\langle p, \tilde{q}_0\rangle \leqslant \langle p, \tilde{q}\rangle$, kao i $\langle p, \tilde{q}_0\rangle \in E$.

Neka je $\langle p, \tilde{q}\rangle \in K \cap E$ proizvoljno. Tada $\mathtt{I}_G(\tilde{q}) \in H \cap D$.

S jedne strane, po definiciji je $K \subseteq G * H$. Dokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $\langle p, \tilde{q}\rangle \in G * H$ proizvoljno. Tada $p \in G$, $\mathtt{I}_G(\tilde{q}) \in H$ i $\langle p, \tilde{q}\rangle \in \mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}$. Dalje, iz $p \in G$ sledi da $\langle p, \tilde{\mathbf{1}}\rangle \in K$, a iz $\mathtt{I}_G(\tilde{q}) \in H$ sledi da postoji $p_q \in \mathcal{P}$ tako da $\langle p_q, \tilde{q}\rangle \in K$. Neka je $\langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \in K$ tako da je

$$\langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \leqslant \langle p, \tilde{\mathbf{1}}\rangle \quad \text{i} \quad \langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \leqslant \langle \tilde{p}_q, \tilde{q}\rangle.$$

Odavde po definiciji sledi da je $\langle p_1, \tilde{q}_1\rangle \leqslant \langle p, \tilde{q}\rangle$, pa $\langle p, \tilde{q}\rangle \in K$.

Ostaje da pokažemo da je $M[K] = M[G][H]$. S jedne strane, iz $G, H \in M[K]$ neposredno sledi da je $M[G][H] \subseteq M[K]$. S druge strane,

$$K = G * H \in M[G][H],$$

pa imamo i obratnu inkluziju. □

Sledeće dve leme će nam obezbediti uslove pod kojima se iteracijom c.c.c. uređenja dobija c.c.c. uređenje.

7.1.4 Lema *Neka je , u M, κ regularan kardinal, $\mathcal{P}$ κ-c.c. uređenje, $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ i neka*

$$\mathbf{1} \Vdash (\sigma \subseteq \check{\kappa} \wedge |\sigma| < \check{\kappa}).$$

Tada postoji $\beta < \kappa$ tako da

$$\mathbf{1} \Vdash \sigma \subseteq \check{\alpha}.$$

Dokaz

Neka je

$$D = \{\xi < \kappa \mid (\exists p \in \mathcal{P})(p \Vdash \check{\xi} = \sup \sigma)\}.$$

Na osnovu forsing teoreme imamo da $D \in M$. Kako u M važi aksioma izbora, za svako $\xi \in D$ izaberimo $p_\xi \in \mathcal{P}$ tako da $p_\xi \Vdash \check{\xi} = \sup \sigma$. Sada imamo da $A = \{p_\xi \mid \xi \in D\} \in M$, kao i to da je skup A antilanac u $\mathcal{P}$, odakle zbog κ-c.c. imamo da

$$M \models |A| < \kappa.$$

Neka je $\alpha < \kappa$ proizvoljan ordinal takav da je $D \subseteq \alpha$. Kako je $\mathcal{P}$ κ-c.c. uređenje, za proizvoljan M-genreički filter G u $\mathcal{P}$ će važiti

$$M[G] \models \text{“}\kappa \text{ je regularan kardinal”},$$

kao i $M[G] \models |\mathtt{I}_G(\sigma)| < \kappa$. Neka je $\beta = \sup \mathtt{I}_G(\sigma)$. Na osnovu prethodnog imamo da je $\beta < \kappa$, a kako postoji uslov $p \in G$ takav da $p \Vdash \check{\beta} = \sup \sigma$, imamo da $\beta \in D$, pa je $\mathtt{I}_G(\sigma) \subseteq \alpha$.

Iz prethodnog sledi da $\mathbf{1} \Vdash \sigma \subseteq \check{\alpha}$. □

7.1.5 Lema *Neka je, u M, $\mathcal{P}$, $\tilde{\mathcal{Q}} \in M^{\mathcal{P}}$ ime za parcijalno uređenje, κ regularan kardinal, $\mathcal{P}$ je κ-c.c. i neka $\mathbf{1} \Vdash$ "$\tilde{\mathcal{Q}}$ je $\check{\kappa}CC$ uređenje". Tada $M \models$ "$\mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}$ je κ-c.c. uređenje".*

Dokaz

Pretpostavimo suprotno, neka je $A = \{\langle p_\xi, \tilde{q}_\xi \rangle \mid \xi < \kappa\} \in M$ antilanac u $\mathcal{P} * \tilde{\mathcal{Q}}$ kardinalnosti κ. Dalje, neka je

$$\sigma = \{\langle \check{\xi}, p_\xi \rangle \mid \xi < \kappa\}.$$

Tada $\sigma \in M^{\mathcal{P}}$ i $\mathbf{1} \Vdash \sigma \subseteq \check{\kappa}$. Za proizvoljan M-generički filter G u $\mathcal{P}$ je

$$\mathtt{I}_G(\sigma) = \{\xi < \kappa \mid p_\xi \in G\}.$$

Tvrdimo da su, u $M[G]$, $\mathtt{I}_G(\tilde{q}_\xi)$ ($\xi \in \mathtt{I}_G(\sigma)$) inkompatibilni u $\mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$. Zaista, neka je $\xi \neq \eta$ $\xi, \eta \in \mathtt{I}_G(\sigma)$ i pretpostavimo da je $a \leqslant \mathtt{I}_G(\tilde{q}_\xi)$ i $a \leqslant \mathtt{I}_G(\tilde{q}_\eta)$ za neko $a \in \mathtt{I}_G(\tilde{\mathcal{Q}})$. Tada postoje $p \in G$ i $\tilde{a} \in \mathrm{dom}(\tilde{\mathcal{Q}})$ tako da je $p \leqslant p_\xi$, $p \leqslant p_\eta$ i

$$p \Vdash (\tilde{a} \leqslant \tilde{q}_\xi \ \wedge \ \tilde{a} \leqslant \tilde{q}_\eta).$$

Međutim, odavde sledi da je $\langle p, \tilde{a} \rangle \leqslant \langle p_\xi, \tilde{q}_\xi \rangle$, i $\langle p, \tilde{a} \rangle \leqslant \langle p_\eta, \tilde{q}_\eta \rangle$, što je u suprotnosti sa inkompatibilnošću $\langle p_\xi, \tilde{q}_\xi \rangle$ i $\langle p_\xi, \tilde{q}_\xi \rangle$.

Sada smo spremni da izvedemo kontradikciju. Kako

$$\mathbf{1} \Vdash \text{ "}\tilde{\mathcal{Q}} \text{ je } \check{\kappa}\text{CC"},$$

imamo da

$$M[G] \models |\mathtt{I}_G(\sigma) < \kappa$$

za svaki M-genreički filter G u $\mathcal{P}$, pa mora biti

$$\mathbf{1} \Vdash |\sigma| < \check{\kappa}.$$

Na osnovu prethodne leme, postoji $\alpha < \kappa$ tako da

$$\mathbf{1} \Vdash \sigma \subseteq \check{\alpha}.$$

Međutim, $p_\alpha \Vdash \check{\alpha} \in \sigma$: kontradikcija. □

Prelazimo na definiciju *α-iteracije* (α-stage iterated forcing). Kompletnu argumentaciju obavljamo u M.

Neka je α proizvoljan ordinal, $\mathcal{I} \subseteq P(\alpha)$ ideal nad $\alpha + 1$ (ideal Booleove algebre $P(\alpha + 1)$) i neka $\mathcal{I}$ sadrži sve konačne podskupove od α. Pod *α-iteracijom podržanom sa $\mathcal{I}$* podrazumevamo par

$$\langle\ \langle\langle \mathcal{P}_\xi, \leqslant_{\mathcal{P}_\xi}, \mathbf{1}_{\mathcal{P}_\xi}\rangle \mid \xi \leqslant \alpha\rangle,\ \langle\langle \tilde{\mathcal{Q}}_\xi, \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}_\xi}, \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}_\xi}\rangle \mid \xi < \alpha\rangle\ \rangle$$

sa sledećim svojstvima:

1. Svako $\langle \mathcal{P}_\xi, \leqslant_{\mathcal{P}_\xi}, \mathbf{1}_{\mathcal{P}_\xi}\rangle$ je parcijalno uređenje;
2. Svako $\langle \tilde{\mathcal{Q}}_\xi, \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}_\xi}, \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}_\xi}\rangle$ je $\mathcal{P}_\xi$-ime za parcijalno uređenje;
3. $\mathbf{1}_{\mathcal{P}_\xi} = \langle \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}_\xi} \mid \eta < \xi\rangle$;
4. $\mathcal{P}_0 = \{0\}$;
5. Neka je $\xi < \alpha$. Tada za svako $p \in \mathcal{P}_{\xi+1}$ važi:
   (a) $p : \xi + 1 \longrightarrow \bigcup_{\eta \leqslant \xi} \operatorname{dom}(\tilde{\mathcal{Q}}_\eta)$;
   (b) $(\forall \eta \leqslant \xi)(p(\eta) \in \operatorname{dom}(\mathcal{Q}_\eta))$;
   (c) $p \restriction \xi \in \mathcal{P}_\xi$.

   Ako $p, q \in \mathcal{P}_{\xi+1}$, onda

   $$p \leqslant_{\mathcal{P}_{\xi+1}} q \quad \Leftrightarrow \quad p \restriction \xi \leqslant_{\mathcal{P}_\xi} q \restriction \xi \ \wedge\ p \restriction \xi \Vdash_{\mathcal{P}_\xi} p(\xi) \leqslant_{\tilde{\mathcal{Q}}_\xi} q(\xi);$$
6. Neka je $\xi \leqslant \alpha$ granični ordinal. Tada za svako $p \in \mathcal{P}_\xi$ važi:
   (a) $(\forall \eta < \xi)(p \restriction \eta \in \mathcal{P}_\eta)$;
   (b) $\operatorname{supp} p \in \mathcal{I}$, pri čemu je po definiciji

   $$\operatorname{supp} p = \{\eta < \xi \mid p(\eta) \neq \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}_\eta}\}.$$

Ako $p, q \in \mathcal{P}_\xi$, onda

$$p \leqslant_{\mathcal{P}_\xi} q \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \eta < \xi)(p \restriction \eta \leqslant_{\mathcal{P}_\eta} q \restriction \eta).$$

Kao bismo pojednostavili notaciju, indekse ćemo izostavljati ukoliko je iz konteksta jasno o kom objektu je reč.

7.1.6 Zadatak Dokazati:

1. $\mathcal{P}_{\xi+1} \cong \mathcal{P}_\xi * \tilde{\mathcal{Q}}_\xi$;
2. Za svako $\xi \leqslant \alpha$ i svako $p \in \mathcal{P}_\xi$ važi

$$\operatorname{supp} p \in \mathcal{I}.$$

Za α-iteraciju podržanu sa $\mathcal{I}$ kažemo da je:

- *Konačno podržana*, ukoliko je $\mathcal{I}$ ideal konačnih skupova, tj.

$$\mathcal{I} = \{x \subseteq \alpha \mid |x| < \aleph_0\};$$

- *Prebrojivo podržana*, ukoliko

$$M \models \mathcal{I} = \{x \subseteq \alpha \mid |x| \leqslant \aleph_0\};$$

- *Puni limit*, ukoliko

$$M \models \mathcal{I} = p(\alpha).$$

Za $\xi \leqslant \eta \leqslant \alpha$ neka je $i_{\xi,\eta} : \mathcal{P}_\xi \longrightarrow \mathcal{P}_\eta$ definisano na sledeći način:

$$i_{\xi,\eta}(p) \restriction \xi = p;$$
$$i_{\xi,\eta}(p)(\zeta) = \mathbf{1}_{\tilde{\mathcal{Q}}_\zeta} \text{ za svako } \zeta \in [\xi, \eta).$$

7.1.7 Zadatak Neka je $\xi \leqslant \eta \leqslant \zeta \leqslant \alpha$. Dokazati:

1. $i_{\xi,\zeta} = i_{\eta,\zeta} \circ i_{\xi,\eta}$;

2. $i_{\xi,\eta}(\mathbf{1}_{\mathcal{P}_\xi}) = \mathbf{1}_{\mathcal{P}_\eta}$;
3. $(\forall p, q \in \mathcal{P}_\eta)(p \leqslant q \Rightarrow p \upharpoonright \xi \leqslant q \upharpoonright \xi)$;
4. $(\forall p, q \in \mathcal{P}_\xi)(p \leqslant q \Leftrightarrow i_{\xi,\eta}(p) \leqslant i_{\xi,\eta}(q))$;
5. $(\forall p, q \in \mathcal{P}_\eta)(p \upharpoonright \xi \perp q \upharpoonright \xi \;\Rightarrow\; p \perp q)$;
6. $(\forall p, q \in \mathcal{P}_\eta)(\operatorname{supp} p \cap \operatorname{supp} q \subseteq \xi \;\Rightarrow\; (p \upharpoonright \xi \perp q \upharpoonright \xi \;\Leftrightarrow p \perp q))$;
7. $(\forall p, q \in \mathcal{P}_\xi)(p \perp q \;\Leftrightarrow\; i_{\xi,\eta}(p) \perp i_{\xi,\eta}(q))$;
8. $i_{\xi,\eta}$ je kompletno utapanje.

7.1.8 Lema *Neka je , u M, κ regularan neprebrojiv kardinal i neka je*

$$\langle\langle \mathcal{P}_\xi \mid \xi \leqslant \alpha\rangle, \langle \tilde{\mathcal{Q}}_\xi \mid \xi < \alpha\rangle\rangle$$

konačno podržana α-iteracija takva da

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathcal{P}_\xi} \text{“}\tilde{\mathcal{Q}}_\xi \text{ je } \check{\kappa}CC\text{”}$$

za svako $\xi < \alpha$. Tada

$$M \models \text{“}\mathcal{P}_\xi \text{ je } \kappa\text{-c.c.”}$$

za svako $\xi \leqslant \alpha$.

Dokaz

Dokaz izvodimo indukcijom po ξ. Kako bismo pojednostavili notaciju, kompletnu argumentaciju sprovodimo u M. Ako je $\mathcal{P}_\xi$ κ-c.c., onda, zbog

$$\mathcal{P}_{\xi+1} \cong \mathcal{P}_\xi * \tilde{\mathcal{Q}}_\xi,$$

na osnovu leme 7.1.5 sledi da je i $\mathcal{P}_{\xi+1}$ κ-c.c..

Neka je ξ granični ordinal i pretpostavimo da je $\mathcal{P}_\eta$ κ-c.c. za svako $\eta < \xi$. Suprotno tvrđenju, pretpostavimo da je A antilanac u $\mathcal{P}_\xi$ kardinalnosti κ. Kako je posmatrana iteracija konačno podržana, imamo da je

$$|\{\operatorname{supp} p \mid p \in A\}| = \kappa.$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je

$$E = \{\operatorname{supp} p \mid p \in A\}$$

Δ-sistem sa korenom e. Fiksirajmo $\eta < \xi$ tako da je $e \subseteq \eta$. Sada je na osnovu zadatka 7.1.7 skup

$$\{p \restriction \eta \mid p \in A\}$$

antilanac u $\mathcal{P}_\eta$ kardinalnosti κ: kontradikcija. $\square$

7.1.9 Zadatak Neka je

$$\langle\ \langle \mathcal{P}_n \mid n \leqslant \omega \rangle, \langle \tilde{\mathcal{Q}}_n \mid n < \omega \rangle\ \rangle$$

konačno podržana iteracija takva da

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathcal{P}_n} \text{“}\tilde{\mathcal{Q}}_n \text{ nije c.c.c.”}.$$

Dokazati da $\mathcal{P}_\omega$ kolapsira ω_1.

Uputstvo Neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}_\omega$. Treba pokazati da postoji surjekcija $f \in M[G]$ sa domenom ω i kodomenom ω_1^M. Iz uslova zadatka imamo da

$$\mathbf{1} \Vdash \tilde{A}_n \text{ je max antilanac u } \tilde{\mathcal{Q}}_n \text{ i } \tilde{f}_n : \tilde{A}_n \xrightarrow{\text{na}} \check{\omega}_1^M.$$

Argumentaciju nastavljamo u $M[G]$. Neka je:

- $G_n = i_{n,\omega}^{-1}[G]$;
- $\mathcal{Q}_n = \mathtt{I}_{G_n}(\tilde{\mathcal{Q}}_n)$;
- $H_n = \{\mathtt{I}_{G_n}(\tilde{q}) \mid \tilde{q} \in \operatorname{dom}(\tilde{\mathcal{Q}}_n) \wedge \exists p (p^\frown \tilde{q} \in G_{n+1})\}$, pri čemu je za $p = \langle p_1, \dots, p_n \rangle$, $p^\frown \tilde{q}$ definisano sa

$$p^\frown \tilde{q} = \langle p_1, \dots, p_n, \tilde{q} \rangle;$$

- $\{a_n\} = \mathtt{I}_{G_n}(\tilde{A}_n) \cap H_n$.

Pokazati da je funkcija $f : \omega \longrightarrow \omega_1^M$ definisana sa

$$f(n) = \mathtt{I}_{G_n}(\tilde{f}_n)(a_n)$$

surjekcija (primetimo da iz definicije neposredno sledi da $f \in M[G]$).
$\square$

7.1.10 Lema *Neka je, u M,*

$$\langle\ \langle \mathcal{P}_\xi \mid \xi \leqslant \alpha \rangle, \langle \tilde{\mathcal{Q}}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle\ \rangle$$

α-iteracija i neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}_\alpha$. Dalje, neka je $G_\xi = i_{\xi,\alpha}^{-1}[G]$, $\mathcal{Q}_\xi = \mathtt{I}_{G_\xi}(\tilde{\mathcal{Q}}_\xi)$ i neka je

$$H_\xi = \{\mathtt{I}_{G_\xi}(\tilde{q}) \mid \tilde{q} \in \mathrm{dom}(\tilde{\mathcal{Q}}_\xi) \wedge \exists p (p^\frown \tilde{q} \in G_{\xi+1})\}.$$

Tada:

1. *Svako G_ξ je M-generički filter u $\mathcal{P}_\xi$ i iz $\xi \leqslant \eta$ sledi da je $M[G_\xi] \subseteq M[G_\eta]$;*

2. *$H_\xi \in M[G_\xi]$ i H_ξ je $M[G_\xi]$-generički filter u $\mathcal{Q}_\xi$.*

Dokaz
1. Kako je $i_{\xi,\alpha}$ kompletno utapanje, G_ξ je M-generički filter u $\mathcal{P}_\xi$. Dalje, neka je $\xi \leqslant \eta$, $a \in M[G_\xi]$ i neka je $\tilde{a} \in M^{\mathcal{P}_\xi}$ tako da je

$$a = \mathtt{I}_{G_\xi}(\tilde{a}).$$

Uočimo ime $\tilde{b} \in M^{\mathcal{P}_\eta}$ definisano sa

$$\tilde{b} = \{\langle \sigma, i_{\xi,\eta}(p) \mid \langle \sigma, p \rangle \in \tilde{a}\}.$$

Kako je $i_{\xi,\eta}$ kompletno utapanje, mora biti

$$\mathtt{I}_{G_\eta}(\tilde{b}) = a,$$

odakle sledi da je $M[G_\xi] \subseteq M[G_\eta]$.

2. Direktna posledica teoreme 7.1.3 i činjenice da je

$$\mathcal{P}_{\xi+1} \cong \mathcal{P}_\xi * \tilde{\mathcal{Q}}_\xi.$$

□

7.1.11 Zadatak Neka je, u M, $\alpha > 0$ granični ordinal i neka je

$$\langle\ \langle \mathcal{P}_\xi \mid \xi \leqslant \alpha \rangle, \langle \tilde{\mathcal{Q}}_\xi \mid \xi < \alpha \rangle\ \rangle$$

α-iteracija podržana sa $\mathcal{I}$ takva da je svaki element ideala $\mathcal{I}$ ograničen u α. Neka je G proizvoljan M generički filter u $\mathcal{P}_\alpha$, $S \in M$, $X \subseteq S$, $X \in M[G]$ i neka

$$M[G] \models |S| < \operatorname{cf} \alpha.$$

Dokazati da postoji $\xi < \alpha$ tako da $X \in M[i^{-1}_{\xi,\alpha}[G]]$.

Uputstvo

Kao i malo pre, neka je $G_\eta = i^{-1}_{\eta,\alpha}[G]$. Kako je svaik element ideala $\mathcal{I}$ ograničen u α, imamo da je

$$P_\alpha = \bigcup_{\eta<\alpha} i_{\eta,\alpha}[P_\eta] \quad \text{i} \quad G = \bigcup_{\eta<\alpha} i_{\eta,\alpha}[G_\xi].$$

Dalje, neka je $\tilde{X}$ proizvoljno $\mathcal{P}_\alpha$-ime skupa X. Ostatak argumentacije sprovodimo u $M[G]$. Za $s \in X$ neka je $\xi_s < \alpha$ tako da

$$(\exists p \in G_{\xi_s})(i_{\xi_s,\alpha}(p) \Vdash_{\mathcal{P}_\alpha} \check{s} \in \tilde{X}).$$

Neka je $\xi = \sup\{\xi_s \mid s \in X\}$. Kako je $|X| \leqslant |S| < \operatorname{cf} \alpha$, imamo da je $\xi < \alpha$. Odavde sledi da je

$$X = \{s \in S \mid (\exists p \in G_\xi)(i_{\xi,\alpha}(p) \Vdash_{\mathcal{P}_\alpha} \check{s} \in \tilde{X})\}.$$

Kako je $\Vdash_{\mathcal{P}_\alpha}$ definabilno u M (forsing teorema), imamo da $X \in M[G_\eta]$.

□

7.2 Martinova aksioma

Martinova aksioma MA je prva *forsing aksioma* i ona amalgamira svojstva c.c.c. generičkih ekstenzija.

MA Za svaki beskonačan kardinal $\kappa < 2^{\aleph_0}$ važi MA_κ, pri čemu je MA_κ sledeći iskaz:

Za svako neprazno c.c.c. parcijalno uređenje $\mathcal{P}$ i svaku familuju $\mathcal{D}$ gustih skupova u $\mathcal{P}$ takvu da je $|\mathcal{D}| \leqslant \kappa$, postoji filter G u $\mathcal{P}$ takav da je $G \cap D \neq 0$ za svako $D \in \mathcal{D}$.

Bez dokaza navedimo nekoliko njenih važnih ekvivalenata. Zainteresovani čitalac može samostalno da pokusa da dokaze navedenu ekvivalentnost. U slučaju poteškoća, ova tematika je detaljno obrađena u [53]. Dakle, sledeći iskazi su ekvivalentni:

1. MA_κ;
2. MA_κ restrihovana na parcijalna uređenja kardinalnosti $\leqslant \kappa$;
3. MA_κ restrihovana na kompletne Booleove algebre;
4. MA_κ restrihovana na uređenja tipa $\langle \kappa, R\rangle$ (R je neka relacija poretka na κ takva da je odgovarajuće uređenje c.c.c.);
5. Neka je X kompaktan c.c.c. Hausdorffov prostor (topološki prostor je c.c.c. ukolikonema neprebrojivo mnogo međusobno disjunktnih otvorenih skupova) i neka je $\{U_\xi \mid \xi < \kappa\}$ familija otvoreno gustih skupova u X. Tada je $\bigcap\limits_{\xi<\kappa} U_\xi \neq 0$.

7.2.1 Zassdatak Dokazati da ne važi $\mathrm{MA}_{2^{\aleph_0}}$.

Uputstvo Neka je $\mathcal{P} = \mathrm{Fn}(\omega, 2)$ i neka je

$$\mathcal{D} = \{D \subseteq \mathrm{Fn}(\omega, 2) \mid \text{“}D^c \text{ je ultrafilter”}\}.$$

Ako je G ultrafilter, onda za svako $n < \omega$ imamo da ili $\{\langle n, 0\rangle\} \in G$, ili $\{\langle n, 1\rangle\} \in G$, odakle sledi da je sa

$$f_G(n) = \begin{cases} 0 & , \quad \{\langle n, 0\rangle\} \in G \\ 1 & , \quad \{\langle n, 1\rangle\} \in G \end{cases}$$

dobro definisana funckija $f_G : \omega \longrightarrow 2$, kao i da različitim ultrafilterima odgovaraju različite funkcije. Kako za svaku funkciju $f : \omega \longrightarrow 2$ postoji jedinstveni ultrafilter G_f u $\mathcal{P}$ takav da $\{\langle n, 0\rangle\} \in G$ akko je $f(n) = 0$, imamo da je $|\mathcal{D}| = 2^{\aleph_0}$. Pokazati:

1. Svaki $D \in \mathcal{D}$ je gust u $\mathcal{P}$;

2. Ako filter G seče sve guste skupove, onda je on ultrafilter.

Na osnovu ovoga pokazati tvrđenje. $\square$

Mnoge su primene Martinove aksioma, pre svega u kombinatorici i topologiji. Ovde ćemo kao ilustraciju pokazati da

$$\mathrm{MA}_{\omega_1} \Rightarrow \mathrm{SH}.$$

Za ovo nam je potrebno sledeće pomoćno tvrđenje, koje je samo po sebi dovoljno interesantno:

7.2.2 Lema *Pretpostavimo da važi* MA_κ. *Tada se c.c.c. svojstvo za topološke prostore čuva pri prozivodu.*

Dokaz

Prvo ćemo pokazati da, uz MA_κ, proizvod dva c.c.c. topološka prostora ostaje c.c.c. prostor, a zatim iz ovoga izvesti tvrđenje u celini.

Neka su X i Y c.c.c. topološki prostori. Suprotno tvrđenju, pretpostavimo da $X \times Y$ nije c.c.c.. Tada postoji familija

$$\{U_\xi \times V_\xi \mid \xi < \omega_1\}$$

međusobno disjunktnih otvorenih skupova u $X \times Y$. Pokažimo da postoji neprebrojiv $A \subseteq \omega_1$ takav da $\{U_\xi \mid \xi \in A\}$ ima svojstvo konačnog preseka. Za $\alpha < \omega_1$ neka je

$$W_\alpha = \bigcup_{\alpha<\xi} U_\xi.$$

Primetimo da je $W_\xi \subseteq W_\eta$ za $\eta \leqslant \xi$. Ako bi za svako $\xi < \omega_1$ postojalo $\eta > \xi$ $(\eta < \omega_1)$ tako da je $\overline{W}_\xi \setminus \overline{W}_\eta \neq 0$, onda bismo mogli da konstruišemo neprebrojivo mnogo međusobno disjunktnih otvorenih skupova u X (to bi bili skupovi $W_\xi \setminus \overline{W}_\eta$), što je u suprotnosti sa c.c.c. svojstvom prostora X.

Dakle, postoji $\alpha < \omega_1$ tako da je $\overline{W}_\xi = \overline{W}_\alpha$ za svako $\xi \geqslant \alpha$. Neka je

$$\mathcal{P} = \{p \subseteq W_\alpha \mid \operatorname{int} p = p \wedge p \neq 0\}.$$

$\mathcal{P}$ je u odnosu na $\subseteq$ c.c.c. uređenje (X je c.c.c. prostor). Za $\xi \geqslant \alpha$ $(\xi < \omega_1)$ neka je

$$D_\xi = \{p \in \mathcal{P} \mid (\exists \eta > \xi)(p \subseteq U_\eta)\}.$$

Pokažimo da je D_ξ gust u $\mathcal{P}$. U tom cilju, neka je $p \in \mathcal{P}$ proizvoljno. Tvrdimo da postoji $q \in D$ tako da je $q \subseteq p$. Zaista, kako je $\overline{W}_\xi = \overline{W}_\alpha$, imamo da je $p \subseteq \overline{W}_\xi$, odakle sledi da je

$$p \cap W_\xi \neq 0,$$

pa na osnovu definicije skupa $W - \xi$ sledi da postoji $\eta > \xi$ tako da je $q = p \cap U_\eta \neq 0$. Odavde sledi da $q \in D_\xi$ i da je $q \subseteq p$, čime smo pokazali da je D_ξ gust u $\mathcal{P}$.

Na osnovu MA_{ω_1}, postoji filter G u $\mathcal{P}$ takav da je $G \cap D_\xi \neq 0$ za svako $\xi \geqslant \alpha$. Traženi skup A je korektno definisan sa

$$A = \{\xi < \omega_1 \mid \xi \geqslant \alpha \wedge (\exists p \in G)(p \subseteq U_\xi)\}.$$

Dakle,

$$\{U_\xi \mid \xi \in A\}$$

je familija kardinalnosti $\aleph_1$ sa svojstvom konačnog preseka. Međutim, odavde sledi da je

$$\{V_\xi \mid \xi \in A\}$$

neprebrojiva familija međusobno disjunktnih otvorenih skupova u Y ($U_\xi \cap U_\eta \neq 0$ i $U_\xi \times V_\xi \;\cap\; U_\eta \times V_\eta = 0$ povlači da je $V_\xi \cap V_\eta = 0$), što je u kontradikciji sa polaznom pretpostavkom da je Y c.c.c. prostor.

Sada smo spremni da dokažemo tvrđenje u celini. Neka je

$$\{X_i \mid i \in I\}$$

familija c.c.c. topoloških prostora. Suprotno tvrđenju, pretpostavimo da $\prod\limits_{i \in I} X_i$ nije c.c.c. Tada postoji familija

$$\{U_\xi \mid \xi < \omega_1\}$$

baznih međusobno disjunktnih otvorenih skupova u $\prod\limits_{i \in I} X_i$. Za svako $\xi < \omega_1$ neka je

$$I_\xi = \{j \in I \mid \pi_j[U_\xi] \neq X_j\},$$

pri čemu je $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} X_i \longrightarrow X_j$ j-ta projekcija. Kako su U_ξ bazni skupovi, po definiciji Tihonovljeve topologije (topologija proizvoda) je svaki od skupova I_ξ konačan. Na osnovu Δ-sistem leme, postoji Δ-sistem

$$E = \{I_\xi \mid \xi \in B\},$$

pri čemu je $B \subseteq \omega_1$ neprebrojiv. Koren e sistema E ne može biti prazan, jer iz $I_\xi \cap I_\eta = 0$ sledi da je $U_\xi \cap U_\eta \neq 0$. Međutim, poslednje implicira da

$$\prod_{i \in e} X_i$$

nije c.c.c., što je nemoguće, jer je e neprazan konačan skup i svaki od prostora X_i je c.c.c. $\square$

Uređenje $\langle S, \leqslant \rangle$ je *Suslinova linija* ukoliko važi:

1. S je linearno i bez krajeva;

2. S je povezan prostor u topologiji generisanoj uređenjem;

3. S je c.c.c. prostor koji nije separabilan.

Ukoliko se poslednji uslov zameni sa separabilnošću, dobija se Cantorova karakterizacija uređenja realnih brojeva. *Suslinova hipoteza* SH je rečenica

"Ne postoji Suslinova linija".

7.2.3 Lema *Neka je S Suslinova linija. Tada $S \times S$ nije c.c.c. u poretku proizvoda (leksikografski poredak).*

Dokaz

Iz c.c.c. sledi da S može imati najviše prebrojivo mnogo izolovanih tačaka. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da S nema izolovane tačke. Rekurzijom po $\xi < \omega_1$ konstruišimo $a_\xi, b_\xi, c_\xi \in S$ sa sledećim svojstvima:

1. $a_\xi < b_\xi < c_\xi$;

2. $(a_\xi, b_\xi) \neq 0$ i $(b_\xi, c_\xi) \neq 0$;

3. $(a_\xi, c_\xi) \cap \{b_\eta \mid \eta < \xi\} = 0$.

Konstrukciju obavljamo na sledeći način: kako S nije separabilan prostor,

$$S \setminus \mathrm{cl}\,\{b_\xi \mid \xi < \alpha\}$$

je neprazan otvoren skup, pa sadrži neprazan otvoreni interval (a_α, c_α). Kako je (a_α, c_α) beskonačan skup, postoji $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ tako da je $(a_\alpha, b_\alpha) \neq 0$ i $(b_\alpha, c_\alpha) \neq 0$.

Neka je $U_\alpha = (a_\xi, b_\xi) \times (b_\xi, c_\xi)$, $\xi < \omega_1$. Sasvim lako se proverava da je svaki od skupova U_ξ otvoren i neprazan, kao i da je $U_\xi \cap U_\eta = 0$ za $\xi \neq \eta$. Odavde sledi da $S \times S$ nije c.c.c. $\square$

Najavljeni rezultat je neposredna posledica prethodne dve leme: po prvoj od njih, iz MA_{ω_1} sledi da je proizvod c.c.c. prostora c.c.c. prostor, a po drugoj, ukoliko je S suslinova linija, onda $S \times S$ nije c.c.c. Kako je svaka Suslinova linija ujedno i c.c.c., zaključujemo da iz MA_{ω_1} sledi SH, tj. da ne postoji Suslinova linija.

7.3 Relativna konsistentnost $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$

Metod konačno podržsanog iteriranog forsinga ćemo ilustrovati dokazom relativne konsistentnosti $\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}$. Neka je, u M, κ regularan kardinal veći od ω_1 takav da je $2^{<\kappa} = \kappa$. Dalje, neka je $f \in M$, $f : \kappa \longrightarrow \kappa \times \kappa$ surjekcija takva da je

$$(\forall \xi, \eta, \zeta < \kappa)(f(\xi) = \langle \eta, \zeta \rangle \Rightarrow \eta \leqslant \xi).$$

Prelazimo na konstrukciju (u M) konačno podržane iteracije

$$\langle\ \langle \mathcal{P}_\xi \mid \xi \leqslant \kappa \rangle, \langle \langle \check{\lambda}_\xi, \tilde{R}_\xi, \check{0} \rangle \mid \xi < \kappa \rangle\ \rangle$$

sa sledećim svojstvima:

(a) $\mathbf{1} \Vdash_{\mathcal{P}_\xi} \phi(\check{\lambda}_\xi, \tilde{R}_\xi)$, pri čemu je $\phi(\check{\lambda}_\xi, \tilde{R}_\xi)$ formula

“$\tilde{R}_\xi$ je c.c.c. parcijalno uređenje na $\check{\lambda}_\xi$ sa maksimumom $\check{0}$”;

(b) $\lambda_\xi < \kappa$.

Prvo svojstvo će nam obezbediti da svako od uređenja $\mathcal{P}_\xi$ bude c.c.c. u M. Drugo svojstvo će nam obezbediti da, u M, $|\mathcal{P}_\xi| < \kappa$ za $\xi < \kappa$ i $|\mathcal{P}_\kappa| \leqslant \kappa$. Ovo je posebno važno zbog procene broja finih $\mathcal{P}_\xi$-imena. Kao što smo do sada više puta videli, uslov $2^{<\kappa} = \kappa$ se koristi u ovakvim procenama.

S jedne strane, u M imamo najviše $(\kappa^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \kappa$ finih $\mathcal{P}_\kappa$-imena za podskupove od $\check{\omega}$, pa

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} \leqslant \kappa$$

za svaki M-generički filter G u $\mathcal{P}_\kappa$.

S druge strane, za svako $\xi < \kappa$ i $\lambda < \kappa$, u M imamo ne više od $(\kappa^{\aleph_0})^\lambda = \kappa$ $\mathcal{P}_\xi$ finih imena za podskupove od $\lambda \check{\times} \lambda$. Koristeći ovo, prelazimo na opis izbora $\tilde{R}_\xi$ i λ_ξ.

Za dato $\mathcal{P}_\xi$, izaberimo u M enumeraciju

$$\langle\langle\lambda^\xi_\eta, \tilde{R}^\xi_\eta\rangle \mid \eta < \kappa\rangle$$

svih parova $\langle\lambda\tilde{R}\rangle \in M$ takvih da je (u M) λ kardinal $< \kappa$ i da je $\tilde{R}$ fino $\mathcal{P}_\xi$-ime za podskup od $\lambda \check{\times} \lambda$.

Neka je $f(\xi) = \langle\eta, \zeta\rangle$. Kako je $\eta \leqslant \xi$, $\mathcal{P}_\eta$-ime $\tilde{R}^\eta_\zeta$ je već definisano. Neka je $\tilde{R} = i_{\eta,\xi}(\tilde{R}^\eta_\zeta)$ i neka je $\lambda_\xi = \lambda^\eta_\zeta$. U opštem slučaju $\tilde{R}$ ne mora biti ime za c.c.c. parcijalno uređenje, pa $\tilde{R}_\xi$ biramo tako da važi

$$\mathbf{1} \Vdash_{\mathcal{P}_\xi} (\phi(\check{\lambda}_\xi, \tilde{R}_\xi) \wedge (\phi(\check{\lambda}_\xi, \tilde{R}) \Rightarrow \tilde{R}_\xi = \tilde{R})).$$

Da takvo $\tilde{R}_\xi$ postoji neposredno sledi iz principa maksimalnosti (videti 5.2.16), forsing teoreme i činjenice da

$$\mathrm{ZFC} \vdash \exists x \phi(\lambda_\xi, x).$$

Neka je G proizvoljan M-generički filter u $\mathcal{P}_\kappa$. Hoćemo da pokažemo da

$$M[G] \models \mathrm{MA}_\lambda$$

za svaki u $M[G]$ kardinal $\lambda < \kappa$. Odavde će posebno slediti i to da $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geqslant \kappa$, pa na osnovu procene broja finih imena imamo da $M[G] \models 2^{\aleph_0} = \kappa$.

Neka je , u $M[G]$, λ kardinal $< \kappa$, $M[G] \models \phi(\lambda, R)$ i neka je $\mathcal{D} \in M[G]$ familija gustih skupova u $\langle\lambda, R\rangle$ takva da $M[G] \models |\mathcal{D}| \leqslant \lambda$.

Kao i ranije, neka je $G_\xi = i^{-1}_{\xi,\kappa}[G]$. Primenom zadatka 7.1.11, može se pokazati da postoji $\eta < \kappa$ tako da $R, \mathcal{D} \in M[G_\eta]$. Dalje, neka je $\zeta < \kappa$ tako da je

$$R = \mathtt{I}_{G_\eta}(\tilde{R}^\eta_\zeta)$$

i neka je $\xi < \kappa$ tako da je $f(\xi) = \langle\eta, \zeta\rangle$. Za $\tilde{R} = i_{\eta,\xi}(\tilde{R}^\eta_\zeta)$ imamo da je $\mathtt{I}_{G_\xi}(\tilde{R}) = R$.

Primetimo da
$$M[G_\xi] \models \phi(\lambda, R).$$
Mada c.c.c. nije apsolutno u opštem slučaju, u našem slučaju se očuvalo. Naime, ako bi $\langle \lambda, R \rangle$ imalo u $M[G_\xi]$ neprebrojivi antilanac, on bi ostao neprebroji i u $M[G]$ zbog očuvanja kardinala i kofinalnosti.

Kako
$$\mathbf{1} \Vdash (\phi(\check{\lambda}, \tilde{R}) \Rightarrow \tilde{R} = \tilde{R}_\xi),$$
imamo da je $R = \mathtt{I}_{G_\xi}(\tilde{R}_\xi) = R$. Dakle, u $M[G_{\xi+1}]$ imamo $M[G_\xi]$-generički filter H_ξ u $\langle \lambda, R \rangle$. Kako $\mathcal{D} \in M[G_\eta] \subseteq m[G_\xi]$, H_ξ seče sve skupove iz $\mathcal{D}$.

Poglavlja o forsingu završavamo sledećim izborom zadataka. Kao i inače, podrazumevamo da radimo isključivo sa separativnim uređenjima bez minimalnih elemenata.

Zadaci

7.1 Ako je uređenje $\mathcal{P}$ κ-zatvoreno i ako je κ singularan kardinal, dokazati da je $\mathcal{P}$ κ^+-zatvoreno.

7.2 Neka je $\mathcal{P} \in M$ i neka je
$$M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$$
prebrojiv lanac prebrojivih tranzitivnih modela teorije ZFC, pri čemu je
$$M_{n+1} = M_n[G_n],$$
pri čemu je G_n M_n-generički filter u $\mathcal{P}$.

1. Dokazati da aksioma partitivnog skupa ne važi u $\bigcup\limits_{n<\omega} M_n$;
2. Dokazati da, ukoliko postoji tranzitivan model N teorije ZFC takav da
$$\langle G_n \mid n \in \omega \rangle \in N,$$
onda modeli M i N nemaju istu visinu.

Sledeći zadaci vode do konstrukcije modela N Fefermana i Levya. U N, skup realnih brojeva je prebrojiva unija prebrojivih skupova. Pritom $N \models$ ZF i $N \not\models$ AC.

Polazimo od prebrojivog tranzitivnog modela teorije ZFC. Neka je $\mathcal{P} \in M$ skup svih funkcija p sa sledećim svojstvima

- $\mathrm{dom}(p) \in [\omega \times \omega]^{<\omega}$;
- $p(n, m) < \omega_n^M$.

Uređenje u $\mathcal{P}$ je obratna inkluzija.

Fiksirajmo M-generički filter G u $\mathcal{P}$. Neka je $F = \bigcup G$ i neka je $F_n : \omega \longrightarrow \omega_n^M$ definisano sa

$$F_n(m) = F(n, m).$$

Za permutaciju π od ω kažemo da je konačno podržana ukoliko je skup

$$\{n \in \omega \mid \pi(n) \neq n\}$$

konačan. Primetimo da je ovaj pojam ZF-apsolutan, kao i da sve konačno podržane permutacije pripadaju polzanom modelu M.

Konačno, neka je W skup svih funkcija oblika $F_n \circ \pi$, pri čemu je π konačno podržana permutacija, i neka je N skup svih $x \in M[G]$ koji su u $M[G]$ nasledno ordinalno definabilni pomoću konačno mnogo elemenata skupa $W \cup \{W\}$.

7.3 Dokazati da za proizvoljno $n < \omega$ postoji $a_n \in N \cap P(\omega)$ tako da

$$M[G] \models L[a_n] = L[F_0, \ldots, F_n].$$

7.4 Uz prethodnu simboliku, pokazati da je

$$\omega_1^{L[a_n]} = \omega_{n+1}^M.$$

Koristeći ovo, pokazati da je $P(\omega) \cap L[a_n]$ prebrojiv u N.

7.5 Za $n < \omega$ neka je $D_n = P(\omega) \cap L[a_n]$. Pokazati da

$$\langle D_n \mid n < \omega \rangle \in N.$$

7.6 Rezultat Fefermana i Levyja sledi iz jednakosti

$$P(\omega) \cap N = \bigcup_{n<\omega} D_n.$$

Dokazati da je ova jednakost posledica sledećeg pomoćnog tvrđenja:

> $(*)$: Neka je $\varphi(x_0, \ldots, x_n)$ formula jezika teorije skupova, $x \in M$ i neka je $\tilde{F}_n$ kanonsko ime za F_n (bez obzira na izbor generičkog filtera G, važi $\mathtt{I}_G(\tilde{F}_n) = F_n$). Tada, ako
>
> $$p \Vdash \varphi(\tilde{F}_0, \ldots, \tilde{F}_{n-1}, {}^{\check{W}}\check{x}),$$
>
> onda i
>
> $$p \restriction (n \times \omega) \Vdash \varphi(\tilde{F}_0, \ldots, \tilde{F}_{n-1}, {}^{\check{W}}\check{x}).$$

7.7 Dokazati $(*)$.

Deo III

Odabrane teme

8

Veličina merljivih kardinala

Pojava nedostiživih kardinala, a potom i ostalih jakih aksioma beskonačnosti u teoriji skupova zadržala je nekako neodređen status kroz duži vremenski period. Regularan kardinal koji je rešenje jednačine na alefima

$$\aleph_\alpha = \alpha$$

je slabo nedostiživ i verovatno da je tako i otkriven: prvo pitanjem da li postoji, potom postuliranjem egzistencije. Ostala jača nedostiživa svojstva, dobijena superpozicijom, su slično uvedena da bi se tek naknadno utvrdilo da se egzistencija nosilaca ovih svojstava - raznovrsnih nedostiživih kardinala ne može dokazati u ZFC i da važi

$$\mathrm{ZFC} + I \vdash Con(\mathrm{ZFC})$$

i slično

$$\mathrm{ZFC} + I_2 \vdash Con(\mathrm{ZFC} + I_1),$$

pri čemu je I_k rečenica: postoji k nedostiživih kardinala. Slično svako jače svojstvo dokazuje konsistentnost slabijih. U hijerarhiji nedostiživih kardinala, posle prvih nedostiživih, merljivi imaju direktno poreklo u nekom matematičkom svojstvu, dok je većina ostalih, prethodnika i sledbenika dobijena iteracijama - pojačavanjem polaznih svojstava, a ređe slabljenjem.

Samim iteriranjem svojstava prvi svedoci su se nizali,pa je tako prvi slabo nedostiživ manji ili jednak od prvog jako nedostiživog, prvi slabo nedostiživ ispred prvog hipernedostiživog koji je ispred prvog Mahloovog kardinala. Slično i za jača svojstva, i tako dobijamo da pozicija nedostiživih kardinala na alef osi određuje i njihovu konsistentsku snagu.

S jedne strane, u matematici, ako imamo hipotetične objekte, npr. hipotetično rešenje neke jednačine, onda obično nikom ne pada na pamet da hipotetična rešenja dalje koristi u izgradnji novih hipotetičnih jednačina i da naknadna još više hipotetična rešenja uzima ozbiljno i oko njih gradi neku teoriju. Tako da je masovno, stogodišnje neraspoloženje, koje se penje do averzije prema nedostiživim kardinalima kao i sumnjičavosti prema celoj teoriji skupova, ljudski gledano, verovatno dosta opravdano.

Tu imamo čudnu situaciju: na ordinalnoj pravoj može uopšte da ih nema, ali izgleda da pod raznim okolnostima može da ih ima, ili da ih ima jako puno i jako velikih. Ovde se postavljaju neka jednostavna pitanja:

- Ima li neke granice mogućnosti postuliranja sve jačih nedostiživih svojstava?
- Da li nedostiživi kardinali osim svoje bizarnosti imaju eventualno još neku vrednost?
- Šta će nam, sve to, uopšte!?

Razvoj teorije skupova je prolazio kroz razne faze u kojima su se nedostižni kardinali približavali pažnji istraživača ili udaljavali od nje. Istraživanjima šezdesetih godina i naknadno došlo se do bogatih saznanja o ovim do tada i od tada niti postojećim, niti nepostojećim objektima i svojstvima i oni su sad tu potpuno neodstranjivi usled nagomilavanja novih značajnih razloga, pa se tako praksa nametala u određivanju prema gornjim dilemama, popunjavajući harmonično njihovo značenje bogatim sadržajem.

Tu je sve počelo, ili preciznije rečeno, sve se nastavilo na merljivim kardinalima. Lebesgueova mera i integral tako lepo zaokružuju klasičnu analizu, zatim daju zaokruženu podlogu za teoriju verovatnoće. Zato, ako je nešto od značaja za teoriju mere, nužno dobija širu i pojačanu pažnju. Prvo su se pojavili Lebesgue nemerljivi skupovi konstruisani pomoću aksiome izbora, još na početku XX veka. Nemerljivi skup je u teoriji verovatnoće događaj bez verovatnoće. Teško je tvrditi da na primer prisustvo događaja bez verovatnoće nema nikakav značaj u fizici ili teoriji o postanku kosmosa.

Banach-Tarski rasklapanje lopte na nekoliko komada i sastavljanje dve identične polaznoj kod fizičara izaziva nevericu: imamo jednu matematičku kuglu, a onda dok smo trepnuli umesto te jedne ima ih dve ili ne znam koliko. Kao da je narušena neka klasična statičnost egzistencije matematičkih objekata i očekivana statičnost matematičkih zakonitosti. Teško je tvrditi da ovakvi primeri neće imati semantičkih posledica npr. u fizici.

8.1 Ulamov ponor

Slično navedenim i drugi zadaci/svojstva koji se odnose na merljivost bi mogli imati uži ili širi značaj. Sledeća Ulamova teorema dovodi egzistenciju totalne mere u vezu sa jakim aksiomama beskonačnosti.

8.1.1 Teorema [Ulamova dihotomija] *Neka je μ mera na skupu S. Tada je μ bezatomična i $|S|$ je veći ili jednak od prvog slabo nedostižnog kardinala, ili je μ atomična i $|S|$ je veći ili jednak od prvog jako nedostižnog kardinala.*

U prvom slučaju postoji σ-aditivna bezatomična mera na $\mathbb{R}$ koja širi Lebesgueovu meru, pa je kontinuum veći ili jednak od prvog slabo nedostižnog kardinala.

Dokaz teoreme ćemo dati nešto kasnije.

Nakon ove teoreme iz 1930. godine (realno merljive kardinale uveo je Banach 1930. godine, a iste godine su nedostiživost merljivih dokazali Ulam i Tarski) po ovom pitanju nije bilo promena sledećih više od 30 godina. Početkom šezdesetih počinje i velika serija rezultata o veličini i snazi merljivih kardinala. Do tog vremena opstala je sumnja da je prvi jako nedostiživ kardinal merljiv. Radovima Hanfa, Scotta, Keislera, Tarskog utvrđeno je da je merljivi kardinal mnogo veći i da se na merljivim kardinalima kondenzuju raznovrsna svojstva, što će biti sažeto prikazano.

Teorema Solovaya o ekvikonsistentnosti egzistencije dve vrste mera iz Ulamove teoreme, bezatomične σ-aditivne totalne mere koja širi Lebesgueovu meru i binarne κ-aditivne mere na merljivom kardinalu κ, prikazana je, zajedno sa nekim vezanim razmatranjima u poglavlju o realno vrednosnim kardinalima.

Izdvojmo neke važne osobine merljivih kardinala:

- Merljivi kardinal je jako nedostiživ;
- Merljivi kardinal je hipernedostiživ;
- Postojanje merljivih kardinala povlači da je $V \neq L$ i da postoje nekonstruktibilni skupovi na samom početku kumulativne hijerarhije;
- Merljivi i slični kardinali karakterišu svojstva kompaktnosti infinitarnih jezika;
- Postojanje merljivih kardinala ekvivalentno je postojanju netrivijalnih elementarnih utapanja modela teorije skupova;
- Na merljivom kardinalu postoji mera koja se koncentriše na jaka svojstva - ako merljivi kardinal ima neko svojstvo nedostiživosti, onda je skup prethodnika sa tim svojstvom mere 1;
- Prvi primer infleksije grafa kontinuum funkcije vezan je za merljive kardinale.

Hijerarhija nedostiživih kardinala deli se na male velike kardinale, srednje velike kardinale i počev sa merljivim, velike velike kardinale. Iteracijom svojstava merljivih kardinala prilazi se granici neba nedostiživih kardinala i jakih aksioma beskonačnosti. Saznanja o ovoj hijerarhiji uvela su meru konsistentske jačine jakih aksioma beskonačnosti.

Posebno, gore navedena Solovayova teorema o ekvikonsistenciji dovodi u fokus pitanje konsistentske jačine matematičkih teorija. Bez hijerarhije nedostiživih kardinala, nikada ne bismo imali predstave o snazi teorije

$$ZFC \ + \ \text{postoji totalna } \sigma\text{-aditivna mera na } \mathbb{R}$$

kao ni o proporciji jačine npr. ove teorije i recimo teorija

$$ZFC + DC + \ \text{svi skupovi realnih brojeva su Lebesgue-merljivi}$$

i

$$ZFC \quad + \quad \begin{array}{l}\text{postoji totalna konačno aditivna translatorno} \\ \text{invarijantna mera koja širi Lebesgueovu meru}\end{array} .$$

Merljivim kardinalima i njihovim uopštenjima karakteriše se konsistentska jačina rešenja drugih značajnih problema. Navedenim razlozima uklanja se pitanje smisla postojanja i proučavanja jakih aksioma beskonačnosti, verifikuje se njihov značaj, a pitanje veze i egzistencije zamenjuje se saznanjima o snazi skupova matematičkih svojstava okupljenih u različite aksiomatske sisteme. Kao što nam na početku nije bilo dato da odlučujemo da li postoje prirodni ili realni brojevi, slično i ovde imamo pravo na uvid u relativne odnose i pravo da učestvujemo u štrikanju velikog svilenog konca, a da pitanja o egzistenciji i konsistentnosti eventualno razmatra superiorniji um.

8.2 Dokaz Ulamove teoreme

U ovoj sekciji dajemo dokaz teoreme 8.1.1. Neka je μ atomična σ-aditivna mera na skupu S i neka je $x \subseteq S$ jedan atom. Tada je mera

$$\mu' = \mu \restriction P(x)$$

binarna (ultrafilter) i $|S|$ je veći ili jednak od prvog merljivog kardinala κ. Neka je ν κ-kompletan ultrafilter (mera) nad κ. Pretpostavimo da je kardinal κ singularan. Tada je

$$\kappa = \bigcup_{\xi < \alpha} \lambda_\xi,$$

pri čemu je $\alpha = \operatorname{cf} \kappa$ i $\langle \lambda_\xi \mid \xi < \alpha \rangle$ je rastući niz kardinala u κ. Zbog uniformnosti je $\nu(\lambda_\xi) = 0$, odakle zbog κ-kompletnosti sledi da je i $\nu(\kappa) = 0$; kontradikicja.

Dakle, κ je regularan kardinal. Pokažimo da je κ jako granični. Pretpostavimo suprotno, neka je λ kardinal manji od κ takav da je

$$\kappa \leqslant 2^\lambda.$$

Tada postoji $A \subseteq {}^\lambda 2$ takav da je $|A| = \kappa$. Za $\xi < \lambda$ neka je

$$A_{\xi,i} = \{f \in A \mid f(\xi) = i\}.$$

Neka je $g : A \longrightarrow \kappa$ bijekcija. Kako je skup A disjunktna unija skupova $A_{\xi,0}$ i $A_{\xi,1}$, imamo da je

$$\kappa = g[A_{\xi,0}] \cup g[A_{\xi,1}],$$

pa tačno jedan od skupova $g[A_{\xi,0}]$ i $g[A_{\xi,1}]$ pripada ultrafilteru ν. Označimo ga sa $g[A_{\xi,i_\xi}]$. Neka je

$$X = \bigcap_{\xi < \lambda} A_{\xi,i_\xi}.$$

Zbog κ-kompletnosti ν imamo da je

$$\nu(g[X]) = 1.$$

Međutim, $|X| = |g[X]| = 1$ (za $f \in X$ je $f(\xi) = i_\xi$), što protivreči uniformnosti ultrafiltera ν.

Dokaz drugog dela Ulamove teoreme razdvojen je u nekoliko lema. Za kardinal κ kažemo da je realno (vrednosno) merljiv ukoliko na njemu postoji netrivijalna κ-aditivna mera.

8.2.1 Lema *Ako je κ najmanji kardinal sa netrivijalnom σ-aditivnom merom μ, onda je μ κ-aditivna i κ je realno merljiv.*

Dokaz

Slučaj kada je μ binarna mera već je overen (primer 3.7.15). Slično se postupa i u slučaju kada je μ bezatomična. □

8.2.2 Lema *Ako postoji netrivijalna bezatomična σ-aditivna mera, onda postoji netrivijalna bezatomična σ-aditivna mera na nekom kardinalu $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Dokaz

Neka je μ bezatomična σ-aditivna mera na S. Konstruiše se drvo T podskupova od S rekurzivno na sledeći način:

- U korenu je S;
- Svaki konstruisani čvor se na sledećem nivou deli na dva naslednika pozitivne mere;
- U graničnim slojevima α (α je granični ordinal > 0) se nalaze skupovi X oblika

  $$X = \bigcap_{\xi<\alpha} X_\xi,$$

  pri čemu je svaki od skupova X_ξ u ξ-tom sloju i za $\xi < \eta$ je $X_\xi \supseteq X_\eta$ i X ima pozitivnu meru.

Zbog celularnosti $[0,1]$ svaki nivo je najviše prebrojiv i svaka grana je najviše prebrojiva, pa je visina drveta T manja ili jednaka ω_1, a broj grana je manji ili jednak $2^{\aleph_0}$. Istim argumentom prikazanim u primeru 3.7.15 konstruiše se mera na κ.

Neka je $\{b_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ $(\kappa \leqslant 2^{\aleph_0})$ skup grana sa nepraznim presekom i neka je

$$Z_\alpha = \bigcap b_\alpha, \quad \alpha < \kappa.$$

Očigledno $S = \bigcup_{\alpha<\kappa} Z_\alpha$ je particija skupa S u κ skupova mere 0. Definišimo funkciju $f : S \longrightarrow \kappa$ sa

$$f(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in Z_\alpha.$$

Dalje, neka je ν dato sa

$$\nu(Z) = \mu(f^{-1}[Z]), \quad Z \subseteq \kappa.$$

Slično kao i za ultrafiltere, važi da je ν mera na κ. Pošto je $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$, ν je bezatomična. Ako je κ realno merljiv a nije merljiv, onda je $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$. Ovako dobijena mera se može proširiti do bezatomične σ-aditivne mere η na $2^{\aleph_0}$ na sledeći način:

$$\eta(X) = \nu(X \cap \kappa), \quad X \subseteq 2^{\aleph_0}.$$

Odavde se jednostavno konstruiše bezatomična totalna σ-aditivna mera koja širi Lebesgueovu meru:

Ako je μ bezatomična mera na S, onda postoji skup $Z \subseteq S$ takav da je

$$\mu(Z) = \frac{1}{2}.$$

Štaviše, ako je $Z \subseteq S$, onda postoji skup $Z' \subseteq Z$ takav da je

$$\mu(Z') = \frac{1}{2}\mu(Z).$$

Za svaki konačan niz s nula i jedinica $(s \in \bigcup_{n<\omega} {}^n 2)$ rekurzivno po dužini niza konstruišemo skup $X_s \subseteq S$ na sledeći način:

- $X_0 = S$;
- $X_{s^\frown 0}$ i $X_{s^\frown 1}$ su međusobno disjunktni, $X_s = X_{s^\frown 0} \cup X_{s^\frown 1}$ i
$$\mu(X_{s^\frown 0}) = \mu(X_{s^\frown 1}) = \frac{1}{2}\mu(X_s).$$

Potom definišemo meru ν_1 na ${}^\omega 2$ sa

$$\nu_1(Z) = \mu(\bigcup\{X_f \mid f \in Z\}),$$

gde je $X_f = \bigcap\limits_{n<\omega} X_{f\restriction n}$ za $f : \omega \longrightarrow 2$. Korišćenjem preslikavanja $F : {}^\omega 2 \longrightarrow [0,1]$ definisanog sa

$$F(f) = \sum_{n<\omega} \frac{f(n)}{2^{n+1}},$$

dobija se netrivijalna σ-aditivna mera ν na $[0,1]$, koja se sa Lebesgueovom merom poklapa na intervalima $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n+1}}]$, pa zato imamo poklapanje i na Borelovim skupovima. Svaki skup Lebesgueove mere 0 sadržan je u Borelovom skupu mere 0 i zato ima ν meru 0. Svaki Lebesgue-merljiv skup X je oblika

$$X = (B \setminus N_1) \cup N_2,$$

gde je B Borel-merljiv skup, a N_1 i N_2 su skupovi Lebesgueove mere 0. Odavde sledi da je Lebesgueova mera skupa X jednaka $\nu(X)$, tj. ν se poklapa sa Lebesgueovom merom na svim Lebesgue-merljivim podskupovima intervala $[0,1]$. $\square$

Za familiju skupova

$$\{A_{\alpha,n} \subseteq \omega_1 \mid \alpha < \omega_1 \land n < \omega\}$$

kažemo da je *Ulamova matrica* ako važi:

1. Za svako $\alpha \neq \beta$ i svako $n < \omega$ je $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = 0$;

2. Za svako $\alpha < \omega_1$ je $|\omega_1 \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\alpha,n}| \leqslant \aleph_0$.

Ulamova matrica ima $\aleph_1$ vrsta i $\aleph_0$ kolona. U kolonama su međusobno disjunktni skupovi. Svaka vrsta ne sadrži najviše prebrojivo mnogo elemenata skupa ω_1.

8.2.3 Lema *Postoji Ulamova matrica.*

Dokaz

Za $\xi < \omega_1$ neka je funkcija $f_\xi : \omega \longrightarrow \omega_1$ takva da je $\xi \subseteq f_\xi[\omega]$. Skupove $A_{\alpha,n}$ definišimo sa

$$\xi \in A_{\alpha,n} \Leftrightarrow f_\xi(n) = \alpha.$$

Primetimo da iz prethodne definicije neposredno sledi da za $\alpha \neq \beta$ važi $A_{\alpha,n} \cap A_{\beta,n} = 0$. Dalje, za svako $\xi > \alpha$ postoji $n < \omega$ tako da je $f_\xi(n) = \alpha$, pa mora biti

$$\omega_1 \setminus \bigcup_{n<\omega} A_{\alpha,n} \subseteq \alpha,$$

odakle sledi da je $|\omega_1 \setminus \bigcup\limits_{n<\omega} A_{\alpha,n}| \leqslant \aleph_0$. Dakle, konstruisana familija skupova je Ulamova matrica. $\square$

8.2.4 Lema *Ne postoji netrivijalna σ-aditivna mera na ω_1.*

Dokaz

Neka je $\{A_{\alpha,n} \subseteq \omega_1 \mid \alpha < \omega_1 \wedge n < \omega\}$ Ulamova matrica. Suprotno tvrđenju, pretpostavimo da postoji mera na ω_1. Na osnovu drugog svojstva Ulamove matrice (videti definiciju) i σ-aditivnosti sledi da za svako $\alpha < \omega_1$ postoji $n_\alpha < \omega$ tako da je A_{α,n_α} pozitivne mere. Odavde sledi da postoje neprebrojivi skup $W \subseteq \omega_1$ i $n < \omega$ tako da je $n_\alpha = n$ za svako $\alpha \in W$. Tada je $\{A_{\alpha,n} \mid \alpha \in W\}$ neprebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova pozitivne mere: kontradikcija. $\square$

Direktnim uopštenjem prethodne dve leme dokazuje se da ako je κ naslednik kardinal, onda na κ ne postoji κ aditivna netrivijalna mera. Odavde sledi da je svaki realno merljiv kardinal nedostiživ, čime je kompletiran dokaz Ulamove teoreme.

8.3 Kompaktnost infinitarnih jezika

Merljivi kardinali su povezani sa svojstvom kompaktnosti infinitarnih jezika.

8.3.1 Teorema [Tarski] *Neka je kardinal κ merljiv i neka je Σ teorija infinitarnog jezika $\mathcal{L}_\kappa$ sa κ aksioma. Ako svaka njena podteorija sa $< \kappa$ aksioma ima model, onda i teorija Σ ima model.*

Dokaz

Neka je D κ-kompletan neglavni ultrafilter nad κ i neka je

$$\Sigma = \{\varphi_\xi \mid \xi < \kappa\}$$

i $\Sigma_\alpha = \{\varphi_\xi \mid \xi < \alpha\}$. Za $\alpha < \kappa$ neka je $\mathfrak{A}_\alpha$ model teorije Σ_α. Tvrdimo da je ultraproizvod

$$\mathfrak{A} = \prod_D \mathfrak{A}_\alpha$$

model teorije Σ. Zaista, neka je $\xi < \kappa$ proizvoljno i neka je

$$X = \{\alpha < \kappa \mid \mathfrak{A}_\alpha \models \varphi_\xi\}.$$

Treba pokazati da $X \in D$. Pošto je D uniforman ultrafilter, mora biti $[\xi + 1, \kappa)_{\mathrm{Ord}} \in D$, a kako je $[\xi + 1, \kappa)_{\mathrm{Ord}} \subseteq X$, imamo tvrđenje. $\square$

Prvi kardinal za koji važi ova teorema naziva se slabo kompaktan i ovi kardinali spadaju u srednje velike: mnogo veće od prvih nedostiživih i mnogo manje od merljivih. Ako se u uslovu teoreme ispusti ograničenje kardinalnosti teorije Σ, onda se kardinal za koji važi tako izmenjena teorema naziva kompaktan ili jako kompaktan, dok za merljive kardinale važi pojačan polazni uslov.

8.4 Elementarna utapanja

Prikazaćemo ukratko Scottovu konstrukciju ultrastepena univerzuma V. Neka je κ merljiv kardinal i neka je μ κ-aditivna mera (neglavni ultrafilter) na κ. Za $f, g \in V^\kappa$ uvedimo relaciju ekvivalencije $=_\mu$ sa

$$f =_\mu g \Leftrightarrow \mu(\{i \in \kappa \mid f(i) = g(i)\}) = 1.$$

Dalje, neka je

$$f_\mu = \{g : \kappa \longrightarrow V \mid f =_\mu g \wedge \mathrm{rank}(g) \text{ je minimalan}\}.$$

Primetimo da je f_μ skup, jer je $f_\mu \subseteq V_{\mathrm{rank}(f)+1}$. Takođe primetimo da je $\{g \mid f =_\mu g\}$ prava klasa. Sa V^κ/μ označimo klasu svih f_μ. Na klasi V^κ/μ definišimo binarnu relaciju E sa

$$f_\mu \, E \, g_\mu \Leftrightarrow \mu(\{i \in \kappa \mid f(i) \in g(i)\}) = 1.$$

Na ovaj način $\langle V^\kappa/\mu, E\rangle$ je kao ultrastepen od $\langle V, \in\rangle$. Baš kao i u slučaju ultraproizvoda važi Łośova teorema:

$$\langle V^\kappa/\mu, E\rangle \models \varphi[f_{1\mu}, \ldots, f_{n\mu}] \Leftrightarrow \mu(\{i \in \kappa \mid \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\}) = 1.$$

Da je $\langle V^\kappa/\mu, E\rangle$ dobro zasnovan, sledi, kao i ranije, zbog kompletnosti mere μ.

Takođe i ovde je $d : a \mapsto \langle a \mid i \in \kappa\rangle_\mu$ elementarno utapanje polazne strukture V u ultrastepen V^κ/μ. Slično kao i pre, sledi da su polazna struktura i ultrastepen elementarno ekvivalentni, pa je ultrastepen model teorije ZFC, odakle zbog dobre zasnovanosti (Mostowski kolaps) sledi da je ultrastepen izomorfan tranzitivnom modelu M i neka je l jedinstveni izomorfizam. Imamo

$$V \xrightarrow{d} V^\kappa/\mu \xrightarrow{l} M \,.$$

Neka je ${}^* = l \circ d$, tj. neka je

$$a^* = l(d(a)).$$

Posebno, za svaki ordinal α važi

$$M \models \alpha^* \in \mathrm{Ord},$$

odakle zbog apsolutnosti ordinala sledi da je α^* zaista ordinal. Naravno, $\alpha^* \in M$. Pošto je * elementarno utapanje, mora biti i

$$\begin{aligned} \alpha < \beta \quad &\Rightarrow \quad \alpha^* <^M \beta^* \\ &\Leftrightarrow \quad \alpha^* < \beta^*, \end{aligned}$$

pa je preslikavanje ordinala rastuće: $\alpha \leqslant \alpha^*$ za $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Pošto je M tranzitivan, na osnovu prethodnog sledi da M sadrži sve ordinale ($\alpha \leqslant \alpha^* \Leftrightarrow \alpha \in \alpha^* \vee \alpha = \alpha^*$).

Pokažimo da je * konstantno na κ, tj. da je $\alpha^* = \alpha$ za $\alpha < \kappa$. Navedeno sledi iz κ aditivnosti mere μ analogno primeru ultrastepena $\prod\limits_{\mu}\langle \kappa, < \rangle$ (ovde će ceo Ord^κ/μ biti dobro uređen, sa početnim komadom izomorfnim sa $\langle \kappa, < \rangle$). Na κ imamo

$$\kappa^* = \{l(f_\mu) \mid f : \kappa \longrightarrow \kappa\}$$

(analogno primeru 3.8.11), pa κ^* sadrži konstante manje od κ, ali i funkcije neograničene u κ, pa je $\kappa^* \setminus \kappa$ neprazan, odakle sledi da je $\kappa < \kappa^*$, kao i da je $\kappa = \min(\kappa^* \setminus \kappa)$. Ako je f minimalna neograničena funkcija (prva funkcija iznad konstanti) modulo μ, onda je $l(f_\mu) = \kappa$. Uzmimo projekciju polazne mere μ:

$$\nu(x) = \mu(f^{-1}[x]).$$

Bez razlike, kao i pre, ako je μ ultrafilter onda je to i ν, aditivnost i norma se takođe prenose. Posebno, u ovom slučaju mera ν je normalna: κ-ti element je identična funkcija - detalji dokaza su isti kao u primeru 3.8.30, odakle

$$\varphi^M(\kappa) \Leftrightarrow \nu(\{\alpha < \kappa \mid \varphi(\alpha)\}) = 1. \tag{8.1}$$

Lako se proverava da važi: Ako je kardinal λ nedostiživ i ako je N tranzitivan model teorije ZFC takav da $\lambda \in N$, onda je λ nedostiživ i u N.

8.4.1 Teorema [Hanf] *Ako je κ merljiv kardinal, onda je on i κ-ti nedostiživ kardinal.*

Dokaz

Označimo sa $\mathrm{Inac}(\lambda)$ predikat: λ je nedostiživ. Na osnovu Ulamove teoreme važi $\mathrm{Inac}(\kappa)$, a kako $\kappa \in M$ i kako važi $\mathrm{Inac}^M(\kappa)$, na osnovu (8.1) imamo da je

$$\mu(\{\lambda < \kappa \mid \mathrm{Inac}(\lambda)\}) = 1,$$

odakle sledi tvrđenje. □

8.4.2 Posledica *Ako je kardinal κ merljiv, onda je κ ujedno i κ-ti hipernedostiživ kardinal.*

Ovo se može dalje iterirati. Primera radi, slično se dobije da je κ slabo kompaktan nedostiživ (zadovoljava teoremu kompaktnosti) i da je broj slabo kompaktnih nedostiživih kardinala manjih od κ upravo jednak κ.

Iz (8.1) vidimo da, ako merljiv kardinal ima neko svojstvo nedostiživosti, onda je skup manjih kardinala sa tim svojstvom mere jedan.

Vratimo se još na elementarno utapanje *. κ je prvi pomereni ordinal. Ako je $j : V \longrightarrow M$ netrivijalno elementarno utapanje univerzuma V u tranzitivnu klasu M, onda se prvi pomereni ordinal naziva *kritičnom tačkom* utapanja j. Napomenimo da je utapanje j trivijalno ukoliko je na ordinalima identitet ($j(\alpha) = \alpha$). Kritična tačka netrivijalnog elementarnog utapanja je merljivi kardinal. Imamo sledeću teoremu:

8.4.3 Teorema *Postojanje merljivog kardinala ekvivalentno je postojanju netrivijalnog elementarnog utapanja univerzuma V u neku tranzitivnu klasu M. Kritična tačka elementarnog utapanja je merljiv kardinal.*

Navedimo ovde i Scottovu teoremu o inkompatibilnosti aksiome konstruktibilnosti i egzistencije merljivih kardinala:

8.4.4 Teorema [Scott] *Ako postoji merljivi kardinal, onda je* $V \neq L$.

Dokaz

Neka je κ prvi merljivi kardinal sa normalnom merom μ. Suprotno tvrđenju, pretpostavimo da je $V = L$. Pošto svaki tranzitvan model teorije ZFC koji sadrži sve ordinale sadrži i L, iz $V = L$ i $M \cong V^\kappa/\mu$ (M je tranzitivni kolaps modela V^κ/μ) imamo da je

$$L \subseteq M \subseteq V,$$

pa je $L = M = V$. Pošto je κ prvi merljivi kardinal i j netrivijalno elementarno utapanje V u M (u našem slučaju j je izomorfizam), imamo da

$$M \models j(\kappa) \text{ je najmanji merljivi kardinal,}$$

pa zbog $M = V$ je $j(\kappa)$ najmanji merljivi kardinal. Međutim, $j(\kappa) > \kappa$, pa κ nije merljiv. Kontradikcija, pa mora biti $V \neq L$. $\square$

Ako u konstrukciji V^κ/μ polazni univerzum raslojimo na spratove $V = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha$, imaćemo da je

$$V^\kappa/\mu = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Ord}} V_\alpha^\kappa/\mu$$

i uočava se da slično ultrastepenima dobrih uređenja i za ultrastepene dobro zasnovane relacije važi da iz σ-aditivnosti μ sledi dobra zasnovanost ultrastepena dobro zasnovane relacije. Analogno slučaju dobrih uređenja, ultrastepen dobro zasnovane strukture imaće dobro zasnovan početni komad izomorfan početnom komadu polaznog uređenja u visini add(μ) - aditivnosti mere μ. Sledi da se V i V^κ/μ poklapaju po spratovima do prvog pomerenog ordinala - merljivog kardinala κ, pa će biti

$$V_\alpha \cong \prod_\mu V_\alpha$$

za $\alpha < \kappa$; κ je podskup od V_κ ali se prvi put javlja na spratu $V_{\kappa+1}$.

Sledeća Keislerova varijanta Scottove teoreme obezbeđuje bolji uvid u ovu strukturu.

8.4.5 Teorema *Neka je κ merljiv kardinal i neka je μ normalan ultrafilter (mera) na κ. Tada je*

$$\langle V_{\kappa+1}, \in\rangle \cong \prod_\mu \langle V_{\beta+1}, \in\rangle,$$

pri čemu je $\prod_\mu \langle V_{\beta+1}, \in\rangle = (\prod_{\beta<\kappa} \langle V_{\beta+1}, \in\rangle)/\mu$.

Uočimo da za modele sa desne strane je $V_{\beta+1} \subset V_\kappa$ za sve $\beta < \kappa$, pa je i $\prod_\mu V_{\beta+1} \subseteq \prod_\mu V_\kappa$ kao i da je

$$|\prod_\mu V_\kappa| = 2^\kappa = |V_{\kappa+1}|,$$

pa imamo da je svaka funkcija iz V_κ^κ esencijalno već prisutna u

$$(\bigcup_{\beta<\kappa} V_{\beta+1})^\kappa.$$

Dokaz teoreme

Neka je $\pi : V_{\kappa+1} \longrightarrow \prod_\mu V_{\beta+1}$ definisano sa

$$\pi(x) = \langle x \cap V_\beta \mid \beta < \kappa\rangle_\mu.$$

Pokazaćemo da je π izomorfizam. Označimo gornji ultraproizvod sa

$$\langle B, E\rangle = \prod_\mu \langle V_{\beta+1}, \in\rangle.$$

π je 1–1: Neka je $\pi(x) = \pi(y)$ i neka $a \in x$. Tada je $\mathrm{rank}(a) < \mathrm{rank}(x) \leqslant \kappa$, pa postoji $\gamma < \kappa$ tako da $a \in x \cap V_\gamma$. Zbog $\pi(x) = \pi(y)$ i regularnosti κ je skup

$$X = \{\beta < \kappa \mid x \cap V_\beta = y \cap V_\beta\}$$

kofinalan u κ (jer je mere 1, pa je i kardinalnosti κ). Neka je $\alpha \in X$ veće od γ. Tada je

$$a \in x \cap V_\gamma \subseteq x \cap V_\alpha = y \cap V_\alpha,$$

pa $a \in y$, čime je pokazano da je $x \subseteq y$. Na potpuno isti način se pokazuje da mora biti i $y \subseteq x$, pa zajedno sa prethodnim imamo da je $x = y$.

Kompatibilnost π sa relacijama: Pokazujemo da važi

$$x \in y \Leftrightarrow \pi(x)\, E\, \pi(y).$$

Pretpostavimo prvo da $x \in y$. Tada je $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$, pa postoji $\gamma < \kappa$ tako da $x \in V_\gamma$. Kako je $x \cap V_\beta = x$ za $\beta \geqslant \gamma$, imamo da je

$$[\gamma, \kappa)_{\mathrm{Ord}} \subseteq \{\beta < \kappa \mid x \cap V_\beta \in y \cap V_\beta\},$$

a kako je još i $\mu([\gamma, \kappa)_{\mathrm{Ord}}) = 1$, mora biti i $\pi(x) \in \pi(y)$.

Pretpostavimo sada da $\pi(x)\, E\, \pi(y)$. Tada je skup

$$X = \{\beta < \kappa \mid x \cap V_\beta \in y \cap V_\beta\}$$

mere 1. Primetimo da je za $x \in y$ dovoljno pokazati da postoji $\alpha < \kappa$ tako da je $\operatorname{rank}(x) \leqslant \alpha$. Naime, u tom slučaju bi za $\gamma > \alpha$ bilo $x \cap V_\gamma = x$, pa kako je skup X kofinalan u κ, za proizvoljno $\beta \in X$ veće od α imamo da

$$x = x \cap V_\beta \in y \cap V_\beta \subseteq y.$$

Ostaje da pokažemo egzistenciju pomenutog ordinala α. Uočimo funkciju $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ definisanu sa

$$f(\beta) = \begin{cases} \operatorname{rank}(x \cap V_\beta) & , \quad \beta \in X \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

Pošto je $\operatorname{rank}(x \cap V_\beta) < \beta$ za svako $\beta \in X$, funkcija f je regresivna skoro svuda modulo μ, pa je zbog normalnosti μ ona skoro svuda konstantna, tj. postoji $\alpha < \kappa$ tako da je skup

$$Y = \{\beta < \kappa \mid f(\beta) < \alpha\}$$

mere 1, pa je skup

$$Z = \{\beta < \kappa \mid x \cap V_\beta \in V_\alpha\}$$

takođe mere 1 jer je $X \cap Y \subseteq Z$. Tada je Z i kofinalan u κ, odakle sledi da je

$$x = \bigcup_{\beta \in Z} (x \cap V_\beta),$$

pa mora biti $\mathrm{rank}(x) \leqslant \alpha$ jer $x \cap V_\beta \in V_\alpha$ za svako $\beta \in Z$.

π je na: Neka je $f \in \prod\limits_{\beta<\kappa} V_{\beta+1}$ proizvoljno. Prvo pretpostavimo da je skup

$$X = \{\beta < \kappa \mid f(\beta) \in V_\beta\}$$

mere 1. Uočimo funkciju $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ definisanu sa

$$g(\beta) = \begin{cases} \mathrm{rank}(f(\beta)) & , \quad \beta \in X \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

Kako je funkcija g regresivna skoro svuda modulo μ, zbog normalnosti μ postoji $\alpha < \kappa$ tako da je skup

$$Y = \{\beta < \kappa \mid g(\beta) = \alpha\}$$

mere 1. Zbog nedostiživosti κ je

$$\kappa = \beth_\kappa > \beth_{\alpha+1} = |V_{\alpha+1}|.$$

Uočimo sledeću particiju kardinala κ:

$$\kappa = (\kappa \setminus Y) \cup \bigcup_{x \in V_{\alpha+1}} \{\beta < \kappa \mid f(\beta) = x\}.$$

Zbog κ aditivnosti μ tačno jedan član particije je mere 1. Kako je $\mu(Y) = 1$, to postoji $x_f \in V_{\alpha+1}$ tako da je

$$\mu(\{\beta < \kappa \mid f(\beta) = x_f\}) = 1.$$

Odavde neposredno sledi da je $\pi(x_f) = f_\mu$.

Pretpostavimo sada da je $\mu(X) = 0$. Definišimo skup $x_f \in V_{\kappa+1}$ sa

$$x_f = \{x \in V_\kappa \mid \pi(x)\, E\, f_\mu\}.$$

Tvrdimo da je $\pi(x_f) = f_\mu$. S obzirom da u modelima $\langle V_{\kappa+1}, \in\rangle$ i $\langle B, E\rangle$ važi aksioma ekstenzionalnosti, dovoljno je pokazati da za svako $g_\mu \in B$ važi

$$g_\mu\, E\, f_\mu \Leftrightarrow g_\mu\, E\, \pi(x_f).$$

Ako $g_\mu\, E\, f_\mu$, onda je skup $\{\beta < \kappa \mid g(\beta) \in V_\beta\}$ mere 1, pa prema prethodnom postoji $a \in V_{\kappa+1}$ tako da je $g_\mu = \pi(a)$. Sada po definiciji skupa x_f imamo da $a \in x_f$, pa zbog kompatibilnosti π sa relacijama imamo da

$$g_\mu = \pi(a)\, E\, \pi(x_f).$$

Neka $g_\mu\, E\, \pi(x_f)$. Sasvim slično kao i malo pre zaključujemo da postoji $a \in V_{\kappa+1}$ tako da je $g_\mu = \pi(a)$, odakle zbog kompatibilnosti π sa relacijama sledi da $a \in x_f$. Sada iz definicije skupa x_f sledi da

$$g_\mu = \pi(a)\, E\, f_\mu.$$

□

8.4.6 Posledica *Neka je kardinal κ merljiv i neka je μ normalna mera na κ. Tada za proizvoljnu formulu $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ i ma koje $a_1, \dots, a_n \in V_{\kappa+1}$ važi*

$$\langle V_{\kappa+1}, \in\rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

ako i samo ako je

$$\mu(\{\beta < \kappa \mid \langle V_{\beta+1}, \in\rangle \models \varphi[a_1 \cap V_\beta, \dots, a_n \cap V_\beta]\}) = 1.$$

Posebno, ako je φ rečenica, onda

$$\langle V_{\kappa+1}, \in\rangle \models \varphi$$

ako i samo ako je

$$\mu(\{\beta < \kappa \mid \langle V_{\beta+1}, \in\rangle \models \varphi\}) = 1.$$

8.4.7 Posledica *Uz prethodnu simboliku,*

$$|\prod_{\mu} \beth_{\beta+1}| = 2^{\kappa}.$$

8.5 Kontinuum problem

Postojanje merljivog kardinala izaziva infleksiju kontinuum problema: Scott je otkrio da ako kontinuum hipoteza važi ispod merljivog kardinala (skoro svuda po normalnoj meri), onda CH važi i na merljivom kardinalu. Umesto ove Scottove teoreme dajemo uopštenje koje bi se moglo prepričati na sledeći način:

Neka je f funkcija pomaka (displacement) u kontinuum problemu (CP):

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+f(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathrm{Ord}.$$

Ako je kardinal κ merljiv sa normalnom merom μ, onda je vrednost kontinuum pomaka u tački κ ograničena integralom po meri μ funkcije pomaka na manjim kardinalima. Prvi primer da postoji međuzavisnost vrednosti funkcije f je baš ovaj sa merljivim kardinalom. Eastonov rezultat o međusobnoj nezavisnosti vrednosti f na regularnim kardinalima je usledio nekoliko godina kasnije. Ovaj rezultat je bio inspiracija, čak i po metodi za Silverovu teoremu o zavisnosti $f(\alpha)$ od prethodnika, kada je $\aleph_\alpha$ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti.

Strukturna svojstva ultraproizvoda imaju centralni značaj u ovim razmatranjima, što je i dovelo do Shelahove teorije PCF - o mogućim kofinalnostima ultraproizvoda, kojom je postignut najveći napredak u kontinuum problemu. Tehnički znatno složeniju teoriju PCF izlažemo u posebnoj glavi. Ovde izlažemo uopštenje Scottove teoreme i vezu Kontinuum problema i postojanja skokovitih ultraproizvoda - pre svega pod inspiracijom Magidorovih neregularnih ultrafiltera.

8.5.1 Teorema *Neka je D normalan ultrafilter nad merljivim kardinalom κ i neka je f kontinuum odstupanje (pomak). Tada je*

$$f(\kappa) \leqslant \mathrm{ot}(\prod_D \langle f(\alpha), \in \rangle),$$

kao i $|f(\kappa)| \leqslant |\prod_D f(\alpha)|$.

Dokaz

Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, <_A \rangle = \prod_D \langle \kappa, < \rangle$. Kako je κ jako nedostiživ, imamo da $f \upharpoonright \kappa : \kappa \longrightarrow \kappa$. Definišimo skupove G_f i H sa

$$G_f = \{g_D \in \mathfrak{A} \mid g <_D f \upharpoonright \kappa\}$$

i

$$H = \{h_D \in \mathfrak{A} \mid \{\alpha \in \kappa \mid h(\alpha) \in [\omega_\alpha, \omega_{\alpha+f(\alpha)}) \cap \mathrm{Card}\} \in D\}.$$

Sada za $h_D \in H$ postoji neko $g_D \in G_f$ tako da

$$\{\alpha \in \kappa \mid h(\alpha) = \omega_{\alpha+g(\alpha)}\} \in D. \tag{8.2}$$

Definišimo utapanje $\pi : H \longrightarrow G_f$ sa

$$\pi(h_D) = g_D \Leftrightarrow (8.2).$$

Kao posledicu imamo da je $|H| \leqslant |G_f|$. Za kardinal λ takav da je $\kappa \leqslant \lambda < 2^\kappa$ postoji funkcja $f^\lambda : \kappa \longrightarrow \kappa$ koja je λ-ti element skupa $\mathfrak{A}$. Tada je

$$|\prod_D f^\lambda(\alpha)| = |G_{f^\lambda}| = \lambda.$$

Za funkciju g sa domenom κ definišimo funkciju $|g|$ sa

$$|g| = \langle |g(\alpha)| \mid \alpha \in \kappa \rangle.$$

Imamo da je

$$|\prod_D |f^\lambda(\alpha)|| = \lambda,$$

odakle sledi da je $|f^\lambda|$ upravo λ-ti element, tj. $|f^\lambda| =_D f^\lambda$ i

$$X = \{\alpha \in \kappa \mid f^\lambda(\alpha) \in \mathrm{Card}\} \in D.$$

Odavde sledi da $\{\alpha \in \kappa \mid f^\lambda(\alpha) \geqslant \alpha\} \in D$.

S obzirom da $\mathrm{Sinac} \cap \kappa \in D$, imamo da ili

$$\{\alpha \in \kappa \mid f^\lambda(\alpha) \geqslant \omega_{\alpha+f(\alpha)}\} \in D,$$

ili $\{\alpha \in \kappa \mid f^\lambda(\alpha) < \omega_{\alpha+f(\alpha)}\} \in D$.

U prvom slučaju je

$$\{\alpha \in \kappa \cap \mathrm{Sinac} \mid f^\lambda(\alpha) \geq \omega_{\alpha+f(\alpha)} = \beth_{\alpha+1}\} \in D,$$

pa je $2^\kappa \leqslant |\prod_D f^\lambda(\alpha)|$, što je u suprotnosti sa izborom λ.

Stoga

$$\{\alpha \in \kappa \mid f^\lambda(\alpha) \in [\omega_\alpha, \omega_{\alpha+f(\alpha)}) \cap \mathrm{Card}\} \in D.$$

Odavde sledi da postoji $h_D \in H$ tako da $f^\lambda =_D h$, ili ekvivalentno, $f^\lambda \in H$. Kako $\lambda \neq \lambda'$ povlači $f^\lambda \neq f^{\lambda'}$, imamo da je

$$\begin{aligned} |[\kappa, 2^\kappa) \cap \mathrm{Card}| &= |(\kappa, 2^\kappa] \cap \mathrm{Card}| \\ &= |f(\kappa)| \\ &\leqslant |H| \\ &\leqslant |G_f| \\ &= |\prod_D f(\alpha)|, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. □

8.5.2 Posledica *Ako je kontinuum odstupanje ograničeno nekom konstantom γ skoro svuda ispod κ, onda isto važi i na κ:*

$$2^\kappa \leqslant \aleph_\gamma(\kappa).$$

U tom slučaju po Bukovsky-Hechlerovoj teoremi je $\gamma < \omega$. Dakle, kontinuum odstupanje je ili veoma malo (manje od ω) ispod i na κ, ili je veoma veliko: $f(\nu) \geqslant \nu$ za $\nu \leqslant \kappa$. Posebno, ako CH važi skoro svuda ispod κ, onda važi i na κ (Scott).

Primetimo da je gornjom argumentacijom pokazano sledeće:

$$2^\kappa \leqslant \aleph_{\kappa+\mathrm{ot}(\prod_D \langle f(\alpha),<\rangle)}.$$

Mnogo jača aksioma od postojanja merljivog kardinala je postojanje ogromnih (huge) kardinala. Pretpostavljajući konsistentnost teorije ZFC + Huge, Magidor (videti [70]) je konstruisao model teorije ZFC u kome postoji neregularan ultrafilter nad ω_2, kao i skokoviti neregularan ultrafilter D nad ω_3 za koji važi da je

$$|\prod_D \omega_1| \leqslant \aleph_3.$$

Njegov model obezbeđuje slične ultrafiltere i na većim malim kardinalima. U njegovom modelu važi GCH, ali se GCH može nešto oslabiti uz zadržavanje skokovitosti u neregularnim ultrafilterima na manjim kardinalima, što je i bila inspiracija za sledeću teoremu. Prethodno dajemo nekoliko definicija.

Kardinalni trag ultrafiltera D nad beskonačnim kardinalom κ definišemo sa

$$\mathrm{ct}(D) = \{|\prod_D \lambda_\xi| \ \mid \ \lambda_\xi \leqslant \kappa\},$$

Za ultrafilter D kažemo da je *skokovit* ako je $|\mathrm{ct}(D)| > 1$. Na primer, ako je D uniforman κ-kompletan ultrafilter nad merljivim kardinalom κ, onda je $|\mathrm{ct}(D)| = 2^\kappa$.

U cilju povezivanja uslova normalnosti sa kontinuum pomakom potrebni su nam sledeći pojmovi teorije modela:

Teorija T jezika L koji sadrži unarni relacijski simbol U dopušta par $\langle \kappa, \lambda \rangle$ ukoliko ima model kardinalnosti κ u kome je interpretacija predikata U kardinalnosti λ. Za sam par $\langle \kappa, \lambda \rangle$ kažemo da je:

- LLG (left large gap), ako T dopušta par $\langle\kappa,\lambda\rangle$ ali ne dopušta $\langle\kappa^+,\lambda\rangle$;
- RLG (right large gap), ako T dopušta par $\langle\kappa,\lambda\rangle$ ali ne dopušta $\langle\kappa,\lambda'\rangle$ za $\lambda'<\lambda$;
- LG (large gap), ako je i LLG i RLG.

Sledeće činjenice navodimo bez dokaza.

8.5.3 Lema *Ako T dopušta parove $\langle\kappa_i,\lambda_i\rangle$, $i\in\kappa$ i ako je D ultrafilter nad κ, onda T dopušta par $\langle|\prod_D\kappa_i|,|\prod_D\lambda_i|\rangle$.*

8.5.4 Lema *Neka je $\langle\Lambda(\kappa),\kappa\rangle$ LLG za T_1 za svaki (za mnogo) kardinal κ i neka je $\langle\kappa,\Gamma(\kappa)\rangle$ RLG za T_2 za svaki (za mnogo) kardinal κ. Tada postoji teorija T za koju je $\langle\Lambda(\kappa),\Gamma(\kappa)\rangle$ LG za svaki (za mnogo) kardinal κ.*

8.5.5 Posledica *Za proizvoljan ultrafilter D nad κ je*

$$\Gamma(|\prod_D\kappa|)\leqslant|\prod_D\Gamma(\kappa)|\leqslant|\prod_D\Lambda(\kappa)|\leqslant\Lambda(|\prod_D\kappa|).$$

Postoje teorije T_1 i T_2 za koje su $\langle\kappa^+,\kappa\rangle$ i $\langle 2^\kappa,\kappa\rangle$ redom LLG za svako κ, što se iterira do $\langle\aleph_n(\kappa),\kappa\rangle$ i $\langle\beth_n(\kappa),\kappa\rangle$ za svako κ, pa imamo da je

$$|\prod_D\aleph_n(\kappa)|\leqslant\aleph_n(|\prod_D\kappa|),$$

kao i

$$|\prod_D\beth_n(\kappa)|\leq\beth_n(|\prod_D\kappa|)$$

(na osnovu prethodne posledice).

Za korišćenje leme 8.5.3 potreban nam je ultrafilter D čiji je kardinalni trag kardinalnosti veće od 1.

8.5.6 Teorema *Neka je T teorija za koju je $\langle \aleph_\xi(\kappa), \kappa \rangle = \langle \aleph_\sigma, \kappa \rangle$ LLG, $\aleph_\sigma^{<\aleph_\sigma} = \aleph_\sigma$ i neka je D uniforman neregularan ultrafilter nad $\aleph_\sigma$ sa skokovima posle κ:*

$$\aleph_\eta = |\prod_D \kappa| < |\prod_D \aleph_\sigma|.$$

Tada je

$$\eta < \sigma + f(\sigma) \leqslant \eta + \xi \leqslant \eta + \sigma,$$

gde je f pomak u kontinuum problemu. Na taj način povezuje se skok u kontinuum problemu sa skokom kardinalnosti ultraproizvoda.

Dokaz

Prvo primetimo da T dopušta $\langle |\prod_D \aleph_\sigma|, |\prod_D \kappa| \rangle$. Neka je $\aleph_\eta = |\prod_D \kappa|$ i neka je $\aleph_\sigma^{<\aleph_\sigma} = \aleph_\sigma$. Tada

$$\begin{aligned}
\aleph_\eta &< |\prod_D \aleph_\sigma| \\
&= 2^{\aleph_\sigma} \\
&= \aleph_{\sigma+f(\sigma)} \\
&= |\prod_D \aleph_\xi(\kappa)| \\
&\leqslant \aleph_\xi(|\prod_D \kappa|) \\
&= \aleph_{\eta+\xi}.
\end{aligned}$$

Otuda dobijamo ordinalne nejednakosti

$$\eta < \sigma + f(\sigma) \leqslant \eta + \xi \leqslant \eta + \sigma.$$

$\square$

Za kontinuum pomak f možemo reći da je ograničen u tački σ ako je $f(\sigma)$ ograničen nekim izrazom u kome se ne javlja σ u eksponentu (nešto tipa $f(\sigma) < 2^{\aleph_\sigma}$).

Navedimo nekoliko primera sa gornjom notacijom:

1. Neka je D ultrafilter nad $\aleph_\sigma$ takav da je $\aleph_\sigma^{<\aleph_\sigma} = \aleph_\sigma$ i neka D fino separira κ i $\aleph_\sigma$ tako da $|\prod_D \kappa| \leqslant \aleph_\sigma$. Tada je $f(\sigma) < \sigma$. Obratno, $f(\sigma) < \sigma$ redukuje moguće vrednosti skoka kardinalnosti ultraproizvoda ispod $\aleph_\sigma$.

2. Iz prethodnog primera imamo da je
$$(\forall \xi < \omega)(\forall \kappa)(\langle \aleph_\xi(\kappa), \kappa\rangle \text{ je LLG}).$$
Neka je $\aleph_\xi(\kappa)^{<\aleph_\xi(\kappa)} = \aleph_\xi(\kappa)$. Ako postoji uniforman ultrafilter nad $\aleph_\xi(\kappa)$ koji je skokovit posle κ, onda je $f(\sigma)$ sledbenik ordinal i dobro je ograničen..

3. Posebno, neka je D skokoviti ultrafilter nad $\aleph_{17}$ i neka je $\aleph_{17}^{<\aleph_{17}} = \aleph_{17}$.

   (a) Ako je $|\prod_D \omega| \leqslant \aleph_{17}$, onda je $2^{\aleph_{17}} \leqslant \aleph_{34}$;

   (b) Ako je $2^{\aleph_{17}} = \aleph_{\omega+1}$, onda ne postoji skokoviti ultrafilter nad $\aleph_{17}$.

4. Neka je $2^{\aleph_{17}} = \aleph_{\omega_1+1}$ i neka je $\aleph_{17}^{\aleph_{16}} = \aleph_{17}$. Tada, ako postoji skokoviti ultrafilter nad $\aleph_{17}$, onda bi $|\prod_D \omega| = \aleph_{\omega_1}$ morao biti singularan kardinal. Da li je ovo moguće?

Evo i dva problema:

1. Može li se $\lambda^{<\lambda} = \lambda$ ispustiti iz gornjih pretpostavki?

2. Da li postoje primeri LLG-ova $\langle \Gamma(\kappa), \kappa\rangle$ takvih da je $\Gamma(\kappa) \geqslant \aleph_\omega(\kappa)$ za dovoljno mnogo kardinala κ?

8.6 Pojačanje merljivosti

Daljim pojačanjem osobina dobijaju se kardinali veći i jači od merljivih. Svi bi se oni mogli nazvati pojačano merljivim. Ovde ćemo samo ukratko prikazati neka od njihovih najvažnijih svojstava.

8.6.1 Teorema *Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. *κ je kompaktan (= jako kompaktan);*
2. *Za svaki kardinal $\lambda \geqslant \kappa$, na $[\lambda]^{<\kappa}$ postoji κ kompletan neglavni ultrafilter;*
3. *Za svaki kardinal λ kofinalnosti $\geqslant \kappa$ postoji κ-kompletan (κ, λ)-regularan ultrafilter nad κ;*
4. *Svaki κ-kompletan filter se širi do κ-kompletnog (neglavnog) ultrafiltera.*

8.6.2 Teorema [Kunen] *Ako postoji kompaktan kardinal, onda za svaki ordinal θ postoji tranzitivan model M teorije ZFC sa bar θ merljivih kardinala (redni tip skupa merljivih kardinala u M je bar θ).*

8.6.3 Teorema [Vopěnka-Hrbaček] *Ako postoji kompaktan kardinal, onda ne postoji skup A takav da je $V = L[A]$.*

8.6.4 Teorema [Solovay] *Ako postoji kompaktan kardinal κ, onda SCH važi iznad κ: za $\lambda > \kappa$ iz $2^{\operatorname{cf}\lambda} < \lambda$ sledi da je $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \lambda^+$. Sledi da za singularan jako granični kardinal $\lambda > \kappa$ važi CH: $2^\lambda = \lambda^+$.*

D je *fini* ultrafilter nad $[\lambda]^{<\kappa}$ ako je κ kompletan i ako sadrži sve skupove

$$\{x \in [\lambda]^{<\kappa} \mid y \subseteq x\}, \quad y \in [\lambda]^{<\kappa}.$$

Fini ultrafilter D nad $[\lambda]^{<\kappa}$ je normalan ako za svako $f : [\lambda]^{<\kappa} \longrightarrow \lambda$ iz $f(x) \in x$ skoro svuda (modulo D) sledi da je funkcija f konstantna skoro svuda. Ako na $[\lambda]^{<\kappa}$ postoji normalan ultrafilter, onda za κ kažemo da je λ-superkompaktan.

Kardinal κ je *superkompaktan* ako za svaki kardinal $\lambda > \kappa$ postoji normalan ultrafilter nad $[\lambda]^{<\kappa}$, tj. ako je κ λ-superkompaktan za svaki kardinal $\lambda > \kappa$.

8.6.5 Teorema *Postojanje normalne mere na $[\lambda]^{<\kappa}$ ekvivalentno je egzistenciji elementarnog utapanja $j : V \longrightarrow M$ za koje važi:*

- *$j(\gamma) = \gamma$ za $\gamma < \kappa$;*
- *$j(\kappa) > \lambda$;*
- *Zatvorenost za λ sekvence: ${}^{\lambda}M \subseteq M$.*

8.6.6 Teorema

- *Ako je κ superkompaktan, onda postoji normalna mera μ na κ takva da je*
$$\mu(\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ je merljiv}\}) = 1;$$
- *Ako postoji merljivi kardinal koji je limes kompaktnih kardinala, onda je prvi takav kardinal kompaktan ali ne i superkompaktan.*

Magidor je u [69] pokazao da:

1. Prvi kompaktan kardinal može da bude jednak prvom merljivom. U tom slučaju on je mnogo manji od prvog superkompaktnog;

2. Prvi kompaktan kardinal može da bude jednak prvom superkompaktnom kardinalu. U tom slučaju je on mnogo veći od prvog merljivog.

Za kardinal κ kažemo da je *ekstendibilan* ako za svako $\alpha > \kappa$ postoje β i elementarno utapanje $j : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$ tako da je κ prvi pomereni ordinal.

8.6.7 Teorema

- *Ako je κ ekstendibilan, onda je i superkompaktan;*
- *Ako je κ ekstendibilan, onda postoji normalna mera μ na κ takva da je*
$$\mu(\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ je superkompaktan}\}) = 1.$$

VP [Vopěnkin princip]: Neka je $\mathcal{C}$ klasa modela istog jezika. Onda postoje dva modela $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ i elementarno utapanje $j : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$.

8.6.8 Teorema *VP povlači egzistenciju ekstendibilnih kardinala.*

Za kardinal κ kažemo da je *ogroman* (huge) ako postoji netrivijalno elementarno utapanje $j : V \longrightarrow M$, čija je κ kritična tačka, takvo da je ${}^{j(\kappa)}M \subseteq M$ (M je zatvoren za nizove dužine $j(\kappa)$).

8.6.9 Teorema *Ako je κ ogroman, onda $\langle V_\kappa, \in\rangle \models VP$.*

Daljim iteriranjem - n puta ogroman, kad $n \to \infty$, dostiže se protivrečnost: najjača aksioma "$0 = 1$", tako da se ovim svojstvima konačno iscrpljuje hijerarhija nedostiživih kardinala i po veličini i po snazi. Ovi kardinali se koriste u konstrukcijama modela koji imaju specifične objekte, kao npr. ranije pomenuti Magidorovi modeli. Potom se traga za konstrukcijama pomenutih objekata bez upotrebe ovih najjačih aksioma/ili za karakterizacijama konsistentnosti egzistencije istih.

Vratimo se još jednom na početak ovog poglavlja, tj. na Ulamov ponor: ako na S postoji σ-aditivna (totalna) verovatnosna mera μ, onda je:

- Prvi slabo nedostiživ $\leqslant |S| \leqslant 2^{\aleph_0}$ i μ je bezatomična, ili
- Prvi jako nedostiživ $\leqslant |S|$ i μ je atomična (odnosno binarna).

Prethodne dve tačke možemo sažeti u jednu: ako na S postoji σ-aditivna (totalna) mera μ, onda je $|S| \leqslant c$ i μ je bezatomična ili $|S| > c$ i μ je atomična (odnosno binarna).

U prvom slučaju je $|S|$ veće ili jednako od prvog realno merljivog kardinala, a u drugom slučaju veće ili jednako od prvog merljivog kardinala. Sada vidimo da kardinalni skok za $|S|$ između pomenuta dva slučaja obuhvata interval $[2^{\aleph_0}, \text{prvi merljiv}]$. Svakako da su razlozi za to interesantni.

Ovde prikazana svojstva i rezultati dopunjuju se razmatranjima u narednom poglavlju o realno vrednosnoj merljivosti.

9

Realno merljivi kardinali

Ranije navedene Ulamove teoreme iz 1930. godine su koliko lepe toliko i iznenađujuće. Obe su implikativnog oblika i ostalo je još da se rasčisti pitanje kada totalnih mera na Booleovoj algebri ima. Posebno je možda najinteresantnija egzistencija običnih totalnih mera.

9.0.10 Teorema [**Ul1**] *Ako postoji netrivijalna σ-aditivna mera na S, onda ili postoji binarna mera na S i $|S|$ je veći ili jednak na -jmanjem jako nedostižnom kardinalu, ili postoji bezatomična mera na $2^{\aleph_0}$ i kontinuum je veći ili jednak najmanjem slabo nedostižnom kardinalu.*

9.0.11 Teorema [**Ul2**] *Ako postoji realno vrednosni merljivi kardinal $\leqslant 2^{\aleph_0}$, onda postoji totalno produženje Lebesgueove mere. Ako je κ realno vrednosno merljiv, onda je on slabo nedostiživ. Aditivnost (totalne) mere je realno vrednosno merljiva.*

Odmah vidimo da CH pojednostavljuje situaciju: ukoliko važi CH, onda ne postoji realno vrednosni merljivi kardinal i ne postoji totalna ekstenzija Lebesgueove mere. Stoga u Gödelovom konstruktibilnom univerzumu (L) nema totalnog produženja Lebesgueove mere ni totalnih realno vrednosnih mera. Scott je dokazao (1961) nekonsistentnost postojanja totlane netrivijalne binarne mere sa Gödelovom aksiomom konstruktibilnosti $V = L$.

Stoga u L nemamo totalnih mera, pa minimalni model $L[\mu]$ koji sadrži binarnu meru μ mora biti veći od L. Kao svojevrstan opozit neslaganju CH i egzistencije totalnih mera na $\mathbb{R}$ Silver je dokazao konsistentnost GCH i postojanja binarne mere (u $L[\mu]$).

9.1 RVM - prva ekvikonsistentnost

1966. godine Solovay je dokazao sledeću izuzetnu teoremu, kojom se krajevi Ulamovog ponora izjednačavaju po konsistentskoj jačini.

9.1.1 Teorema [Sol RVM] *Sledeće teorije su ekvikonsistentne:*

1. *ZFC+ "postoji totalna σ aditivna ekstenzija Lebesgueove mere";*
2. *ZFC+ "postoji merljivi kardinal".*

Dokaz da iz konsistentnosti 2. sledi konsistentnost 1. je izveden metodom forsinga, uz pogodan izbor Booleove algebre i impresivnu harmoniju mera.

Neka je M prebrojiv tranzitivan model za 2. i neka je κ u M merljiv kardinal.

Dokaz – konstrukcija generičkog proširenja $M[G]$ polaznog modela M u kome važi 2. ima dve komponente:

- Obezbediti da $M[G] \models 2^{\aleph_0} \geqslant \kappa$;
- Očuvati realno vrednosnu merljivost κ u $M[G]$.

Ulamove teoreme nam obezbeđuju ostatak. Dokaz koji sledi sadrži sve relevantne elemente, zbog preglednosti neki detalji su ispušteni. Kompletne detalje dokaza čitalac može naći u [38], ili u [115].

Radi pojednostavljenja notacije, podrazumevamo da se argumentacija odvija unutar M ukoliko se drukčije ne naglasi. Neka je $\lambda \geqslant \kappa$ kardinal takav da je $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$. Jednostavan prostor mere $\langle S_i, \mathcal{F}_i, \mu' \rangle$ za $i \in I = \lambda \times \omega$ je dat sa:

- $S_i = \{0, 1\}$;
- $\mathcal{F}_i = P(S_i)$;
- $\mu'(\emptyset) = 0$;
- $\mu'(\{0\}) = \mu'(\{1\}) = \frac{1}{2}$;
- $\mu'(\{0, 1\}) = 1$.

Neka je $(S, \mathcal{F}, \mu)$ proizvod merljivih prostora za $i \in I$, pri čemu je:

- $S = \prod\limits_{i \in I} S_i$;
- $\mathcal{F}$ je najmanja σ-kompletna algebra skupova nad S koja sadrži skupove $\{t \in {}^I\{0, 1\} \mid t(i) = 0\}$ za $i \in I$.

Neka je B algebra mere, tj. B je količnička Booleova algebra

$$\mathcal{F}/\text{ideal skupova } \mu\text{-mere } 0.$$

Napomenimo da je B kompletna i da zadovoljava c.c.c.

Definišimo σ-aditivnu meru μ_2 na B sa

$$\mu_2([x]) = \mu(x).$$

Neka je G M-generički ultrafilter u B. c.c.c. nam obezbeđuje da su u $M[G]$ očuvani kardinali i kofinalnosti. Pokažimo da

$$M[G] \models 2^{\aleph_0} = \lambda.$$

S jedne strane, $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leqslant (|B|^{\aleph_0})^M = \lambda$. S druge strane, pokažimo da ω ima λ podskupova u modelu $M[G]$. U tom cilju, za proizvoljno $\langle \alpha, n\rangle \in I$, neka je $U_{\alpha,n} \in \mathcal{F}$ definisano sa

$$U_{\alpha,n} = \{t \in {}^I\{0,1\} \mid t(\alpha, n) = 1\}$$

i neka je $u_{\alpha,n} = [U_{\alpha,n}]$ $(\in B)$. Za $\alpha < \lambda$ neka je $\mathbf{x}_\alpha$ B-vrednosni podskup ω takav da je

$$\|\check{n} \in \mathbf{x}_\alpha\| = u_{\alpha n} \qquad (n < \omega).$$

Sa x_α označimo G-interpretaciju imena $\mathbf{x}_\alpha$. Može se pokazati da $\alpha \neq \beta$ povlači $x_\alpha \neq x_\beta$, što potvrđuje da u $M[G]$ važi $2^{\aleph_0} = \lambda \geqslant \kappa$.

Prelazimo na dokaz očuvanja realno vrednosne merljivosti κ u $M[G]$. Neka je κ merljiv sa odgovarajućom binarnom merom μ_1 u M i neka su λ, μ, μ_2 i B kao i gore. Definisaćemo B-vrednosno ime $\underline{\mu}_3$ i pokazati da je za proizvoljan M-generički ultrafilter G u B, G-interpretacija μ_3 imena $\underline{\mu}_3$ u stvari κ-aditivna mera na κ.

Pošto je u

$$M[G] \models \kappa \leqslant 2^{\aleph_0},$$

po Ulamovoj teoremi mera μ_3 je bezatomična, tj. realno vrednosna u užem smislu.

Stoga imamo finu interferenciju mera μ_1, μ, μ_2 i G koja rezultuje u odgovarajućim svojstvima mere μ_3.

Neka je $a \in B\backslash\{0\}$ i neka je $\mathbf{A} \in M^B$ B-vrednosno ime tako da

$$a \Vdash \mathbf{A} \subseteq \check{\kappa}.$$

Za svako $\alpha < \kappa$ neka je

$$f_a(\mathbf{A}, \alpha) = \frac{\mu_2(a \cdot \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|)}{\mu_2(a)}.$$

Kako je mera μ_1 i κ-aditivna, imamo da je

$$f_a(\mathbf{A}, a) = r \quad SS(\mu_1) \text{ (skoro svuda po meri } \mu_1)$$

za neki realan broj r. Neka je $\mu_a(\mathbf{A}) = r$. μ_a ima sledeća svojstva:

- (i) $a \Vdash \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$ povlači $\mu_a(\mathbf{A}_1) = \mu_a(\mathbf{A}_2)$;
- (ii) $a \Vdash \mathbf{A}_1 \subseteq \mathbf{A}_2$ povlači $\mu_a(\mathbf{A}_1) \leqslant \mu_a(\mathbf{A}_2)$,
- (iii) Neka je $X \subseteq \kappa$ i $X \in M$ tada:
    1. $\mu_1(X) = 1 \Rightarrow \mu_a(\check{X}) = 1$;
    2. $\mu_1(X) = 0 \Rightarrow \mu_a(\check{X}) = 0$;
- (iv) Za $\gamma < \kappa$ neka su imena $\mathbf{A}_\xi$, $\xi < \gamma$ takva da $a \Vdash \mathbf{A}_\xi \subseteq \check{\kappa}$ i da iz $\xi \neq \eta$ sledi $a \Vdash \mathbf{A}_\xi \cap \mathbf{A}_\eta = \emptyset$. Dalje, neka je $\mathbf{A}$ ime takvo da
$$a \Vdash \mathbf{A} = \bigcup_{\xi<\gamma} \mathbf{A}_\xi.$$
  Sada κ-aditivnost mere μ_1 povlači
$$\mu_a(\mathbf{A}) = \sum_{\xi<\gamma} \mu_a(\mathbf{A}_\xi);$$
- (v) $a \leqslant b$ implicira $\mu_a(\mathbf{A}) \geqslant \mu_b(\mathbf{A})$.

Neka je r realan broj iz intervala $[0,1]$ i neka je $\{a_n \mid n < \omega\}$ particija elementa $a \in B$. Ako je $\mu_{a_n}(\mathbf{A}) < r$ za svako n, onda za skoro sve α imamo da je
$$\mu_2(a_n \cdot \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|) < r \cdot \mu_2(a_n),$$
odakle sledi da za skoro sve α važi $\mu_2(a \cdot \|\check{\alpha} \in \mathbf{A}\|) < r \cdot \mu_2(a)$. Otuda je $\mu_a(\mathbf{A}) < r$. Kao posledicu imamo sledeće:

$$\text{Ako za svako } \mathbf{0} < b \leqslant a \text{ postoji } \mathbf{0} < c \leqslant b \text{ tako da } \mu_c(\mathbf{A}) < r, \text{ onda je } \mu_a(\mathbf{A}) < r. \tag{9.1}$$

Slično važi za $\leqslant$, $>$, $\geqslant$. Za $b \Vdash \mathbf{A} \subset \check{\kappa}$, definišimo
$$\mu_b^*(\mathbf{A}) = \inf_{a \leqslant b} \mu_a(\mathbf{A}).$$

μ_b^* zadovoljava (i), (ii), (iii) ali nije aditivna i umesto (iv) imamo samo

$$\mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant \sum_{\xi<\gamma} \mu_b^*(\mathbf{A}_\xi) \qquad \text{za} \qquad \gamma < \kappa.$$

Neka je G M-generički ultrafilter u B. U $M[G]$ definišimo meru $\mu_3\colon P(\kappa) \longrightarrow [0,1]$ sa

$$\mu_3(A) = \sup_{b\in G} \mu_b^*(\mathbf{A}),$$

gde je $\mathbf{A}$ ime skupa A. Neka je $\underline{\mu}_3$ kanonsko ime mere μ_3 u M^B definisano preko kanonskog imena za G. μ_3 ne zavisi od izbora imena $\mathbf{A}$ za A, $A_1 \subseteq A_2$ implicira $\mu_3(A_1) \leqslant \mu_3(A_2)$. Za $X \in M$ $\mu_3(X) = 1$ ako je $\mu_1(X) = 1$, $\mu_3(X) = 0$ ako je $\mu_1(X) = 0$.

Dokaz κ-aditivnosti mere μ_3:

Pođimo od značenja μ_b^*. Za realan broj $r \in M$, $0 \leqslant r \leqslant 1$ tvrdimo da

$$\mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant r \qquad \text{akko} \qquad b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}.$$

Ako je $\mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant r$, onda za svaki generički G za koji $b \in G$ imamo da $\mu_3(A) \geqslant r$, a time i $b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}$. S druge strane, ako je $b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}$, onda

$$b \Vdash \forall q < \check{r}\ \exists d \in G\ \mu_d^*(\mathbf{A}) \geqslant q$$

tj.

$$\forall q < r\ \forall c \leqslant b\ \exists d \leqslant c\ \mu_d^*(\mathbf{A}) \geqslant q.$$

Neka je $q < r$; tvrdimo da je $\mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant q$. Ako je $a \leqslant b$, onda $\forall c \leqslant a\ \exists d \leqslant c$ tako da $\mu_d^*(\mathbf{A}) \geqslant q$ i stoga $\mu_a(\mathbf{A}) \geqslant q$. Dakle, $\mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant q$. S obzirom da ovo važi za svako $q < r$, imamo da je $\mu_b^*(\mathbf{A}) \geqslant r$.

Pokažimo da je mera μ_3 konačno aditivna. Neka su $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ imena takva da svaki uslov forsira da je $\mathbf{A}$ disjunktna unija $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$. Ako su r_1 i r_2 realni brojevi i ako

$$b \Vdash (\underline{\mu}_3(\mathbf{A}_1) \geqslant \check{r}_1 \wedge \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_2) \geqslant \check{r}_2),$$

onda prema već pokazanom sledi $b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}_1 + \check{r}_2$; stoga

$$\mu_3(A) \geqslant \mu_3(A_1) + \mu_3(A_2).$$

S druge strane, pretpostavimo da je $\mu_3(A) > \mu_3(A_1) + \mu_3(A_2)$. Tada postoje realni brojevi r_1, $r_2 \in M$ i uslov $b \in G$ takvi da

$$b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_1) < \check{r}_1, \quad \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_2) < \check{r}_2 \quad \text{i} \quad \underline{\mu}_3(\mathbf{A}) \geqslant \check{r}_1 + \check{r}_2.$$

Kako $b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_1) < \check{r}_1$, za svako $c \leqslant b$ postoji $d \leqslant c$ tako da $\mu_d(\mathbf{A}_1) < r_1$; otuda $\mu_b(\mathbf{A}_1) < r_1$ i $\mu_b(\mathbf{A}_2) < r_2$, pa dobijamo kontradikciju $\mu_b^*(\mathbf{A}) \leqslant \mu_b(\mathbf{A}) < r_1 + r_2$.

Zbog konačne aditivnosti μ_3 preostaje da pokažemo da je

$$\mu_3(\bigcup_{\xi<\gamma} A_\xi) \leqslant \sum_{\xi<\gamma} \mu(A_\xi)$$

za proizvoljnu familiju $\{A_\xi \mid \xi < \gamma\}$ kardinalnosti manje od κ podskupova od κ. Neka je $\gamma < \kappa$ i neka su $\mathbf{A}_\xi$, $\xi < \gamma$ i $\mathbf{A}$ imena takva da je $\|\mathbf{A} = \bigcup_{\xi<\gamma} \mathbf{A}_\xi\| = \mathbf{1}$ i neka je

$$\mu_3(A) > \sum_{\xi<\gamma} \mu_3(A_\xi).$$

Tada postoje $r \in M$ i $b \in G$ takvi da

$$b \Vdash \sum_{\xi<\gamma} \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_\xi) < \check{r} \quad \text{and} \quad \underline{\mu}_3(\mathbf{A}) > \check{r}.$$

Neka je E proizvoljan konačan skup i neka je $A_E = \bigcup_{\xi\in E} A_\xi$.

Pošto je $\|\underline{\mu}_3(\mathbf{A}_E) \leqslant \sum_{\xi\in E} \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_\xi)\| = \mathbf{1}$ imamo da

$$b \Vdash \underline{\mu}_3(\mathbf{A}_E) < \check{r}.$$

Na osnovu (9.1) imamo da je $\mu_b(\mathbf{A}_E) < r$.

Pošto je $\mu_b(\mathbf{A}_E) < r$ za svaki konačan $E \subseteq \gamma$, mora biti i $\mu_b(\mathbf{A}) \leqslant r$, odakle dobijamo kontradikciju $\mu_b^*(\mathbf{A}) \leqslant r$.

Ovim smo dokazali da je u $M[G]$ μ_3 netrivijalna κ-aditivna mera na κ. Ostatak sledi iz Ulamovih teorema.

Dokaz da konsistentnost teorije

$$ZFC + \text{“postoji totalno produženje Lebesgueove mere”}$$

povlači konsistentnost teorije

$$ZFC + \text{ “postoji merljivi kardinal”}.$$

Izvesna kombinatorna svojstva mera i njihovih nula ideala (ideala skupova mere 0) su suštinska: zasićenost ideala i normalnost.

Za Booleovu algebru B kažemo da je λ *zasićena* ako za svaku familiju $\{b_\xi \mid \xi < \lambda\}$ međusobno disjunktnih elemenata u B je $b_{\xi_0} = 0$ za neko $\xi_0 < \lambda$. Sa $\operatorname{sat}(B)$ označavamo najmanji kardinal λ za koji je B λ zasićena.

Za netrivijalan ideal $I \subset P(\kappa)$ kažemo da je λ zasićen ukoliko je Booleova algebra $B = P(\kappa)/I$ λ zasićena. Sa $\operatorname{sat}(I)$ označavamo zasićenost algebre $P(\kappa)/I$. Sledeća dva tvrđenja, koja navodimo bez dokaza, nam daju korisne informacije o zasićenosti.

9.1.2 Stav [Tarski]
Neka je B Booleova algebra takva da je $\operatorname{sat}(B) \geqslant \aleph_0$. *Tada je* $\operatorname{sat}(B)$ *regularan neprebrojiv kardinal.*

9.1.3 Stav [Ulam] *Neka je κ realno vrednosno merljiv sa netrivijalnom merom μ na κ. Tada je ideal I skupova μ mere nula $\aleph_1$ zasićen.*

Generalizujući terminologiju, za elemente nekog ideala I nad κ kažemo da su mere nula, dok za podskupove kardinala κ koji nisu u I kožemo da su pozitivne mere.

Neka je I κ-kompletan ideal nad $\kappa > \omega$. Napomenimo da je sledeća definicija normalnog ideala tesno povezana sa odgo-varajućom definicijom normalnih (ultra) filtera. Pojam *inkompresibilne* funkcije odgovara pojmu minimalne neograničene funkcije kod normalnih ultrafiltera.

Kažemo da je ideal I *normalan* ukoliko za proizvoljan $B \subseteq \kappa$ pozitivne mere i funkciju $f\colon B \longrightarrow \kappa$ takvu da $f(\xi) < \xi$, $\xi \in B$, postoje $B' \subseteq B$ pozitivne mere i $\lambda < \kappa$ takvi da

$$f(\xi) = \lambda, \qquad \xi \in B'.$$

9.1.4 Teorema *Neka je κ neprebrojiv kardinal i neka je I κ zasićen netrivijalan ideal u $P(\kappa)$. Tada postoji normalan netrivijalan ideal J u $P(\kappa)$ takav da je*

$$\operatorname{sat}(J) \leqslant \operatorname{sat}(I).$$

Posebno, ako je I ideal mere, onda je takav i J.

Dokaz

Prvo navodimo neophodne definicije. Neka je $f\colon A \longrightarrow \kappa$. Kažemo da je f *skoro ograničena* ako postoji $\lambda < \kappa$ tako da je skup

$$\{\xi \in A \mid f(\xi) > \lambda\}$$

mere nula. Kažemo da je f *nigde ograničena* ako za svaki kardinal $\lambda < k$ skup

$$\{\xi \in A \mid f(\xi) \leqslant \lambda\}$$

ima meru nula. Konačno, f je *inkompresibilna* ako:

- f je nigde ograničena;
- Ako je $B \subseteq A$ pozitivne mere, $g\colon B \longrightarrow k$ i $g(\xi) < f(\xi)$ za sve $\xi \in B$, onda je funkcija g skoro ograničena.

Ovi koncepti su bitni jedino u slučaju kada A ima pozitivnu meru. Ako je A mere nula, onda je svaka funkcija $f\colon A \longrightarrow \kappa$ i skoro ograničena i nigde ograničena i inkompresibilna.

Koristićemo sledeće dve leme koje navodimo bez dokaza:

9.1.5 Lema *Neka je funkcija $f\colon A \longrightarrow \kappa$ nigde ograničena. Tada se A može prikazati kao disjunktna unija skupova B i C takvih da:*

1. *$f \restriction B$ je inkompresibilna;*
2. *Postoji nigde ograničena funkcija $g\colon C \longrightarrow \kappa$ takva da je*

$$g(\xi) < f(\xi)$$

   za svako $\xi \in C$.

9.1.6 Lema *Postoji inkompresibilna funkcija $f\colon \kappa \longrightarrow \kappa$.*

Prelazimo na dokaz teoreme. Neka je $h\colon \kappa \longrightarrow \kappa$ inkompresibilna funkcija. Definišimo $J \subseteq P(\kappa)$ sa

$$J = \{A \subseteq \kappa \mid h^{-1}[A] \in I\}.$$

Isto kao i za filtere lako se proverava da je J κ-kompletan ideal kao i da $\kappa \notin J$. Pošto je funkcija h nigde ograničena, $h^{-1}[\{\lambda\}]$ je I-mere nula. Stoga $\{\lambda\}$ ima i J-meru nula. Lako se pokazuje da je $\operatorname{sat}(J) \leqslant \operatorname{sat}(I)$.

Pokažimo da je J normalan. Pretpostavimo da je A pozitivne J-mere i da je funkcija $g\colon A \longrightarrow \kappa$ takva da je

$$g(\xi) < \xi$$

za sve $\xi \in A$. Neka je $B = h^{-1}[A]$. Tada je B pozitivne I-mere (jer je A pozitivne J-mere). Neka je $f\colon B \longrightarrow \kappa$ kompozicija

$$B \xrightarrow{h} A \xrightarrow{g} \kappa.$$

Onda za $\gamma \in B$ mora biti $f(\gamma) = g(h(\gamma)) < h(\gamma)$. Međutim, h je inkompresibilna, pa postoji $\lambda < \kappa$ tako da je skup

$$\{\gamma \in B \mid f(\gamma) \leqslant \lambda\}$$

pozitivne I-mere. Pošto je I κ-kompletan i $\lambda < \kappa$, postoji $\lambda' \leqslant \lambda$ tako da je skup $D = \{\gamma \in B \mid f(\gamma) = \lambda'\}$ pozitivne I-mere. Neka je

$$E = \{\gamma \in A \mid g(\gamma) = \lambda'\}.$$

Tada

$$\begin{aligned} \gamma \in D &\Leftrightarrow g(h(\gamma)) = \lambda' \\ &\Leftrightarrow h(\gamma) \in E, \end{aligned}$$

odakle sledi da je $D = h^{-1}[E]$, kao i da je E pozitivne J-mere. Ovim smo pokazali da za dato g i A postoji $E \subseteq A$ pozitivne J-mere na kome je funkcija g konstantna. Dakle, J je normalan.

Konačno, neka je κ realno-vrednosno merljivi kardinal i neka je μ netrivjalna κ-aditivna realno-vrednosna mera na κ. Dalje, neka je I ideal skupova μ mere nula i neka je $h\colon \kappa \longrightarrow \kappa$ I-inkompresibilna funkcija. Definišimo funkciju $\nu\colon P(\kappa) \longrightarrow [0,1]_{\mathbb{R}}$ sa

$$\nu(A) = \mu(h^{-1}[A]). \tag{9.2}$$

Neka je ideal J definisan kao gore. Lako se proverava da je ν κ-additivna i netrivijalna, kao i da je J ideal skupova ν-mere nula. Stoga je J ideal mere, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

U nastavku podrazumevamo da je κ kao gore i da je J netrivijalan κ-zasićen normalan ideal. Sledeću lemu takođe navodimo bez dokaza.

9.1.7 Lema

Neka je skup A pozitivne mere i neka je funkcija $h\colon A \longrightarrow \kappa$ takva da je $h(\xi) < \xi$ za sve $\xi \in A$. Tada je funkcija h skoro ograničena.

Prelazimo na opis konstrukcije unutrašnjeg modela potrebnog za dokaz glavnog ekvikonsistentskog rezultata.

Neka je κ neprebrojiv kardinal i neka je J netrivijalan normalan λ-zasićen ideal u $P(\kappa)$. Dalje, neka je $\bar{J} = L[J] \cap J$. Lako se proverava da je u $L[J]$ $\bar{J}$ netrivijalan normalan λ-zasićen ideal u $P(\kappa)$.

9.1.8 Teorema *Pretpostavimo da su J, κ i λ kao gore i da je $\lambda < \kappa$. Tada je u $L[J]$ κ merljiv kardinal.*

Dokaz ove teoreme predstavlja adaptaciju dokaza sledeće Silverove teoreme

9.1.9 Teorema [Silver 1971] *Ako je kardinal κ merljiv sa normalnom merom μ i ako je J odgovarajući nula ideal, onda u $L[J]$ važi GCH.*

Koristeći metode ove teoreme Solovay je pokazao da

$$\text{“ } \aleph_\alpha < \lambda \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} < \lambda\text{” je tačno u } L[J].$$

Ovo je bilo dovoljno da bi se pokazalo da je κ merljiv u $L[J]$, imajući u vidu sledeću teoremu Tarskog iz 1930. godine:

9.1.10 Teorema *Neka je I netrivijaln ideal u $P(\kappa)$. Pretpostavimo da je I λ zasićen za neko $\lambda < \kappa$, kao i da*

$$\aleph_\alpha < \lambda \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} < \kappa.$$

Tada je κ merljiv i količnička algebra $B = P(\kappa)/I$ je totalno atomična.

Ovim je kompletiran dokaz Solovayove teoreme o ekvikonsistentnosti totalnog produženja Lebesgueove mere i merljivih kardinala.

9.2 Realno vrednosno veliki kardinali

Nakon Solovayove teoreme imamo neobičnu situaciju sa realno merljivim kardinalima. Nedostiživi, po konsistentskoj moći jednaki su merljivim. Po veličini - smešteni su do $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ (ili su merljivi). Dakle, možemo reći da su RVM-realno merljivi kardinali u užem smislu ograničeni kontinuumom i u tome su sasvim specifični. Svi drugi nedostiživi kardinali negde počinju, a potom se nižu uz alef liniju bez ikakvih ograničenja i daljim superpozicijama svojstava daju kardinale jače konsistentske moći.

Počev od merljivih kardinala, pa preko kompaktnih i superkompaktnih, veliki kardinali su karakterisani ultrafilterima, odnosno pravim klasama ultrafiltera. Ovde ćemo prikazati kako su Realno Vrednosno veliki (RV - real valued large) kardinali jači i veći od realno merljivih dobijeni prirodnim uopštenjem realno merljivih nasuprot barijeri koju sugestivno postavlja Ulamova teorema.

Ultrafiltere - binarne mere ($\{0,1\}$ - mere) u definiciji kompaktnog, potom superkompaktnog kardinala, itd. zamenjuju realno vrednosne (verovatnosne-$[0,1]$) mere da bi se dobili realno vrednosni korespondenti velikih kardinala : RV-kompaktni, RV-superkompaktni itd. Na primer κ je kompaktan kardinal ako za svaki $\lambda \geqslant \kappa$ postoji uniforman κ-kompletan ultrafilter na $[\lambda]^{\leqslant\kappa}$, ili što je ekvivalentno, ako za svaki kardinal $\lambda \geqslant \kappa$ takav da je $\lambda \geqslant \operatorname{cf}\kappa$ postoji κ-kompletan, (κ,λ)-regularan ultrafilter nad λ. Zamenom ovih binarnih mera verovatnosnim realno vrednosnim merama dobijamo prirodno RV kompaktan kardinal, ali za to nam trebaju mere na svim kardinalima iznad $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$

Biće potrebna finija analiza Ulamovog ograničenja. Izložićemo prethodno jednostavniji zadatak. Za sve mere (i binarne i verovatnosne) u definiciji imamo uslov monotonosti

$$x \subseteq y \Rightarrow \mu(x) \leqslant \mu(y).$$

Tu se odmah prirodno postavlja pitanje kardinalne monotonosti: da li je obavezno da za svaku meru važi da moćniji skup ima i moćniju meru?

Uslov kardinalne monotonije

$$|x| \leqslant |y| \Rightarrow \mu(x) \leqslant \mu(y)$$

je trivijalan u prisustvu kardinalne bisekcije. Što se Lebesgueove mere tiče, ako važi CH, onda σ-aditivnost sprečava da skup kardinalnosti manje od kontinuuma ima pozitivnu meru. Isto važi za proizvoljnu meru nad kontinuumom u prisustvu CH.

Ulamova teorema ne ostavlja puno prostora: ako je kardinal RVM, onda on mora biti $\leqslant 2^{\aleph_0}$ ili merljiv, što navodi na pomisao da nema *RV* mera unutar intervala

$$(2^{\aleph_0}, \text{prvi merljivi kardinal}).$$

Čini se da ova restrikcija eliminiše mogućnost uopštenja realno merljivih kardinala na ostale RV (realno vrednosne) velike kardinale (RV jako kompaktan, RV super kompaktan), dobijenih od velikih kardinala zamenom binarnih sa RV merama u njihovim definicionim svojstvima ([43] i [44]).

Ipak, postoji mali procep: preciznijim uvidom uočavamo da Ulamova teorema unosi ograničenje: za svaku meru μ

$$\text{add}\,(\mu) \notin (2^{\aleph_0}, \text{prvi merljiv});$$

lako se proverava da nema restrikcija na kardinalnoj normi mere $\|\mu\|$; osim očiglednog

$$\text{add}\,(\mu) \leqslant \|\mu\| \leqslant |\text{index}\ (\mu)|;$$

koje su tu varijacije još moguće?
Da li postoji RV mera μ takva da je $\text{add}\,(\mu) < \|\mu\|$?
Da li postoji RV mera μ nad kontinuumom takva da je

$$\text{add}\,(\mu) < \|\mu\|?$$

Slično za produženja Lebesgueove mere.

Potraga za kardinalnim invarijantama u Solovayovom modelu je rezultovala sledećim:

Za meru μ_1 koja čini κ realno vrednosno merljivim u polaznom modelu i i μ_3 konstruisanu pomoću skupa mera koja obezbeđuje produženje Lebesgueovu mere na sve podskupove od $\mathbb{R}$ imamo da važi:

- $\text{add}\,(\mu_3) = \text{add}\,(\mu_1) = \kappa$
- $\|\mu_3\| = \|\mu_1\| = \kappa$
- $|\text{ind}\,(\mu_1)| = \kappa$ i $|\text{ind}\,(\mu_3)| = 2^{\aleph_0}$.

Prilikom konstrukcije modela možemo izabrati da je ili $\kappa < 2^{\aleph_0}$ ili $\kappa = 2^{\aleph_0}$. U prvom slučaju dobijamo skupove realnih brojeva pozitivne μ mere kardinalnosti manje od 2^ω (neuobičajeno), čime smo ujedno i odgovorili na početno pitanje o kardinalnoj monotoniji.

Do odgovora na poslednje pitanje dolazimo procedurom sličnom Solovayovoj konstrukciji, uz jače polazne pretpostavke. Neka je u polaznom modelu M kardinal κ λ-jako kompaktan, pri čemu je $\lambda > \kappa$ u polaznom modelu. Neka je U uniforman κ kompletan ultrafilter nad λ. Dalje, neka je $(x, \mathcal{F}, \mu_0)$ proizvod prostora mere ${}^{\lambda\times\omega}\{0,1\}$ i neka je B odgovarajuća algebra mere $\mathcal{F}/$ ideal skupova mere 0. Algebra B i M-kompletan homomorfizam h se koriste za konstrukciju modela Cohenovog tipa koji čuva kardinale jer B zadovoljava c.c.c. i u kome je

$$2^{\aleph_0} = \lambda \ \vee \ 2^{\aleph_0} > \lambda.$$

Od ultrafiltera U konstruiše se kardinalno uniformna RV mera μ sa sledećim svojstvima:

- $\mathrm{ind}\,(\mu) = \lambda$
- $\|\mu\| = \lambda$
- $\mathrm{add}\,(\mu) = \kappa < \lambda$.

Na taj način kompletirano je pitanje mogućih odnosa aditivnosti i norme mere, kao i pitanje kardinalne monotonosti mere.

Rešenja prethodnih pitanja upućuju i na prirodno rešenje opštijeg pitanja realno vrednosnih - RV velikih kardinala. Način uvođenja RV (realno vrednosno) velikih kardinala ilustrujemo na primeru RV kompaktnih kardinala. Kažemo da je kardinal κ RV jako kompaktan, ili RV kompaktan ako za svaki kardinal λ takav da je $cf\lambda \geqslant \kappa$ (ostali λ su očigledno isključeni) postoji mera

$$\mu \colon P(\lambda) \longrightarrow [0,1]_{\mathbb{R}}$$

takva da je $\|\mu\| = \lambda$ i $\mathrm{add}\,(\mu) = \kappa$. Ako je κ jako kompaktan kardinal, onda je očigledno i RV kompaktan. Analogon Ulamove teoreme se dokazuje slično kao i originalna teorema, pa stoga imamo sledeće:

9.2.1 *Ako je κ RV kompaktan kardinal, onda je ili $\kappa \leqslant 2^{\omega}$ ili je κ jako kompaktan.*

Fundamentalno pitanje pozicije po konsistentskoj snazi delimično određuje sledeće uopštenje teoreme Solovaya.

9.2.2 Teorema *Konsistentnost teorije*

$$\text{ZFC} + \text{“postoji jako kompaktni kardinal”}$$

povlači konsistentnost teorije

$$\text{ZFC} + \text{“postoji RV kompaktan kardinal } \kappa \leqslant 2^{\omega}\text{”} .$$

Dokaz
Prvo primetimo da u Solovayovoj metodi mera μ_1 koja čini κ merljivim u polaznom modelu je nezavisna od mere μ_2 na algebri mere korišćenoj za forsiranje $2^{\omega} = \lambda \geqslant \kappa$.

S druge strane, pokazali smo da aditivnost μ_1 može biti i nešto drugo sem njenog indeksa. Dakle, ako je μ_1 κ aditivna binarna mera nad δ takva da je $\|\mu\| = \delta$ i ako je μ_2 kao i pre, možemo primeniti Solovayovu metodu za dobijanje mere μ u $M[G]$ koja slika $P(\delta)$ u $[0,1]_{\mathbb{R}}$ i koja je κ aditivna i odista realno vrednosna ili neatomična i uniformna, tj. $\|\mu\| = \delta$.

Kompletna konstrukcija se odvija unutar $M[G]$. Može se pokazati da su λ i δ nezavisni. Stoga, neka je κ jako kompaktan kardinal u polaznom modelu M i neka je K klasa binarnih mera koje svedoče kompaktnost κ:

$$K = \{\mu_\delta \mid cf\,\delta \geqslant \kappa, \mu_\delta\colon P(\delta) \longrightarrow \{0,1\}, \|\mu_\delta\| = \delta, \mathrm{add}\,(\mu_\delta) = \kappa\}.$$

Forsing izvodimo kao i pre tako da bude

$$M[G] \models \kappa \leqslant 2^{\aleph_0}.$$

U $M[G]$ formiramo klasu K' RV mera: za $\mu_\delta \in K$ odredimo neatomičnu meru μ'_δ takvu da je

$$\mathrm{add}\,(\mu'_\delta) = \mathrm{add}\,(\mu_\delta) \quad \text{i} \quad \|\mu'_\delta\| = \|\mu_\delta\|.$$

Na osnovu poznatih činjenica sledi da je

$$K' = \{\mu'_\delta \mid \mu_\delta \in K\} \subseteq M[G].$$

Pošto Booleova algebra $\mathcal{B}$ koja je korišćena za dobijanje ovog generičkog proširenja zadovoljava c.c.c., kardinali i kofinalnosti su očuvani, pa važi da K' svedoči da je κ RV kompaktan kardinal $\leqslant 2^\omega$. $\square$

Šta sa ostalim konsistentskim implikacijama? Može se proveriti da je postojanje RV kompaktnog kardinala jače od postojanja RV merljivog. Osnovno pitanje je da li je postojanje RV kompaktnog ekvikonsistentno postojanju kompaktnog kardinala. Proširenje tog dela Solovayevog metoda dokaza ekvikonsistencije RV merljivog i merljivog kardinala treba da obuhvati relativnu konstruktibilnost na pravim klasama.

Model $L[K]$, unutrašnji model konstruisan od klase RV mera K nije celovito rešenje; njegov najveći problem je pojavljivanje mnogo novih kardinala. Stoga jedino možemo navesti sledeću hipotezu:

C7: Konsistentnost teorije

$$\text{ZFC} + \text{“postoji RV kompaktan kardinal} \leqslant 2^\omega\text{”}$$

povlači konsistentnost teorije

$$\text{ZFC} + \text{“postoji jako kompaktan kardinal”}.$$

Dakle, RV kompaktan kardinal dobijen je zamenom ultrafiltera (binarnih mera) odgovarajućim realno vrednosnim merama. Slično se iz super kompaktnih i drugih većih kardinala mogu dobiti ostali RV-veliki kardinali zamenom ultrafiltera odgovarajućim realno vrednosnim merama u njihovim definicijama. Ulamova dihotomija važi i tada kao i dokazi relativne konsistentnosti slično prethodnom.

9.3 Neregularni ultrafilter

U ovoj sekciji ćemo prikazati Silverovu konstrukciju prvog primera neregularnog prebrojivo nekompletnog ultrafiltera na kardinalu $\leqslant \mathfrak{c}$.

9.3.1 Teorema *Ako je κ RVM kardinal, onda postoji ultrafilter nad κ koji nije $\langle\lambda,\lambda\rangle$ regularan ni za jedan $\lambda<\kappa$ takav da je $cf\lambda>\omega$.*

Dokaz

Neka je μ κ aditivna mera nad κ i neka je D proizvoljan filter koji proširuje filter

$$\{x \subseteq \kappa \mid \mu(x)=1\}.$$

Dakle, $x\in D$ povlači $\mu(x)>0$. Koristimo sledeću lemu:

9.3.2 Lema *Za proizvoljnu familiju $\{x_\alpha \mid \alpha\in\lambda\}$ podskupova od κ postoji prebrojiv skup $C\subseteq\lambda$ takav da je*

$$\mu\Big(\bigcup_{\alpha\in\lambda} x_\alpha \setminus \bigcup_{\alpha\in C} x_\alpha\Big)=0.$$

Dokaz leme

Neka su skupovi $y_\alpha\subseteq x_\alpha$ međusobno disjunktni i neka je $\bigcup\limits_{\alpha} y_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha} x_\alpha$. Tada je

$$\mu\Big(\bigcup_{\alpha\in\lambda} x_\alpha\Big)=\mu\Big(\bigcup_{\alpha\in\lambda} y_\alpha\Big)=\sum_{\alpha\in\lambda}\mu(y_\alpha).$$

Traženi prebrojiv skup C biramo tako da je

$$\sum_{\alpha\in C}\mu(y_\alpha)=\sum_{\alpha\in\lambda}\mu(y_\alpha).$$

Nastavak dokaza teoreme

Neka je $cf\lambda > \omega$, $x_\alpha \in D$, $\alpha < \lambda$; definišimo $\zeta_\beta = \mu(\bigcup_{\alpha \geqslant \beta} x_\alpha)$. Tada postoji γ tako da $\beta, \beta' \geqslant \gamma$ implicira $\zeta_\beta = \zeta'_\beta$ (u suprotnom bismo zbog $cf\lambda > \omega$ imali ω_1 opadajući lanac realnih brojeva, što je zbog separabilnosti nemoguće). Za svako $\beta > \gamma$ neka je $C_\beta \subseteq \lambda \setminus \beta$ prebrojiv skup takav da

$$\mu(\bigcup_{\alpha \in C_\beta} x_\alpha) = \zeta_\beta \quad \text{(koji je} = \zeta_\gamma\text{. Koristimo lemu 9.3.2).}$$

Pošto je cf $\lambda > \omega$, postoji skup $Z \subseteq \lambda$ takav da je $|Z| = \lambda$ i da $\beta < \beta'$ u Z povlači da je svaki element skupa $C_{\beta'}$ veći od svakog elementa skupa C_β. Za svako $\beta \in Z$ neka je $y_\beta = \bigcup_{\alpha \in C_\beta} x_\alpha$. Pošto je $\mu(\bigcup_{\alpha \geqslant \gamma} x_\alpha \setminus y_\beta) = 0$, imamo da važi: $\mu(y_\beta \triangle y_{\beta'}) = 0$, za $\beta, \beta' \in Z$; takođe $\mu(y_\beta) = \zeta_\gamma > 0$. Stoga je $\mu(\bigcap_{\beta \in Z} y_\beta) = \zeta_\gamma > 0$, pa je i $\bigcap_{\beta \in Z} y_\beta \neq 0$. Međutim,

$$\bigcap_{\beta \in Z} y_\beta = \bigcup_{\substack{f : Z \to \lambda \\ (\forall \beta) f(\beta) \in C_\beta}} \bigcap_{\alpha \in Z} x_{f(\alpha)}.$$

Zato za neko $f : Z \longrightarrow \lambda$ tako da za sve $\beta \in Z$, $f(\beta) \in C_\beta$, imamo da je

$$\bigcap_{\alpha \in Z} x_{f(\alpha)} \neq \emptyset.$$

Stoga imamo λ različitih X_α čiji je presek neprazan. $\square$

Koristeći sofisticiranije argumente, Magidor je pokazao relativnu konsistentnost egzistencije neregularnih ultrafiltera nad ω_2 i ω_3 u odnosu na postojanje ogromnih (huge) kardinala. Njegov neregularni ultrafilter F nad ω_3 ima kardinalni skok

$$|\prod_F \omega| \leqslant \omega_3, \quad \text{dok je (očigledno)} \quad |\prod_F \omega_3| = 2^{\omega_3}.$$

Pitanje kardinalne skokovitosti Silverovog filtera je otvoreno.

9.4 Keisler Rudinov poredak

Klasifikacija neglavnih ultrafiltera po njihovoj složenosti, koju su dali Keisler i Rudin, je bazirana na kombinatornim svojstvima ultrafiltera, pa struktura Keisler Rudin-ovog poretka (KR poredak) tipova ultrafiltera zavisi od aksioma teorije skupova. Postojanje minimalnih elemenata (u smislu KR poretka) je karakterisano svojstvima normalnosti koja su povezana sa stepenom kompletnosti ultrafiltera.

Označimo sa $U(\kappa)$ sve neglavne ultrafiltere nad κ. Neka je $U_\lambda(\kappa) \subseteq U(\kappa)$ skup ultrafiltera nad κ norme λ. $U(\kappa)$ se raslojava po normama:

$$U(\kappa) = \bigcup_{\lambda \in [\omega, \kappa]} U_\lambda(\kappa);$$

sloj $U_\kappa(\kappa)$ je skup uniformnih ultrafiltera nad κ.

U skup $U(\kappa)$ uvodimo relaciju $\approx_{KR}$ koristeći primer 3.7.9:

Za filtere D i E kažemo da su Keisler-Rudin ekvivalentni, u oznaci $D \approx_{KR} E$, ako postoje funkcije $f, g : \kappa \longrightarrow \kappa$ takve da je

$$E = f_*(D) \quad \text{i} \quad D = g_*(E). \tag{9.3}$$

Lako se proverava da je $\approx_{KR}$ relacija ekvivalencije u $U(\kappa)$. Klase ekvivalencije ove relacije nazivamo Keisler Rudin tipovima. Ako u (9.3) važi leva strana, pišemo $E \leqslant_{KR} D$, a ako još i ne važi desna strana pišemo $E <_{KR} D$.

Relacije $\leqslant_{KR}$ i $<_{KR}$ prenose se i na Keisler Rudin tipove i to su relacije poretka u skupu $U(\kappa)$ svih neglavnih ultrafiltera nad κ, odnosno u količničkom skupu $U(\kappa)/\approx_{KR}$. Može se proveriti da $\approx_{KR}$ ne meša norme. tj. da za ultrafiltere D i E nad κ takve da je $\|E\| \neq \|D\|$ nije $E \approx_{KR} D$, pa se $U(\kappa)/\approx_{KR}$ raslojava po normi - kardinali od ω do κ.

Označimo sa $\tau(D)$ tip ultrafiltera D - klasu ekvivalencije ultrafiltera D u relaciji $\approx_{KR}$. Očigledno je $|\tau(D)| \leqslant 2^\kappa$ jer je toliko funkcija kojima se ujednačavaju ultrafilteri. Pošto neglavnih ultrafiltera nad κ ima 2^{2^κ} (videti teoremu 1.5.27), iz prethodnog sledi da je

$$|U(\kappa)/\approx_{KR}| = 2^{2^\kappa}.$$

Takođe se lako proverava da je

$$|\{\tau(E) \in U(\kappa) \mid E \leqslant_{KR} D\}| \leqslant 2^\kappa,$$

kao i

$$|\{\tau(D) \in U(\kappa) \mid E \leqslant_{KR} D\}| = 2^{2^\kappa}.$$

Pitanje strukture poretka među tipovima privuklo je dosta pažnje kroz duži period i povezano je sa strukturom ultraproizvoda dobrih uređenja. Ovde ćemo izložiti samo neke elemente kojima se ilustruju značajna moguća svojstva ove klasifikacije.

Uslovi normalnosti imaju ovde izdvojen značaj. Ako je D normalan ultrafilter nad κ i ako je $E <_{KR} D$, tj. za neko $f : \kappa \longrightarrow \kappa$ je $E = f_*(D)$ a ni za jedno $g : \kappa \longrightarrow \kappa$ nije $D = g_*(E)$, imamo da je $f <_D id_\kappa$, pa zbog normalnosti ultrafiltera D je $f =_D \gamma$ za neko $\gamma < \kappa$. Odavde sledi da $\{\gamma\} \in E$, tj. da je E glavni ultrafilter.

Sledi da je svaki normalan ultrafilter minimalan u $U(\kappa)/\approx_{KR}$ jer su glavni isključeni. Takođe, ispod κ-kompletnog neglavnog ultrafiltera uvek postoji normalan ultrafilter (tvrđenje o egzistenciji normalnog ultrafiltera nad merljivim kardinalom).

Ranija strukturna analiza ultraproizvoda daje dosta informacija i za Keisler-Rudin poredak ultrafiltera. Poseban značaj imaju minimalne neograničene funkcije u $\prod_D \langle \kappa, < \rangle$. Kada je D κ-kompletan ultrafilter, projekcijom imamo konstrukciju normalnog ultrafiltera koji je $<_{KR}$ minimalan.

Slabo normalan ultrafilter ima ulogu normalnog ali samo u sloju $U_\kappa(\kappa)$ uniformnih ultrafiltera nad κ. Dakle, ako ultrafilter D ima minimalnu neograničenu funkciju u $\prod_D \langle \kappa, < \rangle$, onda (projektovano po toj funkciji) postoji Keisler-Rudin minimalan ultrafilter ispod D u sloju uniformnih ultrafiltera nad κ.

Koje informcije jedan nivo može imati o ostalim nivoima? Egzistencija normalnih ultrafiltera povlači da nema tipova ispod njih, a slabo normalni ultrafilteri su minimalni unutar najvišeg sloja. Ako postoje minimalni elementi na nižim nivoima, oni su ekvivalentni (po tipu) nekim slabo normalnim ultrafilterima unutar nekih slojeva. Generalizacija slabe normalnosti može biti korisna u pomenutim razmatranjima.

Neka je α kardinal $\leqslant \kappa$. Ultrafilter D nad κ je α-slabo normalan ako postoji minimalna neograničena funkcija $f\colon \kappa \longrightarrow \alpha$ modulo D, tj. ako za svako $g <_D f$ postoji $\gamma < \alpha$ tako da $g <_D \gamma$.

Slabo normalni trag ultrafiltera D nad κ je definisan sa

$$\mathrm{trace}_{WN}(D) = \{\alpha \mid D \text{ je } \alpha\text{-slabo normalan}\}.$$

Na sličan način se vidi da, ako je D α-slabo normalan ultrafilter nad κ, koji je npr. u sloju uniformnih ultrafiltera $U_\kappa(\kappa)$, onda u sloju $U_\alpha(\kappa)$ postoji Keisler-Rudin minimalan element ispod D , što obezbeđuje minimalna neograničena funkcija $f_D \in \prod\limits_D \langle \alpha, < \rangle$.

Dakle, ako je $\mathrm{trace}_{WN}(D) = 0$, onda ispod D u Keisler-Rudin poretku nigde nema minimalnih elemenata od neke od navedenih sorti. Ako je $\mathrm{trace}_{WN}(D) \neq 0$, onda za svako $\lambda \in \mathrm{trace}_{WN}(D)$ postoji minimalan ultrafilter u $U_\lambda(\kappa)$ ispod D.

Navedene činjenice okupimo u sledećoj lemi.

9.4.1 Lema

1. *Ako je ultrafilter D "samo" normalan, ili "samo" slabo normalan nad κ, onda je* $\mathrm{trace}_{WN} tr(D) = \{\kappa\}$*;*

2. *Ako je D običan ultrafilter, onda je* $\mathrm{trace}_{WN}(D) = 0$*;*

3. *Ako $\alpha \in$* $\mathrm{trace}_{WN}(D)$*, onda u $\leqslant_{KR}$ postoji minimalni element ispod D u sloju ultrafiltera norme α.*

Kao posledicu imamo da su ultrafilteri takvi da je $|\mathrm{trace}_{WN}| > 1$ esencijalno višestruko minimalni u $\leqslant_{KR}$.

Prve primere za filtere sa navedenim svojstvima imamo na kardinalima jačim od merljivih. Neka je npr. D tačno κ-kompletan uniforman ultrafilter nad regularnim karidnalom $\lambda > \kappa$, gde je κ merljiv kardinal. Iz prethodnih strukturalnih i kardinalnih razmatranja neposredno uočavamo da je $\prod_D \langle \lambda, < \rangle$ dobro uređen, sa tačno κ konstanti na početku, da je $F_\kappa \neq 0$, $F_\lambda \neq 0$ kao i da za svaki kardinal ν između κ i λ je

$$F_\nu \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{cf} \nu \geqslant \kappa.$$

Odmah sledi da je

$$\operatorname{trace}_{WN}(D) = \{\nu \mid \kappa \leqslant \nu \leqslant \lambda \ \wedge \ \nu \in \operatorname{Card} \wedge \operatorname{cf} \nu \geqslant \kappa\},$$

kao i da ako je f_ν minimalna funkcija u nekom ovakvom intervalu F_ν, onda je $f_{\nu *}(D)$ Keisler-Rudin minimalan ultrafilter ispod D na spratu ν.

Iz same merljivosti ne može se dobiti postojanje ovakvih filtera. Njihova egzistencija je povezana sa jako kompaktnim kardinalima. Naime, ako je kardinal κ λ-jako kompaktan, onda postoji κ-kompletan uniforman ultrafilter E nad λ koji je (κ, λ)-regularan. Lako se proverava da je

$$\operatorname{trace}_{WN}(E) = \{\alpha \leqslant \lambda \mid cf\alpha \geqslant \kappa\}.$$

Ako je D regularan ultrafilter nad κ, iz prethodnih razmatranja sledi da u $\prod_D \langle \kappa, < \rangle$ nema minimalne neograničene funkcije, pa zato u $U_\kappa(\kappa)$ ispod D nema minimalnih elemenata. Takođe svi slojevi F_α, gde je α kardinal manji od κ su neprazni, maksimalno puni i bez minimalnih elemenata.

Ostaje pitanje kada navedenih ultrafiltera uopšte ima, kada ih ima na manjim kardinalima. Regularnih ultrafiltera ima na svim kardinalima. Prikry i Jensen su dokazali da iz aksiome konstruktibilnosti sledi da su svi ultrafilteri na kardinalima manjim od $\aleph_\omega$ regularni. Takođe, aksioma konstruktibilnosti povlači da ne postoji merljiv kardinal. Tako je u konstruktibilnom univerzumu Keisler-Rudn poredak dosta pojednostavljen, jer tu neregularnih ultrafiltera moguće i da uopšte nema.

Pitanje egzistencije neregularnog ultrafiltera poznato je kao problem Gillmana i Keislera. Takođe od Keislera potiču i problemi kardinalnosti ultraproizvoda, posebno egzistencije neregularnih ultrafiltera sa kardinalnim skokovima. Naravno, kompletni ultrafilteri na merljivom kardinalu rešavaju oba pitanja. Ali merljivi kardinali su veoma veliki, pa pitanje ostaje otvoreno za manje kardinale.

Rešenja ovog problema se značajno razilaze sa aksiomom konstruktibilnosti. Prvi primer neregularnog (uniformnog) ultrafiltera na malim kardinalima konstruisao je Silver na realno merljivom kardinalu ($\leqslant 2^{\aleph_0}$). Silverov filter je veoma neregularan i poslužio nam je kao inspiracija za rešavanje više pitanja u vezi sa Keisler-Rudin poretkom. Primeri α-slabo normalnih ultrafiltera za α manji od indeksa ukazuju na to šta treba obezbediti da bi se dobili filteri sa sličnim svojstvima na manjim malim kardinalima.

Sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza, omogućuje nam izgradnju filtera sličnih svojstava na kardinalima $\leqslant c$.

9.4.2 Teorema *Slabo normalni trag je očuvan pri c.c.c. forsingu.*

Polazeći od instance jake kompaktnosti, npr. gore pomenuti ultrafilter E, modifikujući Solovayov forsing i Silverovu konstrukciju, dobijamo ultrafilter nad $\lambda \leqslant c$ takav da je trace_{WN} jednak $\mathrm{trace}_{WN}(E)$, čiji položaj u KR poretku ima sva svojstva polaznog ultrafiltera E, tj. D je α-slabo normalan za svaki α ($\kappa \leqslant \alpha \leqslant \lambda$) kofinalnosti $\geqslant \kappa$ (κ je RV merljiv).

Dakle, nad kontinuumom reprodukujemo svu složenost KR poretka slično RV velikim kardinalima. U ovoj situaciji Gillman Keislerov problem za manje kardinale ostaje interesantan. Veliki pomak ostvario je Magidor 1977. godine upotrebom veoma jake aksiome beskonačnosti: pretpostavljajući neprotivrečnost ogromnih (huge) kardinala konstruisao je model teorije ZFC u kome postoji neregularan uniforman ultrafilter nad ω_2 i slično za ω_3 sa dodatkom da je

$$|\prod_D \omega_1| = \aleph_3 < |\prod_D \omega_3| = 2^{\aleph_3} = \aleph_4$$

(u ovom modelu važi GCH). Woodin je 1979. godine napravio model teorije

$$ZF + DC + PD$$

(DC aksioma zavisnog izbora a PD aksioma projektivne determinisanosti), u kome je Laver pokazao da postoji neregularan ultrafilter nad ω_1.

Svojstva Keisler-Rudin poretka povezana su sa mnogim značajnim pitanjima u teoriji Booleovih algebri, topologiji, teoriji modela i šire. Na ove teme bogata je knjiga [20]. Kao jedan lep primer navodimo sledeću Blassovu teoremu bez dokaza.

9.4.3 Teorema *Neka su D i E ultrafilteri nad kardinalom κ. Sledeći iskazi su ekvivalentni:*

1. $D \leqslant_{KR} E$;
2. *Za svaki model* $\mathfrak{A}$ *je* $\prod_D \mathfrak{A} \preccurlyeq \prod_E \mathfrak{A}$.

KR ekstenzije do RV mera. Sa $U(\kappa)$ označimo prostor svih ultrafiltera nad κ. Neka je $M(\kappa)$ prostor svih $[0,1]_{\mathbb{R}}$ totalnih mera na κ. Očigledno je $U(\kappa) \subseteq M(\kappa)$. Koristeći (9.2) prirodno možemo produžiti $\leqslant_{KR}$ sa $U(\kappa)$ na $M(\kappa)$: za ν, $\mu \in M(\kappa)$ neka je $\nu \leqslant_{KRS} \mu$ ako $\nu(A) = \mu(h^{-1}(A))$ za neko $h \in {}^{\kappa}\kappa$. Slično sa KR neka je $\approx_{KRS}$ za $\nu \leqslant_{KRS} \mu$ i $\mu \leqslant_{KRS} \nu$. Neka je $\tau_{KRS}(\mu) = \{\nu \mid \nu \approx_{KRS} \mu\}$. Na ovaj način dobijamo kombinovanu klasifikaciju binarnih i RV mera.

Navedimo neke činjenice u vezi sa KRS.

9.4.4 Lema

1. *Za svako* $\mu \in M(\kappa)$, $|\tau_{KRS}(\mu)| \leqslant 2^{\kappa}$;

2. $|M(k)/_{\approx_{KRS}}| = 2^{2^\kappa}$;

3. $\mu \in U(\kappa)$ *povlači* $\tau_{KR}(\mu) = \tau_{KRS}(\mu)$, *te se stoga ultrafilteri i mere ne mešaju;*

4. $U(\kappa)/_{\approx_{KR}} \subseteq M(\kappa)/_{\approx_{KRS}}$. *U stvari* $U(\kappa)/_{\approx_{KR}}$ *je inicijalni deo u* $\leqslant_{KRS}$*;*

5. $\nu \leqslant_{KRS} \mu$ *povlači da* $\mathrm{add}\,(\nu) \leqslant \mathrm{add}\,(\mu)$ *i* $\|\nu\| \leqslant \|\mu\|$,

6. *Normalni, slabo normalni i* α*-slabo normalni ultrafilteri zadržavaju pozicije u* $\leqslant_{KRS}$*; Normalne mere su minimalne među merama.*

Bilo bi interesantno ustanoviti da li se ostala svojstva normalnosti (slaba normalnost, α-slaba normalnost) mogu fino prevesti na mere i saznati više o mogućoj složenosti $\leqslant_{KRS}$.

9.5 Normalni Mooreovi prostori

Pitanje metrizabilnosti topoloških prostora je još davnih tridesetih godina prošlog veka svedeno na normalne Mooreove prostore, da bi sledećih 50 godina ostalo otvoren problem.

Mooreovi prostori su regularni prostori koji imaju razvoj (development). Problem Metrizabilnosti normalnih Mooreovih prostora, poznat i kao hipoteza o normalnim Mooreovim prostorima (Normal Moore Space Conjecture - NMSC) je bio decenijama otvoren, privlačeći ekskluzivnu pažnju. Tretman raznih povezanih i restrihovanih svojstava prethodio je rešenju koje su dali Nyikos i Fleissner. Mnogo rezultata je doprinelo činjenici da je ovaj problem fino izučavan kroz mnoštvo detalja u [121]. Za rešenje problema suštinsko je bilo sledeće jako svojstvo:

PMEA (Product Measure Extension Axiom)

Za svaki kardinal κ, proizvod mera na 2^κ se može proširiti do totalne mere aditivnosti $2^{\aleph_0}$.

Pomoću Solovayevog forsinga Kunen je pokazao (videti [27]) da konsistentnost teorije

$$\text{ZFC} + \text{“}\exists \text{ jako kompaktan kardinal”}$$

povlači konsistentnost teorije

$$\text{ZFC} + \text{PMEA}.$$

Polazeći od ovog Kunenovog rezultata, prvu polovinu problema metrizacije normalnih Mooreovih prostora rešio je Nyikos 1980.

9.5.1 Teorema [PMEA] *Neka je X prostor karaktera (character) $< \mathfrak{c}$. Tada je svaka normalizovana kolekcija podskupova od X dobro separirana.*

Dokaz

Neka je X prostor karaktera $< \mathfrak{c}$ i neka je $\{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ normalizovana familija podskupova od X. Dakle, za svaki $A \subset \lambda$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U_A i V_A u X koji sadrže redom $\bigcup\{C_\alpha \mid \alpha \in A\}$ i $\bigcup\{C_\alpha \mid \alpha \notin A\}$.

Neka je μ c-aditivna mera koja produžuje uobičajenu proizvod meru na 2^λ, takva da $\mu(\mathcal{A})$ postoji za sve $\mathcal{A} \subset 2^\lambda$. Identifikujemo λ sa skupom svih ordinala čija je kardinalnost $< \lambda$ (što je i inače slučaj). Za svako $\alpha \in \lambda$ neka je

$$B_\alpha = \{f \in 2^\lambda \mid f(\alpha) = 1\}.$$

Primetimo da je $\mu(2^\lambda) = 1$ i $\mu(B_\alpha \setminus B_\beta) = 1/4$ za sve $\alpha, \beta \in \lambda$, $\alpha \neq \beta$.

Svako $f \in 2^\lambda$ je karakteristična funkcija nekog podskupa A_f od λ: $A_f = \{\alpha \in \lambda \mid f(\alpha) = 1\}$.

Za dato α i dato $p \in C_\alpha$ neka je $\{U_\gamma(p) \mid \gamma < \kappa_p\}$ otvorena okolinska baza za p, pri čemu je $\kappa_p < \mathfrak{c}$. Neka je

$$\mathcal{A}[p,\gamma] = \{f \in 2^\lambda \mid U_\gamma(p) \subset U_{A_f} \text{ ili } U_\gamma(p) \subset V_{A_f}\}.$$

Za fiksirano p, $\bigcup\{\mathcal{A}[p,\gamma] \mid \gamma < \kappa_p\} = 2^\lambda$. Ovo važi jer za proizvoljno $f \in 2^\lambda$, ili U_{A_f} ili V_{A_f} je otvoreni nadskup od C_α, pa postoji γ tako da je $U_\gamma(p)$ sadržan u onome koji sadrži C_α.

Pošto je μ $\mathfrak{c}$-aditivna i kako je $\{\mathcal{A}[p,\gamma] \mid \gamma < k_p\}$ kolekcija od manje od $\mathfrak{c}$ podskupova koji pokrivaju 2^λ, transfinitni niz

$$\{\mu(\bigcup_{\gamma<\delta} \mathcal{A}[p,\gamma]) \mid 0 \leqslant \delta \leqslant \kappa_p\}$$

monotono konvergira ka 1. S obzirom na Arhimedovo svojstvo uređenja, postoji konačan skup indeksa $\{\gamma_1(p), \ldots, \gamma_{n_p}(p)\}$ takav da je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n_p} \mathcal{A}[p,\gamma_i(p)]\right) > 7/8.$$

Neka je γ_p takvo da je

$$U_{\gamma_p}(p) \subset \bigcap_{i=1}^{n_p} U_{\gamma_i(p)}(p).$$

Tada je

$$\mu(\mathcal{A}[p,\gamma_p]) > 7/8.$$

Radeći ovo za svako α i $p \in C_\alpha$, dobijamo da je

$$\mu(\mathcal{A}[p,\gamma_p] \cap \mathcal{A}[q,\gamma_q]) > 3/4$$

za sve p, q. Pretpostavimo da $p \in C_\alpha$, $q \in C_\beta$, $\alpha \neq \beta$. Pošto je $\mu(\mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{B}_\beta) = 1/4$, postoji

$$f \in \mathcal{A}[p,\gamma_p] \cap \mathcal{A}[q,\gamma_q] \cap (\mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{B}_\beta).$$

Iz $f(\alpha) = 1$, $f(\beta) = 0$ sledi da $p \in U_{A_f}$, $q \in V_{A_f}$. Iz $f \in \mathcal{A}[p, \gamma_p]$ sledi da $U_{\gamma_p}(p) \subset U_{A_f}$. Slično, $U_{\gamma_q}(q) \subset V_{A_f}$. Stoga,

$$U_{\gamma_p}(p) \cap U_{\gamma_q}(q) = \emptyset.$$

Za svako α neka je

$$U_\alpha = \bigcup \{U_{\gamma_p}(p) \mid p \in C_\alpha\}.$$

Svaki U_α je otvoreni nadskup od C_α, pa na osnovu prethodnih razmatranja imamo da je

$$U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \text{ za } \alpha \neq \beta.$$

Odavde sledi da je familija $\{C_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ dobro separirana. $\square$

9.5.2 Posledica [PMEA] *Svaki normalan Mooreov prostor je metrizabilan.*

Nykosova teorema je nametnula očigledno pitanje: da li se PMEA u Nykosovoj teoremi može zameniti nekim slabijim svojstvom? Preciznije, postavljeno je pitanje konsistentske snage PMEA kao i NMSC. Enigmu je razrešio Fleisner (1984) sledećom teoremom:

9.5.3 Teorema *Konsistentnost teorije*

$$ZFC + NMSC$$

povlači konsistentnost teorije

$$ZFC + \text{“}\exists \text{ merljivi kardinal”}.$$

Kompletna karakterizacija konsistentske snage NMSC nailazi na teškoće slične slučaju karakterizacije konsistentske jačine RV jako kompaktnih kardinala. Mitchell je karakterizaciju učinio preciznijom dokazavši konsistentnost hipermerljivih kardinala iz NMSC. Zajedno sa originalnim Solovayovim radom prethodno dovodi do više (matematički) tradicionalnog, a manje skupovno teoretskog zaključka: Teorija

$$\text{ZFC} + \text{“}\exists \text{ totalno } \sigma \text{ aditivno produženje Lebesgueove mere”}$$

je ekvikonsistentna teoriji

$$\text{ZFC} + \text{“veliki deo NMSC”}.$$

Formulacija “veliki deo NMSC” podrazumeva postojanje egzotičnog nemetrizabilnog primera normalnih Mooreovih prostora uz konsistentnost

$$\text{ZFC} + \text{“}\exists \text{ totalno } \sigma\text{-aditivno produženje Lebesgueove mere”}.$$

Na ovaj način je

“postojanje totalne σ-aditivne ekstenzije Lebesgueove mere”

blisko povezano sa

“metrizabilnošću normalnih Mooreovih prostora”.

Interesantno je da ova svojstva ostaju povezana i u slabijoj formi. Što se produženja Lebesgueove mere tiče napomenimo da su Banach i Kuratowski pokazali da CH povlači da se Lebesgueova mera ne može produžiti ni sa prebrojivo mnogo skupova.

Sledeći rezultat Carlsona i Prikryja rešava srednji slučaj u odnosu na ekstenzije mere.

9.5.4 Teorema

- *Ako je teorija skupova konsistentna, onda je konsistentno i dodatno pretpostaviti da je* $2^{\aleph_0}$ *bilo šta razumno i da se Lebesgueova mera može proširiti i na familiju od* $< \mathfrak{c}$ *proizvoljnih podskupova od* $\mathbb{R}$;

- *Ako se dodatno pretpostavi da je κ slabo kompaktan, Lebesgueova mera se može proširiti sa $\mathfrak{c}$ skupova.*

Pored PMEA koriste se sledeće slabije forme:

$\mathfrak{c}$MEA ($\mathfrak{c}$ Measure Extension Axiom). Za datih $\mathfrak{c}$ podskupova od ${}^{\mathfrak{c}}2$ postoji $\mathfrak{c}$-aditivna mera koja produžuje uobičajenu meru proizvoda i koja je definisana na tim skupovima.

WMEA (Weak Measure Extension Axiom). Za proizvoljno $\kappa < \mathfrak{c}$, svaku kolekciju od κ podskupova od ${}^{\kappa}2$, uobičajena proizvod mera na ${}^{k}2$ se može produžiti do κ-aditivne mere koja meri te skupove.

konsistentnost WMEA je pokazana iz konsistentnosti ZFC, a konsistetnost cMEA iz slabe kompaktnosti.

9.5.5 Teorema *PMEA (cMEA) (WMEA) povlači da je normalni Mooreov prostor (težine $\leqslant \mathfrak{c}$) (težine $< \mathfrak{c}$) metrizabilan.*

9.6 RV merljivost i kontinuum problem

Navedimo ukratko rezultate o kontinuum problemu u slučaju kada postoje merljivi kardinali.

Konsistentnost GCH sa postojanjem merljivih kardinala je dokazao Silver ($L[\mu] \models$ GCH). Teorema sasvim slična Silverovoj za singularne kardinale važi i za merljive kardinale:

Teorema Ako je κ merljivi kardinal, onda:

- $2^{\nu} = \nu^{+}$ SS(κ) povlači $2^{k} = k^{+}$;
- $f(\nu) = 1$ SS povlači $f(\kappa) = 1$;
- za $\nu \leqslant \kappa$, f je ili veoma malo ili veoma veliko: $f(\nu) < \omega$ ili $f(\nu) \geqslant \nu$.

Ako GCH važi SS ispod κ, onda važi i na κ. Opštije, način na koji je f ograničena SS ispod κ određuje načini ograničenosti na samom κ:

$$f(\kappa) \leqslant ot(\prod_{\mu} \langle f(\alpha), \in \rangle).$$

Kunen je dokazao da je $2^{\kappa} > \kappa^{+}$ za merljivi kardinal κ jače svojstvo od merljivosti, tj. dopušta model sa mnogo merljivih kardinala.

Ulamova teorema nam daje da postojanje mere na skupu $\leqslant \mathfrak{c}$ deluje na veličinu kontinuuma:

ako je κ RVM kardinal $\leqslant 2^{\aleph_0}$, onda je κ slabo nedostiživ.

Solovay je pokazao da ukoliko je κ RVM, onda je κ κ-ti nedostiživ i Mahloov kardinal. Posebno, ako je kontinuum $\mathfrak{c}$ RVM, onda:

- $\mathfrak{c}$ je $\mathfrak{c}$-ti kardinal;
- $2^{\aleph_0} = \aleph_{0+f(0)} = \aleph_{f(0)} = \aleph_{2^{\aleph_0}}$, ili $f(0) = 2^{\aleph_0}$, pa je f neograničeno u 0.

Drugim rečima, ako je $2^{\aleph_0}$ realno vrednosno merljiv, onda $2^{\aleph_0}$ pravi izuzetan skok u Ord. Koliko je ovo čudno, dodatno ilustruje sledeća Prikryjeva teorema:

9.6.1 Teorema *Ako je $2^{\aleph_0}$ RVM, onda je $2^{\lambda} = 2^{\aleph_0}$ za svako $\lambda < 2^{\aleph_0}$.*

Dakle, kontinuum odstupanje f pravi enorman skok u 0, a zatim ima konstantnu vrednost za sve indekse manje od njene vrednosti u 0.

$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+f(\alpha)}, \quad f(0) = 2^{\aleph_0}$ i
$2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \ldots = 2^{\aleph_\alpha} = \ldots 2^{\aleph_0}$ za $\alpha < 2^{\aleph_0}$,
sledi $f(0) = f(1) = \ldots = f(\alpha) = \ldots = 2^{\aleph_0}$ za $\alpha < 2^{\aleph_0}$,

što nam daje poprilično veliku raznovrsnost od $f \equiv 1$ pri GCH, do ove eksponencijalne – jako hiperboličke geometrije univerzima u prisustvu totalne mere na skupu realnih brojeva.

9.7 Neki komplementarni rezultati

Ovde navodimo bez dokaza više rezultata značajnih u rešavanju problema mere. Za detalje čitaoca upućujemo na originalne radove.

Redukujući aksiomu izbora eliminišu se Vitalijevi primeri Lebesgue-nemerljivih skupova. Solovay je 1964. godine pokazao sledeću teoremu, objavljenu u [115]

9.7.1 Teorema *Pretpostavimo da postoji tranzitivan model teorije*

$$ZFC + \exists \textit{ jako nedostiživ kardinal } (ZFC + I).$$

Tada postoji tranzitivni model teorije ZF u kome važi:

1. *Princip zavisnog izbora* ($= DC$)*;*
2. *Svaki podskup skupa realnih brojeva je Lebesgue-merljiv;*
3. *Svaki podskup skupa realnih brojeva ima svojstvo Bairea;*
4. *Svaki neprebrojivi podskup skupa realnih brojeva sadrži perfektan skup* (P)*;*
5. *Neka je* $\{A_x \mid x \in R\}$ *familija nepraznih podskupova skupa realnih brojeva. Tada postoje Borel-ove funkcije* h_1 *i* h_2 *koje slikaju* $\mathbb{R}$ *u* $\mathbb{R}$ *takve da važi:*
   - $\{x \mid h_1(x) \notin A_x\}$ *je Lebesgueove mere 0;*
   - $\{x \mid h_2(x) \notin A_x\}$ *je prve kategorije (prebrojiva unija nigde gustih skupova).*

Mycielski je u [84] dokazao da ukoliko teorija $ZF + DC + P$ ima tranzitivan model, onda teorija $ZFC+I$ takođe ima tranzitivan model. Ovim je pokazano da je pretpostavka nedostiživosti nužna u formulaciji teoreme. Što se tiče teorije $ZF + DC + LM$ (2), Solovay je anticipirao da se nedostiživost može ispustiti.

9.7.2 Teorema *Pretpostavimo da teorija $ZFC + I$ ima tranzitivan model. Tada postoji tranzitivan model teorije $ZFC + GCH$ u kome važe analogna svojstva svojstvima* (2)-(5) *teoreme 9.7.1. Modifikacija se sastoji u zameni "podskupova skupa realnih brojeva" sa "podskupova skupa realnih brojeva definabilnih pomoću prebrojivog niza ordinala".*

9.7.3 Teorema *Uz pretpostavke prethodne teoreme, postoji tranzitivan model teorije ZFC u kome je $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ i u kome važe svojstva* (2)–(5) *iz prethodne teoreme.*

Umesto $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ možemo da dobijemo sličnu teoremu sa pretpostavkom $2^{\aleph_0} =$ bilo šta razumno, uz jaču polaznu pretpostavku:

Postoji tranzitivan model teorije $ZFC+$ "postoji jako nedostižan slabo kompaktan kardinal".

Solovay je konstruisao model teoreme 9.7.3 u kome važi Martin-ova aksioma. Teorema 9.7.2 je dokazana forsingom Azriel Levyja: Neka je M polazni model (ground model):

$$M \vDash ZFC + \text{“Postoji jako nedostiživ kardinal”}.$$

Dalje, neka je κ jako nedostiživ u M i neka je $Lv(\kappa)$ odgovarajuće Levyjevo uređenje. Ako je G proizvoljan M-generički filter u $Lv(\kappa)$, onda je traženi model upravo $M[G]$.

Uz veoma bogat kontrapunkt u kofinalnom skupu lema razvijenom na Levyjevim tehnikama, Solovay je dokazao fugu.

9.7.4 Lema *Neka je U skup realnih brojeva u $M[G]$ koji su $M - \mathbb{R}$-definabilni. Tada*

$$M[G] \vDash U \textit{je Lebesgue merljiv.}$$

I ostala svojstva nabrojana u teoremi 9.7.2 takođe važe u $M[G]$.

Dalje, neka je $N = (HOD)^{M[G]}$. Solovay je pokazao da modeli $M[G]$ i N imaju iste realne brojeve i iste nizove ordinala. DC važi u N i za $A \in N$ važi

$$M[G] \models A \text{ je } M - \mathbb{R}\text{-definabilan.}$$

U N svaki skup realnih brojeva ima Baireovo svojstvo: svaki neprebrojivi podskup skupa realnih brojeva sadrži perfektan podskup.

Razmatrajući Lebesgueovu meru i njena produženja, dolazimo do uske povezanosti sa sledećim svojstvima: aksiomom izbora, aditivnošću mere, translatornom invarijantnošću mere, domenom mere (parcijalna/totalna na $\mathbb{R}$).

Preostala kombinacija svojstava, obrađena u radu [86], dovela je do sledeće teoreme Solovaya i Pincusa:

9.7.5 Teorema *Sa teorijom ZFC je konsistentno da postoji l^* tako da:*

- *l^* je konačno aditivno translatorno invarijantno produženje Lebesgueove mere do mere na $[0,1]$;*
- *Ne postoji ultrafilter nad $\mathbb{R}$ definabilan preko ordinala, realnih brojeva i l^*.*

U istom radu je pokazano da je u opštem slučaju teže dobiti neglavne ultrafiltere nego neglavne mere u ZFC, $ZF+DC$. Sledeće veoma važne teoreme su takođe pokazane u tom radu:

9.7.6 Teorema *Konsistentno je sa ZFC da ni jedan neglavni ultrafilter nad ω nije OD, ali postoji definabilna (u stvari projektivna) neglavna mera nad ω.*

9.7.7 Teorema *Konsistentno je sa $ZF + DC+$ Hahn-Banachova teorema da je svaki ultrafilter nad svakim skupom glavni.*

Poslednja teorema fino komplementira teoremu Luxemburga [65], kojom se pokazuje da je u ZF Hahn-Banachova theorema ekvivalentna postojanju konačno aditivne realno vrednosne mere na svakoj Booleovoj algebri.

Teoreme 9.7.3 i 9.7.5 imaju isti model $L[r]$, gde je r slučajni element iz $2^{\aleph_1^L}$.

Model M je sličan modelu za [116]. Mere korišćene u dokazu ovih teorema su slične onima uvedenim u [116], ali na različitim indeksima.

Polifonija velikih problema

Kardinalno merenje $|\ | : V \longrightarrow \mathrm{Card}$ u stvari predstavlja jednu lepu univerzalnu meru. Ako važi aksioma izbora onda je $|\ |$ totalno merenje, bez AC parcijalno. Sama AC ne određuje funkciju $|\ |$, već samo rešava pitanje njenog domena: samo vrednovanje $|\ |$ predstavlja rešavanje kontinuum problema.

Aditivnost: pošto je jedini skup kardinalne mere nula prazan skup, odatle bismo dobili da ova mera nije aditivna. Pošto, međutim iz

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{(gde je desno particija od } X\text{)},$$

sledi

$$|X| = |\bigcup_{i \in I} X_i| = \sum_{i \in I} |X_i|,$$

što važi za svaki $X \in V$, u stvari važi da je $|\ |$ totalno aditivna.

Veoma važan aspekt kardinalnog merenja imamo u relativnom određivanju: za dati skup X odvajamo male i velike podskupove od X biparticijom $P(X)$:

- $\mathrm{mali}(X) = \{Y \subseteq X \mid |Y| < |X|\}$;
- $\mathrm{veliki}(X) = \{Y \subseteq X \mid |Y| = |X|\}$.

Tu sad imamo sito kojim se filtriraju mali podskupovi od velikih:

$$\mathrm{sito}(Y) = \begin{cases} 0 & , \quad Y \in \mathrm{mali}(X) \\ 1 & , \quad Y \in \mathrm{veliki}(X) \end{cases} , \quad Y \subseteq X.$$

Mada su definiciona svojstva u predikatima mali(X) i veliki(X) komplementarna, funkcija sito se uslovno rečeno poželjno ponaša (možda) samo na konačnim domenima: samo tada se predikati

$$\text{mali}(X) \quad \text{i} \quad \text{veliki}(X)$$

komplementiraju. U interesantnijem slučaju, kada je domen beskonačan, ovo komplementiranje se gubi po osnovnom svojstvu beskonačnosti da se X može razbiti u dva disjunktna dela X_1 i X_2 jednako brojan (jednako meran) sa polaznim X. Tada nam preostaje

$$\text{mali}(X) = I_{F_X}$$

- dualni ideal Frechetovog filtera nad X - Frechetova parcijalna kardinalna binarna mera na $P(X)$.

Sama AC obezbeđuje postojanje totalnih binarnih mera ultrafiltera (teorema o ultrafilteru) kao i konstrukciju nemerljivih skupova: slabljenjem aksiome izbora tope se kontraprimeri - nemerljivi skupovi i kao što pokazuje teorema Solovaya, ako je neprotivrečno ZFC+I, može se napraviti model za ZF u kome su svi podskupovi od $\mathbb{R}$ Lebesgue merljivi.

Tako imamo, s jedne strane, da se opšta dobra uredljivost i postojanje σ-aditivne mere (bezatomične ili atomične ekvikonsistentno) teže trpe, pa je merljiv kardinal, ako postoji, tamo gde jeste, uz koncentraciju ranije pobrojanih snažnih svojstava. Ova Solovayova teorema kaže i da $\mathbb{R}$ može biti realno merljiv i van Card ose i da je to svojstvo po konsistentskoj jačini neuporedivo slabije od postojanja realno merljivog kardinala u prisustvu pune aksiome izbora. Solovay je dokazao da iz aksiome determinacije AD sledi da je $\aleph_1$ merljiv (tu naravno ne važi AC) čime se veliki krug merenja zatvara (preko najvećeg i najjačeg, nazad do najmanjeg).

10

PCF - moguće kofinalnosti ultraproizvoda

Kao posledicu aksiome izbora imamo da je za proizvoljne beskonačne kardinale κ i λ

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Stoga se pod kardinalnom aritmetikom uglavnom podrazumeva izučavanje osobina kardinalnog stepenovanja. Neke elementarne rezultate vezane za kardinalno stepenovanje i kontinuum funkciju smo izveli u sekciji 3.2.

Easton je pokazao da je kontinuum funkcija na regularnim kardinalima sasvim slobodna, tj. da je jedino ograničenje ono koje proističe iz Königove leme:

$$\operatorname{cf} 2^{\kappa} > \kappa, \quad \kappa \in \mathrm{Reg}.$$

Daleko interesantnije je kardinalno stepenovanje u slučaju singularnih kardinala. Čuvena Silverova teorema iz 1974. godine, u mnogome inspirisana Magidorovim rezultatima, inicira istraživanja vezana za hipotezu o singularnim kardinalima SCH. Naime, u pomenutoj teoremi Silver je dokazao da je za singularan kardinal κ neprebrojive kofinalnosti

$$2^\kappa = \kappa^+$$

ukoliko je

$$2^\lambda = \lambda^+$$

za stacionarno mnogo kardinala $\lambda < \kappa$. SCH se dobija ispuštanjem pretpostavke o neprebrojivoj kofinalnosti u formulaciji Silverove teoreme.

Ubrzo (1975.) Galvin i Hajnal su pokazali da je

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{(|\alpha|^{\operatorname{cf}\alpha})^+}$$

ukoliko je $\aleph_\alpha$ jako granični singularan kardinal neprebrojeve kofinalnosti. Shelah je 1978. dokazivao slične rezultate ispuštanjem pretpostavke o neprebrojivoj kofinalnosti. U narednih deset godina Shelah je razvio moćnu PCF teoriju koja je u mnogome promenila pristup kardinalnoj aritmetici. Izuzetan rezultat ove teorije je sledeći Shelahov rezultat: ako je $\aleph_\omega$ jako granični kardinal, onda je

$$2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}.$$

U ovom poglavlju dajemo kratak prikaz dokaza ovog rezultata, sa osvrtom na pojedine koncepte PCF teorije. Detaljne ekspozicije se mogu naći npr u [1], [82] i [98].

10.1 Prava kofinalnost i tačne majorante

Izlaganje počinjemo preciziranjem notacije. Sa A ćemo po pravilu označavati skup čiji su svi elementi regularni kardinali. Proizvod po A, u oznaci $\prod A$, je skup

$$\{f : A \longrightarrow \bigcup A \mid (\forall a \in A) f(a) \in a\}.$$

Za proizvoljnu funkciju $h : A \longrightarrow \mathrm{Ord}$ proizvod $\prod h$ definišemo sa

$$\prod h = \prod_{a \in A} \langle h(a), \in \rangle.$$

Ako je I ideal nad A, sa $\prod A/I$ ćemo označavati redukovani proizvod dobrih uređenja $\langle a, \in \rangle$, $a \in A$, po dualnom filteru D_I ideala I. Relacije $=_I$, $<_I$ i $\leqslant_I$ su po definiciji redom relacije $=_{D_I}$, $<_{D_I}$ i $\leqslant_{D_I}$. Za $Z \subseteq A$ kažemo da je *nula skup* ako $Z \in I$. U suprotnom za Z kažemo da je *pozitivan*. Familiju svih pozitivnih skupova označavamo sa I^+. Ukoliko je I maksimalan pravi ideal, onda je I^+ ultrafilter.

Neka je $\langle \mathcal{P}, \leqslant_{\mathcal{P}} \rangle$ proizvoljno parcijalno uređenje. Skup $X \subseteq \mathcal{P}$ je *kofinalan* u $\mathcal{P}$ ako za svako $p \in \mathcal{P}$ postoji $x \in X$ tako da $p \leqslant_{\mathcal{P}} x$. Kofinalnost uređenja $\mathcal{P}$, u oznaci $\mathrm{cf}\,\mathcal{P}$, definišemo sa

$$\mathrm{cf}\,\mathcal{P} = \min\{|X| \mid X \text{ je kofinalan u } \mathcal{P}\}.$$

10.1.1 Primer Neka je

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n<\omega} (\omega_n \times \{n\})$$

i neka je

$$\langle \alpha, m \rangle \leqslant_{\mathcal{P}} \langle \beta, n \rangle \Leftrightarrow m = n \wedge \alpha \leqslant \beta.$$

Uočimo proizvoljan skup X kofinalan u $\mathcal{P}$. Kako su za različite m i n skupovi $\omega_m \times \{m\}$ i $\omega_n \times \{n\}$ $\leqslant_{\mathcal{P}}$-neuporedivi, dobijamo da je za svako $n \in \omega$

$$|X \cap (\omega_n \times \{n\})| = \aleph_n,$$

pa kako je $\mathcal{P}$ disjunktna unija skupova $\omega_n \times \{n\}$, $n \in \omega$, imamo da je

$$|X| = \sum_{n<\omega} \aleph_n = \aleph_\omega,$$

odakle sledi da je $\mathrm{cf}\,\mathcal{P} = \aleph_\omega$.

Za $\mathcal{P}$ kažemo da ima *pravu kofinalnost* ukoliko je $\mathrm{cf}\,\mathcal{P}$ regularan kardinal. U tom slučaju koristimo i oznaku

$$\mathrm{tcf}\mathcal{P} = \lambda.$$

Za uređenje $\mathcal{P}$ kažemo da je λ-*usmereno* ako svaki podskup od $\mathcal{P}$ kardinalnosti $< \lambda$ ima majorantu u $\mathcal{P}$.

Neka je I pravi ideal nad A. Niz $\langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ funkcija u $\prod A$ je *uporno kofinalan* ukoliko je za svako $g \in \prod A$

$$g \leqslant_I f_\xi$$

za svako ξ počeši od nekog $\xi_0 < \lambda$.

Definicija 10.1 Neka je $X \subseteq \prod h$, pri čemu $h : A \longrightarrow \mathrm{Ord}$ i za svako $a \in A$ je $h(a) > 0$. Uočimo proizvoljan ideal I nad A i $f \in \prod h$. Kažemo da je f *tačna majoranta* skupa X ukoliko je f $\leqslant_I$-majoranta skupa X i X $<_I$-kofinalan ispod f, tj. ako za svako $g <_I f$ postoji $x \in X$ tako da je $g \leqslant_I x$.

10.1.2 Primer Neka je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ rastući niz u $\prod A$ pri čemu je $|A| < \lambda = \mathrm{cf}\,\lambda < \min A$ i neka je I dualni ideal glavnog filtera $D = \{A\}$. Pokažimo da je tada funkcija h definisana sa

$$h(a) = \sup\{f_\xi(a) \mid \xi < \lambda\}$$

tačna majoranta niza f. Prvo primetimo da $h \in \prod A$ jer je svaki kardinal $a \in A$ regularan i $a > \lambda$. Dalje, h je očigledno $\leqslant$-majoranta skupa X. Pokažimo da je X kofinalan ispod h. Neka je $g < h$. Tada imamo da za svako $a \in A$ važi

$$g(a) < h(a),$$

pa po definiciji h postoji $\xi_a < \lambda$ tako da je

$$g(a) \leqslant f_{\xi_a}(a) < h(a).$$

Kako je $|A| < \lambda = \mathrm{cf}\,\lambda$, imamo da $\xi = \sup\{\xi_a \mid a \in A\} \in \lambda$, a kako je f rastući niz, mora biti i $g \leqslant f_\xi$.

U nastavku ćemo se baviti utvrđivanjem dovoljnih uslova egzistencije tačnih majoranti, koncepta koji je veoma važan u PCF teoriji.

Neka je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ $<_I$-rastući niz u ${}^A\mathrm{Ord}$. Kažemo da je niz f *jako rastući* ako postoji familija nula skupova $\{Z_\xi \mid \xi < \lambda\}$ takva da za svako $\xi < \eta$ važi

$$Z_\xi \cup Z_\eta \supseteq \{a \in A \mid f_\eta(a) \leqslant f_\xi(a)\}.$$

Za skupove Z_ξ, $\xi < \lambda$ kažemo da podržavaju jaki rast niza f.

10.1.3 Primer Neka je $|A| < \lambda = \mathrm{cf}\,\lambda < \min A$, I pravi ideal nad A i neka je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ $<_I$-rastući niz u $\prod A$. Pokažimo da su sledeći iskazi ekvivalentni:

1. f ima jako rastući podniz dužine λ;
2. f ima tačnu majorantu takvu da $\{a \in A \mid \mathrm{cf}\, h(a) = \lambda\} \in D_I$;
3. f je kofinalno ekvivalentan nekom $<$-rastućem nizu dužine λ. Napomenimo da su $<_I$-rastući nizovi f i g dužine λ kofinalno ekvivalentni ukoliko imaju λ-podnizove f' i g' takve da je

   $$f'_\xi <_I g'_\xi <_I f'_{\xi+1}$$

   za svako $\xi < \lambda$.

$1 \Rightarrow 2$: Neka je $\{Z_\xi \mid \xi < \lambda\}$ familija nula skupova takvih da je za svako $\xi < \eta$

$$Z_\xi \cup Z_\eta \supseteq \{a \in A \mid f_\eta(a) \leqslant f_\xi(a)\}.$$

Definišimo funkciju $h \in \prod A$ sa

$$h(a) = \sup\{f_\xi(a) \mid \xi < \lambda \wedge a \notin Z_\xi\}.$$

Neka je $A_0 = \bigcup_{\xi<\lambda}(A \setminus Z_\xi)$. Očigledno $A_0 \in D_I$ i

$$|A_0| \leqslant |A| < \lambda.$$

Za proizvoljno $a \in A$ definišimo skupove X_a i Y redom sa

$$X_a = \{\xi < \lambda \mid a \notin Z_\xi\} \ \text{ i } \ Y = \{a \in A_0 \mid |X_a| < \lambda\}.$$

Iz regularnosti kardinala λ i činjenice da je

$$|Y| \leqslant |A_0| < \lambda$$

sledi da je

$$\xi_Y = \sup\{\sup X_a \mid a \in Y\} < \lambda,$$

a iz definicije skupova X_a, $a \in A$ i Y, kao i iz pretpostavljenog jakog rasta niza f sledi da za svako $\xi > \xi_Y$ važi

$$(A \setminus Z_\xi) \cap Y = 0.$$

Dalje,

$$\begin{aligned}(A \setminus Z_{\xi_Y}) &= (A \setminus Z_{\xi_Y}) \cap A_0 \\ &= (A \setminus Z_{\xi_Y}) \cap ((A_0 \setminus Y) \cup Y) \\ &= (A \setminus Z_{\xi_Y}) \cap (A_0 \setminus Y),\end{aligned}$$

odakle sledi da $A_0 \setminus Y \in D_I$. Pokažimo da za svako $a \in A_0 \setminus Y$ važi $\operatorname{cf} h(a) = \lambda$. Primetimo je za svako takvo a

$$|X_a| = \lambda,$$

pa iz definicije funkcije h neposredno sledi da je

$$h(a) = \bigcup\{f_\xi(a) \mid \xi \in X_a\}.$$

Kako je λ regularan kardinal i kako je niz f $<_I$-rastući, mora biti i

$$\operatorname{cf} h(a) = \operatorname{cf} \lambda = \lambda,$$

odakle sledi da $\{a \in A \mid \operatorname{cf} h(a) = \lambda\} \in D_I$. Preostaje da pokažemo da je h tačna majoranta niza f. Neka je $g <_I h$ i neka je

$$B = \{a \in A \mid g(a) < h(a)\}.$$

Naravno, $B \in D_I$. Tada za proizvoljno $a \in B$ imamo da je

$$g(a) < h(a) = \sup\{f_\xi(a) \mid \xi < \lambda \wedge a \notin Z_\xi\},$$

pa postoji $\xi_a < \lambda$ tako da $a \notin Z_{\xi_a}$ i $g(a) < f_{\xi_a}(a)$. Neka je

$$\xi = \sup\{\xi_a \mid a \in B\}.$$

Kako je $|B| \leqslant |A| < \lambda$ i kako je λ regularan kardinal, imamo da je $\xi < \lambda$. Sada za proizvoljno $a \in B \cap (A \setminus Z_\xi)$ važi i

$$a \in B \cap (A \setminus (Z_\xi \cup Z_{\xi_a}),$$

odakle sledi da je $g <_I f_\xi$.

$2 \Rightarrow 3$. Neka je h tačna majoranta niza f i neka

$$X = \{a \in A \mid \mathrm{cf}\, h(a) = \lambda\} \in D_I.$$

Za svako $a \in X$ neka je S_a kofinalan podskup od $h(a)$ kardinalnosti λ. Definišimo niz $g = \langle g_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$ na sledeći način:

$$g_\xi(\alpha) = \begin{cases} \xi\text{-ti element od } S_a & , \quad a \in X \\ \xi & , \quad a \in A \setminus X \end{cases}.$$

Sasvim lako se proverava da je niz g $<$-rastući i kofinalno ekvivalentan sa f.

$3 \Rightarrow 1$: Dokazaćemo nešto opštije tvrđenje, tzv. *sendvič argument*:

10.1.4 *Neka je $g = \langle g_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$ jako rastući niz takav da je*

$$g_\xi <_I f_\xi \leqslant_I g_{\xi+1}$$

za svako $xi < \lambda$. Tada je i niz f jako rastući.

Neka su Z_ξ, $\xi < \lambda$ nula skupovi koji podržavaju jaki rast niza g. Dalje, za proizvoljno $\xi < \lambda$ neka je $W_\xi \in I$ nula skup koji podržava sendvič

$$g_\xi <_I f_\xi \leqslant_I g_{\xi+1},$$

tj.
$$W_\xi = \{a \in A \mid g_{\xi+1}(a) < f_\xi(a) \leqslant g_\xi(a)\}.$$
Sasvim lako se proverava da skupovi

$$Y_\xi = W_\xi \cup Z_\xi \cup Z_{\xi+1}, \quad \xi < \lambda$$

podržavaju jaki rast niza f.

Kako bismo pojednostavili notaciju, nadalje ćemo dodatno podrazumevati da je I ideal (pravi ukoliko se drugačije ne naglasi) ideal nad A, λ regularan kardinal takav da je

$$|A| < \lambda < \min A$$

i da je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ $<_I$-rastući niz u $\prod A$. Sledeći pojmovi imaju važno mesto u PCF teoriji:

1. Neka je $\kappa < \lambda$ regularan kardinal. Kažemo da niz f ima $(*)_\kappa$ svojstvo ukoliko f ima strogo rastući podniz dužine κ.

2. Kažemo da niz f ima BPP_κ svojstvo (bounding projection property) ako za svaki niz $S = \langle S_a \mid a \in A \rangle$ skupova ordinala takvih da je $|S(a)| < \kappa$ i da je niz f $<_I$-ograničen funkcijom sup_of_S definisanom sa

   $$\text{sup\_of\_}S(a) = \sup S_a, \quad a \in A,$$

   postoji $\xi < \lambda$ tako da je funkcija $\text{proj}(f_\xi, S)$ definisana sa

   $$\text{proj}(f_\xi, S)(a) = \min(S_a \setminus f(a)), \quad a \in A$$

   $<_I$-majoranta niza f.

Vezu između ovih pojmova i tačnih majoranti daje nam sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza.

10.1.5 Teorema *Neka je I ideal nad skupom regularnih kardinala A, $\lambda > |A|^+$ regularan kardinal i neka je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ $<_I$-rastući niz funkcija iz ${}^A\mathrm{Ord}$. Tada su za svaki regularan kardinal κ iz intervala $[|A|^+, \lambda]$ sledeći iskazi ekvivalentni:*

1. *f zadovoljava $(*)_\kappa$;*
2. *f zadovoljava BPP_κ;*
3. *f ima tačnu majorantu g takvu da*

$$\{a \in A \mid \mathrm{cf}\, g(a) < \kappa\} \in I.$$

Prelazimo na opis dovoljnog uslova koji obezbeđuje $(*)_\kappa$. Za ovo nam je potreban sledeći kombinatorni princip, tzv. *club pogađanje*:

Neka je $S \subseteq \lambda$ stacionaran skup. Niz skupova

$$\langle C_\delta \mid \delta \in S \rangle,$$

pri čemu je C_δ club u δ, je club pogađanje ako za svaki club $C \subseteq \lambda$ postoji $\delta \in S$ tako da je $C_\delta \subseteq C$.

10.1.6 Teorema *Neka je κ regularan kardinal. Ako je λ kardinal takav da je $\mathrm{cf}\,\kappa \geqslant \kappa^{++}$, onda svaki stacionarni skup*

$$S \subseteq S^\lambda_\kappa = \{\delta \in \lambda \mid \mathrm{cf}\,\delta = \kappa\}$$

ima club pogađanje $\langle C_\delta \mid \delta \in S \rangle$.

Dokaz

Tvrđenje ćemo dokazati u slučaju kada je κ neprebrojiv. Za slučaj $\kappa = \omega$ čitaoca upućujemo na teoremu 2.5 u [82].

Neka je $S \subseteq S^\lambda_\kappa$ proizvoljan stacionaran skup. Fiksirajmo niz

$$C = \langle C_\delta \mid \delta \in S \rangle$$

takav da je C_δ club u δ kardinalnosti κ za svako $\delta \in S$. Za proizvoljan club $E \subseteq \lambda$ definišimo niz

$$C_E = \langle C_\delta \cap E \mid \delta \in S \cap E' \rangle,$$

pri čemu je

$$E' = \{\delta \in E \mid E \cap \delta \text{ je neograničen u } \delta\}$$

skup tačaka akumulacije skupa E. Očigledno je $E' \subseteq E$ takođe club. Niz C_E je definisan na $S \cap E'$ kako bi se obezbedilo da $C_\delta \cap E$ bude club u δ.

Tvrdimo da je C_E club pogađanje za neko E. Teorema zahteva da je club pogađanje definisano na celom S, što se trivijalno postiže ukoliko je definisan na stacionarnom podskupu - u preostalim tačkama se proizvoljno definiše.

Pretpostavimo suprotno. Tada za svaki club $E \subseteq \lambda$ postoji club $D_E \subseteq \lambda$ koji se ne pogađa nizom C_E. Drugim rečima, za svaki ordinal $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E'$ imamo da

$$C_\delta \cap E \nsubseteq D_e.$$

Stoga transfinitnom indukcijom možemo definisati inkluzijski opadajući niz clubova $\langle E_\alpha \mid \alpha < \lambda\kappa^+$ u λ tako da važi:

1. $E_0 = \lambda$;
2. $E_\alpha = \bigcup \{E_\xi \mid \xi < \alpha\}$ za granični $\alpha < \kappa^+$;
3. $E_{\alpha+1} = (E_\alpha \cap D_{E_\alpha})'$.

Neka je

$$E = \bigcap \{E_\alpha \mid \alpha < \kappa^+\}.$$

Kako je $\operatorname{cf} \lambda \geqslant \kappa^{++}$, E je club u λ. Kontradikciju izvodimo na sledeći način: neka je $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E$ proizvoljno. Tada postoji $\alpha < \kappa^+$ tako da je

$$C_\delta \cap E = C_\delta \cap E_\alpha,$$

jer skupovi E_α inkluzijski opadaju i $|C_\delta| = \kappa$. Dakle, za svako $\beta > \alpha$ imamo da je
$$C_\delta \cap E = C_\delta \cap E_\beta,$$
pa posebno i u slučaju $\beta = \alpha + 1$. Međutim, $\delta \in S^\lambda_\kappa \cap E_{\alpha+1}$, pa mora biti
$$C_\delta \cap E_\alpha \nsubseteq E_{\alpha+1};$$
kontradikcija. □

10.1.7 Teorema *Neka je I pravi ideal nad A, κ i λ regularni kardinali takvi da je $\kappa^{++} < \lambda$ i neka je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \lambda \rangle$ $<_I$-rastući niz funckija u ${}^A\mathrm{Ord}$ takav da važi sledeće:*

Za svaki ordinal $\delta < \lambda$ kofinalnosti κ^{++} postoji club $E_\delta \subseteq \delta$ takav da je za neko $\delta' \geqslant \delta$ iz λ
$$\sup\{f_\xi \mid \xi \in E_\delta\} <_I f_{\delta'}. \tag{10.1}$$
Tada f zadovoljava $(*)_\kappa$.

Dokaz

Neka je $S = S^{\kappa^{++}}_\kappa$ i neka je $\langle C_\alpha \mid \alpha \in S \rangle$ club pogađanje za S. Neka je U neograničen podskup od λ. Tražimo $X_0 \subseteq U$ $<$-tipa κ takav da je $\langle f_\xi \mid \xi \in X_0 \rangle$ jako rastući. U tom cilju prvo definišemo neprekidan (sadrži granične tačke) rastući niz $\langle \xi_i \mid i < \kappa^{++} \rangle$ u λ rekurzivno na sledeći način:

- ξ_0 je proizvoljan ordinal u λ;
- $\xi_i = \sup\{\xi_j \mid j < i\}$ u slučaju graničnog i;
- Za svako $\alpha \in S$ definišimo funkciju h_α sa
$$h_\alpha(a) = \sup\{f_{\xi_j}(a) \mid j \leqslant i \wedge j \in C_\alpha\}, \quad a \in A. \tag{10.2}$$
Pitamo se da li postoji ordinal $\sigma > \xi_i$ u λ takav da je $h_\alpha <_I f_\sigma$. Ukoliko je odgovor pozitivan, neka je σ_α najmanji takav ordinal. U suprotnom, neka je $\sigma_\alpha = \xi_i + 1$. Kako je $\lambda > \kappa^{++}$ regularan, možemo definisati ξ_{i+1} kao najmanji ordinal u U takav da je
$$\xi_{i+1} > \sup\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in S\}.$$

Iz konstrukcije sledi da je

$$h_\alpha <_I f_{\xi_{i+1}}$$

ukoliko je odgovor za h_α pozitivan. Skup

$$D = \xi_i \mid i < \kappa^{++}\}$$

je zatvoren i njegov tip uređenja je κ^{++}. Neka je

$$\delta = \sup D.$$

Tada je D club u $\delta < \lambda$ i $\operatorname{cf} \delta = \kappa^{++}$. Po pretpostavci postoji club $E_\delta \subseteq \delta$ takav da važi (10.1). Otuda za neko $\delta' < \lambda$ imamo da je

$$\sup\{f_\xi \mid \xi \in E_\delta\} <_I f_{\delta'}. \tag{10.3}$$

Primetimo da je $D \cap E_\delta$ club u δ, odakle sledi da je i

$$C = \{i \in \kappa^{++} \mid \xi_i \in E_\delta\}$$

takođe club. Kako je $\langle C_\alpha \mid \alpha \in S\rangle$ club pogađanje, za neko $\alpha \in S$ je $C_\alpha \subseteq C$. Sada (10.3) povlači da je

$$\sup\{f_{\xi_i} \mid i \in C_\alpha\} <_I f_{\delta'}. \tag{10.4}$$

Neka je $N_\alpha \subseteq C_\alpha$ skup onih $i \in C_\alpha$ za koje je $C_\alpha \cap i$ ograničen u i. Pokažimo da je niz

$$\langle f_{\xi_i} \mid i \in N_\alpha\rangle$$

jako rastući. Kako $\xi_{i+1} \in U$ za svako i, sendvič argument će nam obezbediti jaki rast niza $\langle f_\alpha \mid \alpha \in U\rangle$, a time i tvrđenje u celini.

Za ovo je dovoljno pokazati da za svako $i < j \in C_\alpha$ važi

$$\sup\{f_{\xi_k} \mid k \leqslant i \wedge k \in C_\alpha\} <_I f_{\xi_j}.$$

Ovo neposredno sledi iz definicije ξ_{i+1}: pitamo se da li je $h_\alpha <_I$ dominirano nekim f_σ. Odgovor je pozitivan, jer je $f_{\delta'}$ jedna takva majoranta.

$\square$

10.1.8 Posledica *Neka je I pravi ideal nad skupom regularnih kardinala A i neka je λ regularan kardinal takav da je $\prod A/I$ λ-usmeren. Ako je $\langle g_\xi \mid \xi < \lambda\rangle$ proizvoljan niz u $\prod A$, onda postoji $<_I$-rastući niz f dužine λ u $\prod A/I$ takav da je*

$$g_\xi <_I f_{\xi+1}, \quad \xi < \lambda$$

i da f zadovoljava $(*)_\kappa$ za svaki regularan kardinal κ takav da je $\kappa^{++} < \lambda$ i da

$$\{a \in A \mid a \leqslant \kappa^{++}\} \in I.$$

Dokaz

Niz f konstruišemo rekurzivno na sledeći način:

1. f_0 je proizvoljna funkcija u $\prod A$;
2. $f_{\xi+1}$ je proizvoljna funkcija u $\prod A$ koja $<$-dominira i f_ξ i g_ξ;
3. Neka je $\delta < \lambda$ granični ordinal. Razlikujemo dva slučaja:
   (a) Neka je $\mathrm{cf}\,\delta = \kappa^{++}$, pri čemu je κ regularan, $\kappa^{++} < \lambda$ i $a \in A \mid a \leqslant \kappa^{++} \in I$. Tada fiksirajmo club $E_\delta \subseteq d$ čiji je tip uređenja κ^{++} i definišimo

   $$f_\delta = \sup\{f_i \mid i \in E_\delta\},$$

   tj. $f_\delta(a) = \sup\{f_i(a) \mid i \in E_\delta\}$. Tada je $f_\delta(a) < a$ za svako $a > \kappa^{++}$, tj. f_δ $<_I$-dominira svako f_ξ, $\xi < \delta$.

   (b) U suprotnom, neka je f_δ proizvoljna $\leqslant_i$ majoranta skupa $\{f_\xi \mid \xi < \delta\}$ u $\prod A$, koja postoji na osnovu λ-usmerenosti.

Prethodna lema obezbeđuje da konstruisani niz f ima tražene osobine.

$\square$

Za proizvoljan skup kardinala X neka je

$$X^{(+)} = \{\alpha^+ \mid \alpha \in X\}.$$

10.1.9 Teorema *Neka je μ singularan kardinal. Tada postoji club $C \subseteq \mu$ takav da je*

$$\mu^+ = \operatorname{tcf}(\prod C^{(+)}/J^{bd}),$$

pri čemu je J^{bd} ideal ograničenih podskupova od $C^{(+)}$.

Dokaz

Tvrđenje ćemo dokazati u slučaju kada je μ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti. Za dokaz slučaja kada je $\operatorname{cf} \mu = \aleph_0$ videti teoremu 4.15 u [82].

Neka je $C_0 \subseteq \mu$ club graničnih kardinala takav da je $|C_0| = \operatorname{cf} \mu$ i da je $\operatorname{cf} \mu < \min C_0$. Odavde sledi da su sve granične tačke skupa C_0 singularni kardinali, pa bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da su svi elementi skupa C_0 singularni kardinali.

Pokažimo da je $\prod C^{(+)}/J^{bd}$ μ^+-usmeren. Zaista, neka je $F \subseteq \prod C^{(+)}$ kardinalnosti $< \mu$ i neka je

$$h(a) = \sup\{f(a) \mid f \in F\}$$

za svako $a \in C^{(+)}$ koje je iznad $|F|$ (kako bi obezbedili da $h(a) \in a$) i neka je na manjim a-ovima h proizvoljno definisano. Lako se vidi da je $h <_{J^{bd}}$ majoranta skupa F odakle imamo μ-usmerenost. Što se tiče μ^+-usmerenosti, proizvoljan $F \subseteq \mu$ kardinalnosti μ možemo predstaviti kao uniju $< \operatorname{cf} \mu$ skupova kardinalnosti $< \mu$. Svaki od ovih skupova ima $<_{J^{bd}}$ majorantu, a kako majoranti imamo $\operatorname{cf} \mu < \mu$, zbog μ-usmerenosti i skup majoranti ima $<_{J^{bd}}$ majorantu.

Iz μ^+ ograničenosti sledi da u $\prod C^{(+)}$ postoji $<_{J^{bd}}$-rastući niz $f = \langle f_\xi \mid \xi < \mu^+ \rangle$ koji zadovoljava $(*)_\kappa$ za svaki regularan kardinal $\kappa < \mu$. Odavde sledi da f ima tačnu majorantu $h : C_0^{(+)} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ takvu da je

$$\{a \in C_0^{(+)} \mid \operatorname{cf} h(a) < \kappa\} \in J^{bd} \tag{10.5}$$

za svaki regularan kardinal $\kappa < \mu$. Možemo pretpostaviti da je $h(a) \leqslant a$ za svako $a \in C_0^{(+)}$, jer je identička funkcja $<_{J^{bd}}$-majoranta niza f.

Pokažimo da skup

$$\{\alpha \in C_0 \mid h(\alpha^+) = \alpha^+\}$$

sadrži club. Pretpostavimo suprotno, neka postoji stacionaran $S \subseteq C_0$ takav da je

$$(\forall \alpha \in S) h(\alpha^+) < \alpha^+.$$

Kako je C_0 skup singularnih kardinala, imamo da je

$$\forall \alpha \in S) \mathrm{cf}\, \hat{X}(\alpha^+) < \alpha,$$

pa je po Fodorovoj teoremi $\mathrm{cf}\, h(\alpha^+)$ ograničeno sa nekim $\kappa < \mu$ za stacionarno mnogo $\alpha \in S$, što je u kontradikciji sa (10.5).

Ovim smo pokazali da postoji club $C \subseteq C_0$ takav da je

$$(\forall \alpha \in C) h(\alpha^+) = \alpha^+.$$

Tvrdimo da je

$$\mu^+ = \mathrm{tcf}(\prod C^{(+)}/J^{bd}).$$

No ovo je neposredna posledica činjenice da je $h \restriction C^{(+)}$, koja je identička funkcija, tačna majoranta niza

$$\langle f_\xi \restriction C^{(+)} \mid \xi < \mu + \rangle$$

koji je $<_{J^{bd}}$-rastući i dužine μ^+. $\square$

10.2 Silverova teorema

Kao ilustraciju primene teorije tačnih majoranti navodimo dokaz Silverove teoreme. U formulaciji Silverove teoreme koristili smo gimel funkciju

$$\kappa \mapsto \kappa^{\mathrm{cf}\, \kappa}.$$

Originalna Silverova teorema se dobija korišćenjem predstavljanja kardinalnog stepenovanja preko gimel funkcije (Jech i Bukovsky 1965., videti npr [38]).

10.2.1 Silverova teorema *Neka je κ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti takav da postoji stacionaran skup kardinala $S \subseteq \kappa$ takav da je $\delta^{\mathrm{cf}\,\kappa} = \delta^+$ za svako $\delta \in S$. Tada je i*

$$\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} = \kappa^+.$$

Dokaz

Kao što smo u prethodnoj sekciji videli, postoji club $C \subseteq \kappa$ takav da je

$$\mathrm{tcf}(\prod C^{(+)}/J^{bd}) = \kappa^+.$$

Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $S = S \cap C$, pa na osnovu prethodnog imamo da je

$$\mathrm{tcf}(\prod S^{(+)}/J^{bd}) = \kappa^+.$$

Neka je $f = \langle f_\xi \mid \xi < \kappa^+ \rangle$ J^{bd}-rastući kofinalan niz u $\prod S^{(+)}/J^{bd}$.

Kako je $\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} = \lambda^+$ za svako $\lambda \in S$, postoji kodiranje svih parova oblika $\langle \lambda, X \rangle$, $X \in [\lambda]^{\mathrm{cf}\,\kappa}$, ordinalima iz λ^+. Stoga svaki $X \in [\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}$ možemo kodirati funkcijom $h_X \in \prod S^{(+)}$, pri čemu je $h_X(\lambda^+)$ kôd skupa $X \cap \lambda$. Dakle, za $X \neq Y$ funkcije h_X i h_Y su skoro disjunktne. Kako je $h_X <_{J^{bd}} f_\xi$ za neko $\xi < \kappa^+$, dovoljno je pokazati da važi sledeće pomoćno tvrđenje:

10.2.2 *Za svako $g \in \prod S^{(+)}$ skup*

$$F = \{X \in [\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa} \mid h_X <_{J^{bd}} g\}$$

je kardinalnosti $\leqslant \kappa$.

Pretpostavimo suprotno, neka je $|F| \geqslant \kappa^+$. Za svako $\delta \in S$ fiksirajmo enumeraciju od $g(\delta^+) \in \delta^+$ čiji je tip uređenja $\leqslant \delta$. Preko ove enumeracije $h_X(\delta^+)$ može se posmatrati kao ordinal $k_X(\delta) < \delta$ kad god je $h_X(\delta^+) < g(\delta^+)$. Na ovaj način je za svako $X \in F$ funkcija h_X prevedena u regresivnu funkciju na nekom stacionarnom podskupu od S.

Po Fodorovoj teoremi, postoji stacionaran $S_X \subseteq S$ na kome je funkcija k_X ograničena nekim $\delta_X < \kappa$. Kako podskupova od S ima

$$2^{\operatorname{cf}\kappa} < \kappa,$$

postoje $F_0 \subseteq F$ kardinalnosti κ^+, stacionaran $S_0 \subseteq S$ i $\delta_0 \in S_0$ tako da je $S_X = S_0$ i $\delta_X = \delta_0$ za svako $X \in F_0$. Dalje, za pomenutu funkciju prevoda, koja $\delta \in S_0$ slika u odgovarajući ordinal u δ_0 i koja indirektno kodira $X \cap \delta$, možemo pretpostaviti da je nezavisna od izbora $X \in F_0$, pošto takvih funkcija ima ne više od $\delta_0^{\operatorname{cf}\kappa} = \delta_0^+$. No ovo je kontradiktorno jer funkcija prevoda za h_X potpuno određuje skup

$$X = \bigcup \{X \cap \delta \mid \delta \in S_0\}.$$

□

10.3 Svojstva pcf funkcije

U ovoj kratkoj sekciji navodimo samo ona svojstva pcf funkcije koja se direktno koriste u dokazu Shelahove teoreme. Za dokaz većine od njih potreban je značajan dodatni razvoj PCF teorije, koji zbog popriličnog obima u mnogome otežava čitanje, te ga ovde izostavljamo. Detaljna ekspozicija je data u [1] i [82], s tim da smo kod svakog nedokazanog tvrđenja dali i konkretan pointer na odgovarajuće mesto u navedenim člancima.

10.3.1 Definicija Skup *mogućih kofinalnosti* proizvoda $\prod A$ definišemo sa

$$\operatorname{pcf}(A) = \{\operatorname{cf}(\prod A/D) \mid D \text{ je ultrafilter nad } A\}.$$

Navedimo prvo najelementarnija svojstva pcf funkcije:

10.3.2 Teorema *Neka su A i B skupovi regularnih kardinala. Tada važi:*

1. $A \subseteq \mathrm{pcf}(A)$;
2. *Ako je* $A \subseteq B$, *onda je* $\mathrm{pcf}(A) \subseteq \mathrm{pcf}(B)$;
3. $\mathrm{pcf}\,(A \cup B) = \mathrm{pcf}(A) \ \cup \ \mathrm{pcf}(B)$;
4. *Ako je* $B \subseteq A$, *onda je* $\mathrm{pcf}(A) \setminus \mathrm{pcf}(B) \subseteq \mathrm{pcf}(A \setminus B)$;
5. *Ako je* A *konačan, onda je* $A = \mathrm{pcf}(A)$;
6. *Ako je* A *beskonačan i ako je* B *konačan podskup od* A, *onda je* $\mathrm{pcf}(A) = B \cup \mathrm{pcf}(A \setminus B)$;
7. $\min A = \min \mathrm{pcf}(A)$;
8. *Ako je* A *beskonačan, onda* A *i* $\mathrm{pcf}(A)$ *imaju istih prvih* ω *članova.*

Dokaz

1. Za proizvoljno $x \in A$ uočimo glavni ultrafilter D generisan sa $\{x\}$. Tada je $\prod A/D \cong x$ (kao uređenja), pa je cf $\prod A/D = \mathrm{cf}\ x = x$, odakle po definiciji sledi da $x \in A$.

2. Neka je D ultrafilter nad A i neka je E ultrafilter nad B koji produžuje D. Pokažimo da je cf $\prod\limits_D A = \mathrm{cf} \prod B/E$. S jedne strane, neka je niz $\langle f_{\xi_D} \mid \xi < \kappa \rangle$ kofinalan u $\prod A/D$ i neka je

$$f^*_\xi(x) = \begin{cases} f_\xi(x) & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \in B \setminus A \end{cases} .$$

Tada je niz $\langle f^*_{\xi_E} \mid \xi < \kappa \rangle$ kofinalan u $\prod B/E$. Zaista, neka je $f \in \prod B$ proizvoljno. Tada $f \restriction A \in \prod A$, pa postoji $\alpha < \kappa$ tako da je $g \restriction A \leqslant_D f_\alpha$, tj. da

$$X = \{x \in A \mid g(x) \leqslant f_\alpha(x)\} \in D.$$

Pošto je $D \subseteq E$, imamo da

$$X \subseteq \{x \in B \mid g(x) \leqslant f^*_\alpha(x)\} \in E,$$

tj. $g \leqslant_E f^*_\alpha$.

S druge strane, neka je niz $\langle f_{\xi_E} \mid \xi < \kappa \rangle$ kofinalan u $\prod B/E$. Tvrdimo da je niz $\langle f_\xi \restriction A_D \mid \xi < \kappa \rangle$ kofinalan u $\prod A/D$. Zaista, neka je $g \in \prod A$ proizvoljno i neka je $g^* \in \prod B$ ma koja funkcija koja produžuje g. Tada postoji $\alpha < \kappa$ tako da je $g^* \leqslant_E f_\alpha$, tj.

$$X = \{x \in B \mid g^*(x) \leqslant f_\alpha(x)\} \in E.$$

Pošto je D ultrafilter nad A i da $X \cap A \in E$, mora biti i $X \cap A \in D$, odakle sledi da

$$X \cap A \subseteq \{x \in A \mid g(x) \leqslant (f_\alpha \restriction A)(x)\} \in D,$$

tj. $g \leqslant_D f_\alpha \restriction A$.

3. Na osnovu prethodne tačke sledi da je

$$\operatorname{pcf}(A), \operatorname{pcf}(B) \subseteq \operatorname{pcf}(A \cup B),$$

pa je i

$$\operatorname{pcf}(A) \cup \operatorname{pcf}(B) \subseteq \operatorname{pcf}(A \cup B).$$

S druge strane, neka je E ultrafilter nad $A \cup B$. Tada $A \in E$ ili $B \in E$. Ako $A \in E$, onda je $D = \{A \cap X \mid X \in E\}$ ultrafilter nad A, pa sasvim slično kao u tački 2 pokazujemo da je $\operatorname{cf} \prod A/D = \operatorname{cf} \prod (A \cup B)/E$.

4. Neka $\kappa \in \operatorname{pcf}(A) \setminus \operatorname{pcf}(B)$. S obzirom da $\kappa \in \operatorname{pcf}(A)$, postoji ultrafilter D nad A takav da je

$$\operatorname{cf} \prod A/D = \kappa.$$

Pošto je $A = (A \setminus B) \cup B$ (jer je $B \subseteq A$), imamo da ili $A \setminus B \in D$, ili $B \in D$. Ako $B \in D$, onda je skup

$$E = \{X \cap B \mid X \in D\}$$

ultrafilter nad B i, na isti način kao u tački 2, bismo pokazali da je

$$\operatorname{cf} (\prod B/E) = \kappa,$$

što je u suprotnosti sa činjenicom da $\kappa \notin \mathrm{pcf}\, B$. Dakle, mora biti $A \setminus B \in D$. Sada je skup

$$D^* = \{X \cap (A \setminus B) \mid X \in D\}$$

ultrafilter nad $A \setminus B$, pa na isti način kao u tački 2, zaključujemo da je $\mathrm{cf} \prod(A \setminus B)/D^* = \kappa$, tj. da $\kappa \in \mathrm{pcf}\,(A \setminus B)$.

5. Direktno sledi iz činjenice da nad konačnim skupom postoje isključivo glavni filteri.

6. Imamo da je

$$\begin{aligned}\mathrm{pcf}\,(A) &= \mathrm{pcf}\,(A \setminus B) \cup \mathrm{pcf}\,(B) \quad \text{(po tački 3)}\\ &= \mathrm{pcf}\,(A \setminus B) \cup B \quad \text{(po tački 5).}\end{aligned}$$

7. Neka je $a = \min A$. Definišimo niz $\langle f_\xi \mid \xi < a\rangle$ u $\prod A$ sa

$$f_\xi(b) = \xi, \quad b \in A.$$

Primetimo da je ovaj niz strogo rastući u ultrasteptenu $\prod A/D$ bez obzira na izbor ultrafiltera D nad A, odakle sledi da je

$$\mathrm{cf}\,(\prod A/D) \geqslant a,$$

a time i $a = \min \mathrm{pcf}\,(A)$.

8. Primetimo da je dovoljno pokazati da je za svako $\lambda \in \mathrm{pcf}\,(A) \setminus A$ skup $\lambda \cap A$ beskonačan. Pretpostavimo suprotno, neka je za neko $\lambda \in \mathrm{pcf}\,(A) \setminus A$ skup $\lambda \cap A$ konačan i neka je $a = \min(A \setminus \lambda)$. Kontradikciju izvodimo tako što ćemo pokazati da je $a = \lambda$.

Iz definicije a sledi da je $\lambda \leqslant a$ i za svako $b \in A$ imamo da je $b < \lambda$, odakle sledi da je $A \cap \lambda = A \cap a$. Sada po tački 6 imamo da

$$\lambda \in \mathrm{pcf}\,(A) = \mathrm{pcf}\,(A \setminus a) \cup (A \cap \lambda),$$

pa je $a \leqslant \lambda$ po tački 7, a time i $a = \lambda$. □

Za skup regularnih kardinala A kažemo da je *progresivan* ukoliko je $|A| < \min A$.

10.3.3 λ-usmerenost *Neka je A progresivan interval regularnih kardinala. Tada je* $\mathrm{pcf}(A)$ *interval regularnih kardinala.*

Napomena

Videti teoremu 3.4 u [1] □

Za proizvoljan skup A regularnih kardinala definišemo ideal $J_{<\lambda}[A]$ sa

$$J_{<\lambda}[A] = \{X \subseteq A \mid \mathrm{pcf}\,(X) \subseteq \lambda\}.$$

Drugim rečima, $X \in J_{<\lambda}[A]$ ako i samo ako za svaki ultrafilter D nad A takav da $X \in D$ imamo da je

$$\mathrm{cf}\,(\prod A/D) < \lambda.$$

Primetimo da je $J_{<\lambda}[A]$ pravi ideal u slučaju kad $\lambda \in \mathrm{pcf}\,(A)$. Ukoliko je jasno o kome skupu A se radi, umesto $J_{<\lambda}[A]$ piše se kratko $J_{<\lambda}$.

10.3.4 Teorema reprezentacije

Ako je μ singularan kardinal neprebrojive kofinalnosti, onda postoji club $C \subseteq \mu$ takav da je

$$\mathrm{tcf}(\prod C^{(+)}/J_{<\mu}[C^{(+)}]) = \mu^+,$$

pri čemu je $C^{(+)} = \{\kappa^+ \mid \kappa \in C\}$. Posebno, $\max\,\mathrm{pcf}(C^{(+)}) = \mu^+$.

Napomena

Videti teoremu 4.12 u [1], kao i leme 8.13, 8.14 i posledicu 8.15 u [82]. □

10.3.5 *Neka je μ singularan kardinal i neka je κ beskonačan kardinal takav da je interval A regularnih kardinala iz (κ, μ) kardinalnosti $\leqslant \kappa$. Tada je*

$$\mathrm{cf}\,\langle [\mu]^\kappa, \subseteq \rangle = \max\,\mathrm{pcf}(A).$$

Napomena

Videti teoremu 5.11 u [1]. □

10.3.6 *Neka je A progresivan skup regularnih kardinala. Tada ne postoji skup $B \subseteq \mathrm{pcf}(A)$ takav da je $|B| = |A|^+$ i da je*

$$b > \max \mathrm{pcf}(B \cap b)$$

za svako $b \in B$.

Napomena

Videti dokaz teoreme 6.4 u [1]. □

10.4 Dokaz Shelahove teoreme

U ovoj sekciji ćemo dokazati centralni rezultat pcf teorije:

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \max\{(2^{\aleph_0})^+, \aleph_{\omega_4}\}.$$

Što se samog rezultata tiče, poznato je da za progresivan skup kardinala A kardinalnost $\mathrm{pcf}(A)$ ne prelazi $2^{|A|}$, a otvoreno je pitanje da li je $|\mathrm{pcf}(A)| \leqslant |A|$.

10.4.1 Teorema *Neka je A interval regularnih kardinala takav da je $|A| < \min A$. tada je*

$$|\mathrm{pcf}(A)| < |A|^{+4}.$$

Dokaz

Suprotno tvrđenju teoreme, pretpostavimo da je A progresivan interval regularnih kardinala takav da je $|\mathrm{pcf}(A)| \geqslant |A|^{+4}$ i označimo kardinalni broj skupa A sa ρ. Konstruisaćemo niz kardinala B u $\mathrm{pcf}(A)$ dužine ρ^+ takav da je $b > \max \mathrm{pcf}(B \cap b)$ za svako $b \in B$, i na taj način dobiti kontradikciju sa 10.3.6.

Neka je $S = S^{\rho^{+3}}_{\rho^+}$ skup ordinala u ρ^{+3} kofinalnosti ρ^+. Izaberimo club pogađajući niz $\langle C_k \mid k \in S\rangle$. Tada za svaki club $E \subseteq \rho^{+3}$ postoji $k \in S$ tako da je $C_k \subseteq E$.

Posmatrajmo kardinal $\sup A$ i neka je σ ordinal takav da je

$$\sup A = \aleph_\sigma.$$

Kako je $\mathrm{pcf}(A)$ interval regularnih kardinala (na osnovu 10.3.3) i kako je po pretpostavci $|\mathrm{pcf}(A)| \geqslant \rho^{+4}$, svaki regularan kardinal iz skupa $\{\aleph_{\sigma+\alpha} \mid \alpha < \rho^{+4}\}$ pripada skupu $\mathrm{pcf}(A)$.

Nameravamo da definišemo zatvoren skup $D \subseteq \rho^{+4}$ čiji je tip uređenja ρ^{+3}. Traženi nemoguć niz B dužine ρ^+ će biti podskup skupa $\{\aleph^+_{\sigma+\alpha} \mid \alpha \in D\}$. Konstrukciju vršimo transfinitnom rekurzijom na sledeći način:

1. $\alpha_0 = 0$;

2. Ako je $i < \rho^{+3}$ granični ordinal veći od 0, onda je

$$\alpha_i = \sup\{\alpha_j \mid j < i\};$$

3. Pretpostavimo da su konstruisani α_j, $j \leqslant i < \rho_{+3}$ i opišimo konstrukciju α_{i+1}. Za svako $k \in S$ neka je

$$e_k = \{\aleph_{\sigma+\alpha_j} \mid j \in C_k \cap (i+1)\}.$$

Tada je

$$e_k^{(+)} = \{\gamma^+ \mid \gamma \in e_k\}$$

skup regularnih kardinala, pa kako imamo ρ^{+3} takvih k, iz regularnosti ρ^{+4} sledi da postoji $\alpha_{i+1} \in \rho^{+4}$ tako da je

$$\max \mathrm{pcf}(e_k^{(+)}) < \aleph_{\sigma+\alpha_{i+1}}$$

za svako $k \in S$ za koje je $\max \mathrm{pcf}(e_k^{(+)}) < \aleph_{\sigma+\rho^{+4}}$.

Dakle, $D = \{\alpha_i \mid i < \rho^{+3}\}$ i neka je $\delta = \sup D$. Tada je $\mu = \aleph_{\sigma+\delta}$ singularan kardinal kofinalnosti ρ^{+3}. Sada, na osnovu teoreme reprezentacije 10.3.4, sledi da postoji club $C \subseteq D$ takav da je

$$\mu^+ = \max \mathrm{pcf}(\{\aleph^+_{\sigma+\alpha} \mid \alpha \in C\}). \tag{10.6}$$

Skup D je izomorfan (kao $\in$-struktura) kardinalu ρ^{+3}, pa se pri tom izomorfizmu skup C transformiše u club $E \subseteq \rho^{+3}$. Drugim rečima,

$$E = \{i \in \rho^{+3} \mid \alpha_i \in C\}.$$

Na osnovu club-pogađanja, postoji $k \in S$ tako da je $C_k \subseteq E$ (napomenimo da je $\langle C_k \mid k \in S\rangle$ club-pogađajući niz). Tvrdimo da skup

$$B = \{\alpha^+_{\sigma+\alpha_j} \mid j \in C'_k\}$$

protivreči 10.3.6, pri čemu smo sa C'_k označili skup onih elemenata skupa C_k koji nisu tačke akumulacije. Primetimo da skupovi C_k i C'_k imaju isti tip uređenja: ρ^+. Dovoljno je pokazati da za svako $i \in C_k$ važi

$$\max \operatorname{pcf}(\{\alpha^+_{\sigma+\alpha_j} \mid j \in C_k \cap (i+1)\}) < \aleph_{\sigma+\alpha_{i+1}}. \tag{10.7}$$

Razmotrimo treću tačku u konstrukciji niza D. Tada je

$$e^{(+)}_k \subseteq \{\aleph^+_{\sigma+\alpha} \mid \alpha \in C\},$$

pa iz (10.6) sledi da je

$$\max \operatorname{pcf}(e^{(+)}_k) \leqslant \mu^+,$$

odakle sledi (10.7). $\square$

Prethodna teorema ima iznenađujuće posledice. Razmotrimo skup

$$A = \{\aleph_n \mid n \in \omega\}.$$

Na osnovu 10.3.5 je

$$\operatorname{cf}\langle[\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq\rangle = \max \operatorname{pcf}(A).$$

Međutim, $\operatorname{pcf}(A)$ je interval regularnih kardinala veličine $< \aleph_4$, pa ako je $\max \operatorname{pcf}(A) = \aleph_\alpha$, onda je $\alpha < \omega_4$. Stoga je

$$\operatorname{cf}\langle[\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq\rangle < \aleph_{\omega_4}.$$

Ovaj rezultat važi čak i ako je kontinuum veći od $\aleph_{\omega_4}$. Ako je $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$, onda na osnovu prethodnog odmah dobijamo da je

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4}.$$

Uopštavanjem dobijamo sledeću teoremu.

10.4.2 Teorema *Ako je $\aleph_\delta$ singularan kardinal takav da je $\delta < \aleph_\delta$, onda je*

$$\mathrm{cf}\,\langle [\aleph_\delta]^{|\delta|}, \subseteq \rangle < \aleph_{|\delta|^{+4}}.$$

Dokaz

Neka je $|\delta| = \kappa$. Tada je $\kappa < \aleph_\delta$, pa za interval A regularnih kardinala u $(\kappa, \aleph_\delta)$ imamo da je $|A| \leqslant \kappa$ kao i da je A progresivan skup. Na osnovu 10.3.5 sledi da je $\mu = \aleph_\delta$, a time i

$$\mathrm{cf}\,\langle [\aleph_\delta]^{\kappa}, \subseteq \rangle = \max\ \mathrm{pcf}(A).$$

Na osnovu prethodne teoreme sledi da je

$$|\mathrm{pcf}(A)| < |A|^{+4},$$

odakle sledi da je

$$\max\ \mathrm{pcf}(A) < \aleph_{\delta + |A|^{+4}} \leqslant \aleph_{\kappa^{+4}},$$

a time i $\mathrm{cf}\,\langle [\aleph_\delta]^{\kappa}, \subseteq \rangle < \aleph_{\kappa^{+4}}$. □

Neposredna posledica prethodne teoreme je činjenica da za granični ordinal $\delta > 0$ takav da je $|\delta|^{\mathrm{cf}\,\delta} < \aleph_\delta$ važi

$$\aleph_\delta^{\mathrm{cf}\,\delta} < \aleph_{|\delta|^{+4}}.$$

Shelahova PCF teorija je u mnogome promenila pogled na kardinalnu aritmetiku, pokazujući da se i elementarnim sredstvima (bez forsinga i unutrašnjih modela) mogu dobiti izuzetni rezultati. Kako se u razumevanju PCF teorije nigde ne zahteva fino razdvajanje sintakse i semantike, ova teorija postaje, makar principijelno, dostupna širokom krugu čitalaca. Takođe, PCF teorija svedoči i o vitalnosti i značaju ultraproizvoda kao matematičkog koncepta.

Nadamo se da će ovaj kratki pregled omogućiti čitaocu da stekne osnovnu intuiciju o ovoj važnoj matematičkoj teoriji. Zainteresovanima za dalje čitanje preporučujemo članke [1] i [82], koji su dostupni putem interneta.

JAKE AKSIOME BESKONAČNOSTI - SKRAĆENA MAPA

pozicija na Ord	**konsistentska moć**
	“**0 = 1**”
	$\vdots$
	n-ogroman
	$\downarrow$
	ogroman
	$\downarrow$
1. ekstendibilan $\lambda > \lambda$ superkompaktnih	ekstendibilan
	$\downarrow$
1. superkompaktan $\lambda > \lambda$ merljivih	superkompaktan
	$\downarrow$
1. kompaktan (može da bude jednak 1. merljivom ili 1. superkompaktnom)	kompaktan
	$\downarrow$
1. merljiv $\lambda > \lambda$ slabo kompaktnih	merljiv, RV-merljiv, $0^\sharp$
$0^\sharp$ 1. totalno neopisiv 1.slabo kompaktan jako nedostiživ - Π^1_1-neopisiv	$\downarrow$ slabo kompaktan jako nedostiživ
	$\downarrow$
1. jako hiper Mahlo $\lambda > \lambda$ jako Mahlo	jako hiper Mahlo
	$\downarrow$
1. jako Mahlo $\lambda > \lambda$ jako hiper nedostiživih	jako Mahlo
	$\downarrow$
1. jako hiper nedostiživ $\lambda > \lambda$ jako nedostiživih	jako hiper nedostiživ
	$\downarrow$
1. jako nedostiživ RV-merljivi ($\leqslant 2^{\aleph_0}$), realno veliki 1. slabo hiper Mahlo $\lambda > \lambda$ slabo Mahlo 1. slabo Mahlo $\lambda > \lambda$ slabo hiper nedostiživih 1. slabo hiper nedostiživ $\lambda > \lambda$ slabo nedostiživih 1. slabo nedostiživ	jako nedostiživ
ω	

JAKE AKSIOME BESKONAČNOSTI - SKRAĆENA MAPA

hijerarhija teorija po konsistentskoj moći

$\mathrm{ZFC} + \exists\, n$-ogroman
$\downarrow$
$\mathrm{ZFC} + \exists$ ogroman
$\downarrow$
ZFC + Vopenkin princip
$\downarrow$
$\mathrm{ZFC} + \exists$ ekstendibilan
$\downarrow$
$\mathrm{ZFC} + \exists$ superkompaktan
$\downarrow$
$\mathrm{ZFC} + \exists$ kompaktan, $\mathrm{ZFC} + \mathrm{PMEA}$, $\mathrm{ZFC} + \exists$ realno kompaktan kardinal,
ZFC + normalni Mooreovi prostori su metrizabilni
$\downarrow$
ZFCM, $\mathrm{ZFC} + \exists\, \sigma$-aditivna totalna eskstenzija Lebesgueove mere,
$\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0}$ je RV-merljiv, $\mathrm{ZFC} + \neg\,\mathrm{HCS}$

$\downarrow$
ZFC + Lebesgueova mera se može proširiti sa proizvoljnih $2^{\aleph_0}$ skupova,
$\mathrm{ZFC} + c\mathrm{MEA}$, $\mathrm{ZFC} + \exists$ Hausdorffov kardinbal, svojstva Ramseya, Aleksandrova,
Kurepino svojstvo grananja na nedostiživim kardinalima

$\downarrow$
$\mathrm{ZFC} + \mathrm{I}, \mathrm{ZF} + \mathrm{DC}$ + svaki skup realnih brojeva je Lebesgue merljiv+
svaki neprebrojiv skup realnih brojeva sadrži prefektan skup

$\downarrow$
ZF, ZFC, ZFL, $\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{AC}$, $\mathrm{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2$, $\mathrm{ZFC} + \mathrm{WMEA}$
$\downarrow$
PA, $\mathrm{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf}$

Literatura

[1] U.Abraham; M. Magidor, Cardinal arithmetic, preprint 2003

[2] U. Abraham; S Todorcevic, Partition properties of ω_1 compatible with CH, Fund. Math. 152 (1997), no. 2, 165–181.

[3] J. W. Addison, Y. N. Moschovakis, Some consequences of the axiom of definable determinateness, Proc. Acad. Sci. U.S.A. 59, 708–712, 1967.

[4] B. Balcar; W. Glowczyński; T. Jech, The sequential topology on complete Boolean algebras, Fund. Math. 155 (1998), 59-78.

[5] B. Balcar, T. Jech, and T. Pazák. Complete c.c.c. boolean algebras, the order sequential topology, and a problem of von Neumann. preprint, 2003.

[6] J. Barwise, Admissible sets and structures, Springer 1975

[7] J. L. Bell, On the relationship between weak compactness in $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega}$, $\mathcal{L}_{\omega_1,\omega_1}$ and restricted second order languages, Arch. Math. Logik Grundlagenforsch, 15, 74–78, 1972.

[8] J. L. Bell, A. B. Slomson, Models and ultraproducts, North–Holland, 1969.

[9] M. Benda, Reduced products and nonstandard logics, J. Symb. Logic 34, 1969, 424–436.

[10] M. Benda, Reduced products, filters and Boolean ultrapowers, Ph.D. Thesis, Univ. of Wisconsin, 1970.

[11] A. Blaszczyk; S. Shelah, Regular subalgebras of complete Boolean algebras, Journal of Symbolic Logic 66 (2001), no. 2, 792–800.

[12] L. Bukovsky, The continuum problem and powers of alephs, Comment. Math. Univ. Carolinae 6, 1965, 125–128.

[13] L. Bukovsky, K. L. Prikry, Some metamathematical properties of measurable cardinals, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. 14, 1966, 95–99.

[14] G. Cantor, Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers (translated by P. E. B. Jourdain; reprinted by Dover Publ., New York), 1915.

[15] C. C. Chang, Descendingly incomplete ultrafilters, Trans. Am. Math. Soc. 126, 1967, 108–118.

[16] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model theory, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1990.

[17] P. J. Cohen, A minimal model for set theory, Bull. Amer. Math. Soc. 69, 1963, 537–540.

[18] P. J. Cohen, The independence of the continuum hypothesis I, II, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963) 1143–1148, 51 (1964) 105–110.

[19] P. J. Cohen Independence results in set theory, in: J. W. Addison, L. Henkin and A. Tarski, eds., The theory of Models, North–Holland 1965, 39–54.

[20] W. W. Comfort, S. Negropontis, The theory of ultrafilters, Springer 1974

[21] H. G. Dales, W. H. Woodin, An introduction to independence for analysts, Cambridge university press 1987.

[22] F. R. Drake, Set theory - an introduction to large cardinals, North–Holland 1974.

[23] W. Easton, Powers of regular cardinals, Ann. of Math. Logic 1 (1970), 139–178

[24] I. Farah; B. Velickovic, Von Neumann's problem and large cardinals, preprint, 2004

[25] I. Farah; B. Velickovic, Combinatorial properties of Maharam algebras, in preparation, 2004

[26] I. Farah; J. Zapletal, Between von Neumann's and Maharam's problem, Mathematical Research Letters, 11 (2004), no. 5-6, 673–684.

[27] W. G. Fleissner, The normal Moore space conjecture and large cardinals, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds, North-Holland 1984, 733–760

[28] D.H. Fremlin. *Measure Theory*, volume 3. Torres–Fremlin, 2002.

[29] D.H. Fremlin, Maharam algebras, preprint, University of Essex, available at web

[30] D.H. Fremlin, Problems. University of Essex, version of April 21, 1994.

[31] S. D. Friedman, Fine structure and class forcing, de Gruyter 2000.

[32] M. Gitik and W. J. Mitchell. Indiscernible sequences for extenders, and the singular cardinal hypothesis. Ann. Pure Appl. Logic, 82 (1996), no. 3, 273–316.

[33] M. Gitik and S. Shelah. More on real-valued measurable cardinals and forcing with ideals. Israel J. Math., 124 (2001), 221–242

[34] W. Glówczyński, Measures on Boolean algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), no. 3, 845–849.

[35] C. Gray, Iterated forcing from the strategic point of view, PhD dissertation, UC Berkeley, 1982.

[36] T. Jech, More game theoretic properties of Boolean algebras, Ann. Pure Appl. Logic, 26 (1984), 11-29.

[37] T. Jech, Multiple forcing, Cambridge university press, 1986.

[38] T. Jech, *Set Theory*, The Third Millennium Edition, revised and expanded Series, Springer Monographs in Mathematics, 3rd rev. ed., 2003.

[39] R. Jensen, Definable sets of minimal degree. in *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory*, ed Y. Bar-Hillel, 122–128, North Holland Publ. Co. Amsterdam (1970)

[40] R. Jensen, The fine structure of the constructible hierarchy, Ann. Math. Logic 4(1972), 229-308

[41] R. Jensen, R. Solovay, Some applications of almost disjoint sets, Mathematical logic and foundation of set theory, North Holland 1970, 84–104

[42] A. Jovanović, Some more details in Rudin Keilser order, Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, serie II, numero 28, anno 1992.

[43] A. Jovanović, Uniform measures over continuum, Teoria della misura e sue applicazioni, atti del convegno, Trieste (1980), 127–129

[44] A. Jovanović, On real valued measures, Open Days in Model Theory and Set Theory, Proc. of a Conference held at Jadwisin, Poland (1981), W. Guzicki, W. Marek, A. Pelc and C. Rauszer, eds, 145–152

[45] A. Jovanović, Real valued measurability, some set–theoretic aspects, in Handbook of measure theory, E. Pap editor, Elsevier 2002, pp 1261–1293.

[46] A. Jovanović, A. Perović, Contrapunctus of the continuum problem and the measure problem, to appear

[47] H. Judah; S. Shelah, Souslin forcing. Journal of Symbolic Logic, 53 (1988), 1182–1207

[48] N.J. Kalton, The Maharam problem. In G. Choquet et al., editors, *Séminaire Initiation à l'Analyse, 28ème Année*, number 18, (1989/89), 1–13

[49] N. J. Kalton; J. W. Roberts, Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions, Trans. Amer. Math. Soc. 278 (1983), no. 2, 803–816

[50] A. Kanamori, The higher infinite, Springer–Verlag 1994.

[51] A. S. Kechris, Classical descriptive set theory, Springer–Verlag 1995.

[52] H. J. Keisler, Ultraproducts of finite sets, Journal of Symbolic Logic, 32, (1967), 47–57

[53] K. Kunen *Set theory. An introduction to independence proofs* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 102. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[54] K. Kunen, Random and Cohen reals, in K. Kunen, J. E. Vaughan, eds, Handbook of set-theoretic topology, North–Holland 1984, 887–912

[55] Đ. Kurepa, Ensembles ordonnes et ramifies, Publ. Math. Univ. Belgrade 4 (1935), 1–138

[56] Đ. Kurepa, Le condition de Souslin et une propriete caracteristique des nombres reels, C. R. Acad. Sci. Paris 231 (1950), 1113–1114

[57] Đ. Kurepa, The cartesian multiplication and the celularity numbers, Publ. Inst. Math (Beograd) 2 (1962), 121–139

[58] M. S. Kurilić, Cohen–stable families of subsets of integers, The journal of symbolic logic, vol 66, no 1, March 2001

[59] M. S. Kurilić, Changing cofinalities and collapsing cardinals in models of set theory, Annals of Pure and Applieed Logic 120 (2003), 225–236

[60] M. S. Kurilić, Independece of Boolean algebras and forcing, Annals of Pure and Applieed Logic 124 (2003), 179–191

[61] M. S. Kurilić, Splitting families and forcing, Annals of Pure and Applieed Logic 145 (2007), 240–251

[62] M. S. Kurilić, A. Pavlović, A consequence of the Proper Forcing Axiom in topology, Publ. Math. Debrecen 65/1–2 (2004), 15–20

[63] A. Levy, Definability in axiomatic set theory, Memoirs Amer. Math. Soc. 57 (1965).

[64] A. Levy, R. Solovay, Measurable cardinals and the continuum hypothesis, Israel J. Math 5 (1967), 234–248.

[65] W. A. J. Luxemburg, Reduced products of the real number system, Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability, Holt Reinbout and Winston, New Yourk 1969

[66] D. Maharam, An algebraic characterization of measure algebras, Annals of Mathematics, 2nd Ser., 48, (1947), no. 1, 154–167

[67] M. Magidor, There are many normal ultrafilters corresponding to a supercompact cardinal, Israel J. Math 9 (1971), 186–192

[68] M. Magidor, On the role of supercompact and extendible cardinals in logic, Israel J. Math 10 (1971), 147–157

[69] M. Magidor, A study on identity crisis, Ann. Math. Logic 10 (1976), no 1, 33–57

[70] M. Magidor, Nonregular ultrafilters, Technical report, 1977

[71] M. Magidor, On the singular cardinal problem. I, Israel J. Math. 28 (1977), no. 1–2, 1–31

[72] On the singular cardinal problem. II, Ann. of Math. (2) 106 (1977), no. 3, 514–547

[73] M. Magidor, Changing cofinality of cardinals, Fund. Math. 99 (1978), no. 1, 61–71

[74] M. Magidor, Precipitous ideals and Σ^1_4 sets, Israel J. Math. 35 (1980), no. 1–2, 109–134

[75] M. Magidor, Reflecting stacionary sets, J. Symbolic Logic 47 (1982), no. 4, 755–771

[76] D. A. Martin, Descriptive set theory: projective sets, Handbook of mathematical logic, North Holland 1977, 783–815

[77] D. A. Martin, R. M. Solovay, A basis theorem for Σ^1_3 sets of reals, Ann. of Math. 89 (1969), 138–159

[78] D. Mauldin, *The Scottish Book, Mathematics of the Scottish Cafe* Birkheuser (1981)

[79] Ž. Mijajlović, An introduction to model theory, University of Novi Sad, Institute of Mathematics, 1987.

[80] Ž. Mijajlović, I. Farah, On the number fo expansions of countable models of first order theories, FILOMAT (Niš), 9:3 (1995), 831–837

[81] A. W. Miller, Descriptive set theory and forcing, Springer–Verlag 1995.

[82] J.D. Monk, Pcf and cardinal arithmetic, preprint 2003

[83] J. R. Munkres, Topology. A first course, Prentice–Hall 1975

[84] J. Mycielski, S. Swierczkowski, On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness, Fund. Math. 54 (1964), 67–71

[85] P. Odifreddi, Classical recursion theory, North–Holland 1989

[86] D. Pincus, R. Solovay, Definability of measures and ultrafilters, J. Symb. Logic 42 (2), 1977, 179–190

[87] A. Perovic, Forcing with propositional Lindenbaum algebras, to appear

[88] K. Prikry, Changing measurable into accessible cardinals, Diss. Math. 68 (1970), 5–52.

[89] K. Prikry, On a problem of Gillman and Keisler, Ann. Math. Logic 2 (1970), 179–187.

[90] K. Prikry, On descendingly incomplete ultrafilters, Cambridge Summer School in Math. Logic, Lecture Notes in Math. 337, 459–488, Springer (1973)

[91] S. Quickert, Forcing and the reals, Ph.D. Thesis, University of Bonn, (2002)

[92] S. Quickert, CH and the Sacks property. Fund. Math., 171 (2002), no. 1, 93–100

[93] G. E. Sacks, Forcing with perfect closed sets, newblock Proc. Sympos. Pure Math. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1971, 331–335.

[94] G. E. Sacks, Countable admissible ordinals and hyperdegrees, Adv. Math. 19 (1976), 213–262.

[95] G. E. Sacks, Higher recursion theory, Perspect. Math. Logic, Springer 1990.

[96] S. Shelah, Proper forcing, Springer–Verlag 1982

[97] S. Shelah, How special are Cohen and random forcing, Israel Journal of Math. 88 (1994) no. 1-3, 159–174

[98] S. Shelah, Cardinal arithmetic, Oxford University Press 1994.

[99] S. Shelah, There may be no nowhere dense ultrafilters. *Logic Colloq. 95*, Proc. of the Annual European Summer Meeting of the ASL, Haifa, Israel, Aug. 1995, eds. Makowsky and Johann, Springer-Verlag, Lec. Notes Logic, vol. 11, (1998), 305–324

[100] S. Shelah, On what I do not understand and have something to say. preprint, Shelah's publication 666

[101] S. Shelah; J. Zapletal, Embeddings of Cohen algebras. Advances in Math., 126(2), (1997), 93–115.

[102] J. R. Shoenfield, The problem of predicativity, Essays on the foundations of mathematics, Magnes Press, 1961, 132–142.

[103] J. R. Shoenfield, Unramified forcing, Proc. Sympos. Pure Math. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1971, 357–382.

[104] J. Silver, A large cardinal in the constructible universe, Fund. Math. 69 (!970), 93–100

[105] J. Silver, Every analytic set is Ramsey, J. Sumbolic Logic 35 (1970), 60–64

[106] J. Silver, Some applications of model theory in set theory, Ann. Math. Logic 3(1971), 45–110

[107] J. Silver, The independence of Kurepa's conjecture and two-cardinal conjectures in model theory, in Axiomatic set theory, Proc. Symp. Pure Math. 13, I (D. Scott, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI 1971, 383–390

[108] J. Silver, The consistency of the GCH with the existence of a measurable cardinal, in Axiomatic set theory, Proc. Symp. Pure Math. 13, I (D. Scott, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, RI 1971, 391–396

[109] J. Silver, The bearing of large cardinals on constructibility, in Morley [1973], 158–182

[110] J. Silver, On the singular cardinals problem, Proc. Int. Congr. Math. Vancouver 1974, 265–268

[111] S. Solecki, Analytic ideals and their applications, Ann. Pure Appl. Logic 99 (1999), no. 1-3, 51–72.

[112] R. M. Solovay, Independence results in the theory of cardinals, Notices. Amer. Math. Soc. 10 (1963), 595, abstract

[113] R. M. Solovay, A nonconstructible Δ^1_3 set of integers, Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 50–75

[114] R. M. Solovay, On the cardinality of Σ^1_2 sets of reals, in Foundations of Mathematics, (J. J. Buloff et al., eds.), Symposium Commemorating Kurt Gödel, Columbus, Ohio, 1966. Springer, New York, 1969, pp. 58-73.

[115] R. M. Solovay, A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. Math. 92 (1970), 1–56

[116] R. M. Solovay, Real-valued measurable cardinals, Axiomatic set theory, D. S. Scott, ed., Proc. Symp. Pure Math., Vol. 13, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971, 397–428

[117] R. M. Solovay, Strongly compact cardinals and the GCH, in Proceedings of the Tarski Symposium (L. Henkin et al., eds.), Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. of California, Berkeley, Calif., 1971. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1974, pp. 365-372.

[118] R. M. Solovay, W. N. Reinhardt, A. Kanamori, Strong axioms of infinity and elementary embeddings, Ann. Math. Logic 13 (1978), no. 1, 73-116.

[119] R. M. Solovay, S. Tennenbaum, Iterated Cohen extensions and Souslins problem, Ann. of Math. (2) 94 (1971), 201-245.

[120] M. Suslin, Probleme 3, Fundamenta Mathematicae 1, 1920, 223

[121] F. D. Tall, Normality versus collectionwise normality, Handbook of Set-Theoretic Topology, K. Kunen and J. E. Vaughan, eds, North-Holland 1984, 685–732

[122] S. Todorčević, Partition problems in topology. Contemporary Math. 84, Providence, R.I. AMS

[123] S. Todorčević, Trees and linearly ordered sets, in Handbook of Set–Theoretic Topology (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.). North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1984, 235-293.

[124] S. Todorčević, Topics in Topology, Lecture Notes in Mathematics 1652, Springer–Verlag, Berlin, 1997.

[125] S. Todorčević, A dichotomy for P-ideals of countable sets, Fund. Math. 166 (2000), no. 3, 251–267.

[126] B. Veličković, Applications of the open coloring axiom, in Set Theory of the Continuum (H. Judah, W. Just, and W. H. Woodin, eds.), Berkeley, CA, 1989. Mathematical Sciences Research Institute Publications 26, Springer-Verlag, New York, 1992, pp. 137-154.

[127] B. Veličković, Forcing axioms and stationary sets, Adv. in Math. 94 (1992), no. 2, 256-284.

[128] B. Veličković, The basis problem for c.c.c. posets, Set theory (Piscataway, NJ, 1999), 149–160, DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002

[129] B. Veličković, c.c.c. posets of perfect trees. Comp. Math., 79 (1991) no. 3, 279–294.

[130] B. Veličković. c.c.c. forcings and splitting reals. preprint, 2003.

[131] B. Veličković, W. H. Woodin, Complexity of reals in inner models of set theory, Ann. Pure Appl. Logic 92 (1998), no. 3, 283-295.

[132] P. Vopěnka, P. Hájek, The theory of semisets, North Holland 1972

[133] W. H. Woodin, Supecompact cardinals, sets of reals, and weakly homogeneous trees, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 85 (1988), no. 18, 6587-6591.

[134] W. H. Woodin, The Axiom of Determinacy, Forcing Axioms, and the Nonstationary Ideal, de Gruyter Series in Logic and its Applications 1, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1999.

[135] W. H. Woodin, A. R. D. Mathias, K. Hauser, The Axiom of Determinacy, de Gruyter Series in Logic and its Applications, Walter de Gruyter & Co.

[136] M. Zeman, Inner models and large cardinals, de Gruyter 2002

[137] E. Zermelo, Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werdern kann, Math. Ann. 59 (1904), 514–516

[138] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Math. Ann. 65 (1908), 261–281

[139] M. Zorn, A remark on method in transfinite algebra, Bull. Amer. Math. Soc. 41 (1935), 667–670

Lista simbola

Lista imena

Indeks