УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Петар Мелентијевић

Процене градијената функција и норми оператора у теорији хармонијских функција

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2018.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Petar Melentijević

Estimates of gradients and operator norm estimates in harmonic function theory

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2018.

МЕНТОР

- проф. др Милош Арсеновић,

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- проф. др Милош Арсеновић, редовни професор Математичког факултета
- проф. др Оливера Михић, редовни професор Факултета организационих наука
- проф. др Данко Јоцић, редовни професор Математичког факултета

Процена градијената функција и норми оператора у теорији хармонијских функција

• **РЕЗИМЕ.** У овој тези разматрају се оцене норми оператора у теорији хармонијских функција и процене градијената функција.

Први резултати наведени у тези су неједнакости Шварцовог типа за холоморфна пресликавања јединичне лопте $\mathbb{B}^n$ у јединичну лопту $\mathbb{B}^m$, затим аналогне неједнакости за холоморфне функције на диску $\mathbb{D}$ без нула, као и плурихармонијске функције на јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ са кодоменом у $(-1, 1)$. Овим су дата побољшања тврђења добијених у [32] и [18]. Такође, дат је нов доказ чињенице да су позитивне хармонијске функције на полуравни контрактивне, ако се на полуравни $\mathbb{H}$ и на $\mathbb{R}^+$ посматрају хиперболичке метрике([47]). Осим тога, друга глава садржи и примере који показују да исто не важи ако се посматрају полупростори виших димензија. Наведени резултати објављени су у [55].

Резултати наведени у трећој глави везани су за одређивање тачних полунорми једне тежинске варијанте Березинове трансформације, посматране на $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ са кодоменом у глатком Блоховом простору ([57]).

Четврта глава садржи бројне резултате везане за Бергманову пројекцију. Решен је проблем Марковића и Калаја постављен у [28], који се односи на одређивање тачне полунорме Бергманове пројекције из $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ на $\mathcal{B}(\mathbb{B}^n)$. Чињеница да се на Блоховом простору посматра полунорма задата помоћу $\mathcal{M}-$инваријантног градијента представљала је срж проблема. Такође, дате су и оптималне процене градијента Бергманове пројекције L^p функције на јединичној лопти $\mathbb{B}^n$, као и последице које се односе на Кошијеву пројекцију и одговарајуће оцене градијената у Хардијевим и Бергмановим просторима. Добијене су и тачне вредности Блохових полунорми и норми Кошијеве пројекције на $L^\infty(S^n)$. Добијени резултати базирани су на [56] и [58].

У последњој глави дат је доказ дела хипотезе Холенбека и Вербицког из [26]. Тачније, одређене су тачне норме оператора $\left(|P_+|^s + |P_-|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ за $0 < s \leq 2$ на $L^p(\mathbb{T})$, где је P_+ Рисова пројекција и $P_- = I - P_+$. Осим тога, дате су и одговарајуће дуалне неједнакости и доказана је њихова оптималност. Рад [45] инспирисан је резултатима из [25] и [33].

• **КЉУЧНЕ РЕЧИ.** Шварцова лема, Бергманова пројекција, Березинова трансформација, Рисова пројекција, јединична лопта, Хардијеви простори, Бергманови простори, Блохови простори

• **НАУЧНА ОБЛАСТ.** Математика

• **УЖА НАУЧНА ОБЛАСТ.** Комплексна анализа

• **УДК.** 517.544(043.3)

• **AMS КЛАСИФИКАЦИЈА.** 47B35, 31B10, 30H05, 31A05

Estimates of gradients and operator norm estimates in harmonic function theory

• **ABSTRACT.** In this thesis we study sharp estimates of gradients and operator norm estimates in harmonic function theory.

First, we obtain Schwarz-type inequalities for holomorphic mappings from the unit ball $\mathbb{B}^n$ to the unit ball $\mathbb{B}^m$, and then analoguous inequalities for holomorphic functions on the disk $\mathbb{D}$ without zeros and pluriharmonic functions from the unit ball $\mathbb{B}^n$ to $(-1, 1)$. These extend results from [32] and [18]. Also, we give a new proof of the fact that positive harmonic function in the upper-half plane is a contraction with resprect to hyperbolic metrics on both $\mathbb{H}$ and $\mathbb{R}^+$ ([47]). Besides that, in the second chapter, we construct the examples to show that the analoguous does not hold for the higher-dimensional upper-half spaces. All mentioned results are from the authors' paper [55].

In the third chapter we intend to calculate the exact seminorm of the weighted Berezin transform considered as an operator from $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ to the "smooth" Bloch space ([57]).

The fourth chapter contains results concerning Bergman projection. We solve the problem posed by Kalaj and Marković in [28] on determining the exact seminorm of the Bergman projections from $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ to the $\mathcal{B}(\mathbb{B}^n)$. The crucial obstacle is the fact that $\mathcal{B}(\mathbb{B}^n)$ is equipped with $\mathcal{M}-$invariant gradient seminorm. Also, we provide the sharp gradient estimates of the Bergman projection of an L^p function in the unit ball $\mathbb{B}^n$, as well as its consequences on Cauchy projection and certain gradient estimates for the functions from the Hardy and Bergman spaces.We obtain the exact values of the Bloch's seminorms and norms for the Cauchy projection on $L^\infty(S^n)$. These results are based on the papers [56] and [58].

The last chapter contains the proof of the one part of Hollenbeck-Verbitsky conjecture from [26]. Exactly, we find the exact norms of $\left(|P_+|^s + |P_-|^s\right)^{\frac{1}{s}}$ for $0 < s \leq 2$ on $L^p(\mathbb{T})$, where P_+ is the Riesz projection and $P_- = I - P_+$. Also we give the appropriate dual estimates and prove that they are sharp. The paper [45] is motivated by the results from [25] and [33].

• **KEYWORDS.** Schwarz lemma, Bergman projection, Berezin transform, Riesz projection, Hardy space, Bergman space, Bloch space

• **SCIENTIFIC AREA.** Mathematics

• **SCIENTIFIC FIELD.** Complex analysis

• **UDC.** 517.544(043.3)

• **AMS CLASSIFICATION.** 47B35, 31B10, 30H05, 31A05

Садржај

Предговор

У овој дисертацији бавимо се проценама градијената функција и норми извесних оператора који имају битну улогу у теорији хармонијских функција. Теза је подељена у пет глава.

У првој глави наведене су дефиниције основних појмова на које се у раду позивамо. Заједно са дефиницијама појмова, дати су и неки основни ставови који их повезују, као и референце на литературу у којој се могу наћи њихови докази.

Основна тема друге главе је Шварцова лема. Први одељак садржи основну формулацију Шварцове леме и општи преглед резултата који је уопштавају, као што су оцене коефицијената аналитичких функција, Шварцове леме за хармонијске, плурихармонијске или холоморфне функције више променљивих, геометријска уопштења итд. У другом одељку наведене су хармонијске Шварцове леме, док се у трећем бавимо резултатима који су били непосредна мотивација аутору за његова истраживања. То су резултати Калаја, Ђаконова и Марковића из [32], [18] и [47]. Калај у [32] доказује Шварцову лему за холоморфна пресликавања јединичног диска у $\mathbb{C}^n$ у јединични диск у $\mathbb{C}^m$, интерпретирајући их и као контракције у односу на хиперболичке метрике на овим доменима. Осим тога, у истом раду доказана је и извесна неједнакост за плурихармонијске функције. Такође, Ђаконов у [18] разматрајући Блохове просторе, доказује аналогон Шварцове леме за аналитичке функције у диску које немају нула, док Марковић у [47] доказује контрактивност позитивних хармонијских функција на полуравни у односу на хиперболичке метрике на $\mathbb{H}$ и $\mathbb{R}^+$. Аутор у [55] користећи појам инваријантног градијента и Бергманове метрике на јединичној лопти појачава Калајеве неједнакости и Ђаконовљеву лему. Исти рад садржи и кратак доказ Марковићеве теореме заснован на Харнаковој неједнакости као и контрапримере који показују немогућност уопштења на позитивне хармонијске функције на полупросторима.

Трећа глава посвећена је Березиновој трансформацији, која је моћан алат за проучавање оператора на просторима аналитичких функција. Дефинише се и Березинова трансформација L^p функције на јединичној лопти, што постаје основни предмет даљег истраживања у тези. Преглед основних резултата о Березиновој трансформацији дат је у прва два одељка, док наредна два садрже неке оцене норми Березинове трансформације. Први резултат везан за норму овог оператора на $L^p(\mathbb{D})$ даје Достанић у [16] користећи Шуров тест за процену норме одозго, а затим и погодну фамилију тест функција за процену одоздо. Пратећи исти метод, тврђење уопштавају Лиу и Жоу у [43], а затим и

Марковић([48]), користећи фамилију оператора на сегменту $[0,1]$ реалне праве. Марковић примећује да овим аргументом добија и тачну норму на $L^p(\mathbb{B}^n)$ тзв. максималне Бергманове пројекције. Резултат Перале из [65], даје мотивацију за разматрање Березинове трансформације као оператора из $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ у глатки Блохов простор. Разматрањем овог оператора на простору са тежинском мером, аутор тезе у [57], у извесним случајевима даје оптималну оцену, а у другима доста јаку неједнакост.

Четврта глава садржи резултате везане за одговарајуће процене норми Бергманове пројекције и градијената функција које припадају слици $L^p(\mathbb{B}^n)$ овим оператором. Тако прво наводимо Лиуово побољшање процене норме Бергманове пројекције на $L^p(\mathbb{B}^n)$ одоздо, а потом и ауторове резултате мотивисане радовима Перале [65] и Калаја и Марковића [28]. У [65] и [66] Перала налази тачну полунорму и норму Бергманове пројекције на $L^\infty(\mathbb{D})$ са Блоховим простором као кодоменом, док Калај и Марковић уопштавају ово тврђење на јединичну лопту у $\mathbb{C}^n$ и постављају проблем одређивања тачне полунорме, у случају када је полунорма задата инваријантним градијентом. Аутор у [58] решава овај проблем, користећи посебну технику, а потом у [57] разматра Бергманову пројекцију на $L^p(\mathbb{B}^n)$ и добија тачка по тачка најбољу процену градијента фунцкија која припада слици овог оператора. На овај начин се добија норма на Блоховом простору у специјалном случају, а дубља разматрања дају и неколико других последица занимљиве интерпретације. Тако се добија и процена градијента функције из Бергмановог простора $A^2(\mathbb{B}^n)$, али и аналогни резултати везани за градијент решења $\overline{\partial}-$једначине, норме Кошијеве пројекције и процену градијента функције из $H^2(\mathbb{B}^n)$.

Последња глава посвећена је Рисовој пројекцији на $L^p(\mathbb{T})$ и решавању хипотезе Холенбека и Вербицког о тачној норми нелинеарног оператора $\left(|P_+f|^s+|P_-f|^s\right)^{\frac{1}{s}}$, за $0<s\leq 2$ и $1<p<+\infty$. У првом одељку су, при том, дате основне особине Рисове пројекције, као и опис основног метода који се користи за доказивање основних резултата из [45]. Наредна два одељка садрже доказ хипотезе Холенбека и Вербицког из [26]. Наиме, прво су доказане основне неједнакости користећи метод плурисубхармонијских миноранти, а потом и оптималност добијених оцена конструисањем фамилије "екстремалних" функција. Коначно, последњи одељак садржи и оптималне дуалне неједнакости, као и једну примену на изопериметријске неједнакости за хармонијске функције из [33].

Захвалност

Захвалио бих се ментору проф. др Милошу Арсеновићу на преузимању врло одговорне функције ментора и времену које ми је посветио, као и члановима комисије проф. др Оливери Михић и проф. др Данку Јоцићу на врло корисним примедбама и сугестијама током израде тезе. Велико ми је задовољство да на овом месту изразим своју огромну захвалност и ментору са мастер студија, проф. др Мирославу Павловићу, који ме је увео у научни рад и дао изузетан подстицај у мом математичком образовању. Такође, врло пријатна дужност ми је да поменем колегу др Маријана Марковића и да му се захвалим на инспиративним математичким темама с којима ме упознао и које смо заједно разматрали у протеклом периоду и на подршци коју ми је пружао у току израде ове тезе. Надахнута предавања проф. др Миодрага Матељевића, др Миљана Кнежевића и др Ђорђа Кртинића током основних и мастер студија су снажно утицала на мој математички укус, па им се овом приликом такође захваљујем. Ипак, за прву наклоност према математици највеће заслуге имају моји професори математике: Ратомир Саковић у основној и мр Милош Танасијевић, у средњој школи. Коначно, највећу захвалност дугујем својој породици и девојци.

Бајина Башта, октобар 2018. *Петар Мелентијевић*

Глава 1

Уводни појмови и ознаке

У овој глави увешћемо неке основне појмове на које ћемо се касније често позивати. Глава је издељена на већи број секција у којима су, осим самих појмова, наведене и неке њихове најважније особине. Тврђења која прате појмове нису на главној линији текста, па су и докази изостављени. Уместо тога, дате су референце на литературу у којој се исти могу наћи, али и створити шира слика о самим појмовима који се разматрају.

1.1 Јединична лопта $\mathbb{B}^n$ и полупростор $\mathbb{R}^n_+$

Основни домени на којима су дефинисани простори функција којима ћемо се бавити раду су јединична лопта и полупростор. Јединичну лопту у $\mathbb{C}^n$ означаваћемо са $\mathbb{B}^n$. Она представља скуп $\mathbb{B}^n = \{z \in \mathbb{C}^n \,|\, |z| < 1\}$. Разматраћемо и јединичну лопту у $\mathbb{R}^n$, аналогно дефинисану, коју ћемо означавати са $\mathbb{B}_n$.

Са $\mathbb{R}^n_+$ означаваћемо скуп $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}), x_{n+1} > 0\}$, који представља горњи полупростор у $\mathbb{R}^{n+1}$. Аналогни појам у $\mathbb{C}^{n+1}$ је Зигелов горњи-полупростор који се дефинише као $U^n = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \,|\, \operatorname{Im} z_{n+1} > \sum_{j=1}^n |z_j|^2\}$. Познато је да је U^n бихоломорфно еквивалентан лопти $\mathbb{B}^n$ при Кејлијевој трансформацији. Видети [40].

1.2 Холоморфне, хармонијске и плурихармонијске функције

Векторски простор холоморфних функција на лопти $\mathbb{B}^n$ означаваћемо са $\mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$, док ће ознака за одговарајући простор хармонијских функција бити означаван са $h(\mathbb{B}^n)$. Аналогне ознаке уводимо и у случају осталих домена које разматрамо.

У раду ћемо такође разматрати и плурихармонијске функције. Функција $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{C}$ је плурихармонијска ако је, за сваку комплексну праву $l_{a,b} = \{a+b\zeta\}$, функција $\zeta \mapsto f(a+b\zeta)$ хармонијска на скупу $A_l = \{\zeta \in \mathbb{C} \,|\, a+b\zeta \in \mathbb{B}^n\}$. Показује се да важи следеће: функција f је плурихармонијска на $\mathbb{B}^n$ ако и само ако је f реални део функције холоморфне на $\mathbb{B}^n$. Доказ овог тврђења и више детаља о овој класи функција може се наћи у [37].

1.3 Скаларни производ

Скаларни производ ћемо означавати са $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и дефинисаћемо га са

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j},$$

где је $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ и $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$.

1.4 Аутоморфизми лопте $\mathbb{B}^n$

Аутоморфизми јединичне лопте су бијективна холоморфна пресликавања јединичне лопте $\mathbb{B}^n$ на себе чији је инверз такође холоморфан. Овакво пресликавање φ_a за које је $\varphi_a(0) = a$ је, до на унитарни чинилац, дато изразом

$$\varphi_a(z) = \frac{a - Pz - \sqrt{1-|a|^2}Qz}{1 - \langle z, a\rangle}, \tag{1.1}$$

где је

$$Pz = \frac{\langle z, a\rangle}{|a|^2} a$$

Хермитска ортогонална пројекција на комплексну праву генерисану са a, а

$$Qz = z - Pz.$$

При раду са овим пресликавањима од велике користи су и наредни идентитети:

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle a, z\rangle|^2} \tag{1.2}$$

$$1 - |a|^2 = (1 - \langle a, z\rangle)(1 - \langle a, \varphi_a(z)\rangle). \tag{1.3}$$

Пресликавања φ_a су и инволутивна, тј. важи $\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}$.

Реални Јакобијан од $\varphi_a(z)$ дат је са

$$(J_{\mathbb{R}}\varphi_a)(z) = \frac{(1-|a|^2)^{n+1}}{|1-\langle a, z\rangle|^{2n+2}}. \tag{1.4}$$

Више детаља о аутоморфизмима лопте може се наћи у [71], а о истом се у нешто ширем контексту у [37].

1.5 Мебијусове трансформације

Бихоломорфна пресликавања диска $\mathbb{D}$ на себе дата су Мебијусовим трансформацијама. Међутим, Мебијусове трансформације се у вишим димензијама разликују од аутоморфизама и нису бихоломорфна пресликавања. Наиме, оне чине групу трансформација које чувају углове и дефинишу се и у $\mathbb{R}^n$.

Пресликавање $T_a(x)$ које слика $a \in \mathbb{B}_n$ у нулу дато је формулом

$$T_a(x) = \frac{(1-|a|^2)(x-a) - |x-a|^2 a}{1 - 2x \cdot a + |x|^2|a|^2}. \tag{1.5}$$

Специјално, у случају јединичне лопте у $\mathbb{C}^n$, иста формула добија облик

$$T_a(z) = \frac{(1-|a|^2)(z-a) - |z-a|^2 a}{1 - 2\operatorname{Re}\langle z, a\rangle + |a|^2|z|^2}. \tag{1.6}$$

За Мебијусове трансформације важи следећа једнакост

$$1 - |T_w(z)|^2 = \frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{1 + |w|^2|z|^2 - 2\operatorname{Re}\langle z, w\rangle}. \tag{1.7}$$

Више о Мебијусовим трансформацијама може се наћи у [2].

1.6 Хиперболичка и Бергманова метрика

У комплексној равни $\mathbb{C}$, хиперболичка метрика се може дефинисати на сваком домену чија граница има бар две тачке. На диску $\mathbb{D}$ она је дефинисана линијским елементом

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

односно, растојање између z и w у овој метрици је

$$\rho(z,w) = \frac{1}{2}\log\frac{|1 - z\overline{w}| + |z-w|}{|1 - z\overline{w}| - |z-w|}. \tag{1.8}$$

Слично, у случају полуравни $\mathbb{H}$, линијски елемент дат је са

$$d\sigma_z = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z},$$

док је растојање

$$\rho(z,w) = 2\tanh^{-1}\left|\frac{z-w}{\overline{z}-w}\right|. \tag{1.9}$$

Овако задате метрике имају више уопштења на доменима у $\mathbb{C}^n$, односно $\mathbb{R}^n$. Нека од њих су Бергманова, хиперболичка, Каратеодоријева, Кобајашијева. За специјалне домене, као нпр. за јединичну лопту $\mathbb{B}^n$ неке од ових метрика се поклапају. Више информација о овим метрикама, њиховим односима и особинама може се наћи у [1], [36], [52].

Ми ћемо се овде задржати на хиперболичкој и Бергмановој метрици. Напоменимо још и да је суштинска разлика између ових метрика следећа: хиперболичка метрика је метрика константне негативне Гаусове кривине, док је Бергманова метрика дефинисана као Риманова метрика са линијским елементом који зависи од вредности Бергмановог језгра. Ови детаљи нама неће бити од пресудног значаја. Детаљније се може наћи у [36].

Основна карактеристика Бергманове метрике коју ћемо ми овде користити је следећа:

Ако су $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ домени и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ бихоломорфно пресликавање Ω_1 на Ω_2, тада f индукује изометрију Бергманових метрика

$$d_{B,\Omega_1}(z, w) = d_{B,\Omega_2}\big(f(z), f(w)\big), \quad z, w \in \Omega_1.$$

Бергманово растојање тачака у јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ дато је формулом

$$d_{\mathbb{B}^n}(z, w) = \log \frac{|1 - \langle z, w\rangle| + \sqrt{|z - w|^2 + |\langle z, w\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1 - \langle z, w\rangle| - \sqrt{|z - w|^2 + |\langle z, w\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}} \tag{1.10}$$

или краће,

$$d_{\mathbb{B}^n}(z, w) = \log \frac{1 + |\varphi_z(w)|}{1 - |\varphi_z(w)|}, \tag{1.11}$$

где је $\varphi_z(w)$ аутоморфизам лопте дат изразом (1.1).

Хиперболичка растојања на осталим скуповима од значаја за тезу, дата су формулама:

$$\rho_{\mathbb{R}_+}(x, y) = \log \frac{y}{x}, \quad \text{за } y \geq x > 0, \tag{1.12}$$

$$\rho_{\mathbb{B}_n}(x, y) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}\right), \quad \text{за } x, y \in \mathbb{B}_n, \tag{1.13}$$

$$\rho_{\mathbb{H}_n}(x, y) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_n y_n}\right), \quad \text{за } x_n, y_n > 0. \tag{1.14}$$

1.7 Градијент у правцу, градијент и $\mathcal{M}$-инваријантни градијент. Фрешеов извод

Будући да су процене градијента главна тема ове тезе, разјаснићемо разне варијанте тог појма које ће се у наставку појављивати.

У зависности да ли је функција коју посматрамо функција више реалних или комплексних променљивих, разликоваћемо реални и комплексни градијент. Реални градијент дефинисан је као n-торка

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right), \tag{1.15}$$

где је $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ одговарајући парцијални изводи.

Такође, за функције комплексних променљивих, посматраћемо и два комплексна градијента: z и $\overline{z}$-градијент, који су дати n-торкама парцијалних извода

$$\nabla_z f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \frac{\partial f}{\partial z_2}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right) \text{ и} \tag{1.16}$$

$$\nabla_{\overline{z}} f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_1}(z), \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_2}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_n}(z)\right). \tag{1.17}$$

Модули посматраних градијената дефинишу се као еуклидске норме одговарајућих вектора, нпр.

$$|\nabla_z f(z)| = \sqrt{\left|\frac{\partial f}{\partial z_1}(z)\right|^2 + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right|^2}. \tag{1.18}$$

Слично и за $|\nabla_{\overline{z}} f(z)|$ и $|\nabla f(z)|$.

Наравно, функције n комплексних променљивих природно се могу видети и као функције $2n$ реалних променљивих. У том случају, с обзиром на дефиницију модула горе наведених градијената, као и на везе

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right), \tag{1.19}$$

за $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$, добијамо следећу једнакост:

$$|\nabla f(z)| = \sqrt{|\nabla_z f(z)|^2 + |\nabla_{\overline{z}} f(z)|^2}. \tag{1.20}$$

Приликом процењивања модула градијента, од пресудне важности ће бити следећа карактеризација

$$|\nabla_z f(z)| = \sup_{|\xi|=1} |\langle \nabla_z f(z), \xi \rangle| = \sup_{|\xi|=1} \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \overline{\xi_j} \right|. \tag{1.21}$$

Она следи из једноставне примене неједнакости Коши-Шварц-Буњаковског:

$$\left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(z) \overline{\xi_j} \right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)\right|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\xi_j|^2} = |\nabla_z f(z)|,$$

док се једнакост достиже за

$$\xi_j = \frac{1}{|\nabla_z f(z)|} \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

Слично се добија и у преосталим случајевима.

$\mathcal{M}$-инваријантни градијент дефинише се помоћу следеће једнакости:

$$\widetilde{\nabla}_z f(z) := \nabla_z (f \circ \varphi_z)(0), \tag{1.22}$$

где је ∇_z горе дефинисани комплексни градијент, а φ_z аутоморфизам лопте $\mathbb{B}^n$ дат изразом (1.1). На аналоган начин дефинишу се и $\widetilde{\nabla}_{\overline{z}}$ и $\widetilde{\nabla}_z$. Приликом рада са инваријантним градијентом користићемо и идентитет:

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)|^2 = (1-|z|^2)\big(|\nabla_z f(z)|^2 - |\langle \nabla_z f(z), z\rangle|^2\big). \tag{1.23}$$

Приметимо да је

$$|\widetilde{\nabla}_z f(0)| = |\nabla_z f(0)|,$$

а за $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$ су обе вредности једнаке $|f'(0)|$. Такође, лако уочавамо и следећу неједнакост:

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| \geq (1-|z|^2)|\nabla_z f(z)|.$$

Више о $\mathcal{M}$-инваријантном градијенту може се наћи у [62].

Са $|f'(z)|$ означавамо норму Фрешеовог извода пресликавања f. Подсетимо се да се Фрешеов извод холоморфног пресликавања $f : \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ дефинисаног на отвореном скупу Ω дефинише као јединствено линеарно пресликавање $L = f'(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ такво да је

$$f(z+h) - f(z) = f'(z)h + O(|h|^2), \quad |h| \to 0.$$

1.8 L^p простор

L^p простори дефинишу се у општем контексту као простори p-интеграбилних функција на мерљивом простору (X,μ). Наиме, ако је X скуп на ком је дефинисана мера μ, тада је, за $1 \leq p < +\infty$, $L^p(X,\mu)$ векторски простор функција за које важи

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

За $1 \leq p < +\infty$ овај простор је Банахов, односно комплетан је у односу на метрику индуковану датом нормом. Простор $L^\infty(X,\mu)$ се по неким особинама разликује од L^p, $1 \leq p < +\infty$, а дефинише се као скуп свих функција f за које је

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \inf\big\{M \,\big|\, \mu(|f(x)| > M) = 0\big\} < +\infty.$$

У овом раду ће X бити увек неки од скупова $\mathbb{D}$ или $\mathbb{B}^n$, а μ мера Лебега или нормализована Лебегова мера на посматраном скупу.

Веома битна веза међу L^p просторима дата је Хелдеровом неједнакошћу

$$\|fg\|_{L^1(X,\mu)} \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mu)},$$

где је $q = \dfrac{p}{p-1}$ при $p > 1$, односно $q = \infty$ за $p = 1$. Један од основних резултата у функционалној анализи је дуалност простора L^p и L^q за $1 < p < +\infty$, као и $(L^1)^* \cong L^\infty$.

Од посебног значаја биће Хардијеви и Бергманови простори аналитичких или хармонијских функција. Хардијев простор $H^p(\mathbb{B}^n)$ је простор свих аналитичких функција у $\mathbb{B}^n$ за које је коначан

$$\left(\lim_{r\to 1-} \int_{S^n} |f(r\sigma)|^p \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}},$$

где је $d\sigma$ нормализована мера на сфери S^n и $1 \leq p < +\infty$. Одговарајући простор хармонијских функција посматраћемо на диску $\mathbb{D}$ и означавати га са $h^p(\mathbb{D})$.

Бергманов простор аналитичких функција $A^p(\mathbb{B}^n), 1 \leq p < \infty$ дефинисаћемо као простор L^p-интеграбилних аналитичких функција на $\mathbb{B}^n$. Аналоган простор хармонијских функција на диску $\mathbb{D}$ означаваћемо са $b^p(\mathbb{D})$

1.9 Блохов простор $\mathcal{B}$

Блохов простор функција је скуп функција на лопти $\mathbb{B}^n$ за које је коначна полунорма

$$\|f\|_\beta = \sup_{|z|<1} (1 - |z|^2)|\nabla f(z)|. \tag{1.24}$$

Обично се посматрају аналитички или хармонијски Блохови простори, али ми ћемо овде посматрати и "глатки" Блохов простор који чине функције $f \in C^1(\mathbb{B}^n)$ за које је ова полунорма коначна.

У Блохов простор $\mathcal{B}$ норма се обично уводи на следећи начин:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|_\beta. \tag{1.25}$$

Овај простор се природно појављује у многим ситуацијама у којима се процењује градијент. Нпр. свако холоморфно пресликавање $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ припада $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ (ово је последица класичне Шварцове леме). Овде ћемо, осим наведене, посматрати и следеће полунорме на Блоховом простору:

$$\|f\|_{\beta_N} = \max_{|m|=N} \sup_{|z|<1} (1 - |z|^2)^N \left| \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right|, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{1.26}$$

које су наслеђене из Бесовљевог простора, као и одговарајуће норме дате са:

$$\|f\|_{\mathcal{B}_N} = \max_{|m|\leq N-1} \left| \frac{\partial^{|m|} f}{\partial z^m}(0) \right| + \max_{|m|=N} \sup_{|z|<1} (1 - |z|^2)^N \left| \frac{\partial^N f}{\partial z^m}(z) \right|, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1.27}$$

Такође, имајући у виду дефиницију инваријантног градијента, имамо редом и следећу полунорму, односно норму:

$$\|f\|_{\widetilde{\beta}} = \sup_{|z|<1} |\widetilde{\nabla} f(z)|; \quad \|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} = |f(0)| + \sup_{|z|<1} |\widetilde{\nabla} f(z)|. \tag{1.28}$$

Детаљније о Блоховим просторима у [77],[78].

1.10 Специјалне функције

Гама функција дефинише се на десној полуравни $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ као

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt. \tag{1.29}$$

Ова функција се у математичкој анализи често појављује, а првенствено се посматра као интерполација факторијела коме су аргументи природни бројеви. Може се мероморфно продужити на $\mathbb{C}$ помоћу функционалне једначине

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\, \Gamma(\alpha),$$

која важи на $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$.

Неке друге једнакости које важе за Γ функцију и које ћемо често користити су

(а) $\Gamma(n) = (n-1)!$, за $n \in \mathbb{N}$,

(б) $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) = 2^{1-2\alpha}\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha)$ (Ојлерова дупликациона формула).

Бета функција дата је параметарским интегралом

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\, dt, \quad \alpha, \beta > 0. \tag{1.30}$$

Основна релација која је повезује са Γ функцијом и која се често користи је

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \tag{1.31}$$

Гаусове хипергеометријске функције ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$ задају се помоћу реда

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} z^k, \tag{1.32}$$

где је $(\alpha)_k$ Похамеров симбол дефинисан као $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdot\dots\cdot(\alpha+k-1)$. Овај ред конвергира увек за $|z| < 1$. У специјалном случају, када конвергира ред и за $z = 1$, та вредност може да се одреди из Гаусове формуле

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\,\Gamma(\gamma - \beta)}. \tag{1.33}$$

Осим ове формуле, у даљем раду ћемо се позивати и на следеће:
а) Ојлерова трансформација:

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a, c-b; c; z), \tag{1.34} $$

б) Ојлерове формуле: За $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} d > 0$, $z \neq 1$, $|\arg(1-z)| < \pi$ важи

$$ {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(d)\,\Gamma(c-d)} \int_0^1 t^{d-1}(1-t)^{c-d-1}\,{}_2F_1(a, b; d; tz)\,dt. \tag{1.35} $$

Више о особинама хипергеометријских, али и других специјалних функција може се наћи у [6].

Глава 2

Шварцова лема

2.1 Шварцова лема—основна формулација и правци уопштавања

Шварцова лема је један од најједноставнијих резултата који указује на ригидност холоморфних функција. У основној формулацији гласи:

***Теорема* 1** (Шварцова лема)**.** *Нека је* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ *отворен јединични диск у комплексној равни* $\mathbb{C}$*, и* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *холоморфна функција таква да је* $f(0) = 0$*. Тада је* $|f(z)| \leq |z|$ *за* $\forall z \in \mathbb{D}$ *и* $|f'(0)| \leq 1$*.*

Ако је $|f(z_0)| = |z_0|$ *за бар једно* $z_0 \in \mathbb{D}$ *или* $|f'(0)| = 1$*, онда мора бити и* $f(z) = az$ *за неко* $a \in \mathbb{C}$*,* $|a| = 1$*.*

Доказ. Доказ је једноставан и заснива се на примени принципа максимума модула на помоћну функцију

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0, \\ f'(0), & z = 0, \end{cases}$$

холоморфну на целом $\mathbb{D}$, према условима теореме.

Означимо са $\mathbb{D}_r$ скуп $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq r\}$. Принцип максимума модула даје $z_r \in \partial\mathbb{D}_r$ за које је $|g(z)| \leq |g(z_r)|$ за све $z \in \mathbb{D}_r$, а даље и:

$$|g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} \leq \frac{1}{r}, \quad \text{тј.} \quad |g(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Прелазећи на граничну вредност кад $r \to 1^-$ добијамо $g(z) \leq 1$, тј. $|f(z)| \leq |z|$.

У неједнакости $\left|\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0}\right| \leq 1$ (која важи јер је, по претпоставци, $f(0)=0$), прелазећи на граничну вредност кад $z \to 0$ добијамо $|f'(0)| \leq 1$.

Ако је, за неко $z_0 \in \mathbb{D}$, $|f(z_0)| = |z_0|$ или $|f'(0)| = 1$, тада је $|g(z_0)| = 1$, па по Принципу максимума модула $|g(z)| = 1$ за све $z \in \mathbb{D}$, што даје $f(z_0) = az_0$, $\forall z \in \mathbb{D}$ и неко a јединичног модула. □

Геометријски гледано, може се рећи да је слика сваке тачке у диску ближа центру диска него сама та тачка.

Следећа верзија леме (Шварц-Пикова теорема) преноси резултат основне верзије на однос оригинала и слика при холоморфној функцији за две тачке у диску. Наиме, важи:

***Теорема* 2** (Шварц-Пик)**.** *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *холоморфна. Тада за све* $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ *важи:*

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\right|, \tag{2.1}$$

и за $\forall z \in \mathbb{D}$

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}. \tag{2.2}$$

Доказ. Свешћемо теорему на основну верзију леме користећи помоћна пресликавања. Фиксирајмо $z_1 \in \mathbb{D}$ и уочимо Мебијусова пресликавања

$$\varphi(z) = \frac{z_1 - z}{1-\overline{z_1}z} \quad \text{и} \quad \psi(z) = \frac{f(z_1)-z}{1-\overline{f(z_1)}z}.$$

Како су ова два пресликавања бијекције и φ слика z_1, а ψ $(f(z_1))$ у нулу, то за сложену функцију

$$h(z) := \psi\big(f(\varphi^{-1}(z))\big)$$

важе услови Шварцове леме, тј. важи:

$$|\psi\big(f(\varphi^{-1}(z))\big)| = \left|\frac{f(z_1)-f(\varphi^{-1}(z))}{1-\overline{f(z_1)}f(\varphi^{-1}(z)})\right| \leq |z|.$$

Стављајући $z_2 = \varphi^{-1}(z)$ добијамо:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}\right| \leq \big|\varphi(z_2)\big| = \left|\frac{z_1-z_2}{1-\overline{z_1}z_2}\right|.$$

Такође, ако распишемо последњу неједнакост у облику:

$$\left|\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}\right| \le \left|\frac{1-\overline{f(z_1)}f(z_2)}{1-\overline{z_1}z_2}\right|$$

и пређемо на граничну вредност када $z_1 \to z_2$, долазимо и до жељене процене извода функције f. $\square$

Хиперболичко растојање између две тачке у диску, $z, w \in \mathbb{D}$ дато је формулом

$$\rho(z,w) = \tanh^{-1}\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|$$

што нам даје јасну интерпретацију Шварц-Пикове теореме у терминима растојања:

$$\rho(f(z), f(w)) \le \rho(z,w). \tag{2.3}$$

Ово такође представља један од битних праваца уопштавања Шварцове леме.

Мењање услова при којима важи Шварцова лема представља основу за многа истраживања у теорији функција. Тако нас, посматрање унивалентних функција на диску $\mathbb{D}$ нормализованих са $f(0)=0,\ f'(0)=1$ доводи до следећег проблема:

За функције са назначеним својствима тј. процену функције облика

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$$

доказати процену $|a_n| \le n$, $n > 2$.

Није тешко проверити да једнакост важи за функцију $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ и да сви остали услови за исту важе. Ипак, горња хипотеза постављена од стране Лудвига Бибербаха 1916. године, тек је 1984. доказана. Доказао ју је француско-амерички математичар Луј де Бранж [10]. Иако се дуго чекало на доказ тврђења за све $n \in \mathbb{N}$, парцијални резултати за $n=2$ и $n=3$ били су познати и раније (прво је дело Бибербаха, а друго Левнера [44]), а вреди поменути и процену $a_n \le en$, $\forall n \in \mathbb{N}$ која је дело Литлвуда [38].

Слично тврђење је и следећа Робертсонова хипотеза [69]:

Ако је $f = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{2k+1} z^{2k+1}$ *са* $b_1 = 1$ *и* f *је „1-1", тада за свако* n *важи*

$$\sum_{k=1}^{n} |b_{2k+1}|^2 \le n.$$

Тачност овог тврђења последица је де Бранжовог доказа претходне теореме, а врло значајан допринос у правцу решавања обе претпоставке дао је и Исак Милин, који је повезао наведене проблеме.

Посматрајући исту класу функција, тј. функције облика $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$, долази се до следећег закључка: Слика диска $\mathbb{D}$ функцијом f садржи диск са центром у $f(0)$ и полупречника $\dfrac{1}{4}|f'(0)|$. Ово тврђење познато је под називом Кебеова теорема о дисторзији. Иако представља значајан резултат у геометријској теорији функција, ова теорема и њој сличне неће бити предмет наших разматрања.

2.2 Хармонијске Шварцове леме

Овде ћемо се бавити тврђењима Шварцовог типа за хармонијске функције. Једно од првих тврђења тог типа је следећа Хајнцова теорема:

***Теорема* 3** (Хајнц [24])**.** *Ако је u реално вредносна функција хармонијска у* $\mathbb{D}$ *таква да је* $|u(z)| < 1$ *у* $\mathbb{D}$ *и* $u(0) = 0$*, тада је*

$$|u(z)| \leq \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.4}$$

Доказ. Нека је $f = u + iv$, где је v хармонијски конјугат функције u са $v(0) = 0$ (јединствена функција таква да посматрана јесте холоморфна).

Функција $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} z)$ слика појас $|\operatorname{Re} z| < 1$ на $\mathbb{D}$, па је $g(z) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} f(z))$ холоморфна функција на диску $\mathbb{D}$ за коју важи $g(0) = 0$ и $|g(z)| \leq 1$, па примена основне варијанте Шварцове леме даје

$$\left|\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{4} f(z))\right| \leq |z|.$$

Неједнакост $|\operatorname{tg} w| \geq |\operatorname{tg}(\operatorname{Re} w)|$ за $|\operatorname{Re} w| \leq \frac{\pi}{4}$ примењена на $w = \frac{\pi}{4} f(z)$ повлачи $|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} u(z))| \leq |z|$, што је еквивалентно тврђењу које доказујемо. □

Постоји и неколико облика Шварцове леме у којима је дата процена градијента хармонијске функције. Свакако најпознатија јесте следећа:

***Теорема* 4** (Харнакова неједнакост)**.** *Ако је u позитивна хармонијска функција на диску* $\mathbb{D}$*, тада је*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2u(z)}{1 - |z|^2}. \tag{2.5}$$

Доказ. Тврђење доказујемо најпре у случају $z = 0$.

Користећи репрезентацију функције u помоћу Пуасоновог интеграла, имамо:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{|z - re^{i\theta}|^2}(r^2 - |z|^2)\, d\theta,$$

где је $|z| < r < 1$.

Узимајући извод по z добијамо:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{(\overline{z} - re^{-i\theta})(z - re^{i\theta})}(r^2 - |z|^2)\, d\theta - \frac{\overline{z}}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{|z - re^{i\theta}|^2}\, d\theta,$$

па је

$$\frac{\partial u}{\partial z}(0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{u(re^{i\theta})}{e^{i\theta}}\, d\theta,$$

односно

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(0) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{\pi} u(re^{i\theta})e^{i\theta}\, d\theta$$

(пошто је хармонијска функција коју посматрамо реално-вредносна, довољно је "проконјуговати" претходну једнакост).

Сада основна интегрална неједнакост и својство средње вредности хармонијских функција дају:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial z}(0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})e^{-i\theta}\, d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{r}u(0),$$

па тако имамо:

$$\nabla u(0) = \sqrt{2\left(\left|\frac{\partial u}{\partial z}(0)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(0)\right|^2\right)} \leq \frac{2}{r}u(0),$$

па узимајући $r \to 1^-$, добијамо жељену неједнакост.

Да проценимо $|\nabla u(z)|$, искористимо доказано у специјалном случају $z = 0$ за функцију $u \circ \varphi_z$ (која јесте хармонијска кад се аналитичка и хармонијска сложе у овом поретку). Из једнакости:

$$\left|\tfrac{\partial}{\partial z}(u \circ \varphi_z)(0)\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial z}(z)\, \frac{\partial \varphi_z}{\partial z}(0)\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial z}(z)\right|(1 - |z|^2)$$

и

$$\left|\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}}(u \circ \varphi_z)(0)\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)\, \overline{\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}}(0)\right| = \left|\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}(z)\right|(1 - |z|^2),$$

које дају

$$\big|\nabla(u \circ \varphi_z)(0)\big| = |\nabla u(z)|(1 - |z|^2).$$

Следи да је

$$|\nabla u(z)|(1 - |z|^2) = |\nabla(u \circ \varphi_z)(0)| \leq 2u(z),$$

што смо и желели да докажемо. □

Овде смо сва израчунавања спроводили са много детаља, јер су они у овој тематици чести, па стога и корисни за праћење теме. У даљем ћемо се позивати на поједине делове овог или претходних доказа, а детаљније ћемо обратити пажњу на нове аргументе.

Претходно тврђење, иако најпознатије овог типа не представља уопштење Шварцове леме у смислу кодомена функције. То је случај код следеће теореме.

***Теорема* 5** ([62])**.** *Ако је и хармонијско пресликавање* $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *тада важи:*

$$|\nabla u(z)| \leq 2\frac{1 - |u(z)|}{1 - |z|^2}. \tag{2.6}$$

Ова неједнакост је једноставна последица претходне, па је нећемо доказивати.

Задржаћемо се, сада, на неким скоријим примерима процене градијента хармонијске функције. Први од њих је резултат Калаја и Вуоринена из [31].

***Теорема* 6** (Калај-Вуоринен [31])**.** *Ако је и реално-вредносна хармонијска функција на* $\mathbb{D}$ *тада је*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1 - |u(z)|^2}{1 - |z|^2} \tag{2.7}$$

Приметимо да овде „учествују" идентични изрази као у Шварцовој леми за холоморфне функције, али константа има другу вредност. Ова и претходна теорема дају оцене које су међусобно неупоредиве. Другим речима, за различите вредности $|u(z)|$ некад је боља једна, а у осталим случајевима друга неједнакост.

Ми ћемо овде, ипак, доказати теорему и то посредно, тј. доказиваћемо следеће јаче тврђење, које је дело Чена [11] .

***Теорема* 7** (Чен [11])**.** *Под претпоставкама претходне теореме важи*

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{4}{\pi}\frac{cos(\frac{\pi}{2}u(z))}{1 - |z|^2} \tag{2.8}$$

Пре самог доказа приметимо неколико ствари:

(а) Неједнакост (2.8) заиста поправља (2.7), јер је

$$1-\cos 2t = 2\sin t \geq 2\left(\tfrac{2\sqrt{2}}{\pi}t\right)^2, \quad |t| \leq \tfrac{\pi}{4},$$

па узимајући $t=\frac{\pi}{4}x$ добијамо $1-\cos(\frac{\pi}{2}x) \geq x^2$, $\cos(\frac{\pi}{2}x) \leq 1-x^2$.

(б) Такође, (2.8) је финија процена и од (2.6).

(в) Функција $u(z) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2y}{1-x^2-y^2}$ задовољава једнакост у (2.8) за свако $z \in \mathbb{D}$ (рачун ћемо овде изоставити).

Доказ. Слично доказу Хајнцове теореме, уочимо холоморфну функцију f чији је u реални део, а за конјуговану функцију v важи $v(0)=0$. Функција

$$g(z) = \operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{4}f(z))$$

слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ (разлози исти као у теореми 3). Према класичној Шварцовој леми,

$$|g'(0)| \leq 1-|g(0)|^2,$$

тј.

$$\frac{\pi}{4}\frac{f'(0)}{|\cos\frac{\pi}{4}|^2} \leq 1-\left|\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{4}f(0)\right)\right|^2.$$

Како је $|f'(0)| = |\nabla u(0)|$, то је:

$$\frac{\pi}{4}|\nabla u(0)| \leq |\cos w|^2 - |\sin w|^2,$$

за $w = \dfrac{\pi}{4}f(0)$.

Стављајући $w = x+iy$, за последњи израз добијамо

$$\begin{aligned}4|\cos w|^2 - 4|\sin w|^2 &= e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x - \left(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x\right)\\ &= 4\cos 2x = 4\cos(\tfrac{\pi}{2}f(0)),\end{aligned}$$

па је:

$$|\nabla u(z)| \leq \tfrac{4}{\pi}\cos(\tfrac{\pi}{2}u(0)).$$

Коначно, како је $|\nabla u(z)|(1-|z|^2) = |\nabla(u\circ\varphi_z)(0)|$, применом добијеног на $u\circ\varphi_z$ добијамо жељени резултат. □

Последња неједнакост има и геометријску интерпретацију:

Функција $K(z) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}u(z))$, *при условима теореме 7, јесте контракција из* $(\mathbb{D}, \rho)$ *у* $((-1,1), \rho)$, *где* ρ *означава одговарајуће хиперболичке метрике на* $\mathbb{D}$ *и* $(-1,1)$.

Слично излагање може се наћи и у [62], [63]. Монографија [63] у десетом поглављу садржи и интересантну причу о теоремама дисторзије конформних пресликавања.

2.3 Вишедимензиона уопштења

Рецимо још и да постоје нека уопштења Шварцове леме у контексту диференцијалне геометрије. Један такав резултат је Јауов из 1978. године [81]. Постоје и други радови у којима је извод пресликавања између две многострукости процењиван одозго у функцији кривина ових многострукости. У зависности од квалитета које полазна и долазна многострукост имају, изведене су разне оцене, а у овом контексту једна од значајнијих је Ројденова из [70].

Ми ћемо се овде усредсредити само на уопштења која се односе на јединичну лопту у $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ту, пре свега, мислимо на наредне две теореме:

***Теорема* 8** (Калај [32]). *Ако је* f *холоморфно пресликавање јединичне лопте* $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$ *у* $\mathbb{B}^m \subset \mathbb{C}^m$, *тада за* $m \geq 2$ *важи:*

$$\|f'(z)\| \leq \frac{\sqrt{1-|f(z)|^2}}{1-|z|^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n, \tag{2.9}$$

и за $m = 1$*:*

$$\|f'(z)\| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{2.10}$$

***Теорема* 9** (Калај [32]). *Нека је* f *плурихармонијска функција из* $\mathbb{B}^n$ *у* $(-1,1)$. *Тада важи неједнакост*

$$|\nabla f(z)| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}, \quad |z| < 1. \tag{2.11}$$

Обе теореме доказане су у [32], а њихова побољшања ће бити дата у наредном одељку. Будући да ћемо се касније ослањати на ова тврђења (тј. наши докази неће бити независни од ових), навешћемо комплетне доказе.

Притом ћемо користити следеће особине аутоморфизама јединичне лопте:

(a) $\varphi_a'(0) = -(1-|a|^2)P_a - \sqrt{1-|a|^2}Q_a$, (б) $\varphi_a'(a) = -\dfrac{1}{1-|a|^2}P_a - \dfrac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}Q_a$,

(в) φ_a је инволуција тј. $\varphi_a(\varphi_a(z)) = z$.

Овде је $P_a(z) = \dfrac{\langle z, a\rangle}{|a|^2}$ и $Q_a = I - P_a$. Приметимо да су P_a и Q_a ортогоналне пројекције на комплементарне потпросторе од $\mathbb{C}^n$. Доказ ових особина изводи се непосредном провером.

Коначно, припрему за доказ завршавамо навођењем наредног помоћног тврђења:

***Лема* 1** (Калај [32]). *Нека је* $n \in \mathbb{N}$ *и*

$$\begin{aligned} M = M_a &= -(1-|a|^2)P_a - \sqrt{1-|a|^2}Q_a, \\ N = N_a &= -\frac{1}{1-|a|^2}P_a - \frac{1}{1-|a|^2}Q_a. \end{aligned}$$

Тада је

$$\begin{aligned} \|M| &= \begin{cases} \sqrt{1-|a|^2}, & n \geq 2, \\ 1-|a|^2, & n = 1, \end{cases} \\ \|N\| &= \frac{1}{1-|a|^2}. \end{aligned}$$

Доказ. По дефиницији P_a и Q_a имамо

$$(1-|a|^2)P_a z + \sqrt{1-|a|^2}Q_a z = \sqrt{1-|a|^2}z + \left(1-|a|^2 - \sqrt{1-|a|^2}\right)\frac{\langle z,a\rangle a}{|a|^2},$$

па је:

$$\begin{aligned} \left|(1-|a|^2)P_a z + \sqrt{1-|a|^2}Q_a z\right|^2 &= \left|\sqrt{1-|a|^2}z + \left(1-|a|^2 - \sqrt{1-|a|^2}\right)\frac{\langle z,a\rangle a}{|a|^2}\right| \\ &= (1-|a|^2)|z|^2 + \left((1-|a|^2)^2 - (1-|a|^2)\right)\frac{|\langle z,a\rangle|^2}{|a|^2} \\ &\leq (1-|a|^2)|z|^2. \end{aligned}$$

Приметимо да за z ортогонално на a (тј. $\langle z, a\rangle = 0$) претходна неједнакост постаје једнакост. Отуда је $\|M\| = \sqrt{1-|a|^2}$. Случај $n = 1$ је једноставнији, јер је тада $Q_a \equiv 0$.

Утврдимо сада норму оператора N. Имамо:

$$N_a = -\frac{1}{1-|a|^2}P_a z - \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}Q_a z = \left(-\frac{1}{1-|a|^2} + \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}\right)\frac{\langle z,a\rangle a}{|a|^2} - \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}}z,$$

па је

$$|N_a|^2 = \frac{1}{1-|a|^2}|z|^2 + \left(\frac{1}{(1-|a|^2)^2} - \frac{1}{1-|a|^2}\right)\frac{|\langle z,a\rangle|^2}{|a|^2}.$$

Избор $z = \frac{a}{|a|}$ даје $\|N\| = \dfrac{1}{1-|a|^2}$. □

Доказ теореме 8. Нека је φ_a инволутивни аутоморфизам $\mathbb{B}^n$ на себе такав да је $\varphi_a(0) = a$. Ставимо $b = f(a)$. Са φ_b означимо инволутивни аутоморфизам $\mathbb{B}^m$ на себе за који је $\varphi(b) = b$ и уведимо пресликавање $g = \varphi_b^{-1} \circ f \circ \varphi_a^{-1}$. Тада је:

$$f(z) = \varphi_b \circ g \circ \varphi_a$$

и

$$f'(a) = \varphi_b'(0)\, g'(0)\, \varphi_a'(a) = M_b\, g'(0)\, N_a.$$

Како g слика јединичну лопту на себе и важи $g(0) = 0$, према ([71], Теорема 8.1.2.), следи да је $|g(0)| = 0$. Из $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ и претходне леме следи закључак теореме. Да је могуће достићи једнакост следи из наредног примера. Наиме, узмимо $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ и дефинишимо $f_t(z,w) = (z\sin(t), \cos(t))$. Тада $f_t : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ и при том је $|f_t'(0)| = \sin t$ и $|f_t(0)| = \cos t$. Отуда је $|f_t'(0)| = \sqrt{1-|f(0)|^2}$. □

Доказ теореме 9. Као што је и речено у уводном поглављу, плурихармонијске функције на лопти могу се представити као реални део неке холоморфне функције. Означимо са h плурихармонијски конјугат и са $\varphi = f + ih$ холоморфну функцију. Тада φ слика $\mathbb{B}^n$ у појас $S = \{w \,|\, -1 < \mathrm{Re}(w) < 1\}$.

Нека је

$$g(z) = \frac{2i}{\pi}\log\frac{1+z}{1-z}.$$

Ово је конформно пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на појас S. Отуда је $\psi(z) = g^{-1}(\varphi(z))$ холоморфна функција из $\mathbb{B}^n$ на $\mathbb{D}$. Тада имамо:

$$\varphi(z) = \frac{2i}{\pi}\log\frac{1+\psi(z)}{1-\psi(z)},$$

па је према претходној теореми

$$|\psi'(z)| \leq \frac{1-|\psi(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Са друге стране,

$$\varphi'(z) = \frac{4i}{\pi}\frac{\psi'(z)}{1-\psi^2(z)}.$$

Како је φ холоморфна, добијамо

$$|\varphi'(z)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}|\varphi_{z_k}|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} f_{x_k}^2 + \sum_{k=1}^{n} f_{y_k}^2}$$

и стога: $|\nabla f| = |\varphi'(z)|$.

Одредимо сада и најбољу константу C у неједнакости:

$$|\nabla f(z)| = C\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}.$$

Према претходном, имамо

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{4}{\pi}\frac{1-|\psi(z)|^2}{|1-\psi^2(z)|}\frac{1}{1-|z|^2},$$

па је довољно наћи најбољу константу C за коју је:

$$\frac{4}{\pi}\frac{1-|\psi(z)|^2}{|1-\psi(z)|}\frac{1}{1-|z|^2} \leq C\frac{1-|\operatorname{Re}\varphi(z)|^2}{1-|z|^2},$$

тј.

$$\frac{4\pi}{\pi^2 - 4\left|\operatorname{arctg}\frac{1+\psi}{1-\psi}\right|^2}\frac{1-|\psi|^2}{|1-\psi^2|} \leq C, \quad |\psi| < 1.$$

Означимо $w = \frac{1+\psi}{1-\psi} = re^{it}$. Тада је $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ и

$$1-|\psi|^2 = \frac{4r\cos t}{r^2+2r\cos t+1}, \quad |1-\psi^2| = \frac{4r|e^{it}|}{r^2+2r\cos t+1},$$

па чињеница да је $C = \frac{4}{\pi}$ следи из

$$|\cos t| \leq 1 - \tfrac{4}{\pi^2}t^2,$$

што важи за $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Једнакост се достиже за функцију

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2y_1}{1-x_1^2-y_1^2},$$

тада је

$$|\nabla f(0)| = \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{1-|f(0)|^2}{1-0^2}. \qquad \square$$

Теорема 8 се, у случају пресликавања $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ може геометријски интерпретирати и као:

$$\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z, w), \tag{2.12}$$

где ρ означава хиперболичку метрику, односно за $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$ важи:

$$\arcsin|f(z)| \leq \operatorname{arctanh}|z|. \tag{2.13}$$

На главном правцу наших разматрања је и следећа лема Ђаконова из рада [18].

***Теорема* 10** (Ђаконов [18])**.** *Ако је* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{B}^n)$ *и важи* $0 < |f(z)| \leq 1$ *за* $\forall z \in \mathbb{B}^n$, *тада је*

$$|f'(z)| \leq \frac{2|f(z)|}{1-|z|^2} \log \frac{1}{|f(z)|}. \tag{2.14}$$

Будући да ћемо у наредном одељку доказати рафинирану верзију ове неједнакости без позива на поступке из [18] нећемо наводити доказ овог тврђења.

Наведени резултати Калаја и Вуоринена ([31]), Ђаконова ([18]), Чена ([11]), Калаја из [32], Марковића ([47]) као и неки резултати из [55] аутора тезе могу се добити применом "метода појаса" који користи контрактивност аналитичких функција у односу на хиперболичке метрике на разним доменима. Тиме се поменути резултати стављају у општију перспективу. Метод је дело проф. Миодрага Матељевића ([51]), а исти аутор користећи поменути метод са коауторима Светликом и Кхалфалах добија и сличне резултате за функције са ограниченом Лапласијаном, као и хармонијска квазирегуларна пресликавања, респективно, у [53] и [54].

2.4 Инваријантни градијент у неједнакостима Шварцовог типа

Приметимо, прво, једну везу између „обичног" и инваријантног градијента, која се добија применом Коши-Шварцове неједнакости:

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\nabla}_z f(z)\right|^2 &= (1-|z|^2)\big(|\nabla_z f(z)|^2 - |\langle \nabla_z f(z), z\rangle|^2\big)\\ &\geq (1-|z|^2)\big(|\nabla_z f(z)|^2 - |z|^2|\nabla_z f(z)|^2\big) = (1-|z|^2)^2|\nabla_z f(z)|^2\end{aligned}$$

тј.

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| \geq (1-|z|^2)|\nabla_z f(z)|. \tag{2.15}$$

Управо је неједнакост (2.15) мотивација за разматрања у овом одељку. Резултати су дело аутора овог текста, објављени су у [55], а формулације неких од тврђења потичу од проф. др Мирослава Павловића.

Наиме, најпре ћемо појачати теорему 8 из претходног одељка у два смера, а потом и друге две користећи инваријантни градијент.

Наведимо и прве две теореме овог одељка:

***Теорема* 11** (Мелентијевић [55])**.** *За сваку холоморфну функцију $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ имамо*

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| \leq 1 - |f(z)|^2, \quad z \in \mathbb{B}^n, \tag{2.16}$$

док за холоморфно пресликавање $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^m$, $m \geq 2$ важи

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| \leq \sqrt{1 - |f(z)|^2}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{2.17}$$

Горња неједнакост (2.15) управо показује да ово заиста јесте рафинација теореме 8 из претходног одељка. Рецимо још и да ћемо у наредним редовима у случају $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ дати и нов доказ док се у другом случају ослањамо на резултате саме теореме коју побољшавамо.

Доказ за случај $m = 1$. Докажимо неједнакост за $z = 0$, тј.

$$|\widetilde{\nabla}_z f(0)| = |\nabla_z f(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

Фиксирајмо $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \partial\mathbb{B}^n$ и дефинишимо следећу функцију промењиве $z \in \mathbb{D}$:

$$g_\zeta(z) = f(\zeta_1 z, \zeta_2 z, \ldots, \zeta_n z), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Приметимо да g_ζ слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$, па можемо применити Шварц-Пикову лему:

$$|g'_\zeta(z)| \leq 1 - |g_\zeta(0)|^2.$$

Како је:

$$g'_\zeta = \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}(z) + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}(z) + \cdots + \zeta_n \frac{\partial f}{\partial z_n}(z),$$

избором $\zeta_i = \frac{1}{|\nabla_z f(0)|} \overline{\frac{\partial f}{\partial z_1}(0)}$, добијамо жељену процену

$$|\nabla_z f(0)| \leq 1 - |g(0)|^2 = 1 - |f(0)|^2.$$

Овде је модул извода g'_ζ процењен помоћу Коши-Шварцове неједнакости, а потом изабрана максимизирајућа n-торка ζ_i-ова. Наравно, због $|\widetilde{\nabla}_z f(0)| = |\nabla_z f(0)|$ имамо и:

$$|\widetilde{\nabla}_z f(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

Применимо сада последњу неједнакост на функцију $f \circ \varphi_z$ уместо f, па ћемо добити

$$\left|\widetilde{\nabla}_z (f \circ \varphi_z)(0)\right| \leq 1 - |(f \circ \varphi_z)(0)|^2 = 1 - |f(z)|^2$$

тј.

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| \leq 1 - |f(z)|^2,$$

због $|\widetilde{\nabla}_z (f \circ \varphi_z)(0)| = |\widetilde{\nabla}_z f(z)|$, кључне особине инваријантног градијента. Овим смо доказали теорему за $m = 1$. □

Доказ за случај $m \geq 2$. Према [32], имамо

$$|\widetilde{\nabla}_z f(0)| = |\nabla_z f(0)| \leq \sqrt{1 - |f(0)|^2},$$

па применом ове неједнакости на $f \circ \varphi_z$ добијамо:

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| = |\nabla_z (f \circ \varphi_z)(0)| \leq \sqrt{1 - |(f \circ \varphi_z)(0)|^2} = \sqrt{1 - |f(z)|^2}.$$

Сада, користећи ову неједнакост за $f \circ \varphi_z$, имамо $\widetilde{\nabla}_z$-верзију:

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| = |\widetilde{\nabla}_z (f \circ \varphi_z)(0)| \leq (1 - |f \circ \varphi_z(0)|^2) = (1 - |f(z)|^2).$$ □

Следећа теорема представља побољшање неједнакости (2.12), односно Теореме 8 у геометријском смислу.

***Теорема* 12** (Мелентијевић [55])**.** *Свака холоморфна функција* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ *је контракција у односу на Бергманове метрике на* $\mathbb{B}^n$ *и* $\mathbb{D}$.

Доказ. Треба доказати да је $d\left(f(z), f(w)\right) \leq d_{\mathbb{B}^n}(z, w)$ за холоморфну функцију $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$. Према (2.12), имамо

$$\rho\left(f(z), f(0)\right) \leq \rho(z, 0).$$

Како је

$$d(z, 0) = \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|} = \rho(z, 0), \quad z \in \mathbb{B}^n$$

и Бергманова и хиперболичка метрика се поклапају на диску $\mathbb{D}$, тј.

$$d\left(f(z), f(0)\right) = \rho\left(f(z), f(0)\right),$$

закључујемо да важи

$$d\left(f(z), f(0)\right) \le d_{\mathbb{B}^n}(z, 0). \tag{2.18}$$

За задате $z, w \in \mathbb{B}^n$ постоји аутоморфизам φ јединичне лопте $\mathbb{B}^n$ такав да је $\varphi(0) = z$, $\varphi(a) = w$. Како је φ изометрија у односу на Бергманове метрике на домену и кодомену, имамо

$$d_{\mathbb{B}^n}(z, w) = d\left(\varphi(0), \varphi(a)\right) = d(0, a).$$

Формалним узимањем $f \circ \varphi$ уместо f, добијамо

$$d\left((f \circ \varphi)(0), (f \circ \varphi)(a)\right) \le d_{\mathbb{B}^n}(0, a),$$

што даје

$$d\left(f(z), f(w)\right) \le d_{\mathbb{B}^n}(0, a) = d_{\mathbb{B}^n}(z, w). \qquad \square$$

Из (1.7) и (1.11) имамо $|T_w(z)| \ge |\varphi_w(z)|$, што повлачи да је $d(z, w) \le \rho(z, w)$. Одавде видимо да Теорема 12 заиста представља појачање (2.12).

Као директну последицу добијамо

***Теорема* 13** (Шварц-Пикова лема за функције више промењљивих)**.** *За сваку холоморфну функцију $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ важи*

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)}f(w)}\right| \le \frac{\sqrt{|z - w|^2 + |\langle z, w\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1 - \langle z, w\rangle|}. \tag{2.19}$$

Доказ Теореме 13. Према Теореми 12 и (1.10) имамо

$$\log \frac{1 + \left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right|}{1 - \left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right|} \le \log \frac{|1 - \langle z, w\rangle| + \sqrt{|z - w|^2 + |\langle z, w\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1 - \langle z, w\rangle| - \sqrt{|z - w|^2 + |\langle z, w\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}$$

што повлачи

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(z)}f(w)}\right| \le \frac{\sqrt{|z - w|^2 + |\langle z, w\rangle|^2 - |z|^2|w|^2}}{|1 - \langle z, w\rangle|}. \qquad \square$$

Шварц-Пикова лема се, у нешто другачијем облику, може наћи и у [71].

Следи рафинација Ђаконовљеве леме.

***Теорема* 14** (Мелентијевић [55])**.** *За сваку холоморфну функцију* $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{D}$ *без нула у* $\mathbb{B}^n$ *имамо:*

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| \leq 2|f(z)| \log \frac{1}{|f(z)|}, \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{2.20}$$

Доказ. Фиксирајмо $\zeta \in \partial\mathbb{B}^n$ и применимо последицу Харнакове неједнакости из одељка 2.2, тј.

$$|\nabla u(z)| \leq \frac{2u(z)}{1-|z|^2}.$$

За позитивну хармонијску функцију $u(z) = \log \frac{1}{F_\zeta(z)}$, где је

$$F_\zeta(z) = f(\zeta_1 z, \zeta_2 z, ..., \zeta_n z), \quad z \in \mathbb{D},$$

за $z = 0$ важи:

$$|F'_\zeta(0)| \leq 2|F_\zeta(0)| \log \frac{1}{|F_\zeta(0)|} = 2|f(0)| \log \frac{1}{|f(0)|}.$$

Даље,

$$F'_\zeta = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(0),$$

бирањем $\zeta_i = \frac{1}{|\nabla_z f(z)|} \frac{\partial f}{\partial z_i}(0)$, где је

$$|\nabla_z f(0)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big|\frac{\partial f}{\partial z_i}(0)\Big|^2},$$

добијамо

$$|\widetilde{\nabla}_z f(0)| = |\nabla_z f(0)| \leq 2|f(0)| \log \frac{1}{|f(0)|}.$$

Примена овог аргумента на функцију $f \circ \varphi(z)$ даје

$$|\widetilde{\nabla}_z f(z)| = |\widetilde{\nabla}_z (f \circ \varphi_z)(0)| \leq 2|(f \circ \varphi_z)(0)| \log \frac{1}{|(f \circ \varphi_z)(0)|} = 2|f(z)| \log \frac{1}{|f(z)|}. \ \square$$

Потпуно аналогно доказује се и следећа теорема, која појачава Теорему 9:

***Теорема* 15** (Мелентијевић [55])**.** *Нека је* f *плурихармонијска функција из* $\mathbb{B}^n$ *у* $(-1, 1)$*. Тада важи неједнакост*

$$|\tilde{\nabla} f(z)| \leq \frac{4}{\pi}(1 - |f(z)|^2), \quad |z| < 1. \tag{2.21}$$

Приметимо да се овде, за разлику од ранијих теорема, у формулацији појављује реални градијент, али с обзиром на суштинско својство које он поседује, једноставно метод доказа преносимо и на ову теорему.

2.5 Позитивне хармонијске функције у полуравни и неки контрапримери

У [47] је доказано следеће тврђење:

***Теорема* 16** (Марковић [47])**.** *Свака хармонијска функција* $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ *делује као контракција у односу на хиперболичке метрике на* $\mathbb{H}$ *и* $\mathbb{R}^+$*.*

Овде ћемо дати другачији доказ ове теореме, који се ослања на примену Харнакове неједнакости. Такође, даћемо и контрапримере који показују да се $\mathbb{H}$ не може заменити полупростором $\mathbb{R}^+_n$, $n \geq 3$. Поменути доказ и контрапримери дело су аутора тезе ([55]).

Користићемо следећу Харнакову неједнакост:

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \frac{v(z)}{v(0)} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \tag{2.22}$$

за позитивну хармонијску функцију v на диску $\mathbb{D}$.

Доказ. За хармонијску функцију $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^+$ дефинишимо хармонијску функцију $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ са

$$u(z) = v(\varphi(z)),$$

где је $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ конформно пресликавање из $\mathbb{H}$ на $\mathbb{D}$. Обратно, за сваку хармонијску $u : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ постоји хармонијска $v : \mathbb{H} \to \mathbb{R}^+$ дата са $u(z) = u(\varphi^{-1}(z))$, тј. $u = v \circ \varphi$.

Тако, за $\zeta \in \mathbb{H}$, $\frac{\zeta-i}{\zeta+i} \in \mathbb{D}$, користећи (2.22) добијамо

$$\frac{v\left(\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right)}{v(0)} \leq \frac{1+\left|\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right|}{1-\left|\frac{\zeta-i}{\zeta+i}\right|} = \frac{1+\left|\frac{\zeta-i}{\zeta-i}\right|}{1-\left|\frac{\zeta-i}{\zeta-i}\right|}, \quad \text{тј.} \quad \frac{u(\zeta)}{u(i)} \leq \frac{1+\left|\frac{\zeta-i}{\zeta-1}\right|}{1-\left|\frac{\zeta-1}{\zeta-1}\right|},$$

односно узимањем логаритама обеју страна:

$$\rho(u(\zeta), u(i)) \leq d(\zeta, i) \tag{2.23}$$

(у одељку 1.6 дати су изрази за метрику на $\mathbb{H}$ и $\mathbb{R}^+$).

Нека је ψ конформни аутоморфизам горње полуравни која слика ζ и i редом у z и w. Имамо:

$$\rho(\zeta, i) = \rho(\psi(\zeta), \psi(i)) = \rho(z, v)$$

и

$$\rho(u \circ \psi(\zeta), u \circ \psi(i)) = \rho(u(z), u(w)),$$

па (2.23) даје

$$\rho(u(z), u(w)) \leq \rho(z, w).$$

□

Последица доказа је аналогно тврђење са диском $\mathbb{D}$ уместо $\mathbb{H}$.

Коначно, наводимо и контрапримере за позитивне хармонијске функције у полупростору у димензијама $n \geq 3$.

Пример 1 (Мелентијевић [55]). Следећа Харнакова неједнакост за хармонијске функције $v : \mathbb{B}_n \to \mathbb{R}^+$

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^{n-1}} \leq \frac{v(x)}{v(0)} \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}}$$

даје мотивацију за конструисање контрапримера у вишим димензијама.

За $n \geq 3$, хиперболичка метрика у лопти $\mathbb{B}_n$ у $\mathbb{R}^n$ дата је формулом

$$\rho(x, y) = \cosh^{-1}\bigl(1 + \delta(x, y)\bigr) = \log\Bigl(1 + \delta(x, y) + \sqrt{\bigl(1 + \delta(x, y)\bigr)^2 - 1}\Bigr),$$

где је

$$\delta(x, y) = \frac{2\|x - y\|^2}{(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}$$

и $\|\cdot\|$ означава Еуклидску норму.

Тако, за $y = 0$ имамо:

$$\delta(x, 0) = \frac{2\|x\|^2}{1 - \|x\|^2},$$

$$\rho(x, 0) = \log\left(1 + \frac{2\|x\|^2}{1 - \|x\|^2} + \sqrt{\left(\frac{2\|x\|^2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 + 1}\right) = \log\frac{1 + \|x\|}{1 - \|x\|}.$$

Ако је $u : \mathbb{B}_n \to \mathbb{R}^+$ хармонијска, тада

$$\rho(u(x), u(0)) \leq \rho(x, 0) \tag{2.24}$$

важи ако и само ако је

$$\frac{u(x)}{u(0)} \leq \frac{1 + \|x\|}{1 - \|x\|}.$$

За $\mathbf{1} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ и $n \geq 3$, функција

$$u(x) = \frac{1 - \|x\|^2}{\|\mathbf{1} - x\|^n}$$

је позитивна хармонијска и ако узмемо $x = (t, 0, \ldots, 0)$, $0 < t < 1$, (2.24) добијамо

$$\frac{1-t^2}{(1-t)^n} \leq \frac{1+t}{1-t},$$

тј. $(1-t)^2 \leq (1-t)^n$, што не важи за $n \geq 3$.

Пример 2 (Мелентијевић [55]). На полупростору $\mathbb{R}^n_+$ за $n \geq 3$, хиперболичка метрика је дата са

$$\rho(x,y) = \cosh^{-1}\left(1 + \frac{\|x-y\|^2}{2x_n y_n}\right),$$

где је $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $x_n, y_n > 0$.

За $x = (0, 0, \ldots, t)$, $t > 1$ и $y = (0, 0, \ldots, 1)$, имамо

$$\delta(x,y) = 1 + \frac{\|x-y\|^2}{2x_n y_n} = 1 + \frac{(t-1)^2}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

и

$$\rho(x,y) = \log\bigl(\delta(x,y) + \sqrt{\delta(x,y)^2 - 1}\bigr) = \log\left(\frac{t^2+1}{2t} + \sqrt{\left(\frac{t^2+1}{2t}\right)^2 - 1}\right) = \log t,$$

па $\rho(u(x), u(y)) \leq \rho(x,y)$ је еквивалентно са

$$\frac{u(y)}{u(x)} \leq t. \tag{2.25}$$

Бирајући за u:

$$u(x) = \frac{x_n}{\|x\|^n},$$

добијамо

$$\frac{u(y)}{u(x)} = \frac{1}{t^{1-n}} = t^{n-1},$$

што не може бити мање од t за $n \geq 3$ и $t > 1$.

Глава 3

Березинова трансформација

3.1 Березинова трансформација оператора

Березинова трансформација придружује глатке функције операторима на Хилбертовим просторима аналитичких функција. Уобичајена поставка укључује отворен подскуп Ω простора $\mathbb{C}^n$ и Хилбертов простор H аналитичких функција на Ω.

Ако претпоставимо да је функционал евалуације (тј. израчунавања вредности функције) у тачки z непрекидан линеаран оператор на H, тада постоји $K_z \in H$ таква да је $f(z) = \langle f, K_z \rangle$ за сваку $f \in H$. Ово, наравно, и јесте случај са свим важнијим примерима у којим се овај метод користи—простори Хардија, Бергмана, Баргман-Сегала, итд. Функција K_z која репродукује вредност у z назива се репродуктивним језгром. Нормализовано репродуктивно језгро k_z дефинисано је као $k_z = \frac{K_z}{\|K_z\|}$.

За ограничен оператор T на Хилбертовом простору H, Березинова трансформација од T, коју означавамо са $\widetilde{T}$, јесте комплексно-вредносна функција на Ω дефинисана са

$$\widetilde{T}(z) = \langle T k_z, k_z \rangle.$$

За сваки ограничен оператор T на H, Березинова трансформација $\widetilde{T}$ је ограничена реално-аналитичка функција на Ω. Својства оператора T често су рефлектована особинама Березинове трансформације $\widetilde{T}$. Овај концепт уведен је у [8] , а трансформација носи име у част творца ове идеје.

Идеја се показала успешном на неколико места, од Хардијевог простора, Баргман-Сегаловог, до веза са просторима Блоха и функција ограничене средње осцилације BMO. Ипак, најуспешније примене Березинова трансформација налази као средство у изучавању оператора на Бергмановом простору. Усресредимо се на овај простор.

Бергманов простор $A^2(\mathbb{D})$ састоји се од аналитичких функција f на јединичном диску $\mathbb{D}$ таквих да је

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dm(z) < +\infty.$$

Тада је репродуктивно језгро дато формулом

$$K_z(w) = \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2},$$

док је нормализовано језгро дато са

$$k_z(w) = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.$$

За $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$, Теплицов оператор са симболом φ је оператор T_φ на $A^2(\mathbb{D})$ задат са

$$T_\varphi f = P(\varphi f),$$

где је P ортогонална пројекција $L^2(\mathbb{D})$ на $A^2(\mathbb{D})$– Бергманова пројекција дефинисана са

$$Pf(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^2} dA(w).$$

Березинова трансформација функције φ, у ознаци $\widetilde{\varphi}$ или $B(\varphi)$, дефинише се као Березинова трансформација Теплицовог оператора T_φ. Ова дефиниција води до формуле

$$\widetilde{\varphi}(z) = B\varphi(z) = \frac{(1-|z|^2)^2}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\varphi(w)}{|1-\overline{z}w|^4}\, dm(w). \tag{3.1}$$

Ако је φ ограничена хармонијска функција на $\mathbb{D}$, тада својство средње вредности даје $\widetilde{\varphi} = \varphi$, што ћемо касније показати. Обрат овог тврђења, тј. [19] —ако је $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$ и $\widetilde{\varphi} = \varphi$, тада је φ хармонијска на $\mathbb{D}$, доказао је Енглиш. Ахерн, Флорес и Рудин [3] проширили су овај резултат на функције $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$ (за које ова формула и даље има смисла) и показали да вишедимензиони аналог важи до димензије 11, али у 12 и више димензија није тачан.

Нормализовано репродуктивно језгро k_z слабо конвергира нули у $A^2(\mathbb{D})$ кад $z \to \partial\mathbb{D}$. Ово повлачи да ако је T компактан оператор на Бергмановом простору $A^2(\mathbb{D})$, тада $\widetilde{T}(z) \to 0$ кад $z \to \partial\mathbb{D}$. Обрат не важи, што показује пример оператора T дефинисаног на $A^2(\mathbb{D})$ са

$$(Tf)(z) = f(-z).$$

Наиме, овај оператор није компактан (заправо је унитаран), а $\widetilde{T}(z) = \dfrac{(1-|z|^2)^2}{(1+|z|^2)^2}$, иако је $\widetilde{T}(z) \to 0$ кад $z \to \partial\mathbb{D}$.

Ипак, ситуација је другачија за Теплицове операторе, и још општије, за коначне збирове коначних производа Теплицових оператора. Акслер и Зенг ([7]) доказали су да такав оператор јесте компактан ако и само ако његова Березинова трансформација тежи нули кад $z \to \partial\mathbb{D}$.

У наредном одељку даћемо и један нешто другачији поглед на ову трансформацију и доказати поменуту везу са хармонијским функцијама. Више о свему овде наведеном може се наћи у [9], [76], [84].

3.2 Березинова трансформација функција

Видели смо да се Березинова трансформација функција уводи за $L^\infty(\mathbb{D})$ функције φ као трансформација Теплицовог оператора T_φ са симболом φ. Сада ћемо дефинисати овај појам на широј класи функција $L^1(\mathbb{B}^n)$, посматрајући га као аналог Пуасонове трансформације. Наиме, за хармонијске функције h у диску $\mathbb{D}$ непрекидне на $\overline{\mathbb{D}}$, својство средње вредности даје:

$$h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it})\, dt.$$

Мењањем h са $h \circ \varphi_z$, где је $\varphi_z(w) = \dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}$, $w \in \mathbb{D}$ и сменом променљивих, добијамо

$$h(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} h(e^{it})\, dt, \tag{3.2}$$

где десну страну интерпретирамо као Пуасонову трансформацију функције h:

$$h \in L^1(\mathbb{T}) \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-ze^{-it}|^2} h(e^{it})\, dt.$$

Слично, мотивисани овим примером, искористимо својство средње вредности у односу на n-димензиону Лебегову меру на $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$:

$$h(0) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} h(w)\, dv_n(w). \tag{3.3}$$

Применом (3.3) на $h \circ \varphi_z$ уместо h добијамо

$$\begin{aligned} h(z) = (h \circ \varphi_z)(0) &= \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} (h \circ \varphi_z)(w)\, dv(w) \\ &= \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} h(w)(J_{\mathbb{R}}\varphi_z)(w)\, dv(w) \\ &= \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} h(w) \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z, w\rangle|^{2n+2}}\, dv(w). \end{aligned}$$

Након увођења смене и убацивањем вредности

$$(J_{\mathbb{R}}\varphi_z)(w) = \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z, w\rangle|^{2n+2}}.$$

Овде је φ_z аутоморфизам лопте који слика 0 у z.

Последњи израз узимамо за дефиницију Березинове трансформације функције $f \in L^1(\mathbb{B}^n)$:

$$(Bf)(z) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z, w\rangle|^{2n+2}} f(w)\, dv(w). \tag{3.4}$$

За хармонијску функцију f, према претходном разматрању видимо да је $Bf \equiv f$. Као што смо напоменули раније, обрат важи за $n \leq 11$ и ми ћемо га касније извести у димензији 2. Пре припрема за доказ, напоменимо да ћемо разматрати и једну тежинску верзију Березинове трансформације

$$(B_\alpha f)(z) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+2}} f(w)\, dv_\alpha(w), \tag{3.5}$$

где је

$$dv_\alpha(w) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\pi^n}(1-|w|^2)^\alpha\, dv(w). \tag{3.6}$$

Рецимо још и да је Березинова трансформација ограничен оператор на $L^p(\mathbb{B}^n)$ за $1 \le p \le +\infty$. У случају $n=2$, Достанић је нашао и тачну норму ([16]), да би нешто касније користећи сличан принцип тврђење уопштили Лиу и Жоу ([43]). Марковић у [48] разматра Форели-Рудинову пројекцију и добија претходне резултате као последицу. Такође, Березинова трансформација је ограничена и као оператор $L^\infty \to \mathcal{B}$, где је $\mathcal{B}$ простор Блоховог типа (тј. $(1-|z|^2)|\nabla f(z)|$ је ограничен, али f је у општем случају C^1 функција). Најбољу процену у овом контексту дао је аутор рада у [57], и односи се на фамилију B_α.

Анализирајмо сада теорему Енглиша ([19]). Пре него што пређемо на сам доказ, увешћемо неке помоћне термине и тврђења.

Означимо са B^α оператор дефинисан са

$$(B^\alpha f)(z) = \frac{\alpha+1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}(1-|w|^2)^\alpha}{|1-z\overline{w}|^{4+2\alpha}} f(w)\, dv(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

за функције $f \in L^1(\mathbb{D}, dv_\alpha)$. Приметимо да смена променљиве показује да важи и

$$(B^\alpha f)(z) = \int_{\mathbb{D}} f \circ \varphi_z(w)\, dv_\alpha(w). \tag{3.7}$$

Једноставно се проверавају и следеће особине фамилије оператора B^α, за $\alpha > -1$:

(а) $(B^\alpha f) \circ \varphi = B^\alpha(f \circ \varphi)$ за Мебијусова пресликавања диска $\mathbb{D}$,

(б) $B^\alpha B^\beta = B^\beta B^\alpha$ на $L^1(\mathbb{D}, dv_\alpha)$, $\alpha < \beta$.

Доказ (а) следи једноставним коришћењем примедбе (3.7), док (б) следи провером за $f \in L^1(\mathbb{D}, dv_\alpha)$ у нули, а затим преношењем добијеног резултата на све $z \in \mathbb{D}$ помоћу (а).

Са $\tilde{\Delta}$ означавамо инваријантни Лапласијан дефинисан као

$$\tilde{\Delta} f(z) = (1-|z|^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}(z).$$

Као што и само име каже, $\tilde{\Delta}$ је инваријантан у односу на аутоморфизме диска, тј.

$$\tilde{\Delta}(f \circ \varphi)(z) = (\tilde{\Delta} f)(\varphi(z))$$

важи за свако $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$.

Следећа једнакост повезује инваријантни Лапласијан и операторе B^α.

Лема 2 ([23])**.** *За* $\alpha > -1$ *и свако* $f \in L^1(\mathbb{D}, dv_\alpha)$ *важи*

$$\tilde{\Delta} B^\alpha f = (\alpha+1)(\alpha+2)\big(B^\alpha f - B^{\alpha+1} f\big).$$

Доказ. Из инваријантности $\tilde{\Delta}$ и B^α у односу на $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ довољно је доказати да за свако $f \in L^1(\mathbb{D}, dv_\alpha)$ важи

$$\tilde{\Delta} B^\alpha f(0) = (\alpha+1)(\alpha+2)\big(B^\alpha f(0) - B^{\alpha+1} f(0)\big).$$

Рачунајући $\tilde{\Delta} B^\alpha f(0)$ по дефиницији оператора $\tilde{\Delta}$ и прегруписавањем делова добијеног израза добијамо десну страну једнакости. □

Дакле, имамо следећи операторски идентитет:

$$B^{\alpha+1} = \Big(1 - \frac{\tilde{\Delta}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\Big) B^\alpha. \tag{3.8}$$

Као једноставну последицу ове леме добијамо и једнакост $B^n = G_n(\tilde{\Delta})B$ на $L^1(\mathbb{D})$ за

$$G_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{z}{k(k+1)}\Big), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функција $G(z) = \lim_{n\to\infty} G_n(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\big(1 - \frac{z}{k(k+1)}\big)$ је цела и $G_n(z) \to G(z)$ равномерно на компактним подскуповима $\mathbb{C}$-равни.

У овом одељку ћемо користити и наредне ознаке:

$$S = \{w \in \mathbb{C} \,|\, -1 < \operatorname{Re} w < 2\},$$
$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = -w(1-w) \text{ за неко } w \in S\}.$$

Скуп S се као отворен и повезан слика на отворен и повезан скуп Ω функцијом $g(w) = -w(1-w)$.

Лема 3 ([19])**.** *Ако је* $z = -w(1-w)$, *тада је*

$$G(z) = \frac{\sin \pi w}{\pi w(1-w)}.$$

Такође, $G(z) \neq 1$ *за* $z \in \Omega \setminus \{0\}$.

Доказ. У производу

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{w(1-w)}{k(k+1)}\Big)$$

k-ти чинилац можемо изразити као

$$\Big[\Big(1 + \frac{w}{k}\Big)e^{-\frac{w}{k}}\Big]\Big[\Big(1 + \frac{1-w}{k}\Big)e^{-\frac{1-w}{k}}\Big]\Big[\Big(1 + \frac{1}{k}\Big)^{-1} e^{\frac{1}{k}}\Big].$$

Жељена формула за G_1 сада следи из бесконачног производа за $\frac{1}{\Gamma}$:

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-\frac{z}{k}}$$

и формуле допуњавања $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin \pi z}$.

Да докажемо да је $G(z) \neq 1$ за $z \in \Omega \setminus \{0\}$, довољно је показати да функција

$$\phi(w) = \frac{\pi w(1-w)}{\sin \pi w}$$

задовољава $\phi(w) \neq 1$ за $w \in S \setminus \{0,1\}$. Функција ϕ има следеће својство симетрије

$$\phi\big(\tfrac{1}{2}+w\big) = \phi\big(\tfrac{1}{2}-w\big)$$

и

$$\phi\big(\tfrac{1}{2}+iy\big) = \frac{\pi\big(y^2+\frac{1}{4}\big)}{\cosh(\pi y)} < 1,$$

за све $y \in \mathbb{R}$.

Докажимо, зато, да једначина $\phi(w) = 1$ у појасу $-1 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}$ нема других решења осим $w = 0$. Користићемо Принцип аргумента.

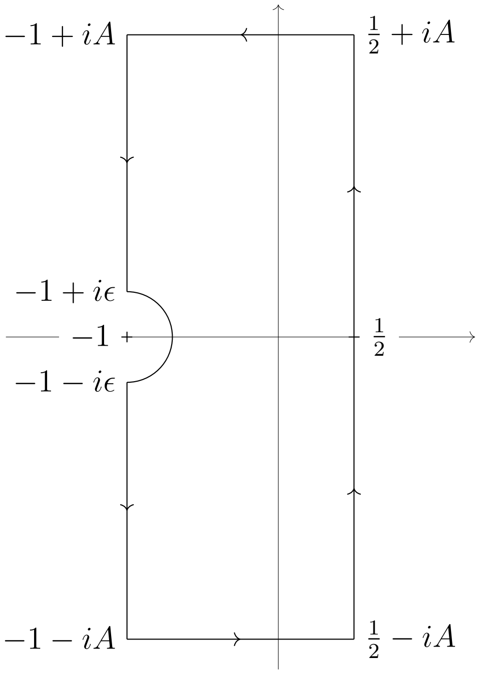
С обзиром да у $-1 < \operatorname{Re} w < \frac{1}{2}$ функција *брзо* опада кад $\operatorname{Im} w \to +\infty$, постоји $A > 0$ такво да је $|\phi(w)| < 1$ за свако $w = u + iv$, где је $-1 \leq u \leq \frac{1}{2}$ и $v \in \mathbb{R}$, $|v| \geq A$. Посматрајмо сада позитивно оријентисану контуру са слике 3.1.

Заправо, показаћемо да слика контуре γ, $\phi(\gamma)$, обилази око 1 тачно једанпут. Кренућемо из $w = \frac{1}{2}$ по γ и кретати се нагоре. Крива $\phi(\gamma)$ кренуће из $\frac{\pi}{4}$, и ићи до 0 дуж реалне осе. Док се w буде кретало налево из $\frac{1}{2} + iA$ до $-1 + iA$, $\phi(\gamma)$ ће осциловати у полуравни до лево од тачке 1. За w између $-1 + iA$ и $-1 + i\epsilon$, имамо

$$\phi(-1+iv) = \frac{\pi}{\sinh(\pi v)}\big[-3v + i(v^2-2)\big].$$

Овај део криве $\phi(\gamma)$ додирује реалну осу лево од тачке 1 само за $v = \sqrt{2}$. Дакле, слика од γ функцијом ϕ није још увек додирнула реалну осу десно од 1. Посматрајмо сада $\phi(w)$ за w на малом полукругу у близини 1. Једноставан рачун показује

$$\phi(w) = \frac{2}{w+1} + \psi(w),$$



Слика 3.1: Контура из доказа леме 3.

где је $\psi(w)$ аналитичка у околини $w=-1$. Следи да је

$$\phi(-1+\varepsilon e^{it}) = \frac{2}{\varepsilon}e^{-it} + O(\varepsilon),$$

што показује да за довољно мало $\varepsilon > 0$, крива

$$\phi(-1+\varepsilon e^{it}), \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2},$$

пресеца реалну осу близу тачке $\frac{2}{\varepsilon}$, а индекс $\phi(\gamma)$ у односу на тачку 1 неће зависити од тачног броја пресека ове криве са реалном осом. Коначно, из горње анализе и релације $\overline{\phi(w)} = \phi(\overline{w})$, и на остатку пута $\phi(w)$ неће пресећи реалну осу с десне стране 1. Зато је $\mathrm{Ind}_1\phi(\gamma) = 1$. □

Следећом лемом о сопственим функцијама инваријантног Лапласијана завршавамо припрему за доказ теореме Енглиша.

***Лема* 4** (Енглиш [19],[23]). *Нека $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$ и $\lambda = -\alpha(1-\alpha)$. Са X_λ означимо сопствени простор оператора $\tilde{\Delta}$ који одговара сопственој вредности λ. Нека је*

$$g_\alpha(z) = \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-ze^{-i\theta}|^{2\alpha}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Тада важи:

(а) $g_\alpha \in X_\lambda$.

(б) Ако $f \in X_\lambda$ *и* f *је радијална, тада је* $f = f(0)g_\alpha$.

(в) $X_\lambda \cap L^1(\mathbb{D}) \neq \{0\}$ *ако и само ако је* $\alpha \in S$.

Доказ. Нека је $P(e^{i\theta}, z)$ Пуасоново језгро. Тада је

$$g_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big[P(e^{i\theta}, z)\big]^\alpha \, d\theta, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Диференцирањем овог израза и коришћењем хармоничности $P(e^{i\theta}, z)$ по z добијамо (а).

За доказ (б), означимо $f(z) = g\big(|z|^2\big) \in X_\lambda$. Тада је $g(x)$, $0 \leq x \leq 1$ решење следеће диференцијалне једначине

$$x(1-x)^2 g''(x) + (1-x)^2 g'(x) = \lambda g(x), \quad 0 < x < 1.$$

Према (а), једно решење је $g_1 = g_\alpha(\sqrt{\lambda})$, а друго решење можемо наћи стандардним методом за смањивање степена једначине:

$$g_2(x) = g_1(x) \int_1^x \frac{dt}{t g_1^2(t)}, \quad 0 < x < 1.$$

Решења g_1 и g_2 су линеарно независна, па је опште решење $g = a g_1 + b g_2$. Али, g_1 и g_2 су ограничене у околини тачке $x = 0$, а g_2 је неограничена, па је $b = 0$ и $g = g(0) g_1$, тј. $f = f(0) g_\alpha$.

Претпоставимо да X_λ садржи не-нула функцију $f \in L^1(\mathbb{D})$. Због инваријантности, можемо претпоставити да је $f(0) \neq 0$. Може се проверити и да $f \in X_\lambda$ повлачи $f^\# \in X_\lambda$, за

$$f^\#(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{it}) \, dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Сада (б) даје $f^\# = f(0) g_\alpha$, што припада $L^1(\mathbb{D})$ ако и само ако $g_\alpha \in L^1(\mathbb{D})$. Но последње важи ако и само ако $\alpha \in S$ (тј. $-1 < \operatorname{Re}\alpha < 2$). □

Наведимо сада и доказ теореме Енглиша из [19].

Доказ. Формула за B даје да је свака функција која задовољава $f = Bf$ реално-аналитичка, па се на скуп $M = \ker(B - I) \cap L^1(\mathbb{D})$ може применити $\tilde{\Delta}$. Означимо $\tilde{\Delta}_M \coloneqq \tilde{\Delta}|_M$. Лема 2 даје

$$\tilde{\Delta}_M = 2(f - B^1 f), \quad f \in M.$$

Како је B^1 ограничен на $L^1(\mathbb{D})$, $\tilde{\Delta}_M$ слика M у $L^1(\mathbb{D})$. Сада, из $BB^1 = B^1B$ имамо и

$$B\tilde{\Delta}_M f = 2\big(Bf - BB^1 f\big) = 2(f - B^1 f) = \tilde{\Delta}_M f, \quad f \in M,$$

па $\tilde{\Delta}_M$ слика M у M, те је $\tilde{\Delta}_M$ ограничен линеаран оператор на Банаховом простору M.

Имали смо

$$B^n f = G_n(\tilde{\Delta})Bf = G_n(\tilde{\Delta_M})f, \quad f \in M,$$

па пошто $G_n \to G$ равномерно на компактима у $\mathbb{C}$ и $\tilde{\Delta}_M$ је ограничен линеаран оператор на M, $G_n(\tilde{\Delta}_M) \to G(\tilde{\Delta}_M)$. Због $B^n f \to f$, $n \to \infty$, закључујемо $G(\tilde{\Delta}_M)f = f$, тј. $G(\tilde{\Delta}_M) = \mathbf{1}_M$.

Нека је λ сопствена вредност за Δ_M. Лема 4 даје да $\lambda \in \Omega$. Ако је $f \in X_\lambda$, важи

$$f = G(\tilde{\Delta}_M)f = G(\lambda)f.$$

Следи да је $G(\lambda) = 1$, а по леми 3 и $\lambda = 0$, тј. једина сопствена вредност $\tilde{\Delta}_M$ је нула.

Сетимо се да је $G(z) - 1 = zH(z)$, где је H цела и $H(0) \neq 0$. Из операторског холоморфног рачуна ([74]) имамо $0 = G(\tilde{\Delta}_M) - I = H(\tilde{\Delta}_M)\tilde{\Delta}_M$, где је $I = \mathbf{1}_M$ идентички оператор на M. Будући да је 0 једина сопствена вредност $\tilde{\Delta}_M$, теорема о пресликавању спектра даје и једину сопствену вредност $H(\tilde{\Delta}_M) = H(0) \neq 0$.

Специјално, $H(\tilde{\Delta}_M)$ је „1-1”, тј. ако за неко $f \in M$ важи $H(\tilde{\Delta}_M)f = 0$, онда мора бити $f = 0$, јер 0 није сопствена вредност оператора $H(\tilde{\Delta}_M)$. Сад, ако $f \in M$, тада је и $H(\tilde{\Delta}_M)\tilde{\Delta}_M f = 0$, па и $\tilde{\Delta}_M f = 0$, тј. f је хармонијска. □

Детаљнији увод у теорију Бергманових простора и коришћењу Березинове трансформације може се наћи у монографији [23] или [17].

3.3 L^p норма Березинове трансформације

У овом одељку размотрићемо проблем налажења тачне норме једне класе интегралних оператора на неким тежинским L^p просторима на $[0,1]$,. Као последицу израчунавања L^p норме ових оператора, одредићемо и $\|B\|_{L^p(\mathbb{B}^n)\to L^p(\mathbb{B}^n)}$, за $1 < p \leq +\infty$. Овај приступ потиче од Марковића ([48]).

Сада ћемо увести помоћне појмове и формулисати основни резултат.

За $\mu > 0$, са $L^p_\mu(0,1)$ означаваћемо простор свих мерљивих функција $\varphi(t)$ у $[0,1]$ које задовољавају услов

$$\|\varphi\|^p_{p,\mu} = \mu \int_0^1 |\varphi(t)|^p t^{\mu-1}\, dt < +\infty. \tag{3.9}$$

Нормализовану тежинску меру $\mu t^{\mu-1}\, dt$ означаваћемо и са $d\mu(t)$.

За реално $\alpha > -1$ посматраћемо оператор F_α дат на следећи начин

$$F_\alpha \varphi(s) = \mu \int_0^1 (1-t)^\alpha {}_2F_1(\lambda, \lambda; \mu; st)\varphi(t) t^{m-1}\, dt, \tag{3.10}$$

где је $\lambda = \frac{\mu+\alpha+1}{2}$.

Оператор F_α можемо видети и као интегрални оператор на $L^p_\mu(0,1)$ са језгром

$$K_\alpha(s,t) = (1-t)^\alpha {}_2F_1(\lambda, \lambda; \mu; st).$$

Овај оператор биће ограничен на $L^p_\mu(0,1)$ ако и само ако је $\alpha > \dfrac{1}{p} - 1$. Више од тога даје следећа:

***Теорема* 17** (Марковић [48])**.** *За $1 \le p < +\infty$, оператор F_α непрекидно слика простор $L^p_\mu(0,1)$ на себе ако и само ако је $\alpha > \frac{1}{p} - 1$. Штавише, важи и*

$$\|F_\alpha\|_{L^p_\mu(0,1)\to L^p_\mu(0,1)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\, \Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\, \Gamma\big(\alpha+1-\tfrac{1}{p}\big)$$

за свако $\alpha > \dfrac{1}{p} - 1$.

Из наведене теореме извешћемо као последицу наредну теорему:

***Теорема* 18.** *Нека је B Березинова трансформација на $L^p(\mathbb{B}^n)$ за $1 < p \le +\infty$. Тада важи*

$$\|B\|_{L^p \to L^p} = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{kp}\right) \frac{\frac{\pi}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}.$$

У доказу ове теореме, користићемо нека помоћна тврђења. Прво, случај $p=1$ размотрићемо одвојено од случаја $p>1$. Поменути случај $(p=1)$ нешто је једноставнији и за доказ истог позиваћемо се на следеће помоћно тврђење:

***Лема* 5** (Марковић [48])**.** *Нека је ν коначна мера на X. Са T означимо интегрални оператор који делује на $L^1 := L^1(X,\nu)$ са ненегативним језгром $K(x,y)$, тј.*

$$Tf(x) = \int_X K(x,y) f(y)\, d\nu(y).$$

Тада T слика L^1 у себе ако и само ако је

$$\sup_{y\in X}\int_X K(x,y)\,d\nu(x) < +\infty$$

и при том је последња величина једнака $\|T\|_{L^1\to L^1}$.

Доказ. За сваку функцију $f \in L^1$ имамо следеће

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 &= \int_X \left|\int_X K(x,y)f(y)\,d\nu(y)\right| d\nu(x)\\ &\le \int_X \left(\int_X K(x,y)\,d\nu(x)\right)|f(y)|\,d\nu(y)\\ &\le \left(\sup_{y\in X}\int_X K(x,y)\,d\nu(x)\right)\|f\|_1.\end{aligned}$$

При том, узимајући $f \equiv 1$, на свим местима горе имаћемо знак једнакости. Ово доказује неопходност услова и даје вредност норме оператора T. □

За случај $1 < p < +\infty$ позиваћемо се и на следећи класичан резултат из теорије интегралних оператора.

Лема 6 (Шуров тест)**.** *Нека је (X,ν) σ-коначан мерљив простор и $K(x,y)$ ненегативна мерљива функција на $X \times X$, а T придружени интегрални оператор*

$$Tf(x) = \int_X K(x,y)f(y)\,d\nu(y).$$

Нека је $1 < p < +\infty$ и q такво да је $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Ако постоји константа C и позитивна мерљива функција φ на X таква да је

$$\begin{aligned}&\int_X K(x,y)\varphi(y)^q\,d\nu(y) \le C\varphi(x)^q \quad \text{за с.с. } x\in X \text{ и}\\ &\int_X K(x,y)\varphi(x)^p\,d\nu(x) \le C\varphi(y)^p \quad \text{за с.с. } y\in X,\end{aligned}$$

тада је T ограничен на $L^p := L^p(X,\nu)$ и важи $\|T\|_{L^p\to L^p} \le C$.

Јасно, за разлику од случаја $p = 1$, овде имамо само процену норме одозго, па ћемо бити принуђени да, поред ове, имамо и процену норме одоздо.

Окренимо се доказу главног резултата.

Случај $p = 1$: Према Ојлеровој формули и Ојлеровој трансформацији (видети уводно поглавље) имамо:

$$\begin{aligned}\sup_{t\in(0,1)}\int_0^1 K_\alpha(s,t)\,d\mu(s) &= \sup_{t\in(0,1)}\mu(1-t)^\alpha\int s^{\mu-1}{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu;st)\,ds\\ &= \sup_{t\in(0,1)}\mu(1-t)^\alpha\mu^{-1}{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu+1;t)\\ &= \sup_{t\in(0,1)}{}_2F_1(\mu+1-\lambda,\mu+1-\lambda;\mu+1;t)\\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma(2\lambda-\mu-1)}{\Gamma^2(\lambda)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma(\alpha) < +\infty\end{aligned}$$

ако и само ако је $\alpha > 0$. Последњи закључак следи из:

Лема 7 ([48])**.** *За $y > 0$ и $x \in \mathbb{R}$, функција ${}_2F_1(x,x;y;r)$ ограничена је у $(0,1)$ ако и само ако је $y > 2x$ и тада је*

$$\sup_{r\in(0,1)}{}_2F_1(x,x;y;r) = {}_2F_1(x,x;y;1) = \frac{\Gamma(y)\,\Gamma(y-2x)}{\Gamma^2(y-x)}.$$

Доказ. Ако је $y > 2x$,функција ${}_2F_1(x,x;y;r)$ је растућа функција по $r \in (0,1)$ и непрекидна на $[0,1]$. Отуда, примена Гаусове релације даје максимум. У преосталим случајевима имамо

$${}_2F_1(x,x;y;r) \sim \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma^2(x)}\log\frac{1}{1-r}, \quad \text{за } y = 2x,$$

односно

$${}_2F_1(x,x;y;r) \sim \frac{\Gamma(y)\,\Gamma(2x-y)}{\Gamma^2(x)}(1-r)^{y-2x}, \quad \text{за } y < 2x,$$

што даје закључак леме. □

Детаљније о наведеним асимптотским формулама може се наћи у [6]. На основу горњег разматрања и Леме 5, добијамо

$$\|F_\alpha\|_{L^1_\mu(0,1)\to L^1_\mu(0,1)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma(\alpha) \tag{3.11}$$

за свако $\alpha > 0$.

Случај $1 < p < +\infty$: За процену одозго, узмимо за пробну функцију у Шуровом тесту $\varphi(t) = (1-t)^{-\frac{1}{pq}}$. Претпоставимо да важи $\alpha > \frac{1}{p} - 1$. Тада имамо:

$$\begin{aligned}\int_0^1 K_\alpha(s,t)\varphi(t)^q\,d\mu(t) &= \mu\int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^\alpha{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu;st)\varphi(t)^q\,dt\\ &= \mu\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\big(2\lambda-\mu-\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(2\lambda-\frac{1}{p}\big)}{}_2F_1\big(\lambda,\lambda;2\lambda-\tfrac{1}{p};s\big).\end{aligned}$$

Овде смо искористили $(1-t)^\alpha\varphi(t)^q = (1-t)^{2\lambda-\dfrac{1}{p}-1}$ и Ојлерову формулу за $c = 2\lambda - \dfrac{1}{p}$ и $d=\mu$ (при том је $c-d = \alpha + \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{p} - 1 + \dfrac{1}{q} = 0$).

Последњи израз једнак је

$$\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\lambda-\mu-\frac{1}{p})}{\Gamma(2\lambda-\frac{1}{p})}(1-s)^{\frac{1}{p}}{}_2F_1\big(\lambda,\lambda;2\lambda-\tfrac{1}{p};s\big)\varphi(s)^q,$$

а потом применом Ојлерове трансформације и

$$\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\big(2\lambda-\mu-\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(2\lambda-\frac{1}{p}\big)}{}_2F_1\big(\lambda-\tfrac{1}{p},\lambda-\tfrac{1}{p};2\lambda-\tfrac{1}{p};s\big)\varphi(s)^q.$$

Функција ${}_2F_1\big(\lambda-\frac{1}{p},\lambda-\frac{1}{p};2\lambda-\frac{1}{p};s\big)$ растућа је по $s\in(0,1)$, па је њен супремум у $s=1$. Отуда је претходни израз ограничен одозго са

$$\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\big(2\lambda-\mu-\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(2\lambda-\frac{1}{p}\big)}\frac{\Gamma\big(2\lambda-\frac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{p}\big)}{\Gamma^2(\lambda)}\varphi(s)^q$$

и то према Гаусовој формули. Последње можемо записати и као

$$\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\alpha+1-\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\varphi(s)^q.$$

Истим методом долазимо и до наредног низа једнакости и неједнакости:

$$\begin{aligned}\int_0^1 K_\alpha(s,t)\varphi(s)^p\,d\mu(s) &= \mu(1-t)^\alpha\int_0^1 s^{\mu-1}{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu;st)\varphi(s)^p\,ds\\ &= \mu(1-t)^\alpha\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\big(\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(\mu+\frac{1}{p}\big)}{}_2F_1\big(\lambda,\lambda;\mu+\tfrac{1}{p};t\big)\\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\big(\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(\mu+\frac{1}{p}\big)}(1-t)^{2\lambda-\mu-\frac{1}{p}}{}_2F_1\big(\lambda,\lambda;\mu+\tfrac{1}{p};t\big)\varphi(t)^p\\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\big(\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(\mu+\frac{1}{p}\big)}{}_2F_1\big(\mu-\lambda+\tfrac{1}{p},\mu-\lambda+\tfrac{1}{p};\mu+\tfrac{1}{p};t\big)\varphi(t)^p\\ &\le \frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\big(\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(\mu+\frac{1}{p}\big)}\frac{\Gamma\big(\mu+\frac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(2\lambda-\mu-\frac{1}{p}\big)}{\Gamma^2(\lambda)}\varphi(t)^p\\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\alpha+1-\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\varphi(t)^p.\end{aligned}$$

Претходни рачун, на основу Шуровог теста омогућује закључак

$$\|F_\alpha\|_{L^p_\mu(0,1)\to L^p_\mu(0,1)} \le \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\alpha+1-\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big) \tag{3.12}$$

за свако $\alpha > \frac{1}{p}-1$.

За процену одоздо, користићемо следећа тврђења:

1° Ако је $H(t) = Ct^{\frac{\theta}{p}}(1-t)^{\frac{\tilde{\theta}}{p}}$, где је C позитивна константа и $\theta, \tilde{\theta} \in \mathbb{R}$, тада је $H \in L^p_\mu(0,1)$, $1 < p < +\infty$ и $\|H\|_{p,\mu} = 1$ ако и само ако је $\theta > -\mu$, $\widetilde{\theta} > -1$ и

$$C = \mu^{-\frac{1}{p}}\,\mathrm{B}(\theta+\mu, \widetilde{\theta}+1)^{-\frac{1}{p}}.$$

Претходна једнакост следи из следећег једноставног рачуна:

$$1 = \|H\|^p_{p,\mu} = \mu\int_0^1 H(t)^p t^{\mu-1}\,dt = \mu C^p\int_0^1 t^{\theta+\mu-1}(1-t)^{\widetilde{\theta}}\,dt = \mu C^p\,\mathrm{B}(\theta+\mu, \widetilde{\theta}+1).$$

2° Важи следећа једнакост (доказ се може наћи у [6]) за $\operatorname{Re} c, \operatorname{Re} d > 0$, $\operatorname{Re}(c+d-a-b) > 0$

$$\int_0^1 t^{c-1}(1-t)^{d-1}{}_2F_1(a, b; c; t)\,dt = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(d)\,\Gamma(c+d-a-b)}{\Gamma(c+d-a)\,\Gamma(c+d-b)}.$$

3° За $l > 0$ и позитивно вредносну функцију G дефинисану на $(0,l)$ и свако $p \in (1,+\infty)$ важи

$$\limsup_{(\zeta,\eta)\to(0,0)} \frac{G(\eta)^{-\frac{1}{p}}G\big(\frac{\zeta+\eta}{p}\big)}{G\big(\frac{\zeta}{p-1}\big)^{1-\frac{1}{p}}} \geq 1.$$

Овде је довољно приметити да је за $\eta = \frac{\zeta}{p-1}$, $\frac{\zeta+\eta}{p} = \frac{\zeta}{p-1} = \eta$, и тада је

$$\frac{G(\eta)^{-\frac{1}{p}}G\big(\frac{\zeta+\eta}{p}\big)}{G\big(\frac{\zeta}{p-1}\big)^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{G(\eta)^{-\frac{1}{p}}G(\eta)}{G(\eta)^{1-\frac{1}{p}}} = 1,$$

што повлачи горње тврђење.

4° На простору $L^p = L^p(X,\nu)$ норму оператора $T: L^p \to L^p$ $(1 < p < +\infty)$ можемо израчунати као

$$\|T\|_{L^p\to L^p} = \sup\left\{\left|\int_X T\phi(x)\overline{\psi(x)}\,d\nu(x)\right| \,\middle|\, \phi \in L^p,\ \psi \in L^q,\ \|\phi\|_p = \|\psi\|_q = 1\right\},$$

где је $q = \frac{p}{p-1}$.

Стога ћемо, за посматрани оператор F_α, израчунати

$$\int_0^1 F_\alpha\phi(s)\overline{\psi(s)}\,d\mu(s)$$

за погодно одабране $\phi(s) \in L^p_\mu(0,1)$, $\psi(t) \in L^q_\mu(0,1)$. Користећи Фубинијеву теорему добијамо

$$\begin{aligned}\int_0^1 F_\alpha\phi(s)\overline{\psi(s)}\,d\mu(s) &= \mu^2\int_0^1 s^{\mu-1}\left(\int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^\alpha{}_2F_1(\lambda, \lambda; \mu; st)\phi(t)\,dt\right)\overline{\psi(s)}\,ds\\ &= \mu^2\int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^\alpha\left(\int_0^1 s^{\mu-1}{}_2F_1(\lambda, \lambda; \mu; st)\overline{\psi(s)}\,ds\right)\phi(t)\,dt.\end{aligned}$$

За $\phi(t)$ и $\psi(s)$ узећемо функције следећег облика

$$\phi(t) = Ct^{\frac{\theta}{p}}(1-t)^{\frac{\widetilde{\theta}}{p}}, \quad \psi(s) = \widetilde{C}s^{\frac{\vartheta}{q}}(1-s)^{\frac{\widetilde{\vartheta}}{q}}.$$

Према **1°**, морамо имати $\theta, \vartheta > -\mu$, $\widetilde{\theta}, \widetilde{\vartheta} > -1$, као и

$$C^p = \mu^{-1}\,\mathrm{B}(\theta+\mu, \widetilde{\theta}+1)^{-1}, \quad \widetilde{C}^q = \mu^{-1}\,\mathrm{B}(\vartheta+\mu, \widetilde{\vartheta}+1)^{-1}.$$

За $\vartheta = 0$ у $\psi(s)$, израчунаћемо унутрашњи интеграл

$$\begin{aligned}\int_0^1 s^{\mu-1}{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu;st)\overline{\psi(s)}\,ds &= \widetilde{C}\int_0^1 s^{\mu-1}(1-s)^{\frac{\widetilde{\vartheta}}{q}}{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu;st)\,ds \\ &= \widetilde{C}\int_0^1 s^{\mu-1}(1-s)^{\left(\frac{\widetilde{\vartheta}}{q}+\mu+1\right)-\mu-1}{}_2F_1(\lambda,\lambda;\mu;st)\,ds \\ &= \widetilde{C}\frac{\Gamma(\mu)\,\Gamma\left(\frac{\widetilde{\vartheta}}{q}+1\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{\widetilde{\vartheta}}{q}+1\right)}{}_2F_1\left(\lambda,\lambda;\tfrac{\widetilde{\vartheta}}{q}+\mu+1;t\right),\end{aligned}$$

где смо искористили **2°** за $c = \dfrac{\widetilde{\vartheta}}{q} + \mu + 1$ и $d = \mu$; тада је

$$c - d = \frac{\widetilde{\vartheta}}{q} > -\frac{1}{q} + 1 > 0.$$

Узмимо сада $\widetilde{\vartheta} = \frac{\theta-p}{p-1}$. Тада је $\frac{\widetilde{\vartheta}}{q}+\mu+1 = \mu+\frac{\theta}{p}$. Како морамо имати $\widetilde{\vartheta} > -1$, следи да је $\theta > 1$.

Остаје да се израчуна други интеграл:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 t^{\mu-1}(1-t)^{\alpha}{}_2F_1\left(\lambda,\lambda;\tfrac{\widetilde{\vartheta}}{q}+\mu+1;t\right)\phi(t)\,dt \\ &= C\int_0^1 t^{\left(\mu+\frac{\theta}{p}\right)-1}(1-t)^{\left(\frac{\widetilde{\theta}}{p}+\alpha+1\right)-1}{}_2F_1\left(\lambda,\lambda;\mu+\tfrac{\theta}{p};t\right)dt \\ &= C\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{\theta}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\widetilde{\theta}}{p}+\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{\theta+\widetilde{\theta}}{p}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\theta+\widetilde{\theta}}{p}+\lambda\right)}.\end{aligned}$$

Овог пута, у **2°**, одабрали смо $\left(\mu+\frac{\theta}{p}\right)+\left(\frac{\widetilde{\theta}}{p}+\alpha+1\right)-\lambda = \frac{\theta+\widetilde{\theta}}{p} > 0$.

Све заједно, ово даје

$$\int_0^1 F_\alpha\phi(s)\overline{\psi(s)}\,d\mu(s) = \mu C\widetilde{C}\frac{\Gamma(\mu+1)\,\Gamma\left(\mu+\frac{\theta}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\widetilde{\theta}}{p}+\alpha+1\right)\Gamma\left(\frac{\theta+\widetilde{\theta}}{p}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{\theta+\widetilde{\theta}}{p}+\lambda\right)}.$$

Ако је $\alpha \le \dfrac{1}{p} - 1$, оператор $F_\alpha : L^p_\mu(0,1) \to L^p_\mu(0,1)$ није добро дефинисан. Претпоставимо, зато, да је $\alpha > \frac{1}{p} - 1$.

Како је $\vartheta = 0$ и $\widetilde{\vartheta} = \frac{\theta-p}{p-1}$, добијамо

$$\begin{aligned}C\widetilde{C} &= \mu^{-\frac{1}{p}}\,\mathrm{B}(\theta+\mu,\widetilde{\theta}+1)^{-\frac{1}{p}}\mu^{-\frac{1}{q}}\,\mathrm{B}(\vartheta+\mu,\widetilde{\vartheta}+1)^{\frac{1}{p}-1} \\ &\sim \mu^{-1}\frac{\Gamma(\widetilde{\theta}+1)^{-\frac{1}{p}}}{\Gamma\left(\frac{\theta-1}{p-1}\right)^{1-\frac{1}{p}}}, \quad \text{кад } (\theta,\widetilde{\theta}) \to (1,-1).\end{aligned}$$

Сада, **3°** даје

$$\begin{aligned}
&\limsup_{(\theta,\widetilde{\theta})\to(1,-1)} \int_0^1 F_\alpha\phi(s)\overline{\psi(s)}\,d\mu(s)\\
&\quad= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(-\tfrac{1}{p}+\alpha+1\big)\limsup_{(\theta,\widetilde{\theta})\to(1,-1)} \frac{\Gamma(\widetilde{\theta}+1)^{-\frac{1}{p}}\Gamma\big(\frac{\theta+\widetilde{\theta}}{p}\big)}{\Gamma\big(\frac{\theta-1}{p-1}\big)^{1-\frac{1}{p}}}\\
&\quad= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(-\tfrac{1}{p}+\alpha+1\big)\limsup_{(\zeta,\eta)\to(0,0)} \frac{\Gamma(\eta)^{-\frac{1}{p}}\Gamma\big(\frac{\zeta+\eta}{p}\big)}{\Gamma\big(\frac{\zeta}{p-1}\big)^{1-\frac{1}{p}}}\\
&\quad\geq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(-\tfrac{1}{p}+\alpha+1\big).
\end{aligned}$$

Коначно добијамо и

$$\|F_\alpha\|_{L^p_\mu(0,1)\to L^p_\mu(0,1)} \geq \limsup_{(\theta,\widetilde{\theta})\to(1,-1)} \int_0^1 F_\alpha\phi(s)\overline{\psi(s)}\,d\mu(s) \geq \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(-\tfrac{1}{p}+\alpha+1\big)$$

за све $\alpha > \frac{1}{p}-1$, што заједно са (3.12) даје

$$\|F_\alpha\|_{L^p_\mu(0,1)\to L^p_\mu(0,1)} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma^2(\lambda)}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(-\tfrac{1}{p}+\alpha+1\big). \tag{3.13}$$

Овај резултат (тачну норму оператора F_α) искористићемо даље у циљу налажења $\|B\|_{L^p\to L^p}$. Посматраћемо такође и оператор K_α дат са:

$$K_\alpha f(z) = c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+\alpha+1}} f(w)\,dv(w), \tag{3.14}$$

где је $c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\pi^n}$. Ово је тзв. тежинска максимална Бергманова пројекција на коју ћемо се касније поново позивати.

Примена доказаног омогућује израчунавање $\|K_\alpha\|_{L^p\to L^p}$. У том циљу, узмимо у обзир следеће две чињенице:

5° Ако је $h(w) = H(|w|^2)$ радијално симетрична функција у јединичној лопти $\mathbb{B}^n$, где је H позитивна на $(0,1)$, тада важи

$$c_0\|h\|_p^p = n\int_0^1 s^{n-1}H(s)^p\,ds = \|H\|_{p,n}^p$$

за $1 \leq p < +\infty$. Ову формулу провериђемо уводећи поларне координате. Наиме,

$$\begin{aligned}
c_0\int_{\mathbb{B}^n} |h(z)|^p\,dv(z) &= 2n\int_0^1 r^{2n-1}\,dr\int_{S^{n-1}} |h(r\zeta)|^p\,d\tau(\zeta)\\
&= 2n\int_0^1 r^{2n-1}H^p(r^2)\,dr = n\int_0^1 s^{n-1}H^p(s)\,ds.
\end{aligned}$$

6° У том случају је и $K_\alpha h(z)$ радијално симетрична. Штавише:

$$K_\alpha h(z) = c_\alpha n \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^\alpha {}_2F_1(\lambda, \lambda; n; t|z|^2) H(t)\, dt = c_\alpha F_\alpha H(|z|^2).$$

Опет, увођење поларних координата даје:

$$\begin{aligned} c_\alpha^{-1} K_\alpha h(z) &= 2n \int_0^1 r^{2n-1}(1-r^2)^\alpha \Big(\int_{S^{n-1}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle rz, \zeta\rangle|^{\alpha+1}} \Big) H(r^2)\, dr \\ &= n \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^\alpha H(s) \Big(\int_{S^{n-1}} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle rz, \zeta\rangle|^{\alpha+1}} \Big)\, ds. \end{aligned}$$

Унутрашњи интеграл има вредност

$${}_2F_1\big(\tfrac{\alpha+1}{2}, \tfrac{\alpha+1}{2}; n; r|z|^2\big).$$

Овде је $d\sigma$ нормализована мера на сфери S^{n-1}, а у [39] може се наћи доказ једнакости на коју се позивамо.

Сада, користећи **5°** и **6°** имамо закључак:

Оператор $K_\alpha : L^p(\mathbb{B}^n) \to L^p(\mathbb{B}^n)$ је ограничен ако и само ако је ограничен и $F_\alpha : L^p_n(0,1) \to L^p_n(0,1)$. Осим тога,

$$\|K_\alpha\|_{L^p(\mathbb{B}^n)\to L^p(\mathbb{B}^n)} = c_\alpha \|F_\alpha\|_{L^p_n(0,1)\to L^p_n(0,1)},$$

за све $1 \le p < +\infty$ и $\alpha > \frac{1}{p} - 1$.

Добијамо:

$$\|K_\alpha\|_{L^p\to L^p} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma^2\big(\frac{n+\alpha+1}{2}\big)\,\Gamma(\alpha+1)}\,\Gamma\big(\tfrac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(\alpha+1-\tfrac{1}{p}\big) \tag{3.15}$$

за $\alpha > \frac{1}{p} - 1$.

Приметимо сада да је $K_\alpha^* : L^p(\mathbb{B}^n) \to L^p(\mathbb{B}^n)$ оператор конјугован са $K_\alpha : L^q(\mathbb{B}^n) \to L^q(\mathbb{B}^n)$, $1 \le q < +\infty$ дат са

$$K_\alpha^* g(z) = c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\langle z, w\rangle|^{n+\alpha+1}} g(w)\, dv(w), \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Одатле је

$$\|K_\alpha^*\|_{L^p\to L^p} = \|K_\alpha\|_{L^q\to L^q}.$$

Уз примедбу да је $B = c_{n+1}^{-1} K_{n+1}^*$, добијамо:

$$\begin{aligned} \|B\|_{L^p\to L^p} &= c_{n+1}^{-1} c_{n+1} \frac{\Gamma\big(1-\frac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(n+1+\frac{1}{p}\big)}{\Gamma(n+1)} \\ &= \frac{\Gamma\big(1-\frac{1}{p}\big) \prod_{k=1}^n \big(k+\frac{1}{p}\big)\,\Gamma\big(\frac{1}{p}\big)}{n!\, p} = \prod_{k=1}^n \Big(1+\frac{1}{kp}\Big) \frac{\frac{\pi}{p}}{\sin\frac{\pi}{p}}, \end{aligned}$$

чиме је доказана Теорема 18.

3.4 Норма Березинове трансформације као оператора $L^\infty \to \mathcal{B}$

У наредним редовима осврнућемо се на једну тежинску варијанту Березинове трансформације:

$$(B_\alpha f)(z) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z, w\rangle|^{2n+2}} f(w)\, dv_\alpha(w), \quad z \in \mathbb{B}^n. \tag{3.16}$$

Овде се за $\alpha = 0$ добија основни случај. Постоје и друге тежинске варијанте. Нпр. могла би се посматрати трансформација која одговара тежинској Бергмановој пројекцији са мером dv_α. Овакав облик разликоваће се од нашег у (3.16).

У претходном одељку смо видели да B слика L^∞ у L^∞. Ово смо могли доказати и знатно једноставније. Горњи метод имао је за циљ обухватање општег случаја $1 < p \leq +\infty$. У контексту аналитичких функција, позната је блиска веза простора L^∞ и $\mathcal{B}$. Березинова трансформација опште $L^\infty-$функције не мора бити холоморфна, али је ипак $\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla(B_\alpha f)(z)|$ коначан. У даљем ћемо простор C^1 функција за које је последњи супремум коначан називати простором Блоховог типа и означавати са $\mathcal{B}$.

У наредни редовима посматраћемо операторе B_α на L^∞ простору, али са кодоменом у $\mathcal{B}$. С тим у вези, наведимо и основне резултате овог одељка:

***Теорема* 19** (Мелентијевић [57])**.** *Нека је $\alpha > -1$, B_α оператор дефинисан са (3.16) и $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Тада важи следеће:*

(а) Ако је $0 \leq \alpha \leq 2n+3$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, тада је

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_z(B_\alpha f)(z)| \leq (n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)} \tag{3.17}$$

и једнакост се постиже за $f(w) = \frac{|w_1|}{\overline{w_1}}$, тј. процена је најбоља могућа.

(б) Ако је $-1 < \alpha < 0$, тада је $\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_z(B_\alpha f)(z)| = +\infty$.

(в) Ако је $\alpha > 2n+3$ и $\|f\|_\infty \leq 1$, имамо

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_z(B_\alpha f)(z)| < (n+1)\binom{\alpha+k_\alpha-1}{k_\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(k_\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k_\alpha+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}$$

где је $k_\alpha = \left\lceil \frac{\alpha-(2n+3)}{2n+2} \right\rceil$, а $\lceil x \rceil$ најмањи ненегативан цео број не мањи од x.

Исте процене важе и за Блоховску полунорму са "конјугованим градијентом" $\nabla_{\overline{z}}$.

Теорема* 20** (Мелентијевић [57]).*** *За реално-вредносну функцију f, йри йрейиосшавкама Теореме 16, имамо:*

(а) *Ако је $0 \le \alpha \le n+\frac{1}{2}$ и $\|f\|_\infty = 1$, шада*

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla(B_\alpha f)(z)| \le \frac{2}{\pi}(n+1)B(\alpha+n+1,\frac{1}{2}), \tag{3.18}$$

и једнакосш се досшиже за $f(w) = \dfrac{|Re\langle w,a\rangle|}{Re\langle w,a\rangle}$ ĝде $a \in \mathbb{C}^n, |a| = 1$.

(б) *Ако је $-1 < \alpha < 0$, шада $\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla(B_\alpha f)(z)| = +\infty$.*

(в) *Ако је $\alpha > n+\frac{1}{2}$ и $\|f\|_\infty = 1$, шада*

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla(B_\alpha f)(z)| < \frac{2}{\sqrt{\pi}}(n+1)\binom{2k'_\alpha+2\alpha-1}{2k'_\alpha}\times$$

$$\times\binom{k'_\alpha+\alpha-1}{k'_\alpha}^{-1}\frac{(k'_\alpha)!\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(k'_\alpha+\alpha+n+\frac{3}{2})},$$

ĝде је

$$k'_\alpha = \left\lceil \frac{\alpha}{2n+1} - \frac{1}{2}\right\rceil$$

и $\lceil x\rceil$ најмањи ненеĝашиван цео број не мањи од x.

Обе теореме дело су аутора тезе ([57]).

Доказ Теореме 16. Да бисмо израчунали изводе $(B_\alpha f)(z)$, нађимо изводе језгра $T(z,w) = \dfrac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+2}}$ по z_i, $i = 1,\dots,n$. Како је

$$T(z,w) = \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+2}} = \frac{\left(1-\sum z_i\overline{z_i}\right)^{n+1}}{\left(1-\sum z_i\overline{w_i}\right)^{n+1}\left(1-\sum \overline{z_i}w_i\right)^{n+1}},$$

имамо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial z_i}(z,w) &= \frac{1}{\left(1-\sum \overline{z_i}w_i\right)^{n+1}}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1-\sum z_i\overline{z_i}}{1-\sum z_i\overline{w_i}}\right)^{n+1}\\
&= \frac{n+1}{\left(1-\sum \overline{z_i}w_i\right)^{n+1}}\left(\frac{1-\sum z_i\overline{z_i}}{1-\sum z_i\overline{w_i}}\right)^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left(\frac{1-\sum z_i\overline{z_i}}{1-\sum z_i\overline{w_i}}\right)\\
&= \frac{(n+1)(1-|z|^2)^n\Big(-\overline{z_i}\big(1-\sum z_i\overline{w_i}\big)+\overline{w_i}\big(1-\sum z_i\overline{z_i}\big)\Big)}{\left(1-\sum w_i\overline{z_i}\right)^{n+1}\left(1-\sum z_i\overline{w_i}\right)^{n}\left(1-\sum z_i\overline{w_i}\right)^{2}}\\
&= \frac{(n+1)(1-|z|^2)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+2}(1-\overline{\langle z,w\rangle})^{n+1}}\big((1-|z|^2)\overline{w_i}-(1-\langle z,w\rangle)\overline{z_i}\big).
\end{aligned}$$

Зато је:

$$
\begin{aligned}
|\nabla_z(B_\alpha f)(z)| &= \sup_{\xi\in S^{n-1}} |\langle \nabla_z(B_\alpha f)(z), \xi\rangle| \\
&= \sup_{\xi\in S^{n-1}} \left| \int_{\mathbb{B}^n} \langle \nabla_z T(z,w) f(w), \xi\rangle \, dv_\alpha(w) \right| \\
&\le \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \nabla_z T(z,w), \xi\rangle| |f(w)| \, dv_\alpha(w) \\
&= \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+1)(1-|z|^2)^n \big((1-|z|^2)\overline{w_i}\overline{\xi_i} - (1-\langle z,w\rangle)\overline{z_i}\overline{\xi_i}\big)}{\big(1-\sum \overline{z_i} w_i\big)^{n+1} \big(1-\sum z_i \overline{w_i}\big)^{n+3}} \right| |f(w)| \, dv_\alpha(w) \\
&= \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(n+1)(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+3}} \big|(1-|z|^2)\langle \xi, w\rangle - (1-\langle z,w\rangle)\langle \xi, z\rangle\big| |f(w)| \, dv_\alpha(w).
\end{aligned}
$$

Будући да се израз $(1-|z|^2)|\nabla_z(B_\alpha f)(z)|$ често јавља, означимо га са $S(z)$. За $\|f\|_\infty \le 1$, добијамо:

$$
S(z) \le (n+1) \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+3}} \big|(1-|z|^2)\langle \xi, w\rangle - (1-\langle z,w\rangle)\langle \xi, z\rangle\big| \, dv_\alpha(w).
$$

У горњем интегралу уведимо смену $\zeta = \varphi_z(w)$. Имајући на уму да је φ_z инволуција, тј. $w = \varphi_z(\zeta)$ и $(J_{\mathbb{R}}\varphi_z)(w) = \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+2}}$ долазимо до:

$$
S(z) \le (n+1) c_\alpha \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\big|(1-|z|^2)\langle \xi, \varphi_z(\zeta)\rangle - (1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle)\langle \xi, z\rangle\big| (1-|\varphi_z(\zeta)|^2)^\alpha}{|1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle|} \, dv(\zeta).
$$

Позната једнакост

$$
\big(1-\langle z,\zeta\rangle\big)\big(1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle\big) = 1-|z|^2
$$

омогућава поједностављење горњег израза, тј. имамо:

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{(1-|z|^2)\langle \xi, \varphi_z(\zeta)\rangle - (1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle)\langle \xi, z\rangle}{1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle} \right| &= |(1-\langle z,\zeta\rangle)\langle \xi, \varphi_z(\zeta)\rangle - \langle \xi, z\rangle| \\
&= \big|\big\langle \xi, (1-\overline{\langle z,\zeta\rangle}\varphi_z(\zeta) - z)\big\rangle\big|.
\end{aligned}
$$

Формула за аутоморфизам лопте $\varphi_z(\zeta)$ даје нам:

$$
(1-\overline{\langle z,\zeta\rangle})\varphi_z(\zeta) = z - \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z - \sqrt{1-|z|^2}\bigg(\zeta - \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z\bigg),
$$

па је стога:

$$
\left| \frac{(1-|z|^2)\langle \xi, \varphi_z(\zeta)\rangle - (1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle)\langle \xi, z\rangle}{1-\langle z, \varphi_z(\zeta)\rangle} \right| = \left| \left\langle \xi, \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z + \sqrt{1-|z|^2}\Big(\zeta - \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z\Big) \right\rangle \right|
$$

за $z \neq 0$, односно $|\langle \xi, \zeta\rangle|$ за $z = 0$. Када уврстимо ово у горњи интеграл имамо:

$$S(z) \le (n+1)c_\alpha \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \left|\left\langle \xi, \frac{\langle\zeta, z\rangle}{|z|^2} z + \sqrt{1-|z|^2}\Big(\zeta - \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z\Big)\right\rangle\right| \big(1-|\varphi_z(\zeta)|^2\big)^\alpha \, dv(\zeta),$$

што коришћењем

$$1 - |\varphi_z(\zeta)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|\zeta|^2)}{|1-\langle z, \zeta\rangle|^2}$$

постаје:

$$S(z) \le (n+1)c_\alpha \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \left|\left\langle \xi, \frac{\langle\zeta, z\rangle}{|z|^2} z + \sqrt{1-|z|^2}\Big(\zeta - \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z\Big)\right\rangle\right| \frac{(1-|z|^2)^\alpha (1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2\alpha}} dv(\zeta)$$

за $z \neq 0$, или за $z = 0$:

$$S(z) \le (n+1)c_\alpha \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta\rangle| (1-|\zeta|^2)^\alpha \, dv(\zeta).$$

С обзиром на радијалност израза са десне стране (израз има исту вредност за z и Uz, где је U унитарни оператор на $\mathbb{C}^n$), без губљења општости можемо претпоставити да је $z = (r, 0, \ldots, 0)$, при $0 \le r < 1$.

Тако имамо:

$$S(z) \le (n+1)\, c_\alpha \, T(r),$$

где је

$$\begin{aligned} T(r) &= \sup_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \Big|\langle \xi, (\zeta_1, 0, \ldots, 0) + \sqrt{1-r^2}(0, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\rangle\Big| \frac{(1-r^2)^\alpha (1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}} \, dv(\zeta) \\ &= \max_{\xi\in S^{n-1}} (1-r^2)^\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \Big|\langle \xi, \sqrt{1-r^2}\zeta + \big(1-\sqrt{1-r^2}\big)\zeta_1'\rangle\Big| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}} \, dv(\zeta), \end{aligned}$$

где је $\zeta_1' = (\zeta_1, 0, \ldots, 0)$ и ζ_1 прва координата од $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{B}^n$.

Примена неједнакости троугла даје

$$\Big|\langle \xi, \sqrt{1-r^2}\zeta + \big(1-\sqrt{1-r^2}\big)\zeta_1'\rangle\Big| \le \sqrt{1-r^2}|\langle \xi, \zeta\rangle| + \big(1-\sqrt{1-r^2}\big)|\langle \xi, \zeta_1'\rangle|,$$

а тиме и

$$\begin{aligned} T(r) &= (1-r^2)^\alpha \max_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} \Big|\langle \xi, \sqrt{1-r^2}\zeta + \big(1-\sqrt{1-r^2}\big)\zeta_1'\rangle\Big| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}} \, dv(\zeta) \\ &\le \big(1-\sqrt{1-r^2}\big)(1-r^2)^\alpha \max_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta_1'\rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}} \, dv(\zeta) \\ &\quad + \sqrt{1-r^2}(1-r^2)^\alpha \max_{\xi\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta\rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}} \, dv(\zeta). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Први интеграл у (3.19) се лако процењује, јер је $|\langle \xi, \zeta_1' \rangle| = |\xi_1 \zeta_1'| \le |\zeta_1|$ и једнакост се достиже за $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$, тј.

$$\begin{aligned}\big(1-\sqrt{1-r^2}\big)(1-r^2)^\alpha \max_{\xi \in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta_1' \rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) \\ = \big(1-\sqrt{1-r^2}\big)(1-r^2)^\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\zeta_1|(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta).\end{aligned}$$

Процена другог интеграла је знатно тежи задатак. За почетак ћемо показати да је проблем, у извесном смислу, дводимензиони. То је садржај наредне леме:

***Лема* 8** ([57])**.**

$$\max_{\xi \in S^{n-1}} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta \rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) = \max_{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1} \int_{\mathbb{B}^n} |\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1 - r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta).$$

Доказ. Приметимо да, за фиксирано $\xi \in S^{n-1}$, постоји унитарна смена променљивих за коју је

$$Ue_1 = e_1, \quad U\xi = \xi'$$

и при том ξ' задовољава релације

$$\langle \xi', e_1 \rangle = \langle \xi, e_1 \rangle \quad \text{и} \quad \xi' = \alpha e_1 + \beta e_2,$$

за неке $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Тада имамо:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta \rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle U\xi, U\zeta \rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) \\ &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi', U\zeta \rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta).\end{aligned}$$

Увођењем смене $\zeta = U^*\eta$, добијамо:

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi', U\zeta \rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\langle \zeta, e_1 \rangle|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) = \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi', \eta \rangle| \frac{(1-|\eta|^2)^\alpha}{|1-r\eta_1|^{2\alpha}}\, dv(\eta),$$

јер је

$$\langle U^*\eta, e_1 \rangle = \langle \eta, Ue_1 \rangle = \langle \eta, e_1 \rangle = \eta_1.$$

Дакле, максимум се већ постиже на векторима облика $(\xi_1, \xi_2, 0, \ldots, 0)$. За дато $(\xi_1, \xi_2, 0, \ldots, 0) \in S^{n-1}$ можемо сменити променљиву са $\zeta = A^*\eta$, где је

$A\xi = e_1$ за неку унитарну матрицу A. Сада је:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi, \zeta\rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle A\xi, A\zeta\rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta)\\ &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle e_1, \eta\rangle| \frac{(1-|\eta|^2)^\alpha}{|1-r\langle A^*\eta, e_1\rangle|^{2\alpha}}\, dv(\eta)\\ &= \int_{\mathbb{B}^n} |\eta_1| \frac{(1-|\eta|^2)^\alpha}{|1-r\eta_1\chi_1 - r\eta_2\chi_2|^{2\alpha}}\, dv(\eta),\end{aligned}$$

и $|\chi_1|^2 + |\chi_2|^2 = 1$, што доказује тврђење леме. □

Сада ћемо видети да осим свођења проблема на дводимензиони, овај облик омогућује и приказ посматране величине у облику реда.

У том циљу, применимо прво Фубинијеву теорему:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{B}^n} |\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1 - r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta)\\ &\quad= \int\limits_{\mathbb{B}^{n-2}} \Big(\int\limits_{\sqrt{1-|\zeta'|^2}\mathbb{B}^2} |\zeta_1| \frac{(1-|\zeta'|^2-|\zeta_1|^2-|\zeta_2|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1 - r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta_1,\zeta_2)\Big)\, dv(\zeta'),\end{aligned}$$

где је $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta')$.

У унутрашњем интегралу $I(\zeta', \xi_1, \xi_2, r)$ уведимо поларне координате

$$\zeta_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\sqrt{1-|\zeta'|^2}, \quad \zeta_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}\sqrt{1-|\zeta'|^2},$$

$$D = \big\{(\varphi_1,\varphi_2,\rho_1,\rho_2) \,\big|\, \rho_1^2+\rho_2^2 < 1,\ \rho_1,\rho_2 > 0,\ \varphi_1,\varphi_2 \in [0,2\pi]\big\},$$

па имамо:

$$I(\zeta', \xi_1, \xi_2, r) = (1-|\zeta'|^2)^{\alpha+\frac{5}{2}} \int_D \frac{(1-\rho_1^2-\rho_2^2)^\alpha \rho_1^2\rho_2\, d\varphi_1\, d\varphi_2\, d\rho_1\, d\rho_2}{\big|1-\sqrt{1-|\zeta'|^2}\big(r\rho_1\xi_1 e^{i\varphi_1} + r\rho_2\xi_2 e^{i\varphi_2}\big)\big|^{2\alpha}}.$$

Користећи развој у степени ред

$$(1-z)^{-\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} z^k, \quad |z|<1,\ z\in\mathbb{C}$$

и Парсевалову једнакост, добијамо:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1\, d\varphi_2}{\big|1-\sqrt{1-|\zeta'|^2}\big(r\rho_1\xi_1 e^{i\varphi_1} + r\rho_2\xi_2 e^{i\varphi_2}\big)\big|^{2\alpha}}\\ &\quad= 4\pi^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha+k-1}{k}^2 r^{2k}(1-|\zeta'|^2)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 (\rho_1|\xi_1|)^{2j}(\rho_2|\xi_2|)^{2k-2j}.\end{aligned}$$

Сада интеграљење по скупу $\big\{(\rho_1,\rho_2)\,\big|\,\rho_1^2+\rho_2^2<1,\ \rho_1,\rho_2>0\big\}$, уз означавање $|\xi_1|=\cos\theta$, $|\xi_2|=\sin\theta$, за неко $\theta\in\big[0,\frac{\pi}{2}\big]$ даје:

$$I(\zeta',\xi_1,\xi_2,r)=4\pi^2(1-|\zeta'|^2)^{\alpha+\frac52}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}^2 r^{2k}(1-|\zeta'|^2)^k\cdot$$
$$\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\cos^{2j}\theta\sin^{2k-2j}\theta\int\limits_{\substack{\rho_1^2+\rho_2^2<1\\ \rho_1,\rho_2>0}}(1-\rho_1^2-\rho_2^2)^\alpha\rho_1^{2j+2}\rho_2^{2k-2j+1}\,d\rho_1\,d\rho_2.$$

Смена променљивих $\rho_1=\sqrt{s}$, $\rho_2=\sqrt{t}$ уз примену Фубинијеве теореме, а потом и нова смена $t=u(1-s)$ дају:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\substack{\rho_1^2+\rho_2^2<1\\ \rho_1,\rho_2>0}}(1-\rho_1^2-\rho_2^2)^\alpha\rho_1^{2j+2}\rho_2^{2k-2j+1}\,d\rho_1\,d\rho_2 &= \frac14\int\limits_{\substack{s+t<1\\ s,t>0}}(1-s-t)^\alpha s^{j+\frac12}t^{k-j}\,ds\,dt\\
&=\frac14\int_0^1\Big(\int_0^{1-s}(1-s-t)^\alpha t^{k-j}\,dt\Big)s^{j+\frac12}\,ds\\
&=\frac14\int_0^1\Big(\int_0^{1}(1-s)^{\alpha+k-j+1}(1-u)^\alpha u^{k-j}\,du\Big)s^{j+\frac12}\,ds\\
&=\frac14\,\mathrm{B}(\alpha+1,k-j+1)\ \mathrm{B}\big(\alpha+k-j+2,j+\tfrac32\big)\\
&=\frac14\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(k-j+1)}{\Gamma(\alpha+k-j+2)}\frac{\Gamma(\alpha+k-j+2)\,\Gamma\big(j+\frac32\big)}{\Gamma\big(\alpha+k+\frac72\big)}\\
&=\frac14\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma\big(\alpha+k+\frac72\big)}\Gamma(k-j+1)\,\Gamma\big(j+\tfrac32\big),\end{aligned}$$

па је:

$$I(\zeta',\xi_1,\xi_2,r)=\pi^2\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}^2\frac{r^{2k}(1-|\zeta'|^2)^{k+\alpha+\frac52}}{\Gamma\big(\alpha+k+\frac72\big)}\cdot$$
$$\cdot\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\Gamma(k-j+1)\,\Gamma\big(j+\tfrac32\big)\cos^{2j}\theta\sin^{2k-2j}\theta.$$

Докажимо сада да је

$$a_{j,k}=\binom{k}{j}\Gamma(k-j+1)\,\Gamma\big(j+\tfrac32\big),$$

за фиксирано k, растуће по j, $0\le j\le k$. Заиста:

$$\begin{aligned}a_{j,k}&=\frac{k!}{(k-j)!\,j!}(k-j)!\,\Gamma\big(j+\tfrac32\big)=\frac{k!}{j!}\Gamma\big(j+\tfrac32\big)\\
&=\frac{k!}{\Gamma(j+1)}\Gamma\big(j+\tfrac32\big)=k!\,\Gamma\big(\tfrac12\big)\,\mathrm{B}\big(j+1,\tfrac12\big)^{-1},\end{aligned}$$

а како $\mathrm{B}\big(j+1,\dfrac{1}{2}\big) = \int_0^1 t^j(1-t)^{-\frac12}\,dt$ опада по j, видимо да $a_{j,k}$ расте по j, $0 \le j \le k$, за фиксирано k.

Ово повлачи

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\Gamma(k-j+1)\,\Gamma\big(j+\tfrac32\big)\cos^{2j}\theta\sin^{2k-2j}\theta \le \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Gamma\big(k+\tfrac32\big)\cos^{2j}\theta\sin^{2k-2j}\theta$$
$$= \Gamma\big(k+\tfrac32\big)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^k = \Gamma\big(k+\tfrac32\big),$$

где једнакост имамо за $\theta = 0$, или $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$.

Ово значи да у неједнакости (3.19) супремум у другом интегралу постижемо у $\xi = e_1$, као и у првом, што процену чини најбољом могућом.

Из горњег рачуна закључујемо

$$\begin{aligned} T(r)(1-r^2)^{-\alpha} &= \int_{\mathbb{B}^n}|\zeta_1|\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\,dv(\zeta)\\ &= \pi^2\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}^2\frac{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma\big(k+\frac32\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+\frac72\big)}r^{2k}\int_{\mathbb{B}^{n-2}}(1-|\zeta'|^2)^{k+\alpha+\frac52}\,dv(\zeta'). \end{aligned}$$

Даље имамо:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^{n-2}}(1-|\zeta'|^2)^{k+\alpha+\frac52}\,dv(\zeta') &= \frac{2\pi^{n-2}}{\Gamma(n-2)}\int_0^1(1-r^2)^{k+\alpha+\frac52}r^{2n-5}\,dr\\ &= \frac{\pi^{n-2}}{\Gamma(n-2)}\,\mathrm{B}\big(k+\alpha+\tfrac72, n-2\big)\\ &= \pi^{n-2}\frac{\Gamma\big(k+\alpha+\frac72\big)}{\Gamma\big(k+n+\alpha+\frac32\big)}. \end{aligned}$$

Зато је:

$$(n+1)\,c_\alpha\int_{\mathbb{B}^n}|\zeta_1|\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\,dv(\zeta) = (n+1)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}^2\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(k+\frac32\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac32\big)}r^{2k}.$$

(Овде смо уврстили вредности c_α и последњег интеграла.) Приметимо да је у горњем расуђивању $n \ge 2$, док је случај $n = 1$ много лакши.

Докажимо сад још једно помоћно тврђење:

***Лема* 9** ([57])**.** *Низ*

$$a_k = \binom{\alpha+k-1}{k}\frac{\Gamma\big(k+\frac32\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac32\big)}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

је монотоно опадајући за $\alpha \le 2n+3$, а за $\alpha > 2n+3$ расте за $k \le k_\alpha$ и опада за $k > k_\alpha$.

Доказ. За $k \geq 0$ имамо

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\binom{\alpha+k-1}{k}\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)\,\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{5}{2}\big)}{\binom{\alpha+k}{k+1}\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)\,\Gamma\big(k+\frac{5}{2}\big)} = \frac{(k+1)\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}{(\alpha+k)\big(k+\frac{3}{2}\big)}.$$

Сада је лако видети да је $\frac{a_k}{a_{k+1}} > 1$ ако и само ако је $2k(n+1)+2n+3 \geq \alpha$.

Ово важи за свако $k \geq 0$ ако и само ако је $\alpha \leq 2n+3$. Ако је $\alpha > 2n+3$, тада неједнакост не важи за $k=0$, али $2k(n+1)+2n+3$ расте по k, па ће, почевши од неког $k = k_\alpha$, ово бити не мање од α.

Тако, у случају $\alpha > 2n+3$, за $k < k_\alpha$ имамо $a_k < a_{k+1}$, и $a_k \geq a_{k+1}$ кад је $k \geq k_\alpha$. Овде је

$$k_\alpha = \left\lceil \frac{\alpha-2n-3}{2n+2} \right\rceil.$$

Из претходног такође можемо закључити и да је за $\alpha > 2n+3$ највећи члан у овом низу:

$$a_{k_\alpha} = \binom{\alpha+k_\alpha-1}{k_\alpha}\frac{\Gamma\big(k_\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k_\alpha+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}. \qquad \square$$

Након претходних лема и израчунавања, коначно смо у могућности да довршимо доказ наше теореме.

Наиме, ако је $\alpha \leq 2n+3$, тада је

$$\binom{\alpha+k-1}{k}\frac{\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)} \leq \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}, \quad k \geq 0,$$

па је :

$$\begin{aligned}
&(1-r^2)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty}(n+1)\binom{\alpha+k-1}{k}^2\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}r^{2k}\\
&\quad\leq (n+1)(1-r^2)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}\binom{\alpha+k-1}{k}r^{2k}\\
&\quad= (n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}(1-r^2)^\alpha(1-r^2)^{-\alpha} = (n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)},
\end{aligned}$$

или

$$(1-r^2)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}^2\frac{\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}r^{2k} \leq \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}.$$

Обе неједнакости постају једнакости за $r=0$. Ово доказује

$$S(z) \leq (n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}, \quad \|f\|_\infty \leq 1.$$

Сада, узимајући $z = 0$, $f(w) = \frac{|w_1|}{\overline{w_1}} \in L^\infty$ за $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, добијамо:

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)|\nabla_z(B_\alpha f)(z)| &= |\nabla_z(B_\alpha f)(0)| \\ &= \sup_{\xi \in S^{n-1}} (n+1)\, c_\alpha \left| \int_{\mathbb{B}^n} \Big\langle \overline{w}\frac{|w_1|}{\overline{w_1}}, \xi \Big\rangle (1-|w|^2)^\alpha \, dv(w) \right| \\ &\geq (n+1)\, c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} |w_1|(1-|w|^2)^\alpha \, dv(w) \\ &= (n+1) \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)},\end{aligned}$$

где избор $\xi = e_1$ оправдава неједнакост. Отуда је:

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_z(B_\alpha f)(z)| = (n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}.$$

За $\alpha > 2n+3$, имамо ограниченост $B_\alpha : L^\infty \to \mathcal{B}$, али горња формула за норму више не важи. Наиме, ако означимо

$$c_k = \binom{\alpha+k-1}{k} \frac{\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)} \quad \text{и} \quad d_k = \binom{\alpha+k-1}{k} \frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)},$$

лако је видети да је $c_0 = d_0$ и $c_1 > d_1$. Тада је

$$\begin{aligned}(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\,(1-r^2)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha+k-1}{k}^2 \frac{\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)} r^{2k} \\ \leq (n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\frac{\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}\end{aligned}$$

еквивалентно са

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k r^{2k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} d_k r^{2k}$$

(приметимо да је $c_0 = d_0$). Али,

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} c_k r^{2k}}{\sum_{k=1}^{+\infty} d_k r^{2k}} = \frac{c_1}{d_1} > 1,$$

па горња неједнакост не важи за мале вредности r.

Такође, не можемо очекивати ни да ће супремум бити постигнут за $r \to 1^-$, јер је

$$\begin{aligned}T(r) = (1-r^2)^\alpha \int_{\mathbb{B}^n} |\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}} \, dv(\zeta) \quad &\leq \int_{\mathbb{B}^n} |\zeta_1| \left(\frac{(1-r^2)(1-|\zeta_1|^2)}{|1-r\zeta_1|^2} \right)^\alpha dv(\zeta) \\ = \int_{\mathbb{B}^n} |\zeta_1| \big(1-|\varphi_r(\zeta_1)|^2\big)^\alpha \, dv(\zeta),\end{aligned}$$

али

$$|\zeta_1|\big(1-|\varphi_r(\zeta_1)|^2\big)^\alpha \le |\zeta_1| \in L^1(\mathbb{B}^n, dv(\zeta)),$$

па, по Лебеговој теореми о доминантној конвергенцији

$$0 \le \limsup_{r\to 1^-} T(r) \le \int_{\mathbb{B}^n} \lim_{r\to 1^-} |\zeta_1|\big(1-|\varphi_r(\zeta_1)|^2\big)^\alpha \, dv(\zeta) = 0,$$

због $\varphi_r(\zeta_1) = \frac{r-\zeta_1}{1-r\zeta_1} \to 1$ кад $r \to 1^-$. Дакле, супремум се не постиже за $r=0$ или $r=1$.

У овом случају, полунорму можемо проценити користећи примедбу из Леме 9. Наиме,

$$(n+1)\, c_\alpha T(r) < (n+1)\,\Gamma(n+\alpha+1)\binom{\alpha+k_\alpha-1}{k_\alpha}\frac{\Gamma\big(k_\alpha+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k_\alpha+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}.$$

Неједнакост је строга, јер, за $r=0$ смо то већ показали, а за $r>0$ имамо строгу неједнакост $a_k < a_{k_\alpha}$ за $k \neq k_\alpha$. Приметимо да иста процена важи и за $|\nabla_{\overline{z}}(B_\alpha f)(z)|$, због ненегативности језгра (мада је довољна и примедба $T(z,w)\in\mathbb{R}$ за свако $z,w\in\mathbb{B}^n$), па имамо

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_{\overline{z}}(B_\alpha f)(z)| \le (n+1)\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma\big(\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(n+\alpha+\frac{3}{2}\big)} \tag{3.20}$$

са $\|f\|_\infty \le 1$ и $0\le\alpha\le 2n+3$, и слично и са проценом $\alpha > 2n+3$.

Такође, ако је $\alpha<0$, избор $f=\frac{|w_1|}{\overline{w_1}}$ опет нас доводи до разматрања функције $T(r)$, $0\le r<1$, али је сада ова функција производ две монотоно растуће функције: прва од њих је $(n+1)c_\alpha(1-r^2)^\alpha$ и друга $\int_{\mathbb{B}^n}|\zeta_1|\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}$, која је, по претходном рачуну, такође растућа по r. Али, како је $(1-r^2)^\alpha$ и неограничена, закључујемо да је $B_\alpha : L^\infty \to \mathcal{B}$ неограничен за $\alpha<0$. Овим је доказ Теореме 16 завршен. $\square$

Приметимо да се може израчунати и

$$\begin{aligned}(n+1)\, c_\alpha T'(r) &= 2(n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)(1-r^2)^{\alpha-1}\,\cdot\\ &\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha+k-1}{k}^2\frac{\Gamma\big(k+\frac{3}{2}\big)}{\Gamma\big(k+\alpha+n+\frac{3}{2}\big)}\big(kr^{2k-1}-(k+\alpha)r^{2k+1}\big),\end{aligned}$$

али је веома тешко да се чињеница $T'(r_0)=0$ може искористити у израчунавању $T(r_0)$.

Неједнакости (3.17) и (3.20), иако оптималне, не дају и најбољу процену реалне Блоховске полунорме. Да бисмо постигли такву процену, вратимо се на оцену реалног градијента $\nabla(B_\alpha f)(z)$ као у комплексном случају.

$$\begin{aligned}|\nabla(B_\alpha f)(z)| &= \sup_{|l|=1} |\langle \nabla(B_\alpha f)(z), l\rangle| \\ &= \sup_{|l|=1} \left| \int_{\mathbb{B}^n} \langle \nabla K(z,w) f(w), l\rangle \, dv_\alpha(w)\right| \\ &\leq \sup_{|l|=1} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \nabla K(z,w), l\rangle| \, |f(w)| \, dv_\alpha(w) \\ &\leq \sup_{|l|=1} \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \nabla K(z,w), l\rangle| \; dv_\alpha(w) \|f\|_\infty \end{aligned} \tag{3.21}$$

Овде је, с обзиром на природу проблема $l \in \mathbb{R}^{2n}$, а f реално-вредносна функција, по претпоставци.

Користићемо такође и одређене везе са раније коришћеним изразима како бисмо брзо дошли до оперативније репрезентације супремума у последњој неједнакости. Наиме, из

$$\frac{\partial}{\partial x_k} K(z,w) = \frac{\partial}{\partial z_k} K(z,w) + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} K(z,w)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial y_k} K(z,w) = i\left(\frac{\partial}{\partial z_k} K(z,w) - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} K(z,w)\right),$$

где је $z_k = x_k + iy_k, k = 1, 2 \ldots, n$, имамо:

$$\begin{aligned}\langle \nabla K(z,w), l\rangle &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} K(z,w) l_{2k-1} + \frac{\partial}{\partial y_k} K(z,w) l_{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} K(z,w)(l_{2k-1} + il_{2k}) + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} K(z,w)(l_{2k-1} - il_{2k}) \\ &= 2Re \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} K(z,w)\overline{\xi_k} = 2Re\langle \nabla_z K(z,w), \xi\rangle,\end{aligned}$$

за $\xi_k = l_{2k-1} - il_{2k}$, јер је језгро $K(z,w)$ реално-вредносно.

Доказ Теореме 17. Претпоставимо да је $\|f\|_\infty = 1$. Отуда, према ранијим израчунавањима, добијамо:

$$(1-|z|^2)|\nabla(B_\alpha f)(z)| \leq 2(n+1)c_\alpha \sup_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1-|z|^2)^{n+1}}{|1-\langle z,w\rangle|^{2n+2}} \times$$

$$\times \left| Re \frac{(1-|z|^2)\langle \xi, w\rangle - (1-\langle z,w\rangle)\langle \xi, z\rangle}{1-\langle z,w\rangle} \right| dv_\alpha(w)$$

$$= 2(n+1)c_\alpha \sup_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} \big|Re\langle \xi, \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z + \sqrt{1-|z|^2}(\zeta - \frac{\langle \zeta, z\rangle}{|z|^2} z)\rangle\big| \frac{(1-|z|^2)^\alpha (1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-\langle z.\zeta\rangle|^{2\alpha}}\, dv(\zeta)$$

Опет, стављајући $z = (r, 0 \dots 0), 0 \le r < 1$ долазимо до:

$$(1-|z|^2)|\nabla(B_\alpha f)(z)| \le 2(n+1)c_\alpha (1-r^2)^\alpha \times$$
$$\times \max_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} \Big| Re\langle \xi, \sqrt{1-r^2}\zeta + (1-\sqrt{1-r^2})\zeta_1^{'}\rangle \Big| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta).$$

Сетимо се да је $\zeta_1' = \zeta_1 e_1$ за $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$.

Аналогна примена неједнакости троугла, попут оне у комплексном случају, даје:

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)\,|\nabla(B_\alpha f)(z)| \le 2(n+1)c_\alpha \Bigg[&(1-\sqrt{1-r^2}) \times \\ &\times (1-r^2)^\alpha \max_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} |Re\langle \xi, {\zeta_1}'\rangle| \, \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) \qquad (3.22) \\ &+ (1-r^2)^{\alpha+\frac{1}{2}} \max_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} |Re\langle \xi, \zeta\rangle| \, \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta) \Bigg].\end{aligned}$$

Први максимум достиже се за $\xi = e_1$, док за максимум другог интеграла користећи аргумент сличан оном у Леми 8 добијамо:

$$\max_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} |Re\langle \xi, \zeta\rangle| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1|^{2\alpha}}\, dv(\zeta)$$
$$= \max_{|\xi_1|^2+|\xi_2|^2=1} \int_{\mathbb{B}^n} |Re\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1 - r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta).$$

Сада процењујемо

$$\int_{\mathbb{B}^n} |Re\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1 - r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta).$$

Означимо $\zeta_j = \mu_{2j-1} + i\mu_{2j}$, $\xi_j = \nu_{2j-1} + i\nu_{2j}$. Тада је

$$\zeta_1\xi_1 + \zeta_2\xi_2 = \mu_1\nu_1 - \mu_2\nu_2 + \mu_3\nu_3 - \mu_4\nu_4 + i(\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_3\nu_4 + \mu_4\nu_3)$$

па је:

$$\int_{\mathbb{B}^n} |Re\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1 - r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta)$$

$$\leq \int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1| \frac{(1-|\mu|^2)^\alpha}{|1-r(\mu_1\nu_1-\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3-\mu_4\nu_4)|^{2\alpha}}\, dv(\mu).$$

Овде $\mu=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{2n})$ и (μ) је $2n-$димензиона Лебегова мера. Користили смо елементарну неједнакост $|z|\geq |Rez|$.

У последњем интегралу уведимо смену задату ротацијом $(-\nu_2,\nu_3,-\nu_4)$ у $\sqrt{\nu_2^2+\nu_3^2+\nu_4^2}(1,0,0)$. Имамо:

$$\int_{\mathbb{B}^n} |Re\zeta_1| \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha}{|1-r\zeta_1\xi_1-r\zeta_2\xi_2|^{2\alpha}}\, dv(\zeta)$$

$$\leq \int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1| \frac{(1-|\mu|^2)^\alpha}{|1-r\mu_1\nu_1-r\mu_2\nu_2|^{2\alpha}}\, dv(\mu),$$

где је $\nu_1^2+\nu_2^2=1, \nu_1,\nu_2\in\mathbb{R}$.

Развијајући $(1-r\mu_1\nu_1-r\mu_2\nu_2)^{-2\alpha}$ у ред добијамо:

$$\int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1| \frac{(1-|\mu|^2)^\alpha}{\big(1-r\mu_1\nu_1-r\mu_2\nu_2\big)^{2\alpha}}\, dv(\mu)$$

$$= \int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1|(1-|\mu|^2)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+2\alpha-1}{k} r^k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu_1^{k-j}\nu_1^{k-j}\mu_2^j\nu_2^j\, dv(\mu) =$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+2\alpha-1}{k} r^k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\nu_1^{k-j}\nu_2^j \int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1|(1-|\mu|^2)^\alpha \mu_1^{k-j}\mu_2^j\, dv(\mu).$$

Јасно је да је за непарно j или $k-j$, интеграл по $\mathbb{B}_{2n}$ једнак нули, па је последња сума једнака:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+2\alpha-1}{2k} r^{2k} \sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}\nu_1^{2k-2j}\nu_2^{2j} \int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1|(1-|\mu|^2)^\alpha \mu_1^{2k-2j}\mu_2^{2j}\, dv(\mu).$$

Фубинијева теорема даје:

$$\int_{\mathbb{B}_{2n}} |\mu_1|^{2k-2j+1}\mu_2^{2j}(1-|\mu|^2)^\alpha\, dv(\mu)$$

$$= \int_{\mathbb{B}_2} |\mu_1|^{2k-2j+1}\mu_2^{2j} \int_{\sqrt{1-\mu_1^2-\mu_2^2}\mathbb{B}_{2n-2}} (1-\mu_1^2-\mu_2^2-\mu'^2)^\alpha\, dv(\mu')\, dv(\mu_1,\mu_2)$$

$$= \int_{\mathbb{B}_{2n-2}} (1-\tau^2)^\alpha\, dv(\tau) \int_{\mathbb{B}_2} |\mu_1|^{2k-2j+1}\mu_2^{2j}(1-\mu_1^2-\mu_2^2)^{\alpha+n-1}\, d\mu_1\, d\mu_2$$

$$= \frac{\pi^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \int_{u+v\leq 1, u,v\geq 0} u^{k-j} v^{j-\frac{1}{2}}(1-u-v)^{\alpha+n-1}\, du\, dv$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} B(k-j+1,\alpha+n)B(\alpha+n+k-j+1, j+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\pi^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{\pi^{n-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

Овде смо користили смену промењљивих и везу Гама и Бета функција.

Проценимо сада и двоструку суму:

$$
\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+2\alpha-1}{2k}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}r^{2k}\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2})\nu_1^{2k-2j}\nu_2^{2j}.
$$

Приметимо да је низ $b_{j,k} = \frac{\binom{2k}{2j}}{\binom{k}{j}}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2})$ опадајући по j за фиксирано k. Заиста, из

$$
b_{j,k} = \frac{\binom{2k}{2j}}{\binom{k}{j}}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2}) = \frac{(2k)!j!(k-j)!^2}{(2j)!(2k-2j)!k!}\Gamma(j+\frac{1}{2})
$$

добијамо

$$
\frac{b_{j+1,k}}{b_{j,k}} = \frac{(j+1)!(k-j-1)!^2\Gamma(j+\frac{3}{2})(2j)!(2k-2j)!}{(2j+2)!(2k-2j-2)!j!(k-j)!^2\Gamma(j+\frac{1}{2})} = \frac{2k-2j-1}{2k-2j} < 1
$$

за $0 \le j \le k-1$.

Следи:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+2\alpha-1}{2k}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}r^{2k}\sum_{j=0}^{k}\binom{2k}{2j}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{1}{2})\nu_1^{2k-2j}\nu_2^{2j} \\
&\le \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+2\alpha-1}{2k}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}r^{2k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}k!\Gamma(\frac{1}{2})\nu_1^{2k-2j}\nu_2^{2j} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+2\alpha-1}{2k}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}k!\Gamma(\frac{1}{2})r^{2k}\left(\nu_1^2+\nu_2^2\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k+2\alpha-1}{2k}\frac{1}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{3}{2})}k!\Gamma(\frac{1}{2})r^{2k}
\end{aligned}
$$

Сада преостаје да нађемо супремум функције промењљиве $r \in [0,1]$. Из неједнакости (3.22) и горње процене двоструке суме, јасно је да ће ова неједнакост бити оптимална само ако је супремум достигнут у $r=0$. Нађимо сада и релацију између n и α за коју то и важи. Потребна нам је следећа:

***Лема* 10** ([57]). *Низ*

$$b_k = \binom{2\alpha + 2k - 1}{2k}\binom{\alpha + k - 1}{k}^{-1}\frac{k!}{\Gamma(k + \alpha + n + \frac{3}{2})}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

опада по k ако и само ако $\alpha \le n + \frac{1}{2}$, док за $\alpha > n + \frac{1}{2}$ расте при $k \le k'_\alpha$ и опада за $k > k'_\alpha$.

Доказ. За $b_k = \dfrac{k!\binom{2k+2\alpha-1}{2k}}{\Gamma(k+n+\alpha+\frac{3}{2})\binom{k+\alpha-1}{k}}$ лако израчунавамо

$$\frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{(2k + 2\alpha + 1)(k + 1)}{(2k + 1)(k + n + \alpha + \frac{3}{2})},$$

што је мање или једнако 1 ако и само ако је $\alpha \le n + \frac{1}{2} + k(2n + 1)$. Ово важи за све $k \ge 0$, ако и само ако је $\alpha \le n + \frac{1}{2}$. У случају $\alpha > n + \frac{1}{2}$, низ расте b_k по k за $k \le k'_\alpha$, а опада за $k \ge k'_\alpha$, где је

$$k'_\alpha = \left\lceil \frac{\alpha}{2n+1} - \frac{1}{2} \right\rceil$$

Дакле, за $\alpha \le n + \frac{1}{2}$ низ је опадајући и $b_k \le b_0$ за све $k \in \mathbb{N}$, док за $\alpha > n + \frac{1}{2}$ имамо

$$b_k \le b_{k'_\alpha} = \binom{2k'_\alpha + 2\alpha - 1}{2k'_\alpha}\binom{k'_\alpha + \alpha - 1}{k'_\alpha}^{-1}\frac{(k'_\alpha)!}{\Gamma(k'_\alpha + \alpha + n + \frac{3}{2})}.$$

□

Као последицу Леме 10 имамо следећи закључак:

За $\alpha \le n + \frac{1}{2}$ све горње процене су оптималне и имамо

$$\begin{aligned}(1 - |z|^2)\,|\nabla(B_\alpha f)(z)| &\le 2(n+1)c_\alpha \pi^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + n + \frac{3}{2})}\|f\|_\infty \\ &= \frac{2}{\pi}(n+1)B(\alpha + n + 1, \frac{1}{2})\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

За $\alpha > n + \frac{1}{2}$ важи:

$$\begin{aligned}(1 - |z|^2)\,|\nabla(B_\alpha f)(z)| &< \frac{2}{\sqrt{\pi}}(n+1)\binom{2k'_\alpha + 2\alpha - 1}{2k'_\alpha}\times \\ &\times\binom{k'_\alpha + \alpha - 1}{k'_\alpha}^{-1}\frac{(k'_\alpha)!\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(k'_\alpha + \alpha + n + \frac{3}{2})}\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Важно је напоменути да избор $z = (1, 0, \ldots, 0)$ и $r = 0$ даје једнакост у првој процени за $f(z) = \frac{|Rez_1|}{Rez_1}$. Јасно је да неједнакост у случају $\alpha > n + \frac{1}{2}$ није оптимална, као ни одговарајућа у комплексној варијанти. □

Глава 4

Бергманова пројекција

4.1 Бергманова пројекција—увод и значај

Круг идеја везаних за Бергманово језгро и метрику потиче од Бергмана и Сегеа. Ова техника испоставила се као врло корисна у истраживању функција више комплексних променљивих, парцијалних диференцијалних једначина, геометрији, итд. Наиме, домену у $\mathbb{C}^n$ придружићемо простор L^2-интеграбилних холоморфних функција, а потом и репродуктивно језгро. Користећи добијено језгро, конструишемо растојање на домену које ће се чувати при бихоломорфним пресликавањима. Ово већ довољно говори о могућности повезивања различитих техника из анализе и геометрије у проблемима где овај приступ налази примену.

Напоменимо, пре свих, примену на испитивање граничне регуларности холоморфних функција [20]. Такође, Бергманово језгро има извесна екстремална својства која га чине моћним алатом у теорији парцијалних једначина.

Наредни редови биће посвећени увођењу Бергманове пројекције на ограниченим доменима у $\mathbb{C}^n$ и њеним основним особинама.

Означимо са Ω домен коначне запремине у $\mathbb{C}^n$ и са $A^2(\Omega)$ Бергманов простор свих холоморфних функција f на Ω за које је коначна норма

$$\|f\|_{A^2(\Omega)} = \sqrt{\frac{1}{v(\Omega)} \int_\Omega |f(z)|^2 \, dv(z)} < +\infty. \tag{4.1}$$

Прве особине овог простора даћемо у наредним лемама.

***Лема* 11** ([37])**.** *Нека је K компактан подскуп домена Ω. Тада постоји константа $C_{K,n}$, $\quad 0 < C_{K,n} < +\infty$, која зависи само од K и n, таква да је*

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \le C_{K,n} \|f\|_{A^2(\Omega)}, \quad \forall f \in A^2(\Omega). \tag{4.2}$$

Доказ. Како је K компакт, постоји $r(K) = r > 0$ такво да за свако $z \in K$, $B(z, r) \subset \Omega$. Због тога, користећи својство средње вредности холоморфних функција и Коши-Шварцову неједнакост, за свако $z \in K$ и $f \in A^2(\Omega)$ имамо:

$$
\begin{aligned}
|f(z)| &= \frac{1}{v(B(z,r))} \left| \int_{B(z,r)} f(w)\, dv(w) \right| \\
&\le \|f\|_{L^2(B(z,r))} \\
&\le c(n) r^{-n} \|f\|_{A^2(\Omega)} = C_{K,n} \|f\|_{A^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$
□

***Став* 1** ([37])**.** *Простор $A^2(\Omega)$ је Хилбертов простор са скаларним производом*

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{v(\Omega)} \int_\Omega f(z)\overline{g(z)}\, dv(z). \tag{4.3}$$

Доказ. Једина нетривијална чињеница за проверу је комплетност. Проверимо и то. Нека је низ функција $\{f_j\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq A^2$ Кошијев у A^2-норми. Како је L^2 комплетан, постоји L^2-гранична функција f. Уверимо се да је ова функција и холоморфна.

Заиста, Лема 11 даје да је низ Кошијев f_j и у sup-норми на сваком компакту $K \subset \Omega$, што повлачи нормалну конвергенцију (тј. конвергенцију по компактима) низа f_j. Како је гранична функција, при нормалној конвергенцији низа холоморфних функција холоморфна, то је $f \in H(\Omega)$, па је и $f \in A^2(\Omega)$. □

Следећа особина је кључна за увођење репродуктивног језгра.

***Став* 2** ([37])**.** *За свако $z \in \Omega$, функционал*

$$\Phi_z : f \mapsto f(z), f \in A^2(\Omega)$$

је непрекидан линеаран функционал на $A^2(\Omega)$.

Доказ. Ово је последица Леме 11, ако узмемо $K = \{z\}$. □

Сада применом теореме Риса о репрезентацији линеарних функционала на Хилбертовим просторима, видимо да са свако $z \in \Omega$ постоји функција $K_z \in A^2(\Omega)$ таква да се линеарни функционал Φ_z може представити као скаларни производ са K_z односно:

Ако је $f \in A^2(\Omega)$, тада за свако $z \in \Omega$ важи

$$\Phi_z(f) = f(z) = \langle f, K_z\rangle. \tag{4.4}$$

То доводи до следеће дефиниције:

Дефиниција 1. Бергманово језгро за домен Ω је функција $K(z,w)=\overline{K_z(w)}$, $z,w\in\Omega$. Она има следеће репродукујуће својство:

$$f(z)=\int_\Omega K(z,w)f(w)\,dv(w),\quad \text{за свако}\quad f\in A^2(\Omega). \tag{4.5}$$

Неке особине језгра $K(z,w)$ дате су следећим ставовима.

***Став* 3** ([37]). *Бергманово језгро $K(z,w)$ је конјуговано-симетрично, односно $K(z,w)=\overline{K(w,z)}$.*

Доказ. По дефиницији, $\overline{K(w,\cdot)}$ припада $A^2(\Omega)$ за свако фиксирано w. Отуда, из репродукујућег својства имамо

$$\int_\Omega K(z,t)\overline{K(w,t)}\,dv(t)=\overline{K(w,z)}.$$

Са друге стране,

$$\int_\Omega K(z,t)\overline{K(w,t)}\,dv(t)=\overline{\int_\Omega K(w,t)\overline{K(z,t)}\,dv(t)}=\overline{\overline{K(z,w)}}=K(z,w). \qquad \square$$

***Став* 4** ([37]). *Бергманово језгро је јединствено одређено следећим својствима:*

(а) припада $A^2(\Omega)$,

(б) има својство конјуговане-симетричности,

(в) репродукује $A^2(\Omega)$.

Доказ. Нека је $K'(z,w)$ неко друго језгро које испуњава својства (а), (б) и (в). Тада је

$$\begin{aligned}K(z,w)=\overline{K(w,z)}&=\int_\Omega K'(z,t)\overline{K(w,t)}\,dv(t)\\&=\overline{\int_\Omega K(w,t)\overline{K'(z,t)}\,dv(t)}=\overline{\overline{K'(z,w)}}=K'(z,w).\end{aligned} \qquad \square$$

Како је $L^2(\Omega)$ сепарабилан Хилбертов простор, исто важи и за његов затворен потпростор $A^2(\Omega)$. Зато постоји ортонормирана база $\{\Phi_j\}_{j=1}^{+\infty}$ за $A^2(\Omega)$.

***Теорема* 21** ([37])**.** *Нека је K компактан подскуп од Ω, а Φ_j ортонормирана база за $A^2(\Omega)$. Тада ред*

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)}$$

конвергира на $K \times K$ равномерно ка $K(z,w)$.

Доказ. Према теореми Рис-Фишера и теореми Риса о репрезентацији, добијамо

$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}|\Phi_j(z)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &= \sup_{z\in K}\big\|\{\Phi_j(z)\}_{j=1}^{+\infty}\big\|_{l^2}\\ &= \sup_{\|\{a_j\}\|_{l^2}=1, z\in K}\Big|\sum_{j=1}^{+\infty} a_j\Phi_j(z)\Big| = \sup_{\|f\|_{A^2}=1}|f(z)| \le c_K.\end{aligned}$$

У последњој неједнакости користили смо Лему 11. Зато је,

$$\sum_{j=1}^{+\infty}|\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)}| \le \Big(\sum_{j=1}^{+\infty}|\Phi_j(z)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{j=1}^{+\infty}|\Phi_j(w)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

и конвергенција је равномерна за $z, w \in K$, за фиксирано $z \in \Omega$. Видели смо да $\{\Phi_j(z)\}_{j=1}^{+\infty} \in l^2$, па тако добијамо $\sum_{j=1}^{+\infty}\Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)} \in \overline{A^2(\Omega)}$ као функција по w. Означимо збир последњег реда са $K'(z,w)$. Приметимо да је K' конјуговано-симетрично по самој дефиницији. Такође, за $f \in A^2(\Omega)$, имамо

$$\int_\Omega K'(\cdot, w)f(w)\,dv(w) = \sum \widehat{f}(j)\Phi_j(\cdot) = f(\cdot)$$

у смислу A^2-конвергенције (по $\|\cdot\|_{A^2}$-норми; $\widehat{f}(j)$ је j-ти Фуријеов коефицијент од f у бази $\{\Phi_j\}$). Међутим, A^2-конвергенција и Лема 11 дају

$$f(z) = \int_\Omega K'(z,w)f(w)\,dv(w), \quad \forall f \in A^2(\Omega),$$

па је K' Бергманово језгро на основу Става 4.

Ово показује и да је, независно од избора ортонормиране базе функција за $A^2(\Omega)$

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \Phi_j(z)\overline{\Phi_j(w)}$$

једнака Бергмановом језгру. □

У конкретним и довољно „лепим” случајевима, ово се може искористити за експлицитно израчунавање $K(z,w)$.

Коначно, приметимо да, ако је Ω ограничен домен у $\mathbb{C}^n$, пресликавање

$$P\colon f \longmapsto \int_\Omega K(\cdot, w) f(w)\, dv(w)$$

јесте ортогонална пројекција $L^2(\Omega,\, dv)$ на $A^2(\Omega)$. Заиста, P је идемпотентан и самоадјунгован оператор и $A^2(\Omega)$ је тачно скуп елемената из L^2 које оператор P фиксира. Оператор P називамо Бергмановом пројекцијом.

Напоменимо следеће о Бергмановој метрици: Она се може задати на домену $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ на следећи начин. Прво, дефинишемо Хермитску матрицу на Ω са

$$g_{ij}(z) = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \overline{z_j}} \log K(z, z), \quad z \in \Omega$$

($K(z, z)$ је као $\sum_{j=1}^{+\infty} |\Phi_j(z)|^2$ строго позитивна величина). Ово заправо значи да је дужина тангентног вектора $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$ у тачки $z \in \Omega$ дата са

$$|\xi|_{B,z} = g_{ij}(z)\xi_i\overline{\xi_j}$$

Овим је дефинисана Бергманова метрика. Дефинисање дужине криве и растојања између две тачке је исто као и у случају било које Хермитске метрике. Изразе за конкретне домене имали смо раније у уводном и поглављу о Шварцовој леми.

Добијена метрика има својство да је, бихоломорфно пресликавање f изометрија ако се на његовом домену и кодомену посматрају одговарајуће Бергманове метрике.

Више о овој тематици може се наћи у [36], [37].

Приметимо да се претходна разматрања преносе и на случај мера општијих од Лебегове, нпр. ако се на Ω посматра и нека друга мера дефинисана строго позитивном тежинском функцијом. Сви закључци и особине важе и у том случају.

Размотримо сада тежинско Бергманово језгро у случају $\Omega = \mathbb{B}^n$ и мере $dv_\alpha(z) = c_\alpha(1 - |z|^2)^\alpha\, dv(z)$ јер ће оно бити предмет нашег изучавања. Овде да је $c_\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\pi^n}$. За експлицитно израчунавање Бергмановог језгра за лопту са мером dv_α послужићемо се Теоремом 21 и потпуним ортогоналним системом функција у A^2 :

$$\Phi_j(z) = z_1^{j_1} z_2^{j_2} \cdots z_n^{j_n}, \quad \text{за} \quad j = (j_1, j_2, ..., j_n).$$

Овде су све компоненте мултииндекса ненегативне, па након нормализације сваке функције у систему применом Леме 3.3 из [28] добијамо:

$$\|\Phi_j(z)\|_{A^2}^2 = \int_{\mathbb{B}^n} |z_1|^{2j_1} \cdots |z_n|^{2j_n}\, dv_\alpha(z) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1+j_1+...+j_n)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \prod_{k=1}^{n} (j_k)!,$$

Теорема 21 даје:

$$K_\alpha(z,w) = \sum_{j_1+j_2+...+j_n=|j|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1+j_1+...+j_n)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \frac{1}{j_1!\cdots j_n!}(z_1\overline{w_1})^{j_1}\cdots(z_n\overline{w_n})^{j_n}$$

$$= \sum_{|j|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1+|j|)}{\Gamma(n+\alpha+1)|j|!} \sum_{j_1+j_2+...+j_n=|j|} \frac{|j|!}{j_1!\cdots j_n!}(z_1\overline{w_1})^{j_1}\cdots(z_n\overline{w_n})^{j_n}$$

$$= \sum_{|j|=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha+1+|j|)}{\Gamma(n+\alpha+1)|j|!}\langle z,w\rangle^{|j|} = \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+1}}.$$

Напоменимо и да је ово један од ретких случајева да се формула за Бергманово језгро може експлицитно израчунати, тако да је Теорема 21 углавном од теоријског значаја.

4.2 Оцена норме Бергманове пројекције на $L^p(\mathbb{B}^n)$

У теорији интегралних оператора природно се намеће питање ограничености посматраног оператора и добре процене норме истог на L^p простору. Ограниченост Бергманове пројекције на $L^p(\mathbb{D})$ последица је општих резултата Калдерон-Зигмундове теорије. Ипак, нешто конкретнији резултати скоријег су датума. Асимптотски оптималну процену за p блиско јединици и бесконачности дао је Кехе Жу који је, у [83], показао да на диску $\mathbb{D}$ важи:

$$c_1\frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}} \leq \ \|P\|_p \leq c_2\frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}} \tag{4.6}$$

за неке константе c_1 и c_2 које не зависе од p, док је Достанић побољшао овај резултат налазећи конкретне вредности ових константи : $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \pi$. У истом раду,[15], Достанић даје и претпоставку о тачној вредности норме $(\|P\|_p = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{p}})$, донекле очекивану с обзиром на резултат Холенбека и Вербицког о тачној норми Рисове пројекције ([25]), међутим у [39] Лиу даје најбољу постојећу процену норме Бергманове пројекције на $L^p(\mathbb{B}^n)$. Тиме Лиу оповргава Достанићеву претпоставку и поставља нову која и даље није ни доказана ни оповргнута.

Рецимо и да Лиу израчунава тачну норму максималне Бергманове пројекције, али тај резултат можемо видети и као последицу разматрања из одељка 3.2, тј. Марковићевог резултата из [48]. Наиме, то је оператор означен са T за који смо добили:

$$\|P^{\#}\|_p = \|T\|_p = \frac{\pi n!}{\Gamma^2(\frac{n+1}{2})}\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{p})}.$$

Дакле,

$$\|P\|_p \leq \|P^{\#}\|_p = \frac{\pi n!}{\Gamma^2(\frac{n+1}{2})} \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{p})}, \quad 1 < p < \infty. \tag{4.7}$$

Зато ће, овде, предмет разматрања бити процена норме одоздо. Наиме, користећи резултате из [39], доказаћемо следећу теорему:

***Теорема* 22** (Лиу [39])**.**

$$\|P\|_p \geq \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{q}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \quad q = \frac{p}{p-1}, \quad 1 < p < \infty. \tag{4.8}$$

Специјално, за $n = 1$ је

$$\|P\|_p \geq \Gamma\left(\tfrac{2}{p}\right) \Gamma\left(\tfrac{2}{q}\right).$$

Доказаћемо да је, за $p \neq 2$,

$$\Gamma\left(\tfrac{2}{p}\right) \Gamma\left(\tfrac{2}{q}\right) > \frac{1}{\sin \frac{\pi}{p}},$$

што даје негативан одговор на Достанићево питање из [15] .

Подсетимо се да под L^p-нормом функције f подразумевамо

$$\|f\|_p = \left(\frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} |f(z)|^p \, dv(z)\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.9}$$

Тада Бергманову пројекцију записујемо као:

$$Pf(z) = \frac{n!}{\pi^n} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{f(w)}{(1 - \langle z, w \rangle)^{n+1}} \, dv(w). \tag{4.10}$$

Ми ћемо размотрити само случај $p \geq 2$, будући да из дуалности случај $1 < p < 2$ природно следи.

Биће нам потребан и један резултат Харди-Литлвудовог типа о коефицијентима функција из тежинског Бергмановог простора A^p_α, Накамуре, Охје и Ватанабеа из [60]. Подсетимо се , за $0 < p < \infty$ и $\alpha > -1$, са A^p_α означавамо Бергманов простор аналитичких функција у $\mathbb{D}$ са коначном нормом

$$\|\varphi\|_{A^p_\alpha} = \left(\frac{\alpha + 1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |\varphi(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha \, dm(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

где је m је Лебегова мера.

***Лема* 12** (Накамура, Охја, Ватанабе [60])**.** *Нека је $1 < p < \infty$, $\alpha > -1$ и $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ низ комплексних бројева такав да је:*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^{p-3-\alpha} |a_k|^p < \infty.$$

Тада функција $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ *припада* A^p_α *и*

$$\|\varphi\|^p_{A^p_\alpha} \le c_{p,\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^{p-3-\alpha} |a_k|^p,$$

и $c_{p,\alpha}$ *зависе само од* p *и* α.

Користећи наведену лему, доказаћемо једно помоћно тврђење, које ћемо у наставку директно користити.

***Лема* 13** (Лиу [40])**.** *Нека је* $2 \le p \le \infty$. *Посматрајмо функцију:*

$$F(z,\xi) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\xi) \langle z, \xi \rangle^k, \qquad z, \xi \in \mathbb{B}^n,$$

где је $\{f_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ *низ комплексно-вредносних функција на* $\mathbb{B}^n$. *Тада, за свако* $\xi \in \mathbb{B}^n$

$$\|F(\cdot,\xi)\|^p_p \le C \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^{p-n-2} |f_k(\xi)|^p |\xi|^{kp}, \tag{4.11}$$

где C *зависи само од* p *и* n.

Доказ. За $n = 1$, Лема 13 следи из Леме 12. Зато размотримо $n \ge 2$. За фиксирано $\xi \in \mathbb{B}^n$ и $r \in [0,1)$, посматрајмо

$$\varphi_{r,\xi}(\lambda) := \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\xi) r^k |\xi|^k \lambda^k, \quad \lambda \in \mathbb{D}$$

Претпоставимо да је у (4.11) десна страна коначна, иначе је тврђење тривијално. Према Леми 12, $\phi_{r,\xi} \in A^p_{n-2}$ и

$$\|\varphi_{r,\xi}\|^p_{A^p_{n-2}} \le C' \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^{p-n-1} \big(|f_k(\xi)| r^k |\xi|^k\big)^p. \tag{4.12}$$

Подсетимо се да за $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$ и свако $\eta \in S^n$ имамо

$$\int_{S^n} \varphi(\langle \zeta, \eta \rangle)\, d\sigma(\zeta) = \frac{n-1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \varphi(\lambda)(1-|\lambda|^2)^{n-2}\, dv(\lambda).$$

Одатле је:

$$\int_{S^n} |F(r\zeta,\xi)|^p\, d\sigma(\zeta) = \frac{n-1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |\varphi_{r,\xi}(\lambda)|^p (1-|\lambda|^2)^{n-2}\, dv(\lambda) = \|\varphi_{r,\xi}\|^p_{A^p_{n-2}}.$$

Из последњег и (4.12), интеграљењем по поларним координатама добијамо

$$\|F(\cdot,\xi)\|^p_p = 2n \int_0^1 r^{2n-1} \|\phi_{r,\xi}\|^p_{A^p_{n-2}}\, dr \le C \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^{p-n-2} |f_k(\xi)|^p |\xi|^{kp}$$

што смо и желели да докажемо. $\square$

Доказ Теореме 22. Нека је, за $\xi \in \mathbb{B}^n$:

$$f_\xi(z) \coloneqq (1 - \langle \xi, z\rangle)^{\frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{p}} (1 - \langle z, \xi\rangle)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad z \in \mathbb{B}^n.$$

Ту фамилију функција ћемо искористити као тест функције при процени норме P одоздо. Тада је

$$Pf_\xi(z) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{dv(w)}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+1}(1 - \langle \xi, w\rangle)^{\frac{n+1}{p} - \frac{n+1}{2}}(1 - \langle w, \xi\rangle)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Користећи стандардну технику са хипергеометријским функцијама добијамо

$$Pf_\xi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k}{k!} {}_2F_1\!\left(\tfrac{n+1}{p} - \tfrac{n+1}{2},\, \tfrac{n+1}{2} + k;\, n+1+k;\, |\xi|^2\right) \langle z, \xi\rangle^k.$$

Детаљи овог рачуна могу се наћи у [39].

Посматрајмо следеће функције

$$\Phi_\xi(z) \coloneqq \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{q}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} (1 - \langle z, \xi\rangle)^{-\frac{n+1}{p}}, \tag{4.13}$$

$$\Psi_\xi(z) \coloneqq \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{q}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon_k \langle z, \xi\rangle^k, \tag{4.14}$$

$$\Upsilon_\xi(z) \coloneqq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(\xi)\langle z, \xi\rangle^k, \tag{4.15}$$

где је

$$\varepsilon_k \coloneqq \frac{\left(\frac{n+1}{p}\right)_k}{k!} \left(\frac{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma\left(k + \frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{q}\right)\Gamma\left(k + \frac{n+1}{p}\right)} - 1 \right)$$

$$a_k(\xi) \coloneqq \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)_k}{k!} \left({}_2F_1\!\left(\tfrac{n+1}{p} - \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2} + k; n+1+k; |\xi|^2\right) - \frac{\Gamma(k+n+1)\,\Gamma\left(k + \frac{n+1}{q}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right)$$

Лако је проверити да је

$$Pf_\xi(z) = \Phi_\xi(z) + \Psi_\xi(z) + \Upsilon_\xi(z).$$

Даље, имамо:

$$\|P\|_p \geq \limsup_{|\xi| \to 1^-} \frac{\|Pf_\xi\|_p}{\|f_\xi\|_p} \geq \limsup_{|\xi| \to 1^-} \left(\frac{\|\Phi_\xi\|_p}{\|f_\xi\|_p} - \frac{\|\Psi_\xi\|_p}{\|f_\xi\|_p} - \frac{\|\Upsilon_\xi\|_p}{\|f_\xi\|_p} \right).$$

Остатак доказа поделићемо у четири тврђења.

***Тврђење* 1** ([40])**.** $\|f_\xi\|_p \asymp \log \dfrac{1}{1 - |\xi|^2}$.

Ово следи из процене Форели-Рудиновог типа за интеграл

$$I_c(z) := \int_{S^n} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{n+c}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

и које гласе:

$$I_c(z) \asymp \begin{cases} 1, & c < 0, \\ \frac{1}{1-|z|^2}, & c = 0, \\ (1-|z|^2)^{-c}, & c > 0. \end{cases}$$

Овде $f \asymp g$ означава да постоје константе $C_1, C_2 > 0$, такве да је $C_1 \le \frac{f}{g} \le C_2$. За доказ погледати [21] или [71] .

Из облика функције $f_\xi(z)$ и $\Phi_\xi(z)$ очигледно је следеће

***Тврђење* 2** ([40])**.** $\|\Phi_\xi\|_p = \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{p})\Gamma(\frac{n+1}{q})}{\Gamma^2(\frac{n+1}{2})}\|f_\xi\|_p.$

Из асимптотских формула из [6], имамо:

$$\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \sim k^{a-b}\Big(1 + \frac{1}{2k}(a-b)(a+b-1) + O(k^{-2})\Big)$$

што даје

$$\varepsilon_k = O\big((k+1)^{\frac{n+1}{p}-2}\big).$$

Користећи Лему 13 и добијену оцену за ε_k добијамо

$$\|\Psi_\xi\|_p \le C\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^{-p-1} < +\infty,$$

чиме је доказано

***Тврђење* 3** ([40])**.** $\|\Psi_\xi\|_p = O(1)$.

Да комплетирамо доказ, докажимо још и

***Тврђење* 4** ([40])**.** $\|\Upsilon_\xi\|_p = O(1)$.

Доказ. Нека је, за $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$g_k(x) := {}_2F_1\big(\tfrac{n+1}{p} - \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2} + k; n+1+k; x\big).$$

Према Гаусовој формули је

$$g_k(1^-) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{q})\,\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(\frac{n+1}{2})\,\Gamma(\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{q} + k)}.$$

(4.15) можемо записати као

$$\Upsilon_\xi(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{n+1}{2})_k}{k!}\big(g_k(|\xi|^2) - g_k(1^-)\big)\langle z,\xi\rangle^k. \tag{4.16}$$

Означимо $m := \lceil \frac{n+1}{2} - \frac{n+1}{p} \rceil$, где $\lceil t \rceil$ означава најмањи цео број не мањи од t.

Према правилу о диференцирању хипергеометријских функција из уводног поглавља, добијамо:

$$\begin{aligned} g_k^{(j)}(x) &= \frac{d^j}{dx^j}\,{}_2F_1\big(\tfrac{n+1}{p} - \tfrac{n+1}{2}, \tfrac{n+1}{2} + k; n+1+k; x\big) \\ &= \frac{\big(\frac{n+1}{p} - \frac{n+1}{2}\big)_j \big(\frac{n+1}{2} + k\big)}{(n+1+k)_j}\,{}_2F_1\big(\tfrac{n+1}{p} - \tfrac{n+1}{2} + j, \tfrac{n+1}{2} + k + j; n+1+k+j; x\big) \end{aligned}$$

за $j = 1, 2, \dots, m$.

Дефиниција m обезбеђује $m < (n+1)(1 - \frac{1}{p})$, што гарантује постојање и коначност $g_k^{(j)}(1^-)$ за $j = 1, 2, \dots, m$. Штавише, из Гаусове и Стирлингове формуле добијамо и

$$\big|g_k^{(j)}(1^-)\big| \sim (k+1)^{\frac{n+1}{p} - \frac{n+1}{2} + j}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \tag{4.17}$$

Приметимо, такође, и да је

$$x \mapsto {}_2F_1\big(\tfrac{n+1}{p} - \tfrac{n+1}{2} + m, \tfrac{n+1}{2} + k + m; n+1+k+m; x\big)$$

растућа функција на интервалу $[0, 1)$, јер су коефицијенти у њеном Тејлоровом развоју позитивни. Отуда је

$$\sup_{x\in[0,1)} \big|g_k^{(m)}(x)\big| = \big|g_k^{(m)}(1^-)\big|. \tag{4.18}$$

Тејлорова формула, (4.17) и (4.18) дају

$$\big|g_k(x) - g_k(1^-)\big| \le \sum_{j=1}^{m} \frac{\big|g_k^{(j)}(1^-)\big|}{j!}(1-x)^j = O\Bigg(\sum_{j=1}^{m}(k+1)^{\frac{n+1}{p} - \frac{n+1}{2} + j}(1-x)^j\Bigg),$$

за све $x \in [0, 1)$. Замењујући ово у (4.16), имамо:

$$\begin{aligned} \|\Upsilon_\xi\|_p^p &= O\Bigg(\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^{p-2-n}\bigg(\frac{(\frac{n+1}{2})_k}{k!}\big|g_k^{(m)}(x) - g_k^{(m)}(1^-)\big|\bigg)^p |\xi|^{kp}\Bigg) \\ &= O\Bigg(\sum_{j=1}^{m}\big(1 - |\xi|^2\big)\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^{jp-1}|\xi|^{2k}\Bigg) = O(1). \end{aligned}$$

Овим је завршен доказ Тврђења 4, а тиме и Теореме 22. □

У наредним редовима показаћемо још и неједнакост

$$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{p})\,\Gamma(\frac{n+1}{q})}{\Gamma^2(\frac{n+1}{2})} > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}}$$

за $p \neq 2$, која показује $\|P\|_p > \frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}}$, што је занимљива примедба, с обзиром да је $\frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}}$, $1 < p < \infty$ норма Рисове пројекције на $L^p(\mathbb{T})$.

У ту сврху, посматраћемо логаритамски извод гама функције тј.

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Као прво, приметимо да важи

***Лема* 14** ([40])**.** *Функција* $x \mapsto x^2\Psi'(x)$ *строго расте на* $(0, +\infty)$.

Доказ. Означимо $u(x) = x^2\Psi'(x)$. Из

$$u'(x) = x^2\left(\Psi''(x) + \frac{2}{x}\Psi'(x)\right)$$

и интегралних репрезентација

$$\Psi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{t^2}{1-e^{-t}}\,dt, \quad \Psi''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{t}{1-e^{-t}}\,dt \quad \text{и} \quad \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt,$$

и теореме конволуције за Лапласову трансформацију, добијамо

$$u'(x) = x^2\int_0^{+\infty} e^{-xt}\Big(-\frac{t^2}{1-e^{-t}} + 2\int_0^t \frac{s}{1-e^{-s}}\,ds\Big)\,dt$$

Парцијална интеграција даје

$$u'(x) = x\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{t^2e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}\,dt > 0$$

што доказује лему. □

Размотримо сада, за $a > b > 0$, функцију

$$g(x) := \frac{\Gamma(ax)\,\Gamma(a(1-x))}{\Gamma(bx)\,\Gamma(b(1-x))}.$$

Користећи Лему 14, показаћемо да је g конвексна на $(0,1)$. Заиста, ако је $\sigma(x) := \log g(x)$, имамо

$$\sigma''(x) = b^2\psi'(bx) - a^2\psi'(ax) + b^2\psi'(b(1-x)) - a^2\psi'(a(1-x)),$$

па из Леме 14 закључујемо $\sigma''(x) > 0$ за свако $x \in (0,1)$. Отуда је

$$g''(x) = \frac{g^2(x)\sigma''(x) + (g'(x))^2}{g(x)} > 0$$

за свако $x \in (0,1)$. Сада, будући да је $g(x) = g(1-x)$ за $x \in (0,1)$ и да је g конвексна, закључујемо

$$g(x) = \frac{g(x)+g(1-x)}{2} \geq g\big(\frac{1}{2}\big)$$

тј.

$$\frac{\Gamma(ax)\,\Gamma(a(1-x))}{\Gamma(bx)\,\Gamma(b(1-x))} \geq \frac{\Gamma^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

Специјално, за $a = n+1, b = 2, x = \frac{1}{p}$ имамо

$$\frac{\Gamma\big(\frac{n+1}{p}\big)\,\Gamma\big(\frac{n+1}{p}\big)}{\Gamma^2\big(\frac{n+1}{2}\big)} \geq \Gamma\big(\tfrac{2}{p}\big)\,\Gamma\big(2-\tfrac{2}{p}\big) = \big(1-\tfrac{2}{p}\big)\Gamma\big(\tfrac{2}{p}\big)\,\Gamma\big(1-\tfrac{2}{p}\big) = \frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{p}}{\sin\big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{p}\big)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}},$$

што уз $\sin t \leq t$ повлачи жељено.

Напоменимо да, у истом раду([39]), Лиу даје оптималне верзије процена Форелија и Рудина из [21]. Пре тога, квалитативно проширење ових резултата дали су Матељевић и Павловић у [50]. Исти аутор, у заједничком раду са Жоуом и Пералом, [41] даје и процену одоздо норме тежинске Бергманове пројекције, која подржава оцену из горње теореме као потенцијално најбољу могућу. Оцене норме Бергманове пројекције на разним просторима функција предмет су интензивног истраживања и неки од занимљивих резултата могу се наћи у [35],[80],[40].

4.3 Норма Бергманове пројекције на $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ и процене градијента

Бергманова пројекција није ограничена на $L^1(\mathbb{B}^n)$ и $L^\infty(\mathbb{B}^n)$. Ипак, слика L^∞ функције овим оператором припада Блоховом простору, како се показује у радовима [13] и [14] . Оптималну оцену на диску $\mathbb{D}$ даје Перала у [65] у случају полунорме и у [66] за норму Бергманове пројекције на Блохов простор. Резултате Перале из првог рада уопштили су Калај и Марковић у [28].

У поменутим радовима, основна процена има следећи облик:

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_z P_\alpha f(z)| \leq C\|f\|_{L^\infty}.$$

Ипак, ми ћемо овде пратећи резултате из [56], уместо горње процене $|\nabla_z P_\alpha f(z)|$ за $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, која прати асимптотско понашање кад $|z| \to 1$, доказати знатно прецизнију оцену градијента у свакој тачки $z \in \mathbb{B}^n$:

$$|\nabla_z P_\alpha f(z)| \leq C_{p,n,\alpha}(z)\|f\|_{L^p}, \quad f \in L^p(\mathbb{B}^n), z \in \mathbb{B}^n, \alpha > -1.$$

Као последицу имаћемо следећу неједнакост

$$\sup_{|z|<1}(1-|z|^2)^\beta|\nabla_z P_\alpha f(z)| \leq C_{p,n,\alpha}\|f\|_{L^p},$$

са оптималним експонентом $\beta = \beta(p, n, \alpha)$ и $C_{p,n,\alpha}$.

Прецизније, имамо следећу теорему:

***Теорема* 23** (Мелентијевић [56]). *Нека $f \in L^p(\mathbb{B}^n), 1 \le p \le \infty$. Тада важе следеће неједнакости:*

$$|\nabla_z P_\alpha f(z)| \le F_{\alpha,p}(z)\|f\|_{L^p(\mathbb{B}^n)}, \quad f \in L^p(\mathbb{B}^n), z \in \mathbb{B}^n,$$

са

$$F_{\alpha,p}(z) = (n+\alpha+1)\left(\Gamma(\alpha+n+1)\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{q(n+\alpha+2)}{2}+k-1}{k}^2 \frac{\Gamma(k+1+\frac{q}{2})}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{q}{2}+1)}|z|^{2k}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.19}$$

где је $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

Тако добијамо и:

$$\begin{aligned}(1-|z|^2)^{1+\frac{n+\alpha+1}{p}}|\nabla_z P_\alpha f(z)| \le \\ (n+\alpha+1)\left(\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma((q-1)(n+\alpha+2)+1)}{\Gamma^2\left(\frac{(n+\alpha+2)q}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\mathbb{B}^n)}.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Последица ове теореме је и једнакост:

$$\|P_\alpha\|_\beta = C_{\alpha,n} = \frac{\Gamma(2+n+\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{n+\alpha}{2}+1\right)},$$

коју ћемо добити након што покажемо да је добијена процена одозго и најбоља могућа. Тиме добијамо резултат из [28].

Из неједнакости (4.19) и чињенице да је одговарајућа екстремална функција холоморфна имамо и најбољу процену градијента у тачки за $A^{2,\alpha}$ функције, : односно важи:

***Теорема* 24** (Мелентијевић [56]). *За $f \in A^{2,\alpha}$ важи:*

$$|\nabla f(z)| \le \frac{\sqrt{(n+\alpha+1)(1+(n+\alpha+1)|z|^2)}}{(1-|z|^2)^{1+\frac{n+\alpha+1}{2}}}\|f\|_{A^{2,\alpha}}. \tag{4.21}$$

Докажимо прво основну Теорему 23:

Фиксирајмо $z \in \mathbb{B}^n$ и са q означимо експонент дуалан p. Како је

$$|\nabla_z f(z)| = \sup_{|\xi|=1}|\langle\nabla f(z), \xi\rangle|,$$

имамо

$$|\nabla_z f(z)| = \sup_{|\xi|=1}\left|\int_\Omega f(w)\langle\nabla K_\alpha(z,w), \xi\rangle dv(w)\right|$$

$$\leq \sup_{|\xi|=1} \sqrt[q]{\int_\Omega |\langle \nabla_z K_\alpha(z,w), \xi\rangle|^q dv(w)} \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{B}^n)}.$$

Сада ћемо експлицитно израчунати вредност горњег супремума у функцији $z \in \mathbb{B}^n$, тј.

$$C(z) = \sup_{|\xi|=1} \sqrt[q]{\int_{\mathbb{B}^n} \left|\langle \nabla \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+1}}, \xi\rangle\right|^q dv_\alpha(w)}.$$

Из

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \frac{1}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+1}} = \frac{(n+\alpha+1)\overline{w_j}}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+\alpha+2}},$$

налазимо

$$C(z)^q = (n+\alpha+1)^q \sup_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle \overline{w}, \xi\rangle|^q}{|1-\langle z,w\rangle|^{q(n+\alpha+2)}} dv_\alpha(w)$$
$$= (n+\alpha+1)^q \sup_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle w, \xi\rangle|^q}{|1-\langle z,w\rangle|^{q(n+\alpha+2)}} dv_\alpha(w).$$

Наредна лема горњи проблем своди на дводимензиони:

***Лема* 15** ([56])**.**

$$\sup_{|\xi|=1} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle w,\xi\rangle|^q}{|1-\langle z,w\rangle|^{(n+1)q}} dv_\alpha(w) = \sup_{|z_1^2|+|z_2|^2=|z|^2} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|w_1|^q}{|1-w_1z_1-w_2z_2|^{(n+1)q}} dv_\alpha(w).$$

Доказ. Фиксирајмо $\xi \in S^n$ и посматрајмо унитарну матрицу A такву да је $\xi = A^*e_1$. Тада имамо:

$$\int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle w,\xi\rangle|^q}{|1-\langle z,w\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(w) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle w, A^*e_1\rangle|^q}{|1-\langle z,w\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(w)$$
$$= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle Aw, e_1\rangle|^q}{|1-\langle Az, Aw\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(w) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\mu_1|^q}{|1-\langle Az,\mu\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(\mu),$$

након смене промењљивих $\mu = Aw$.

Постојање унитарне матрице U за коју је $Ue_1 = e_1, UAz = z'$, где је $z' = z_1'e_1 + z_2'e_2$ даје:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\mu_1|^q}{|1-\langle Az,\mu\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(\mu) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle U\mu, Ue_1\rangle|^q}{|1-\langle UAz, U\mu\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(\mu)\\
&= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\eta_1|^q}{|1-\langle UAz,\eta\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(\eta) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\eta_1|^q}{|1-\langle z',\eta\rangle|^{q(n+1)}} dv_\alpha(\eta)\\
&= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\eta_1|^q}{|1-z_1'\overline{\eta_1}-z_2'\overline{\eta_2}|^{q(n+1)}} dv_\alpha(\eta),
\end{aligned}$$

где је $U\mu = \eta$. Приметимо $|z_1'|^2 + |z_2'|^2 = |z'|^2 = |UAz|^2 = |z|^2$. Лема сада следи коњуговањем η. □

Из последњег интеграла јасно је да можемо узети $\eta_1 = |z|\cos t$ и $\eta_2 = |z|\sin t$ за $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и записати исти применом Фубинијеве теореме као:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{B}^n} \frac{|w_1|^q}{|1-w_1|z|\cos t - w_2|z|\sin t|^{q(n+\alpha+2)}} dv_\alpha(w)\\
&= c_\alpha \int_{\mathbb{B}^2} \frac{|w_1|^q}{|1-w_1|z|\cos t - w_2|z|\sin t|^{q(n+\alpha+2)}} I(w_1,w_2) dv_2(w_1,w_2),
\end{aligned}$$

где је

$$I(w_1,w_2) = \int_{\sqrt{1-|w_1|^2-|w_2|^2}\mathbb{B}^{n-2}} (1-|w_1|^2-|w_2|^2-|w'|^2)^\alpha \quad dv_{n-2}(w').$$

$I(w_1,w_2)$ се једноставно израчунава као $\frac{\pi^{n-2}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-1)}(1-|w_1|^2-|w_2|^2)^{\alpha+n-2}$, (детаљи рачуна могу се пронаћи нпр. у раду [57]), те имамо:

$$C(z)^q = (n+\alpha+1)^q c_\alpha \frac{\pi^{n-2}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-1)}$$

$$\sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_{\mathbb{B}^2} \frac{|w_1|^q}{|1-w_1|z|\cos t - w_2|z|\sin t|^{q(n+\alpha+2)}} (1-|w_1|^2-|w_2|^2)^{\alpha+n-2} dv_2(w_1,w_2).$$

Увођење поларних координата $w_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$ и $w_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$, даје:

$$\widetilde{C}(t) := \int_{\mathbb{B}^2} \frac{|w_1|^q}{|1-w_1|z|\cos t - w_2|z|\sin t|^{q(n+\alpha+2)}} (1-|w_1|^2-|w_2|^2)^{\alpha+n-2} dv_2(w_1,w_2)$$

$$= \int_{\rho_1^2+\rho_2^2<1} \rho_1^{1+q}\rho_2(1-\rho_1^2-\rho_2^2)^{\alpha+n-2}\left(\iint_{[0,2\pi]^2} \frac{d\rho_1 d\rho_2}{|1-\rho_1|z|e^{i\varphi_1}\cos t - \rho_2|z|e^{i\varphi_2}\sin t|^{q(n+\alpha+2)}}\right) d\rho_1 d\rho_2.$$

Унутрашњи интеграл развијамо у облику суме реда користећи Парсевалову једнакост:

$$\iint\limits_{[0,2\pi]^2} \frac{d\rho_1 d\rho_2}{|1-\rho_1|z|e^{i\varphi_1}\cos t - \rho_2|z|e^{i\varphi_2}\sin t|^{q(n+\alpha+2)}}$$

$$= 4\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{q(n+\alpha+2)}{2}+k-1}{k}^2 |z|^{2k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \rho_1^{2j}\cos^{2j} t\rho_2^{2k-2j}\sin^{2k-2j} t.$$

Тада је:

$$\widetilde{C}(t) = 4\pi^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{q(n+\alpha+2)}{2}+k-1}{k}^2 |z|^{2k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \cos^{2j} t\sin^{2k-2j} t$$

$$\int\limits_{\rho_1^2+\rho_2^2<1} \rho_1^{2j+q+1}\rho_2^{2k-2j+1}(1-\rho_1^2-\rho_2^2)^{\alpha+n-2}d\rho_1 d\rho_2.$$

Овај интеграл израчунавамо применом Фубинијеве теореме:

$$\int\limits_0^1 t^{\frac{q}{2}+j}\Bigg(\int\limits_0^{1-t} s^{k-j}(1-t-s)^{\alpha+n-2}ds\Bigg)dt,$$

и увођењем смене $s=(1-t)u$:

$$\int\limits_0^{1-t} s^{k-j}(1-t-s)^{\alpha+n-2}ds = \int\limits_0^1 (1-t)^{k-j+n+\alpha-1}u^{k-j}(1-u)^{\alpha+n-2}du$$

$$= B(k-j+1,\alpha+n-1)(1-t)^{k-j+n+\alpha-1},$$

па је:

$$\int\limits_0^1 t^{\frac{q}{2}+j}\Bigg(\int\limits_0^{1-t} s^{k-j}(1-t-s)^{\alpha+n-2}ds\Bigg)dt = B(k-j+1,\alpha+n-1)\int\limits_0^1 t^{\frac{q}{2}+j}(1-t)^{k-j+\alpha+n-1}dt =$$

$$= B(k-j+1,\alpha+n-1)B(\frac{q}{2}+j+1,k-j+n+\alpha) = \frac{\Gamma(k-j+1)\Gamma(n+\alpha-1)\Gamma(j+\frac{q}{2}+1)}{\Gamma(k+\frac{q}{2}+n+\alpha+1)}.$$

Зато, према горњим развојима имамо:

$$\widetilde{C}(t) = \pi^2\Gamma(\alpha+n-1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\binom{\frac{q(n+\alpha+2)}{2}+k-1}{k}^2}{\Gamma(\alpha+n+\frac{q}{2}+k+1)}|z|^{2k}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\Gamma(j+\frac{q}{2}+1)(k-j)!\cos^{2j} t\sin^{2k-2j} t.$$

Из елементарне оцене

$$\binom{k}{j}\Gamma(k-j+1)\Gamma(j+\frac{q}{2}+1) = \frac{k!}{(k-j)!j!}(k-j)!\Gamma(j+\frac{q}{2}+1)$$

$$= \frac{k!\Gamma(j+\frac{q}{2}+1)}{\Gamma(j+1)} = \frac{k!\Gamma(\frac{q}{2})}{B(\frac{q}{2}, j+1)} \le \Gamma(k+\frac{q}{2}+1),$$

закључујемо:

$$\widetilde{C}(t) \le C(0) = \pi^2\Gamma(\alpha+n-1)\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(k+\frac{q}{2}+1)}{\Gamma(\alpha+n+k+\frac{q}{2}+1)}\binom{\frac{q(n+\alpha+2)}{2}+k-1}{k}^2|z|^{2k},$$

одакле лако следи први део наше теореме.

Пређимо сада на њен други део, тј. неједнакост (4.20).

Из Стирлингове формуле имамо

$$\binom{\alpha+k-1}{k} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)}k^{\alpha-1}, \quad \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k+b)} \sim k^{a-b}, \quad k \to +\infty,$$

па стога и

$$\binom{\frac{(n+\alpha+2)q}{2}+k-1}{k}^2 \frac{\Gamma(k+1+\frac{q}{2})}{\Gamma(k+n+\alpha+\frac{q}{2}+1)} \sim \frac{1}{\Gamma^2(\frac{q(n+\alpha+2)}{2})}k^{(q-1)(n+\alpha+2)}.$$

Како је

$$(1-|z|^2)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+\beta-1}{k}|z|^{2k},$$

према горњој формули закључујемо да неједнакост

$$\sum_{k=0}^{+\infty}c_k|z|^{2k} \le C\sum_{k=0}^{+\infty}d_k|z|^{2k}$$

са

$$c_k = \binom{\frac{(n+1)q}{2}+k-1}{k}^2\frac{\Gamma(k+1+\frac{q}{2})}{\Gamma(k+n+\frac{q}{2})}, \quad d_k = \binom{k+\beta-1}{k}$$

може важити за $|z| \to 1$ само ако је $\beta - 1 \ge (q-1)(n+\alpha+2)$.

У наредној леми показаћемо да је $\beta = (q-1)(n+\alpha+2)+1$ оптимални избор изложиоца β:

***Лема* 16** ([56])**.** *Низ*

$$e_k = \binom{\frac{(n+\alpha+2)q}{2}+k-1}{k}^2\frac{\Gamma(k+1+\frac{q}{2})}{\Gamma(k+n+\alpha+\frac{q}{2}+1)}\binom{k+(q-1)(n+\alpha+2)}{k}^{-1}$$

је монотоно растући и $\lim_{k\to\infty} e_k = \frac{\Gamma((q-1)(n+\alpha+2)+1)}{\Gamma^2(\frac{q(n+\alpha+2)}{2})}$.

Стога имамо неједнакост:

$$c_k \le \frac{\Gamma((q-1)(n+\alpha+2)+1)}{\Gamma^2(\frac{q(n+\alpha+2)}{2})}\binom{(q-1)(n+\alpha+2)+k}{k}$$

за $k \ge 0, \quad n \ge 1$.

Доказ. Коришћењем основних својстава Гама функције и биномних коефицијената добијамо: $\frac{e_{k+1}}{e_k} = \frac{(\frac{q(n+\alpha+2)}{2}+k)^2(k+1+\frac{q}{2})}{(k+1)(k+\beta)(k+n+\alpha+\frac{q}{2}+1)}1$ ако и само ако је

$$\geq k^2(\frac{q}{2}+1+q(n+\alpha+2))+k(\frac{q^2}{4}(n+\alpha+2)^2+(1+\frac{q}{2})(n+\alpha+2)q)+\frac{q^2}{4}(n+\alpha+2)^2(1+\frac{q}{2}) \geq$$

$$k^2(\beta+n+\alpha+2+\frac{q}{2})+k(\beta+(\beta+1)(n+\alpha+\frac{q}{2}+1))+\beta(n+\alpha+\frac{q}{2}+1).$$

Очигледно је $q(n+\alpha+2)=\beta+n+\alpha+\frac{q}{2}+1$. Докажимо такође да је

$$\frac{q^2}{4}(n+\alpha+2)^2+(1+\frac{q}{2})(n+\alpha+2)q \geq \beta+(\beta+1)(n+\alpha+\frac{q}{2}+1)$$

и

$$\frac{q^2}{4}(n+\alpha+2)^2(1+\frac{q}{2}) \geq \beta(n+\alpha+\frac{q}{2}+1).$$

Стављајући $\beta=1+(q-1)(n+1)$ и $t=n+\alpha+1$, имамо да је, након једноставног рачуна, прва неједнакост еквивалентна са

$$q^2(t+1)^2+4t^2 \geq (4t^2+2t+2)q,$$

што лако следи из $q^2(t+1)^2+4t^2 \geq 4t(t+1)q$ и $4t \geq 2t+2$, за $t \geq 1$. Друга неједнакост еквивалентна је

$$q^2(t+1)^2(1+\frac{q}{2})+2t(2t+q) \geq 2q(t+1)(2t+q).$$

$q^2(t+1)^2(1+\frac{q}{2})+2t(2t+q) \geq 2q(t+1)\sqrt{2t(2t+q)(1+\frac{q}{2})}$, према неједнакости аритметичке и геометријске средине, па како је $2t+qt \geq 2t+q$:

$$2q(t+1)\sqrt{2t(2t+q)(1+\frac{q}{2})} \geq 2q(t+1)(2t+q)$$

жељени закључак лако следи. Отуда је e_k растући и

$$e_k \leq \lim_{k\to\infty} e_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{(n+\alpha+2)q}{2})} k^{(q-1)(n+\alpha+2)}\Gamma((q-1)(n+\alpha+2)+1)k^{1-\beta}$$

$$= \frac{\Gamma((q-1)(n+\alpha+2)+1)}{\Gamma^2(\frac{(n+\alpha+2)q}{2})}.$$

$\square$

Последња лема заједно са првим делом теореме даје коначан доказ (4.20). Анализирајући коришћене неједнакости, узимајући $f(w) = g_z(w)|g_z(w)|^{p'}$, за $g_z(w) = \frac{w_1}{(1-w_1\bar{z}_1)^{n+\alpha+2}}$ и $p' = \frac{2-p}{p-1}$, видимо да је процена (4.19) и најбоља могућа.

Приметимо и да је у (4.19) једнакост достигнута за холоморфну функцију па након краћег рачуна добијамо и Теорему 21.

Остаје још и да се уверимо да је процена Бергманове пројекције на Блохов простор дата са

$$\|P_\alpha\|_\beta \leq \frac{\Gamma(2+n+\alpha)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}\|f\|_\infty$$

и оптимална.

Блохов простор, као што је већ речено, задајемо полунормом:

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \|f\|_\beta,$$

где је

$$\|f\|_\beta = \sup_{|z|<1}(1-|z|^2)|\nabla_z f(z)|.$$

Означимо:

$$\|P_\alpha\|_\beta = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1}\|P_\alpha g\|_\beta, \quad \|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1}\|P_\alpha g\|_{\mathrm{B}}.$$

За почетак, приметимо да важи:

***Лема* 17** ([28])**.** *За $\alpha > -1$, имамо $\|P_\alpha\|_{\mathcal{B}} \leq 1 + \|P_\alpha\|_\beta$.*

Доказ. Како је

$$|P_\alpha g(0)| = \left|\int_{\mathbb{B}^n} g(w)\, dv_\alpha(w)\right| \leq \|g\|_\infty,$$

следи да је

$$\|P_\alpha g\|_{\mathcal{B}} = |P_\alpha g(0)| + \|P_\alpha g\|_\beta \leq \|g\|_\infty + \|P_\alpha\|_\beta\|g\|_\infty. \qquad \square$$

***Лема* 18** ([28])**.** *За свако $\alpha > -1$ постоји низ g_k функција $\|g_k\|_\infty = 1$ и низ вектора $z_k \in \mathbb{B}^n$, $k \geq 1$ такви да је*

$$\lim_{k\to\infty}(1-|z_k|^2)|\nabla(P_\alpha g_k)(z_k)| = C_{\alpha,n}.$$

За доказ ове леме биће нам потребно наредно тврђење, које садржи резултате техничке природе.

***Тврђење* 5** ([28])**.** *За $z \in \mathbb{B}^n$, $c \in \mathbb{R}$, $t > -1$ дефинишимо*

$$J_{c,t}(z) = \frac{n!}{\pi^n}\int_{\mathbb{B}^n}\frac{(1-|w|^2)^t}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+t+c}}\, dv_\alpha(w).$$

(а) *Када је $c < 0$, $J_{c,t}$ је ограничено у $\mathbb{B}^n$. Штавише,*

$$J_{c,t}(z) = \frac{n!\,\Gamma(1+t)}{\Gamma^2(\lambda)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma^2(k+\lambda)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n+1+t+k)} |z|^{2k}, \tag{4.22}$$

где је $\lambda = \frac{n+1+t+c}{2}$.

(б) *$J_{c,t}$ се може, у затвореном облику, записати и као:*

$$J_{c,t}(z) = \frac{n!\,\Gamma(1+t)\,{}_2F_1(\lambda, \lambda; n+1+t; |z|^2)}{\Gamma(n+1+t)}. \tag{4.23}$$

Специјално,

$$J_{c,t}\Big(\frac{z}{|z|}\Big) = \frac{n!\,\Gamma(1+t)\,\Gamma(-c)}{\Gamma^2\big(\frac{1-c+n+t}{2}\big)}. \tag{4.24}$$

Доказ тврђења изостављамо, погледати [28].

За процену одоздо користићемо теорему Виталија, која се, са доказом, може наћи у [72].

Теорема (Витали)**.** *Нека је X простор са коначном мером μ, и $h_k : X \to \mathbb{C}$ низ равномерно интеграбилних функција, тј. функција таквих да за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$, независно од k, за које важи*

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |h_k|\, d\mu < \varepsilon.$$

Ако, при овим условима, имамо и $\lim_{k\to\infty} h_k(x) = h(x)$, μ-скоро свуда, тада

$$\lim_{k\to\infty} \int_X h_k\, d\mu = \int_X h\, d\mu.$$

Специјално, ово важи ако је, за неко $p > 1$,

$$\sup_k \int_E |h_k|^p\, d\mu < \infty.$$

Доказ Леме 18. Узмимо $\zeta = e_1$ и $z = z_k = \frac{k}{k+1}\zeta$. Дефинишимо

$$g_k(w) = \frac{w_1}{|w_1|} \frac{|1 - \langle z, w\rangle|^{n+2+\alpha}}{(1 - \langle z, w\rangle)^{n+2+\alpha}}, \quad w \in \mathbb{B}^n,\ w_1 \neq 0. \tag{4.25}$$

Тада је $g_k(w) \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ и $\|g_k\|_\infty = 1$. Из (4.25) и формуле за $\nabla P_\alpha g(z)$ имамо

$$\begin{aligned}
(1 - |z_k|^2)|\nabla(P_\alpha g)(z_k)| &\geq (1 - |z_k|^2)\big|\langle \nabla(P_\alpha g)(z_k), \zeta\rangle\big| \\
&= (1 - |z_k|^2)\left|\int_{\mathbb{B}^n} \big\langle \nabla_z K_\alpha(z, w) g_k(w), \zeta\big\rangle\, dv_\alpha(w)\right| \\
&= (1 + n + \alpha) \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1 - |z_k|^2)|w_1|}{|1 - \langle z_k, w\rangle|^{n+2+\alpha}}\, dv_\alpha(w) \\
&= (1 + n + \alpha) \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle \varphi_{z_k}(\xi), \zeta\rangle|}{|1 - \langle z_k, \xi\rangle|^{n+\alpha}}\, dv_\alpha(\xi) \coloneqq \sigma_k
\end{aligned}$$

За $p = \frac{n+\alpha+\frac{1}{2}}{n+\alpha} > 1$, према Тврђењу 5 (за $c = -\frac{1}{2}$, $t = \alpha$), имамо

$$\sigma_k = \sup_k \int_{\mathbb{B}^n} \left(\frac{|\langle \varphi_{z_k}(\xi), \zeta \rangle|}{|1 - \langle z_k, \xi \rangle|^{n+\alpha}} \right)^p dv_\alpha(\xi) < \infty$$

Отуда, по теореми Виталија имамо

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \sigma_k &= (1+n+\alpha) \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle \varphi_{z_k}(\xi), \zeta \rangle|}{|1 - \langle z_k, \xi \rangle|^{n+\alpha}} \, dv_\alpha(\xi) \\ &= (1+n+\alpha) \int_{\mathbb{B}^n} \lim_{k\to\infty} \frac{|\langle \varphi_{z_k}(\xi), \zeta \rangle|}{|1 - \langle z_k, \xi \rangle|^{n+\alpha}} \, dv_\alpha(\xi). \end{aligned}$$

За фиксирано $\xi \in \mathbb{B}^n$ је

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\langle \varphi_{z_k}(\xi), \zeta \rangle|}{|1 - \langle z_k, \xi \rangle|^{n+\alpha}} = \frac{|\langle \zeta, \zeta \rangle|}{|1 - \langle \zeta, \xi \rangle|^{n+\alpha}} = \frac{1}{|1 - \langle \zeta, \xi \rangle|^{n+\alpha}}.$$

Коначно:

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - |z_k|^2\right) |\nabla \left(P_\alpha g\right)(z_k)| = \frac{\pi^n}{n!} c_\alpha (1+n+\alpha) J_{-1,\alpha}(e_1) = \frac{\Gamma(2+n+\alpha)}{\Gamma^2\left(\frac{n+\alpha}{2}+1\right)} = C_{\alpha,n},$$

што завршава доказ Леме 18, а и Тврђења 5. □

4.4 Норма Кошијеве пројекције на $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ и процене градијента

Сада ћемо се укратко осврнути на неке занимљиве последице разматрања из претходног одељка. Оне ће се односити на Кошијеву пројекцију:

$$Cf(z) = \int_{S^n} \frac{f(\zeta)}{\left(1 - \langle z, \zeta \rangle\right)^n} \, d\sigma(\zeta),$$

која L^2 функцији на $S^n = \partial\mathbb{B}^n$ придружује холоморфну функцију из $H^2(\mathbb{B}^n)$.

За процене градијента које ће овде добити неопходна нам је следећа лема:

***Лема* 19** ([82]). *Нека је f нейрекидна на зайворењу $\mathbb{B}^n$. Тада имамо:*

$$\lim_{\alpha\to -1} \int_{\mathbb{B}^n} |f(z)|^p dv_\alpha(z) = \int_{S^n} |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta).$$

Ову лему нећемо доказивати. Она представља круцијални корак у преношењу процена за тежинску Бергманову пројекцију на процене за Кошијеву пројекцију. Тако добијамо следеће последице Теорема 23 и 24:

***Теорема* 25** ([56])**.** *Нека је $f \in L^p(S^n)$, $1 \le p \le \infty$. Тада имамо следећу оптималну процену:*

$$|\nabla Cf(z)| \le F(z)\|f\|_{L^p(S^n)}, \quad f \in L^p(S^n), z \in \mathbb{B}^n, \tag{4.26}$$

за $F(z) = n\Bigg((n-1)! \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{q(n+1)}{2}+k-1}{k}^2 \frac{\Gamma(k+1+\frac{q}{2})}{\Gamma(k+n+\frac{q}{2})}|z|^{2k}\Bigg)^{\frac{1}{q}}$, *where* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Такође, аналогно Теореми 23 добијамо и:

$$(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{p}}|\nabla Cf(z)| \le n\left(\frac{\Gamma(n)\Gamma(qn-n+q)}{\Gamma^2(\frac{(n+1)q}{2})}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(S^n)},$$

где су и експоненти у изразу $(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{p}}$ и константа на десној страни претходне неједнакости најбољи могући.

***Теорема* 26** ([56])**.** *За $f \in H^2(\mathbb{B}^n)$ важи:*

$$|\nabla f(z)| \le \frac{\sqrt{n(1+n|z|^2)}}{(1-|z|^2)^{1+\frac{n}{2}}}\|f\|_{H^2}. \tag{4.27}$$

Доказе ових теорема нећемо наводити, оне су једноставне последице Теорема 23 и 24 и Леме 19. Неједнакост 4.26 се може видети и као процена градијента решења $\overline{\partial}-$једначине у $\mathbb{B}^n$.

Лема 19 се такође користи и за преношење резултата из [30] и [58]. Отуда имамо следећу теорему:

***Теорема* 27.** *Нека је $N \in \mathbb{N}$. Тада имамо следеће једнакости:*

$$\|C\|_{\beta_N} = \frac{\Gamma(n+N)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{n+N}{2})}, \tag{4.28}$$

$$\|C\|_{\mathcal{B}_N} = \frac{\Gamma(n+N)\Gamma(N)}{\Gamma^2(\frac{n+N}{2})} + \frac{\Gamma(n+N-1)\Gamma(\frac{1+N}{2})}{\Gamma(\frac{1+N}{2}+n-1)}, \tag{4.29}$$

$$\|C\|_{\widetilde{\beta}} = \frac{\pi\Gamma(n+1)}{2\Gamma^2(\frac{n+1}{2})}, \tag{4.30}$$

$$\frac{\pi\Gamma(n+1)}{2\Gamma^2(\frac{n+1}{2})} \le \|C\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \le 1 + \frac{\pi\Gamma(n+1)}{2\Gamma^2(\frac{n+1}{2})}. \tag{4.31}$$

Дефиниције наведених полунорми и норми на Блоховом простору дате су једнакостима 1.25-1.28. Аналогони неједнакости (4.27) и (4.21) за Зигелов горњи полупростор могу се наћи у [59].

4.5 Норма Бергманове пројекције на Блоховом простору са нормом инваријантног градијента

Упоредо са уопштењем Пералиног резултата из [65] , Калај и Марковић([28]) разматрају и аналоган проблем—налажење тачне норме оператора P_α из $L^\infty(\mathbb{B}^n)$ у $\mathcal{B}$, ако је на $\mathcal{B}$ задата полунорма

$$\|f\|_{\widetilde{\beta}} := \sup_{|z|<1} |\widetilde{\nabla}_z f(z)|,$$

односно норма

$$\|f\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} := |f(0)| + \|f\|_{\widetilde{\beta}}.$$

Наравно, с обзиром да је, за $n = 1$, $|\widetilde{\nabla}_z f(z)| = (1-|z|^2)|\nabla_z f(z)|$, разлика настаје у случају $n \geq 2$. Овај проблем испоставља се као знатно тежи и његово решење дао је аутор тезе у [58].

Приметимо прво да, сасвим аналогно примедби из претходног одељка важи следећа лема:

***Лема* 20** ([28])**.** *За $\alpha > -1$, важи*

$$\|P_\alpha\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq 1 + \|P_\alpha\|_{\widetilde{\beta}}$$

Овде је значење одговарајуће норме и полунорме дато са:

$$\|P_\alpha\|_{\widetilde{\beta}} = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|P_\alpha g\|_{\widetilde{\beta}},$$

$$\|P_\alpha\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} = \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \|P_\alpha g\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Означимо

$$\widetilde{C}_{\alpha,n} := \|P_\alpha\|_{\widetilde{\beta}} = \sup\Big\{ |\widetilde{\nabla}_z (P_\alpha g)(z)| \,\Big|\, |z| < 1,\ \|g\|_\infty \leq 1 \Big\}.$$

Да бисмо нашли тачну вредност $\widetilde{C}_{\alpha,n}$, даћемо интегралну репрезентацију ове константе. У ту сврху уводимо функцију

$$l(t) = (1 + n + \alpha) \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|(1 - w_1)\cos t + w_2 \sin t|}{|w_1 - 1|^{n+1+\alpha}}\, dv_\alpha(w). \tag{4.32}$$

Прва веза тражене константе $\widetilde{C}_{\alpha,n}$ и функције $l(t)$ дата је следећим тврђењем:

***Лема* 21** (Калај, Марковић [28])**.** *За $\alpha > -1$, имамо*

$$\widetilde{C}_{\alpha,n} \leq \max_{0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}} l(t).$$

Доказ. Нека је $f = P_\alpha g$. Имамо

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi_a)(z) = (P_\alpha g \circ \varphi_a)(z) &= \int_{\mathbb{B}^n} K_\alpha(\varphi_a(z), w) g(w)\, dv_\alpha(w) \\ &= \int_{\mathbb{B}^n} K_\alpha(\varphi_a(z), \varphi_a(w)) g(\varphi_a(w))\, dv_\alpha(\varphi_a(w)).\end{aligned}$$

Како је

$$1 - \langle \varphi_a(z), \varphi_a(w) \rangle = \frac{(1 - \langle a, a \rangle)(1 - \langle z, w \rangle)}{(1 - \langle z, a \rangle)(1 - \langle a, w \rangle)},$$

то за $\theta = n + 1 + \alpha$ имамо

$$f \circ \varphi_a(z) = \frac{|1 - \langle z, a \rangle|^\theta}{(1 - |a|^2)^\theta} \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(1 - \langle a, w \rangle)^\theta}{(1 - \langle z, w \rangle)^\theta}\, g \circ \varphi_a(w)\, dv_\alpha(\varphi_a(w)).$$

Диференцирањем по z у нули, по правилу производа добијамо

$$\widetilde{\nabla}_z f(a) = \theta \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(\overline{w} - \overline{a})(1 - \langle a, w \rangle)^\theta}{(1 - |a|^2)^\theta}\, g \circ \varphi_a(w)\, dv_\alpha(\varphi_a(w)),$$

где је (као што смо раније добили):

$$dv_\alpha(\varphi_a(w)) = \left(\frac{(1 - |a|^2)^2}{|1 - \langle a, w \rangle|^2} \right)^{n+1+\alpha} dv_\alpha(w).$$

Стога имамо:

$$\widetilde{\nabla}_z f(a) = \theta \int_{\mathbb{B}^n} \frac{(\overline{w} - \overline{a})(1 - \langle a, w \rangle)^\theta}{(1 - |a|^2)^{\theta - n - 1 - \alpha}} \frac{g \circ \varphi_a(w)}{|1 - \langle w, a \rangle|^{2(n+1+\alpha)}}\, dv_\alpha(w),$$

а самим тим је

$$\begin{aligned}|\widetilde{\nabla}_z f(a)| &= \theta \sup_\zeta \left| \int_{\mathbb{B}^n} \left\langle \frac{(\overline{w} - \overline{a})(1 - \langle a, w \rangle)^\theta}{(1 - |a|^2)^{\theta - n - 1 - \alpha}} \frac{g \circ \varphi_a(w)}{|1 - \langle w, a \rangle|^{2(n+1+\alpha)}}, \zeta \right\rangle dv_\alpha(w) \right| \\ &\leq \theta' \sup_\zeta \int_{\mathbb{B}^n} \left| \left\langle \frac{(\overline{w} - \overline{a})}{|1 - \langle w, a \rangle|^{n+1+\alpha}}, \zeta \right\rangle \right| |g \circ \varphi_a(w)| (1 - |w|^2)^\alpha\, dv(w) \\ &\leq \theta' \|g\|_\infty \sup_\zeta \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \overline{w} - \overline{a}, \zeta \rangle| \frac{(1 - |w|^2)^\alpha}{|1 - \langle w, a \rangle|^{n+1+\alpha}}\, dv(w),\end{aligned}$$

где је $\theta' = \theta \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\pi^n \Gamma(\alpha+1)}$. Означимо

$$L(a) = \sup_\zeta \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \overline{w} - \overline{a}, \zeta \rangle| \frac{(1 - |w|^2)^\alpha}{|1 - \langle w, a \rangle|^{n+1+\alpha}}\, dv(w),$$

и дефинишимо:

$$L = \sup_{a \in \mathbb{B}^n} L(a).$$

Тада је

$$L = \sup_{a\in\mathbb{B}^n}\sup_{\zeta}\int_{\mathbb{B}^n} S_{\zeta,w}(a)\, dv_\alpha(w),$$

где је

$$S_{\zeta,w}(a) = \frac{|\langle w-a,\zeta\rangle|}{|1-\langle w,a\rangle|^{n+1+\alpha}}.$$

Приметимо да је $S_{\zeta,w}(a)$ субхармонијска функција по a. То значи да је $a\mapsto L(a)$ субхармонијска и да достиже максимум на граници јединичне лопте. Зато постоје $a_0,\zeta_0\in\partial\mathbb{B}^n$ такве да је

$$L = \int_{\mathbb{B}^n} |\langle w-a_0,\zeta_0\rangle| \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\langle w,a_0\rangle|^{n+1+\alpha}}\, dv(w). \tag{4.33}$$

Нека је U унитарна трансформација $\mathbb{C}^n$ на себе таква да је $Ua_0 = e_1$ и $U\zeta_0 = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_1$, за неко $t\in[0,2\pi]$ (Овде је $t = \arg\langle a_0,\zeta_0\rangle$). Уводимо смену $w = U\xi$. На овај начин долазимо до:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle U\xi - Ue_1,\zeta_0\rangle| \frac{(1-|U\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle U\xi,a_0\rangle|^{n+1+\alpha}}\, dv(U\xi)\\ &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle \xi - e_1,U\zeta_0\rangle| \frac{(1-|\xi|^2)^\alpha}{|1-\langle \xi,Ua_0\rangle|^{n+1+\alpha}}\, dv(\xi) \qquad (4.34)\\ &= \int_{\mathbb{B}^n} |\langle w - e_1,\cos t\, e_1 + \sin t\, e_2\rangle| \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\langle w,e_1\rangle|^{n+1+\alpha}}\, dv(w)\\ &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|(1-w_1)\cos t + w_2\sin t|}{|w_1-1|^{n+1+\alpha}}\, dv_\alpha(w). \end{aligned}$$ □

Следећи корак јесте процена норме одоздо, која је, видећемо ниже, и најбоља могућа.

***Лема* 22** (Калај, Марковић [28]). *Нека је l дефинисана као у (4.32). Тада је*

$$\widetilde{C}_{\alpha,n} \geq l(\tfrac{\pi}{2}). \tag{4.35}$$

Доказ. Узмимо $\zeta = e_2$, $a_k = \epsilon_k e_1$, где је $\epsilon_k = \frac{k}{k+1}$. Тада је

$$|\langle \widetilde{\nabla}_z f(a),\zeta\rangle| = \theta' \left| \int_{\mathbb{B}^n} \overline{w_2}(1-\epsilon_k w_1)^{n+1+\alpha} g\circ\varphi_a(w) \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\epsilon_k w_1|^{2(n+1+\alpha)}}\, dv(w)\right|.$$

Дефинишимо g_k такву да је

$$\overline{w_2}(1-\epsilon_k w_1)^{n+1+\alpha} g_k\circ\varphi_a(w) = |\overline{w_2}(1-\epsilon_k w_1)^{n+1+\alpha}|$$

и нека је $f_k = P_\alpha g_k$. Тада имамо

$$|\langle \widetilde{\nabla}_z f(a), \zeta\rangle| = \theta' \left| \int_{\mathbb{B}^n} |w_2| \frac{(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\epsilon_k w_1|^{(n+1+\alpha)}}\, dv(w) \right|.$$

Ово коначно даје

$$\tilde{C}_{\alpha,n} \geq \sup_{k,\zeta,a} |\langle \widetilde{\nabla}_z f(a), \zeta\rangle| \geq l(\tfrac{\pi}{2}). \qquad \square$$

Леме 21 и 22 представљају познате резултате Калаја и Марковића везане за одређивање тачне вредности константе $\widetilde{C}_{\alpha,n}$ из [28]. Формулишимо сад и докажимо и главни резултат овог одељка:

***Теорема* 28** (Мелентијевић [58])**.** *Нека је $\alpha > -1$ и $n \geq 2$. Важи*

$$\|P_\alpha\|_{\widetilde{\beta}} = \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}$$

и

$$\frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)} \leq \|P_\alpha\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}.$$

Штавише, имамо и следеће представљање l помоћу хипергеометријске функције:

$$l(t) = \frac{\pi\Gamma(n+\alpha+2)}{2\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)} \cdot {}_2F_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \cos^2 t)$$

и $l(t)$ је растућа по $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Доказ. Кренимо од

$$\begin{aligned} L(\xi_t) :=& c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle w - e_1, \xi_t\rangle|(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\langle w, e_1\rangle|^{n+\alpha+1}}\, dv_n(w) \\ =& c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|(1-w_1)\cos t + w_2 \sin t|}{|1-w_1|^{n+\alpha+1}} (1-|w|^2)^\alpha\, dv_n(w) \end{aligned}$$

где је $\xi_t = \cos t\, e_1 + \sin t\, e_2$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (Ово су последње две у низу једнакости (4.34).)

Фиксирајмо $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Уводећи смену координата са $A_t w = z$, где је A_t реална $n \times n$ ортогонална матрица

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

таква да је $A_t\xi_t = e_1$, добијамо

$$\begin{aligned}L(\xi_t) =&c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle A_t w - A_t e_1, e_1\rangle|(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\langle A_t w, A_t e_1\rangle|^{n+\alpha+1}}\, dv_n(w)\\ =&c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|\langle z - A_t e_1, e_1\rangle|(1-|z|^2)^\alpha}{|1-\langle z, A_t e_1\rangle|^{n+\alpha+1}}\, dv_n(z).\end{aligned}$$

Како је $A_t e_1 = \big(\cos t, -\sin t, 0, \dots, 0\big)$, то имамо:

$$\begin{aligned}L(\xi_t) =&c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|z_1 - \cos t|(1-|z|^2)^\alpha}{|1 - z_1\cos t + z_2 \sin t|^{n+\alpha+1}}\, dv_n(z)\\ =&c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|z_1 - \cos t|(1-|z|^2)^\alpha}{|1 - z_1\cos t - z_2 \sin t|^{n+\alpha+1}}\, dv_n(z).\end{aligned}$$

Сада ћемо искористити Фубинијеву теорему:

$$\begin{aligned}L(\xi_t) &= c_\alpha \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|z_1 - \cos t|(1-|z_1|^2-|z_2|^2-|z'|^2)^\alpha}{|1 - z_1\cos t - z_2 \sin t|^{n+\alpha+1}}\, dv_n(z)\\ &= c_\alpha \int\limits_{\mathbb{B}^2} \frac{|z_1 - \cos t| J(z_1,z_2)\, dv_2(z_1,z_2)}{|1 - z_1\cos t - z_2 \sin t|^{n+\alpha+1}}\end{aligned}$$

где $J(z_1,z_2) = \int\limits_{\sqrt{1-|z_1|^2-|z_2|^2}\mathbb{B}^{n-2}} (1-|z_1|^2-|z_2|^2-|z'|^2)^\alpha\, dv_{n-2}(z')$;
овде је $z = (z_1, z_2, z')$, $z' \in \mathbb{C}^{n-2}$.
Сменом $z' = \lambda w$, $\lambda = \sqrt{1-|z_1|^2-|z_2|^2}$ налазимо вредност израза $J(z_1,z_2)$:

$$\int_{\lambda\mathbb{B}^{n-2}} (\lambda^2 - |z'|^2)^\alpha\, dv_{n-2}(z') = \lambda^{2\alpha+2n-4} \int_{\mathbb{B}^{n-2}} (1-|w|^2)^\alpha\, dv_{n-2}(w).$$

Лако налазимо да је $\int_{\mathbb{B}^{n-2}} (1-|w|^2)^\alpha\, dv_{n-2}(w) = k_\alpha = \pi^{n-2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n-1)}$, па је

$$L(\xi_t) = c_\alpha k_\alpha I(\cos t, \sin t),$$

где је

$$I(\cos t, \sin t) = \int_{\mathbb{B}^2} \frac{|z_1 - \cos t|(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^{n+\alpha-2}}{|1 - z_1\cos t - z_2\sin t|^{n+\alpha+1}}\, dv_2(z_1,z_2). \tag{4.36}$$

Сада се проблем своди на разматрање монотоности $I(\cos t, \sin t)$ као функције променљиве t, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Овде смо користили dv_n као n-димензиону Лебегову меру. У ситуацијама попут ове, често се употребљава нормализована мера како би норма функције $f(z) = 1$ била једнака 1, али је овде овај избор знатно погоднији за примену Фубинијеве теореме.

Када смо се решили „сувишних” координата, трансформишимо даље израз:

$$I(\cos t, \sin t) = \int_{\mathbb{D}} |z_1 - \cos t|\, dv(z_1) \int_{\sqrt{1-|z_1|^2}\mathbb{D}} \frac{(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^{n+\alpha-2}}{|1-z_1\cos t - z_2 \sin t|^{n+\alpha+1}}\, dv(z_2),$$

те користећи смену $z_2 = \sqrt{1-|z_1|^2}\rho e^{i\theta}$, $0 \le \rho < 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$ добијамо

$$\begin{aligned}
&\int_{\sqrt{1-|z_1|^2}\mathbb{D}} \frac{(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^{n+\alpha-2}}{|1-z_1\cos t - z_2 \sin t|^{n+\alpha+1}}\, dv(z_2) \\
&\quad = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{(1-|z_1|^2)^{n+\alpha-2}(1-\rho^2)^{n+\alpha-2}\rho(1-|z_1|^2)}{|1-z_1\cos t - \sqrt{1-|z_1|^2}\rho \sin t e^{i\theta}|^{n+\alpha+1}}\, d\theta \\
&\quad = (1-|z_1|^2)^{n+\alpha-1} \int_0^1 \rho(1-\rho^2)^{n+\alpha-2}\Phi(z_1,\rho,t)\, d\rho,
\end{aligned}$$

где је $\Phi(z_1,\rho,t) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-z_1\cos t - \sqrt{1-|z_1|^2}\rho\sin t e^{i\theta}|^{n+\alpha+1}}$.

Парсевалова једнакост, заједно са Тејлоровим развојем функције $(1-z)^{-\frac{n+\alpha+1}{2}}$ даје:

$$\begin{aligned}
\Phi(z_1,\rho,t) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|1-z_1\cos t - \sqrt{1-|z_1|^2}\rho\sin t e^{i\theta}|^{n+\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{|1-z_1\cos t|^{n+\alpha+1}} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left|1 - \frac{\sqrt{1-|z_1|^2}\rho\sin t}{1-z_1\cos t} e^{i\theta}\right|^{n+\alpha+1}} \\
&= \frac{2\pi}{|1-z_1\cos t|^{n+\alpha+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2 \frac{(1-|z_1|^2)^k \rho^{2k}\sin^{2k} t}{|1-z_1\cos t|^{2k}}.
\end{aligned}$$

Покажимо да је

$$\left|\frac{\sqrt{1-|z_1|^2}\rho\sin t}{1-z_1\cos t}\right| \le \rho < 1,$$

чиме оправдавамо коришћење горњег развоја.

Коши-Шварцова неједнакост нам даје:

$$\sqrt{1-|z_1|^2}\sin t + |z_1|\cos t \le \sqrt{(\sqrt{1-|z_1|^2})^2 + |z_1|^2}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

па је, отуда:

$$\sqrt{1-|z_1|^2}\sin t \le 1-|z_1|\cos t.$$

Сада је, из примене неједнакости троугла:

$$1-|z_1|\cos t \le |1-z_1\cos t|.$$

Последње неједнакости повлаче:

$$\left|\frac{\sqrt{1-|z_1|^2}\sin t}{1-z_1\cos t}\right| \le 1,$$

те зато, за $0\le\rho<1$:

$$\left|\frac{\sqrt{1-|z_1|^2}\rho\sin t}{1-z_1\cos t}\right| \le \rho < 1.$$

Последњи развој у ред даје једнакост:

$$\int\limits_{\sqrt{1-|z_1|^2}\mathbb{D}} \frac{(1-|z_1|^2-|z_2|^2)^{n+\alpha-2}}{|1-z_1\cos t - z_2\sin t|^{n+\alpha+1}}\,dv(z_2)$$

$$= 2\pi\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\frac{(1-|z_1|^2)^{k+n+\alpha-1}\sin^{2k}t}{|1-z_1\cos t|^{2k+n+\alpha+1}}\times$$

$$\times\int_0^1 \rho^{2k+1}(1-\rho^2)^{n+\alpha-2}\,d\rho$$

$$= \pi\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\frac{(1-|z_1|^2)^{k+n+\alpha-1}\sin^{2k}t}{|1-z_1\cos t|^{2k+n+\alpha+1}}\,\mathrm{B}(k+1,n+\alpha-1),$$

па је:

$$I(\cos t,\sin t) = \pi\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{B}(k+1,n+\alpha-1)\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\sin^{2k}t\times$$

$$\times\int_{\mathbb{D}}\frac{|z_1-\cos t|(1-|z_1|^2)^{k+n+\alpha-1}}{|1-z_1\cos t|^{2k+n+\alpha+1}}\,dv(z_1).$$

Ове интеграле израчунавамо уводећи смене $z_1=\frac{\cos t-\zeta}{1-\zeta\overline{\cos t}}=\frac{\cos t-\zeta}{1-\zeta\cos t}$ (јер $\cos t\in\mathbb{R}$). Овде претпостављамо $t>0$. Тада имамо:

$$\zeta=\frac{\cos t - z_1}{1-z_1\cos t},\quad J_{\mathbb{R}}=\frac{(1-\cos^2 t)^2}{|1-\zeta\cos t|^4}.$$

Такође, користићемо и идентитете

$$1 - z_1 \cos t = 1 - \frac{\cos -\zeta}{1 - \zeta \cos t} \cos t = \frac{1 - \cos^2 t}{1 - \zeta \cos t}$$

и

$$1 - |z_1|^2 = \frac{(1 - \cos^2 t)(1 - |\zeta|^2)}{|1 - \zeta \cos t|^2}.$$

Користећи наведену смену, добијамо:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} \frac{|z_1 - \cos t|(1 - |z_1|^2)^{k+n+\alpha-1}}{|1 - z_1 \cos t|^{2k+n+\alpha+1}} \, dv(z_1) \\
&= \int_{\mathbb{D}} |\zeta| \frac{(1 - \cos^2 t)^{k+n+\alpha-1}(1 - |\zeta|^2)^{k+n+\alpha-1}}{|1 - \zeta \cos t|^{2k+2n+2\alpha-2}} \times \\
&\quad \times \frac{|1 - \zeta \cos t|^{2k+n+\alpha}}{(1 - \cos^2 t)^{2k+n+\alpha}} \frac{(1 - \cos^2 t)^2}{|1 - \zeta \cos t|^4} \, dv(\zeta) \\
&= (1 - \cos^2 t)^{1-k} \int_{\mathbb{D}} |\zeta| \frac{(1 - |\zeta|^2)^{k+n+\alpha-1}}{|1 - \zeta \cos t|^{n+\alpha+2}} \, dv(\zeta).
\end{aligned}$$

Преласком на поларне координате долазимо до:

$$\int_{\mathbb{D}} |\zeta| \frac{(1 - |\zeta|^2)^{k+n+\alpha-1}}{|1 - \zeta \cos t|^{n+\alpha+2}} \, dv(\zeta) = \int_0^1 r^2 (1 - r^2)^{k+n+\alpha-1} \, dr \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1 - r \cos t e^{i\varphi}|^{n+\alpha+2}},$$

што, уз још једну примену Парсевалове једнакости даје:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1 - r e^{i\varphi} \cos t|^{n+\alpha+2}} = 2\pi \sum_{m=0}^{+\infty} \binom{\frac{n+\alpha+2}{2} + m - 1}{m}^2 r^{2m} \cos^{2m} t,$$

па је:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |\zeta| \frac{(1 - |\zeta|^2)^{k+n+\alpha-1}}{|1 - \zeta \cos t|^{n+\alpha+2}} \, dv(\zeta) \\
&= 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{n+\alpha+2}{2} + m - 1}{m}^2 \cos^{2m} t \int_0^1 r^{2m+2} (1 - r^2)^{k+n+\alpha-1} \, dr \\
&= \pi \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{n+\alpha+2}{2} + m - 1}{m}^2 \cos^{2m} t \, \mathrm{B}(m + \tfrac{3}{2}, k + n + \alpha).
\end{aligned}$$

Ово даје:

$$\begin{aligned}
I(\cos t, \sin t) = \pi^2 &\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\frac{n+\alpha+1}{2} + k - 1}{k}^2 \mathrm{B}(k + 1, n + \alpha - 1) \sin^{2k} t \times \\
&\times \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\frac{n+\alpha+2}{2} + m - 1}{m}^2 \mathrm{B}(m + \frac{3}{2}, k + n + \alpha) \cos^{2m} t (1 - \cos^2 t)^{1-k}.
\end{aligned}$$

Како је $(1-\cos^2 t)^{1-k}\sin^{2k} t = 1-\cos^2 t$, закључујемо:

$$I(\cos t,\sin t) = \pi^2(1-\cos^2 t)\sum_{k,m=0}^{+\infty}\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\binom{\frac{n+\alpha+2}{2}+m-1}{m}^2\times$$
$$\times\,\mathrm{B}(k+1,n+\alpha-1)\,\mathrm{B}(m+\frac{3}{2},k+n+\alpha)\cos^{2m} t.$$

Посматрајмо, сада, функцију ϕ дефинисану са

$$\phi(x) = (1-x)\sum_{k,m=0}^{+\infty}\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\binom{\frac{n+\alpha+2}{2}+m-1}{m}^2\mathrm{B}(k+1,n+\alpha-1)\times$$
$$\times\,\mathrm{B}(m+\frac{3}{2},k+n+\alpha)x^m,$$

за $0\le x<1$ (због услова $0\le\cos t<1$).

Користећи $\mathrm{B}(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ добијамо:

$$\phi(x) = \Gamma(n+\alpha-1)(1-x)\sum_{k,m=0}^{+\infty}\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\binom{\frac{n+\alpha+2}{2}+m-1}{m}^2\times$$
$$\times\frac{k!\,\Gamma(m+\frac{3}{2})}{\Gamma(k+n+\alpha+m+\frac{3}{2})}x^m.$$

Сумирајмо, по k, чланове који зависе од k:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1}{k}^2\frac{k!}{\Gamma(k+n+\alpha+m+\frac{3}{2})}\\
&\quad=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n+\alpha+1}{2}+k-1\right)^2\cdot\dots\cdot\left(\frac{n+\alpha+1}{2}+1\right)^2\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)^2}{k!\,\Gamma(k+m+n+\alpha+\frac{3}{2})}\\
&\quad=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)_k\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)_k}{k!\,\left(n+k+\alpha+m+\frac{1}{2}\right)\cdot\dots\cdot\left(n+\alpha+m+\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+\alpha+m+\frac{3}{2})}\\
&\quad=\frac{1}{\Gamma(n+\alpha+m+\frac{3}{2})}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)_k\left(\frac{n+\alpha+1}{2}\right)_k}{\left(n+\alpha+m+\frac{3}{2}\right)_k}.
\end{aligned}$$

Препознајемо да је последња сума једнака ${}_2F_1(\frac{n+\alpha+1}{2},\frac{n+\alpha+1}{2};n+\alpha+m+\frac{3}{2};1)$, што је, према Гаусовој теореми, једнако

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+m+\frac{3}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma^2(m+1+\frac{n+\alpha}{2})}.$$

Отуда је и горња двострука сума једнака:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \binom{\frac{n+\alpha+2}{2}+m-1}{m}^2 \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma^2(m+1+\frac{n+\alpha}{2})} x^m.$$

Приметимо да је

$$\binom{\frac{n+\alpha+2}{2}+m-1}{m}^2 = \frac{1}{(m!)^2}\big(\tfrac{n+\alpha+2}{2}+m-1\big)^2 \cdot \dots \cdot \big(\tfrac{n+\alpha+2}{2}\big)^2 = \frac{1}{(m!)^2} \frac{\Gamma^2(\frac{n+\alpha+2}{2}+m)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha+2}{2})},$$

па је

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha-1)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}(1-x)\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})}{(m!)^2} x^m, \quad 0 \le x < 1.$$

Означимо

$$a_m = \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})}{(m!)^2}.$$

Лако се проверава да је a_m строго опадајући низ по $m \geq 0$:

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{\Gamma(m+\frac{3}{2})\Gamma(m+\frac{5}{2})(m!)^2}{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})\big((m+1)!\big)^2} = \frac{(m+\frac{1}{2})(m+\frac{3}{2})}{(m+1)^2} < 1.$$

Специјално, имамо и $a_m \le a_0$.

Отуда можемо закључити и:

$$(1-x)\sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m \le (1-x)a_0 \sum_{m=0}^{+\infty} x^m = a_0,$$

тј. $\phi(x) \le \phi(0)$.

Штавише, $\phi(x)$ је опадајућа, будући да се може записати у облику:

$$\phi(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}\big(a_0 + \sum_{m=1}^{+\infty}(a_m - a_{m-1})x^m\big).$$

Ово је суштина нашег доказа.

Дакле, оптимална константа је $\widetilde{C}_{\alpha,n} = (1+n+\alpha)c_\alpha k_\alpha \pi^2 \frac{\Gamma(\alpha+n-1)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})$, тј.

$$\widetilde{C}_{\alpha,n} = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)}.$$

Према [28] , за $\xi = (1,0,0\dots,0)$ имамо $l(0) = \frac{2}{\pi}\widetilde{C}_{\alpha,n}$. Ово се могло добити и из горњег реда стављајући да x тежи 1.

Коначно, горња израчунавања нам дају

$$l(t) = (1+n+\alpha)c_\alpha k_\alpha \pi^2 \frac{\Gamma(\alpha+n-1)}{\Gamma^2(\frac{\alpha+n}{2}+1)} \sin^2 t \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})}{(m!)^2} \cos^{2m} t$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)} \sin^2 t \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{3}{2})}{(m!)^2} \cos^{2m} t, \quad 0 < t \leq \frac{\pi}{2},$$

и $l(t)$ расте по $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. (Јер је $\phi(x)$ опадајућа и важи $l(t) = \phi(\cos^2 t)$.)

Користећи дефиницију Похамеровог симбола $(a)_k$, хипергеометријских функција и Ојлерову трансформацију из уводног поглавља имамо:

$$l(t) = \frac{\pi\Gamma(n+\alpha+2)}{2\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)} \cdot {}_2F_1(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; \cos^2 t).$$

Оцена норме сада природно следи из Леме 17:

$$\|P_\alpha\|_{\widetilde{\beta}} \leq \|P_\alpha\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} \leq 1 + \|P_\alpha\|_{\widetilde{\beta}}.$$

Овим је доказ основног резултата овог одељка, тј. Теореме 28 завршен. $\square$

Рецимо још и да се функција $l(t)$ може изразити и као $\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma^2(\frac{n+\alpha}{2}+1)} E(\cos t)$, где је E потпуни елиптички интеграл друге врсте.

Глава 5

Рисова пројекција

5.1 Рисова пројекција - основни појмови и увод

У овој глави дефинисаћемо Рисову пројекцију и доказати неке оптималне оцене норми овог оператора. Као занимљиве последице наводимо извесне изопериметријске неједнакости за хармонијске функције.

Рисова пројекција је оператор који комплексно -вредносној функцији

$$f(\zeta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\zeta^n \in L^p(\mathbb{T})$$

на јединичном кругу $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}| \quad |z| = 1\}$ додељује функцију

$$P_+f(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \hat{f}(n)\zeta^n \in H^p(\mathbb{T}), \tag{5.1}$$

за $1 < p < \infty$. Овде је $\hat{f}(n)$ ознака за $n-$ти Фуријеов коефицијент дефинисан са

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

Јасно је, из Парсевалове једнакости да оператор P_+ јесте ортогонална пројекција $L^2(\mathbb{T})$ на $H^2(\mathbb{T})$ и $\|P_+\|_{L^2(\mathbb{T})} = 1$.

Ограниченост оператора P_+ на $L^p(\mathbb{T})$ за $1 < p < +\infty$ је класична теорема Марсела Риса ([68]). Ова теорема има доста различитих доказа. У [75] или [63] може се наћи елементаран доказ Стејна, заснован на примени Харди-Стејнове једнакости. Ми ћемо овде скицирати доказ јачег резултата, тј. одређивање тачне норме оператора на $L^p(\mathbb{T})$.

Проблем одређивања вредности $\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})}$ био је дуго отворен. Вредности $\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})}$ за $p = 2^k, k \in \mathbb{N}$, одредили су Гохберг и Крупњик у [22]. У истом раду дали и претпоставку

$$\|P_+\|_{L^p(\mathbb{T})} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{p}} \quad \text{за} \quad 1 < p < +\infty.$$

Ова претпоставка коначно је доказана 2000. године од стране Холенбека и Вербицког, коришћењем метода плурисубхармонијских миноранти. Овај метод ћемо и ми користити за резултате који су тема овог поглавља. Рецимо и да оператор није ограничен на $L^1(\mathbb{T})$ и да штавише и не постоји ограничена пројекција $L^1(\mathbb{T})$ на $H^1(\mathbb{T})$. Ово је први показао Њуман у [61] , а потом уопштио Рудин ([73]). Још неки класични резултати везани за Рисову пројекцију могу се наћи у [4],[5],[63],[27].

Као и обично, $H^p(\mathbb{T})$ који овде спомињемо као потпростор од $L^p(\mathbb{T})$ са негативним Фуријеовим коефицијентима једнаким нули, идентификујемо са простором аналитичких функција f у $\mathbb{D}$ за које је

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{T})} = \sup_{0<r<1}\left(\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Тада је $f^*(\zeta) = \lim_{r\to 1-} f(r\zeta) \in L^p(\mathbb{T})$ и $\|f^*\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^p(\mathbb{T})}$.

Рисова пројекција P_+ може се записати и у облику Кошијевог интеграла

$$P_+f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{D}$$

са густином $f \in L^p(\mathbb{T})$.

Дефинишимо такође и ко-аналитичку пројекцију $P_- = I - P_+$ тј.

$$P_-f(\zeta) = \sum_{n<0} \hat{f}(n)\zeta^n. \tag{5.2}$$

Такође, Рисова пројекција је у врло блиској вези са Хилбертовим оператором H који функцији u из хармонијског Хардијевог простора $h^p(\mathbb{D})$ додељује њен хармонијски конјугат $\tilde{u}$ тј. функцију такву да је $u + i\tilde{u}$ холоморфна. Класичан резултат Пихоридеса ([67]) даје $\|H\| = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{2\tilde{p}}$, где је $\tilde{p} = \min\{p, \frac{p}{p-1}\}$. Није тешко видети да се овај резултат може добити и као последица резултата Холенбека и Вербицког.

Главна тема наших разматрања биће L^p процене норме нелинеарног оператора

$$\left(|P_+f|^s + |P_-f|^s\right)^{\frac{1}{s}} \tag{5.3}$$

и изопериметријске неједнакости за хармонијске функције.

Вратимо се на резултат Холенбека и Вербицког, будући да је метод коришћен у доказу значајан за наша истраживања. Главна идеја је у проналажењу плурисубхармонијске миноранте $F(w,z)$ на $\mathbb{C}^2$ са $F(0,0) = 0$ функције

$$\Phi(w,z) = \frac{1}{\sin^p \frac{\pi}{p}}|w + \overline{z}|^p - \max\{|z|^p, |w|^p\}.$$

Испоставља се да $F(w,z)$ можемо потражити у облику

$$F(w,z) = c_p Re((wz)^{\frac{p}{2}})$$

тј. да важи неједнакост

$$\max\{|z|^p, |w|^p\} \leq \frac{1}{\sin^p \frac{\pi}{p}}|z + \overline{w}|^p - c_p Re((wz)^{\frac{p}{2}}) \tag{5.4}$$

за одговарајућу позитивну константу c_p при $1 < p < 2$. Овде је то, због дуалности и довољно. Ми ћемо за аналогне неједнакости разматрати и случај спрегнутих изложилаца.

Неједнакост (5.4) је инваријантна у односу на трансформације

$$(w, z) \to (\overline{\zeta} w, \zeta z), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta \neq 0.$$

Узимањем $\zeta = \frac{w}{|w|^2}$, при $|w| \geq |z|$ видимо да је (5.4) еквивалентна са

$$1 \leq \frac{1}{\sin^p \frac{\pi}{p}} |1 + \zeta z|^p - c_p Re((\zeta z)^{\frac{p}{2}})$$

односно, стављањем $\zeta z = re^{it}$, биће еквивалентно са

$$1 \leq \frac{1}{\sin^p \frac{\pi}{p}} \big(1 + r^2 + 2r \cos t\big)^{\frac{p}{2}} - c_p r^{\frac{p}{2}} \cos\big(\frac{tp}{2}\big). \tag{5.5}$$

Детаљи доказа ове неједнакости могу се наћи у [25]. Претходни редови дају мотивацију за аналогна разматрања оператора.

Интеграљењем неједнакости (5.4) са $z = P_+ f(\zeta), w = P_- f(\zeta)$ добијамо

$$\int_{\mathbb{T}} \max\{|P_+ f(\zeta)|^p, |P_- f(\zeta)|^p\} |d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{\sin^p \frac{\pi}{p}} \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta| - c_p \int_{\mathbb{T}} Re\Big(\big(P_+ f(\zeta) P_- f(\zeta)\big)^{\frac{p}{2}}\Big) |d\zeta|.$$

Но, како је $Re((wz)^{\frac{p}{2}})$ плурисубхармонијска и f аналитичка функција, то је

$$\int_{\mathbb{T}} Re\Big(\big(P_+ f(\zeta) P_- f(\zeta)\big)^{\frac{p}{2}}\Big) |d\zeta| \geq 0,$$

па имамо:

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \max\{|P_+ f(\zeta)|^p, |P_- f(\zeta)|^p\} |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{p}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p}},$$

што је и нешто боља процена од жељене.

У [26] Холенбек и Вербицки дискутују о неједнакости

$$\|\big(|P_+ f|^s + |P_- f|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C(p, s) \|f\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

са оптималном константом $C(p, s)$.

Овај проблем можемо посматрати и као модел-проблем за извесне вектор-вредносне неједнакости, где метод плурисубхармонијских миноранти изгледа обећавајуће. Ми ћемо у наредним редовима доказати да је хипотеза Холенбека и Вербицког из [26] тачна за $0 < s \leq 2$, тј.:

$$C(p, s) = \frac{2^{\frac{1}{s}}}{2 \cos \frac{\pi}{2p}} \quad \text{за} \quad 1 < p \leq 2$$

и

$$C(p,s)=\frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\cos\frac{\pi}{2p}} \quad \text{за} \quad 2<p<+\infty.$$

Упоредо са наведеним неједнакостима, размотрићемо и неједнакости облика

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}\le C'(p,s)\|\left(|P_+f|^s+|P_-f|^s\right)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

са најбољом могућом константом $C'(p,s)$. Овде ћемо најбољи резултат постићи за $s\ge 2$. Докази ових неједнакости представљају део заједничког рада Маријана Марковића и аутора тезе ([45]).

5.2 Докази основних процена

Овде ћемо показати да претпостављена неједнакост

$$\|\left(|P_+f|^s+|P_-f|^s\right)^{\frac{1}{s}}_{L^p(\mathbb{T})}\le\frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\cos\frac{\pi}{2p}}\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \tag{5.6}$$

за $1<p\le 2$ важи за свако $0<s\le 2$.

Неједнакост (5.6) доказаћемо на два начина. Први који ћемо изложити је једноставан доказ који се ослања на Калајев резултат из [33], док у другом дајемо независан доказ, који има извесне техничке олакшице у односу на доказ из [33].

Приметимо да се Теорема 2.1 из [33] природно интерпретира као (5.6) у случају $s=2$, тј. важи

$$\int_{\mathbb{T}}\left(|P_+f(\zeta)|^2+|P_-f(\zeta)|^2\right)^{\frac{p}{2}}|d\zeta|\le\frac{2^{\frac{p}{2}}}{2^p\cos^p\frac{\pi}{2p}}\int_{\mathbb{T}}|f(\zeta)|^p|d\zeta|. \tag{5.7}$$

Из неједнакости између средине реда s и средине реда 2, за $0<s<2$ имамо:

$$\left(\frac{|P_+f(\zeta)|^s+|P_-f(\zeta)|^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}}\le\left(\frac{|P_+f(\zeta)|^2+|P_-f(\zeta)|^2}{2}\right)^{\frac{p}{2}},$$

тј.

$$\left(|P_+f(\zeta)|^s+|P_-f(\zeta)|^s\right)^{\frac{p}{s}}\le 2^{\frac{p}{s}-\frac{p}{2}}\left(|P_+f(\zeta)|^2+|P_-f(\zeta)|^2\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Интеграљењем последње неједнакости добијамо:

$$\int_{\mathbb{T}}\left(|P_+f(\zeta)|^s+|P_-f(\zeta)|^s\right)^{\frac{p}{s}}\le 2^{\frac{p}{s}-\frac{p}{2}}\int_{\mathbb{T}}\left(|P_+f(\zeta)|^2+|P_-f(\zeta)|^2\right)^{\frac{p}{2}},$$

што заједно са (5.7) даје

$$\left(\int_{\mathbb{T}}\left(|P_+f(\zeta)|^s+|P_-f(\zeta)|^s\right)^{\frac{p}{s}}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\cos\frac{\pi}{2p}}\left(\int_{\mathbb{T}}|f(\zeta)|^p|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}.$$

У наведеном доказу, с обзиром на наше позивање на Калајеву неједнакост, крије се примена поменутог метода плурисубхармонијске миноранте. Примена овог метода односи се на свођење доказа неједнакости (5.6) на доказивање једне елементарне неједнакости за комплексне бројеве. Ипак, доказ те неједнакости у наведеном раду Давида Калаја у случају $s = 2$ на извесним местима користи тешку технику, па ћемо ми овде дати и један доказ који користи погодне рачунске трикове за свођење оцене на једноставније.

Први корак ка томе је следећа:

***Лема* 23** (Калај [33], Марковић и Мелентијевић [45])**.** *За* $0 < s \le 2, \quad 1 < p \le 2$, $r \in [0,1]$ *и* $t \in [-\pi, \pi]$ *важи следећа неједнакост:*

$$-\left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{\left(1+r^2+2r\cos t\right)^{\frac{p}{2}}}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} - r^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \cos \frac{tp}{2} \ge 0.$$

Доказ. Означимо леву страну горње неједнакости са $\Phi(r,t)$. За фиксирано $0 < s \le 2$, нађимо евентуалне стационарне тачке ове функције у унутрашњости скупа $(r,t) \in [0,1][0,\pi]$(ово је довољно, јер је Φ парна по t) као нуле парцијалних извода по r и t :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r,t) = -\frac{p}{2} r^{s-1} \left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}-1} + \frac{p(r+\cos t)}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} \left(1+r^2+2r\cos t\right)^{\frac{p}{2}-1}$$

$$-\frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \cos \frac{tp}{2} = 0$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r,t) = \frac{-pr\sin t}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} \left(1+r^2+2r\cos t\right)^{\frac{p}{2}-1} + \frac{p}{2} r^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \sin \frac{tp}{2} = 0.$$

Добијамо, дакле:

$$-r^{s-1} \left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}-1} + \frac{2p(r+\cos t)}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} \left(1+r^2+2r\cos t\right)^{\frac{p}{2}-1} - r^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \cos \frac{tp}{2} = 0$$

и

$$\frac{\left(1+r^2+2r\cos t\right)^{\frac{p}{2}-1}}{2^p r^{\frac{p}{2}} \cos^p \frac{\pi}{2p} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}} = \frac{\sin \frac{tp}{2}}{2r\sin t}.$$

Комбиновањем претходна два израза добијамо:

$$-r^s \left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}-1} + \frac{(r+\cos t) r^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \sin \frac{tp}{2}}{\sin t} - r^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \cos \frac{tp}{2}$$

$$= -r^s \left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}-1} + \frac{r^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}}{\sin t} \left(\sin \frac{tp}{2}(r+\cos t) - \sin t \cos \frac{tp}{2}\right)$$

$$= -r^s\left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}-1} + \frac{r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}}{\sin t}\left(r\sin\frac{tp}{2} - \sin(t-\frac{tp}{2})\right) = 0.$$

Сада је за потенцијалне стационарне тачке, функција једнака:

$$\Phi(r,t) = -\frac{1+r^s}{2r^s} + \frac{r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}}{\sin t}\left(r\sin\frac{tp}{2} - \sin(t-\frac{tp}{2})\right) + r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}\frac{\sin\frac{tp}{2}(1+r^2+2r\cos t)}{2r\sin t}$$

$$+r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}\cos tp2$$

$$= \frac{r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}}{2r\sin t}\left(-\frac{1+r^s}{r^{s-1}}\big(r\sin\frac{tp}{2} - \sin(t-\frac{tp}{2})\big) + (1+r^2+2r\cos t)\sin\frac{tp}{2} - 2r\cos\frac{tp}{2}\sin t\right)$$

$$= \frac{r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p}}{2r\sin t}\left(-\frac{1+r^s}{r^{s-1}}\big(r\sin\frac{tp}{2} - \sin(t-\frac{tp}{2})\big) + (1+r^2)\sin\frac{tp}{2} - 2r\sin(t-\frac{tp}{2})\right),$$

па је, за овакве тачке, $\Phi(r,t) \geq 0$ ако и само ако је

$$\sin(t-\frac{tp}{2})\left(\frac{1+r^s}{r^{s-1}} - 2r\right) + \sin\frac{tp}{2}\left(1+r^2-\frac{1+r^s}{r^{s-2}}\right) \geq 0.$$

Последња неједнакост је, након множења са r^s еквивалентна са:

$$\sin(t-\frac{tp}{2})\big(r - r^{s+1}\big) + \sin\frac{tp}{2}\big(r^s - r^2\big) \geq 0.$$

Но, ова неједнакост је тачна, будући да је $r - r^{s+1} \geq 0, \sin(t-\frac{tp}{2}) \geq 0, \sin\frac{tp}{2} \geq 0$ и $r^s - r^2 \geq 0$ за задате вредности p, r, s и t.

Остаје да проверимо тачке са руба посматраног скупа. Посматрајући исту функцију $\Phi(r,t)$ за $t \in (-\pi-\epsilon, \pi+\epsilon)$ за неко $\epsilon > 0$, видимо да $t=\pi$ задовољава услов $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$, само за $r = 0$ (што ћемо касније размотрити) или за $p = 2$, кад добијамо $\Phi(r,\pi) = -(\frac{1+r^s}{2})^{\frac{2}{s}} + 2 - r \geq 0$.

За $t = 0$, неједнакост коју доказујемо постаје:

$$-\left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{(1+r)^p}{2^p\cos^p\frac{\pi}{2p}} - r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} \geq 0.$$

Због

$$-\left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{(1+r)^p}{2^p\cos^p\frac{\pi}{2p}} - r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} \geq$$

$$-\left(\frac{1+r^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{(1+r)^p}{2^p\cos^p\frac{\pi}{2p}} - r^{\frac{p}{2}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} = \tilde{F}(r),$$

довољно је показати $\tilde{F}(r) \geq 0$, што је еквивалентно са

$$F(r) = \frac{\tilde{F}(r)}{(1+r)^p} = -\left(\frac{1+r^2}{2(1+r)^2}\right)^{\frac{p}{2}} + \frac{1}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} - r^{\frac{p}{2}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \geq 0.$$

Докажимо да је функција F опадајућа, па ћемо имати: $F(r) \geq F(1)$, па из $F(1) \geq 0$(ово разматрамо као случај $r = 1$) следи и жељени закључак. Заиста,

$$F'(r) = \frac{p(r-1)}{2(1+r)^3}\left(-\left(\frac{1+r^2}{2(1+r)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1} + \left(\frac{r}{2(1+r)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p}\right) \leq 0,$$

јер је

$$-\left(\frac{1+r^2}{2(1+r)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1} + \left(\frac{r}{2(1+r)^2}\right)^{\frac{p}{2}-1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \geq 0$$

еквивалентно са

$$\left(\frac{1+r^2}{2r}\right)^{\frac{p}{2}-1} \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p},$$

што јесте тачно, јер је за посматране вредности r и p испуњено $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \geq 1$ и $\frac{1+r^2}{2r} \geq 1$, док је $\frac{p}{2} - 1 \leq 0$.

За $r = 0$ имамо:

$$-2^{-\frac{p}{s}} + \frac{1}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} \geq 0,$$

што следи из $\frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2p}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2^{-\frac{1}{s}}$ за $0 < s \leq 2$.

За $r = 1$ добијамо неједнакост:

$$-1 + \left(\frac{\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{\pi}{2p}}\right)^p - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2p} \cos \frac{tp}{2} \geq 0.$$

Доказ ове неједнакости може се наћи нпр. у [33], мада се иста неједнакост помиње и раније у раду Вербицког [79].

□

Наведимо сада и теорему, која лако следи из ове леме, а даје подлогу за коначан доказ неједнакости (5.6).

***Теорема* 29** (Марковић,Мелентијевић [45])**.** *За произвољне комплексне бројеве z и w и $1 < p \leq 2, 0 < s \leq 2$ важи:*

$$-\left(\frac{|z|^s + |w|^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{|z+\overline{w}|^p}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} Re\big((zw)^{\frac{p}{2}}\big) \geq 0. \qquad (5.8)$$

Доказ. Приметимо да је неједнакост (5.8) хомогена, па дељењем исте са $\max\{|z|^p, |w|^p\}$, а затим, представљајући $\frac{\overline{wz}}{|z|^2}$ у поларном облику добијамо неједнакост из претходне леме. □

Коначно, применимо Теорему 29 за комплексне бројеве $z = P_+f(\zeta)$ и $w = P_-f(\zeta)$. Имамо:

$$-\left(\frac{|P_+f(\zeta)|^s + |P_-f(\zeta)|^s}{2}\right)^{\frac{p}{s}} + \frac{|P_+f(\zeta) + \overline{P_-f(\zeta)}|^p}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} Re\big((P_+f(\zeta)P_-f(\zeta))^{\frac{p}{2}}\big) \geq 0,$$

односно:

$$\Big(|P_+f(\zeta)|^s + |P_-f(\zeta)|^s\Big)^{\frac{p}{s}} \leq \frac{2^{\frac{p}{s}}}{2^p \cos^p \frac{\pi}{2p}} |f(\zeta)|^p - 2^{\frac{p}{s}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{2p} Re\big((P_+f(\zeta)P_-f(\zeta))^{\frac{p}{2}}\big).$$

Интеграљењем ове неједнакости и користећи $\int_{\mathbb{T}} Re\big((P_+f(\zeta)P_-f(\zeta))^{\frac{p}{2}}\big) \geq 0$, добијамо следећу теорему:

***Теорема* 30** (Марковић, Мелентијевић [45])**.** *Нека је $1 < p \leq 2$, $0 < s \leq 2$ и $f \in L^p(\mathbb{T})$. Тада важи:*

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \big(|P_+f(\zeta)|^s + |P_-f(\zeta)|^s\big)^{\frac{p}{s}} |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\sin\frac{\pi}{2p}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (5.9)$$

Сада ћемо укратко формулисати и доказати и аналогну неједнакост за $p > 2$.

***Теорема* 31** (Марковић, Мелентијевић [45])**.** *Нека је $2 < p < +\infty$, $0 < s \leq 2$ и $f \in L^p(\mathbb{T})$. Тада важи:*

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \big(|P_+f(\zeta)|^s + |P_-f(\zeta)|^s\big)^{\frac{p}{s}} |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\sin\frac{\pi}{2p}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (5.10)$$

Доказ. Као и у случају $1 < p \leq 2$, применићемо Теорему 2.1 из [33], из које следи специјалан случај ове теореме за $s = 2$:

$$\left(\int_{\mathbb{T}} \left(|P_+f(\zeta)|^2 + |P_-f(\zeta)|^2\right)^{\frac{p}{2}} |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2\sin\frac{\pi}{2p}} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}$$

па из неједнакости између средина реда s и реда 2:

$$\int_{\mathbb{T}} \left(|P_+f(\zeta)|^s + |P_-f(\zeta)|^s\right)^{\frac{p}{s}} |d\zeta| \leq 2^{\frac{p}{s}-\frac{p}{2}} \int_{\mathbb{T}} \left(|P_+f(\zeta)|^2 + |P_-f(\zeta)|^2\right)^{\frac{p}{2}} |d\zeta|$$

добијамо жељени закључак.

□

Ипак, остаје да се уверимо да процене дате претходним теоремама заиста јесу оптималне.То је тема наредне подсекције.

5.3 Оптималност процена

Овде ћемо размотрити једну фамилију функција, која зависи од три параметра и чијим погодним избором ћемо установити да су константе у неједнакостима (5.9) и (5.10) најбоље могуће. Нека је $f_\gamma(z) = \alpha Re g_\gamma(z) + i\beta Im g_\gamma(z)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и

$$g_\gamma(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}}.$$

Приметимо да је

$$|Im g_\gamma(z)| = (\operatorname{tg}\gamma) Re g_\gamma(z) \tag{5.11}$$

на $\mathbb{T}$. Заиста,

$$g_\gamma(e) = \left(\frac{1+e^{it}}{1-e^{it}}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} = \left(\frac{e^{\frac{it}{2}} + e^{\frac{-it}{2}}}{e^{\frac{-it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}}$$

$$= \left(\frac{2\cos\frac{t}{2}}{-2i\sin\frac{t}{2}}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} = \left(e^{i\pi}\cot\frac{t}{2}\right)^{\frac{2\gamma}{\pi}} = e^{i\gamma}\cot^{\frac{2\gamma}{\pi}}\frac{t}{2}.$$

Отуда је:

$$\|f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\int_{\mathbb{T}} \left|\alpha Re g_\gamma(\zeta) + i\beta Im g_\gamma(\zeta)\right|^p |d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\alpha^2\cos^2\gamma + \beta^2\sin^2\gamma\right)^{\frac{1}{2}} \|g_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})},$$

с обзиром на

$$|f_\gamma(\zeta)| = \left(\alpha^2|Re g_\gamma(\zeta)|^2 + \beta^2|Im g_\gamma(\zeta)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |g_\gamma(\zeta)|\left(\alpha^2\cos^2\gamma + \beta^2\sin^2\gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Користећи дефиницију фамилије f_γ имамо:

$$f_\gamma = \alpha\frac{g_\gamma + \overline{g}_\gamma}{2} + i\beta\frac{g_\gamma - \overline{g}_\gamma}{2i} = \frac{\alpha+\beta}{2}g_\gamma + \frac{\alpha-\beta}{2}\overline{g}_\gamma,$$

што даје

$$P_+f_\gamma(\zeta) = \frac{\alpha+\beta}{2}g_\gamma \qquad P_-f_\gamma(\zeta) = \frac{\alpha-\beta}{2}g_\gamma,$$

па је:

$$\Big(\big|P_+f_\gamma(\zeta)\big|^s + \big|P_-f_\gamma(\zeta)\big|^s\Big)^{\frac{1}{s}} = \left(\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^s |g_\gamma(\zeta)|^s + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^s |g_\gamma|^s\right)^{\frac{1}{s}}$$

$$= |g_\gamma|\left(\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^s + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Тако добијамо:

$$\|\big(|P_+f_\gamma\big|^s + |P_-f_\gamma\big|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})} = \left(\left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^s + \left|\frac{\alpha-\beta}{2}\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}\|g_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Коначно:

$$\frac{\|\big(|P_+f_\gamma\big|^s + |P_-f_\gamma\big|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f_\gamma\|_{L^p(\mathbb{T})}} = \frac{\big(|\alpha+\beta|^s + |\alpha-\beta|^s\big)^{\frac{1}{s}}}{2\big(\alpha^2\cos^2\gamma + \beta^2\sin^2\gamma\big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Узимајући $\gamma \to \frac{\pi}{2p}$ имамо:

$$\sup\frac{\|\big(|P_+f\big|^s + |P_-f\big|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}} \geq \frac{\big(|\alpha+\beta|^s + |\alpha-\beta|^s\big)^{\frac{1}{s}}}{2\big(\alpha^2\cos^2\frac{\pi}{2p} + \beta^2\sin^2\frac{\pi}{2p}\big)^{\frac{1}{2}}}$$

Ако ставимо $\alpha = 1$, $\beta = 0$ добијамо

$$\|\big(|P_+|^s + |P_-|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \geq \frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\cos\frac{\pi}{2p}}.$$

Ова процена важи за $1 < p \leq 2, 0 < s < +\infty$ и за $s < 2$ показује да је константа у Теореми 30 најмања за коју ова неједнакост важи.

Слично, разматрајући $2 < p < +\infty, 0 < s < +\infty$ постижемо оцену:

$$\|\big(|P_+|^s + |P_-|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})} \geq \frac{2^{\frac{1}{s}}}{2\sin\frac{\pi}{2p}},$$

па је и процена из Теореме 31 оптимална.

5.4 Дуалне процене

Сада ћемо размотрити неједнакости облика:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C'(p,s)\|\big(|P_+f|^s + |P_-f|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Постојање коначне константе $C'(p,s)$ у горњој неједнакости последица је Теореме Банаха о хомеоморфизму. Ипак, за добијање тачне вредности потребан је конструктиван приступ.

Теорема 2.3 из [33] даје специјалан случај горње неједнакости за $s=2$ који гласи:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \frac{2^{1-\frac{1}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2p}}\bigg(\int_{\mathbb{T}}\big(|P_+f(\zeta)|^2 + |P_-f(\zeta)|^2\big)^{\frac{p}{2}}|d\zeta|\bigg)^{\frac{1}{p}}.$$

Неједнакост између средина реда $s>2$ и 2 даје:

$$\int_{\mathbb{T}}\big(|P_+f(\zeta)|^2 + |P_-f(\zeta)|^2\big)^{\frac{p}{2}}|d\zeta| \leq 2^{\frac{p}{2}-\frac{p}{s}}\int_{\mathbb{T}}\big(|P_+f(\zeta)|^s + |P_-f(\zeta)|^s\big)^{\frac{p}{2}}|d\zeta|,$$

одакле добијамо следећу теорему:

***Теорема* 32** (Марковић, Мелентијевић [45])**.** *Нека је $1<p\leq 2$ и $s>2$. Тада је испуњена неједнакост:*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2^{1-\frac{1}{s}}\sin\frac{\pi}{2p}\|\big(|P_+f|^s + |P_-f|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|. \tag{5.12}$$

Поступајући сасвим аналогно у случају $p,s>2$ долазимо до наредне теореме:

***Теорема* 33** (Марковић, Мелентијевић [45])**.** *Нека је $p>2$ и $s>2$. Тада је испуњена неједнакост:*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2^{1-\frac{1}{s}}\cos\frac{\pi}{2p}\|\big(|P_+f|^s + |P_-f|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|. \tag{5.13}$$

Природно се намеће и питање да ли се могу добити и мање константе од наведених у Теоремама 32 и 33. Наредни редови показују да су константе у овим теоремама и најмање могуће. Размотримо опет фамилију f_γ дефинисану као у претходној подсекцији. Добијамо:

$$\sup\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|\big(|P_+f|^s + |P_-f|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}} \geq \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\frac{2\big(\alpha^2\cos^2\frac{\pi}{2p} + \beta^2\sin^2\frac{\pi}{2p}\big)^{\frac{1}{2}}}{\big(|\alpha+\beta|^s + |\alpha-\beta|^s\big)^{\frac{1}{s}}}$$

Последњи супремум није мањи од вредности последњег израза добијеног за $\alpha=0,\beta=1$, тј.

$$\sup\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|\big(|P_+f|^s + |P_-f|^s\big)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}} \geq 2^{1-\frac{1}{s}}\sin\frac{\pi}{2p}$$

за $1 < p \leq 2$. Слично добијамо и:

$$\sup \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|\left(|P_+f|^s + |P_-f|^s\right)^{\frac{1}{s}}\|_{L^p(\mathbb{T})}} \geq 2^{1-\frac{1}{s}} \cos \frac{\pi}{2p}$$

за $p > 2$.

Приметимо да специјалан случај претходних неједнакости за $s \to +\infty$ даје неједнакост дуалну неједнакости Холенбека и Вербицког из [25]:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 2 \max\{\sin \frac{\pi}{2p}, \cos \frac{\pi}{2p}\} \| \max\{|P_+f|, |P_-f|\}\|.$$

Напоменимо такође и да се интеграљењем по диску $\mathbb{D}$ функција $\rho|f(\rho z)|^p$ и $\rho(|g(\rho z)|^s + h(\rho z)|^s)^{\frac{p}{s}}$, при $f = g + \overline{h}$, за холоморфне g и h добијају и неједнакости за Бергманове просторе хармонијских функција:

$$\left(\int_{\mathbb{D}} \left(|g(z)|^s + |h(z)|^s\right)^{\frac{p}{s}} dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2^{\frac{1}{s}}}{2 \max\{\sin \frac{\pi}{2p}, \cos \frac{\pi}{2p}\}} \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.14}$$

за $0 < s \leq 2$ и $1 < p < +\infty$, односно

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{1-\frac{1}{s}} \max\{\sin \frac{\pi}{2p}, \cos \frac{\pi}{2p}\} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(|g(z)|^s + |h(z)|^s\right)^{\frac{p}{s}} dA(z) \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{5.15}$$

за $s \geq 2$ и $1 < p < +\infty$.

Претходне неједнакости су најјаче за $s = 2$, с обзиром на неједнакост средина и у том облику налазе се и у [33] . Функције које смо користили као тест функције за показивање оптималности константи у проценама за Хардијеве просторе биле су погодне управо због особине дате једнакошћу (5.11). То не важи у случају Бергманових простора, па је врло вероватно да (5.14) и (5.15) нису и најбоље могуће неједнакости.

Наведимо на крају поглавља још један резултат из [33], који се односи на примену доказаних неједнакости Рисовог типа за $s = 2$ за добијање изопериметријских неједнакости за хармонијске функције. Наредни резултат дело је Давида Калаја и ми ћемо овде доказ из [33] изложити у нешто краћем облику.

***Теорема* 34** (Калај [33])**.** *Нека је f комплексна хармонијска функција на $\mathbb{D}$ и $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Ако $f \in h^n(\mathbb{D})$, тада $f \in b^{2n}(\mathbb{D})$ и важи:*

$$\|f\|_{b^{2n}(\mathbb{D})} \leq \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{4n}} \|f\|_{h^n(\mathbb{D})}. \tag{5.16}$$

Доказ. Да докажемо (5.16), позваћемо се на следећу неједнакост:

$$\int_{\mathbb{D}} \left(|g(z)|^2 + |h(z)|^2\right)^{2p} dA(z) \leq \left(\int_{\mathbb{T}} \left(|g(\zeta)|^2 + |h(\zeta)|^2\right)^p |d\zeta| \right)^2.$$

Ова неједнакост лако следи из неједнакости за позитивне функције u,чији је логаритам субхармонијска функција:

$$\int_{\mathbb{D}} u(z)^2 dA(z) \leq \left(\int_{\mathbb{T}} u(\zeta)|d\zeta| \right)^2,$$

чији се доказ може наћи у [34] и чињенице да је $\log(|g|^2 + |h|^2)$ субхармонијска функција, ако су f и g холоморфне.

Запишимо сад задату хармонијску функцију f у облику $f = g + \overline{h}$, са $h(0) = 0$. Имамо:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\mathbb{D}} \left(|g + \overline{h}|^2\right)^n dA(z) = \int_{\mathbb{D}} \left(|g|^2 + |h|^2 + 2Re(gh)\right)^n dA(z) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_{\mathbb{D}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^k \left(2Re(gh)\right)^{n-k} dA(z). \end{aligned}$$

Примена Хелдерове неједнакости на сваки сабирак у последњем збиру даје:

$$L \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^n \right)^{\frac{k}{n}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(|2Re(gh)|\right)^n dA(z) \right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

На овом месту применићемо на сваком другом чиниоцу у сабирку неједнакост

$$\int_{\mathbb{D}} |Ref(z)|^p dA(z) \leq \cos^p \frac{\pi}{2p} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z),$$

коју лако добијамо као последицу (5.12). Тако добијамо:

$$L \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \frac{\pi}{2n} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^n \right)^{\frac{k}{n}} \left(\int_{\mathbb{D}} \left(2|gh|\right)^n dA(z) \right)^{\frac{n-k}{n}}.$$

Сада примена неједнакости између аритметичке и геометријске средине, као и горње леме за позитивне логаритамски субхармонијске функције, даје:

$$\begin{aligned} L &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \frac{\pi}{2n} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2k}{n}} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^{\frac{n}{2}} dA(z) \right)^{\frac{2(n-k)}{n}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \frac{\pi}{2n} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^n \right)^2 \end{aligned}$$

Коначно, примена Теореме 2 повлачи:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \frac{\pi}{2n} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(|g|^2 + |h|^2\right)^n \right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k} \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^n} \left(\int_{\mathbb{T}} |g+\overline{h}|^n \right)^2 \\
&= \left(1+\cos\frac{\pi}{2n}\right)^n \frac{1}{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^n} \left(\int_{\mathbb{T}} |g+\overline{h}|^n \right)^2 \\
&= \frac{1}{2\sin^2\frac{\pi}{4n}} \left(\int_{\mathbb{T}} |g+\overline{h}|^n \right)^2,
\end{aligned}
$$

што смо и желели.

Иако се овде добијају конкретне оцене само за $h^n(\mathbb{D})$, где је n природан број већи од 2, напоменимо и да сличне, мада слабије процене постоје и за све $h^p(\mathbb{D})$, за $p > 1$, и дело су истог аутора и Ромеа Мештровића ([29]). За $p = 1$ аналогна неједнакост не постоји. За разлику од хармонијских, код холоморфних функција овакав резултат важи за све $p \geq 1$ и тада је:

$$\|f\|_{A^{2p}(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$

$\square$

Литература

[1] L. Ahlfors, *Conformal invariants,* McGraw-Hill Book Company, (1973)

[2] L. Ahlfors, *Mobius transformations in several dimensions,* University of Minnesota, School of Mathematics (1981).

[3] P. Ahern, M. Flores, W. Rudin, *A complex invariant volume-mean-value property,* J. Funct. Anal. **111** (1993), 380-397.

[4] A. B. Aleksandrov, *Approximation by rational functions, and an analogue of the M. Riesz theorem on conjugate functions for L^p-spaces with $p \in (0,1)$* , Math. USSR, Sb., **35** (1979), 301-316.

[5] A. B. Aleksandrov, *Essays on nonlocally convex Hardy classes. In complex analysis and spectral theory(Leningrad, 1979/1980)* , volume 864 of Lecture Notes in Math. Springer, Berlin (1981), 1-89.

[6] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[7] S. Axler, D. Zheng, *Compact operators via the Berezin transform,* Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), 387-400

[8] F. Berezin, *Covariant and contravariant symbols of operators,* Math. USSR-Izv **6**(1972), 1117-1151.

[9] C. Berger, L. Coburn, *Toeplitz operators and quantum mechanics,* J. Funct. Anal. **68** (1986), 273-299.

[10] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture,* Acta Mathematica , **154**(1) (1985), 137-152.

[11] H. Chen, *The Schwarz-Pick lemma and Julia lemma for real planar harmonic mappings,* Science China Mathematics **56**(2013), 2327-2334.

[12] S. H. Chen, M. Mateljevic, S. Ponnusamy, X. Wang, *Schwarz-Pick lemma, equivalent modulus, integral means and Bloch constant for real harmonic functions,*Acta Math. Sinica, Chinese Series, **60(6)** (2017), 1025-1036.

[13] B. Choe, *Projections, the weighted Bergman spaces, and the Bloch space,* Proc. Amer. Math. Soc. **108**(1990), 127-136.

[14] R. R. Coifmann, R. Rochberg, G. Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables,* Ann. of Math. **103** (1976), 611-635.

[15] M. R. Dostanić, *Two sided norm estimate of the Bergman projection on L^p spaces*, Czechoslovak Math.J. **58** (133(2))(2008), 569-575.

[16] M. Dostanić, *Norm of Berezin transform on L^p space*, J. Anal. Math., **104** (2008), 13-23.

[17] P. Duren, A. Schuster, *Bergman Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 100, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[18] K. M. Dyakonov, *Functions in Bloch type spaces and their moduli,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **41**(2)(2016), 705-712.

[19] M. Engliš, *Functions invariant under the Berezin transform,* J. Funct. Anal. **121**(1994), 233-254.

[20] C. Fefferman, *The Bergman Kernel biholomorphic mappings of pseudoconvex domains,* Inventiones Mathematicae, **26**(1) (1974), 1-65.

[21] F. Forreli, W. Rudin, *Projection on spaces of holomorphic functions in balls*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974), 593-602.

[22] I. Gohberg, N. Krupnik, *Norm of the Hilbert transformation in the L^p space*, Funct. Anal. Pril. **2** (1968), 91-92.

[23] H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu *Theory of Bergman spaces*, Graduate texts in Mathematics **199** Springer, Verlag New York-Berlin. (2000)

[24] E. Heinz, *On one-to-one harmonic mappings*, Pac. J. Math. **9** (1959), 101-105.

[25] B. Hollenbeck, I. E. Verbitsky, *Best constants for the Riesz projection*, J. Funct. Anal. **175** (2000), 370-392.

[26] B. Hollenbeck, I. E. Verbitsky, *Best constants inequalities involving the analytic and co-analytic projections*, Operator Theory: Advances and Applications, Birkhauser, Vol. **193** (2009), 65-80.

[27] M. Jevtić, D. Vukotić, M. Arsenović, *Taylor Coefficients and Coefficient Multipliers of Hardy and Bergman-type Spaces*, RSME Springer Series 2, (2016)

[28] D. Kalaj, M. Marković, *Norm of the Bergman projection*, Math. Scand. **115** (2014), 143-160.

[29] D. Kalaj, R. Meštrović, *Isoperimetric type inequalities for harmonic functions,* J. Math. Anal. Appl. **373(2)** (2011), 439-448.

[30] D. Kalaj, Dj. Vujadinović, *Norm of the Bergman projection onto the Bloch space,* J. Operator Theory, **73**(1)(2015), 113-126.

[31] D. Kalaj, M. Vuorinen, *On harmonic functions and the Schwarz lemma,* Proc. Amer. Math. Soc **140** (2012), 161-165.

[32] D. Kalaj, *Schwarz lemma for holomorphic mappings in the unit ball,* Glasgow Math. Journal **60(1)** (2018), 219-224.

[33] D. Kalaj, *On Riesz type inequalities for harmonic mappings in the unit disk,* arXiv: 1701:04785 [math.CV], рад прихваћен за публиковање у Transactions of AMS

[34] D. Kalaj, *Isoperimetric inequality for the polydisk,* Ann. Math. Pura Appl. **190(4)** (2011), 355-369.

[35] H. Turgay Kaptanoglu, *Bergman projections on Besov spaces on balls*, Ilinois J. Math., **49(2)** (2005), 385-403.

[36] S. Krantz, *Geometric Analysis of the Bergman Kernel and Metric,* Springer (2013).

[37] S. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables 2nd ed.,* American Mathematical Society (2001).

[38] J. E. Littlewood, *On Inequalities in the Theory of Functions,* Proc. London. Math. Soc. , **2-23** (1925), 481-519.

[39] C. Liu, *Sharp Forelli-Rudin estimates and the norm of the Bergman projection*, J. Funct. Anal. **268** (2015), 255-277.

[40] C. Liu, *Norm Estimates for the Bergman and Cauchy-Szego projections Over the Siegel Upper-Half Spaces,* **48(3)** (2018), 385-413.

[41] C. Liu, A. Perala, L. Zhou, *Two sided norm estimates for Bergman-type projections Over the Siegel Upper-Half Space,* рад прихваћен за публиковање у Rev. Mat. Iberoam. DOI 10.4171/RMI/1031

[42] C. Liu, L. Zhou, *Norm of an integral operator related to the harmonic Bergman projection,* Integr. Equ. Oper. Theory **69**(2011), 557-566.

[43] C. Liu, L. Zhou, *On the p-norm of the Berezin transform,* Illinois J. Math. **56**(2012), 497-505.

[44] C. Loewner, *Untersuchungen uber die Verzerrung be konformen Abbildungen des Einheitskreises* $|z| < 1$*, die durch Funktionen mit nicht veschwindender Ableitung geliefert werden,* Ber. Verh. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig **69** (1927), 89-106.

[45] M. Marković, P. Melentijević, On Riesz projection and Hollenbeck-Verbitsky conjecture, рад у припреми, могућа је измена наслова рада

[46] M. Marković, *A Sharp Constant for the Bergman Projection,* Canad. Math. Bull., **58**(2015), 128-133.

[47] M. Marković, *On harmonic functions and the hyperbolic metrics,* Indag. Math. **26**(1)(2015), 19-23.

[48] M. Marković, *On the Forelli-Rudin Projection Theorem,* Integr. Equ. Oper. Theory, **81**(3) (2015), 409-425.

[49] M. Marković, *Semi-Norms of the Bergman Projection,* Computational Methods and Function Theory, **16**(1) (2016), 65-78.

[50] M. Mateljević, M. Pavlović, *An extension of the Forelli-Rudin projection theorem*, Proc. Edinb. Math. Soc., **36**(2) (1993), 375-389.

[51] M. Mateljević, *Schwarz lemma and Kobayashi metrics for holomorphic and pluriharmonic functions,* J. Math. Anal. Appl. **464** (2018), 78-100.

[52] M. Mateljević, *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps,* Завод за уџбенике, Београд 2012.

[53] M. Mateljević, A. Khalfallah *Schwarz lemma for mappings with bounded Laplacian,* arXiv:1810.08823

[54] M. Mateljević, M. Svetlik *Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mapping,* arXiv 1808:06647

[55] P. Melentijević, *Invariant gradient in refinements of Schwarz lemma and Harnack inequalities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 48 (2018), 391-399.

[56] P. Melentijević, *Cauchy and Bergman projections, sharp gradient estimates and certain operator norm equalities*, рад на рецензији

[57] P. Melentijević, *On the Bloch-type seminorms of the weighted Berezin transform,* рад на рецензији.

[58] P. Melentijević, *Norm of the Bergman projection onto the Bloch space with $\mathcal{M}$ -invariant gradient norm,* arXiv:1711.08719, рад прихваћен за публиковање у Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.

[59] P. Melentijević, *Sharp gradient estimates for L^2- weighted Bergman and Hardy spaces in Siegel-upper half space,* рад на рецензији

[60] A. Nakamura, F. Ohya, H. Watanabe, *On some properties of functions in weighted Bergman spaces*, Prod. Fac. Sci. Tokai Univ. **15** (1980), 33-44.

[61] D. J. Newman, *The nonexistence of projections from L^1 to H^1*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 98-99.

[62] M. Pavlović, *Inequalities for the gradient of eigenfunctions of the invariant Laplacian in the unit ball,* Indag. Math., **2**(1) (1991), 89-98.

[63] M. Pavlović, *Function classes on the unit disc,* An introduction, De Gruyter Studies in Mathematics **52**(2014).

[64] M. Pavlović, *Introduction to function spaces on the disc,* Посебно издање, 20. Математички институт САНУ, Београд (2004)

[65] A. Perala, *On the optimal constant fo the Bergman projection on to the Bloch space*, Ann. Acd. Sci. Fenn. Math. **37** (2012), 245-249.

[66] A. Perala, *Bloch space and the norm of the Bergman projection*,Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **38**(2013), 849-853.

[67] S.K.Pichorides, *On the best values of the constants in the theorems of M. Riesz, Zygmund and Kolmogorov,* Studia Math., Collections of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, II **44** (1972), 165-179.

[68] M. Riesz, *Sur les fonctions conjuguees,* Math. Zeit., **27** (1927), 218-244.

[69] M. S. Robertson, *A remark on the odd schlicht functions,* Bulletin od the American Mathematical Society **42**(6)(1963), 366-370.

[70] H. L. Royden, *Ahlfors-Schwarz lemma in several complex variables,* Comentarii Mathematici Helvetici **55**(1)(1980), 547-558.

[71] W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New-York 1980.

[72] W. Rudin, *Real and complex analysis,* McGraw Hill Book, 2nd ed. (1981).

[73] W. Rudin, *Projections on invariant subspaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **13(3)** (1962), 429-432.

[74] W. Rudin, *Functional Analysis,* International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co., New York (1991)

[75] P. Stein, *On a theorem of M. Riesz,* J. London Math. Soc. **8** (1933), 242-247.

[76] K. Strocthoff, *Algebraic properties of Toeplitz operators on the Hardy space via the Berezin transform,* Function Spaces (Edwardsville, IL, 1998)313-319, Contemp. Math. **232**, Amer. Math. Soc., Providence , RI, 1999

[77] R. Timoney, *Bloch functions in several complex variables I,* Bull. London Math. Soc. **12**(1980), 241-267.

[78] R. Timoney, *Bloch functions in several complex variables II,* J. Rein. Angew. Math. **319** (1980), 1-22.

[79] I. Verbitsky, *Estimate of the norm of a function in a Hardy space in terms of the norms of its real and imaginary parts,* Linear Operators, Math. Issled. **54** (1980) 16-20., 164-165.

[80] Dj. Vujadinović, *Some Estimates for the Norm of the Bergman Projection on Besov Spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory, **76**(2)(2013), 213-224.

[81] S. T. Yau, *A General Schwarz Lemma for Kahler Manifolds*, American Journal of Mathematics, **100**(1)(1978), 197-203.

[82] K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 226, Springer, New York, 2005.

[83] K. Zhu, *A sharp norm estimate of the Bergman projection in L^p spaces*, Bergman spaces and related topics in complex analysis, Contemp. Math. **404** (2006), 195-205.

[84] K. Zhu, *VMO, ESV and Toeplitz operators on the Bergman space,* Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 617-646.

[85] A. Zygmund, *Sur les fonctions cojuguees*, Fund. Math. **13** (1929), 284-303.

Биографија аутора

Петар Мелентијевић рођен је 9.5.1989. године у Ужицу. Основну и средњу школу је завршио у Бајиној Башти. Учествовао је на свим средњошколским такмичењима из математике на савезном, односно републичком нивоу. Основне и мастер студије је завршио на Математичком факултету у Београду, на смеру Теоријска математика и примене, са просечним оценама 9,33 и 10,00, респективно. Током студија је освајао награде на међународним такмичењима студената из математике. На Математичком факултету је држао вежбе из предмета Анализа 1 и Анализа 2, као и из Геометријске теорије функција и Одабраних поглавља реалне анализе. Затим, држао је вежбе из Математика 1,2,3 и 4 на Физичком факултету.

До сада има објављене следеће научне радове:

- P. Melentijević, *Invariant gradient in refinements of Schwarz lemma and Harnack inequalities*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 48 (2018), 391-399. M21, IF: 0.941

- Danko Jocić, Djordje Krtinić, Milan Lazarević, Petar Melentijević, Stefan Milošević, *Refinements of inequalities related to Landau-Gruss inequalities for elementary operators acting on ideals associated to p-modified unitarily invariant norms*, Complex Analysis and Operator Theory, (2018), vol.12 br.1, str.195-205 Print ISSN: 1661-8254, Online ISSN: 1661-8262, M22, доступно на https://link.springer.com/article/10.1007/s11785-016-0622-8. IF: 0.799

Први рад се односи на садржај дисертације. Рад који је прихваћен за штампу и односи се на докторску дисертацију је:

- P. Melentijević, *Norm of the Bergman projection onto the Bloch space with $\mathcal{M}$ -invariant gradient norm,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. M21, IF: 0,941

Следећи радови се такође односе на докторску дисертацију и тренутно су на рецензији:

- P. Melentijević, *Sharp gradient estimates for L^2- weighted Bergman and Hardy spaces in Siegel-upper half space*

- P. Melentijević, *On the Bloch-type seminorms of the weighted Berezin transform*

- P. Melentijević, *Cauchy and Bergman projection, sharp gradient estimates and certain operator norm equalities*

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ________Петар Мелентијевић________________________

број уписа _________________________2002/2014_____________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Процене градијената функција и норми оператора у теорији хармонијских функција

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, __________15.10.2018_______

Мелентијевић

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _______Петар Мелентијевић____

Број уписа ________________2002/2014____

Студијски програм ________Математика____

Наслов рада ______Процене градијената функција и норми оператора у теорији хармонијских функција____

Ментор ___проф. др Милош Арсеновић____

Потписани ___________Петар Мелентијевић_____________________________

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ___15.10.2018.____________________

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Процене градијената функција и норми оператора у теорији хармонијских функција

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 15.10.2018.