MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITET U BEOGRADU

DOKTORSKA DISERTACIJA

MODULI NEPREKIDNOSTI KVAZIREGULARNIH PRESLIKAVANJA

KANDIDAT	MENTOR	KOMENTOR
VESNA MANOJLOVIĆ	MIODRAG MATELJEVIĆ	MATI VORINEN

BEOGRAD 2008

Sadržaj

Zahvalnost

Želela bih da izrazim zahvalnost Prof. Arsenoviću, Prof. Mateljeviću i Prof. Pavloviću čija su mi predavanja i seminari na poslediplomskim studijama na Matematičkom fakultetu u Beogradu dala dobru osnovu za dalji istraživački rad.

Upravo na jednom od ovih seminara, održanom u decembru 2006. godine imala sam priliku sa upoznam Prof. Mati Vorinena sa Univerziteta Turku, Finska, baš u vreme kada sam tragala za temom za svoj Magistarski rad. Naša saradnja je omogućila da u junu 2007. godine odbranim Magistarsku tezu, tri puta posetim Turku, u periodu od decembra 2007. do juna 2008. godine, kako bih se intenzivno bavila istraživanjem u oblasti kvazikonformnih preslikavanja, što je rezultiralo sa dva naša zajednička rada kao i ovom Doktorskom tezom. Teško je izraziti moju zahvalnost Prof. Vorinenu, za njegovu odlučujuću ulogu u mom dosadašnjem radu.

Zahvaljujem se Prof. Arsenović za njegovu neprekidnu podršku i savete kao i Prof. Mateljeviću za uvek korisnu razmenu ideja u oblasti harmonijskih preslikavanja.

Posebnu zahvalnost dugujem Prof. Pavloviću, čiji je doprinos ključan za drugi deo ove teze.

GLAVA 1

Kvazikonformna preslikavanja

1. Uvod

Oblast konformnih invarijanti je imala ključnu ulogu u razvoju geometrijske teorije funkcija tokom prošlog veka. Neke prekretnice ove teorije su pionirski radovi Greča i Tajhmilera izmedju dva svetska rata kao i rad Alforsa i Bjorlinga [**AhB**] iz 1950. Ova dostignuća su rezultirala u dalekosežnim primenama i stimulisala su mnoga kasnija istraživanja. Gering i Vaisala [**G3**], [**V1**] su, na primer, izgradili teoriju kvazikonformnih preslikavanja u $\mathbb{R}^n$, koja se oslanja na pojam modula familije krivih, uveden u [**AhB**].

U prvoj glavi ove disertacije naš cilj je da izučimo dve vrste konformno invarijantnih ekstremalnih problema, koji se u specijalnim slučajevima svode na probleme Greča i Tajhmilera. Ova dva klasična ekstremalna problema su ekstremalni problemi modula prstenastih domena. Grečovi i Tajhmilerovi prstenovi su ekstremalni prstenovi za ekstremalne probleme sledes1eg tipa, koji su prvo postavljeni za slučaj ravni. Od svih prstenastih domena koji odvajaju dva data zatvorena skupa E_1 i E_2, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, naći onaj sa najvećim modulom.

U opštem slučaju ovi ekstremalni problemi vode do konformnih invarijanti $\lambda_G(x, y)$ i $\mu_G(x, y)$ definisanih za domen $G \subset \mathbb{R}^n$ i $x, y \in G$. Osnovno je da su $\lambda_G(x, y)^{1/(1-n)}$ i $\mu_G(x, y)$ metrike. Prateći ideje razmatrane u [**Vu1**] i [**Vu2**] izučavamo tri problema: (a) geometriju metričkih prostora (G, d) kada je d jednako $\lambda_G(x, y)^{1/(1-n)}$ ili $\mu_G(x, y)$, (b) odnose ovih metrika sa drugim metrikama i (c) ponašanje kvazikonformnih preslikavanja u odnosu na neke od tih metrika. Glavni rezultat je proširena verzija tabele sa strane 86 iz [**Vu1**], koja uzima u obzir i kasnije rezultate, kao što su [**H**], [**HV**], [**Vu2**].

Zatim predstavljamo primenu na geometriju lopti u ovim metrikama. Kao specijalan slučaj posmatramo λ metriku u $B^2 \setminus \{0\}$, nastavljajući rad [**H**].

Sledeće pitanje koje razmatramo je: ako je preslikavanje $f : (G_i, m_{G_i}) \longrightarrow (G'_i, m_{G'_i})$ uniformno neprekidno $(i = 1, 2)$, da li je onda i preslikavanje $(G, m_G) \longrightarrow (G', m_{G'})$ uniformno neprekidno $(G = G_1 \cup G_2,\ G' = G'_1 \cup G'_2)$?

Prva glava završava se procenama odstupanja K-qc preslikavanja koja su identitet na granici domena G, od identičkog preslikavanja.

U drugoj glavi mi razmatramo koje dodatne zaključke o K-qc preslikavanjima možemo izvesti ako pretpostavimo da su i harmonijska. Takva preslikavanja nazivamo hqc-preslikavanja.

U slučaju $n = 2$ pokazujemo da hqc preslikavanje ima isti tip modula neprekidnosti na $\overline{D}$ kao na ∂D.

Sličan rezultat, za Lipšicov slučaj, dokazujemo na lopti B^n. Konačno, za $n = 2$, pokazujemo da je svako hqc preslikavanje bilipšicovo u kvazihiperboličkoj metrici.

2. Ekstremalni problemi Greča i Tajhmilera

U delu koji sledi, mi ćemo usvojiti standardne definicije pojmova vezanih za kvazinkonformna preslikavanja iz [**V1**].

Za $E, F, G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ neka je $\Delta(E, F, G)$ familija svih zatvorenih krivih koje povezuju E sa F unutar G. Preciznije, putanja $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}^n$ pripada $\Delta(E, F, G)$ ako i samo ako $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ i $\gamma(t) \in G$ za $a < t < b$.

Ako je G pravi poddomen od $\overline{\mathbb{R}^n}$, tada za $x, y \in G$ takve da $x \neq y$ definišemo

$$\lambda_G(x, y) = \inf_{C_x, C_y} M(\Delta(C_x, C_y; G)) \tag{2.1}$$

gde je $C_z = \gamma_z[0, 1)$ i $\gamma_z : [0, 1) \longrightarrow G$ kriva takva da je $\gamma_z(0) = z$ i $\gamma_z(t) \to \partial G$ kada $t \to 1$, $z = x, y$.

Za $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, e_1\}$, $n \geqslant 2$, definišemo

$$p(x) = \inf_{E,F} M(\Delta(E, F)), \tag{2.2}$$

gde se infimum uzima po svim parovima kompaktnih povezanih skupova E i F u $\overline{\mathbb{R}^n}$ sa $0, e_1 \in E$, $x, \infty \in F$.

Za pravi poddomen G od $\overline{\mathbb{R}^n}$ i za sve $x, y \in G$ definišimo

$$\mu_G(x, y) = \inf_{C_{xy}} M(\Delta(C_{xy}, \partial G; G)) \tag{2.3}$$

gde se infimum uzima po svim kompaktnim povezanim skupovima C_{xy} takvim da je $C_{xy} = \gamma[0, 1]$ i γ je kriva sa $\gamma(0) = x$ i $\gamma(1) = y$.

Koristimo oznake $B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$, $S^{n-1}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}$, $H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ i skraćenice $B^n(r) = B^n(0, r)$, $B^n = B^n(1)$, $S^{n-1}(r) = S^{n-1}(0, r)$ i $S^{n-1} = S^{n-1}(1)$.

Neka su (X, d_1) i (Y, d_2) metrički prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada kažemo da je f uniformno neprekidno ako postoji rastuća neprekidna funkcija $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sa $\omega(0) = 0$ i $d_2(f(x), f(y)) \leq \omega(d_1(x, y))$ za sve $x, y \in X$. Funkciju ω zovemo modulom neprekidnosti od f. Ako postoji $C, \alpha > 0$ takvo da je $\omega(t) \leq Ct^\alpha$ za sve $t > 0$, kažemo da je f Helder neprekidno sa Helder eksponentom α. Ako je $\alpha = 1$, kažemo da je f Lipšicovo sa Lipšicovom konstantom C ili kraće C-Lipšicovo. Ako je f homeomorfizam i f i f^{-1} su C-Lipšicova, tada je f C-bilipšicovo ili C-kvaziizometrija i ako je $C = 1$ kažemo da je f izometrija. Ovi uslovi važe lokalno, ako važe za svaki kompaktan podskup od X.

Poseban slučaj ovoga su izometrije.

Neka su (X_1, d_1) i (X_2, d_2) metrički prostori i neka je $f : X_1 \to X_2$ homeomorfizam. f zovemo izometrijom ako je $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ za sve $x, y \in X_1$.

U ovom odeljku uvodimo pet tipova metrika:

(1) Sferna (hordalna) metrika q.
(2) Kvazihiperbolička metrika k_G na domenu $G \subset \mathbb{R}^n$.
(3) Metrika j_G srodna metrici k_G.
(4) Seitenrantina metrika δ_G.
(5) Apolonijevska metrika α_G.

Prva je definisana na $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Druga na B^n, ili na gornjem poluprostoru H^n. Poslednje dve su definisane u proizvoljnom pravom poddomenu $G \subset \mathbb{R}^n$ i obe su uopštenje hiperboličke metrike (na B^n ili H^n) na proizvoljan pravi poddomen $G \subset \mathbb{R}^n$. Ako je $G = H^n$, onda je $k_G = \rho$.

2.4. Sferna metrika.

Metrika q je definisana

$$q(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, & x \neq \infty \neq y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+|x|^2}}, & y = \infty. \end{cases} \tag{2.5}$$

Dvorazmera uredjene četvorke a, b, c, d različitih tačaka u $\overline{\mathbb{R}^n}$ se definiše

$$|a, b, c, d| = \frac{q(a,c)\, q(b,d)}{q(a,b)\, q(c,d)}. \tag{2.6}$$

Sada uvodimo **$\mathbf{j}_G$-metriku**. Za otvoreni skup $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \mathbb{R}^n$ definišemo $d(z) = d(z, \partial G)$ za $z \in G$ i

$$j_G(x,y) = \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\min\{d(x), d(y)\}}\right) \tag{2.7}$$

za $x, y \in G$.

Za neprazan $A \subset G$ definišemo j_G-diametar od A kao

$$j_G(A) = \sup\{j_G(x,y) \mid x, y \in A\}.$$

Za otvoren skup $G \subset \mathbb{R}^n$, $G \neq \mathbb{R}^n$, i neprazan $A \subset G$ takav da je $d(A, \partial G) > 0$ definišemo

$$r_G(A) = \frac{d(A)}{d(A, \partial G)}.$$

Ako je $\rho(x) > 0$ za $x \in G$ i ako je γ rektificibilna kriva u G, onda definišemo

$$l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho\, ds.$$

Euklidska dužina krive γ označava se sa $l(\gamma)$.

Takodje, za $x_1, x_2 \in G$ definišemo

$$d_\rho(x,y) = \inf l_\rho(\gamma), \tag{2.8}$$

gde se infimum uzima po svim rektificibilnim krivama koje povezuju x_1 sa x_2.

Lako se pokazuje da je d_ρ metrika u G.

Sada ćemo uzeti proizvoljan pravi domen $G \subset \mathbb{R}^n$ i staviti da je $\rho(x) = \frac{1}{d(x,\partial G)}$.

Odgovarajuća metrika, označena sa $\mathbf{k}_G$, naziva se **kvazihiperbolička metrika** u G. Kako je,

$$\rho(\varphi(x)) = \frac{1}{d(\varphi(x), \partial(\varphi G))} = \frac{1}{d(x, \partial G)} = \rho(x),$$

za euklidsku izometriju φ,

$$k_{G'}(x', y') = k_G(x, y), \qquad \text{gde je } G' = \varphi(G),\ \ x' = \varphi(x),\ \ y' = \varphi(y).$$

Sada uvodimo prirodan, Mebijus invarijantan analog j_G metrike, takozvanu **Seitenrantinu metriku** δ_G [**Se**]. Za otvoren skup $G \subset \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathrm{card}\partial G \geqslant 2$ stavićemo

$$m_G(x, y) = \sup_{a,b \in \partial G} |a, x, b, y|$$

i

$$\delta_G(x, y) = \log(1 + m_G(x, y))$$

za sve $x, y \in G$.

Primetimo da ako su a ili b u supremumu jednaki beskonačnosti, onda dobijamo tačno j_G metriku. Ovo povlači da uvek imamo $j_G \leqslant \delta_G$.

Takodje ćemo koristiti **Apolonijevsku metriku** izučavanu od strane Berdona [**B2**], (takodje videti [**AVV**, 7.28 (2)]) definisanu u otvorenim pravim podskupovima $G \subset \mathbb{R}^n$ sa

$$\alpha_G(x, y) = \sup_{a,b \in \partial G} \log |a, x, y, b| \quad \text{za sve } x, y \in G.$$

Ova formula definiše metriku akko $\mathbb{R}^n \setminus G$ nije sadržano u $(n-1)$-dim sferi u $\mathbb{R}^n$.

Uopšte uzev, metrike hiperboličkog tipa se mogu podeliti u dužinske metrike, definisane vrednošću integrala težinske funkcije kao i metrike rastojanja tačaka.

Druga grupa se dalje može klasifikovati po broju tačaka na granici koje se koriste u definiciji. Tako na primer, j metrika je one-point metrika, dok je Apollonijevska metrika two-point metrika.

2.9. Definicija. Domen $A \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ je prsten, ako $C(A)$ ima tačno dve komponente, gde $C(A)$ označava komplement od $A \subset \mathbb{R}^n$.

Ako su komponente od $C(A)$, C_0 i C_1, označićemo sa $A = R(C_0, C_1)$, $B_0 = C_0 \cap \overline{A}$ i $B_1 = C_1 \cap \overline{A}$. Svakom prstenu $A = R(C_0, C_1)$, pridružujemo familiju krivih $\Gamma_A = \Delta(B_0, B_1, A)$ i modul od A koji definišemo sa $\mod(A) = M(\Gamma_A)$. Dalje, kapacitet od A je po definiciji $\mathrm{cap}A = \omega_{n-1}(\mod A)^{1-n}$.

Komplementarne komponente Grečovog prstena $R_{G,n}(s)$ u $\mathbb{R}^n$ su $\overline{B}^n$ i $[s \cdot e_1, \infty]$, $s > 1$, dok su kod Tajhmilerovog prstena $R_{T,n}(t)$to $[-e_1, 0]$ i $[t\, e_1, \infty]$, $t > 0$. Trebaće nam dve specijalne funkcije $\gamma_n(s)$, $s > 1$ i $\tau_n(t)$, $t > 0$, da odredimo module familija svih onih krivih koje povezuju komplementarne komponente Grečovih i Tajhmilerovih prstenova u $\mathbb{R}^n$, tim redom.

$$\gamma_n(s) = M(\Gamma_s) = \gamma(s), \quad \Gamma_s = \Gamma_{R_{G,n}}(s),$$
$$\tau_n(t) = M(\Delta_t) = \tau(t), \quad \Delta_t = \Gamma_{R_{T,n}}(t).$$

Ove funkcije su povezane funkcionalnim identitetom [**G1**, Lemma 6]

$$\gamma_n(s) = 2^{n-1}\tau_n(s^2 - 1). \tag{2.10}$$

2.11. Definicija. Za dato $r > 0$, neka je $R\Psi_n(r)$ skup svih prstenova $A = R(C_0, C_1)$ u $\overline{\mathbb{R}^n}$ sa sledećim osobinama:

(1) C_0 sadrži koordinatni početak i tačku a takvu da je $|a| = 1$.
(2) C_1 sadrži ∞ i tačku b takvu da je $|b| = r$.

Tajhmiler je prvi posmatrao sledeću veličinu u slučaju ravni ($n = 2$):

$$\tau_n(r) = \inf M(\Gamma_A) = \inf\{p(x) \mid |x| = r\},$$

gde je infimum uzet po svim prstenovima $A \in R\Psi_n(r)$. Slučaj $n \geqslant 3$ proučavan je u [**G1**].

2.12. Teorema. [**V1**, Theorem 11.7] *Funkcija* $\tau_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *ima sledeće osobine:*

(1) τ_n *je opadajuća,*
(2) $\lim_{r\to\infty} \tau_n(r) = 0$,
(3) $\lim_{r\to 0} \tau_n(r) = \infty$,
(4) $\tau_n(r) > 0$ *za svako* $r > 0$.

Štaviše, $\tau_n : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *i* $\gamma_n : (1, \infty) \to (0, \infty)$ *su homeomorfizmi.*

Iz definicije τ_n i iz konformne invarijantnosti modula , dobijamo sledeću procenu:

2.13. Teorema. *Pretpostavimo da je* $A = R(C_0, C_1)$ *prsten i da* $a, b \in C_0$ *i* $c, \infty \in C_1$. *Tada važi*

$$M(\Gamma_A) \geqslant \tau_n\left(\frac{|c-a|}{|b-a|}\right).$$

Jednakost važi za Tajhmilerov prsten kada je $a = 0, b = -e_1, c = te_1, t > 0$, *i* $C_0 = [-e_1, 0], C_1 = [se_1, \infty)$.

2.14. Teorema. *Neka je* $C \subset B^n$ *povezan kompaktan skup koji sadrži* 0 *i* x, *pri čemu je* $|x| < 1$. *Tada je kapacitet prstenastog domena sa komponentama* $C_0 = C$, $C_1 = \{x : |x| \geqslant 1\}$ *ne manji od* $\gamma_n(\frac{1}{|x|})$. *Ovde jednakost važi za prsten sa komplementarnim komponentama* $[0, |x|e_1]$ *i* $\mathbb{R}^n \setminus B^n$.

Ove teoreme opisuju ekstramalna svojstva Tajhmilerovih i Grečovih prstenova i njihovi dokazi su bazirani na teoremi simetrizacije u [**G1**, Theorem 1].

3. Moduli neprekidnosti

U ovom odeljku razmatramo module neprekidnosti identičkih preslikavanja $id_G : (G,\rho) \longrightarrow (G,d)$ gde su ρ i d izabrane iz skupa posebnih metrika definisanih na G (poput kvazihiperboličke metrike k, modularne metrike μ itd.).

Dakle, zanimaju nas rezultati tipa

$$d(x,y) \leqslant \zeta(\rho(x,y)), \quad x,y \in G. \tag{3.1}$$

Daćemo nekoliko procena ovog tipa ,a zatim ćemo prikazati ove rezultate u tablici na kraju ovog odeljka.

Napomenimo da u tablici imamo λ_G^{-1}, kao i u nejednakostima tipa (3.1); medjutim čitalac treba da ima u vidu da u opštem slučaju λ_G^{-1} nije metrika. Zapravo $\lambda_G^{\frac{1}{1-n}}$ je uvek metrika. Više detalja o ovome nalazi se u [**Vu4**].

Poznato je da je $j_G(x,y) \leqslant k_G(x,y)$, dakle $\zeta_5(t) = t$.

3.2. Lema. *Za $x,y \in G$*

$$k_G(x,y) \geqslant \log\left(1 + \frac{m(x,y)}{\min\{d(x),d(y)\}}\right) \geqslant j_G(x,y).$$

gde je $m(x,y) = \inf\{l(\gamma)\,|\,\gamma$ je kriva koja povezuje x i y u $G\}$.

Proof. Možemo pretpostaviti da je $0 < d(x) \leqslant d(y)$. Izaberimo rektificibilni luk $\gamma : [0,s] \to G$ od x do y, parametrizovan lučnom dužinom:

$$\gamma(0) = x, \qquad \gamma(s) = y;$$

očigledno je da je $s \geqslant |x-y|$. Za svako $0 \leqslant t \leqslant s$ imamo

$$d(\gamma(t)) \leqslant d(x) + t, \qquad \text{(ključno razmatranje)},$$

dakle,

$$l_\rho(\gamma) \geqslant \int_0^s \frac{dt}{d(x)+t} = \log\frac{d(x)+s}{d(x)} \geqslant \log\frac{d(x)+|x-y|}{d(x)} = j_G(x,y).$$

$\square$

Obrnuta nejednakost nije tačna u opštem slučaju; domen G takav da postoji konstanta $c > 0$ za koju je $k_G \leqslant c\,j_G$ naziva se uniforman domen, pa u tom slučaju imamo $\zeta_2(t) = ct$.

3.3. Lema. [**Vu1**, Lemma 2.21] *Neka je G pravi poddomen od $\mathbb{R}^n$. Ako $x \in G$, $d(x) = d(x,\partial G)$ i $y \in B^n(x,d(x)) = B_x$, $x \neq y$, tada je*

$$\lambda_G(x,y) \geqslant \lambda_{B_x}(x,y) \geqslant c_n \log\left(\frac{d(x)}{|x-y|}\right) \tag{3.4}$$

gde je c_n pozitivan broj iz [V]. Postoji strogo rastuća funkcija $h_1 : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ za koju je $\lim_{t\to 0_+} h_1(t) = 0$ i $\lim_{t\to+\infty} h_1(t) = +\infty$, koja zavisi samo od n, *takva da je*

$$\lambda_G(x,y) \leqslant h_1\left(\frac{\min\{d(x),d(y)\}}{|x-y|}\right) \tag{3.5}$$

za $x, y \in G$, $x \neq y$. *Ako* $x \in G$ *i* $y \in B^n(x, d(x)) = B_x$, $x \neq y$, *tada je*

$$\mu_G(x,y) \leqslant \mu_{B_x}(x,y) = capR_G\left(\frac{d(x)}{|x-y|}\right) \leqslant \omega_{n-1}\left(\log\left(\frac{d(x)}{|x-y|}\right)\right)^{1-n}. \tag{3.6}$$

Iz (3.6) dobijamo $\mu_G(x,y) \leqslant \gamma\left(\frac{d(x)}{|x-y|}\right)$ za $x \in G$ i $y \in B_x$. To je ekvivalentno sa $\mu_G(x,y) \leqslant \gamma\left(\frac{1}{r}\right)$ gde je $r = \frac{|x-y|}{d(x)}$.

Možemo izraziti $j_G(x,y)$ u funkciji od r: $r = e^j - 1$ i dobijamo

$$\mu_G(x,y) \leqslant \gamma\left(\frac{1}{e^j - 1}\right).$$

Ovo nam daje $\zeta_3(t) = \gamma\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$.

3.7. Lema. [**Vu1**, Lemma 2.39] *Za* $n \geqslant 2$ *postoji strogo rastuća funkcija* $h_2 : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *za koju je* $h_2(0) = 0$ *i* $\lim_{t\to+\infty} h_2(t) = +\infty$ *sa sledećim osobinama.*

Ako je E *zatvoren i* F *komapaktan u* $\mathbb{R}^n$ *tada je*

$$M(\Delta(E,F)) \leqslant h_2(T); \quad T = \min\{j_{\mathbb{R}^n\setminus E}(F), j_{\mathbb{R}^n\setminus F}(E)\}. \tag{3.8}$$

Specijalno, ako je G *pravi poddomen od* $\mathbb{R}^n$, *tada je*

$$\mu_G(x,y) \leqslant h_2(3k_G(x,y)) \tag{3.9}$$

za sve $x, y \in G$. *Štaviše, postoje pozitivni brojevi* b_1, b_2 *koji zavise samo od* n *takvi da je*

$$\mu_G(x,y) \leqslant b_1 k_G(x,y) + b_2 \tag{3.10}$$

za sve $x, y \in G$.

Iz (3.9) imamo $\zeta_7(t) = h_2(3t)$.

3.11. Lema. [**Vu1**, Lemma 2.44] *Ako su* $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ *disjunktni, kompaktni i povezani skupovi, onda je*

$$M(\Delta(E,F)) \geqslant \bar{c}_n \min\{j_{\mathbb{R}^n\setminus E}(F), j_{\mathbb{R}^n\setminus F}(E)\}$$

gde je $\bar{c}_n$ *pozitivan broj koji zavisi samo od* n.

3.12. Posledica. [**Vu1**, Corollary 2.46] *Ako su* E *i* F *disjunktni, kompaktni i povezani u* $\overline{\mathbb{R}^n}$ *i* $\infty \in F$, *onda je*

$$M(\Delta(E,F)) \geqslant c_n j_{\mathbb{R}^n\setminus F}(E).$$

3.13. POSLEDICA. [**Vu4**, Lemma 6.23] *Neka je $G \subseteq \mathbb{R}^n$ domen $G \neq \mathbb{R}^n$ sa povezanom granicom ∂G. Onda*

$$\mu_G(a,b) \geqslant c_n j_G(a,b) \tag{3.14}$$

važi za $a, b \in G$. Ako je, dodatno, G uniforman, tada je

$$\mu_G(a,b) \geqslant B\, k_G(a,b) \tag{3.15}$$

za sve $a, b \in G$.

Prvi deo korolara daje $\zeta_9(t) = \frac{1}{c_n} t$ ako je ∂G povezan. (3.15) daje $\zeta_{10}(t) = c\,t$ ako je ∂G povezan i G uniforman.

3.16. LEMA. [**AVV**, Corollary 15.13]*Neka je G pravi poddomen od $\mathbb{R}^n$, x i y različite tačke u G i $m(x,y) = \min\{d(x), d(y)\}$. Tada je*

$$\lambda_G(x,y) \leqslant \sqrt{2}\tau\left(\frac{|x-y|}{m(x,y)}\right). \tag{3.17}$$

Iz (3.17) ponovo koristeći $r = e^j - 1$, $r = \frac{|x-y|}{m(x,y)}$, imamo

$$\sqrt{2}\tau(e^j - 1) \geqslant \lambda_G,$$

i odavde s obzirom da je τ opadajuća $e^j \leq \tau^{-1}\left(\frac{\lambda_G}{\sqrt{2}}\right)$, a odavde

$$j \leqslant \log\left(1 + \tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda_G^{-1}}\right)\right).$$

Iz ovoga dobijamo $\zeta_{13}(t) = \log\left(1 + \tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,t}\right)\right)$.

3.18. DEFINICIJA. *Zatvoren skup E u $\mathbb{R}^n$ naziva se c-QED skupom, $c \in (0,1]$, ako za svaki par disjunktnih kompaktnih povezanih skupova $F_1, F_2 \subseteq \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E$ važi*

$$M(\Delta(F_1, F_2; \overline{\mathbb{R}^n} \setminus E)) \geqslant cM(\Delta(F_1, F_2)). \tag{3.19}$$

Ako je G domen u $\overline{\mathbb{R}^n}$ takav da je $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ c-QED skup, tada G zovemo c-QED domenom.

3.20. TEOREMA. [**Vu3**, Theorem 6.21] *Neka je G c-QED domen u $\mathbb{R}^n$. Tada je*

$$\lambda_G(x,y) \geqslant c\tau(s^2 + 2s) \geqslant 2^{1-n} c\tau(s) \tag{3.21}$$

gde je $s = \frac{|x-y|}{min(d(x),d(y))}$.

Iz prve nejednakosti u (3.21), uzimajući da je $s = e^j - 1$, dobijamo

$$\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{1}{c}\,\frac{1}{\tau((s+1)^2 - 1)} = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\tau(e^{2j} - 1)}.$$

Ovo daje $\zeta_4(t) = \frac{1}{c}\,\frac{1}{\tau(e^{2j}-1)}$.

Kombinujući ζ_5 i ζ_4 procenjujemo λ_G^{-1} u zavisnosti od k_G, dakle $\zeta_8 = \zeta_4 \circ \zeta_5 = \zeta_4$. Ustvari imamo
$$\lambda_G^{-1} \leqslant \frac{1}{c}\frac{1}{\tau(e^{2j}-1)} \leqslant \frac{1}{c\tau(e^{2k}-1)}.$$

Polja ζ_{12}, ζ_{14}, ζ_{15} se dobijaju na isti način kao ζ_8, naime kao kompozicija odgovarajućih funkcija ζ_j. Koristimo sledeće nejednakosti. Za ζ_{12} imamo
$$\lambda_G^{-1} \leqslant \frac{1}{c\tau(e^{2j}-1)} \leqslant \frac{1}{c\tau(e^{\frac{2\mu}{cn}}-1)} = \frac{1}{c\tau(e^{b\mu}-1)}.$$
Za ζ_{14} imamo
$$k_G \leqslant c\, j_G \leqslant c \log\left(1 + \tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda_G^{-1}}\right)\right)$$
za ζ_{15} imamo
$$\mu_G \leqslant \gamma\left(\frac{1}{e^j - 1}\right) \leqslant \gamma\left(\frac{1}{e^{\log\left(1+\tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda_G^{-1}}\right)\right)} - 1}\right) = \gamma\left(\frac{1}{\tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda_G^{-1}}\right)}\right).$$

3.22. Teorema. [**Se**, Theorem 3.4] *Nejednakosti $j_G \leqslant \delta_G \leqslant 2j_G$ važe za svaki otvoren skup $G \subset \mathbb{R}^n$.*

Dakle, zaključujemo da je $\zeta_{11}(t) = t$ i $\zeta_{18}(t) = 2t$ (u 8×8 tablici).

3.23. Teorema. [**Se**, Theorem 4.2] *Neka je $G \subset \mathbb{R}^n$ konveksan domen, tada je $j_G \leqslant \alpha_G$.*

Iz ovoga dobijamo $\zeta_3(t) = t$ (u 8×8 tablici).

3.24. Teorema. [**Se**, Theorem 6.2] *Neka je G domen u $\mathbb{R}^n$, za koji je* $\operatorname{card} \partial G \geqslant 2$ *i ∂G je povezan. Tada, za različite tačke $x, y \in G$, imamo*
$$\mu_G(x,y) \geqslant \tau_n\left(\frac{1}{e^{\delta_G(x,y)} - 1}\right).$$

Rešavajući po μ i koristeći činjenicu da je τ_n opadajuća, dobijamo:
$$\tau_n^{-1}(\mu_G(x,y)) \leqslant \frac{1}{e^{\delta_G(x,y)-1}}$$
i odavde
$$\delta_G(x,y) \leqslant \log\left(1 + \frac{1}{\tau_n^{-1}(\mu_G(x,y))}\right).$$
Dakle, $\zeta_{50}(t) = \log\left(1 + \frac{1}{\tau_n^{-1}(t)}\right)$ (u 8×8 tablici).

3.25. Teorema. [**Se**, Theorem 6.5] *Neka je $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ domen sa card $\partial G \geqslant 2$. Tada je*
$$\lambda_G(x,y) \leqslant \tau_n\left(\frac{m_G(x,y)}{2}\right).$$

Ako izrazimo μ_G preko δ_G dobijamo:

$$\lambda_G(x,y) \leqslant \tau_n\left(\frac{e^{\delta_G}-1}{2}\right)$$

a odavde

$$\delta_G(x,y) \leqslant \log\left(1+2\tau_n^{-1}\left(\frac{1}{\lambda_G^{-1}(x,y)}\right)\right).$$

Zaključujemo da je $\zeta_{58}(t) = \log\left(1+2\tau_n^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)$ (u 8×8 tablici).

Ispod je prikazana 4×4 tablica.

	j_G	k_G	μ_G	λ_G^{-1}
j_G	1 $\zeta_1(t)=t$	2 $\zeta_2(t)=ct$ G – uniforman $\zeta_2(t)=\varphi(t)$ G – φ domen	3 $\zeta_3(t) = \gamma\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$ $y\in B_x$	4 $\zeta_4(t)=\dfrac{1}{c\tau(e^{2j}-1)}$ G – c-QED domen
k_G	5 $\zeta_5(t)=t$	6 $\zeta_6(t)=t$	7 $\zeta_7(t)=h_2(3t)$	8 $\zeta_8=\zeta_4$
μ_G	9 $\zeta_9(t)=\dfrac{1}{c_n}\cdot t$ ∂G povezan	10 $\zeta_{10}(t)=c\cdot t$ G uniforman ∂G povezan	11 $\zeta_{11}(t)=t$	12 $\zeta_{12}=\zeta_9\circ\zeta_4$ G – c-QED domen ∂G povezan
λ_G^{-1}	13 $\zeta_{13}(t) = \log\left(1+\tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,t}\right)\right)$	14 $\zeta_{14}=\zeta_{13}\circ\zeta_2$ G uniforman	15 $\zeta_{15}=\zeta_{13}\circ\zeta_3$ $y\in B_x$	16 $\zeta_{16}(t)=t$

Funkcija ζ_3 može biti napisana na drugi način koristeći procenu za γ funkciju. Funkcije Φ i Ψ definišemo kao u [**Vu2**, 7.19] sa

(3.26) $$\gamma_n(s) = \omega_{n-1}(\log(\Phi(s)))^{n-1}, \quad s>1$$

(3.27) $$\tau_n(t) = \omega_{n-1}(\log(\Psi(t)))^{n-1}, \quad t>0.$$

3.28. Lema. [**Vu2**, Lemma 7.22] *Za svako $n \geqslant 2$ postoji broj $\lambda_n \in [4, 2\,e^{n-1})$, $\lambda_2 = 4$, takav da je*

(3.29) $$t \leqslant \Phi(t) \leqslant \lambda_n t, \quad t>1$$

(3.30) $$t+1 \leqslant \Psi(t) \leqslant \lambda_n^2(t+1), \quad t>0.$$

Iz (3.27) imamo $\omega_{n-1}(\log(\lambda_n^2(t+1)))^{1-n} \leqslant \tau_n(t) \leqslant \omega_{n-1}(\log(t+1))^{1-n}$.

Iz (3.26) dobijamo

$$\omega_{n-1}\left(\log \lambda_n t\right)^{1-n} \leqslant \gamma_n(t) \leqslant \omega_{n-1}\left(\log t\right)^{1-n}, \quad t > 1.$$

Koristeći desnu nejednakost dobijamo

$$\gamma\left(\frac{1}{e^t-1}\right) \leqslant \omega_{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{e^t-1}\right)\right)^{1-n} \leqslant \omega_{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{1-n}.$$

Ovo nam daje $\zeta_3(t) \leqslant \omega_{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{1-n}$.

4. Inkluzije za lopte

Svako tvrdjenje o modulima neprekidnosti ima svoj analogon u terminima inkluzija lopti. Naime, ako za neke metrike d_1 i d_2 važi

$$d_1(x,y) < t \Rightarrow d_2(x,y) < \zeta(t),$$

tada važi

$$D_{d_1}(x,t) \subset D_{d_2}(x,\zeta(t)).$$

Nameće se pitanje naći, za dato $x \in G$ i $t > 0$, minimalno $\zeta(x,t)$ takvo da je

$$D_{d_1}(x,t) \subset D_{d_2}(x,\zeta(x,t)).$$

Ovo je problem opisane lopte za fiksirano $x \in G$.

Kvazihiperbolička lopta $D_k(x,r)$ je skup $\{z \in G \,|\, k_G(x,z) < r\}$, kada $x \in G$ i $r > 0$. Iz [**Vu2**, (3.9)], imamo sledeće inkluzije

$$B^n(x, r\,d(x)) \subset D_k(x,M) \subset B^n(x, R\,d(x)), \tag{4.1}$$

gde je $r = 1 - e^{-M}$ i $R = e^M - 1$.

Dokazano je u [**AVV**, 15.13] da ako je G pravi poddomen od R^n i ako $x, y \in G$ sa $x \neq y$, tada je

$$\lambda_G(x,y) \leqslant \inf_{z\in\partial G}(\lambda_{\mathbb{R}^n\setminus\{z\}}(x,y)) \leqslant \sqrt{2}\tau_n\left(\frac{|x-y|}{\min\{d(x),d(y)\}}\right) \tag{4.2}$$

4.3. Teorema. [**H**, Theorem 6.11] *Neka je G pravi poddomen od $\mathbb{R}^n$ i neka je $t > 0$. Označimo sa $c_1 = \frac{1}{(1+\tau_n^{-1}(t/\sqrt{2}))}$, $c_2 = \sqrt{\frac{\tau_n^{-1}(2t)}{(1+\tau_n^{-1}(2t))}}$ i $c_3 = \tau_n^{-1}(t/\sqrt{2})$, tada inkluzije*

$$D_{\lambda^{-1}}(a,t) \subset \{z \in G \,|\, d(z) > c_1 d(a)\}, \tag{4.4}$$

$$D_{\lambda^{-1}}(a,t) \supset B^n(a, c_2 d(a)) \supset D_k(a, \log(c_2+1)) \tag{4.5}$$

i

$$D_{\lambda^{-1}}(a,t) \subset B^n(a, c_3 d(a)) \cap G \tag{4.6}$$

važe za sve $a \in G$. Ako je dodatno, $t > \sqrt{2}\tau_n(1)$, imamo da je

$$B^n(a, c_3 d(a)) \subset D_k(a, \log(1/(1-c_3))). \tag{4.7}$$

Da bi smo dokazali inkluziju (4.6), primenićemo (4.2) kako bi dobili

$$\lambda_G(a,z) \leqslant \sqrt{2}\tau_n\left(\frac{|z-a|}{d(a)}\right).$$

Uz pretpostavku $t \leqslant \lambda_G(a,z)$, odavde sledi $|z-a| < \tau_n^{-1}(t/\sqrt{2})d(a)$.

Kako je $D_{\lambda^{-1}} \subset G$, inkluzija (4.6) važi.

Inkluzija (4.7) sledi direktno iz (4.1), ako primetimo da uslov $t > \sqrt{2}\tau_n(1)$ povlači da je $c_3 < 1$ i da je lopta $B^n(a, c_3 d(a))$ podskup od G.

4.8. Teorema. [**H**, Theorem 6.18] *Neka je G pravi poddomen od $\mathbb{R}^n$ i pretpostavimo da G ima povezanu, nedegenerisanu granicu. Neka je $t > 0$ i označimo $d_1 = \tau_n^{-1}(t)/(1+\tau_n^{-1}(t))$, $d_2 = 1/\gamma_n^{-1}(t)$ i $d_3 = 1/\tau_n^{-1}(t)$. Tada, za sve $a \in G$, važe sledeće inkluzije*

$$D_\mu(a,t) \subset \{z \in G \,|\, d(z) > d_1 d(a)\}, \tag{4.9}$$

$$D_\mu(a,t) \supset B^n(a, d_2 d(a)) \supset D_k(a, \log(d_2+1)) \tag{4.10}$$

$$D_\mu(a,t) \subset B^n(a, d_3 d(a)) \cap G. \tag{4.11}$$

Dodatno, ako je $t < \tau_n(1)$, onda

$$B^n(a, d_3 d(a)) \subset D_k(a, \log(1/(1-d_3))). \tag{4.12}$$

Brojevi d_1, d_2 i d_3 su optimalni za sledeće inkluzije.

Dokazaćemo (4.10) jer će nam biti potreban kasnije.

Pretpostavimo da $a, z \in G$ i da je $|z-a| \leqslant d_2\, d(a)$. Tada, zbog $\gamma_n^{-1}(t) > 1$, imamo $d(z,a) < d(a)$. Posmatrajmo sledeće familije krivih.

$$\Gamma_J = \Delta(J_{az}, \partial G; G),$$

$$\Gamma = \Delta(J_{az}, S^{n-1}(a, d(a)); \overline{B^n(a, d(a))}),$$

i

$$\tilde{\Gamma} = \Delta([z', +\infty), S^{n-1}; \mathbb{R}^n \setminus B^n), \tag{4.13}$$

gde je $z' = \frac{d(a)}{|z-a|}\, e_1$. Kako je J_{az} je kontinuum koji spaj a i z, imamo

$$\mu_G(a,z) \leqslant M(\Gamma_J) \tag{4.14}$$

i kako je $\Gamma < \Gamma_J$, dobijamo $M(\Gamma_J) < M(\Gamma)$.

Koristeći Mebijusove transformacije, dobijamo

$$M(\Gamma) = M(\tilde{\Gamma}) = \gamma_n\left(\frac{d(a)}{|z-a|}\right), \tag{4.15}$$

i kako je $|z-a| < d_2\, d(a)$ i γ_n strago opadajući homeomorfizam, sledi da je

$$\gamma_n\left(\frac{d(a)}{|z-a|}\right) < \gamma_n\left(\frac{1}{d_2}\right) = t \tag{4.16}$$

Kombinujući ove nejednakosti dobijamo

$$\mu_G(a,z) < t,$$

što dokazuje levu stranu od (4.10). Desna inkluzija sledi iz (4.1).

Teorema 4.3 ((4.6) i (4.7)) daje

4.17. TEOREMA.

$$\lambda^{-1}(a,b) < \frac{1}{t} \Rightarrow k(a,b) < \log \frac{1}{1-\tau_2^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}, \quad \text{za } t > \sqrt{2}\tau_2(1)$$

$$\lambda^{-1}(a,b) < s \Rightarrow k(a,b) < \log \frac{1}{1-\tau_2^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}s}\right)},$$

$$\zeta_{14}(s) = \log \frac{1}{1-\tau_2^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}s}\right)}, \quad s < \frac{1}{\sqrt{2}\tau_2(1)}.$$

Takodje dobijamo $\lambda^{-1}(x,a) < \frac{1}{t} \Rightarrow |x-a| < c_3 d(a) < \operatorname{diam}(G)\, c_3(1/t)$ *i odavde* $\zeta_{62}(t) = \tau_n^{-1}(1/(\sqrt{2}t))\operatorname{diam}(G)$.

Iz teoreme 4.8 izvodimo

4.18. TEOREMA. *U domenu* G *sa povezanom nedegenerisanom granicom važi:*

$$D_\mu(a,t) \supset D_k(a, \log(d_2+1)), \quad d_2 = \frac{1}{\gamma^{-1}(t)}, \tag{4.19}$$

i $\mu(a,b) < t$ *ako* $k(a,b) < \log(d_2+1)$.

Takodje je $\zeta_7(s) = \gamma(1/(e^s-1))$. *Ako je*

$$s = \log\left(\frac{1}{\gamma^{-1}(t)} + 1\right), \qquad \textit{imamo } e^s - 1 = \frac{1}{\gamma^{-1}(t)}, \quad t = \gamma\left(\frac{1}{e^s-1}\right).$$

4.20. TEOREMA. [**Se**, Theorem 3.8] *Ako je* $G \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren,* $x \in G$ *i* $t > 0$ *tada je*

$$D_j(x,t) \subset B^n(x,R)$$

gde je $R = (e^t - 1)\, d(x)$. *Ova formula za* R *je najbolja moguća izražena samo u funkciji od* t *i* $d(x)$.

Stoga, koristeći $d(x) \leqslant \operatorname{diam}(G)$, dobijamo $\zeta_{22(t)} = (e^t-1)\operatorname{diam}(G)$.

4.21. TEOREMA. [**Se**, Theorem 3.10] *Ako je* $G \subset \mathbb{R}^n$ *otvoren skup,* $x \in G$ *i* $t > 0$ *onda je* $D_\delta(x,t) \subset B^n(x,R)$ *gde je* $R = (e^t-1)\, d(x)$.

Kao i ranije, dobijamo da je $\zeta_{14}(t) = (e^t-1)\operatorname{diam}(G)$.

Iz leme 3.7 imamo da je

$$\zeta_7(t) = h(3t).$$

Sada na osnovu [**H**, Lemma 2.30] možemo izabrati (slučaj $n=2$)

$$h(t) = \frac{2\pi\alpha}{\log\frac{1}{2t}}, \quad \text{for } t \leqslant \frac{1}{4}.$$

Odavde imamo da je

$$\zeta_7(t) = \frac{2\pi\alpha}{\log\left(\frac{1}{6t}\right)}, \text{for} \quad t \leqslant \frac{1}{12} \quad \text{(važniji slučaj)}$$

$$\alpha = \max\{1, \gamma\} \quad \gamma = \frac{9}{8}\log 2 > 1 \quad \alpha = \gamma$$

U drugom slučaju, gde je

$$h(t) = 36\beta\pi t^2, \quad \text{for } t > \frac{1}{4}.$$

imamo da je $h(3t) = 324\beta\pi t^2$, $t > \frac{1}{12}$.

$$\beta = \max\left(1, \frac{1}{\gamma}\right) = 1$$

$$\zeta_7(s) = 324\pi t^2, \quad \text{for } t > \frac{1}{12}.$$

Sada imamo poboljšanu 4×4 tabelu:

	j_G	k_G	μ_G	λ_G^{-1}
j_G	1 $\zeta_1(t) = t$	2 $\zeta_2(t) = ct$ G – uniformno $\zeta_2(t) = \varphi(t)$ G – φ domen	3 $\zeta_3(t) = \omega_{n-1}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{1-n}$ localno	4
k_G	5 $\zeta_5(t) = t$	6 $\zeta_6(t) = t$	7 $\zeta_7(t) = \gamma\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$ ∂G povezan, nedegenerisan	8 $\zeta_8 = \zeta_4$
μ_G	9 $\zeta_9(t) = c_n \cdot t$ ∂G povezan	10 $\zeta_{10}(t) = c \cdot t$ G uniforman ∂G povezan	11 $\zeta_{11}(t) = t$	12 $\zeta_{12} = \zeta_9 \circ \zeta_4$ G – c-QED domen ∂G povezan
λ_G^{-1}	13 $\zeta_{13}(t) = \log\left(1 + \tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,t}\right)\right)$	14 $\zeta_{14} = \log\frac{1}{1-\tau_2^{-1}(1/(4s))}$ $s < \frac{1}{4\tau_2(1)}$	15 $\zeta_{15} = \zeta_{13} \circ \zeta_3$ $y \in B_x$	16 $\zeta_{16}(t) = t$

4.22. Primer. *Za* $G \subset \mathbb{R}^n$ *izaberimo* $z_0 \in \partial G$, *niz* $x_k \in G$ *takav da je* $x_k \to z_0$. *i niz* $y_k \in G$ *takav da je*

$$|y_k - z_0| < \frac{|x_k - z_0|}{k}. \tag{4.23}$$

Jasno je da je $|x_k - y_k| \to 0$ *i*

$$|x_k - y_k| > |x_k - z_0| - |y_k - z_0| > |x_k - z_0| \left(1 - \frac{1}{k}\right). \tag{4.24}$$

Ali

$$j_G(x_k, y_k) \geqslant \log\left(1 + \frac{|x_k - y_k|}{|y_k - z_0|}\right) \geqslant \log\left(1 + \frac{1 - \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}}\right) = \log(k) \to +\infty.$$

Dakle, $id : (G, |\cdot|) \longrightarrow (G, j_G)$ nije uniformno neprekidno. Iz istog razloga, odgovarajuća polja u tabeli su prazna.

Takodje, za fiksirano malo $d > 0$ možemo naći $x, y \in G$ takvo da $|x - y| = d$ i $d(x, \partial G)$ bude po želji malo.

Tako dobijamo $k_G(x, y)$ proizvoljno veliko, pa ne postoji procena za $k_G(x, y)$ u terminima od $|x - y|$.

Sa druge strane, funkcija ζ_{30} je dobijena iz:

$$k_G(x, y) \geqslant \int_0^{|x-y|} \frac{ds}{\operatorname{diam}(G)} = \frac{|x - y|}{\operatorname{diam}(G)}.$$

Odavde dobijamo da je $\zeta_{30}(t) = t \operatorname{diam}(G)$ moduo neprekidnosti od $id : (G, k) \longrightarrow (G, |\cdot|)$ (gde je G ograničen).

Sve ostale vrednosti u poljima 8×8 tabele dobijene su kao kompozicije gornjih modula neprekidnosti.

Konačno, imamo 8×8 tabelu:

	α_G	δ_G	j_G	k_G	q	$\lvert\cdot\rvert$	μ_G	λ_G^{-1}
α_G	$\zeta_1(t)=t$	$\zeta_2(t)=2t$ G convex	$\zeta_3(t)=t$ G convex	$\zeta_4(t)=ct$ G convex, uniform	$\zeta_5(t)=(e^t-1)\operatorname{diam}(G)$ G convex	$\zeta_6(t)=(e^t-1)\operatorname{diam}(G)$ G convex	$\zeta_7(t)=\gamma(\frac{1}{e^t-1})$ G convex, locally	$\zeta_8(t)=\frac{1}{c\tau e^{2j}-1}$ G c-QED, convex
δ_G	$\zeta_9(t)=t$	$\zeta_{10}(t)=t$	$\zeta_{11}(t)=t$	$\zeta_{12}(t)=ct$ G uniform	$\zeta_{13}(t)=(e^t-1)\operatorname{diam}(G)$	$\zeta_{14}(t)=(e^t-1)\operatorname{diam}(G)$	$\zeta_{15}(t)=\gamma(\frac{1}{e^t-1})$ G locally	$\zeta_{16}(t)=\frac{1}{c\tau e^{2j}-1}$ G c-QED
j_G	$\zeta_{17}(t)=2t$	$\zeta_{18}(t)=2t$	$\zeta_{19}(t)=t$	$\zeta_{20}(t)=ct$ G uniform	$\zeta_{21}(t)=(e^t-1)\operatorname{diam}(G)$	$\zeta_{22}(t)=(e^t-1)\operatorname{diam}(G)$	$\zeta_{23}(t)=\gamma(\frac{1}{e^t-1})$ G locally	$\zeta_{24}(t)=\frac{1}{c\tau e^{2j}-1}$ G c-QED
k_G	$\zeta_{25}(t)=2t$	$\zeta_{26}(t)=2t$	$\zeta_{27}(t)=t$	$\zeta_{28}(t)=t$	$\zeta_{29}(t)=t\operatorname{diam}(G)$	$\zeta_{30}(t)=t\operatorname{diam}(G)$	$\zeta_{31}(t)=\gamma\left(\frac{1}{e^t-1}\right)$ ∂G connected	$\zeta_{32}(t)=\frac{1}{c\tau e^{2j}-1}$
q	Does not exist	Does not exist	Does not exist	Does not exist	$\zeta_{38}(t)=ct$ G bounded		Does not exist	Does not exist
$\lvert\cdot\rvert$	Does not exist	Does not exist	Does not exist	Does not exist	$\zeta_{45}(t)=t$	$\zeta_{46}(t)=t$	Does not exist	Does not exist
μ_G	$\zeta_{49}(t)=\log\left(1+\frac{1}{\tau_n^{-1}(t)}\right)$ ∂G connected	$\zeta_{50}(t)=\log\left(1+\frac{1}{\tau_n^{-1}(t)}\right)$ ∂G connected	$\zeta_{51}(t)=\frac{t}{c_n}$ ∂G connected	$\zeta_{52}(t)=ct$ G uniform ∂G connected	$\zeta_{53}(t)=\frac{\operatorname{diam}(G)}{\tau_n^{-1}(t)}$ ∂G connected	$\zeta_{54}(t)=\frac{\operatorname{diam}(G)}{\tau_n^{-1}(t)}$ ∂G connected	$\zeta_{55}(t)=t$	$\zeta_{56}=\frac{1}{c\tau(e^{bt}-1)}$ G c-QED domain ∂G connected
λ_G^{-1}	$\zeta_{57}(t)=\log\left(1+2\tau_n^{-1}(1/t)\right)$	$\zeta_{58}(t)=\log\left(1+2\tau_n^{-1}(1/t)\right)$	$\zeta_{59}(t)=\log\left(1+\tau_n^{-1}(1/(\sqrt{2}t))\right)$	$\zeta_{60}(t)=c\log\left(1+\tau_n^{-1}(1/(\sqrt{2}t))\right)$ G uniform	$\zeta_{61}=\tau_n^{-1}(1/(4t))\operatorname{diam}(G))$	$\zeta_{62}=\tau_n^{-1}(1/(4t))\operatorname{diam}(G))$	$\zeta_{63}=\gamma\left(\frac{1}{\tau^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}t}\right)}\right)$ $y\in B_x$	$\zeta_{64}(t)=t$

5. Uklanjanje tačke

Neka je $\mathcal{M}$ familija metrika na domenu $G \subset \mathbb{R}^n$ i $B_m(x,T) = \{z \in G : m(x,z) < T\}$, $m \in \mathcal{M}$. Neka je

$$r_T = \sup\{r > 0 : S^{n-1}(x,r) \subset B_m(x,T)\},$$
$$R_T = \inf\{r > 0 : S^{n-1}(x,r) \cap B_m(x,T) = \emptyset\}.$$

Pitanje je moželi se naći donja granica za r_T i gornja granica za R_T.

Evidentno je iz definicije λ_G da dodavanje novih tačaka, čak i izolovanih, na granicu od G utiče na vrednost $\lambda_G(x,y)$ za fiksne tačke $x, y \in G$. Proučićemo ovaj fenomen u slučaju kada je $G = B^2 \setminus \{0\}$.

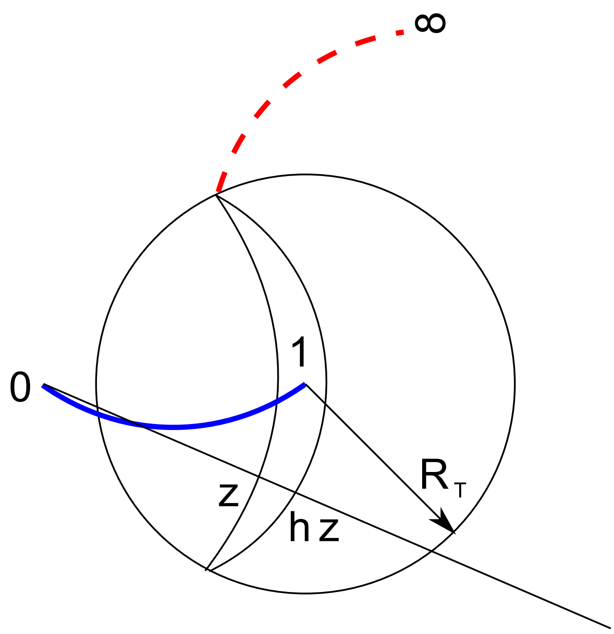
Nadjimo gornju granicu za poluprečnik opisane lopte, gde je $m = \lambda_G^{-1}$.

Koristićemo notaciju

$$B_\lambda(x,t) = \{z \in \mathbb{C} : \lambda_G(z,1) \geqslant T^{-1}\}.$$

Neka je $h(z) = \frac{z}{|z|^2}$ inverzija u odnosu na jediničnu loptu. Pošto je $h : B_\lambda \longrightarrow B_\lambda$ (h je izometrija za λ metriku), imamo

$$\lambda_G(1,z) = \lambda_G(1,h(z)).$$



SLIKA 1. Poluprečnik opisane lopte

Iz [**SolV**, (3.3), (3.22)] imamo

$$p(z) = \frac{2\pi}{\log M(2z-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \tag{5.1}$$

$$\log M(2e^{i\theta}-1) = \frac{2\pi\,\mathcal{K}(\sin\frac{\theta}{4})\,\mathcal{K}(\cos\frac{\theta}{4})}{\mathcal{K}^2(\sin\frac{\theta}{4}) + \mathcal{K}^2(\cos\frac{\theta}{4})}. \tag{5.2}$$

Ako stavimo $z = e^{i\theta}$ imamo

$$p(e^{i\theta}) = \frac{\mathcal{K}^2(\sin\frac{\theta}{4}) + \mathcal{K}^2(\cos\frac{\theta}{4})}{\mathcal{K}(\sin\frac{\theta}{4})\,\mathcal{K}(\cos\frac{\theta}{4})}.$$

Kada je $|z| = 1$, onda je $\lambda_G(1, z) = p(z)$.

Izaberimo θ tako da $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{R_T}{2}$. Odavde je $\theta = 2\arcsin\frac{R_T}{2}$. Sada, ako stavimo

$$y = \frac{\mathcal{K}(\sin\frac{\theta}{4})}{\mathcal{K}(\cos\frac{\theta}{4})} = \frac{2}{\pi}\mu(\cos\frac{\theta}{4}) \tag{5.3}$$

imamo

$$p(e^{i\theta}) = y + \frac{1}{y} = \frac{1}{T}.$$

Interesuju nas rešenja za koja je $y < 1$, pošto želimo da bude $\theta < \pi$. Odavde je $y = \frac{2T}{1+\sqrt{1-4T^2}}$. Pošto iz (5.3)

$$\theta = 4\arccos(\mu^{-1}(\frac{\pi y}{2}))$$

imamo

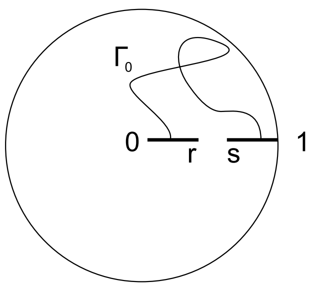
$$\theta = 4\arccos(\mu^{-1}(\frac{\pi}{2}\frac{2T}{1+\sqrt{1-4T^2}})) = 4\arccos(\mu^{-1}(\frac{\pi T}{1+\sqrt{1-4T^2}})). \tag{5.4}$$

Dakle, poluprečnik opisane lopte je

$$R_T = 2\sin\frac{\theta}{2}, \quad T \in (0, \frac{1}{2}), \quad \theta \text{ iz } (5.4).$$

Izučimo sada sledeću situaciju: $G \subseteq \mathbb{R}^n$ je domen, $a \in G$, $G' = G \setminus \{a\}$. Da li je $\lambda_G(x, y) = \lambda_{G'}(x, y)$ tačno pod nekim dodatnim pretpostavkama, kao što je pretpostavka da je x, y blizu ∂G?

Razmotrimo specijalan slučaj kada je $G = B^n$ i $a = 0$.

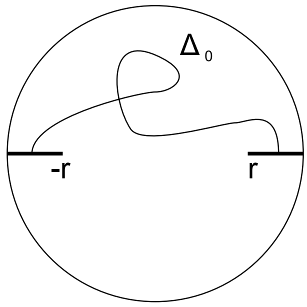


SLIKA 2

U [**LeVu**, Lemma 2.8] dokazano je da ako je $\Gamma_0 = \Delta([0,x],[\tilde{y}, x/|x|]; B)$, gde je $\tilde{y} = \frac{|y|}{|x|}x$ i ako stavimo $|x| = r$, $|\tilde{y}| = s$, onda važi

$$M(\Gamma_0) = \tau\left(\frac{(s-r)(1-rs)}{r(1-s)^2}\right). \tag{5.5}$$

Dalje, iz [**Vu1**, (2.6)] imamo da ako je $\Delta_0 = \Delta([-\frac{x}{|x|}, -x],[x, \frac{x}{|x|}]; B)$ i ako je $|x| = r$ kao ranije, onda važi



Slika 3

$$M(\Delta_0) = \frac{1}{2}\tau\left(\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\right).$$

Takodje, korišćenjem Mebijusove transformacije $T_r : B^2 \longrightarrow B^2$, $T(r) = 0$ možemo preslikati familiju krivih Δ_1 u familiju krivih Δ_1', gde je $\Delta_1 = \Delta([-\frac{x}{|x|}, -\tilde{y}],[0,x]; B)$ i $\Delta_1' = \Delta([-\frac{x}{|x|}, -\tilde{y}'],[-x,0]; B)$.

Znamo da je

$$\rho(-s,0) = \rho(-r,-t),$$

gde je r i s kao ranije i $-t = \tau_r(-s)$. Dalje, to je ekvivalentno sa

$$\log\frac{1+s}{1-s} = \log\frac{|1+t|}{|1-t|}\frac{1-r}{1+r}. \tag{5.6}$$

Rešavanjem (5.6) po t dobijamo $t = \frac{s+r}{1+sr}$.

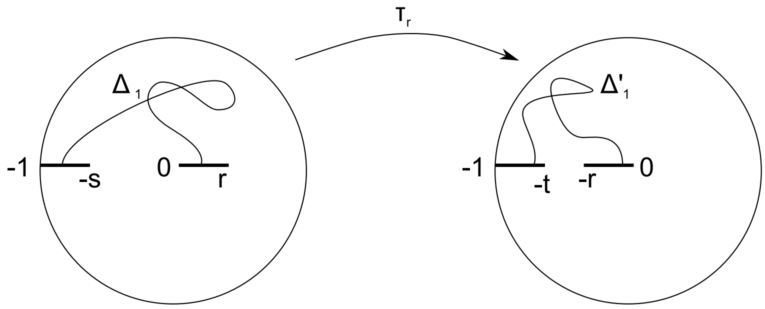
Sada imamo

$$M(\Delta_1) = M(\Delta_1') = \tau\left(\frac{(t-r)(1-tr)}{r(1-t)^2}\right) = \tau\left(\frac{s(1+r)^2}{r(1-s)^2}\right).$$

Prva jednakost važi jer je T_r konformo preslikavanje, druga sledi iz (5.5) a treća iz izraza za t.

Sada, ako u poslednjem izrazu stavimo da je $r = s$, dobijamo

$$M(\Delta_1) = \tau\left(\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\right).$$



Slika 4

Pitanje je kada je $M(\Delta_1) \geqslant M(\Delta_0)$. Drugim rečima, kada je

$$\tau\left(\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\right) \geqslant \frac{1}{2}\tau\left(\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\right)? \tag{5.7}$$

Primenjujući formulu [**AVV**, 5,19 (5)]:

$$\frac{1}{2}\tau(t) \geqslant \tau((\sqrt{t}+\sqrt{t+1})^4 - 1).$$

Za $t = 4r^2/(1-r^2)^2$ imamo

$$\frac{1}{2}\tau\left(\frac{4r^2}{(1-r^2)^2}\right) = \tau\left(\frac{8r(r^2+1)}{(1-r)^4}\right).$$

Tada je (5.7) ekvivalentno sa

$$\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 \leqslant \frac{8r(r^2+1)}{(1-r)^4},$$

pošto je τ opadajuće. Poslednja nejednakost je ekvivalentna sa

$$r^4 - 8r^3 - 2r^2 - 8r + 1 \leqslant 0.$$

Ova nejednakost važi za $r \geqslant 0.12$. Ovo daje odgovor na pitanje: Za koje vrednosti $|x|$ imamo

$$\lambda_A(x,-x) = M(\Delta(E,-E;B^2)),$$

gde je $A = B^2 \setminus \{0\}$, $E = [x, \frac{x}{|x|}]$?

Rezultat povezan sa ovim može se naći u Heikalinoj disertaciji [**H**, Theorem 7.3]. Zapravo, razmatra se opštija situacija: Ako su x i y udaljene tačke onda je $\lambda_{B^n\setminus\{0\}}(x,y) = \lambda_{B^n}(x,y)$. Štaviše, u specijalnom slučaju dijametralno suprotnih tačaka imamo bolju konstantu (stavljajući $\delta = 2|x|$ u teoremi 7.3 i $r_1 = |x|$ dobija se jednačina $r_1^3 + r_1^2 - 1 = 0$, a njen realan koren je veći od 0.75 i samim tim veći od 0.12).

6. Uniformna neprekidnost na uniji dva domena

6.1. DEFINICIJA. *Neka je* $\{m_D : D \subseteq \overline{\mathbb{R}^n}\}$ *familija metrika. Reći ćemo za ovu familiju da je monotona ako* $D_1 \subseteq D_2$ *povlači* $m_{D_1}(x,y) \geq m_{D_2}(x,y)$ *za sve* $x, y \in D_1$.

6.2. LEMA. [**Vu5**, 2.27] *Neka su* G_1, G_2 *domeni u* $\mathbb{R}^n$ *sa* $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, $G_1 \neq \mathbb{R}^n \neq G_2$ *i pretpostavimo da postoji* $c \in (0,1)$ *takvo da je*

$$d(x, \partial G_1) + d(x, \partial G_2) \geq c\, d(x, \partial(G_1 \cup G_2)), \tag{6.3}$$

za sve $x \in G = G_1 \cup G_2$.

Pretpostavimo da je $f : G \longrightarrow fG$ *neprekidno,* $fG \subseteq \mathbb{R}^n$*; da je* $\{m_D : D \subseteq \mathbb{R}^n\}$ *monotona familija metrika i da je*

$$m_{fG_j}(f(x), f(y)) \leq \omega_j(k_{G_j}(x,y))$$

za $x, y \in G_j$ *i* $j = 1, 2$. *Tada postoji* $\omega : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *takvo da je*

$$m_{fG}(f(x), f(y)) \leq \omega(k_G(x,y)) \tag{6.4}$$

i da $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$ *povlači* $\lim_{t\to 0+} \omega_j(t) = 0$, $j = 1, 2$.

Razmotrimo sada sličan rezultat sa j metrikom umesto k metrike. Ne možemo više da koristimo geodezijske linije, kao što je moglo u dokazu prethodne leme.

6.5. LEMA. *Neka su* G_1, G_2 *domeni u* $\mathbb{R}^n$ *sa* $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$, $G_1 \neq \mathbb{R}^n \neq G_2$ *i pretpostavimo da postoji* $c \in (0,1)$ *tako da je*

$$d(x, \partial G_1) + d(x, \partial G_2) \geq c\, d(x, \partial(G_1 \cup G_2)),$$

za sve $x \in G = G_1 \cup G_2$.

Pretpostavimo da je $f : G \longrightarrow fG$ *neprekidno,* $fG \subseteq \mathbb{R}^n$*; da je* $\{m_D : D \subseteq \mathbb{R}^n\}$ *monotona familija metrika i da je*

$$m_{fG_j}(f(x), f(y)) \leq \omega_j(j_{G_j}(x,y))$$

za $x, y \in G_j$ *i* $j = 1, 2$. *Tada postoji* $\omega : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *takvo da je*

$$m_{fG}(f(x), f(y)) \leq \omega(j_G(x,y)) \tag{6.6}$$

i pritom $\lim_{t\to 0+} \omega(t) = 0$ *povlači* $\lim_{t\to 0+} \omega_j(t) = 0$, $j = 1, 2$.

Dokaz: Razmotrićemo dva slučaja. Neka je $d(x) = d(x, \partial G)$.

Slučaj A: $j_G(x,y) \leq \log(1 + c/4)$.

U ovom slučaju $|x - y| \leq \frac{c}{4} \min\{d(x), d(y)\}$. Možemo pretpostaviti $d(x) \leq d(y)$. Na osnovu pretpostavke (6.3) leme postoji $i \in \{1, 2\}$ tako da je $d(x, \partial G_i) \geq \frac{c}{2} d(x)$, tj., $B^n(x, c\, d(x)/2) \subseteq G_i$. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $i = 1$. Tada je

$$y \in B^n(x, c \min\{d(x), d(y)\}/4) \subseteq B^n(x, \frac{1}{2} d(x, \partial G_1)).$$

Važi

$$j_{G_1}(x,y) = \log\left(1 + \frac{|x-y|}{\min\{d_1(x), d_1(y)\}}\right)$$

gde je $d_1(z) = d(z, \partial G_1)$. Na osnovu prethodnog računa, $|x-y| \le \frac{1}{2}\, d_1(x)$ odakle je $d_1(y) \ge \frac{1}{2}\, d_1(x)$. Poslednja nejednakost sada daje

$$\begin{aligned} j_{G_1}(x,y) &\le \log\left(1 + \frac{2|x-y|}{d_1(x)}\right) \\ &\le \log\left(1 + \frac{4|x-y|}{c\, d(x)}\right) \\ &< \frac{4}{c}\, j_G(x,y). \end{aligned}$$

Zaključak:
u slučaju A imamo

$$m_{fG}(f(x), f(y)) \le m_{fG_1}(f(x), f(y)) \le \omega_1(j_{G_1}(x,y)) \le \omega_1\left(\frac{4}{c}\, j_G(x,y)\right) \tag{6.7}$$

gde je takodje korišćena monotonost familije $\{m_D\}$.

Slučaj B: Na osnovu uslova, uzimajući $d = \frac{2}{c} > 2$ dobijamo nov uslov $d(x, \partial(G_1 \cup G_2)) \le d\, \max\{d(x,\partial G_1), d(x, \partial G_1)\}$ za sve $x \in G_1 \cap G_2$.

Sada pretpostavimo da je $x \in G_1$. Tada imamo

$$\log\left(1 + \frac{|x-y|}{\min\{d(x), d(y)\}}\right) \geqslant \log\left(1 + \frac{1}{d}\frac{|x-y|}{\min\{d_1(x), d_1(y)\}}\right) \geqslant \frac{1}{d}\log\left(1 + \frac{|x-y|}{\min\{d_1(x), d_1(y)\}}\right)$$

Odavde imamo

$$d\, j_G(x,y) \geqslant j_{G_1}(x,y), \quad x, y \in G_1.$$

Sada imamo lanac nejednakosti

$$m_{fG}(f(x), f(y)) \le m_{fG_1}(f(x), f(y)) \le \omega_1(j_{G_1}(x,y)) \le \omega_1\left(\frac{2}{c}\, j_G(x,y)\right).$$

Konačno, željena funkcija ω je definisana na sledeći način $\omega(t) = \max\{\omega_1(4t/c), \omega_2(4t/c)\}$, $t \in (0, \log(1+c/4)]$.

$$\omega(t) = \max\{\omega_1(2t/c), \omega_2(2t/c)\}, \quad t > \log(1+c/4).$$

6.8. Primer. Prikazaćemo primer, za koji je zaslužna /v Z. Ferand. Posmatramo dva domena $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$, $G_1, G_2 \neq \emptyset$ i analitičku funkciju $f : H \longrightarrow \mathbb{C}$, $H = G_1 \cup G_2$ tako da

(1) f je ω-normalna u G_1 i G_2.
(2) f nije normalna H.

Stavimo $G_1 = \mathbb{C} \setminus \{p + iq \,:\, p, q \in \mathbb{Z}\}$ i $G_2 = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{p + 1/2 + iq \,:\, p, q \in \mathbb{Z}\})$.

Napomenimo da je $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ i $G_1 \cup G_2 = H = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Definišimo $f(\xi) = e^{4\pi\xi}$. Ovo je cela funkcija.

Lako se vidi da je $f(G_1) = f(G_2) = f(H) = H$. Zapravo, $f(\Omega_k) = H$, gde je $\Omega_k = \{x + iy \,:\, k < y < k+1\}$. Kvazihiperboličko rastojanje u H ima osobinu

$$k_H(w_1, w_2) = \inf_{e^{z_1} = w_1, e^{z_2} = w_2} |z_1 - z_2|. \tag{6.9}$$

Takodje, za $i = 1, 2$ važi $d(\xi, \partial G_i) \leqslant 1/2$, tako da gustina metrike $\frac{1}{d(\xi,\partial G_i)}$ prevazilazi $\sqrt{2}$ i samim tim (integracijom)

$$k_{G_i}(\xi_1, \xi_2) \geqslant \sqrt{2}|\xi_1 - \xi_2|. \tag{6.10}$$

Sada, (6.9) nam govori da je $f : G_i \longrightarrow H$ Lipšicovo u odnosu na euklidsku metriku na G_i i kvazihiperboličku metriku u H, i na osnovu (6.10) f je takodje Lipšicova u odnosu na kvazihiperboličku metriku na H i G_i.

Ali, f nije uniformno neprekidno kao preslikavanje $(H, k_H) \longrightarrow (H, k_H)$. Zapravo, imamo

$$\lim_{n\to\infty} k_H(n, n+1) = \log\frac{n+1}{n} = 0,$$

dok je

$$\lim_{n\to\infty} k_H(f(n), f(n+1)) = \log\frac{4\pi n}{e^{4\pi(n+1)}} = 4\pi.$$

Napomenimo da naši domeni ne zadovoljavaju uslov (6.9) iz [**Vu5**, Lemma 2.27]. Zapravo, za velike $|x|$ imamo

$$d(x, \partial(G_1 \cup G_2)) = |x|$$

i

$$d(x, \partial G_1) + d(x, \partial G_2) \leqslant 2\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$

tako da ne postoji $c \in (0, 1)$ tako da važi (6.9).

7. Kvazikonformna preslikavanja sa identičkim vrednostima na granici

Za domen $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ neka je

$$Id(\partial G) = \{f : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n} \text{ homeomorfizam } : f(x) = x, \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus G\}.$$

Ovde $\overline{\mathbb{R}^n}$ označava Mebijusov prostor $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Uvek ćemo pretpostavljati da je $card\{\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G\} \geq 3$. Ako je $K \geqslant 1$, onda klasu K-kvazikonformnih preslikavanja u $Id(\partial G)$ označavamo sa $Id_K(\partial G)$. Kroz ovaj tekst usvajamo notaciju i terminologiju iz Vaisaline knjige [**V2**]. Posebno, K-kvazikonformna preslikavanja su definisana u terminima maksimalne dilatacije kao u [**V2**, str. 42] ako se drugačije ne kaže.

Predmet ovog istraživanja je proučiti sledeći dobro poznat problem:

7.1. Problem. (1) *Dati su $a, b \in G$ i $f \in Id(\partial G)$ sa $f(a) = b$. Naći donju granicu za $K(f)$.*
(2) *Dati su $a, b \in G$. Konstruisati $f \in Id(\partial G)$ sa $f(a) = b$ i dati gornju granicu za $K(f)$.*

O. Tajhmiler je proučavao ovaj problem u slučaju kada je G ravan domen sa $card(\overline{\mathbb{R}^2} \setminus G) = 3$ i dokazao je sledeću teoremu sa oštrom granicom za $K(f)$.

7.2. Teorema. *Neka je $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 1\}$, $a, b \in G$. Tada postoji $f \in Id_K(\partial G)$ takvo da je $f(a) = b$ akko*

$$\log(K(f)) \geqslant s_G(a, b),$$

gde je $s_G(a, b)$ hiperbolička metrika od G.

7.3. TEOREMA. *Ako je $f \in Id_K(\partial B^n)$, onda za sve $x \in B^n$*

$$\rho_{B^n}(f(x), x) \leqslant \log \frac{1-a}{a}, \quad a = \varphi_{1/K,n}(1/\sqrt{2})^2,$$

gde je $\varphi_{K,n}$ kao u (7.15).

7.4. TEOREMA. *Ako je $f \in Id_K(\partial B^n)$, onda za sve $x \in B^n, n \geq 2$ i $K \in [1, 17]$ važi*

$$|f(x) - x| \leq \frac{9}{2}(K-1)\,. \tag{7.5}$$

Za $n = 2$ imamo

$$|f(x) - x| \leqslant \frac{b}{2}(K-1), \quad b \leqslant 4.38. \tag{7.6}$$

Teoriju K-kvaziregularnih preslikavanja u $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, sa maksimalnom dilatacijom K bliskom 1 detaljno je proučavao J. G. Rešetnjak [**R**] pod nazivom "Teorija stabilnosti". Na osnovu Liuvilove teoreme očekujemo da kada je $n \geq 3$ fiksirano i $K \to 1$, K-kvaziregularna preslikavanja se "stabilizuju", postaju sve sličnija Mebijusovim preslikavanjima, i u tome leži dubina glavnih rezultata iz [**R**] kao što je [**R**, str. 286]. Mi ne znamo da li teorema 7.3 sledi iz Rešetnjakove teorije na jednostavan način. V. I. Semenov [**S**] je takodje značajno doprineo ovoj teoriji. Za slučaj u ravni P. P. Belinski je došao do oštrog rezultata.u [**Bel**].

Konačno, izgleda da je otvoren problem kada važi nova vrsta stabilnog ponašanja: Ako je $K > 1$ fiksirano, da li preslikavanja $Id_K(\partial B^n)$ teže identitetu kada $n \to \infty$? Naši rezultati ne odgovaraju na ova pitanja. Ova vrsta ponašanja je anticipirana u [**AVV**, Open problem 9, p. 478].

7.7. LEMA. *Za $x, y \in B^n$ neka je $t = \sqrt{(1-|x|^2)(1-|y|^2)}$. Tada za $x, y \in B^2$ važi*

$$\tanh^2 \frac{\rho_{B^n}(x,y)}{2} = \frac{|x-y|^2}{|x-y|^2 + t^2}\,, \tag{7.8}$$

$$|x-y| \leqslant 2 \tanh \frac{\rho_{B^n}(x,y)}{4} = \frac{2|x-y|}{\sqrt{|x-y|^2+t^2}+t}\,, \tag{7.9}$$

gde jednakost važi za $x = -y$.

Dalje, razmotrimo opadajući homeomorfizam $\mu : (0,1) \longrightarrow (0, \infty)$ definisan sa

$$\mu(r) = \frac{\pi}{2}\frac{\mathcal{K}(r')}{\mathcal{K}(r)}, \quad \mathcal{K}(r) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-r^2x^2)}}\,, \tag{7.10}$$

gde je $\mathcal{K}(r)$ Ležandrov potpuni eliptički integral prve vrste i $r' = \sqrt{1-r^2}$, za sve $r \in (0,1)$. Herš-Flugerova funkcija distorzije je rastući homeomorfizam $\varphi_K : (0,1) \longrightarrow (0,1)$ definisan sa

$$\varphi_K(r) = \mu^{-1}(\mu(r)/K) \tag{7.11}$$

za sve $r \in (0,1)$, $K > 0$. Zbog neprekidnosti stavljamo $\varphi_K(0) = 0$, $\varphi_K(1) = 1$. Iz (7.10) vidimo da $\mu(r)\mu(r') = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ i odavde možemo da izvedemo niz osobina od φ_K. Recimo, na osnovu [**AVV**, Thm 10.5, p. 204] važi

$$\varphi_K(r)^2 + \varphi_{1/K}(r')^2 = 1, \quad r' = \sqrt{1-r^2}, \tag{7.12}$$

za sve $K > 0$, $r \in (0,1)$.

7.13. Grečov i Tajhmilerov prsten Prstenasti domeni Greča i Tajhmilera $R_G(s), s > 1$ i $R_T(t), t > 0$ su dvostruko povezani domeni sa komplementarnim komponentama $(\overline{B}^n, [se_1, \infty))$ i $([-e_1, 0], [te_1, \infty))$, tim redom. Njihovi kapaciteti cap$R_G(s)$ i cap$R_T(t)$ će se u nastavku često koristiti. Grečov kapacitet $\gamma_n(s) =$ cap$R_G(s)$ je opadajući homeomorfizam $\gamma_n : (1,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ vidi [**Vu2**, str. 66], [**AVV**, Section 8]. Tajhmilerov kapacitet $\tau_n(t) =$ cap$R_T(t)$, je opadajući homeomorfizam $\tau_n : (0,\infty) \to (0,\infty)$ povezan sa γ_n identitetom

$$\tau_n(t) = 2^{1-n}\gamma_n(\sqrt{1+t}),\ t > 0. \tag{7.14}$$

Dati su $E, F, G \subset \mathbb{R}^n$. Koristićemo oznaku $\Delta(E,F;G)$ za familiju svih krivih koje povezuju skupove E i F u G i $M(\Delta(E,F;G))$ za njihove module, vidi [**V2**, Chapter I]. Tada je $\tau_n(t) = M(\Delta(E,F;\mathbb{R}^n))$ gde su E i F komplementarne komponente Tajhmilerovog prstena i slična relacija važi za $\gamma_n(s)$.

Koristićemo standardnu oznaku

$$\varphi_{K,n}(r) = \frac{1}{\gamma_n^{-1}(K\gamma_n(1/r))}. \tag{7.15}$$

Tada je $\varphi_{K,n} : (0,1) \longrightarrow (0,1)$ rastući homeomorfizam, vidi [**Vu2**, (7.44)]. Pošto je $\gamma_2(1/r) = 2\pi/\mu(r)$ na osnovu [**Vu2**, (5.56)] sledi da je $\varphi_{K,2}(r)$ isto kao $\varphi_K(r)$ u (7.11).

7.16. Ključna konstanta. Prethodno uvedene specijalne funkcije imaju ključnu ulogu u onome što sledi. U cilju lakog pozivanja, dajemo neke dobro poznate identitete izmedju njih, koji se mogu naći u [**AVV**]. Najpre, funkcija

$$\eta_{K,n}(t) = \tau_n^{-1}(\tau_n(t)/K) = \frac{1-\varphi_{1/K,n}(1/\sqrt{1+t})^2}{\varphi_{1/K,n}(1/\sqrt{1+t})^2},\ K > 0\,, \tag{7.17}$$

definiše rastući homeomorfizam $\eta_{K,n} : (0,\infty) \to (0,\infty)$ (iz [**AVV**, p.193]). Konstanta $(1-a)/a, a = \varphi_{1/K,n}(1/\sqrt{2})^2$, u (7.5) se za $K > 1$ može izraziti kao

$$(1-a)/a = \eta_{K,n}(1) = \tau_n^{-1}(\tau_n(1)/K)\,. \tag{7.18}$$

Dalje, na osnovu (7.12) važi

$$\eta_{K,2}(t) = \frac{s^2}{1-s^2}, \quad s = \varphi_{K,2}(\sqrt{t/(1+t)}) \tag{7.19}$$

kao i

$$\eta_{K,2}(1) \in (e^{\pi(K-1)}, e^{b(K-1)}) \tag{7.20}$$

gde je $b = (4/\pi)\,\mathcal{K}(1/\sqrt{2}) = 4.376879...$ Napomenimo da je konstanta $\lambda(K)$ u [**AVV**, 10.33] isto što i $\eta_{K,2}(1)$.

Za dokaz leme 7.29 koristimo donju granicu za $\varphi_{1/K,n}(r)$. Konstanta λ_n se zove konstanta Grečovog prstena, vidi [**AVV**].

7.21. Lema. *([**Vu2**, 7.47, 7.50]) Za $n \ge 2, K \ge 1$, i $0 \le r \le 1$*

$$\varphi_{1/K,n}(r) \ge \lambda_n^{1-\beta} r^{\beta}, \; \beta = K^{1/(n-1)}, \tag{7.22}$$

$$\lambda_n^{1-\beta} \ge 2^{1-\beta} K^{-\beta} \ge 2^{1-K} K^{-K}. \tag{7.23}$$

7.24. Lema. (1) *Za sve $m, n \geqslant 1$ postoji $M > 1$ tako da*

$$\log(2^{mx-m+1} x^{nx} - 1) \leqslant (2m \log 2 + 2n)(x-1) \tag{7.25}$$

važi za $x \in [1, M]$ sa jednakošću samo za $x = 1$. štaviše, uz $t = (m \log 2 - n)/(2n)$, M može biti izabran kao

$$M = \sqrt{\frac{(m-1)\log 2 + \log\left(1 + \frac{(n+m\log 2)^2}{n}\right)}{n} + t^2} - t.$$

(2) *Neka je $p(x) = \log(2^{mx-m+1} x^{nx} - 1)$, $q(x) = (2m\log 2 + 2n)(x-1)$ i neka važi prethodna simbolika. Neka je $a_0 = M$ i $a_{n+1} = p^{-1}(q(a_n))$ za $n \geqslant 1$. Tada je niz a_n rastući i ograničen. Ako je $a = \lim_{n\to} a_n$ onda nejednakost (7.25) važi za $x \in [1, a]$ sa jednakošću akko $x \in \{1, a\}$. Za $m = 3$ i $n = 2$ je $a > 17$.*

Proof. Neka je

$$u(x) = (mx - m + 1)\log 2 + nx \log x, \quad v(x) = \log(e^{u(x)} - 1) = \log(2^{mx-m+1} x^{nx} - 1).$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} v''(x) &= (\log(e^{u(x)} - 1))'' = \left(\frac{u'(x)\, e^{u(x)}}{e^{u(x)} - 1}\right)' \\ &= \frac{(u''(x)e^{u(x)} + (u'(x))^2 e^{u(x)})(e^{u(x)} - 1) - (u'(x)\, e^{u(x)})^2}{(e^{u(x)} - 1)^2} \\ &= \frac{e^{u(x)}}{(e^{u(x)} - 1)^2} \cdot ((u''(x) + (u'(x))^2)(e^{u(x)} - 1) - (u'(x))^2 e^{u(x)}) \\ &= \frac{e^{u(x)}}{(e^{u(x)} - 1)^2} \cdot (u''(x)(e^{u(x)} - 1) - (u'(x))^2). \end{aligned}$$

Odatle je

$$v''(x) \leqslant 0 \;\Leftrightarrow\; u''(x)(e^{u(x)} - 1) \leqslant (u'(x))^2.$$

Pošto je

$$e^{u(x)} = 2^{mx-m+1} x^{nx}, \quad u'(x) = n + m\log 2 + n \log x, \quad u''(x) = \frac{n}{x},$$

važi

$$v''(x) \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{x}(2^{mx-m+1}x^{nx} - 1) \leqslant (n + m\log 2 + n\log x)^2,$$

odakle je $v''(x) \leqslant 0$ za $x \geqslant 1$ ekvivalentno sa

$$2^{mx-m+1}x^{nx} - 1 \leqslant \frac{x}{n}(n + m\log 2 + n\log x)^2.$$

Neka je $f(x) = 2^{mx-m+1}x^{nx} - 1$ i $g(x) = \frac{x}{n}(n + m\log 2 + n\log x)^2$. Obe funkcije f i g su rastuće na $[1, +\infty)$ i $f(1) < g(1)$ jer je

$$f(1) = 1 \leqslant n = \frac{1}{n} \cdot n^2 < \frac{1}{n}(n + m\log 2)^2 = g(1).$$

Na osnovu neprekidnosti funkcije f možemo zaključiti da postoji $M > 1$ takvo da je $f(M) \leqslant g(1)$. Za takvo M je

$$f(x) \leqslant f(M) \leqslant g(1) \leqslant g(x), \quad x \in [1, M].$$

Odatle sledi da je v konkavno na $[1, M]$ i samim tim

$$v(x) \leqslant v(1) + v'(1)(x-1), \quad x \in [1, M]$$

to jest

$$\log(2^{mx-m+1}x^{nx} - 1) \leqslant (2m\log 2 + 2n)(x-1), \quad x \in [1, M].$$

Nejednakost $f(x) \leqslant g(1)$ je ekvivlentna sa

$$(mx - m + 1)\log 2 + nx\log x \leqslant \log\left(1 + \frac{(n + m\log 2)^2}{n}\right). \tag{7.26}$$

Pošto je

$$(mx - m + 1)\log 2 + nx\log x \leqslant (mx - m + 1)\log 2 + nx(x-1) \tag{7.27}$$

nejednakost (7.26) je posledica nejednakosti

$$(mx - m + 1)\log 2 + nx(x-1) \leqslant \log\left(1 + \frac{(n + m\log 2)^2}{n}\right). \tag{7.28}$$

U (7.27) jednakost važi samo za $x = 1$. Zbog

$$1 + \frac{(n + m\log 2)^2}{n} > 1 + \frac{n^2}{n} = 1 + n \geqslant 2$$

nejednakost (7.28) je stroga za $x = 1$. Iz istog razloga, veći koren kvadratne jednačine

$$(mx - m + 1)\log 2 + nx(x-1) = \log\left(1 + \frac{(n + m\log 2)^2}{n}\right)$$

je veći od 1. Ako ga označimo sa M nejednakost (7.26) važi za $x \in [1, M]$ sa jednakošću samo za $x = 1$. Prvi deo leme je dokazan.

Dokažimo sada drugi deo leme. Obe funkcije $p(x)$ i $q(x)$ su rastuće i neprekidne. Samim tim $r(x) = p^{-1}(x)$ je rastuće i neprekidno. Zbog

$$p(a_1) = q(a_0) > p(a_0)$$

korišćenjem monotonosti $p(x)$ možemo zaključiti da je $a_1 > a_0$. Sada, indukcijom i na osnovu monotonosti funkcije r možemo zaključiti da je niz a_n rastući. Sada za $x \in [a_n, a_{n+1})$ imamo

$$p(x) < p(a_{n+1}) = q(a_n) \leqslant q(x).$$

Odatle $p(x) < q(x)$ važi za $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty}[a_n, a_{n+1}) = [a_0, a)$ i korišćenjem već dokazane nejednakosti, $p(x) < q(x)$ važi za $1 < x < a$. Za $x \geqslant 1$ važi $mx - m + 1 > 1$ i $x^{nx} \geqslant 1$ odakle je

$$p(x) = \log(2^{mx-m+1}x^{nx} - 1) > \log(2\,x^{nx} - 1) \geqslant nx \log x.$$

Pošto je $p(x) > nx \log x \geqslant (n \log x)(x-1)$ nejednakost $p(c) > q(c)$ važi za c takvo da je $n \log c \geqslant 2m \log 2 + 2n$. Lako se vidi da je to tačno za $c = 2^{\frac{2m}{n}} e^2$. Odatle sledi da je a konačan (na primer, $a < 2^{\frac{2m}{n}} e^2$) i a_n ograničen. Puštanjem da $n \to \infty$ u $p(a_{n+1}) = q(a_n)$ i korišćenjem neprekidnosti obeju funkcija možemo zaključiti da je $p(a) = q(a)$. $\square$

7.29. Lema. *Ako je* $a = \varphi_{1/K,n}(1/\sqrt{2})^2$ *kao u teoremi 7.3, onda za* $M > 1$ *i* $\beta \in [1, M]$

$$\log\left(\frac{1-a}{a}\right) \leq \log(\lambda_n^{2(\beta-1)} 2^{\beta} - 1) \leq V(n)(\beta - 1) \tag{7.30}$$

sa $V(n) = (2\log(2\lambda_n^2))(2\lambda_n^2)^{M-1}$ *i za* $K \in [1, 17]$,

$$\log\left(\frac{1-a}{a}\right) \leqslant (K-1)(4 + 6\log 2) < 9(K-1), \tag{7.31}$$

sa jednakošću samo za $K = 1$. *Za* $n = 2$

$$\log\left(\frac{1-a}{a}\right) = \log\left(\frac{\varphi_{K,2}(1/\sqrt{2})^2}{\varphi_{1/K,2}(1/\sqrt{2})^2}\right) \leqslant b(K-1) \tag{7.32}$$

gde je $b = (4/\pi)\,\mathcal{K}(1/\sqrt{2})^2 \leq 4.38$.

Proof. Za $\beta \in [1, M]$ na osnovu (7.22) imamo

$$\log\left(\frac{1-a}{a}\right) \leq \log(\lambda_n^{2(\beta-1)} 2^{\beta} - 1).$$

Dalje, imamo

$$\frac{\log(\lambda_n^{2(\beta-1)} 2^{\beta} - 1)}{\beta - 1} \leqslant 2\,\frac{(2\lambda_n^2)^{\beta-1} - 1}{\beta - 1} \leqslant (2\log(2\lambda_n^2))(2\lambda_n^2)^{M-1}.$$

Druga nejednakost sledi iz nejednakosti $\log(t) \leqslant t - 1$, a treća iz Lagranževe teoreme i monotonosti funkcije $(2\log(2\lambda_n^2))(2\lambda_n^2)^{x-1}$. Ovo dokazuje (7.30).

Iz (7.23) sledi da konstanta a zadovoljava nejednakost

$$a \geq 2^{2(1-K)} K^{-2K} (1/\sqrt{2})^{2K}$$

kao i

$$1/a \leq 2^{3K-2} K^{2K}, \quad K > 1.$$

Na osnovu leme 7.24 imamo

$$\log(2^{3K-2}K^{2K}-1) \leqslant (4+6\log 2)(K-1)$$

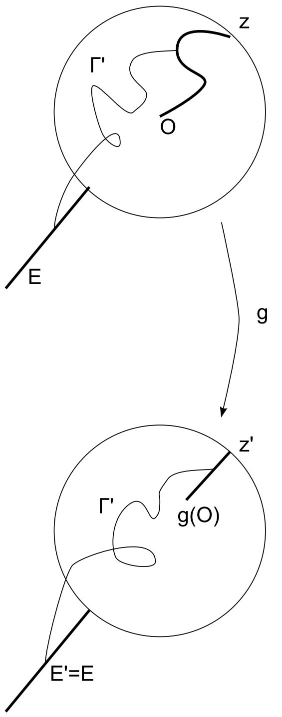
za $K \in [1,17]$ sa jednakošću samo za $K=1$. Sada iz

$$\frac{1-a}{a} < 2^{3K-2}K^{2K}-1, \quad K>1$$

možemo zaključiti da je

$$\log\left(\frac{1-a}{a}\right) \leqslant (4+6\log 2)(K-1) < 9(K-1)\,.$$

U slučaju $n=2$ možemo primeniti identitet (7.19) na nejednakost u (7.20). $\square$



Slika 5

7.33. Dokaz teoreme 7.3. Fiksirajmo $x \in B^n$ i neka T_x označava Mebijusovu transformaciju od $\overline{\mathbb{R}^n}$ uz $T_x(B^n)=B^n$ i $T_x(x)=0$. Definišimo $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stavljanjem $g(z)=T_x \circ f \circ T_x^{-1}(z)$ za $z \in B^n$ i $g(z)=z$ za $z \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$. Tada $g \in Id_K(\partial B^n)$ uz $g(0)=T_x(f(x))$. Na osnovu invarijantnosti ρ_{B^n} u odnosu na grupu $\mathcal{GM}(B^n)$ Mebijusovih atumorfizama od B^n vidimo da za $x \in B^n$ važi

$$\rho_{B^n}(f(x),x)=\rho_{B^n}(T_x(f(x)),T_x(x))=\rho_{B^n}(g(0),0). \tag{7.34}$$

Izaberimo $z \in \partial B^n$ tako da $g(0) \in [0,z]=\{tz : 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Neka je $E'=\{-sz : s \geqslant 1\}$, $\Gamma'=\Delta([g(0),z],E';\mathbb{R}^n)$ i $\Gamma=\Delta(g^{-1}[g(0),z],g^{-1}E';\mathbb{R}^n)$.

Sferna simetrizacija sa centrom u 0 na osnovu [**AVV**, Thm 8.44] povlači da je

$$M(\Gamma) \geqslant \tau_n(1) \quad (= 2^{1-n}\gamma_n(\sqrt{2}))$$

pošto je $g(x) = x$ za $x \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$. Dalje, na osnovu načina na koji je Γ' izabrano vidimo da je

$$M(\Gamma') = \tau_n\left(\frac{1+|g(0)|}{1-|g(0)|}\right).$$

Na osnovu K-kvazikonformnosti imamo da je $M(\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma')$, što povlači

$$\exp(\rho_{B^n}(0, g(0))) = \frac{1+|g(0)|}{1-|g(0)|} \leqslant \tau_n^{-1}(\tau_n(1)/K) = \frac{1-a}{a}. \tag{7.35}$$

Poslednja nejednakost sledi iz (7.18). Konačno, (7.34) i (7.35) kompletiraju dokaz. $\square$

7.36. Dokaz teoreme 7.4. Imamo

$$\begin{aligned} |f(x) - x| &\leqslant 2\tanh\left(\frac{\rho_{B^n}(f(x), x)}{4}\right) \leqslant 2\tanh\left(\frac{\log\left(\frac{1-a}{a}\right)}{4}\right) \\ &\leqslant 2\tanh\left(\frac{(K-1)(4+6\log 2)}{4}\right) \\ &\leqslant (K-1)(2+3\log 2) \leqslant \frac{9}{2}(K-1). \end{aligned}$$

Prva nejednakost sledi iz (7.9), druga iz 7.3, treća iz leme 7.29 i poslednja iz nejednakosti $\tanh(t) \leqslant t$ za $t \geqslant 0$.

Za $n = 2$ imamo ista prva dva koraka kao u planarnom slučaju leme 7.29 da izvedemo nejednakost

$$|f(x) - x| \leqslant \frac{b}{2}(K-1). \qquad \square$$

Donja granica, koja odgovara gornjoj granici u (7.5) je data u sledećoj lemi.

7.37. Lema. *Za $f \in Id(\partial G)$ neka je*

$$\delta(f) \equiv \sup\{|f(z) - z| : z \in G\}.$$

Tada za $f \in Id_K(\partial B^n), K > 1, \alpha = K^{1/(1-n)}$

$$\delta(f) \geq (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)} > \frac{1}{e}(1-\alpha). \tag{7.38}$$

Proof. Radijalno istezanje $f : B^n \to B^n, n \geq 2$, definisano sa $f(z) = |z|^{\alpha-1}z, z \in B^n, (0 < \alpha < 1)$ je K-kvazikonformno sa $\alpha = K^{1/(1-n)}$ [**V2**, str. 49] i $f \in Id_K(\partial B^n)$. Sada imamo

$$|f(z) - z| = ||z|^{\alpha-1}z - z| = |r^\alpha - r|, \quad |z| = r.$$

Dalje, vidimo da

$$\delta(f) = \sup_{0<r<1} (r^\alpha - r),$$

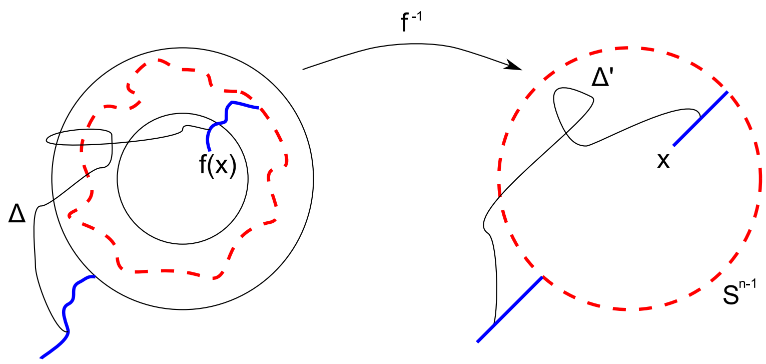
gde se supremum dostiže za $r = r_\alpha = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, pa je

$$\delta(f) = (1-\alpha)\alpha^{\alpha/(1-\alpha)}\,.$$

Gruba, ali jednostavna ocena je

$$\delta(f) \geq (1/e)^\alpha - (1/e) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e^{\alpha-1}} - 1\right) = \frac{1}{e}\left(e^{1-\alpha} - 1\right) \geqslant \frac{1}{e}(1-\alpha)\,.$$

$\square$



SLIKA 6

7.39. TEOREMA. *Neka je* $f : \overline{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ *K-kvazikonformni homeomorfizam sa* $f(\infty) = \infty$ *i* $B^n(m) \subset f(B^n) \subset B^n(M)$ *gde je* $0 < m \leq 1 \leq M$. *Tada je*

$$\eta_{1/K,n}\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right) \leqslant \frac{M + |f(x)|}{m - |f(x)|}$$

kao i

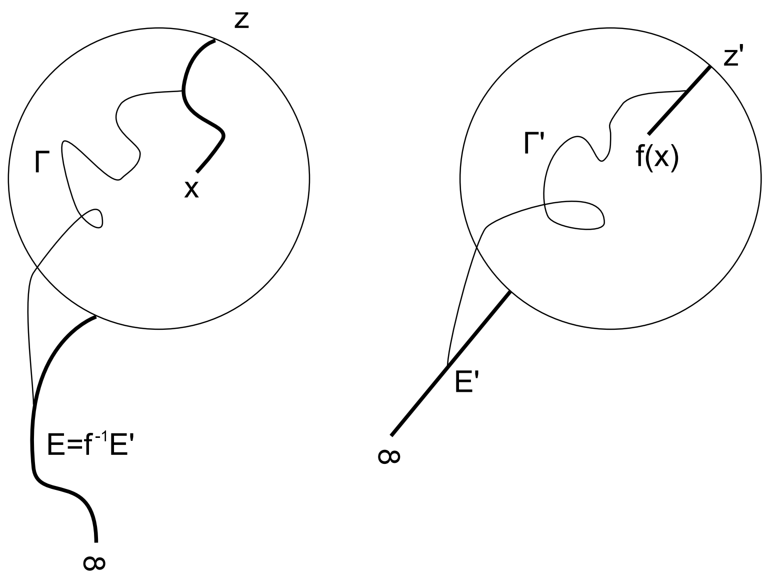
$$\frac{m + |f(x)|}{M - |f(x)|} \leqslant \eta_{K,n}\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right)$$

za sve $x \in B^n$ *gde je* $\eta_{K,n}(t) = \tau_n^{-1}(\tau_n(t)/K)$.

Posebno, ako je $m = 1 = M$, *onda imamo*

$$\eta_{1/K,n}\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right) \leqslant \frac{1+|f(x)|}{1-|f(x)|} \leqslant \eta_{K,n}\left(\frac{1+|x|}{1-|x|}\right).$$

PROOF. Dokaz je sličan dokazu teoreme 7.3. Fiksirajmo $x \in B^n$ i izaberimo $z' \in \partial f(B^n)$ tako da bude $f(x) \in [0, z']$ i $[f(x), z') \subset f(B^n)$ i fiksirajmo $z" \in \partial f(B^n)$ tako da su $z', 0, z"$ na istoj pravoj, $0 \in [z', z"]$, i $\{-sz" \,:\, s \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}^n \setminus f(B^n)$. Neka



Slika 7

je $\Gamma' = \Delta([f(x), z'], E'; \mathbb{R}^n)$, $E' = \{-sz" \ : \ s \geqslant 1\}$ i $\Gamma = \Delta(f^{-1}[f(x), z'], f^{-1}E'; \mathbb{R}^n)$. Tada je

$$M(\Gamma') \leq \tau_n \left(\frac{m + |f(x)|}{M - |f(x)|} \right)$$

dok primena sferne simetrizacije sa centrom u koordinatnom početku daje

$$M(\Gamma) \geqslant \tau_n \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right),$$

jer $f^{-1}E'$ povezuje ∂B^n i ∞. Tada nejednakost $M(\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma')$ povlači

$$\tau_n \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right) \leq K \tau_n \left(\frac{m + |f(x)|}{M - |f(x)|} \right),$$

$$\tau_n^{-1}(\frac{1}{K} \tau_n \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right)) \geq \frac{m + |f(x)|}{M - |f(x)|}$$

$$\frac{m + |f(x)|}{M - |f(x)|} \leqslant \eta_{K,n} \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right). \tag{7.40}$$

Donja granica povlači da ako primenimo sličan argument na f^{-1} i donju granicu

$$M(\Gamma') \geq \tau_n \left(\frac{M + |f(x)|}{m - |f(x)|} \right) .$$

$\square$

7.41. Napomena. Stavljajući $x = 0, m = 1 = M$ u (7.40) na osnovu (7.18) dobijamo za K-kvazikonformni homeomorfizam $f : \overline{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ sa $f(\infty) = \infty$ i $f(B^n) = B^n$ važi

$$|f(0)| \leq 1 - 2a\,, a = \varphi_{1/K,n}(1/\sqrt{2})^2\,.$$

Dalje, ako koristimo donju granicu (7.23) iz leme 7.21 dobijamo da je

$$|f(0)| \leq 1 - 2^{1-\beta}4^{1-K}K^{-2K}\,.$$

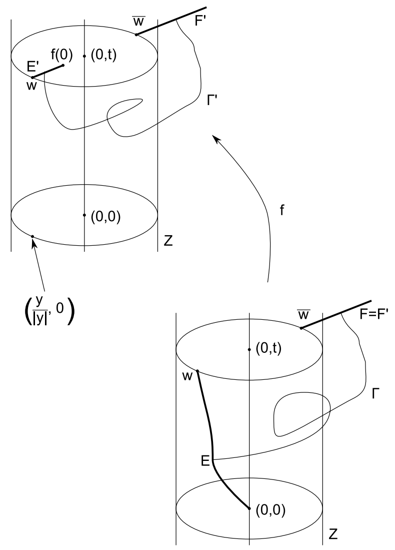
U specijalnom slučaju kada je $n = 2$ imamo

$$|f(0)| \leq 1 - 2^{3(1-K)}K^{-2K} \leq (2 + 3\log 2)(K - 1)\,.$$

Napomenimo da poslednja nejednakost važi bez pretpostavke da $f \in Id_K(\partial B^n)$, već uz korišćenje samo pretpostavke teoreme 7.39.

7.1. Preslikavanja cilindra.

7.42. Teorema. *Neka je* $Z = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n : |x| < 1, t \in \mathbb{R}\}$, $f \in Id_K(\partial Z)$. *Tada* $k_Z(0, f(0)) \leqslant c(K)$ *gde je* $c(K) \to 0$ *kada je* $K \to 1$.



Slika 8

Proof. Neka je $f(0) = (y,t)$, $E' = [w, f(0)]$, $F' = \{\overline{w} + s(y,0) : s \leqslant 0\}$ gde je $w = (y/|y|, t)$, $\overline{w} = (-y/|y|, t)$. Tada su E' i F' komplementarne komponente Tajhmilerovog prstena i zbog toga pišemo $\Gamma' = \Delta(E', F'; \mathbb{R}^n)$ odakle imamo

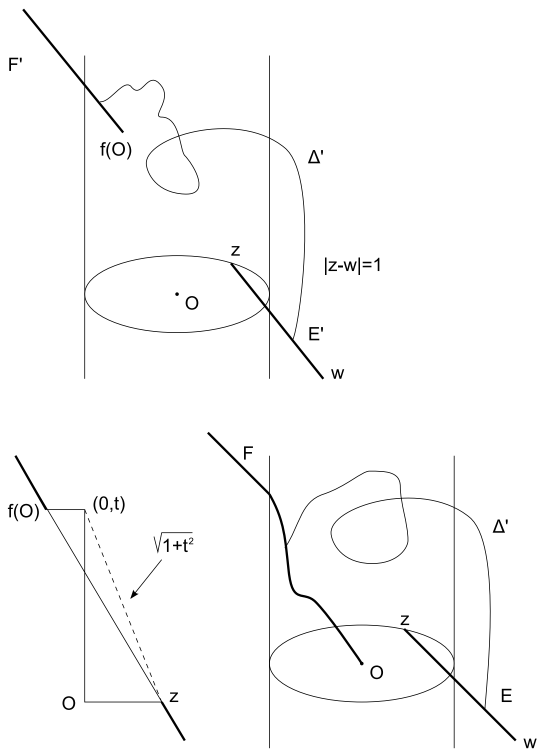
$$M(\Gamma') \leqslant \tau_n\left(\frac{1+|y|}{1-|y|}\right).$$

Moduo neprekidnosti familije $\Gamma = \Delta(E, F; \mathbb{R}^n)$, $E = f^{-1}E'$, $F = f^{-1}F'$ može biti ocenjen korišćenjem sferne simetrizacije sa centrom u 0. Napomenimo da je $E = E'$ jer $E' \subset \mathbb{R}^n \setminus Z$ i $f \in Id_K(\partial Z)$. Na osnovu [**Vu2**, 7.34] imamo

$$M(\Gamma) \geqslant \tau_n(1).$$

Na osnovu K-kvazikonformnosti $M(\Gamma) \leqslant K\, M(\Gamma')$ implicira

$$\exp(\rho_{B^{n-1}}(0, y)) = \frac{1 + |y|}{1 - |y|} \leqslant \tau_n^{-1}\left(\frac{\tau_n(1)}{K}\right).$$



Slika 9

Sada ćemo oceniti t. Fiksirajmo najpre z u $\{w \in \partial Z : w_n = 0\}$ tako da $|f(0) - z|$ bude maksimalno. Onda izaberimo tačku w na pravoj koja prolazi kroz $f(0)$ i z tako da bude $|z - w| = 1$ i $[z, w] \subset \mathbb{R}^n \setminus Z$. Neka je $E' = [z, w]$ i $F' = \{f(0) + t(f(0) - z) : t \geqslant 0\}$. Tada su E' i F' komplementarne komponente Tajhmilerovog prstena1 i uz $\Delta' = \Delta(E', F'; \mathbb{R}^n)$ imamo

$$M(\Delta') = \tau_n(|f(0) - z|).$$

Primećujući da je $E' = f^{-1}E'$ zbog $f \in Id_K(\partial Z)$ i primenjujući sfernu simetrizaciju sa centrom u z vidimo da ako je $E = f^{-1}E'$, $F = f^{-1}F'$, onda je

$$M(\Delta) \geqslant \tau_n(1), \quad \Delta = \Delta(E, F; \mathbb{R}^n).$$

Na osnovu K-kvazikonformnosti imamo

$$1+t^2 \leqslant |f(0)-z|^2 \leqslant \tau_n^{-1}\left(\frac{\tau_n(1)}{K}\right)^2.$$

Nejednakost trougla za k_Z daje

$$\begin{aligned} k_Z(0,f(0)) &\leqslant k_Z(0,(0,t)) + k_Z((0,t),(y,t)) \\ &= t + k_{B^{n-1}}(0,y) \leqslant |t| + 2\,\rho_{B^{n-1}}(0,y) \\ &\leqslant \sqrt{\tau_n^{-1}\left(\tfrac{\tau_n(1)}{K}\right)^2 - 1} + 2\log\left(\tau_n^{-1}\left(\tfrac{\tau_n(1)}{K}\right)\right) \\ &\leqslant \sqrt{e^{18(K-1)}-1} + 18(K-1). \end{aligned}$$

Poslednja nejednakost sledi iz (7.18) i leme 7.29. □

8. Distorzija kvazikonformnih preslikavanja normalizovanih sa dve tačke

Neka je $\eta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ rastući homeomorfizam i $D, D' \subset \mathbb{R}^n$. Homeomorfizam $f\colon D \to D'$ je *η-kvazisimetričan* ako je

$$\frac{|f(a)-f(c)|}{|f(b)-f(c)|} \leq \eta\left(\frac{|a-c|}{|b-c|}\right) \tag{8.1}$$

za sve $a,b,c \in D$ i $c \neq b$. Iz [**V2**] K-kvazikonformno preslikavanje celog $\mathbb{R}^n$ je $\eta_{K,n}$- kvazisimetrično sa kontrolnom funkcijom $\eta_{K,n}$. Definišimo optimalnu kontrolnu funkciju sa

$$\eta^*_{K,n}(t) = \sup\{|f(x)|\colon |x| \leq t, f \in QC_K(\mathbb{R}^n), f(y)=y \text{ za } y \in \{0,e_1,\infty\}\}.$$

Vorinen [**Vu2**, Theorem 1.8] je dokazao gornju granicu za $\eta^*_{K,n}(t)$, koja je kasnije popravljena od strane Prausa [**P**, Theorem 2.7] za $K < 4/3$ u sledećem obliku

$$\eta^*_{K,n}(t) \leq \begin{cases} \eta^*_{K,n}(1)\varphi_{K,n}(t), & 0<t<1, \\ 1+600\left((K-1)\log\dfrac{1}{K-1}\right), & t=1, \\ \eta^*_{K,n}(1)\dfrac{1}{\varphi_{1/K,n}(1/t)}, & t>1, \end{cases} \tag{8.2}$$

gde je

$$\eta^*_{K,n}(1) \leq \exp((4\sqrt{2}-\log(K-1))(K^2-1)). \tag{8.3}$$

Takodje ćemo uvesti jednostavniju procenu za $\eta^*_{K,n}(1)$ iz [**AVV**, Theorem 14.8]

$$\eta^*_{K,n}(1) \leq \exp(4K(K+1)\sqrt{K-1}). \tag{8.4}$$

Grublja gornja granica za $\eta^*_{K,n}(t)$ može [**Vu1**, Theorem 7.47] biti napisana u obliku

$$\eta^*_{K,n}(t) \leq \begin{cases} \eta^*_{K,n}(1)\lambda_n^{1-\alpha}t^\alpha, & 0<t\leq 1, \\ \eta^*_{K,n}(1)\lambda_n^{1-\beta}t^\beta, & t>1, \end{cases} \tag{8.5}$$

gde je $\alpha = K^{1/(1-n)}$ i $\beta = 1/\alpha$. Nadalje, možemo [**Vu1**, Lemma 7.50] proceniti

$$\lambda_n^{1-\alpha} \le 2^{1-1/K}K \quad \text{i} \quad \lambda_n^{1-\beta} \le 2^{1-K}K^{-K}. \tag{8.6}$$

1. Stav. *Neka je $K \in (1,2]$, $f \in QC_K(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = x$ za $x \in \{0, e_1\}$, $\alpha = K^{1/(1-n)}$ i $\beta = 1/\alpha$. Tada je*

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_3}|x|^\beta &\le |f(x)| \le c_3|x|^\alpha, \quad \text{ako } 0 < |x| \le 1, \\ \frac{1}{c_3}|x|^\alpha &\le |f(x)| \le c_3|x|^\beta, \quad \text{ako } |x| > 1 \end{aligned}$$

za $c_3 = \exp(60\sqrt{K-1})$.

Proof. Kako je f kvazikonformno ono je i $\eta^*_{K,n}$-kvazisimetrično i birajući $a = x$, $b = 0$ i $c = e_1$ u (8.1) imamo $|f(x)| \le \eta^*_{K,n}(|x|)$. Slično, izbor $(a,b,c) = (e_1, 0, x)$ u (8.1) daje $|f(x)| \ge 1/\eta^*_{K,n}(1/|x|)$. Otuda važi

$$\frac{1}{\eta^*_{K,n}(1/|x|)} \le |f(x)| \le \eta^*_{K,n}(|x|) \tag{8.7}$$

za sve $x \in \overline{\mathbb{R}}^n \setminus \{0\}$. Odavde zbog (8.5) imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_2}|x|^\beta \le |f(x)| &\le c_1|x|^\alpha, && \text{ako } 0 < |x| < 1, \\ \frac{1}{\eta^*_{K,n}(1)} \le |f(x)| &\le \eta^*_{K,n}(1), && \text{ako } |x| = 1, \\ \frac{1}{c_1}|x|^\alpha \le |f(x)| &\le c_2|x|^\beta, && \text{ako } |x| > 1, \end{aligned}$$

za $c_1 = \eta^*_{K,n}(1)\lambda_n^{1-\alpha}$ i $c_2 = \eta^*_{K,n}(1)\lambda_n^{1-\beta}$. Možemo proceniti $\max\{c_1, c_2\} \le c_3 = \exp(60\sqrt{K-1})$ za $K \in (1,2]$. □

Posmatraćemo K- kvazikonformno preslikavanje $\overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ takvo da je $f(y) = y$ za $y \in \{0, e_1, \infty\}$ i naš cilj je da nadjemo gornju granicu za $|f(x) - x|$ ili slične veličine u zavisnosti od K i n, kada je $|x| \le 2$ i $K > 1$ dovoljno malo.

Fiksirajmo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, e_1\}$ i pretpostavimo da je $|x| - \varepsilon \le |f(x)| \le |x| + \varepsilon$ i $|x - e_1| - \varepsilon \le |f(x) - e_1| \le |x - e_1| + \varepsilon$ za $\varepsilon \in (0, \min\{|x|, |x - e_1|\})$. Sada je

$$|f(x) - x| \le \frac{\operatorname{diam}(A)}{2}, \tag{8.8}$$

gde je

$$A = A(0, |x| + \varepsilon, |x| - \varepsilon) \cap A(e_1, |x - e_1| + \varepsilon, |x - e_1| - \varepsilon) \cap \{z \in R^3 \colon z_3 = 0\}$$

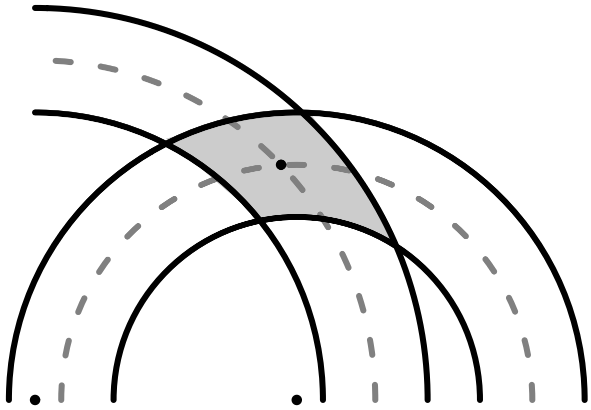
i

$$A(z, R, r) = B^n(z, R) \setminus \overline{B}^n(z, r).$$

Sada ćemo pronaći gornju granicu za diam (A).

8.9. Teorema. *Za $\varepsilon < 1$ i A i x kao u (8.8) važi*

$$\operatorname{diam}(A) \le \sqrt{\varepsilon}\,4(\min\{|x|, |x - e_1|\} + 1).$$



SLIKA 10. The set A.

PROOF. Pretpostavimo da je $|x| \leq |x - e_1|$. diam (A) je maksimalan kada je $|x - e_1|/|x|$ maksimalno. Zbog toga možemo pretpostaviti da je $x = -s$, gde je $s > 0$. Označimo $y = S^1(0, |x| + \varepsilon) \cap S^1(e_1, |x - e_1| - \varepsilon)$. Površina trougla $\triangle e_1 0 y$ je $(\operatorname{Im} y)/2$ i po Heronovoj formuli je

$$\frac{\operatorname{Im} y}{2} = \sqrt{p(p-1)(p - |x| - \varepsilon)(p + \varepsilon - |x| - 1)}, \tag{8.10}$$

gde je $p = |x| + 1$. Iz (8.10) i pretpostavke da je $\varepsilon < 1$ imamo

$$\operatorname{Im} y = 2\sqrt{(|x|+1)|x|(1-\varepsilon)\varepsilon} \leq 2\sqrt{\varepsilon}(|x|+1)$$

i tvrdjenje sledi s obzirom da je diam $(A) \leq 2\operatorname{Im} y$. $\square$

8.11. TEOREMA. *Neka je A kao u (8.8), $|x| < 2$, $|x - e_1| \leq |x|$ i $\measuredangle(1, 0, x) \geq \omega > 0$. Tada je*

$$\operatorname{diam}(A) \leq \varepsilon \left(1 + \frac{70}{\omega}\right)$$

za

$$\varepsilon < \min\left\{1, \frac{1 + |x - e_1| - |x|}{2}, \frac{|x| + |x - e_1| - 1}{2}\right\}.$$

PROOF. Označimo sa y presek $S^1(|x| + \varepsilon)$ i $S^1(e_1, |x - e_1|)$ u prvom kvadrantu. Trouglovi $\triangle(0, 1, x)$ i $\triangle(0, 1, y)$ daju na osnovu kosinusne teoreme

$$|x - 1|^2 = |x|^2 + 1 - 2|x| \cos \gamma$$

i

$$|y - 1|^2 = |y|^2 + 1 - 2|y| \cos \delta,$$

gde je η ugao $\measuredangle(1, 0, x)$ i ξ ugao $\measuredangle(1, 0, y)$. Odatle je

$$\cos \gamma = \frac{|x|^2 + 1 - |x - 1|^2}{2|x|} \tag{8.12}$$

i

$$\cos\delta = \frac{|y|^2+1-|y-1|^2}{2|y|} = \frac{(|x|+\varepsilon)^2+1-|x-1|^2}{2(|x|+\varepsilon)}. \tag{8.13}$$

Iz Žordanove nejednakosti sledi

$$|\cos\gamma-\cos\delta| = \cos\delta-\cos\gamma = 2\sin\frac{\delta+\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\delta}{2} \geq \frac{2}{\pi^2}(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)$$

i po pretpostavci

$$|\gamma-\delta| \leq \frac{\pi^2}{2\omega}|\cos\gamma-\cos\delta| \tag{8.14}$$

Iz nejednakosti trougla, Žordanove nejednakosti, (8.14), (8.12) i (8.13) dobijamo

$$\begin{aligned}
|x-y| &\leq \varepsilon + 2|x|\sin\frac{|\gamma-\delta|}{2} \\
&\leq \varepsilon + \frac{2|x|}{\pi}|\gamma-\delta| \\
&\leq \varepsilon + \frac{|x|\pi}{\omega}|\cos\gamma-\cos\delta| \\
&= \varepsilon + \frac{|x|\pi}{\omega}\frac{\varepsilon(1+|x-1|^2+|x|(|x|+\varepsilon))}{2|x|(|x|+\varepsilon)} \\
&\leq \varepsilon + \frac{\pi}{\omega}\frac{\varepsilon(1+3^2+2(2+1))}{2(1/2+0)} \\
&= \varepsilon + \frac{51\varepsilon}{\omega}.
\end{aligned}$$

Označimo sa z presek $S^1(|x|+\varepsilon)$ i $S^1(e_1,|x-e_1|+\varepsilon)$ u prvom kvadrantu. Ako je $\delta > \omega/2$, tada dobijamo

$$|x-y| \leq \frac{|x|\pi}{\omega}\frac{\varepsilon||y-1|^2-|z-1|^2|}{2(|x|+\varepsilon)} \leq \frac{19\varepsilon}{\omega}.$$

Sada je

$$\operatorname{diam}(A) \leq |x-z| \leq |x-y|+|y-z| \leq \varepsilon + \frac{70\varepsilon}{\omega}$$

i tvrdjenje sledi. □

8.15. Lema. *Neka je* $n \geq 2$, $K > 1$, $\alpha = K^{1/(1-n)}$, $\beta = 1/\alpha$ *i* $c_3 = \exp(60\sqrt{K-1})$. *Za* $t \in (0,1)$

$$c_3 t^\alpha - t \geq t - \frac{t^\beta}{c_3} \tag{8.16}$$

i za $t > 1$

$$c_3 t^\beta - t \geq t - \frac{t^\alpha}{c_3}. \tag{8.17}$$

PROOF. Da bi dokazali (8.16) dovoljno je da dokažemo da je $f(t) \geq 0$, gde je $f(t) = c_3 t^\alpha + \frac{1}{c_3} t^{1/\alpha} - 2t$ i $0 < t < 1$. Zato što je

$$\lim_{t \to 0+} f(t) = 0,$$

dovoljno je da dokažemo $f'(t) \geq 0$ za $0 < t < 1$, tj.

$$\alpha c_3 t^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha c_3} t^{(1/\alpha)-1} - 2 \geq 0. \tag{8.18}$$

Koristeći nejednakost izmedju aritmetičke i geometrijske sredine, zaključujemo da važi

$$\alpha c_3 + \frac{1}{\alpha c_3} \geq 2$$

. Drugim rečima,

$$\lim_{t \to 1-} f'(t) = \alpha c_3 + \frac{1}{\alpha c_3} - 2 \geq 0.$$

Zbog ovoga da bi dokazali nejednakost (8.18) dovoljno je dokazati da je $f''(t) \leq 0$ za $0 < t < 1$ tj.

$$\alpha(\alpha - 1) c_3 t^{\alpha-2} + \frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\alpha c_3} t^{(1/\alpha)-2} \leq 0,$$

ili ekvivalentno

$$t^{\frac{1}{\alpha} - \alpha} \leq \alpha^3 c_3^2.$$

Poslednja nejednakost sledi iz

$$t^{\frac{1}{\alpha} - \alpha} < 1 \leq \alpha^3 c_3^2.$$

Prva nejednakost važi jer je $0 < t < 1$ i $\frac{1}{\alpha} - \alpha > 0$ $(0 < \alpha < 1)$. Sada ćemo dokazati $\alpha^3 c_3^2 \geq 1$ kako bi kompletirali dokaz. Ovo je ekvivalentno nejednakosti

$$K^{3/(1-n)} e^{120\sqrt{K-1}} \geq 1,$$

ili

$$e^{40(n-1)u} \geq u^2 + 1$$

za $u = \sqrt{K-1}$. Kako je $u \geq 0$, koristeći Tejlorov red za e^x možemo zaključiti

$$e^{40(n-1)u} \geq 1 + 40(n-1)u + \frac{(40(n-1))^2 u^2}{2} \geq 1 + u^2.$$

Nejednakost (8.17) je ekvivalentna sa

$$c_3 t^{(1/\alpha)-1} + \frac{t^{\alpha-1}}{c_3} \geq 2. \tag{8.19}$$

Nejednakost (8.19) važi za $t = 1$. Da bi dokazali (8.19) za $t > 1$ dovoljno je dokazati da je izvod leve strane nenegativan. Imamo sledeći niz ekvivalentnih formula:

$$c_3 \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) t^{\frac{1}{\alpha} - 2} + \frac{\alpha - 1}{c_3} t^{\alpha - 2} \geq 0$$

$$\frac{(1-\alpha) c_3}{\alpha} t^{\frac{1}{\alpha} - 2} \geq \frac{1 - \alpha}{c_3} t^{\alpha - 2}$$

$$t^{\frac{1}{\alpha}-\alpha} \geq \frac{\alpha}{c_3^2}.$$

Poslednja nejednakost je tačna zbog

$$t^{\frac{1}{\alpha}-\alpha} \geq 1 \geq \frac{\alpha}{c_3^2}$$

i tvrdjenje sledi. $\square$

8.20. Lema. *Neka je $\varepsilon > 0$. Tada je*

$$|x| - \varepsilon \leq |f(x)| \leq |x| + \varepsilon$$

za

$$1 < K \leq \max\left\{\left(\frac{\log(\varepsilon+1)}{60}\right)^2 + 1, 2\right\}.$$

Proof. Označimo sa $l(x) = c_3^{-1}\max\{|x|^\alpha, |x|^\beta\}$ i $u(x) = c_3\max\{|x|^\alpha, |x|^\beta\}$. Prvo ćemo razmatrati slučaj $0 < |x| < 1$. Iz leme 8.15 imamo

$$\begin{aligned}
\max\{u(x) - |x|, |x| - l(x)\} &= \max\left\{c_3|x|^\alpha - |x|, |x| - \frac{1}{c_3}|x|^\beta\right\} \\
&= c_3|x|^\alpha - |x| \\
&\leq \exp(60\sqrt{K-1})|x|^\alpha - |x| \\
&\leq \exp(60\sqrt{K-1})|x|^{1/K} - |x| \\
&\leq \exp(60\sqrt{K-1}) - 1.
\end{aligned}$$

Sada je $\exp(60\sqrt{K-1}) - 1 \leq \varepsilon$ ekvivalentno sa

$$K \leq \left(\frac{\log(\varepsilon+1)}{60}\right)^2 + 1. \tag{8.21}$$

Ako je $|x| = 1$, tada je

$$\max\{u(x) - |x|, |x| - l(x)\} = c_3 - 1$$

i zbog toga $\exp(60\sqrt{K+1}) - 1 \leq \varepsilon$ za $K \in (1, 2]$, što je ekvivalentno sa

$$K \leq \left(\frac{\log(\varepsilon+1)}{60}\right)^2 + 1. \tag{8.22}$$

Posmatrajmo najpre slučaj $1 < |x| < 2$. Iz Leme 8.15 imamo

$$\begin{aligned}
\max\{u(x) - |x|, |x| - l(x)\} &= \max\left\{c_3|x|^\beta - |x|, |x| - \frac{1}{c_3}|x|^\alpha\right\} \\
&= c_3|x|^\beta - |x| \\
&\le \exp(60\sqrt{K-1})|x|^\beta - |x| \\
&\le \exp(60\sqrt{K-1})|x|^K - |x| \\
&\le |x|(\exp(60\sqrt{K-1})|x|^{K-1} - 1) \\
&\le 2(\exp(60\sqrt{K-1} + (K-1)\log|x|) - 1) \\
&\le 2(\exp(60(K-1)^{3/2} - 1).
\end{aligned}$$

Sada je $2(\exp(60(K-1)^{3/2} - 1) \le \varepsilon$ ekvivalentno sa

$$K \le \left(\frac{\log(\varepsilon/2+1)}{60}\right)^{2/3} + 1. \tag{8.23}$$

Kombinujući (8.21), (8.22) i (8.23) dobijamo

$$|x| - \varepsilon \le |f(x)| \le |x| + \varepsilon$$

za

$$K \le \min\left\{\left(\frac{\log(\varepsilon+1)}{60}\right)^2 + 1, 2, \left(\frac{\log(\varepsilon/2+1)}{60}\right)^{2/3} + 1\right\} = \left(\frac{\log(\varepsilon+1)}{60}\right)^2 + 1$$

i tvrdjenje sledi. □

8.24. Lema. *Za $0 < \alpha < 1$, $c > 1$ i $t > 0$*

$$\log(1 + c\max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\}) \le \begin{cases} \frac{c}{\alpha}\log^\alpha(1+t), & 0 < t < 1, \\ \frac{c}{\alpha}\log(1+t), & t \ge 1. \end{cases}$$

Proof. Pretpostavimo prvo da je $t \ge 1$. Tada je $\max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\} = t^{1/\alpha}$ i iz opšte Bernulijeve nejednakosti imamo

$$(1+t)^{c/\alpha} \ge (1+ct)^{1/\alpha} \ge 1 + c^{1/\alpha}t^{1/\alpha} \ge 1 + ct^{1/\alpha}$$

što povlači $\log(1 + ct^{1/\alpha}) \le c/\alpha \log(1+t)$.

Pretpostavimo sada da je $0 < t < 1$. Tada je $\max\{t^\alpha, t^{1/\alpha}\} = t^\alpha$ pokazaćemo da je funkcija

$$f(t) = \log(1 + ct^\alpha) - \frac{c}{\alpha}\log^\alpha(1+t)$$

nepozitivna. Lako dobijamo

$$f'(t) = \frac{\alpha ct^{\alpha-1}}{1+ct^\alpha} - \frac{c\log^{\alpha-1}(1+t)}{1+t}. \tag{8.25}$$

Kako je $\alpha - 1 < 0$ i $\log(1+t) \le t$ dobijamo

$$t^{\alpha-1} \le \log^{\alpha-1}(1+t). \tag{8.26}$$

Zbog $c > 1 \geq t^{1-\alpha}$ i odatle

$$ct^{\alpha} \geq t. \tag{8.27}$$

Na osnovu (8.25), (8.26) i (8.27) $f'(t) \leq 0$ je ekvivalentno sa $(1-\alpha)(1+t) \geq 0$ i odatle je $f(t)$ rastuće. Sada imamo da je $f(t) \leq f(0) = 0$ i tvrdjenje sledi. $\square$

8.28. TEOREMA. *Neka je $G = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f \in QC_K$ i $f(0) = 0$. Tada postoji $c(K)$ tako da važi*

$$j_G(f(x), f(y)) \leq c(K) \max\{j_G(x,y)^{\alpha}, j_G(x,y)\},$$

gde je $\alpha = K^{1/(1-n)}$ i $c(K) \to 1$ kad $K \to 1$.

PROOF. Zbog simetrije možemo pretpostaviti da je $x = e_1$ i $|y| \geq 1$. Sada je

$$\frac{|f(y) - f(e_1)|}{|e_1|} = \frac{|f(y) - f(x)|}{|f(0) - f(e_1)|} \leq \eta\left(\frac{|x-y|}{|0 - e1|}\right) = \eta(|x-y|)$$

kao i

$$\frac{|f(y) - f(e_1)|}{|f(y)|} = \frac{|f(y) - f(x)|}{|f(y) - f(0)|} \leq \eta\left(\frac{|x-y|}{|y-0|}\right) = \eta\left(\frac{|x-y|}{|y|}\right).$$

Otuda na osnovu leme 8.24 važi

$$\begin{aligned}
j(f(x), f(y)) &= \log\left(1 + \frac{|f(x) - f(y)|}{\min\{|f(x)|, |f(y)|\}}\right) \\
&= \log\left(1 + \max\left\{\eta(|y - e_1|), \eta\left(\frac{|x-y|}{|y|}\right)\right\}\right) \\
&= \log(1 + \eta(|y - e_1|)) \\
&\leq \log(1 + c_3 \max\{|y - e_1|^{\alpha}, |y - e_1|^{1/\alpha}\}) \\
&\leq \begin{cases} \frac{c_3}{\alpha} \log^{\alpha}(1 + |y - e_1|), & 0 < |y - e_1| < 1, \\ \frac{c_3}{\alpha} \log(1 + |y - e_1|), & |y - e_1| \geq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Birajući $c(K) = c_3/\alpha$ imamo $c(K) \to 1$ kad $K \to 1$ i teorema je dokazana. $\square$

GLAVA 2

Harmonijska kvaziregularna preslikavanja

Dobro je poznato da ako je f kompleksno vrednosna harmonijska funkcija definisana u oblasti G kompleksne ravni $\mathbb{C}$, onda je $|f|^p$ subharmonijska za $p \geq 1$, i da u opštem slučaju nije harmonijska za $p < 1$. Ipak, ako je f holomorfna, onda je $|f|^p$ subharmonijska za svako $p > 0$. U ovom radu razmotrićemo k-kvaziregularne harmonijske funkcije $(0 < k < 1)$. Reći ćemo za harmonijsku funkciju da je kvaziregularna ako je

$$|\bar{\partial} f(z)| \leq k|\partial f(z)|, \qquad z \in G,$$

gde je

$$\bar{\partial} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{i} \quad \partial f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad z = x + iy.$$

Dokazaćemo da je $|f|^p$ subharmonijska za $p \geq 4k/(1+k)^2 =: q$ kao i da je eksponent q (< 1) najbolji mogući (see Theorem 1.1). Činjenica da je $q < 1$ omogućava nam da dokažemo da ako je f kvaziregularno u jediničnom disku $\mathbb{D}$ and i neprekidno na $\overline{D}$, onda $\tilde{\omega}(f,\delta) \leq \text{const.}\omega(f,\delta)$, gde $\tilde{\omega}(f,\delta)$ (respektivno $\omega(f,\delta)$) označava moduo neprekidnosti od f na $\mathbb{D}$ (respektivno $\partial\mathbb{D}$); vidi teoremu 2.1.

1. Subharmoničnost od $|f|^p$

1.1. Teorema. *Ako je f kompleksno vrednosna k-kvaziregularna harmonijska funkcija definisana u oblasti $G \subset \mathbb{C}$, i $q = 4k/(k+1)^2$, onda je $|f|^q$ subharmonijska. Eksponent q je optimalan.*

Za neprekidnu funkciju u definisanu u oblasti $G \subset \mathbb{C}$ reći ćemo da je subharmonijska ako za sve $z_0 \in G$ postoji $\varepsilon > 0$ tako da

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt, \qquad 0 < r < \varepsilon, \tag{1.2}$$

Ako je $u(z_0) = |f(z_0)|^2 = 0$, onda važi (1.2). Ako je $u(z_0) > 0$, onda postoji okolina U od z_0 tako da u pripada klasi $C^2(U)$ (pošto su nule od u izolovane), i onda možemo dokazati da je $\Delta u \geq 0 \in U$. Tako se dokaz svodi na dokazivanje da je $\Delta u(z) \geq 0$ kad god je $u(z) > 0$. Da bismo to učinili, izračunaćemo Δu.

Lako se dokazuje da ako je $u > 0$ jedna C^2 funkcija definisana u oblasti u $\mathbb{C}$, i $\alpha \in \mathbb{R}$, to onda važe sledeća dva tvrdjenja

$$\Delta(u^\alpha) = \alpha u^{\alpha-1}\Delta u + \alpha(\alpha-1)u^{\alpha-2}|\nabla u|^2, \tag{1.3}$$

$$|\nabla u|^2 = 4|\partial u|^2 \quad \text{i} \quad \Delta u = 4\partial\bar{\partial}u. \tag{1.4}$$

1.5. Lema. *Ako je $f = g + \bar{h}$, gde su g i h holomorfne funkcije, onda je*

$$\Delta(|f|^2) = 4(|g'|^2 + |h'|^2). \tag{1.6}$$

Proof. Pošto je $|f|^2 = (g+\bar{h})(\bar{g}+h)$, imamo

$$\begin{aligned}\Delta(|f|^2) &= 4\partial(\overline{h'}(\bar{g}+h) + (g+\bar{h})\overline{g'})\\ &= 4(\overline{h'}h + g\overline{g'})\\ &= 4(|g'|^2 + |h'|^2).\end{aligned}$$

□

1.7. Lema. *Ako je $f = g + \bar{h}$, gde su g i h holomorfne funkcije, onda*

$$|\nabla(|f|^2)|^2 = 4(|\overline{g'}|^2 + |\overline{h'}|^2)|f|^2 + 8\,\mathrm{Re}(\overline{g'}h'f^2). \tag{1.8}$$

Proof. Imamo

$$\begin{aligned}|\nabla(|f|^2)|^2 &= 4|\partial(|f|^2)|^2\\ &= 4|\partial((g+\bar{h})(\bar{g}+h))|^2\\ &= 4|g'\bar{f} + fh'|^2\\ &= 4(|g'|^2 + |h'|^2)|f|^2 + 8\,\mathrm{Re}(\overline{g'}h'f^2).\end{aligned}$$

□

1.9. Lema. *Ako je $f = g + \bar{h}$, gde su g i h holomorfne funkcije, onda*

$$\Delta(|f|^p) = p^2(|g'|^2 + |h'|^2)|f|^{p-2} + 2p(p-2)|f|^{p-4}\,\mathrm{Re}(\overline{g'}h'f^2) \tag{1.10}$$

gde je $f \neq 0$.

Proof. Stavićemo $\alpha = p/2$, $u = |f|^2$, a onda koristiti (1.3), (1.6) i (1.8) da dobijemo rezultat. □

Dokaz teoreme 1.1. Treba da dokažemo da je $\Delta(|f|^p) \geq 0$, gde je $p = 4k/(1+k)^2$. Pošto je $p - 2 < 0$, iz (1.10) dobijamo da je

$$\begin{aligned}\Delta(|f|^p) &\geq p^2(|g'|^2 + |h'|^2)|f|^{p-2} + 2p(p-2)|f|^{p-4}|g'|\cdot|h'|\cdot|f|^2\\ &= p^2|g'|^2(m^2+1)|f|^{p-2} + 2p(p-2)|g'|^2|f|^{p-2}m\\ &= p|g'|^2|f|^{p-2}[p(1+m^2) + 2(p-2)m],\end{aligned}$$

gde je $m = |h'|/|g'| \leq k$. Funkcija $m \mapsto p(1+m^2) + 2(p-2)m$ ima negativan izvod (jer je $p < 1$ i $m < 1$), iz čega sledi da je

$$(1+m^2)p + 2(p-2)m \geq (1+k^2)p + 2(p-2)k.$$

Sa druge strane je $(1+k^2)p + 2(p-2)k \geq 0$ ako i samo ako $p \geq 4k/(1+k)^2$, što dokazuje da je $|f|^q$ subharmonijska funkcija. Da bismo dokazali da je eksponent q optimalan stavimo $f(z) = z + k\bar{z}$. Na osnovu (1.10) je

$$\Delta(|f|^p)(1) = p^2(1+k^2)(1+k)^{p-2} + 2p(p-2)(1+k)^{p-2}k.$$

Pošto je $\Delta(|f|^p)(1) \geq 0$ ako i samo ako je

$$p(1+k^2) + 2(p-2)k \geq 0,$$

što je, kao što je pomenuto, ekvivalentno sa $p \geq q$. Ovim je dokaz teoreme 1.1 završen.

2. Moduli neprekidnosti u euklidskoj metrici

Za neprekidnu funkciju $f : \overline{\mathbb{D}} \mapsto \mathbb{C}$ koja je harmonijska u $\mathbb{D}$ definišemo dva modula neprekidnosti:

$$\omega(f,\delta) = \sup\{|f(e^{i\theta}) - f(e^{it})| : |e^{i\theta} - e^{it}| \leq \delta,\ t,\theta \in \mathbb{R}\}, \quad \delta \geq 0,$$

i

$$\tilde{\omega}(f,\delta) = \sup\{|f(z) - f(w)| : |z-w| \leq \delta,\ z,w \in \overline{\mathbb{D}}\}, \quad \delta \geq 0.$$

Jasno, $\omega(f,\delta) \leq \tilde{\omega}(f,\delta)$, ali treba da važi obrnuta nejednakost. Da bismo to videli, razmotrimo funkciju

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \cos n\theta}{n^2}, \qquad re^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Ova funkcija je harmonijska u $\mathbb{D}$ i neprekidna $\overline{\mathbb{D}}$. Funkcija $v(\theta) = f(e^{i\theta})$, $|\theta| < \pi$, je diferencijabilna i važi

$$\begin{aligned}\frac{dv}{d\theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\theta}{n} \\ &= \frac{\theta}{2}, \qquad |\theta| < \pi.\end{aligned}$$

Ova formula je dobro poznata i može biti proverena izračunavanjem Furijeovih koeficijenata funkcije $\theta \mapsto \theta/2$, $|\theta| < \pi$. Odatle sledi da je

$$|f(e^{i\theta}) - f(e^{it})| \leq (\pi/2)|\theta - t|, \qquad -\pi < \theta,\, t < \pi,$$

i odatle $\omega(f,\delta) \leq M\delta$, $\delta > 0$, gde je M apsolutna konstanta. Sa druge strane, nejednakost $\tilde{\omega}(f,\delta) \leq CM\delta$, $C = \text{const}$, ne važi jer iz nje sledi da je $|\partial f/\partial r| \leq CM$, što nije tačno pošto

$$\frac{\partial}{\partial r} f(re^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{n}, \quad \text{za } \theta = \pi,\ 0 < r < 1.$$

Štaviše, kao što su dokazali Rubel, Šilds i Tejlor [**RST**], i Tamrazov [**TA**], ako je f holomorfna funkcija, onda je $\tilde{\omega}(f,\delta) \leq C\omega(f,\delta)$, gde C ne zavisi od f i δ. U ovoj napomeni mi proširivanje ovog rezultata nankvaziregularne harmonijske funkcije.

2.1. Teorema. *Neka je f k-kvaziregularna harmonijska kompleksno vrednosna funkcija koja se može neprekidno produžii na $\overline{\mathbb{D}}$, onda postoji konstanta C koja zavisi samo od k tako da je $\tilde{\omega}(f,\delta) \leq C\omega(f,\delta)$.*

Da bismo ovo izveli iz teoreme 1.1, potrebne su nam neke jednostavne osobine modula $\omega(f,\delta)$. Neka je

$$\omega_0(f,\delta)=\sup\{|f(e^{i\theta})-f(e^{it})| : |\theta-t|\le\delta,\ t,\theta\in\mathbb{R}\}.$$

Lako se proverava da je

$$C^{-1}\omega_0(f,\delta)\le\omega(f,\delta)\le C\omega_0(f,\delta), \tag{2.2}$$

gde je C apsolutna konstanta, kao i da je

$$\omega_0(f,\delta_1+\delta_2)\le\omega_0(f,\delta_1)+\omega_0(f,\delta_2),\quad \delta_1,\ \delta_2\ge 0.$$

Stoga je $\omega_0(f,2^n\delta)\le 2^n\omega_0(f,\delta)$, i odatle $\omega_0(\lambda\delta)\le 2\lambda\omega_0(\delta)$, za $\lambda\ge 1,\delta\ge 0$. Iz ovih nejednakosti i (2.2) sledi da je

$$\omega(f,\lambda\delta)\le 2C\lambda\omega(f,\delta),\quad \lambda\ge 1,\delta\ge 0, \tag{2.3}$$

i

$$\omega(f,\delta_1+\delta_2)\le C\omega(f,\delta_1)+C\omega(f,\delta_2),\quad \delta_1,\ \delta_2\ge 0. \tag{2.4}$$

gde je C apsolutna konstanta. Kao posledicu (2.3) imamo da za $0<p<1$ važi

$$\int_x^\infty \frac{\omega(f,t)^p}{t^2}\,dt\le C\frac{\omega(f,x)^p}{x},\quad x>0, \tag{2.5}$$

gde C zavisi samo od p. Na kraju, treba nam sledeća posledica harmonijske Švarcove leme (vidi [**ABR**]).

2.6. Lema. *Ako je h harmonijska funkcija, ograničena u jediničnom disku, uz $h(0)=0$, važi $|h(\xi)|\le(4/\pi)\|h\|_\infty|\xi|$, za $\xi\in\mathbb{D}$.*

Dokaz teoreme 2.1. Dovoljno je dokazati $|f(z)-f(w)|\le C\omega(f,|z-w|)$ za sve $z,\ w\in\overline{\mathbb{D}}$, gde C zavisi samo od k. Najpre pretpostavimo da je $z=r\in(0,1)$ i $|w|=1$. Onda po teoremi 1.1, funkcija $\varphi(\xi)=|f(w)-f(\xi)|^q$, gde je $q=4k/(1+k)^2<1$, je subharmonijska u $\mathbb{D}$ i neprekidna na $\overline{\mathbb{D}}$, dok je

$$\varphi(r)\le\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(1-r^2)\varphi(\zeta)}{|\zeta-r|^2}\,|d\zeta|.$$

Pošto po (2.4) važi

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta)&\le(\omega(f,|w-r|+|r-\zeta|))^q\\&\le C^q\omega(f,|w-r|)^q+C^q\omega(f,|r-\zeta|)^q,\end{aligned}$$

imamo

$$\begin{aligned}\varphi(z)&\le C^q\omega(f,|w-r|)^q+\frac{C^q}{2\pi}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{(1-r^2)\omega(f,|r-\zeta|)^q}{|\zeta-r|^2}\,|d\zeta|\\&=C^q\omega(f,|w-r|)^q+\frac{C^q}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)\,\omega(|r-e^{it}|)^q}{|e^{it}-r|^2}\,dt.\end{aligned}$$

Ali jednostavan račun pokazuje da je

$$|r-e^{it}|=\sqrt{(1-r)^2+4r\sin^2(t/2)}\asymp 1-r+|t|\quad(0<r<1,\ |t|\le\pi).$$

odavde, iz (1.2) i (2.5) sledi da je

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)\,\omega(f,|r-e^{it}|)^q}{|e^{it}-r|^2}\,dt &\le C_1 \int_0^{\pi} \frac{(1-r)\,\omega(f,1-r+t)^q}{(1-r+t)^2}\,dt \\ &= C_1\Big(\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{\pi}\Big)\frac{(1-r)\,\omega(f,1-r+t)^q}{(1-r+t)^2}\,dt \\ &\le C_2\,(\omega(1-r))^q + C_2\,(1-r)\int_{1-r}^{\infty}\frac{\omega(f,t)^q}{t^2}\,dt \\ &\le C_3\,(\omega(f,1-r))^q \\ &\le C_4\,(\omega(f,|w-z|))^q.\end{aligned}$$

Dakle, $|f(w)-f(z)| \le C_5\omega(f,|w-z|)$ povlači da je $w \in \partial\mathbb{D}$ i $z \in (0,1)$. Rotacijom i na osnovu neprekidnosti, možemo produžiti ovu nejednakost na slučaj kada je $w \in \partial\mathbb{D}$ i $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Ako je $0 < |w| < 1$, razmotrimo funkciju $h(\xi) = f(\xi w/|w|) - f(\xi z/|w|)$, $|\xi| \le 1$. Ova funkcija je harmonijska u $\mathbb{D}$, neprekidna na $\overline{\mathbb{D}}$ i $h(0)=0$. Na osnovu harmonijske Švarcove leme, nejednakosti (1.2) i prethodnog slučaja važi,

$$\begin{aligned}|f(w)-f(z)| &= |h(|w|)| \\ &\le (4/\pi)|w|\,\|h\|_\infty \\ &\le C_6|w|\,\omega(f,|w/|w|-z/|w|\,|) \\ &\le C_7\,\omega(f,|w|\,|\,|w/|w|-z/|w|\,|) \\ &= C_7\,\omega(f,|w-z|),\end{aligned}$$

čime je dokaz završen.

3. Lipšic neprekidnost do na granicu od B^n

Poznato je da, čak i za $n=2$, Lipšic neprekidnost funkcije $\phi : T \to C$, gde je $T = \{z \in C : |z| = 1\}$, ne povlači Lipšic neprekidnost funkcije $u = P[\phi]$.

Za ma koje $n \ge 2$ je

$$P[\phi](x) = \int_{S^{n-1}} P(x,\xi)\phi(\xi)d\sigma(\xi), \quad x \in B^n$$

gde je $P(x,\xi) = \frac{1-|x|^2}{|x-\xi|^n}$ Puasonovo jezgro za jediničnu loptu $B^n = \{x \in R^n : |x| < 1\}$, $d\sigma$, je normalizovana mera površi na jediničnoj sferi S^{n-1} i $\phi : S^{n-1} \to R^n$ je neprekidno preslikavanje.

Naš cilj je da pokažemo da se Lipšic neprekidnost čuva pri harmonijskim produženjima, ako je produženje kvaziregularno. Analogno tvdjenje važi za Helder neprekidnost bez pretpostavke o kvaziregularnosti.

3.1. Teorema. *Pretpostavimo da $\phi : S^{n-1} \to R^n$ zadovoljava Lipšicov uslov:*

$$|\phi(\xi)-\phi(\eta)| \le L|\xi-\eta|, \quad \xi,\eta \in S^{n-1}$$

i pretpostavimo da je $u = P[\phi] : B^n \to R^n$ K-kvaziregularno. Tada

$$|u(x) - u(y)| \leq C'|x - y|, \quad x, y \in B^n$$

gde C' zavisi samo od L, K i n.

D. Kalaj je dobio rezultat koji je povezan sa ovim, ali pod dodatnim pretpostavkama za $C^{1,\alpha}$ regularnost od ϕ, (vidi [**KA**]).

Glavni deo dokaza je procena tangencijalnih izvoda od u i da kvaziregularnost ne igra ulogu. Izaberimo $x_0 = r\xi_0 \in B^n$, $r = |x|$, $\xi_0 \in S^{n-1}$. Neka je $T = T_{x_0} rS^{n-1}$ $n-1$ dimensional tangentna ravan u x_0 na sferu rS^{n-1}. Želimo da dokažemo da je

$$\|D(u|_T)(x_0)\| \leq C(n)L. \tag{3.2}$$

Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\xi_0 = e_n$ i $x_0 = re_n$. Jednostavnim računanjem

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P(x, \xi) = \frac{-2x_j}{|x - \xi|^n} - n(1 - |x|^2)\frac{x_j - \xi_j}{|x - \xi|^{n+2}}.$$

Dakle, za $1 \leq j < n$ važi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} P(x_0, \xi) = n(1 - |x_0|^2)\frac{\xi_j}{|x_0 - \xi|^{n+2}}.$$

Važno je pomenuti da je ovo jezgro neparno po ξ (u odnosu na refleksiju $(\xi_1, \ldots \xi_j, \ldots, \xi_n) \mapsto (\xi_1, \ldots, -\xi_j, \ldots, \xi_n)$), što je tipično za jezgra dobijena diferenciranjem. Ovo razmatranje i diferenciranje pod znakom integrala daje da za ma koje $1 \leq j < n$ važi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0) &= n(1 - r^2)\int_{S^{n-1}} \frac{\xi_j}{|x_0 - \xi|^{n+2}}\phi(\xi)d\sigma(\xi) \\ &= n(1 - r^2)\int_{S^{n-1}} \frac{\xi_j}{|x_0 - \xi|^{n+2}}(\phi(\xi) - \phi(\xi_0))d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Korišćenjem elementarne nejednakosti $|\xi_j| \leq |\xi - \xi_0|$, $(1 \leq j < n,\ \xi \in S^{n-1})$ i Lipšic neprekidnosti funkcije ϕ dobijamo

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| &\leq Ln(1 - r^2)\int_{S^{n-1}} \frac{|\xi_j||\xi - \xi_0|}{|x_0 - \xi|^{n+2}}d\sigma(\xi) \\ &\leq Ln(1 - r^2)\int_{S^{n-1}} \frac{|\xi - \xi_0|^2}{|x_0 - \xi|^{n+2}}d\sigma(\xi). \end{aligned}$$

Da bismo procenili poslednji integral, razložićemo sferu S^{n-1} na dva podskupa $E = \{\xi \in S^{n-1} : |\xi - \xi_0| \leq 1 - r\}$ i $F = \{\xi \in S^{n-1} : |\xi - \xi_0| > 1 - r\}$. Pošto $|\xi - x_0| \geq 1 - |x_0|$ for all $\xi \in S^{n-1}$ imamo

$$\begin{aligned} \int_E \frac{|\xi - \xi_0|^2}{|x_0 - \xi|^{n+2}}d\sigma(\xi) &\leq (1 - r^2)^{-n-2}\int_E |\xi - \xi_0|^2 d\sigma(\xi) \\ &\leq (1 - r^2)^{-n-2}\int_0^{1-r} \rho^2\rho^{n-2}d\rho \\ &\leq \frac{2}{n+1}(1 - r)^{-1}. \end{aligned}$$

Sa druge strane, $|\xi - \xi_0| \leq C_n|\xi - x_0|$ važi za ma koje $\xi \in F$, tako da je

$$\begin{aligned}\int_F \frac{|\xi - \xi_0|^2}{|x_0 - \xi|^{n+2}} d\sigma(\xi) &\leq C_n^{n+2} \int_F |\xi - \xi_0|^{-n} d\sigma(\xi) \\ &\leq C_n' \int_{1-r}^{2} \rho^{-n}\rho^{n-2} d\rho \\ &\leq C_n'(1-r)^{-1}.\end{aligned}$$

Kombinujući ove dve nejednakosti dobijamo

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_0)\right| \leq LC(n)$$

za $1 \leq j < n$. Zbog rotacione simetrije ista procena važi za svaki izvod u bilo kojem tangencijalnom pravcu. Odatle procena (3.2). Konačno, K-kvaziregularnost daje

$$\|Du(x)\| \leq LKC(n).$$

Sada, teorema o srednjoj vrednosti daje Lipšic neprekidnost funkcije u.

4. Bilipšicova preslikavanja

Bilipšicovo svojstvo harmonijskih kvazikonformnih preslikavanja na jediničnom disku proučavano je u [**MAT**]. Drugačiji pristup sledećoj teoremi dat je u [**MAT1**].

4.1. Teorema. *Pretpostavimo da su D i D' pravi domeni u $\mathbb{R}^2$. Ako je $f : D \longrightarrow D'$ K-kvazikonformno i harmonijsko, onda je ono bilipšicovo u odnosu na kvazihiperboličku metriku na D i D'.*

Dokaz: Pošto je f harmonijsko, lokalno imamo reprezentaciju

$$f(z) = g(z) + \overline{h(z)},$$

gde su g i h analitičke funkcije. Tada je Jakobijan $J_f(z) = |g'(z)|^2 - |h'(z)|^2$ pozitivan (napomenimo da je $g'(z) \neq 0$).

Dalje,

$$J_f(z) = |g'(z)|^2 \left(1 - \frac{|h'(z)|^2}{|g'(z)|^2}\right) = |g'(z)|^2 \left(1 - |\omega(z)|^2\right),$$

gde je $\omega(z) = \frac{h'(z)}{g'(z)}$ analitičko i $|\omega| < 1$. Sada imamo

$$\log \frac{1}{J_f(z)} = -2\log|g'(z)| - \log(1 - |\omega(z)|^2).$$

Prvi član je harmonijska funkcija (dobro je poznato da je logaritam modula analitičke funkcije harmonijska funkcija svuda izuzev tamo gde se ta analitička funkcija anulira, ali $g'(z) \neq 0$ svuda).

Drugi član može biti prikazan u vidu reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\omega(z)|^{2k}}{k},$$

i svaki član je subharmonijski (napomenimo da je ω analitička funkcija).

Dakle, $-\log(1-|\omega(z)|^2)$ je neprekidna funkcija prikazana kao lokalno uniformna suma subharmonijskih funkcija. Odatle je i ona sama subharmonijska.

Dakle

$$\log \frac{1}{J_f(z)} \text{ je subharmonijska funkcija.} \tag{4.2}$$

Napomenimo da je reprezentacija $f(z) = g(z) + \overline{h(z)}$ lokalna, ali da je dovoljna za naš uslov (4.2).

Na osnovu definicije iz [AG, Definition 1.5] važi

$$\alpha_f(z) = \exp\left(\frac{1}{n}(\log J_f)_{B(z)}\right),$$

gde je

$$(\log J_f)_B = \frac{1}{m(B)} \int_B \log J_f \, dm, \quad B_z = B(z, d(z, \partial D)).$$

U slučaju $n = 2$ važi

$$\frac{1}{\alpha_f(z)} = \exp\left(\frac{1}{2} \frac{1}{m(B_z)} \int_{B_z} \log \frac{1}{J_f(w)} \, dm(w)\right). \tag{4.3}$$

Iz (4.2) sledi

$$\frac{1}{B_z} \int_{B_z} \log \frac{1}{J_f(w)} \, dm(w) \geq \log \frac{1}{J_f(z)}.$$

Kombinujući ovo sa (4.3) imamo

$$\frac{1}{\alpha_f(z)} \geq \exp\left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{J_f(z)}\right) = \frac{1}{\sqrt{J_f(z)}}$$

i odatle

$$\sqrt{J_f(z)} \geqslant \alpha_f(z).$$

Sa druge strane, imamo teoremu [AG, Theorem 1.8]

Pretpostavimo da su D i D' domeni u $\mathbb{R}^n$. Ako je $f : D \longrightarrow D'$ K-kvazikonformno, onda je

$$\frac{1}{c} \frac{d(f(x), \partial D')}{d(x, \partial D)} \leq \alpha_f(z) \leq c \, \frac{d(f(x), \partial D')}{d(x, \partial D)}$$

za $x \in D$, gde je c konstanta koja zavisi samo od K i n.

Iz prve nejednakosti iz ove teoreme imamo

$$\sqrt{J_f(z)} \geq \frac{1}{c} \frac{d(f(x), \partial D')}{d(x, \partial D)}. \tag{4.4}$$

Napomenimo da je

$$J_f(z) = |g'(z)|^2 - |h'(z)|^2 \leq |g'(z)|^2$$

i na osnovu K-kvazikonformnosti funkcije f važi $|h'| \leq k|g'|$ za $0 \leq k < 1$, gde je $K = \frac{1+k}{1-k}$.

Ovo daje $J_f \geq (1-k^2)|g'|^2$. Dakle,

$$\sqrt{J_f} \asymp |g'| \asymp |g'| + |h'| = ||f'(z)||.$$

Konačno (4.4) i prethodna asimptotska relacija daju

$$||f'(z)|| \geq \frac{1}{c}\frac{d(f(x), \partial D')}{d(x, \partial D)}, \quad c = c(k).$$

Za obrnutu nejednakost ponovo koristimo $J_f(z) \geq (1-k^2)|g'(z)|^2$, tj.

$$\sqrt{J_f(z)} \geq \sqrt{1-k^2}|g'(z)| \tag{4.5}$$

Dalje, znamo da za $n = 2$ važi

$$\alpha_f(z) = \exp\left(\frac{1}{B_z}\int_{B_z} \log\sqrt{J_f(x)}\, dm(w)\right).$$

Korišćenjem (4.5) dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B_z}\int_{B_z} \log\sqrt{J_f(x)}\, dm(w) &\geq \frac{1}{B_z}\int_{B_z} \log\sqrt{1-k^2} + \log|g'(w)|\, dm(w) \\
&= \log\sqrt{1-k^2} + \frac{1}{B_z}\int_{B_z} \log|g'(w)|\, dm(w) \\
&= \log\sqrt{1-k^2} + \log|g'(z)|.
\end{aligned}$$

Sada, na osnovu harmoničnosti funkcije $\log|g'|$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\alpha_f(z) &= \exp\left(\frac{1}{B_z}\int_{B_z} \log\sqrt{J_f(x)}\, dm(w)\right) \\
&\geq \exp(\log\sqrt{1-k^2} + \log|g'(z)|) \\
&= \sqrt{1-k^2}|g'(z)| \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt{1-k^2}(|g'| + |h'|) \\
&= \frac{\sqrt{1-k^2}}{2}||f'||.
\end{aligned}$$

Ponovnim koričćenjem druge nejednakostiu [AG, Theorem 1.8]

$$||f'|| \leqslant c\sqrt{J_f(z)} \leqslant c\,\alpha_f(z) \leqslant c\,\frac{d(f(z), \partial D')}{d(z, \partial D)}, \quad c = c(k).$$

Iz svega ovoga je
$$||f'(z)|| \asymp \frac{d(f(z), \partial D')}{d(z, \partial D)}.$$
Ovaj rezultat, koji važi tačka po tačka, integracijom duž krivih, lako daje
$$k_{D'}(f(z_1), f(z_2)) \asymp k_D(z_1, z_2).$$

Literatura

[AhB] L. Ahlfors and A. Beurling: *Conformal invariants and function-theoretic null-sets*, Acta Math. 83 (1950), 101–129.

[AKM] M. Arsenović, V. Kojić and M. Mateljević: *On Lipschitz continuity of harmonic quasiregular maps on the unit ball in* $\mathbf{R}^n$., Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 33 (2008), no. 1, 315–318.

[AVV] G. D. Anderson, M. K. Vamanamurthy, and M. Vuorinen: *Conformal invariants, inequalities and quasiconformal mappings*, J. Wiley, 1997, 505 pp.

[AG] K. Astala, F. W. Gehring: *Quasiconformal analogues of theorems of Koebe and Hardy-Littlewood* Michigan Math. J. 32 (1985), 99-107.

[ABR] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey: *Harmonic function theory,* Graduate Texts in Mathematics, vol. 137, Springer-Verlag, New York, 1992.

[B1] A. F. Beardon: *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Math. Vol 91, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1982.

[B2] A. F. Beardon: *The Apollonian metric of a domain in* $\mathbb{R}^n$*;* Quasiconformal mappings and analysis – a collection of papers honoring F. W. Gehring, ed. by P. L. Duren, J. M. Heinonen, B. G. Osgood and B. P. Palka, Springer Verlag 1998, 91-108.

[Bel] P. P. Belinskii: *General properties of quasiconformal mappings* (Russian). Izd. Nauka, Novosibirsk, 1974.

[G1] F.W. Gehring: *Symmetrization of rings in space,* Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 499–519.

[G2] F.W. Gehring: *Rings and quasiconformal mappings in space,* Trans. Amer. Math. Soc. 103 (1962), 353–393.

[G3] F.W. Gehring:*Quasiconformal mappings in Euclidean spaces.* Handbook of complex analysis: geometric function theory. Vol. 2, ed. by R. Kühnau, 1-29, Elsevier, Amsterdam, 2005.

[GO] F.W. Gehring and B.G. Osgood: *Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric*, J. Anal. Math. 36 (1979), 50–74.

[H] V. Heikkala: *Inequalities for conformal capacity, modulus, and conformal invariants,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. No. 132 (2002), 62 pp.

[HV] V. Heikkala and M. Vuorinen: *Teichmüller's extremal ring problem,* Math. Z. 254 (2006), no. 3, 509–529.

[K] R. Kühnau, ed.: *Handbook of complex analysis: geometric function theory.* Vol. 1 and Vol. 2, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2002 and 2005.

[KA] D. Kalaj: *On harmonic quasiconformal self-mappings of the unit ball,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 33, 2008, 261-271.

[KM] M. Knežević, M. Mateljević: *On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings*, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 404-413.

[KMV] R. Klén, V. Manojlović and M. Vuorinen: *Distortion of two point normalized quasiconformal mappings,* Manuscript July 2008, 12 pp.,

[KP] V. Kojić and M. Pavlović: *Subharmonicity of fp for quasiregular harmonic functions, with applications*, J. Math. Anal. Appl. 342 (2008) 742-746

[LeVu] M. Lehtinen and M. Vuorinen: *On Teichmüller's modulus problem in the plane*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 33 (1988), 97–106.

[MAT] M. Mateljević: *Distorsion of harmonic functions and harmonic quasiconformal quasi-isometry*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 51:5-6, 2006, 711-722.

[MAT1] M. Mateljević: *Distorsion of harmonic functions and harmonic quasiconformal quasi-isometry 2.*, Manuscript 2008, 43 pp.

[MatV] M. Mateljević and M. Vuorinen: *On harmonic quasiconformal quasi-isometries,* arXiv:0709.454[math.CV], 11 pp.,

[MV] V. Manojlović and M. Vuorinen: *On quasiconformal maps with identity boundary values,* Manuscript May 2008, 16 pp.,

[P] I. Prause: *Flatness properties of quasispheres.* Comput. Methods Funct. Theory 7 (2007), no. 2, 527–541.

[R] Yu. G. Reshetnyak: Stability theorems in geometry and analysis. Translated from the 1982 Russian original by N. S. Dairbekov and V. N. Dyatlov, and revised by the author. Translation edited and with a foreword by S. S. Kutateladze. Mathematics and its Applications, 304. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994. xii+394 pp. ISBN: 0-7923-3118-4.

[RST] L. A. Rubel, A. L. Shields, and B. A. Taylor: *Mergelyan sets and the modulus of continuity of analytic functions*, J. Approximation Theory 15 (1975), no. 1, 23–40.

[S] V. I. Semenov: *Estimate of stability, distortion theorems and topological properties of quasiregular mappings,* Mat. Zametki 51 (1992), 109-113.

[Se] P. Seittenranta: *Möbius-invariant metrics,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 125 (1999), no. 3, 511–533.

[SolV] A. Yu. Solynin and M. Vuorinen: *Extremal problems and symmetrization for plane ring domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 4095–4112.

[TA] P. M. Tamrazov: *Contour and solid structural properties of holomorphic functions of a complex variable* (Russian), Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), 131–161. English translation in Russian Math. Surveys 28 (1973), 141–173.

[V1] J. Väisälä: *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math. 229, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[V2] J. Väisälä: *Quasisymmetric embeddings in Euclidean spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 264 (1981), no. 1, 191-204.

[Vu1] M. Vuorinen: *Conformal invariants and quasiregular mappings*, J. Anal. Math. 45 (1985), 69–115.

[Vu2] M. Vuorinen: *Conformal geometry and quasiregular mappings*, Lecture Notes in Math., 1319, Springer, Berlin, 1988.

[Vu3] M. Vuorinen: *Conformally invariant extremal problems and quasiconformal maps*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 43 (1992), 501–514.

[Vu4] M. Vuorinen: *Metrics and quasiregular mappings.* Proc. Int. Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications, IIT Madras, Dec 27, 2005 - Jan 1, 2006, ed. by S. Ponnusamy, T. Sugawa and M. Vuorinen, *Quasiconformal Mappings and their Applications*, Narosa Publishing House, 291–325, New Delhi, India, 2007.

[Vu5] M. Vuorinen: *On Picard's theorem for entire quasiregular mappings.*, Procedings of the American Mathematical Society, Vol. 107, No. 2 (Oct 1989) 383-394.

[Vu6] M. Vuorinen: *A remark on the maximal dilatation of a quasiconformal mapping.*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), no 4, 505-508.

[Vu7] M. Vuorinen: *Quadruples and spatial quasiconformal mappings.*, Math. Z. 205 (1990), no 4, 617-628.