Универзитет у Београду
Математички факултет

Регуларни Штурм-Лиувилов гранични проблем

— мастер рад —

Данило Шућур

септембар 2018.

Садржај

Увод

У теорији диференцијалних једначина проучавају се, поред осталог, две класе проблема *гранични* и *почетни*. Они су од суштинског значаја приликом моделирања различитих феномена који су предмет математичке физике и сродних научних дисциплина.

Гранични проблем за задату дифернцијалну једначину $n-$тог реда, која је дефинисана на некој области, састоји се у одређивању *свих* решења те једначине, која заједно са изводима до реда $n-1$ задовољавају задате услове у тачкама границе поменуте области. Прецизније, тражи се да неких n линеарних комбинација решења и поменутих његових извода имају на граници области задате вредности. Са друге стране, почетни проблем за поменуту једначину састоји се у одређивању *свих* решења те једначине која, заједно са свим изводима до реда $n-1$, имају задате вредности у једној фиксираној тачки из унутрашњости области дефинисаности једначине. Назив ,,почетни” долази од тога што се у теорији динамичких система независно промењива (једнодимензионална) интерпретира као ,,време”, па поменута фиксирана тачка јесте ,,почетни тренутак” у коме започиње динамички процес. Притом се у том почетном времену задају вредности непознатог решења и свих његових извода до реда који је за један мањи од реда дате диференцијалне једначине; и испитује се да ли ти почетни подаци у потпуности одређују шта ће се дешавати са решењем у даљем току времена — током еволуције феномена који се моделира тим почетним проблемом.

На пример, узмимо за независно промењиву време t које узима вредности из затвореног интервала $[0,1]$. Гранични проблем за једначину другог реда био би задат вредностима функције $y(t)$ у тачкама $t=0$ и $t=1$, док би почетни проблем био задат вредностима $y(t)$ и $y'(t)$ у почетном времену $t=0$.

Дајемо пример ***граничног проблема***. Нека је, рецимо, дата једначина

$$y''(x) + y'(x) = 0\,, \qquad x \in (0,1)\ .$$

Треба наћи решење $y = y(x)$ које задовољава граничне услове

$$y(0) = 1\,, \quad y(1) = e^{-1}.$$

Знамо да је опште решење ове једначине

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Из задатих граничних услова добијамо систем линеарних алгебарских једначина

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 e^{-1} + C_2 = e^{-1} \end{cases}$$

одакле следи да је $C_1 = 1,\ C_2 = 0$ и сходно томе *решење* постављеног *граничног проблема* је

$$y(x) = e^{-x}.$$

У теорији парцијалних диференцијалних једначина проучавају се и тзв. *мешовити гранични проблеми.* Реч је о одређивању решења $u = u(t,x)$ парцијалне једначине (реда $n \geq 2$) која је дефинисана у области $(a,b) \times G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, где је G $n-$димензионална област; притом се тражи да решење и неки његови парцијални изводи (по промењивој x) задовољавају у тачкама границе ∂G извесне услове (*гранични услови*), и то за сваки $t \in (a,b)$; такође, тражи се да вредности решења и његових парцијалних извода (по промењивој x) до реда $n-1$ буду једнаке, у некој фиксираној тачки $t_0 \in (a,b)$, задатим функцијама промењиве $x \in G$ (*почетни услови*).

Приликом моделовања физичких процеса диференцијалним једначинама, најчешће се појављују мешовити гранични проблеми за *парцијалне једначине другог реда.* Ако таква парцијална једначина дозвољава употребу такозваног *Фуријеовог метода раздвајања промењивих*, онда тај метод у великом броју случајева доводи до потребе решавања једног граничног проблема за једну посебну класу обичних диференцијалних једначина другог реда. То су тзв. *Штурм–Лиувилови гранични проблеми.* Њихово решавање доводи до решења полазног мешовитог проблема. У овом раду проучаваћемо управо те граничне проблеме. Касније током излагања увидећемо да анализа тих проблема захтева одређивање *сопствених функција* извесних *обичних диференцијалних оператора*, тј. захтева извесне сегменте *спектралне теорије* тих оператора. Такође, потребне су и извесне чињенице из функционалне анализе, теорије мере и теорије комплексних функција.

Претходно илуструјемо типичним примером из математичке физике, који треба да послужи као мотивација за даље проучавање граничних проблема. Вибрирање хоризонталне жице јединичне дужине може се описати њеним померајем (тј. удаљењем од равнотежног положаја) $u(t,x)$ у тачки $x \in [0,1]$ и тренутку $t \in [0,\infty)$. Једначина кретања за овај систем је једнодимензионална ***таласна једначина***

$$\frac{1}{a^2}\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)\,, \tag{0.1}$$

где је a брзина простирања таласа кроз жицу. Претпоставићемо да је жица *фиксирана у својим крајевима*, тј. важи $u(t,0) = u(t,1) = 0$ за $t \in [0,\infty)$ и да су задати *почетни померај* $f(x) \coloneqq u(0,x)$ и *почетна брзина* $g(x) \coloneqq \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$, где $x \in [0,1]$.

Дакле, задатак је да одредимо неконстантну функцију $u : [0,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ која у области $(0,\infty) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ јесте решење парцијалне једначине (0.1) и која задовољава *граничне услове*

$$(\forall t \in [0,\infty)) \quad u(t,0) = u(t,1) = 0\,, \tag{0.2}$$

као и *почетне услове*

$$(\forall x \in [0,1]) \quad u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)\,, \tag{0.3}$$

при чему су $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ и $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ дате непрекидне функције такве да $f(0) = f(1) = 0$ и $g(0) = g(1) = 0$.

Приметимо да је у питању парцијална диференцијална једначина. Покушајмо да решимо ту једначину тако што ћемо $u(t,x)$ представити као производ две функције од којих свака зависи од само једне промењљиве:

$$u(t,x) = w(t)y(x).$$

Овај поступак познат је као ***Фуријеов метод раздвајања промењљивих***. Уколико све уврстимо у таласну једначину и пребацимо изразе зависне од t на леву и изразе зависне од x на десну страну, респективно, налазимо

$$\frac{1}{a^2}\ \frac{\ddot{w}(t)}{w(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}\ .$$

Овде смо користили тачке да укажемо на извод по t, и примове за извод по x.

Сада, ако би ова једначина важила за све t и x, количници би били једнаки константи $-\lambda$ (минус испред константе изабран је из техничких разлога, да бисмо касније имали једноставнији запис), што нас доводи до једначине

$$-\ \frac{1}{a^2}\ \ddot{w}(t) = \lambda w(t)$$

и до следећег *граничног проблема*:

$$-\ y''(x) = \lambda y(x)\ , \qquad y(0) = y(1) = 0 \tag{0.4}$$

који се лако решавају. Решење прве једначине је функција

$$w(t) = c_1 \cos{(a\sqrt{\lambda}t)} + c_2 \sin{(a\sqrt{\lambda}t)}$$

а решење друге једначине је функција

$$y(x) = c_3 \cos{(\sqrt{\lambda}x)} + c_4 \sin{(\sqrt{\lambda}x)}$$

која још мора да задовољи и граничне услове $y(0) = y(1) = 0$. Први $y(0) = 0$ је задовољен ако $c_3 = 0$, а други повлачи

$$\sin{(\sqrt{\lambda})} = 0$$

што важи ако $\lambda = (\pi n)^2,\ n \in \mathbb{N}$. Свеукупно, добијамо фамилију решења

$$u(t,x) = (c_1 \cos(an\pi t) + c_2 \sin(an\pi t)) \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}$$

Специјално, жица чији су крајеви причвршћени може вибрирати само одређеним фиксираним фреквенцијама!

Напомињемо да ако је λ негативно, онда тригонометријске функције треба заменити одговарајућим хиперболичким аналогонима. Штавише, с обзиром да се $\sinh(x)$ поништава само у $x = 0$ не добијамо никаква додатна решења.

Пронашли смо фамилију решења која задовољавају граничне услове, али још увек нисмо разматрали почетне услове. Како је наша једначина линеарна, свака коначна линеарна комбинација решења јесте такође решење те једначине. Штавише, пошто имамо бесконачно много решења, показаће се да можемо разматрати бесконачне линеарне комбинације уз одговарајуће претпоставке о коефицијентима; тачније можемо тражити решење у облику *суме функционалног реда*, о чему говори наредно тврђење.

Лема. *Претпоставимо да низови $c_{1,n}$ и $c_{2,n}$ задовољавају*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_{1,n}| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_{2,n}| < \infty. \tag{0.5}$$

Тада

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{1,n} \cos(an\pi t) + c_{2,n} \sin(an\pi t)) \sin(n\pi x) \tag{0.6}$$

јесте из класе $C^2(\mathbb{R} \times [0,1])$ и задовољава таласну једначину, као и граничне услове $u(t,0) = u(t,1) = 0$.

Доказ : Размотримо следеће коначне суме

$$u_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N} (c_{1,n} \cos(an\pi t) + c_{2,n} \sin(an\pi t)) \sin(n\pi x)$$

$$v_N(t,x) = \sum_{n=1}^{N} (c_{1,n} \cos(an\pi t) + c_{2,n} \sin(an\pi t))\ n\pi \cos(n\pi x).$$

Користећи нашу претпоставку (0.5), из Вајерштрасовог критеријума добијамо да редови чије су парцијалне суме u_N и v_N конвергирају равномерно ка непрекидним функцијама $u(t,x)$, $v(t,x)$ респективно. Уз то, како је $v_N(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} u_N(t,x)$, налазимо да $u(t,x)$ има непрекидан парцијални извод по променљивој x дат са $\frac{\partial}{\partial x} u(t,x) = v(t,x)$. Слично се показује постојање преосталих извода. Отуда и претпоставке (0.5) (тамо стоји n^2, јер су нам потребни парцијални изводи другог реда), да бисмо по Вајерштрасовом критеријуму имали равномерну конвергенцију која обезбеђује непрекидност суме одговарајућих функционалних редова, као и могућност да те редове диференцирамо члан по члан. Додатно, чињеница да је u_N решење таласне једначине и даље важи након преласка на лимес. $\square$

Даље, под досадашњим претпоставкама, доказ претходне леме такође показује да на сегменту $[0,1]$ важе следећа разлагања

$$u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_{1,n}\sin(n\pi x)\,, \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(0,x)=\sum_{n=1}^{\infty} an\pi c_{2,n}\sin(n\pi x)\ .$$

Приметимо да суме на десној страни имају облик, до на изглед коефицијената, Фуријеовог синусног реда. Подсетимо да тригонометријски систем $\{\,\sin(n\pi x)\ \big|\ n\in\mathbb{N}\,\}$ образује потпун ортогонални систем функција на интервалу $[0,1]$. Под одређеним условима, дата функција може се разложити у такав ред, који равномерно конвергира на $[0,1]$.

Развијмо почетне функције у Фуријеове синусне редове

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n\sin(n\pi x), \qquad g(x)=\sum_{n=1}^{\infty} g_n\sin(n\pi x)$$

где

$$f_n(x)=2\int_0^1 \sin(n\pi x)f(x)dx, \qquad g_n(x)=2\int_0^1 \sin(n\pi x)g(x)dx.$$

Видимо да је решење нашег проблема, под претпоставком да Фуријеови коефицијенти задовољавају

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2|f_n|<\infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,|g_n|<\infty, \tag{0.7}$$

дато у облику (0.6) за $c_{1,n}=f_n$ и $c_{2,n}=\frac{g_n}{an\pi}$. Може се доказати да су услови (0.7) испуњени уколико функције f и g задовољавају следеће:

$$\begin{aligned} &f\in C^3[0,1], \quad f(0)=f''(0)=0 \quad f(1)=f''(1)=0,\\ &g\in C^2[0,1], \quad g(0)=g(1)=0\,. \end{aligned}$$

Дакле, претходни пример показује да се решавање мешовитог проблема (0.1)–(0.3) може свести, помоћу Фуријеовог метода, на решавање једнодимензионалног граничног проблема (0.4). При томе, од основног значаја било је постојање низа бројева $\lambda_n=(\pi n)^2$ (*сопствених вредности* проблема (0.4)) и низа функција $y_n(x)=\sin(n\pi x)$ (тзв. *сопствених функција* тог проблема) са следећим својствима: Прво, свака функција из одређене класе функција може се развити у одговарајући Фуријеов ред, који равномерно конвергира на сегменту $[0,1]$ ка тој функцији. Друго, ако се повећа глаткост развијене функције, онда се тај ред може два пута диференцирати члан по члан, и добијени редови равномерно конвергирају (ка одговарајућим изводима поменуте функције).

Као што је већ речено, овај рад посвећен је широкој класи граничних проблема који се зову Штурм–Лиувилови гранични проблеми; већ помињани гранични проблем (0.4) јесте један специјални случај. Сваки такав проблем генерише одговарајући Штурм–Лиувилов диференцијални оператор и у вези са таквим оператором од основног значаја су следећи проблеми:

(I) Одредити сопствене вредности (општије — *спектар*) и одговарајући скуп сопствених функција тог оператора, испитати основна својства тих функција; и специјално, установити својство комплетности — потпуности скупа тих функција у одговарајућем Хилбертовом простору функција.

(II) Ако је систем сопствених функција комплетан, онда испитати равномерну конвергенцију одговарајућег Фуријеовог реда за функције из поменутог простора.

(III) Испитати могућност двоструког диференцирања (члан по члан) поменутог Фуријеовог реда за функције из одређене класе функција, и понашање продиференцираних редова.

У овом раду, бавићемо се проблемима (I) и (II) и приказаћемо основне резултате. Проблем (III) веома је суптилан, предмет је бројних савремених истраживања и остаје ван домашаја нашег рада.

За крај овог уводног дела представљамо кратак приказ садржајне структуре рада. Рад је подељен на 4 дела — поглавља.

Први део посвећен је потребним сегментима спектралне теорије линеарних компактних оператора у пред-Хилбертовом простору.

У другом делу разматрају се решења тзв. Штурм–Лиувилове диференцијалне једначине. Доказане су класичне теореме о нулама тих решења. На тим теоремама базирана је важна теорија осцилаторности (чији су основни резултати приказани у овом делу), као и извесна својства сопствених функција Штурм–Лиувиловог оператора.

У трећем поглављу проучава се класични Штурм–Лиувилов гранични проблем. Тај проблем дефинисан је тзв. раздвојеним граничним условима и разматра се само регуларни случај. Приказани су основни резултати који се односе на спектар и сопствене функције одговарајућег Штурм–Лиувиловог оператора, као и на понашање Фуријеових редова (конвергенција по норми и равномерна конвергенција).

Последње, кратко поглавље односи се на регуларне Штурм–Лиувилове граничне проблеме, дефинисане произвољним самоконјугованим граничним условима. У зависности од својстава коефицијената Штурм–Лиувилове једначине и од посебног типа граничних услова, описана су (без доказа) проширења и уопштења резултата из претходног поглавља.

Желео бих да се захвалим члановима комисије — проф. др Данко Јоцић (редовни професор), др Стефан Милошевић (доцент), др Ђорђе Кртинић (доцент), на свим смерницама и саветима приликом писања овог (мастер) рада, као и на целокупној сарадњи и ангажовању током мог досадашњег универзитетског образовања. Посебну захвалност дугујем проф. др Небојши Лажетићу за одабир теме и веома актуелне литературе, брижљиво праћење напретка на изради овог рада и велико стрпљење и педантност у коментарима. Хвала још једном и ментору, др Ђорђу Кртинићу, на великој подршци и инструктивним запажањима.

Београд,
28. септембар 2018.

1. Елементи теорије пред-Хилбертових простора

У овом делу приказујемо неке сегменте математичке теорије простора са скаларним производом. Циљ ове главе је да опишемо компактне симетричне операторе. Најважнији резултат је спектрална теорема за ову класу оператора.

1.1. Пред-Хилбертови простори и ортогоналност

Претпоставимо да је ν векторски простор над пољем $\mathbb{C}$ комплексних бројева. Пресликавање $\langle\cdot,\cdot\rangle : \nu\times\nu\to\mathbb{C}$ назива се *сесквилинеарна форма* ако је антилинеарно по првом и линеарно по другом аргументу, тј. важи

$$\begin{aligned}\langle\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2, g\rangle &= \overset{*}{\alpha_1}\langle f_1,g\rangle+\overset{*}{\alpha_2}\langle f_2,g\rangle,\\ \langle f,\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2\rangle &= \alpha_1\langle f,g_1\rangle+\alpha_2\langle f,g_2\rangle,\end{aligned}\qquad \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{C} \tag{1.1}$$

где '*' означава комплексну конјугацију. Сесквилинеарна форма која задовољава услове

(i) $\langle f,f\rangle>0$ за $f\neq 0$ (позитивна дефинитност)

(ii) $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle^*$ (симетричност)

назива се *унутрашњи производ* или *скаларни производ*. Приметимо да ако се претпостави да важи (ii), онда је довољна само једна од једнакости (1.1).

Сваком скаларном производу можемо придружити одговарајућу норму на следећи начин

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}\ . \tag{1.2}$$

Само доказ неједнакости троугла није сасвим тривијалан и он следи из неједнакости Коши-Шварца.

Пар $(\nu_0,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ назива се *простор са скаларним производом* или *пред-Хилбертов простор*. Ако је ν_0 комплетан у односу на горе дефинисану норму, онда се назива ***Хилбертов простор***. Сваки пред–Хилбертов простор може се изоморфно утопити у неки Хилбертов простор, као његов свуда густи потпростор. (Реч је о тзв. комплетирању тог пред–Хилбертовог простора.)

Пример. *Векторски простор* $\mathbb{C}^n$ *са уобичајним скаларним производом*

$$\langle a,b\rangle=\sum_{j=1}^{n}\overset{*}{a_j}\,b_j \tag{1.3}$$

јесте (коночнодимензионалан) пред-Хилбертов простор.

Вектор $f \in \nu_0$ назива се *нормирани* или *јединични вектор* ако је $\|f\| = 1$. Вектори f и g су *ортогонални* или *нормални* (у ознаци $f \perp g$) ако је $\langle f, g\rangle = 0$ односно *паралелни* ако је $f = \alpha g$ за неки $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ако су f и g нормални онда важи ***Питагорина теорема***:

$$\|f + g\| = \|f\| + \|g\|, \qquad f \perp g \ . \tag{1.4}$$

Претпоставимо да је u јединични вектор. Тада се пројекција вектора f на линеал вектора u дефинише једнакошћу

$$f_{\|} = \langle u, f\rangle u \tag{1.5}$$

а вектор $f_{\perp}$, који је дефинисан помоћу

$$f_{\perp} = f - \langle u, f\rangle u \,, \tag{1.6}$$

јесте нормалан на u јер $\langle u, f_{\perp}\rangle = \langle u, f - \langle u, f\rangle u\rangle = \langle u, f\rangle - \langle u, f\rangle\langle u, u\rangle = 0$. Узимајући неки други вектор паралелан са u лако је увидети да важи

$$\|f - \alpha u\|^2 = \|f_{\perp} + (f_{\|} - \alpha u)\|^2 = \|f_{\perp}\|^2 + |\langle u, f\rangle - \alpha|^2 \tag{1.7}$$

и овај израз достиже минимум тачно за $\alpha = \langle u, f\rangle$. Дакле, $f_{\|} = \langle u, f\rangle u$ јесте јединствен вектор паралелан са u који је најближи f .

Као прву последицу добијамо неједнакост ***Коши-Шварц-Буњаковског*** :

ТЕОРЕМА (Коши-Шварц-Буњаковски)**.** *Нека је ν_0 простор са скаларним производом. Тада за свака два $f, g \in \nu_0$ важи*

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\|g\| \,, \tag{1.8}$$

при чему се једнакост достиже ако и само ако су вектори f и g паралелни.

Доказ: Довољно је размотрити случај кад $\|g\| = 1$. Користи се идентитет $f = \langle g, f\rangle g + f_{\perp}$. Тада тражена неједнакост следи из $\|f\|^2 = |\langle g, f\rangle|^2 + \|f_{\perp}\|^2 \geq |\langle g, f\rangle|^2$, при чему једнакост важи ако и само ако $f_{\perp} = 0$. □

Напоменимо да из неједнакости Коши-Шварца произилази да је скаларни производ непрекидан по оба аргумента, тј. ако $f_n \to f$ и $g_n \to g$, тада $\langle f_n, g_n\rangle \to \langle f, g\rangle$.

Као још једну последицу наводимо да пресликавање $\|\cdot\| : \nu_0 \to \mathbb{R}$ јесте норма на простору ν_0 : то следи из

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \langle f, g\rangle + \langle g, f\rangle + \|g\|^2 \leq (\|f\| + \|g\|)^2 \,. \tag{1.9}$$

Даље, уопштимо појам пројекције на линеал произвољног скупа вектора. Скуп вектора $\{u_j\}$ је *ортонормиран* ако $\langle u_j, u_k\rangle = 0$ за $j \neq k$ и $\langle u_j, u_j\rangle = 1$.

Лема. *Претпоставимо да је $\{u_j\}_{j=0}^n$ ортонормиран скуп вектора. Тада се сваки $f \in \nu_0$ може написати као*

$$f = f_{\|} + f_{\perp}, \qquad f_{\|} = \sum_{j=0}^{n} \langle u_j, f\rangle u_j, \tag{1.10}$$

где су $f_{\|}$ *и* $f_{\perp}$ *ортогонални. При томе је* $\langle u_j, f_{\perp}\rangle = 0$ *за све* $0 \le j \le n$. *Специјално,*

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{n} |\langle u_j, f\rangle|^2 + \|f_{\perp}\|^2 \tag{1.11}$$

Осим тога, сваки вектор $\hat{f}$ *из линеала скупа* $\{u_j\}_{j=0}^n$ *задовољава неједнакост*

$$\|f - \hat{f}\| \ge \|f_{\perp}\| \tag{1.12}$$

при чему једнакост важи акко је $\hat{f} = f_{\|}$. *Другим речима,* $f_{\|}$ *је једнозначно одређен као вектор из линеала скупа* $\{u_j\}_{j=0}^n$ *који је најближи вектору* f.

Доказ: Непосредан рачун даје да $\langle u_j, f - f_{\|}\rangle = 0$ и према томе $f_{\|}$ и $f_{\perp} = f - f_{\|}$ су нормални. Формула за норму следи вишеструком применом Питагорине теореме.

Сада, фиксирајмо вектор

$$\hat{f} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j u_j.$$

генерисан са $\{u_j\}_{j=0}^n$. Израчунавањем налазимо

$$\begin{aligned} \|f - \hat{f}\|^2 &= \|f_{\|} + f_{\perp} - \hat{f}\|^2 = \|f_{\perp}\|^2 + \|f_{\|} - \hat{f}\|^2 \\ &= \|f_{\perp}\|^2 + \sum_{j=0}^{n} |\alpha_j - \langle u_j, f\rangle|^2 . \end{aligned}$$

□

Из једнакости (1.11) налазимо да важи ***Беселова неједнакост***

$$\sum_{j=0}^{n} |\langle u_j, f\rangle|^2 \le \|f\|^2, \tag{1.13}$$

при чему једнакост важи ако и само ако је f вектор из линеала скупа $\{u_j\}_{j=0}^n$.

У случају бесконачног ортонормираног скупа $\{u_j\}_{j=0}^\infty$ такође важи Беселова неједнакост

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_j, f\rangle|^2 \le \|f\|^2$$

за сваки вектор $f \in \nu_0$. Та неједнакост директно следи из (1.13). С тим у вези је и следећи основни појам. Ортонормирани скуп вектора $\{u_j\}_{j=0}^N$ ($N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$) назива се *ортонормирана база* ако

$$\|f\|^2 = \sum_{j=0}^{N} |\langle u_j, f\rangle|^2 \tag{1.14}$$

за све $f \in \nu_0$. Ова дефинициона једнакост зове се ***Парсевалова једнакост***. Ако уведемо ознаку

$$f_n = \sum_{j=0}^{n} \langle u_j, f\rangle u_j , \tag{1.15}$$

онда из једнакости (1.11) следи $f - f_n \to 0$ кад $n \to N$, па према томе једнакост (1.14) еквивалентана је са

$$f = \sum_{j=0}^{N} \langle u_j, f\rangle u_j \tag{1.16}$$

за све $f \in \nu_0$. (Приметимо да је претходно резоновање суштински садржајно у случају $N = \infty$.)

За наше даље излагање од основног значаја су само пребројиве ортонормиране базе. У том случају ред $\sum_{j=0}^{\infty}\langle u_j, f\rangle u_j$ зове се *Фуријеов ред вектора* f у односу систем $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$, а бројеви $\langle u_j, f\rangle$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ јесу *Фуријеови коефицијенти* тог вектора.

1.2. Компактни симетрични оператори

Линеарни оператор је линеарно пресликавање

$$A : \mathcal{D}(A) \to \nu_0\,, \tag{1.17}$$

где $\mathcal{D}(A)$ векторски потпростор од ν_0 који се назива *домен* пресликавања A. Линеарни оператор A назива се ***симетрични*** ако његов домен јесте свуда густ скуп (тј. затворење домена једнако је целом скупу ν_0) и важи

$$\langle g, Af\rangle = \langle Ag, f\rangle, \qquad f, g \in \mathcal{D}(A)\ . \tag{1.18}$$

Број $\lambda \in \mathbb{C}$ назива се *сопствена вредност* оператора A ако постоји ненула вектор $u \in \mathcal{D}(A)$ тако да

$$Au = \lambda u\ . \tag{1.19}$$

Вектор u назива се одговарајући *сопствени вектор* у овом случају. Скуп свих сопствених вектора који одговарају броју λ проширен са нула вектором назива се *сопствени потпростор*

$$Ker(A - \lambda) = \{u \in \mathcal{D}(A)\,\big|\,(A - \lambda)u = 0\} \tag{1.20}$$

који одговара броју λ. Овде смо користили скраћену нотацију $A - \lambda$ за $A - \lambda I$, где је I идентички оператор. Сопствена вредност је *проста* ако има само један линеарно независан сопствени вектор.

ТЕОРЕМА. *Нека је A симетричан оператор. Тада су све његове сопствене вредности реалне, а сопствени вектори који одговарају различитим сопственим вредностима су ортогонални.*

Доказ: Претпоставимо да је λ сопствена вредност која одговара нормираном сопственом вектору u. Тада $\lambda = \langle u, Au\rangle = \langle Au, u\rangle = \lambda^*$, што показује да је λ реално. Осим тога, ако је $Au_j = \lambda_j u_j$, $j = 1, 2$, имамо

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2\rangle = \langle Au_1, u_2\rangle - \langle u_1, Au_2\rangle = 0\,,$$

чиме је доказ завршен. □

Нажалост ова теорема не говори нам ништа о постојању сопствених вредности. У ствари, у општем случају симетрични оператори не морају уопште имати сопствених вредности, што је илустровано следећим примером.

Пример. *Посматрамо оператор* A *дефинисан са*

$$Af(x) = xf(x)$$

на простору функција $\nu_0 = L^2([0,1])$ *са скаларним производом*

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx \ .$$

Очигледно важи $\langle g, Af\rangle = \langle Ag, f\rangle,\ f, g \in \nu_0$ *, одакле закључујемо да оператор* A *јесте симетричан.*

Сопствена вредност λ *треба да задовољава једначину* $Af = \lambda f$ *, што према дефиницији оператора* A *значи да једнакост* $xf(x) = \lambda f(x)$ *треба да важи за скоро све* $x \in [0,1]$ *. Како не постоји такав број* λ *, закључујемо да симетрични оператор* A <u>*нема сопствених вредности.*</u>

Да бисмо избегли претходну ситуацију, морамо наметнути додатне захтеве за оператор A; у том циљу, уведимо још неке појмове.

Линеарни оператор A дефинисан на $\mathcal{D}(A) = \nu_0$ је ***ограничен*** ако је број

$$\|A\| = \sup_{f:\|f\|=1} \|Af\| \tag{1.21}$$

коначан. Није тешко увидети да је то заправо норма на простору ограничених линеарних оператора. Из претходне дефиниције следи да је линеарни оператор Липшиц непрекидан, тј. важи

$$\|Af\| \leq \|A\|\|f\|, \tag{1.22}$$

а самим тим јесте и непрекидан.

Линеарни оператор A, дефинисан на $\mathcal{D}(A) = \nu_0$, назива се ***компактан*** ако за сваки ограничени низ (f_n), из домена оператора, низ слика (Af_n) садржи бар један конвергентни подниз. Сваки компактан линеарни оператор је ограничен и производ ограниченог и компактног оператора је компактан.

Проблем постојања ортонормиране базе простора ν_0, састављене од сопствених вектора датог компактног оператора, од основног је значаја за наше излагање у трећој глави. (Надаље претпостављамо, без умањења општости, да је пред-Хилбертов простор ν_0 бесконачнодимензионалан). Први корак у доказу постојања такве базе јесте да се установи постојање бар једног сопственог вектора.

ТЕОРЕМА. *Компактни симетрични оператор има сопствену вредност* α_0 *која задовољава* $|\alpha_0| = \|A\|$ *.*

Доказ: Ставимо $\alpha = \|A\|$ и претпоставимо да $\alpha \neq 0$ (тј. $A \neq 0$) без умањења општости. Како је

$$\|A\|^2 = \sup_{f:\|f\|=1} \|Af\|^2 = \sup_{f:\|f\|=1} \langle Af, Af\rangle = \sup_{f:\|f\|=1} \langle f, A^2 f\rangle,$$

то постоји низ нормираних вектора (u_n) такав да

$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n, A^2u_n\rangle = \alpha^2 \ .$$

Како је A компактан, без ограничења можемо претпоставити да (A^2u_n) конвергира, рецимо

$$\lim_{n\to\infty} A^2u_n = \alpha^2 u.$$

Даље,

$$\begin{aligned}\|(A^2-\alpha^2)u_n\|^2 &= \|A^2u_n\|^2 - 2\alpha^2\langle u_n, A^2u_n\rangle + \alpha^4 \\ &\le 2\alpha^2(\alpha^2 - \langle u_n, A^2u_n\rangle)\,,\end{aligned}$$

(овде смо користили $\|A^2u_n\| \le \|A\|\|Au_n\| \le \|A\|^2\|u_n\| = \alpha^2$) што повлачи $\lim_{n\to\infty}(A^2u_n - \alpha^2u_n) = 0$, па самим тим важи и $\lim_{n\to\infty} u_n = u$. Додатно, u је нормирани сопствени вектор оператора A^2 јер је $(A^2-\alpha^2)u = 0$. Растављајући последњу једначину на $(A-\alpha)u = v$ и $(A+\alpha)v = (A+\alpha)(A-\alpha)u = (A^2-\alpha^2)u = 0$ показујемо да или је $v \neq 0$ сопствени вектор који одговара вредности $-\alpha$ или $v = 0$, па према томе $u \neq 0$ јесте сопствени вектор који одговара сопственој вредности α. Тражена вредност сопствена вредност α_0 је управо α, тј. $\alpha_0 \coloneqq \alpha$. □

Напомињемо да ограничени оператор A не може имати сопствене вредности које су по апсолутној вредности веће од $\|A\|$, тј. скуп сопствених вредности ограничен је са $\|A\|$.

Размотримо сада компактни симетрични оператор A са сопственом вредношћу α_0 (као горе) и одговарајућим нормираним сопственим вектором u_0. Тада можемо установити постојање ортонормиране базе састављене од сопствених вектора, имитирајући доказ за коначнодимензионалан случај. Посматрамо скуп

$$\nu_0^{(1)} = \{f \in \nu_0 \big| \langle u_0, f\rangle = 0\}. \tag{1.23}$$

Приметимо да је $\nu_0^{(1)}$ затворен векторски потпростор и самим тим простор са скаларним производом. Рестрикција пресликавања A на $\nu_0^{(1)}$ јесте пресликавање у тај потпростор. То следи из: ако је $f \in \nu_0^{(1)}$, то ће бити $\langle Af, u_0\rangle = \alpha_0\langle f, u_0\rangle = 0$ и $Af \in \nu_0^{(1)}$. Означимо ову рестрикцију са A_1. Јасно је да се наслеђују својства симетричности и компактности оператора A. Дакле, вишестуком применом претходне теореме добијамо низ сопствених вредности α_j и одговарајућих нормираних сопствених вектора u_j. Штавише, по конструкцији, u_j је ортогоналан на све u_k за $k < j$, па према томе сопствени векотри $\{u_j\}$ чине оротонормиран систем.

Уведимо ознаку $Ran(A) = \{Ag \,\big|\, g \in \nu_0\}$.

ТЕОРЕМА (Спектрална теорема за компактни симетрични оператор)**.** *Претпоставимо да је ν_0 пред-Хилбертов простор и $A : \nu_0 \to \nu_0$ компактни симетрични оператор. Тада постоји низ реалних сопствених вредности (α_j) који конвергира ка 0. Одговарајући нормирани сопствени вектори u_j образују ортонормиран систем у простору ν_0 и за сваки $f \in Ran(A)$ важи да је*

$$f = \sum_{j=0}^{\infty}\langle u_j, f\rangle u_j \ . \tag{1.24}$$

Ако је скуп $Ran(A)$ свуда густ, онда скуп свих сопствених вектора образује ортонормирану базу простора ν_0.

Доказ: Постојање сопствених вредности α_j и одговарајућих сопствених вектора u_j већ је установљено. Ако сопствене вредности не би конвергирале ка нули, постојао би ограничен подниз (v_k) дефинисан са $v_k := \alpha_{j_k}^{-1} u_{j_k}$ за који (Av_k) нема конвергентан подниз јер $\|Av_k - Av_l\|^2 = \|u_{j_k} - u_{j_l}\|^2 = 2$.

Даље, нека је $f = Ag \in Ran(A)$. Ставимо да

$$f_n = \sum_{j=0}^{n} \langle u_j, f \rangle u_j, \qquad g_n = \sum_{j=0}^{n} \langle u_j, g \rangle u_j$$

и приметимо да

$$f_n = \sum_{j=0}^{n} \langle u_j, Ag \rangle u_j = \sum_{j=0}^{n} \langle Au_j, g \rangle u_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle u_j, g \rangle u_j = Ag_n.$$

Дакле,

$$\|f - f_n\| = \|A(g - g_n)\| = \|A_{n+1}(g - g_n)\| \leq |\alpha_{n+1}| \|(g - g_n)\| \leq |\alpha_{n+1}| \|g\|,$$

јер $g - g_n \in \nu_0^{(n+1)}$. Одатле следи да $f_n \to f$, кад $n \to \infty$, што доказује (1.24) у случају да $f \in Ran(A)$.

Даље, нека је $f \in \nu_0$ произвољан вектор и претпоставимо да је $Ran(A)$ свуда густ. За фиксирано $\varepsilon > 0$ постоји $\tilde{f}_\varepsilon$ тако да $\|f - \tilde{f}_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Штавише, према претходном делу постоји $\hat{f}_\varepsilon$ генерисан са $\{u_j\}_{j=0}^{n}$ за неко довољно велико n тако да $\|\tilde{f}_\varepsilon - \hat{f}_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Према томе, $\|f - \hat{f}_\varepsilon\| < \varepsilon$ и како је према леми f_n најбоља апроксимација генерисана са $\{u_j\}_{j=0}^{n}$, имамо да је $\|f - f_n\| \leq \|f - \hat{f}_\varepsilon\| < \varepsilon$ за сваки $n > m$ где $m \in \mathbb{N}$ неки довољно велики број. Тиме је релација (1.24) доказана у општем случају. $\square$

Ово је све што ће нам бити потребно и преостаје да применимо добијене разултате на Штурм-Лиувилове операторе.

2. Штурм-Лиувилова једначина

Желимо да представимо класичне Штурмове теореме о нулама решења линеарне диференцијалне једначине другог реда специфичног облика. Дакле, говорићемо о тврђењима до којих је француски математичар Шарл Штурм дошао у периоду 1833–1836. године и који представљају прве резултате у такозваној, како бисмо то данас назвали, квалитативној теорији диференцијалних једначина. Биће речи и о класификацији тих једначина према понашању нулâ њихових решењâ. Поменуте теореме разматраћемо у духу савремене теорије, уз минималне претпоставке о коефицијентима диференцијалних једначина.

2.1. Постојање и јединственост решења

Прецизирајмо прво облик линеарне диференцијалне једначине другог реда који ћемо разматрати. Пођимо од опште једначине

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0 \ ,$$

са непрекидним коефицијентима, дефинисаним на неком интервалу реалне праве, при чему је $a(x) \neq 0$ на том интервалу. Множећи претходну једнакост интеграционим фактором $e^{\int b(x)/a(x)\,dx}$, нова једначина добија облик

$$(e^{\int b(x)/a(x)\,dx}y'(x))' + c(x)e^{\int b(x)/a(x)\,dx}y(x) = 0 \ .$$

Дакле, под наведеним условима, полазна једначина може се приказати у облику

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = 0\,, \tag{2.1}$$

где је $p(x) := -e^{\int b(x)/a(x)\,dx}$ и $q(x) := c(x)e^{\int b(x)/a(x)\,dx}$. Обратно, ако се пође од једначине (2.1) у којој је функција p непрекидно диференцијабилна, а функција q непрекидна на интервалу дефинисаности једначине, онда та једначина „лако добија” полазни општи облик.

Једначина (2.1) зове се ***Штурм-Лиувилова једначина***.

Размотримо прво проблем постојања решења нехомогене варијанте диференцијалне једначине (2.1). У случају такве једначине, почетни (или Кошијев) проблем дефинише се на следећи начин: Одредити оно решење диференцијалне једначине

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = f(x) \quad \text{на интервалу} \quad J \tag{2.2}$$

која задовољава почетне услове

$$y(c) = h, \ (py')(c) = k, \quad c \in J, \quad h, k \in \mathbb{C}\,, \tag{2.3}$$

где је
$$J = (a, b), \quad -\infty \le a < b \le \infty, \quad 1/p, q, f : J \to \mathbb{C}\ . \tag{2.4}$$

Да бисмо поменути почетни проблем могли да разматрамо у најопштијој могућој ситаунцији, уведимо пресликавање

$$(\forall y \in C^2([a,b],\mathbb{C}))\,(\forall x \in [a,b]) \quad \mathcal{L}(y)(x) := -(p(x)y'(x))' + q(x)y(x)\,,$$

при чему претпостављамо да је функција p непрекидно диференцијабилна на сегменту $[a, b]$, а функција q непрекидна на том сегменту. Тада $\mathcal{L}$ представља линеарно пресликавање простора $C^2[a, b]$ у простор $C[a, b]$. То пресликавање зове се ***формални Штурм–Лиувилов диференцијални оператор*** придружен диференцијалној једначини (2.2) и он се проучава у ,,класичној" теорији диференцијалних једначина. Међутим, функција $\mathcal{L}(y)$ може да има ,,садржајно значење" и када функција p није диференцијабилна, а функција y нема класични други извод. Да бисмо то постигли, уведимо следеће функције

$$y^{[0]}(x) := y(x)\,, \quad y^{[1]}(x) := p(x)y'(x)\,, \quad y^{[2]}(x) := q(x)y(x) - (y^{[1]}(x))'\ .$$

(Ове функције зову се редом *квази–извод нултог, првог и другог реда функције* y.) Функција $y^{[1]}$ је добро дефинисана ако је функција y апсолутно непрекидна на сваком подсегменту сегмента $[a, b]$, а функција $y^{[2]}$ је добро дефинисана ако је функција $y^{[1]}$ апсолуно непрекидна на сваком подсегменту поменутог сегмента. Под претходним претпоставкама, функција $\mathcal{L}(y)$ дефинисана је скоро свуда на сегменту $[a, b]$, при чему је $\mathcal{L}(y)(x) = y^{[2]}(x)$.

Сада можемо да уведемо појам решења Штурм–Лиувилове једначине (2.2), а тиме и одговарајућег Кошијевог проблема, у претходно описаном ,,уопштеном" смислу.

Дефиниција. *Под решењем Штурм-Лиувилове једначине (2.2) подразумевамо функцију $y : J \to \mathbb{C}$ такву да су y и $y^{[1]} = py'$ апсолутно непрекидне функције на сваком компактном подинтервалу интервала J и да је једначина задовољена скоро свуда на J.*

Преостало је да одредимо које услове треба да задовољавају функције p, q, f да би претходна дефиниција била комплетирана. То ћемо учинити у формулацији следеће теореме, а за то нам је потребна још једна класа функција. За комплексну функцију дефинисану на интервалу J кажемо да је ***локално (Лебег) интеграбилна*** ако је она мерљива и интеграбилна (у Лебеговом смислу) на сваком компактном интервалу садржаном у интервалу J. Класа таквих функција означава се симболом $L_{loc}(J, \mathbb{C})$.

ТЕОРЕМА. *Претпоставимо да*

$$1/p, q, f \in L_{loc}(J, \mathbb{C}). \tag{2.5}$$

Тада сваки почетни проблем (2.2)-(2.4) има решење дефинисано на целом интервалу J и ово решење је јединствено. Специјално, ако су функције p, q, f реалне и ако је $h, k \in \mathbb{R}$, онда постоји јединствено реално решење дефинисано на интервалу J.

Доказ: Искористићемо познату везу да је линеарна диференцијална једначина другог реда еквивалентна систему првог реда који се састоји од две једначине. Тачније, та веза у разматраном случају је следећа: једначина (2.2) еквивалентна је систему
$$Y' = PY + F \quad \text{на} \quad J \tag{2.6}$$
записаном у векторском облику где
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/p \\ q & 0 \end{bmatrix}, \ F = \begin{bmatrix} 0 \\ -f \end{bmatrix}, \ Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$
Јасно је да за произвољно решење y једначине (2.2) вектор Y дефинисан у (2.7) јесте решење система (2.6); и обратно за произвољан вектор Y који је решење система (2.6) његова горња компонента y је решење једначине (2.2).

Дакле, довољно је да докажемо да систем (2.6) има јединствено решење. Међутим, то је директна последица опште варјанте Пикар-Линделефове теореме о постојању јединственог решења почетног проблема, у којој се захтева да сви чланови матричних функција P и F јесу локално интеграбилне функције, што је у нашем случају испуњено. □

Занимљиво је да је локална Лебег интегрбилност коефицијената једначине не само довољан него и *неопходан* услов за постојање јединственог решења почетног проблема. У том смислу су услови за коефицијенте најминималнији могући, тј. не могу се додатно ослабити. Према томе, можемо рећи да је овај облик фундаменталне Пикар-Линделефове теореме најбољи јер је побољшан до крајњих граница и даје услов типа ,,ако и само ако".

ТЕОРЕМА (Неопходан услов). *Ако почетни проблем (2.2)-(2.4) има јединствено решење у околини тачке c за све $c \in J$ и сваки пар $h, k \in \mathbb{C}$, онда услови (2.5) важе.*

Ова теорема је директна последица репрезентације једначине (2.2) преко система првог реда, ту везу конструисали смо у доказу претходне теореме, и следећег тврђења.

Тврђење: (Еверит-Рејс) *Нека $P : J \to M_n(\mathbb{C})$ и $F : J \to M_{n,1}(\mathbb{C})$ где је J коначан или бесконачан отворени интервал реалне праве. Ако за произвољан $u \in J$ и произвољне линеарно независне константне векторе $C_1, \dots, C_n$, сваки почетни проблем*
$$Y' = PY + F, \ Y(u) = C_i, \ i = 1, \dots, n,$$
има јединствено решење Y_i на J, онда $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$ и $F \in M_{n,1}(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. Осим тога, ако свако решење Y_i припада класи C^1, онда постоје матричне функције P и F које су непрекидне на интервалу J.

Доказ: Размотримо прво хомогени систем, тј. случај када је $F = 0$ на J. Нека је Y_i вектор-решење које задовољава $Y_i(u) = C_i$ и нека је Y матрица чија је $i-$та колона Y_i, $\quad i = 1, \dots, n$. Тада је матрично решење Y несингуларно у некој околини N_u тачке u, па на тој околини важи једнакост
$$P = Y'Y^{-1}.$$

Нека је K компактни подинтервал од J. Како отворени покривач $\{N_u : u \in J\}$ скупа K има коначни потпокривач, можемо закључити да је Y јединствено дефинисан и инвертибилан на K. Пошто је Y непрекидан и инвертибилан на K, следи да је Y^{-1} непрекидан и према томе ограничен на K. Такође, Y' је интеграбилан на K пошто је Y апсолутно непрекидан на K због чињенице да је решење на J. Одатле следи да је матрица P „интеграбилна” на компакту K, што значи да $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$.

Да бисмо утврдили и нехомогени случај, када F није идентички нула на J, нека Y буде вектор-решење једначине $Y' = PY + F$ које задовољава $Y(u) = 0$ и изаберимо решење Z ове једначине такво да $Z(u) = C$ и нека је $V = Z - Y$. Тада $V' = PV$ и $V(u) = C$. Пошто ово важи за произвољно C, можемо закључити из већ доказног, специјалног случаја, да $P \in M_n(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. Сада $F = V' - PV \in M_{n,1}(L_{loc}(J, \mathbb{C}))$. Друго тврђење теореме следи из саме структуре овог доказа. $\square$

У теорији граничних проблема *спектрални параметар* λ и *тежинска функција* w су од суштинског значаја; сходно томе, такође проучавамо и једначину

$$-(py')' + qy = \lambda wy \quad \text{на} \quad J, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.8}$$

где

$$1/p, q, w \in L_{loc}(J, \mathbb{C}), \qquad J = (a, b), \ -\infty \leq a < b \leq \infty. \tag{2.9}$$

Теореме из овог дела могу се једноставно применити и на овај случај уколико узмемо да $f = 0$ и заменимо q са $q - \lambda w$ у једначини (2.2).

2.2. Штурмова теорема о раздвајању

Као што смо најавили, испитиваћемо понашање нулâ решењâ једначине (2.2). Видећемо да су нуле произвољног нетривијалног решења, уз додатну претпоставку о позитивности коефицијента p, „фино” распоређење унутар интервала J. Такође, интересује нас и понашање тих нула, као и самих решења, у околинама крајева интервала. Претходно, уведимо појмове и размотримо нека тврђења која ће нам бити неопходна.

Дефиниција. *Нека је $J = (a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Размотримо једначину (2.2) са условима (2.5). За леву крајњу тачку a интервала J кажемо да је регуларна ако је*

$$1/p, q, f \in L((a, d), \mathbb{C})$$

за неко $d \in J$, иначе кажемо да је сингуларна. Слично, за десну крајњу тачку b интервала J кажемо да је регуларна ако

$$1/p, q, f \in L((d, b), \mathbb{C})$$

за неко $d \in J$, иначе је сингуларна.

Приметимо да уколико услови из претходне дефиниције важе за неко $d \in J$, онда они важе за свако $d \in J$.

Значај наредне теореме огледа се у томе што омогућава да се коректно дефинише гранични проблем за Штурм-Лиувилову једначину.

ТЕОРЕМА. *Нека важи* $1/p, q, f \in L_{loc}(J, \mathbb{C})$. *Тада:*

(*i*) *За свако решење* y *једначине (2.2) и његов квази-извод* $y^{[1]}$, *граничне вредности*

$$y(a) = \lim_{t \to a^+} y(t), \qquad y^{[1]}(a) = \lim_{t \to a^+} y^{[1]}(t)$$

обе постоје и коначне су ако и само ако су услови $1/p, q, f \in L((a,d), \mathbb{C})$ *испуњени за неко* $d \in J$.

(*ii*) *За свако решење* y *једначине (2.2) и његов квази-извод* $y^{[1]}$, *граничне вредности*

$$y(b) = \lim_{t \to b^-} y(t), \qquad y^{[1]}(b) = \lim_{t \to b^-} y^{[1]}(t)$$

обе постоје и коначне су ако и само ако су услови $1/p, q, f \in L((d,b), \mathbb{C})$ *испуњени за неко* $d \in J$.

Доказ претходних тврђења произилази из теореме о неопходном услову, као и из наредне теореме о непрекидном продужењу решења матричне диференцијалне једначине на крајеве интервала дефинисаности. Претходно наводимо једну општу варијанту Гронволове леме која се користи у доказу теореме о продужењу.

Лема (Гронволова неједнакост)**.** *Нека је* $J = [a,b]$. *Претпоставимо да је* g *из класе* $L(J, \mathbb{R})$ *при чему је* $g \geq 0$ *скоро свуда и* f *реално-вредносна и непрекидна на* J.

(*i*) *(„десна" Гронволова неједнакост) Ако је* y *непрекидна, реално-вредносна и задовољава*

$$y(t) \leq f(t) + \int_a^t g(s)y(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

онда

$$y(t) \leq f(t) + \Big(\int_a^t f(s)g(s) \exp\Big(\int_s^t g(u)du \Big) ds \Big), \quad a \leq t \leq b.$$

Специјално, када је $f(t) = c$, *константа, добијамо*

$$y(t) \leq c \exp\Big(\int_a^t g(s)ds \Big), \quad t \in J.$$

Специјално, када је f *неопадајућа на* $[a,b]$ *добијамо*

$$y(t) \leq f(t) \exp\Big(\int_a^t g(s)ds \Big), \quad a \leq t \leq b.$$

(*ii*) *(„лева" Гронволова неједнакост) Ако је* y *непрекидна, реално-вредносна и задовољава*

$$y(t) \leq f(t) + \int_t^b g(s)y(s)ds, \quad a \leq t \leq b,$$

онда

$$y(t) \leq f(t) + \Big(\int_t^b f(s)g(s) \exp\Big(\int_t^s g(u)du \Big) ds \Big), \quad a \leq t \leq b.$$

Специјално, када је $f(t) = c$, *константа, добијамо*

$$y(t) \le c \exp\Big(\int_t^b g(s)ds\Big), \quad t \in J.$$

Специјално, када је f *нерааступа на* $[a, b]$ *добијамо*

$$y(t) \le f(t) \exp\Big(\int_t^b g(s)ds\Big), \quad a \le t \le b.$$

ТЕОРЕМА. *Нека је* $J = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$. *Претпоставимо да*

$$P \in M_n(L_{loc}(a, c), \mathbb{C}), \quad F \in M_{n,m}(L_{loc}(a, c), \mathbb{C}).$$

(i) *Нека додатно важи и*

$$P \in M_n(L(a, c), \mathbb{C}), \quad F \in M_{n,m}(L(a, c), \mathbb{C}).$$

за неко $c \in (a, b)$. *За неко* $u \in J$ *и* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ *нека је* Y *решење почетног проблема* $\begin{cases} Y' = PY + F \\ Y(u) = C, \ u \in J, \ C \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \end{cases}$ *на интервалу* J. *Тада гранична вредност*

$$Y(a) = \lim_{t \to a^+} Y(t)$$

постоји и коначна је.

(ii) *Нека додатно важи и*

$$P \in M_n(L(c, b), \mathbb{C}), \quad F \in M_{n,m}(L(c, b), \mathbb{C}).$$

за неко $c \in (a, b)$. *За неко* $u \in J$ *и* $C \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ *нека је* Y *решење почетног проблема* $\begin{cases} Y' = PY + F \\ Y(u) = C, \ u \in J, \ C \in M_{n,m}(\mathbb{C}) \end{cases}$ *на интервалу* J. *Тада гранична вредност*

$$Y(b) = \lim_{t \to b^-} Y(t)$$

постоји и коначна је.

Доказ: Докажимо тврђење за случај десног краја b, доказ за леви крај a је потпуно аналоган. Из експлицтног облика Кошијевог решења применом Гронволове леме добијамо оцену

$$|Y(t)| \le (|C| + \int_a^b |F|) \exp(\int_a^b |P|), \ a < t < b$$

из које следи да је $|Y|$ ограничено на $[c, b)$ за $c \in J$, рецимо неком константом B. Нека је $\{b_i\}$ произвољан строго растући низ који тежи ка b. Тада за $j > i$ налазимо

$$|Y(b_j) - Y(b_i)| = |\int_{b_i}^{b_j} PY| \le B \int_{b_i}^{b_j} |P|.$$

Одавде на основу апсолутне непрекидности Лебеговог интеграла следи да је $\{Y(b_i) : i \in \mathbb{N}\}$ Кошијев низ и према томе тежи коначној граничној вредности. $\square$

Вратимо се сада нулама решењâ Штурм–Лиувилове једначине. Наредна лема описује глобални ,,распоред” тих нула у области дефинисаности решења, а такође омогућава каснију класификацију тих решења, везану за феномен *осцилаторности.*

Лема. *Нека је дата једначина*

$$-(py')' + qy = \lambda wy \quad \text{на} \quad J, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

при чему

$$\frac{1}{p}, q, w \in L_{loc}(J, \mathbb{R}), \qquad J = (a, b),\ -\infty \leq a < b \leq \infty \tag{2.11}$$

и претпоставимо да је $p > 0$ *скоро свуда на* J. *Тада су нуле сваког нетривијалног решења* y *једначине (2.10) изоловане у унутрашњости интервала* J. *Ако нетривијално решење* y *има нулу у регуларном крају интервала* J, *тада постоји одговрајућа једнострана околина тог краја у којој* y *нема других нула.*

Дакле, једино сингуларни крај интервала J може бити тачка нагомилавања нула неког нетривијалног решења y једначине (2.10).

Доказ: Прво показујемо да ако y има узастопне нуле $c, d \in (a, b)$, $c < d$, онда $(py')(h) = 0$ за неко $h \in (c, d)$. Добијамо

$$0 = y(d) - y(c) = \int_c^d y' = \int_c^d \frac{1}{p}(py') = (py')(h) \int_c^d \frac{1}{p}$$

према теореми о средњој вредности за Лебегов интеграл. (Подсећамо да је py' непрекидна на J.) Дакле, важи $(py')(h) = 0$ или $\int_c^d \frac{1}{p} = 0$, али ово друго би дало да $\frac{1}{p} = 0$ скоро свуда на (c, d) што је у контрадикцији са претпоставком да је $p > 0$ скоро свуда на (a, b).

Сада да бисмо доказали тврђење претпоставимо да постоји низ $\{t_n \in (a, b) : n \in \mathbb{N}_0\}$ такав да $t_n \to t_0$ и $y(t_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Тада $y(t_0) = 0$ пошто је y непрекидна и на основу првог дела доказа добијамо низ $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ при чему $h_n \to t_0$ такав да $(py')(h_n) = 0$. Пошто је $y^{[1]}$ непрекидна на (a, b), следи да $y^{[1]}(t_0) = 0$. Али $y(t_0) = 0$ и $y^{[1]}(t_0) = 0$ повлачи да је y идентички једнако нули на J због јединствености решења почетног проблема. На основу добијене контрадикције, закључујемо да тврђење важи. □

Сада можемо да формулишемо и докажемо прву од славних Штурмових теорема.

ТЕОРЕМА (Штурмова теорема о раздвајању)**.** *Нека коефицијенти једначине (2.10) задовољавају услове (2.11) и нека је* $p > 0$ *скоро свуда на* J. *Ако су* y *и* z *линеарно независна решења једначине (2.10), онда* z *има нулу између сваке две нуле решења* y.

Доказ: Претпоставимо да $y(c) = 0 = y(d)$. Пошто су y и z линеарно независни ниједно од њих није тривијално решење и немају заједничких нула. Према претходном тврђењу можемо претпоставити да су c и d узастопне нуле решења y и да је $c < d$. Даље, замењујући y са $-y$, уколико је неопходно, можемо претпоставити да је $y > 0$ на отвореном интервалу (c, d). Тада

$$0 < y(t) - y(c) = \int_c^t \frac{1}{p}(py').$$

Ово повлачи да $(py')(c) > 0$. Иначе, пошто је py' непрекидна и $(py')(c)$ није нула, претпоставка да $(py')(c) < 0$ повлачи да је py' негативно у некој десној околини тачке c, а ово је у супротности са горњом једначином. Слично добијамо да $(py')(d) < 0$.

Сада множећи једначину за y са z и једначину за z са y и одузимајући их, добијамо

$$0 = z(py')' - y(pz')' = [z(py') - y(pz')]' \ .$$

Интеграцијом налазимо да

$$z(d)(py')(d) - z(c)(py')(c) = 0 \ .$$

Претпоставимо да z нема нула у (c, d). Ако је $z > 0$ на (c, d), онда је лева страна горње једначине позитивна што даје контрадикцију. Слично контрадикцију добијамо и за случај $z < 0$, чиме је доказ завршен. □

Циљ следећег примера је да илуструје да претпоставка $p > 0$ скоро свуда на J не може бити изостављена.

Пример. *Једначина*

$$-(py')' = 0 \ \text{ на } \ (0,1), \qquad \frac{1}{p(t)} = t^{-2}\sin(\frac{1}{t}), \quad 0 < t < 1$$

има решења $u(t) = 1,\ v(t) = \cos(\frac{1}{t}),\ 0 < t < 1$ *на* $(0,1)$. *Решење* u *нема нула на интервалу* $(0,1)$, *док је решење* v *осцилаторно у нули, тј. има бесконачан број нула у произвољној десној околини тачке* 0. *Крајња тачка* 0 *је сингуларна. Размотримо ову једначину на интервалу* $J = (\varepsilon, 1),\ 0 < \varepsilon < 1$. *Тада решење* u *нема нула на* J *и за произвољан позитиван цео број* n *можемо изабрати* ε *довољно мало тако да решење* v *има* n *нула у интервалу* J.

2.3. Штурмова теорема о поређењу

Фраза *решење диференцијалне једначине је осцилаторно у датој тачки* користи се у ситуацији када поменута тачка јесте тачка нагомилавања скупа нула тог решења (в. претходни пример). Према леми из претходног одељка, решење диференцијалне једначине (2.10) може бити осцилаторно само у сингуларном крају интервала J. Са друге стране, из Штурмове теореме о раздвајању следи да у сингуларном крају или сва решења те једначине јесу осцилаторна или ниједно није. С тим у вези дајемо следеће дефиниције у случају диференцијалне једначине

$$-(py')' + qy = 0 \ \text{ на } \ J = (a,b), \quad -\infty \le a < b \le \infty \,, \tag{2.12}$$

при чему је $1/p, q \in L_{loc}(J, \mathbb{R})$ и $p > 0$ скоро свуда на J.

Дефиниција. (i) *Крај* a *(крај* b*) назива се осцилаторним ако постоји решење* u *једначине (2.12) које има бар једну нулу у интервалу* (a, c) *(у интервалу* (c, b)*) за сваку тачку* $c \in J$.

(ii) *Кажемо да је диференцијална једначина (2.12) осцилаторна у тачки* a *(у тачки* b*) ако је тачка* a *(тачка* b*) осцилаторна.*

На основу Штурмове теореме о раздвајању закључујемо да су сва нетривијална решења осцилаторна у сингуларној тачки једначине или ниједно од њих није осцилаторно. Дакле, осцилаторност у датом сингуларном крају је својство саме једначине, које не зависи од партикуларног решења. Према томе, претходна дефиниција је коректна.

Уведена дефиниција омогућава да све једначине типа (2.12) разврстамо у две дисјунктне класе које ћемо означавати са O (осцилаторне) и NO (неосцилаторне). Ова класификација важи у сваком сингуларном крају и наравно може се разликовати у крајевима a, b одговарајућег интервала J.

Сада се бавимо Штурмовом теоремом о поређењу која је веома битно средство за добијање довољних услова за осцилаторност.

ТЕОРЕМА (Штурмова теорема о поређењу)**.** *Придружимо диференцијалној једначини (2.12), уз тамо наведене услове за коефицијенте, поредбену једначину*

$$(Pz')' + Qz = 0 \quad \text{на} \quad J. \tag{2.13}$$

Претпоставимо да $1/P,\ Q \in L_{loc}(J, \mathbb{R})$ *и да је задовољено*

$$Q \geq q, \quad 0 < P \leq p \quad \text{на} \quad J. \tag{2.14}$$

Ако је y *нетривијално решење једначине (2.12) које задовољава* $y(c) = 0 = y(d)$ *за неке* $c, d \in J,\ c < d$, *онда свако решење једначине (2.13) има нулу у затвореном интервалу* $[c, d]$.

Доказ: Пошто су нуле решења y изоловане према леми из претходног одељка, можемо претпоставити да су c и d узастопне нуле решења y. Замењујући y са $-y$, уколико је то неопходно, можемо такође претпоставити да је $y > 0$ на (c, d). Претпоставимо да је z нетривијално решење поредбене једначине (2.13) које нема нула у $[c, d]$. Тада директним, мада заморним, рачуном добијамо такозвани Пиконов идентитет:

$$[\frac{y}{z}(py'z - Pz'y)]' = (Q - q)y^2 + (p - P)y'^2 + P\frac{(yz' - zy')^2}{z^2} \ . \tag{2.15}$$

интеграцијом долазимо до

$$\int_c^d (Q - q)y^2 + \int_c^d (p - P)y'^2 = -\int_c^d P\frac{(yz' - zy')^2}{z^2} \ . \tag{2.16}$$

Претпоставка (2.14) повлачи да $yz' - zy' = 0$ скоро свуда на $[c, d]$. Одатле је $f = y/z = 0$ и последично је $y = 0$ на $[c, d]$. На основу теореме о јединствености решења за почетни проблем следи да је y тривијално решење на J и овом контрадикцијом је доказ завршен. $\square$

2.4. Осцилаторност решења

Желимо да у овом делу проширимо и подробније опишемо концепт осцилаторности уведен у претходном одељку. У том циљу, за почетак представимо

Штурм-Лиувилову једначину у облику који је погодан за теорију осцилаторности. Знак ,,минус" испред главног члана диференцијалне једначине (2.12) од значаја је у спектралној теорији Штурм–Лиувиловог оператора, док се у теорији осцилаторности проучава једначина облика

$$My = (py')' + qy = 0 \quad \text{на} \quad J = (a, b), \quad -\infty \leq a < b \leq \infty, \tag{2.17}$$

при чему претпостављамо да коефицијенти задовољавају

$$1/p, q \in L_{loc}(J, \mathbb{R}), \quad p > 0 \ \text{ скоро свуда на } J. \tag{2.18}$$

При томе, све до сада установљене чињенице, везане за осцилаторност, остају на снази и у овом случају. Дакле, према леми из одељка о Штурмовој теореми о раздвајању ниједно нетривијално решење једначине (2.17) не може имати тачку нагомилавања нула у унутрашњости интервала J нити у регуларном крају тог интервала. Нуле, ако их има, сваког нетривијалног решења једначине (2.17) унутар интервала J су изоловане. Према томе, само крајеви интервала J могу бити тачке нагомилавања нула нетривијалног решења једначине (2.17) и то се може догодити само у сингуларном крају.

Дефиниција. *Нека су u, v реална решења једначине (2.17). Тада*

- *u се назива истакнуто решење у тачки a ако*

  (i) *$u(t) \neq 0$ за $t \in (a, d]$ и неко $d \in J$,*

  (ii) *свако решење y једначине (2.17) које није умножак од u задовољава $u(t)/y(t) \to 0$ кад $t \to a^+$. (Приметимо да $y(t) \neq 0$ за t у некој десној околини тачке a, према Штурмовој теореми о раздвајању.)*

- *v се назива неистакнуто решење у тачки a ако*

  (i) *$v(t) \neq 0$ за $t \in (a, d]$ и неко $d \in J$,*

  (ii) *v није истакнуто решење у тачки a.*

Истакнуто и неистакнуто решење у тачки b дефинишу се на аналоган начин.

Да бисмо поједноставили излагање, што је у крајњој линији и у маниру претходне дефиниције, у наставку формулишемо све исказе за леву крајњу тачку. Потпуно аналогне дефиниције и тврдње важе и за десну крајњу тачку.

Директна последица дефиниције је следеће тврђење:

Лема. *Ако једначина (2.17) има истакнуто решење u у тачки a, онда сваки ненула реални умножак од u јесте такође истакнуто решење и нема других решења која су истакнута у тачки a.*

Према претходној леми истакнуто решење u у крајњој тачки, уколико постоји, јединствено је до на множење реалном константом. Неистакнута решења никада нису јединствена; из следећег разлога: ако је v неистакнуто решење и u истакнуто решење, оба у истој крајњој тачки, онда $v + cu$ је такође неистакнуто решење за свако $c \in \mathbb{R}$. Једноставни примери показују да једно исто решење може бити истакнуто у једној крајњој тачки, док је у другој неистакнуто.

У претходном одељку увели смо појам осцилаторних и неосцилаторних једначина. Испитајмо сада каква је њихова веза са новоуведеним појмом истакнутог односно неистакнутог решења. Јасно је одмах да се истакнута односно неистакнута решења не могу појавити у осцилаторним крајевима.

Ако је једначина (2.17) регуларна у тачки a, онда за произвољно решење y функције y и py' могу бити непрекидно продужене до тачке a и истакнуто решење u постоји и задовољава почетне услове: $u(a) = 0$, $(pu')(a) \neq 0$. За свако неистакнуто решење v у тачки a мора важити $v(a) \neq 0$.

Став. *Једначина (2.17) је неосцилаторна у тачки* a *ако и само ако постоји истакнуто решење у тачки* a.

Следећи резултат даје карактеризацију истакнутих и неистакнутих решења.

Тврђење: *Претпоставимо да је једначина (2.17) неосцилаторна у тачки* a. *Нека су* u, v *реална решења која задовољавају* $u(t) \neq 0$, $v(t) \neq 0$ *за* $t \in (a, d]$ *и неко* $d \in J$. *Тада*

(i) u *је истакнуто решење у тачки* a *ако и само ако*

$$\int_a^d \frac{dt}{pu^2(t)} = \infty,$$

(ii) v *је неистакнуто решење у тачки* a *ако и само ако*

$$\int_a^d \frac{dt}{pv^2(t)} < \infty,$$

(iii) *ако је* u *истакнуто решење и* v *неистакнуто решење у тачки* a, *онда постоји* $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *такво да*

$$u(t) = v(t) \int_a^t \frac{c}{pv^2(s)} ds, \quad a < t \leq d,$$

(iv) *ако је* u *истакнуто решење и* v *неистакнуто решење у тачки* a, *онда*

$$|u(t)v(x)| < |u(x)v(t)| \quad \text{за} \quad a < t < x \leq d.$$

Сада ћемо поменути неколико класичних критеријума за испитивање осцилаторности једначине у тачки ∞. Дакле, нека важе (2.17) и (2.18) при чему је J полуправа, тј. $J = (a, \infty)$ за неки a, $1 < a < \infty$ и $p = 1$. Применићемо Штурмову теорему о поређењу користећи једначину са константним коефицијентима

$$y'' + \delta y = 0$$

за поређење. Налазимо да важи следеће

(i) ако $q(t) \geq \delta > 0$, онда је једначина осцилаторна;

(ii) ако $q(t) \leq 0$, онда је једначина неосцилаторна.

Празнина између 0 и δ оставља простор који може бити сужен користећи Ојлерову једначину

$$y'' + \frac{1}{4t^2}y = 0$$

као поредбену једначину што је учинио Кнесер 1893. године:

(i) ако $q(t) \geq \frac{1+\delta}{4t^2}$, онда је једначина осцилаторна;

(ii) ако $q(t) \leq \frac{1}{4t^2}$, онда је једначина неосцилаторна.

Кнесеров критеријум може се побољшати кориштењем следећег проширења Ојлерове поредбене једначине:

$$y'' + (\frac{1}{4t^2} + \frac{c}{4(t\ln t)^2})y = 0\ .$$

(iii) Ако $c > 1$, онда је једначина осцилаторна;

(iv) ако $c \leq 1$, онда је једначина неосцилаторна.

Овај процес може се наставити да би се добио низ јачих резултата. Следећа поредбена једначина је

$$y'' + (\frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4(t\ln t)^2})y + \frac{c}{4(t\ln(\ln t))^2}y = 0\ .$$

(v) Ако $c > 1$, онда је једначина осцилаторна;

(vi) ако $c \leq 1$, онда је једначина неосцилаторна.

И тако даље процес се може настављати...

Сада доказујемо један од најбољих међу познатим критеријума који укључује оба коефицијента једначине и познат је под називом интегрални тест.

ТЕОРЕМА. *Нека важе (2.17) и (2.18).*

- *Ако*

$$\int_c^b \frac{dt}{p(t)} = \infty \quad \text{и} \quad \int_c^b q(t)dt = \infty$$

за неко $c \in J$*, онда је једначина (2.17) осцилаторна у тачки* b.

- *Ако*

$$\int_a^c \frac{dt}{p(t)} = \infty \quad \text{и} \quad \int_a^c q(t)dt = \infty$$

за неко $c \in J$*, онда је једначина (2.17) осцилаторна у тачки* a.

Доказ: Доказујемо тврђење само за десну крајњу тачку b, доказ за леви крај a је потпуно анологан. Претпоставимо неосцилаторност у тачки b и нека су u, v позитивно истакнуто и неистакнуто решење, респективно, на $[d, b)$ за неко $d \in J$. Означавајући са $q = -(pv')'/v$ на $[d, b)$ и примењујући парцијалну интеграцију добијамо

$$\int_d^t \frac{(pv')'}{v}(s)ds = \frac{(pv')}{v}(t) - \frac{(pv')}{v}(d) - \int_d^t pv'\frac{-v'}{v^2}(s)ds = \frac{(pv')}{v}(t) - \frac{(pv')}{v}(d)$$

$$+\int_d^t \frac{1}{p}\frac{(pv')^2}{v^2}(s)ds = -\int_d^t q(s)ds \to -\infty \quad \text{кад} \quad t \to b.$$

Дакле, $(pv')(t)/v(t) \to -\infty$ кад $t \to b$ и pv' је негативно близу b. Дакле, v је опадајућа у левој околини тачке b и према томе има граничну вредност b, рецимо,

$$v(t) \to L \quad \text{кад} \quad t \to b, \quad 0 \le L < \infty.$$

Из овога следи да, за неко $h \in [d, b)$ и неко $\varepsilon > 0$ имамо

$$v^2(t) < L^2 + \varepsilon, \quad \frac{1}{v^2(t)} > \frac{1}{L^2+\varepsilon}, \quad d \le h \le t < b.$$

Ово повлачи да

$$\int_h^t \frac{ds}{pv^2(s)} \ge \frac{1}{L^2+\varepsilon}\int_h^t \frac{ds}{p(s)}, \quad d \le h \le t < b.$$

Ово и претпоставка заједно дају да

$$\int_h^b \frac{dt}{pv^2(t)} = \infty\,,$$

што је у контрадикцији са тачком (ii) претходног тврђења с обзиром да је v неистакнуто решење у тачки b. $\square$

2.5. Детаљније о вези Штурм-Лиувилове једначине и придруженог система првог реда

У овом одељку разматрамо један од основних резулата из теорије система линеарних диференцијалних једначина, који ће играти важну улогу у следећој глави, а везан је за Штурм–Лиувилову једначину са спектралним параметром, тј. за једначину

$$-(p(x)y')' + (q(x) - \lambda w(x))y = 0 \text{ на } J = (a,b),\ -\infty < a < b < \infty, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.19}$$

Притом претпостављамо да су испуњени следећи услови:

$$w, q \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ p \in C^1([a,b],\mathbb{R}), \quad p(x), w(x) > 0,\ x \in [a,b]. \tag{2.20}$$

Под наведеним условима, за једначину (2.19) каже се да је *регуларна*.

Приметимо да под условима (2.20) свако решење једначине (2.19) припада класи $C^2(J,\mathbb{C})$, а сама једначина (2.19) еквивалентна је систему диференцијалних једначина првог реда

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{p(x)}z\,, \\ z' &= (q(x) - \lambda w(x))y\,, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $z(x) = y^{[1]}(x) = p(x)y'(x)$. Дакле, видимо да постоји јединствено решење ако су $p(x)^{-1}$, $q(x)$ и $w(x)$ непрекидне на J. Према раније развијеној теорији, исти закључак важи и ако се само претпостави да су претходне функције локално интеграбилне на интервалу J.

Фундаментална матрица система (2.21) дата је са

$$\Pi(\lambda, x, x_0) = \begin{pmatrix} c(\lambda, x, x_0) & s(\lambda, x, x_0) \\ p(x)c'(\lambda, x, x_0) & p(x)s'(\lambda, x, x_0) \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2.22}$$

где је $c = c(\lambda, x, x_0)$ решење једначине (2.19) које задовољава почетне услове $c(\lambda, x, x_0) = 1$, $p(x_0)c'(\lambda, x, x_0) = 0$, а $s = s(\lambda, x, x_0)$ је решење које задовољава почетне услове $s(\lambda, x, x_0) = 0$, $p(x_0)s'(\lambda, x, x_0) = 1$. Притом је $x_0 \in J$ произвољна фиксирана тачка.

Из претходног да је $\Pi(\lambda, x, x_0)$ непрекидна у односу на x и x_0, али у односу на λ важи много јачи резултат. Подсећамо да се функција назива ***цела*** ако је аналитичка у целој комплексној равни $\mathbb{C}$.

Сада можемо да формулишемо основни резултат који смо поменули у уводу овог одељка. Његов доказ изостављамо, јер је веома суптилан и излази из домена овог рада.

Лема. *Фундаментална матрица* $\Pi(\lambda, x, x_0)$ *је цела функција у односу на променљиву* λ *за све фиксиране* $(x, x_0) \in J \times J$.

На крају овог одељка наводимо још неке познате чињенице из теорије система линеарних диференцијалних једначина; оне ће нам бити потребне у следећој глави.

Прво, према познатој Лиувиловој формули, ***модификовани вронскијан***,

$$W_x(u, v) = u(x)p(x)v'(x) - p(x)u'(x)v(x), \tag{2.23}$$

независан је од x ако су $u(x)$ и $v(x)$ решења једначине (2.19) за фиксирано $\lambda \in \mathbb{C}$. Специјално важи једнакост,

$$\det \Pi(\lambda, x, x_0) = W(c(\lambda, \cdot, x_0), s(\lambda, \cdot, x_0)) = 1 . \tag{2.24}$$

Друго, решење нехомогене једначине облика

$$-(p(x)y')' + (q(x) - \lambda w(x)) = g(x)w(x) \tag{2.25}$$

јесте функција

$$y(x) = y(x_0)c(\lambda, x, x_0) + y'(x_0)s(\lambda, x, x_0) + \int_{x_0}^{x} s(\lambda, x, t)g(t)w(t)dt . \tag{2.26}$$

Треће, ако су u, v линеарно независна решења једначине (2.19), онда важе једнакости

$$\begin{aligned} c(\lambda, x, x_0) &= \frac{u(x)p(x_0)v'(x_0) - p(x_0)u'(x_0)v(x)}{W(u, v)}, \\ s(\lambda, x, x_0) &= \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{W(u, v)} . \end{aligned} \tag{2.27}$$

Јасно је да су обе функције решења, а почетни услови се тривијално проверавају. Напомињемо још да функције u, v зависе и од параметра λ : $u = u(\lambda, x)$, $v = v(\lambda, x)$.

3. Регуларни Штурм-Лиувилов гранични проблем: раздвојени гранични услови

У овој глави разматрамо савремену варијанту Штурм-Лиувиловог граничног проблема. Тај проблем дефинисан је Штурм-Лиувиловом диференцијалном једначином (на коначном интервалу) и тзв. раздвојеним граничним условима. За одговарајући Штурм-Лиувилов диференцијални оператор решавају се проблеми типа (I) и (II) који су формулисани у Уводу.

Класична варијанта поменутог проблема први пут формулисана је и проучавана у славном заједничком раду Штурма и Жозефа Лиувила из 1837. године. Рад се ослања на претходне Штурмове резултате о решењима једначине (2.1) (приказане у претходној глави) и у њему се проучава могућност да се елементи једне широке класе функција развију у функционални ред (Фуријеовог типа), генерисан посебним низом решења те једначине. Тај рад представља клицу из које се развила савремена спектрална теорија диференцијалних оператора.

3.1. Штурм-Лиувилов оператор и гранични услови

Основни резултати ове главе биће доказани помоћу пред-Хилбертове теорије, коју смо приказали у првој глави. За то ће нам бити потребан један такав „радни” простор. Нека је $\nu_0 := C([a,b],\mathbb{C})$ простор снабдевен скаларним производом који је дефинисан релацијом

$$\langle f, g\rangle = \int_I f(x)^* g(x) w(x) dx\ . \tag{3.1}$$

Разматрамо спектрални облик Штурм-Лиувилове једначине на произвољном сегменту $[a,b] \subset \mathbb{R}$, тј. једначину:

$$-(p(x)y')' + q(x)y = \lambda w(x)y, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.2}$$

при чему претпостављамо да коефицијенти једначине задовољавају услове (2.20). Услов позитивности тежинске функције омогућава да се ова једначина напише у облику

$$\frac{1}{w(x)}\Big(-(p(x)y')' + q(x)y\Big) = \lambda y. \tag{3.3}$$

Лева страна једнакости (3.3) дефинише један формални диференцијални оператор $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}y := \frac{1}{w(x)}\Big(-(p(x)y')' + q(x)y\Big). \tag{3.4}$$

Овај оператор — диференцијални израз дејствује на два пута непрекидно диференцијабилне функције и ,,пребацује" их у непрекидне функције. Помоћу диференцијалног израза $\mathcal{L}$ дефинишемо ,,прави" диференцијални оператор L увођењем следећег векторског простора:

$$\mathcal{D}(L) = \{f \in C^2([a,b],\mathbb{C}) \big| BC_a(f) = BC_b(f) = 0\}, \tag{3.5}$$

где је

$$\begin{aligned} BC_a(f) &\coloneqq \cos(\alpha) f(a) - \sin(\alpha) p(a) f'(a), \\ BC_b(f) &\coloneqq \cos(\beta) f(b) - \sin(\beta) p(b) f'(b)\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Као што ће бити показано ниже, овај (пот)простор је свуда густ у пред-Хилбертовом простору ν_0. Дефинишимо оператор $L : \mathcal{D}(L) \to C([a,b],\mathbb{C})$ помоћу

$$(\forall f \in \mathcal{D}(L))(\forall x \in [a,b]) \;\; L(f)(x) \coloneqq \mathcal{L}(f)(x)\,.$$

Овај оператор зове се ***Штурм-Лиувилов диференцијални оператор***.

Да је област дефинисаности тог оператора густа у простору ν_0 показује следеће тврђење.

Лема. *Скуп двапут диференцијабилних функција са компактним носачем $C_c^2((a,b),\mathbb{C})$ је свуда густ у ν_0.*

Доказ: Нека је $P(x) = 30\int_0^x y^2(y-1)^2 dy = x^3(6x^2-15x+10)$. Напомињемо да је по конструкцији $P(x)$ монотоно растућа од 0 до 1 (специјално $0 \le P(x) \le 1$ за $0 \le x \le 1$) и обе функције $P'(x)$ као и $P''(x)$ анулирају се у $x=0$ и $x=1$. Ставимо $P(x) = 0$ за $x \le 0$ и $P(x) = 1$ за $x \ge 1$ да би било $P(x) \in C^2(\mathbb{R})$

Даље бирамо f из $C([a,b],\mathbb{C})$. Како је f равномерно непрекидна можемо наћи $\delta > 0$ за свако $\varepsilon > 0$ тако да $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ кад год $|x - y| \le \delta$. Умањујући δ, можемо претпоставити да је $b - a = n\delta$ за неки цео број n и $\delta \le \varepsilon$. Сада ставимо $x_j = a + j\delta,\ 0 \le j \le n$ и дефинишимо

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) = f(x_1) P\Big(\frac{x-a-\delta/2}{\delta/2}\Big) + \sum_{j=1}^{n-1} \Big(f(x_{j+1} - f(x_j)\Big) P\Big(\frac{x-x_j}{\delta}\Big) \\ - f(x_{n-1}) P\Big(\frac{x-b+\delta}{\delta/2}\Big). \end{aligned}$$

Тада $f_\varepsilon \in C_c^2((a,b),\mathbb{C})$ и $\max_{x\in[x_1,x_{n-1}]} |f(x) - f_\varepsilon(x)| \le \varepsilon$. Дакле,

$$\|f - f_\varepsilon\|^2 \le 8M^2R^2\delta + \varepsilon^2 R^2(b-a) \le \varepsilon(8M^2 + \varepsilon(b-a))R^2\,,$$

где $M = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|,\ R = \max_{x\in[a,b]} |r(x)|$ одакле тврђење следи. □

Није тешко показати да исто важи у случају $C_c^\infty((a,b),\mathbb{C})$.

Вратимо се сада на граничне проблеме. *Штурм-Лиувилов гранични проблем* дефинише се на следећи начин: Одредити сва решења y диференцијалне једначине (3.2) која задовољавају граничне услове

$$BC_a(y) = 0\,, \quad BC_b(y) = 0\,. \tag{3.7}$$

С обзиром да оба краја сегмента $[a,b]$ јесу регуларна у смислу познате дефиниције, за овај гранични проблем (као и за сам оператор L) каже се да је ***регуларан***. Како су услови које решење и његов први извод треба да задовољавају дати посебно у тачки a и посебно у тачки b, услови (3.7) називају се ***раздвојени гранични услови***. Специјално, ако су само вредности решења у крајевима сегмента једнаке нули, онда је реч о ***Дирихлеовим граничним условима***; ако то исто важи само за вредности изводне функције, онда се ради о ***Нојмановим граничним условима***.

Може се претпоставити, без ограничења општости, да је $\alpha \in [0,\pi)$ у граничним условима (3.7).

На крају, напоменимо следеће: Једначина (3.3) показује да решавање задатог Штурм-Лиувиловог граничног проблема јесте еквивалентно *одређивању скупа свих сопствених вредности одговарајућих сопствених функција Штурм--Лиувиловог оператора* L.

3.2. Својства Штурм-Лиувиловог оператора : Лагранжов идентитет, Гринова функција, резолвента

За испитавање спектралних својстава Штурм–Лиувиловог оператора L користићемо већ приказану пред–Хилбертову теорију. Дакле, прво би било пожељно установити да је тај оператор симетричан и то је учињено у следећем излагању. Користећи двапут парцијалну интеграцију добијамо ***Лагранжов идентитет***

$$\int_c^d g(Lf)w\,dx = W_c(g,f) - W_d(g,f) + \int_c^d (Lg)fw\,dx \tag{3.8}$$

за $f,g \in C^2([a,b],\mathbb{C})$ и $a \leq c < d \leq b$. Уколико ставимо да $(c,d) = (a,b)$ и заменимо g са g^*, долазимо до

$$\langle g, Lf\rangle = W_a(g^*,f) - W_b(g^*,f) + \langle Lg, f\rangle\,. \tag{3.9}$$

Ово је место где смисао граничних услова долази до изражаја: Ако f и g задовољавају граничне услове (3.7), онде су оба горња вронскијана једнака нули. Заиста, поменути гранични услови дају једнакости

$$\begin{aligned} 0 &= BC_a(f) = \cos(\alpha)f(a) - \sin(\alpha)p(a)f'(a),\\ 0 &= BC_a(g) = \cos(\alpha)g(a) - \sin(\alpha)p(a)g'(a). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Према (2.23) важи

$$W_a(f,g) = f(a)p(a)g'(a) - p(a)f'(a)g(a). \tag{3.11}$$

Разликујемо два случаја. Претпоставимо да је $\alpha = 0$, онда из прве једначине (3.10) добијамо $f(a) = 0$, док из друге једначине (3.10) добијамо $g(a) = 0$.

Имамо $f(a) = g(a) = 0$, одакле директно према (3.11) видимо да $W_a(f,g) = 0$. Нека је сада $\alpha \neq 0$. Тада из (3.10) налазимо

$$p(a)f'(a) = \operatorname{ctg}(\alpha)f(a),$$
$$p(a)g'(a) = \operatorname{ctg}(\alpha)g(a).$$

Када добијене релације уврстимо у (3.11) налазимо $W_a(f,g) = f(a)\operatorname{ctg}(\alpha)\,g(a) - \operatorname{ctg}(\alpha)\,f(a)g(a) = 0$. Дакле, у сваком случају мора бити $W_a(f,g) = 0$ (потпуно се аналогно добија разултат и за тачку b). На основу тога из (3.9) добијамо

$$\langle g, Lf\rangle = \langle Lg, f\rangle, \qquad f, g \in \mathcal{D}(L)\,, \tag{3.12}$$

што показује да је L *симетричан.*

Међутим, тај оператор није компактан, јер није чак ни ограничен. Ово друго утврђује се следећим примером.

Пример. *Посматрамо Штурм-Лиувилов оператор* $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ *на интервалу* $J = (0,\pi)$ *са Дирихлеовим граничним условима. Уочимо низ функција*

$$\{f_n\} \quad \text{где} \quad f_n(x) = \sin(nx),\ n \in \mathbb{N}.$$

Непосредном провером уочавамо да $f_n(0) = f_n(\pi) = 0$. *Дакле, функције* f_n *задовољавају поменуте Дирихлеове граничне услове, тачније јесу из домена оператора* L. *За тај низ функција важи*

$$\frac{\|Lf_n\|}{\|f_n\|} = \frac{\sqrt{\int_0^\pi n^2\sin(nx)\cdot n^2\sin(nx)\cdot dx}}{\sqrt{\int_0^\pi \sin(nx)\cdot\sin(nx)\cdot dx}} = n^2 \to \infty \quad \text{кад} \quad n \to \infty\,,$$

па оператор L *не може бити ограничен.*

Рекло би се да идемо погрешним путем, међутим, покушајмо са следећим: инверз од L може бити компактан, па на њега можемо применити спектралну теорему.

Како број 0 може да буде сопствена вредност оператора L, тај оператор не мора бити инвертибилан. Зато ћемо размотрити оператор $L - z$, за неки фиксиран број $z \in \mathbb{C}$. Због симетричности оператора L, претходни оператор је инвертибилан. Да бисмо одредили инверз од $L - z$ треба да решимо нехомогену једначину $(L - z)f = g$, што се може урадити користећи (2.26). Уз то f је решење дифернцијалне једначине $(L - z)f = g$, па мора бити из домена оператора L, тј. мора задовољавати граничне услове. Према томе, морамо изабрати непознате константе у (2.26) тако да су гранични услови задовољени. У том циљу изабраћемо два решења u_b и u_a хомогене једначине, која ће бити прилагођена нашим граничним условима и користићемо (2.27). У овом случају (2.26) можемо писати као

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{u_b(z,x)}{W(z)}&\Big(c_1 + \int_a^x u_a(z,t)g(t)w(t)dt\Big) \\ &+ \frac{u_a(z,x)}{W(z)}\Big(c_2 + \int_x^b u_b(z,t)g(t)w(t)dt\Big)\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

што повлачи

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{u_b'(z,x)}{W(z)}\Big(c_1 + \int_a^x u_a(z,t)g(t)w(t)dt\Big) \\ +\frac{u_a'(z,x)}{W(z)}\Big(c_2 + \int_x^b u_b(z,t)g(t)w(t)dt\Big)\ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Овде смо скраћено записали

$$W(z) = W(u_b(z), u_a(z)) \tag{3.15}$$

што не зависи од x као што је раније поменуто у дискусији о вези Штурм-Лиувилове једначине и придруженог система.

Сада изаберимо $c_1 = 0$. Тада $f(a) = cu_a(z,a)$ и $f'(a) = cu_a'(z,a)$ (где $c = \frac{c_2+\langle u_b(z)*,g\rangle}{W(z)}$). Ако изаберемо $u_a(z,x)$ тако да $BC_a(u_a(z)) = 0$ закључујемо да је $BC_a(f) = 0$. Слично бирајући $c_2 = 0$ и $u_b(z,x)$ тако да $BC_b(u_b(z)) = 0$ закључујемо да је $BC_b(f) = 0$. Али да ли можемо ово увек урадити? Рецимо да користећи почетне услове

$$\begin{aligned} u_a(z,a) = \sin(\alpha),\ p(a)u_a'(z,a) = \cos(\alpha)\,, \\ u_b(z,b) = \sin(\beta),\ p(b)u_a'(z,b) = \cos(\beta)\,, \end{aligned} \tag{3.16}$$

добијамо два решења траженог типа, до на чињеницу да вронскијан $W(z)$ може бити једнак нули. Сада ћемо видети зашто су толико значајне нуле вронскијана.

Лема. *Вронскијан $W(z) = W(u_b(z), u_a(z))$ је цела функција која се анулира само у сопственим вредностима оператора L.*

Доказ: Пре свега, $W(z)$ је цела зато што то јесу $u_a(z,x)$ и $u_b(z,x)$ (као и њихови изводи по x). Штавише, $W(z) = 0$ повлачи да су $u_b(z)$ и $u_a(z)$ линеарно зависни, тј. $u_b(z,x) = c(z)u_a(z,x)$. Дакле, $BC_a(u_b(z)) = c(z)BC_a(u_a(z)) = 0$ показује да је z сопствена вредност која одговара сопственој функцији $u_b(z,x)$. □

Специјално, све нуле $W(z)$ морају бити реалне и како нуле целе функције не могу имати тачку нагомилавања која је коначна (по теореми јединости из комплексне анализе), можемо закључити да су *сопствене вредности оператора L дискретне.*

Напомињемо да

$$u_a(z,x)^* = u_a(z^*,x) \qquad u_b(z,x)^* = u_b(z^*,x)\,, \tag{3.17}$$

што повлачи $W(z)^* = W(z^*)$. Специјално, оба решења су реална за $z \in \mathbb{R}$ (претпостављајући притом, овде и у остатку одељка, да број z није сопствена вредност оператора L). Напишимо сада (3.13) у облику оператора $f(x) = R_L(z)g(x)$ уводећи оператор (***резолвента*** оператора L)

$$R_L(z)g(x) = \int_a^b G(z,x,t)g(t)w(t)dt, \qquad g \in \nu_0\,, \tag{3.18}$$

где је

$$G(z,x,t)=\frac{1}{W(z)}\begin{cases} u_b(z,x)u_a(z,t), & x\ge t,\\ u_b(z,t)u_a(z,x), & x\le t,\end{cases} \tag{3.19}$$

Гринова функција за оператор L. Напомињемо да је $G(z,x,t)$ мероморфна функција у односу на $z\in\mathbb{C}$ са половима тачно у нулама вронскијана $W(z)$ и задовољава

$$G(z,x,t)^*=G(z^*,x,t) \quad G(z,x,t)=G(z,t,x)\ . \tag{3.20}$$

Тада, по констукцији, имамо $R_L(z):\nu_0\to\mathcal{D}(L)$ и

$$(L-z)R_L(z)g=g,\qquad g\in\nu_0\ . \tag{3.21}$$

Преостало је да проверимо једнакост

$$R_L(z)(L-z)f=f,\qquad f\in\mathcal{D}(L)\,, \tag{3.22}$$

одакле би следило да је $Ran(R_L(z))=\mathcal{D}(L)$. Да бисмо видели да (3.22) важи, настављамо као у доказу Лагранжовог идентитета

$$\begin{aligned} R_L(z)(L-z)f(x) &= \int_a^b G(z,x,t)((L-z)f(t))w(t)dt\\ &= \frac{u_b(z,x)}{W(z)}\int_a^x u_a(z,t)((L-z)f(t))w(t)dt\\ &+\ \frac{u_a(z,x)}{W(z)}\int_x^b u_b(z,t)((L-z)f(t))w(t)dt\\ &= \frac{u_a(z,x)W_x(u_b(z),f)-u_b(z,x)W_x(u_a(z),f)}{W(z)}\\ &= f(x)\ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Овде смо користили Лагранжов идентет (3.8) и $W_a(u_a,f)=-BC_a(f)=0$, $W_b(u_b,f)=-BC_b(f)=0$ у трећем кораку.

Другим речима, $R_L(z)$ је инверз од $L-z$. Следећа лема показује да је $R_L(z)$ компактан.

Лема. *Оператор $R_L(z)$ је компактан. Ако је $z\in\mathbb{R}$, тај оператор је симетричан.*

Доказ: Фиксирајмо z и приметимо да је $G(z,\cdot,\cdot)$ непрекидна на $[a,b]\times[a,b]$, па према томе и равномерно непрекидна. Зато за сваки $\varepsilon>0$ можемо наћи $\delta>0$ тако да $|G(z,y,t)-G(z,x,t)|\le\varepsilon$ кад год $|y-x|\le\delta$. Нека је $f(x)=R_L(z)g(x)$. Тада важи

$$\begin{aligned} |g(x)-g(y)| &\le \int_a^b |G(z,y,t)-G(z,x,t)||f(t)|w(t)dt\\ &\le \varepsilon\int_a^b |f(t)|w(t)dt \le \varepsilon\|1\|\|f\|, \end{aligned}$$

кад год $|y-x|\le\delta$. (Овде смо користили неједнакост Коши-Шварца у последњем кораку.) Дакле, ако је $f_n(x)$ ограничен низ у ν_0, онда $g_n(x)=R_L(z)f_n(x)$

је еквинепрекидан и има равномерно конвергентан подниз по теореми Арцела-Асколија. Али равномерно конвергентан низ је такође и конвергентан у норми која је индукована скаларним производом, што следи из

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 w(t)dt} \leq \sqrt{\sup_{x\in[a,b]} |f(x)|^2 \int_a^b w(t)dt} = \|1\| \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

На основу претходног закључујемо да је оператор $R_L(z)$ компактан.

Ако је $\lambda \in \mathbb{R}$, имамо $G(\lambda,t,x)^* = G(\lambda^*,x,t) = G(\lambda,x,t)$ из чега због симетрије оператора $R_L(z)$ следи:

$$\begin{aligned}
\langle g, R_L(z)f\rangle &= \int_a^b g(x)^* \Big(\int_a^b G(\lambda,x,t)f(t)w(t)dt \Big) w(x)dx \\
&= \int_a^b \Big(\int_a^b g(x)^* G(\lambda,x,t)w(x)dx \Big) f(t)w(t)dt \\
&= \int_a^b \Big(\int_a^b G(\lambda,x,t)g(x)w(x)dx \Big)^* f(t)w(t)dt = \langle R_L(z)g, f\rangle,
\end{aligned}$$

чиме је доказ завршен. □

3.3. Основна теорема о спектру Штурм-Лиувиловог оператора

Као последицу досадашњег излагања, применом спектралне теореме из прве главе добијамо

ТЕОРЕМА. *Регуларни Штурм-Лиувилов проблем има пребројиво много реалних и простих сопствених вредности* λ_n *које се нагомилавају искључиво око тачака* ∞ *или* $-\infty$. *Одговарајуће нормиране сопствене функције* u_n *могу се изабрати тако да буду реално-вредносне и чине ортонормирану базу простора* ν_0, *тј. за сваку функцију* $f \in \nu_0$ *важи једнакост*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, f\rangle u_n(x) \tag{3.24}$$

по норими простора ν_0. *Осим тога, за* $f \in \mathcal{D}(L)$ *овај ред је равномерно конвергентан на сегменту* $[a,b]$.

Доказ: Изаберимо $\lambda \in \mathbb{R}$ тако да $R_L(\lambda)$ постоји. Према спектралној теореми за компактне симетричне операторе $R_L(\lambda)$ има пребројиво много реалних сопствених вредности α_n таквих да $\alpha_n \to 0$ и уз то ортонормиран систем одговарајућих сопствених функција u_n. Осим тога, како је $Ran(R_L(\lambda)) = \mathcal{D}(L)$ свуда густ, сопствене функције чине ортонормирану базу.

Штавише, $R_L(\lambda)u_n = \alpha_n u_n$ еквивалентно је са $Lu_n = (\lambda + \frac{1}{\alpha_n})u_n$, што показује да $\lambda_n = \lambda + \frac{1}{\alpha_n}$ јесу сопствене вредности оператора L са одговарајућим сопственим функцијама u_n.

Дакле, прве две тврдње су доказане, осим чињенице да су сопствене вредности просте. Да бисмо ово доказали, приметимо да ако су u_n и v_n две различите сопствене функције које одговарају λ_n, онда $BC_a(u_n) = BC_a(v_n) = 0$ повлачи $W_a(u_n, v_n) = 0$ и према томе u_n и v_n су линеарно зависни. Специјално, $u_n(x)$ је умножак $u_a(\lambda_n, x)$ и према томе може се изабрати тако да буде реалан.

Покажимо да ред (3.24) конвергира равномерно за $f \in \mathcal{D}(L)$. Тада је $f = R_L(\lambda)g$ за неки $g \in \nu_0$, па зато важе једнакости

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, f\rangle u_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle u_n, g\rangle u_n(x).$$

Осим тога, неједнакост Коши-Шварца показује да равномерно на сегменту $[a, b]$ важи

$$\left| \sum_{j=m}^{n} \alpha_j \langle u_j, g\rangle u_j(x) \right|^2 \leq \sum_{j=m}^{n} |\langle u_j, g\rangle|^2 \sum_{j=m}^{n} |\alpha_j u_j(x)|^2.$$

за свака два природна броја $m < n$. Сада, на основу Парсевалове једнакости налазимо да важи $\sum_{j=0}^{\infty} |\langle u_j, g\rangle|^2 = \|g\|^2$, па према томе, прва сума на десној страни јесте Кошијев одсечак конвергентног бројног реда. Друга сума на десној страни може се оценити са горње стране независно од $x \in [a, b]$ зато што важе једнакости

$$\alpha_n u_n(x) = R_L(\lambda) u_n(x) = \int_a^b G(\lambda, x, t) u_n(t) w(t) dt = \langle u_n, G(\lambda, x, t, \cdot)\rangle$$

одакле следи да је

$$\sum_{j=m}^{n} |\alpha_j u_j(x)|^2 \leq \sum_{j=m}^{n} |\langle u_n, G(\lambda, x, t, \cdot)\rangle|^2 = \int_a^b |G(\lambda, x, t)|^2 w(t) dt \leq M(\lambda)^2 \|1\|,$$

где $M(\lambda) = \max_{x,t\in[a,b]} |G(\lambda, x, t)|$, поново према (1.14).

На основу претходног разматрања закључујемо, користећи Кошијев критеријум равномерне конвергенције, да функционални ред (3.24) конвергира равномерно на $[a, b]$. □

Распоред сопствених вредности оператора L може се додатно прецизирати, што је садржај следећег тврђења.

Лема. *Сопствене вредности регуларног Штурм-Лиувиловог проблема ограничене су одоздо, па се могу уредити на следећи начин:*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots . \tag{3.25}$$

При томе, важи ***Рејли-Рицов принцип***

$$\lambda_0 = \min_{f\in\mathcal{D}(L)\,:\,\|f\|=1} \langle f, Lf\rangle . \tag{3.26}$$

На крају, напоменимо да се може доказати да и свака функција f из класе део по део непрекидно диференцијабилних функција на сегменту $[a,b]$, таква да је $f(a) = 0$ ако је $\alpha = 0$ и $f(b) = 0$ ако је $\beta = 0$, може бити развијена у равномерно конвергентан Фуријеов ред, генерисан системом сопствених функција опаратора L.

Пример. *Осмотримо Штурм-Лиувилов проблем који се појавио у једном од ранијих примера.*

$$L = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(L) = \{f \in C^2([0,1],\mathbb{C}) \big| f(0) = f(1) = 0\},$$

где су одговарајући простор и скаларни производ дати са

$$\nu_0 = C([0,1],\mathbb{C}), \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)^* g(x)\, dx \ .$$

Одговарајуће сопствене вредности и нормиране сопствене функције су

$$\lambda_n = (\pi n)^2, \quad u_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

Штавише, свака функција $f \in \nu_0$ може се развити у Фуријеов синусни ред

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n u_n(x), \quad f_n = \int_0^1 u_n(x) f(x) dx\,,$$

који је конвергентан у односу на овај скаларни производ. Ако претпоставимо да је f део по део непрекидно диференцијабилна при чему $f(0) = f(1) = 0$, ред ће чак конверати равномерно.

4. Регуларни Штурм-Лиувилов гранични проблем: општи самоконјуговани гранични услови

У овом делу разматрамо општи Штурм–Лиувилов гранични проблем. За разлику од класичне варијанте тог проблема, коју смо разматрали у претходној глави, сада се претпоставља да коефицијенти Штурм–Лиувилове једначине јесу само интеграбилни на датом интервалу, да могу да мењају знак и да гранични услови имају облик општих самоконјугованих услова, чији један специјални случај јесу раздвојени гранични услови. У зависности од типа граничних услова установљавају се својства спектра и сопствених функција одговарајућег Штурм–Лиувиловог диференцијалног оператора.

4.1. Самоконјуговани Штурм-Лиувилов проблем

Самоконјуговани Штурм-Лиувилов проблем подразумева решавање симетричне диференцијалне једначине

$$-(py')' + qy = \lambda wy \ \text{ на } \ J = (a, b), \ -\infty \leq a < b \leq \infty, \tag{4.1}$$

чији коефицијенти задовољавају услове

$$r = 1/p, q, w \in L^1(J, \mathbb{R}); \tag{4.2}$$

при чему решења те једначине треба да задовољавају граничне услове

$$AY(a) + BY(b) = 0, \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ py' \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

где је

$$A, B \in M_2(\mathbb{C}), \quad AEA^* = BEB^*, \ rank(A : B) = 2, \ E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

Напомена: Приметимо да нема ограничења за знак ниједног од коефицијената r, q, w. Такође, сваки од њих може бити идентички једнак нули на неком подинтервалу интервала J.

Дефиниција. *Под тривијалним решењем једначине (4.1) на неком интервалу* I *подразумевамо решење* y *које је идентички једнако нули на* I *и чији је квази-извод* $z = py'$ *такође идентички једнак нули на* I.

Дефиниција. *За реално-вредносну мерљиву функцију f кажемо да мења знак на интервалу I уколико узима позитивне вредноси на скупу позитивне Лебегове мере и такође узима негативне вредности на скупу позитивне Лебегове мере.*

Према разматрањима из друге главе, претпоставке (4.2) обезбеђују да гранични услови (4.3) буду коректно дефинисани пошто сва решења и њихови квази-изводи могу бити непрекидно продужени до крајњих тачака интервала. Ово важи за ограничене и неограничене интервале J.

Вратимо се сада на испитивање сопствених вредности Штурм-Лиувиловог оператора који је одређен једначином (4.1) и граничним условима (4.3) за које се захтева да важи (4.4). Наметнућемо додатне услове за коефицијенте једначине да бисмо избегли патолошке случајеве који се јављају када је $r = 1/p$ или w идентички једнако нули на одговарајућем интервалу J као и случајеве са сопственим вредностима које нису реалне. Показује се да чак и у класичном случају када $p > 0$, али w мења знак на J, Штурм-Лиувилов оператор има сопствене вредности које нису реалне, чак и са Дирихлеовим граничним условима. Дакле, претпоставићемо да важи (4.2) и уз то $w > 0$ на J. Услови за коефицијенте w и p који су наведени у наредној теореми могу се додатно ослабити. Напомињемо да q може бити позитивно, негативно или мењати знак.

Следеће тврђење показује да сопствене функције u које одговарају сопственим вредностима које нису реалне не могу бити нормиране у складу са захтевом да важи

$$\int_a^b |u(x)|^2 w(x)\, dx = 1.$$

ТЕОРЕМА. *Нека важе претпоставке (4.1)-(4.4). Ако је λ сопствена вредност проблема (4.1)-(4.4) која није реална и нека је u њена одоговарајућа сопствена функција, тада*

$$\int_a^b |u(x)|^2 w(x)\, dx = 0. \tag{4.5}$$

Напомена: Диференцијална једначина (4.1) дефинише формални диференцијални оператор облика (3.4), који заједно са граничним условима (4.3) одређује Штурм–Лиувилов диференцијални опертор $L : \mathcal{D}(L) \to L^2(J, w)$. При томе, комплексна функција f припада $\mathcal{D}(L)$ ако је

$$f,\, pf' \in AC_{loc}(J)\,, \qquad f,\, \mathcal{L}(f) \in L^2(J, w)$$

и ако f задовољава граничне услове (4.3). Овде $AC_{loc}(J)$ јесте векторски простор функција које су апсолутно непрекидне на подсегментима интервала J, а $L^2(J, w)$ јесте Хилбертов простор $L^2(J)$ са скаларним производом (3.1). Потпростор $\mathcal{D}(L)$ је густ у простору $L^2(J, w)$, а услови (4.2) обезбеђују симетричност оператора L.

Матрични услов (4.4) обезбеђује да оператор L јесте ***самоконјуговани линеарни оператор***, што значи, по дефиницији, да је једнак свом *конјугованом оператору* L^*. Зато се за граничне услове (4.3) каже да су *самоконјуговани*, а за гранични проблем (4.1)–(4.3) да је ***самоконјуговани гранични проблем***. Услови (4.2) обезбеђују регуларност крајева интервала J, па поменути гранични проблем јесте *регуларан*.

На крају, ако је $A = [a_{ij}]_{2\times 2}$ и $B = [b_{ij}]_{2\times 2}$, онда матрични услов $AEA^* = BEB^*$ јесте еквивалентан једнакостима

$$\begin{aligned}
a_{11}\overline{a_{22}} - a_{12}\overline{a_{21}} &= b_{11}\overline{b_{22}} - b_{12}\overline{b_{21}}\,,\\
a_{11}\overline{a_{12}} - a_{12}\overline{a_{11}} &= b_{11}\overline{b_{12}} - b_{12}\overline{b_{11}}\,,\\
a_{21}\overline{a_{22}} - a_{22}\overline{a_{21}} &= b_{21}\overline{b_{22}} - b_{22}\overline{b_{21}}\,,\\
a_{22}\overline{a_{11}} - a_{21}\overline{a_{12}} &= b_{22}\overline{b_{11}} - b_{21}\overline{b_{12}}\ .
\end{aligned}$$

4.2. Канонски облик самоконјугованих граничних услова

Јасно је да гранични услови (4.3) остају непромењени при множењу регуларном матрицом. Да бисмо истражили како се сопствене вредности мењају за различите типове граничних услова, разматрамо канонски облик самоконјугованих граничних услова.

За наше потребе можемо разврстати самоконјуговане граничне услове у три међусобно дисјунктне класе и користити следећу канонску репрезентацију тих класа:

(i) ***Раздвојени самоконјуговани гранични услови***

$$\begin{aligned}
A_1y(a) + A_2(py')(a) = 0, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}, \quad (A_1, A_2) \neq (0,0),\\
B_1y(b) + B_2(py')(b) = 0, \quad B_1, B_2 \in \mathbb{R}, \quad (B_1, B_2) \neq (0,0).
\end{aligned}$$

Ови раздвојени услови могу се параметризовати на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha)y(a) - \sin(\alpha)(py')(a) = 0, \quad 0 \le \alpha < \pi,\\
\cos(\beta)y(b) - \sin(\beta)(py')(b) = 0, \quad 0 < \beta \le \pi.
\end{aligned}$$

(ii) ***Реални упарени самоконјуговани гранични услови***

$$Y(b) = KY(a), \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ (py') \end{bmatrix}$$

где $K \in SL_2(\mathbb{R})$, тј. K задовољава

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad k_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \det K = 1.$$

(iii) ***Комплексни упарени самоконјуговани гранични услови***

$$Y(b) = e^{i\gamma}KY(a), \quad Y = \begin{bmatrix} y \\ (py') \end{bmatrix}$$

где $K \in SL_2(\mathbb{R})$ и $-\pi < \gamma < 0$ или $0 < \gamma < \pi$.

Следећа лема показује да смо направили добру класификацију граничних услова.

Лема. *Нека је дат гранични услов (4.3), при чему матрице A, B задовољавају (4.4). Тада је тај гранични услов еквивалентан тачно једном од раздвојених, реално упарених или комплексно упарених граничних услова који су горе дефинисани.*

4.3. Теорема о спектру самоконјугованог Штурм--Лиувиловог оператора

Сада форумулишемо теорему која је главни резултат овог дела. Како је најављено у уводном параграфу, она описује сопствене вредности и сопствене функције самоконјугованог Штурм-Лиувиловог оператора у зависности од *класе* граничних услова.

ТЕОРЕМА. *Размотримо регуларни Штурм-Лиувилов проблем који се састоји од једначине (4.1) са коефицијентима који задовољавају (4.2) и граничних услова (4.3)-(4.4). Претпоставимо да је p реално-вредносна функција на J и да*

$$w > 0 \ \ \text{скоро свуда на } J.$$

(Приметимо да нема ограничења за знак коефицијента p и q.) Тада:

(i) *Све сопствене вредности су реалне, изоловане, без коначне тачке нагомилавања и има их бесконачно али пребројиво много.*

(ii) *Ако p мења знак на J, онда сопствене вредности нису ограничене одоздо нити одозго и могу се уредити тако да важи*

$$\ldots \leq \lambda_{-2} \leq \lambda_{-1} \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \tag{4.6}$$

при чему $\lambda_n \to \infty$, $\lambda_{-n} \to -\infty$ кад $n \to \infty$. Свака сопствена вредност може бити проста или двострука али не важе две узастопне једнакости у (4.6) (пошто за прозивољно λ једначина (4.1) има тачно два линеарно независна решења).

(iii) *Ако p мења знак на J и гранични услови су раздвојени, онда важе строге неједнакости у (4.6).*

(iv) *Ако $p > 0$ на J и гранични услови су реални и упарени, онда су сопствене вредности ограничене одоздо и могу се уредити тако да задовољавају*

$$-\infty < \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots; \quad \lambda_n \to \infty \ \ \text{кад} \ \ n \to \infty\,. \tag{4.7}$$

Свака сопствена вредност је проста или двострука али не важе две узастопне једнакости у (4.7) пошто за произвољно λ једначина (4.1) има *два линеарно независна решења. Напомињемо да је λ_n добро дефинисано за све $n \in \mathbb{N}_0$, али постоји неке произвољности у индексирању сопствених функција које одговарају двоструким сопственим вредностима; пошто свако нетривијално решење једначине за такву сопствену вредност јесте сопствена функција. За дату такву шему индексирања, нека је u_n реално-вредносна сопствена функција од $\lambda_n(K)$ за реалне упарене граничне услове, онда број нула функције u_n у отвореном интервалу J је 0 или 1, ако је $n = 0$ односно $n-1$ или n или $n+1$ ако је $n \geq 1$.*

(v) *Ако је $p > 0$ и гранични услови су комплексно упарени, онда су сопствене вредности просте и строга неједнакост важи свугде у (4.7). Штавише, ако је u_n сопствена функција од $\lambda_n(\gamma, K)$, $0 < \gamma < \pi$, $-\pi < \gamma < 0$, онда је број нула функције $Re\, u_n$ на $[a, b)$ једнак 0 или 1 ако $n = 0$ односно $n-1$ или n или $n+1$ ако $n \geq 1$. Исти закључак важи за $Im\, u_n$. Штавише, u_n нема нула у $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}_0$.*

(vi) *Ако је $p > 0$ и гранични услови су раздвојени, онда строга неједнакост важи свугде у (4.7). Штавише, ако је u_n сопствена функција од λ_n, онда је u_n јединствена до на множење константом и има тачно n нула у отвореном интервалу J, $n \in \mathbb{N}_0$.*

(vii) *Ако је $p > 0$, онда за произвољне самоадјунговане граничне услове: раздвојене, реално упарене или комплексно упарене, важи следећа асимптотска формула:*

$$\frac{\lambda_n}{n^2} \to c = \pi^2 \left(\int_a^b \sqrt{\frac{w(x)}{p(x)}}\, dx \right)^{-2}, \quad \text{кад} \quad n \to \infty \tag{4.8}$$

(viii) *Ако p мења знак и $p^+(x) = p(x)$ за $p(x) > 0$ и 0 иначе као и $p^-(x) = -p(x)$ за $p(x) < 0$ и 0 иначе, тада (4.8) поприма облик:*

$$\frac{\lambda_n}{n^2} \to c = \pi^2 \left(\int_a^b \sqrt{\frac{w(x)}{p^+(x)}}\, dx \right)^{-2}, \quad \frac{\lambda_n}{n^2} \to c = \pi^2 \left(\int_a^b \sqrt{\frac{w(x)}{p^-(x)}}\, dx \right)^{-2}$$

кад $n \to \infty$ и кад $n \to -\infty$ респективно.

Преостало је да још из ове опште перспективе погледамо на резултате из претходне главе. Тиме добијамо додатна прецизирања и допунске информације о тим резултатима.

Размотримо Штурм-Лиувилов проблем који се састоји од једначине

$$-(py')' + qy = \lambda wy \quad \text{на} \quad (a, b), \ -\infty < a < b < \infty, \tag{4.9}$$

заједно са раздвојеним граничним условима

$$\begin{aligned} A_1 y(a) + A_2 (py')(a) = 0, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}, \quad (A_1, A_2) \neq (0,0) \\ B_1 y(b) + B_2 (py')(b) = 0, \quad B_1, B_2 \in \mathbb{R}, \quad (B_1, B_2) \neq (0,0) \end{aligned} \tag{4.10}$$

и коефицијентима који задовољавају

$$p, q, w : (a, b) \to \mathbb{R}, \quad 1/p, q, w \in L(a, b), \quad p > 0, \quad w > 0 \text{ скоро свуда на } (a, b). \tag{4.11}$$

ТЕОРЕМА. *Нека важе претпоставке (4.9)-(4.11). Тада*

(*i*) *Све сопствене вредности су реалне и просте.*

(*ii*) *Постоји бесконачно али највише пребројиво много сопствених вредности* $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *, оне су ограничене одоздо и могу се уредити тако да задовољавају неједнакости*

$$-\infty < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$$

и уз то $\lambda_n \to \infty$ *кад* $n \to \infty$ *.*

(*iii*) *Ако је* $u_n = u_n(\,\cdot\,, \lambda_n)$ *сопствена функција која одговара сопственој вредности* λ_n *, онда* u_n *има тачно* n *нула у отвореном интервалу* (a, b) *.*

(*iv*) *Изаберимо* $\alpha \in [0, \pi)$ *тако да*

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}(-A_2/A_1) & A_1 \neq 0 \\ \pi/2 & A_1 = 0 \end{cases},$$

слично изаберимо $\beta \in (0, \pi]$ *тако да*

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(-B_2/B_1) & B_1 \neq 0 \\ \pi/2 & B_1 = 0 \end{cases}.$$

Тада је свака сопствена вредност λ_n *јединствено решење* $\lambda = \lambda_n$ *једначине*

$$\theta(b, \lambda) = \beta + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

где је θ *решење једначине* $\theta' = p^{-1}\cos^2\theta + (\lambda w - q)\sin^2\theta$ *на* J *одређено почетним условом* $\theta(a, \lambda) = \alpha$ *за све* $\lambda \in \mathbb{R}$ *.*

(*v*) *Низ сопствених функција* $\{u_n = u_n(\,\cdot\,, \lambda_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *може се нормирати да буде ортонормиран низ у пред-Хилбертовом простору* $H = L^2(J, w)$ *,*

Према томе, ортонормирани низ $\{u_n = u_n(\,\cdot\,, \lambda_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *је комплетан у* H *, тј. за свако* $f \in H$ *важи репрезентација*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n, \quad c_n = \int_a^b f(x) u_n(x) w(x)\, dx$$

у односу на норму простора H *.*

Библиографија

[1]. Amrein W. O. , Hinz A. M, , Pearson D. B. , *Sturm–Liouvilla Theory, Past and Present* , Birkhauser Verlag , 2005 .

[2]. Teschl G. , *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems* , Graduate Studies in Mathematics Vol. 140 , AMS , 2012 .

[3]. Zettl A. , *Sturm–Liouville Theory* , Mathematical Surveys and Monographs Vol. 121 , AMS , 2005 .