Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

Решавање система линеарних неједначина помоћу линеарне функције у осмом разреду основне школе

Милица Павловић

1143/2016

Београд, октобар 2018.

Ментор: Проф. др Александар Т. Липковски,
редовни професор

Чланови комисије: Проф. др Зоран Петровић,
редовни професор
Проф. др Милан Д. Божић,
ванредни професор

Датум одбране: ___________________________________

САДРЖАЈ

1.УВОД

Моја тема је: Решавање система линеарних неједначина помоћу линеарне функције у осмом разреду основне школе. Мислим да постоји једноставнији приступ решавању специјалне групе неједначина, које се решавају преко система неједначина. Ученицима ћу на почетку наставне теме увести симболе $\wedge$ и $\vee$ (али не као логичке операције, већ као замену за означавање „ и“ и „или“) ради лакшег записивања. Размишљала сам да неједначину облика $A\cdot B>0$ представим на следећи начин:

$A\cdot B>0$

$A>0$ и $B>0$ или $A<0$ и $B<0$

Дошла сам до закључка да би на тај начин много закомпликовала решавање неједначина где има више од два чиниоца. Решење система неједначина које је повезано са $\wedge$ треба да их асоцира на пресек скупова, па да решење траже као пресек појединачних решења, а решење које је повезано са $\vee$ треба да их асоцира на унију скупова, па да решење траже као унију појединачних решења.

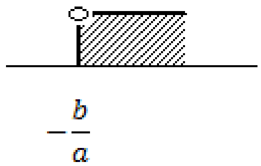
Решавање линеарних неједначина је једна веома важна област за стицање основне математичке културе и знања. Са неједначинама се ученици срећу већ у нижим разредима. У разговору са старијим и искуснијим професорима, а и сама сам регистровала да готово увек долази до забуне код примера који се не уклапају у устаљено клише. Ученици обично занемаре неке битне елементе: непознати умањилац, заграда, ...

Линеарна неједначина има један од следећих облика:

1.$ax + b > 0$

1.1. $a > 0 \land b \in R$

$x > -\frac{b}{a}$

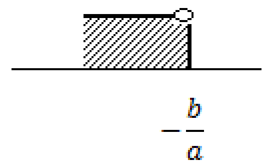


$R: x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$

Решење је сваки реалан број већи од $-\frac{b}{a}$.

1.2. $a < 0 \land b \in R$

$x < -\frac{b}{a}$



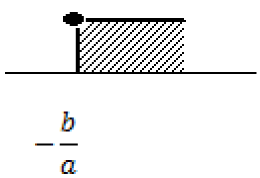
$R: x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$

Решење је сваки реалан број мањи од $-\frac{b}{a}$.

2. $ax + b \geq 0$

2.1. $a > 0 \land b \in R$

$x \geq -\frac{b}{a}$

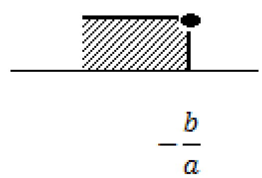


$R: x \in [-\frac{b}{a}, \infty)$

Решење је сваки реалнан број већи или једнак од $-\frac{b}{a}$.

2.2. $a < 0 \land b \in R$

$x \leq -\frac{b}{a}$



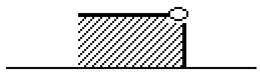
$R: x \in (-\infty, -\frac{b}{a}]$

Решење је сваки реалнан број мањи или једнак од $-\frac{b}{a}$.

3. $ax + b < 0$

3.1. $a > 0 \wedge b \in R$

$x < -\frac{b}{a}$



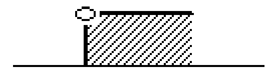
$-\frac{b}{a}$

$R: x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$

Решење је сваки реалан број мањи од $-\frac{b}{a}$.

3.2. $a < 0 \wedge b \in R$

$x > -\frac{b}{a}$



$-\frac{b}{a}$

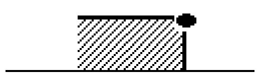
$R: x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$

Решење је сваки реалан број већи од $-\frac{b}{a}$.

4. $ax + b \leq 0$

4.1. $a > 0 \wedge b \in R$

$x \leq -\frac{b}{a}$



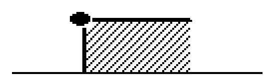
$-\frac{b}{a}$

$R: x \in (-\infty, -\frac{b}{a}]$

Решење је сваки реалнан број мањи или једнак од $-\frac{b}{a}$.

4.2. $a < 0 \wedge b \in R$

$x \geq -\frac{b}{a}$



$-\frac{b}{a}$

$R: x \in [-\frac{b}{a}, \infty)$

Решење је сваки реалнан број већи или једнак од $-\frac{b}{a}$.

5. $ax + b > 0$

5.1 $a = 0 \wedge b \geq 0$

Неједначина нема решење ($x = \{\}$).

5.2 $a = 0 \wedge b < 0$

Решење неједначине је сваки реалан број.

Линеарне неједначине ученици углавном умеју да реше. У осмом разреду се баве решавањем неједначина у којима се појављује производ или количник. Тада се решавање неједачине преводи у решавање система линеарних неједачина. Решевање система за ученике углавном је „шлагер“ или „камен спотицања“. У овом раду ћу се бавити решавањем неједначина које се преводе на решавање система линеарних неједначина. Системе линеарних неједначина у једном одељењу решаваћемо на уобичајени начин уз напомену да може и преко знака линеарне функције, а у другом одељењу ћемо систем неједначина решавати помоћу знака функције уз напомену да може и на други начин. На крају области ученици ће урадити тест провере знања. Упоредићу постигнуте резултате. Покушаћу да на основу урађеног теста провере знања изведем закључак којом методом су ученици постигли бољи резултат. Указаћу на неједначине које је лакше решити првом методом и на неједначине које је лакше решити преко линеарне функције.

2. РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ СВОЂЕЊЕМ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИХ НЕЈЕДНАЧИНА (УОБИЧАЈЕНИ НАЧИН)

Ако се у неједначинама појављује производ, или количник линеарних чланова, тада неједначину решавамо преко система линеарних неједначина.

Посебно треба обратити пажњу и нагласити да знак производа зависи од оба чиниоца и да знак количника зависи од знака дељеника и од знака делиоца, уз ограничење да делилац мора бити различит од 0.

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B > 0 \\ \dfrac{A}{B} > 0 \ (B \neq 0) \end{array}\right\} (A > 0 \land B > 0) \lor (A < 0 \land B < 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B \geq 0 \\ \dfrac{A}{B} \geq 0 \ (B \neq 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (A \geq 0 \land B \geq 0) \lor (A \leq 0 \land B \leq 0) \\ (A \geq 0 \land B > 0) \lor (A \leq 0 \land B < 0) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B < 0 \\ \dfrac{A}{B} < 0 \ (B \neq 0) \end{array}\right\} (A > 0 \land B < 0) \lor (A < 0 \land B > 0)$$

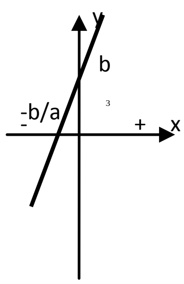
$$\left.\begin{array}{l} A\cdot B \leq 0 \\ \dfrac{A}{B} \leq 0 \ (B \neq 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (A \geq 0 \land B \leq 0) \lor (A \leq 0 \land B \geq 0) \\ (A \geq 0 \land B < 0) \lor (A \leq 0 \land B > 0) \end{array}$$

Проблем решавања овом методом настаје када је један од чинилаца реалан број (позитиван,или негативан) и када има више чинилаца. Када има више чинилаца ту се обично поткраде грешка у писању заграда, а онда и у првенству операција. У записивању ћу користити симболе $\land$ и $\lor$, како би ученицима сугерисала да користе одговарајуће скуповне операције унију и пресек. У одређивању коначног решења система линеарних неједначина треба посебно напоменути, да када користимо симбол $\land$, онда решење добијамо пресеком појединачних решења. Када имамо симбол $\lor$, онда решење добијамо преко уније појединачних решења.

3. РЕШАВАЊЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ ПОМОЋУ ЛИНЕАРНЕ ФУНКЦИЈЕ

За овај начин решавања неједначина потребно је да се наставна јединица: линеарна функција уради пре решавања неједначина. Посебно треба обратити пажњу на знак линеарне функције. Линеарна функција има облик: $y = ax + b, \quad (a, b \in R)$.

1. $a > 0 \wedge b > 0$



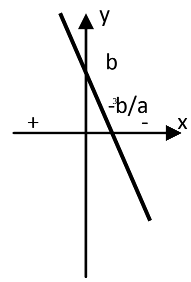
$y > 0, x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

Функција је позитивна за свако x веће од $-\frac{b}{a}$.

$y < 0, x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

Функција је негативна за свако x мање од $-\frac{b}{a}$.

2. $a < 0 \wedge b > 0$



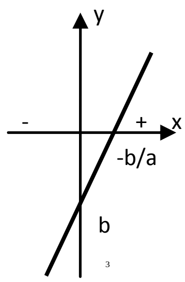
$y > 0, x \in (-\infty, -\frac{b}{a})$

Функција је позитивна за свако x мање од $-\frac{b}{a}$.

$y < 0, x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

Функција је негативна за свако x веће од $-\frac{b}{a}$.

1.1 $a > 0 \land b < 0$



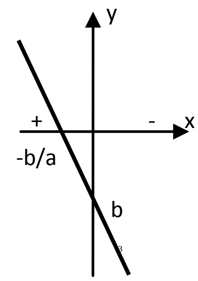
$y > 0, x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

Функција је позитивна за свако x веће од $-\dfrac{b}{a}$.

$y < 0, x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

Функција је негативна за свако x мање од $-\dfrac{b}{a}$.

2.1. $a < 0 \land b < 0$



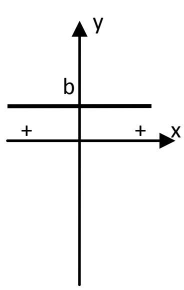
$y > 0, x \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$

Функција је позитивна за свако x мање од $-\dfrac{b}{a}$.

$y < 0, x \in \left(-\frac{b}{a}, \infty\right)$

Функција је негативна за свако x веће од $-\dfrac{b}{a}$.

1.2 $a = 0 \land b > 0$



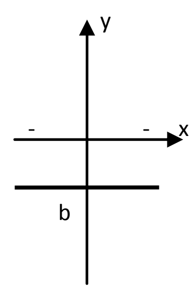
$y > 0, x \in (-\infty, \infty)$

Функција је позитивна за сваки реални број x

$y < 0, x = \{\}$

Нема вредности x за које би функција била негативна

2.2. $a = 0 \land b < 0$



$y > 0 \ x = \{\}$

Нема вредности x за које би функција била позитивна

$y < 0, x \in (-\infty, \infty)$

Функција је негативна за сваки реалан број x

Линеарну неједначину облика $ax+b>0$ решавамо преко графика функције $y=ax+b$ тако што са графика читамо на ком интервалу је функција позитивна.

Линеарну неједначину облика $ax+b<0$ решавамо преко графика функције $y=ax+b$ тако што са графика читамо на ком интервалу је функција негативна.

Неједначине код којих имамо производ или количник линеарних чланова решавамо на следећи начин: цртамо график функције за сваки чинилац посебно, знак сваке функције уносимо у таблицу и одређујемо знак коначно у таблици преко производа. Из таблице читамо за које вредности x је задовољена тражена неједначина, читамо скуп свих вредности непознате x за које ће та неједначина бити тачна неједнакост. Скуп свих решења задате неједначине обележавамо са R. Неједначине решавамо у скупу реалних бројева.

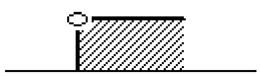
ПРИМЕРИ:

ПРИМЕР 1.1.

Решити линеарну неједначину $-3t - 1 < 0$.

$$3t > -1$$

$$t > -\frac{1}{3}$$



$-\frac{1}{3}$

R:$t \in (-\frac{1}{3}, \infty)$

Решење неједначине је сваки реални број већи од $-\frac{1}{3}$.

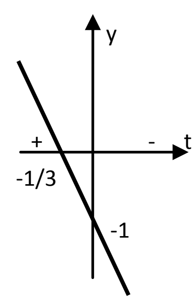
ПРИМЕР 1.2.

Решити линеарну неједначину преко знака одговарајуће линеарне функције

$-3t - 1 < 0.$

$y = -3t - 1$

t	0	-1/3
y	-1	0



R: $t \in (-\frac{1}{3}, \infty)$

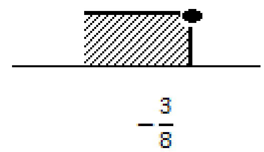
Решење неједначине је сваки реални број већи од $-\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2.1.

Решити линеарну неједначину $2u + \frac{3}{4} \leq 0$.

$2u \leq -\frac{3}{4}$ $\qquad$ $u \leq -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$

$u \leq -\frac{3}{4} : 2$ $\qquad$ $u \leq -\frac{3}{8}$



R: $u \in (-\infty, -\frac{3}{8}]$

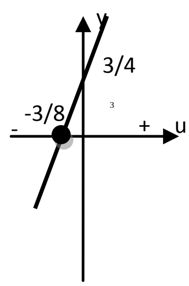
Решење неједначине је сваки реалан број мањи од $-\frac{3}{8}$ укључујући и $-\frac{3}{8}$.

ПРИМЕР 2.2.

Решити линеарну неједначину преко знака одговарајуће линеарне функције $2u + \frac{3}{4} \leq 0$.

$y = 2u + \frac{3}{4}$

u	0	-3/8
y	3/4	0



R: $u \in (-\infty, -\frac{3}{8}]$

Решење неједначине је сваки реалан број мањи од $-\frac{3}{8}$ укључујући и $-\frac{3}{8}$.

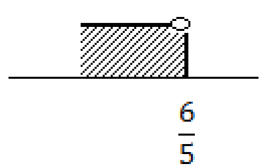
ПРИМЕР 3.1.

Решити линеарну неједначину $3 - \frac{5}{2}x > 0$.

$\frac{5}{2}x < 3$

$x < 3 \cdot \frac{2}{5}$

$x < \frac{6}{5}$



$x \in (-\infty, \frac{6}{5})$

Овде треба посебно нагласити да је непознат умањилац, и да од умањеника одузимамо разлику, и мењамо знак неједнакости

Решење неједначине је сваки реалан број мањи од $\frac{6}{5}$.

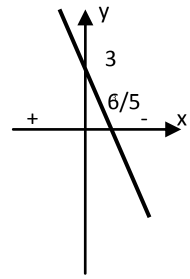
ПРИМЕР 3.2.

Решити линеарну неједначину преко знака одговарајуће линеарне функције

$3-\frac{5}{2}x>0$.

$$y=3-\frac{5}{2}x$$

x	0	6/5
y	3	0



$R: x \in (-\infty, \frac{6}{5})$

Решење неједначине је сваки реалан број мањи од $\frac{6}{5}$.

ПРИМЕР 4.1.

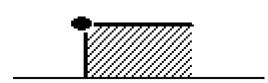
Решити линеарну неједначину $2+\frac{3}{2}x \geq 0$

$$\frac{3}{2}x \geq -2$$

$$x \geq -2 : \frac{3}{2}$$

$$x \geq -2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$



$-\frac{4}{3}$

R:$x \in [-\frac{4}{3}, \infty)$

Решење неједначине је сваки реалан број већи од $-\frac{4}{3}$ укључујући и $-\frac{4}{3}$.

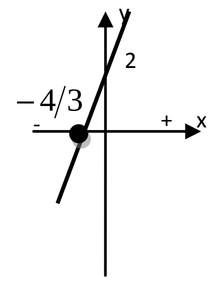
ПРИМЕР 4.2.

Решити линеарну неједначину преко знака одговарајуће линеарне функције

$$2+\frac{3}{2}x \geq 0.$$

$$y=2+\frac{3}{2}x$$

x	0	-4/3
y	2	0



R: $x \in [-\frac{4}{3}, \infty)$

Решење неједначине је сваки реалан број већи од $-\dfrac{4}{3}$ укључујући и $-\dfrac{4}{3}$.

Решавање линеарне неједначине на један, или други начин је једноставно, али решавање неједначине која се своди на решавање система линеарних неједначина је много компликованије. Приликом решавања система и одређивања коначног решења праве се грешке. Читање знака линеарне функције са графика је основ за једноставније одређивање скупа решења непознате x за које дата неједначина прелази у тачну неједнакост.

4. ЛИНЕАРНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ ОДРАЂЕНЕ НА ЧАСОВИМА

Школске 2017/2018. сам спровела истраживање у ОШ „Десанка Максимовић“ у Горњем Милановцу у одељењима $VIII_1$ и $VIII_3$. Нисам им била предметни наставник, тако да је оцене на полугодишту и на крају школске године формирао њихов професор. Ја сам од колеге узела часове за наставну једницу, часове увежбавања и час за спровођење провере знања. Ово истраживање би сигурно било ефикасније да сам ја водила та одељења. Знала бих више о ученицима и њиховим способностима. Трудила сам се да их упознам и за ово кратко време.

У одељењу $VIII_1$ има три надарена ученика и нема ученика са специфичним сметњама.

У одељењу $VIII_3$ има два надарена ученика и један ученик са специфичним сметњама.

Надарени ученици се квалитативно разликују од просечне деце. Они су комуникативнији и омиљенији од осталих. У својим одељењима имају улогу вођа, носиоци су свих акција и активности (културних, спротских, хуманитарних,...). Веома лако решавају постављене задатке и проблеме. Мисле јасно, схватају односе, постављају многа питања и брзо одговарају. Један од надарених ученика ($VIII_1$) је конфликтна особа, тврдоглав и понекад испољава агресивност. Није му јасно како неко не зна основне ствари. Нема стрпљења да други дају одговор. У оба одељења има неколико вредних ученика (прави ђаци), мотивисани за рад и улажу велики напор како би постигли добар резултат.

Ученик са специфичним сметњама има поремећај пажње, то се огледа у нестрпљивости и организацији активности. Пише и само му дође да све избрише, било тачно или нетачно и то се понавља у недоглед. (за проверу знања сам му забранила употребу гумице).

У овом раду се нисам бавила методиком и током часа, већ сам само презентовала задатаке који су урађени на часовима. Задаци су исти за оба одељења само што су рађени различитим методама.

Решавање неједначина преко система линеарних неједначина је одрађено у одељењу $VIII_1$, а решавање система помоћу знака функције је одрађено у одељењу $VIII_3$.

У одељењу $VIII_3$ морала сам да их подсетим на линеарну функцију коју су радили у седмом разреду и да мало вежбамо одређивање знака линеарне функције. Наставна јединица: Линеарна функиција у осмом разреду је после наставне јединице неједначина.

У одељењу $VIII_1$ сам користила симболе ∧ и ∨ за записивање система линеарних неједначина.

Одељење $VIII_3$ је показало већу заинтересованост на часовима, било им је занимљиво како преко једноставних графика долазе до решења компликоване неједначине.

Одељење $VIII_1$ је било мање заинтересовано и стално су приговарали што морају да пишу толико заграда, а ја сам се питала како би са њима изашла на крај да нисам увела симболе ∧ и ∨.

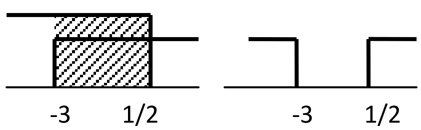
Приказујем паралелно задатке које сам радила у оба одељења да би се дошло до закључка који је начин бољи и једноставнији за рад у зависности од неједначине.

Пример 1: Решити неједначину:

$(x+3)(2x+1) < 0.$

$(x+3>0 \wedge 2x-1<0) \vee (x+3<0 \wedge 2x-1>0)$

$(x>-3 \wedge x<\frac{1}{2}) \vee (x<-3 \wedge x>\frac{1}{2})$



$R_1: x \in (-3, \frac{1}{2})$ $R_2: x=\{\}$

$R = R_1 \cup R_2$

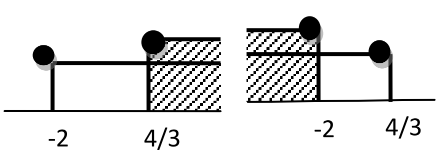
$R: x \in (-3, \frac{1}{2})$

Пример 2: Решити неједначину:

$(x+2)(3x-4) \geq 0.$

$(x+2 \geq 0 \wedge 3x-4 \geq 0) \vee (x+2 \leq 0 \wedge 3x-4 \leq 0)$

$(x \geq -2 \wedge x \geq \frac{4}{3}) \vee (x \leq -2 \wedge x \leq \frac{4}{3})$



$R_1: x \in [\frac{4}{3}, \infty)$ $R_2: x \in (-\infty, -2]$

$R = R_1 \cup R_2$

$R: x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{4}{3}, \infty)$

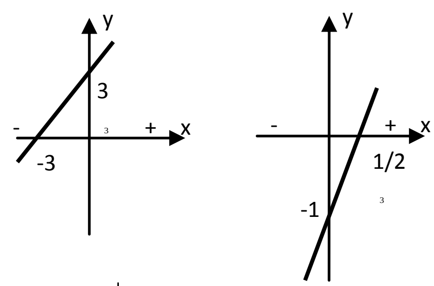
Пример 1: Решити неједначину:

$(x+3)(2x+1) < 0.$

$y=x+3$ $y=2x-1$

x	0	-3
y	3	0

x	0	1/2
y	-1	0



X		-3	½
x+3	-	+	+
2x-1	-	-	+
R	+	-	+

$R: x \in (-3, \frac{1}{2})$

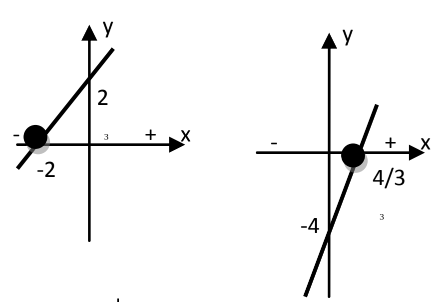
Пример 2: Решити неједначину:

$(x+2)(3x-4) \geq 0.$

$y=x+2$ $y=3x-4$

x	0	-2
y	2	0

x	0	4/3
y	-4	0



X		-2	4/3
x+2	-	+	+
3x-4	-	-	+
R	+	-	+

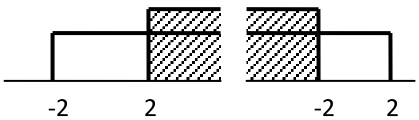
$R: x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{4}{3}, \infty)$

Пример 3: Решити неједначину:

$\frac{x-2}{x+2}>0 \wedge x \neq -2.$

$(x-2>0 \wedge x+2>0) \vee (x-2<0 \wedge x+2<0)$

$(x>2 \wedge x>-2) \vee (x<2 \wedge x<-2)$



$R_1 : x \in (2,\infty) \qquad R_2 : x \in (-\infty,-2)$

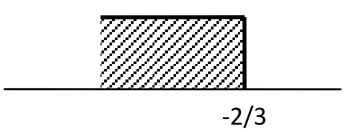
$R = R_1 \cup R_2 : x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

Пример 4: Решити неједначину:

$\frac{3x+2}{-4}>0$

$3x+2<0$

$x<-\frac{2}{3}$



R: $x \in (-\infty,-\frac{2}{3})$

Овде треба да се сете да је количник позитиван, ако је именилац негативан, када је бројилац негативан, што они често заборaве.

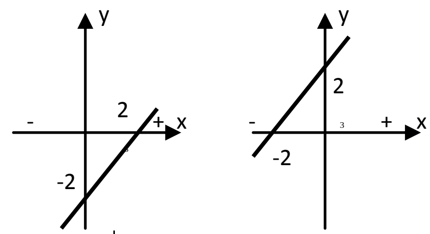
Пример 3: Решити неједначину:

$\frac{x-2}{x+2}>0 \wedge x \neq -2.$

y=x-2 y=x+2

x	0	2
y	-2	0

x	0	-2
y	2	0



X		-2	2
x-2	-	-	+
x+2	-	+	+
R	+	-	+

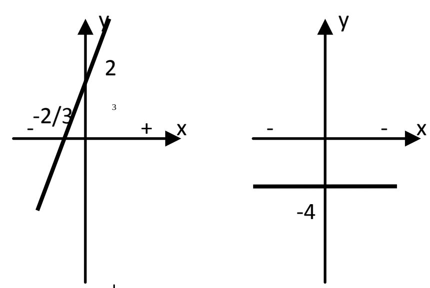
$R : x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

Пример 4: Решити неједначину:

$\frac{3x+2}{-4}>0$

y=3x+2 y=-4

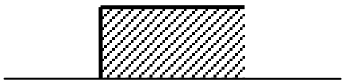
x	0	-2/3
y	2	0



X		-2/3
3x+2	-	+
-4	-	-
R	+	-

R: $x \in (-\infty,-\frac{2}{3})$

Пример 5: Решити неједначину:
$\frac{-2}{2x-1}<0.$



1/2

2x-1>0

x>$\frac{1}{2}$

$R: x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

Пример 6: Решити неједначину:

$\frac{2x-1}{x-2} \leq 3 \ \wedge x \neq 2$

$\frac{2x-1}{x-2}$-3$\leq$0

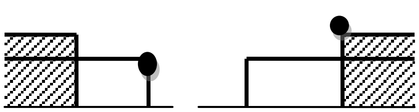
$\frac{2x-1}{x-2}$-$\frac{3(x-2)}{x-2}$ ≤ 0

$\frac{2x-1-3x+6}{x-2} \leq 0$

$\frac{-x+5}{x-2} \leq 0$

(-x+5$\geq$0$\wedge$x-2<0)$\vee$(-x+5$\leq$0$\wedge$x-2>0)

(x$\leq$5$\wedge$x<2)$\vee$(x$\geq$5$\wedge$x>2)



2 5 2 5

$R_1: x \in (-\infty, 2)$ $R_2: x \in [5, \infty)$

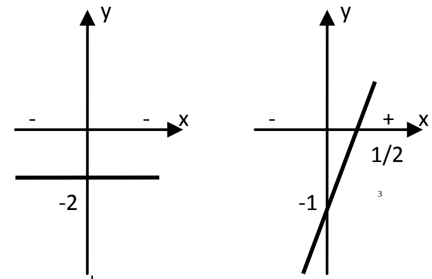
$R = R_1 \cup R_2)$

$R: x \in (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$

Пример 5: Решити неједначину: $\frac{-2}{2x-1}<0.$

y=-2 y=2x-1

x	0	1/2
y	-1	0



X		1/2
-2	-	-
2x-1	-	+
R	+	-

$R: x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

Пример 6: Решити неједначину:

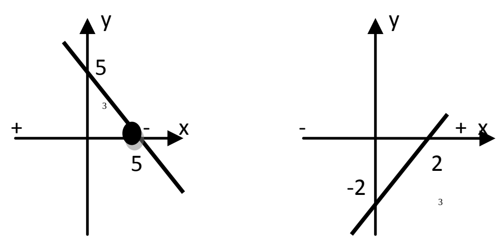
$\frac{2x-1}{x-2} \leq 3 \ \wedge x \neq 2$

$\frac{2x-1-3x+6}{x-2} \leq 0$ $\frac{-x+5}{x-2} \leq 0$

y=-x+5 y=x-2

x	0	5
y	5	0

x	0	2
y	-2	0



X		2	5
-x+5	+	+	-
x-2	-	+	+ x
R	-	+	-

$R: x \in (-\infty, 2) \cup [5, \infty)$

Пример 7: Решити неједначину:

$\frac{2x-3}{4-x} \geq 1 \wedge x \neq 4$

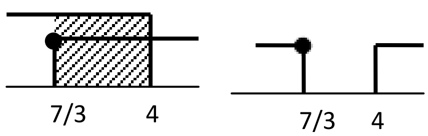
$\frac{2x-3}{4-x} - 1 \geq 0$

$\frac{2x-3-4+x}{4-x} \geq 0$

$\frac{3x-7}{4-x} \geq 0$

$(3x-7 \geq 0 \wedge 4-x>0) \vee (3x-7 \leq 0 \wedge 4-x<0)$

$x \geq \frac{7}{3} \wedge x<4) \vee (x \leq \frac{7}{3} \wedge x>4)$



$R_1 : x \in [\frac{7}{4},4)$ $\quad R_2$:x={ }

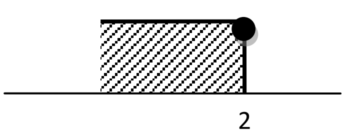
$R = R_1 \cup R_2 \quad R : x \in [\frac{7}{3},4)$

Пример 8: Решити неједначину:

-0,25(2x-4) ≥ 0

$2x-4 \leq 0$

$x \leq 2$



$R : x \in (-\infty, 2]$

Пример 7: Решити неједначину:

$\frac{2x-3}{4-x} \geq 1 \wedge x \neq 4$

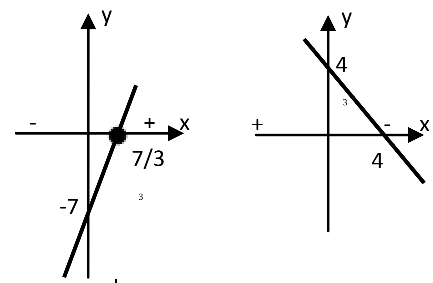
$\frac{2x-3-4+x}{4-x} \geq 0$

$\frac{3x-7}{4-x} \geq 0$

y=3x-7 y=4-x

x	0	7/3
y	-7	0

x	0	4
y	4	0



X		7/3	4
3x-7	-	+	+
4-x	+	+	-
R	-	+	-

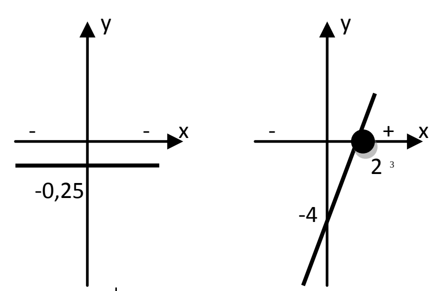
$R : x \in [\frac{7}{3},4)$

Пример 8: Решити неједначину:

-0,25(2x-4) ≥ 0

y=-0,25 y=2x-4

x	0	2
y	-4	0



X		2
-0,25	-	-
2x-4	-	+
R	+	-

$R : x \in (-\infty, 2]$

Пример 9: Решити неједначину:

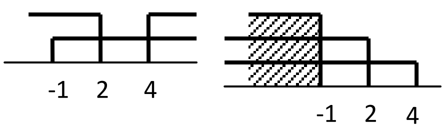
$\frac{(x-4)(x+1)}{-x+2}>0 \land x \neq 2$

((x-4)(x+1)>0 $\land$ -x+2>0) $\lor$ ((x-4)(x+1)<0 $\land$ -x+2<0)

(((x-4>0 $\land$ x+1>0) $\lor$ (x-4<0 $\land$ x+1<0)) $\land$ x<2) $\lor$ (((x-4>0 $\land$ x+1<0)(x-4<0 $\land$ x+1>0)) $\land$ x>2

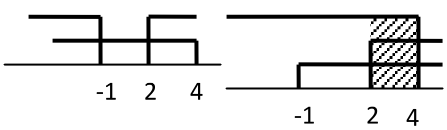
(((x>4 $\land$ x>-1) $\lor$ (x<4 $\land$ x<-1)) $\land$ x<2) $\lor$ (((x>4 $\land$ x<-1) $\lor$ (x<4 $\land$ x>-1)) $\land$ x>2)

((x>4 $\land$ x>-1 $\land$ x<2) $\lor$ (x<4 $\land$ x<-1 $\land$ x<2)) $\lor$ ((x>4 $\land$ x<-1 $\land$ x>2) $\lor$ (x<4 $\land$ x>-1 $\land$ x>2))



$R_1{}' : x = \{\ \}$ $\qquad R_1{}'' : x \in (-\infty,-1)$

$R_1 = R_1{}' \cup R_1{}'' : x \in (-\infty,-1)$



$R_2{}' : x = \{\ \}$ $\qquad R_2{}'' : x \in (2,4)$

$R_2 = R_2{}' \cup R_2{}'' : x \in (2,4)$ $R = R_1 \cup R_2$

$R : x \in (-\infty,-1) \cup (2,4)$

У оваквим примерима се види ефикасност другог начина решавања.

Пример 9: Решити неједначину:

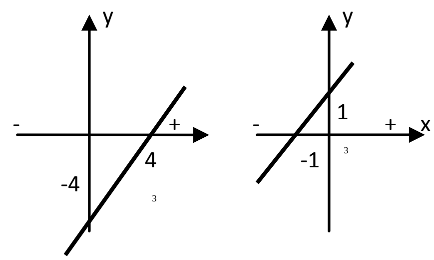
$\frac{(x-4)(x+1)}{-x+2}>0 \land x \neq 2$

y=x-4

x	0	4
y	-4	0

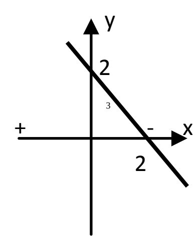
y=x+1

x	0	-1
y	1	0



y=-x+2

x	0	2
y	2	0



X	-1	2	4	
x-4	-	-	-	+
x+1	-	+	+	+
-x+2	+	+	-	-
R	+	-	+	-

$R : x \in (-\infty,-1) \cup (2,4)$

Пример 10: Решити неједначину:

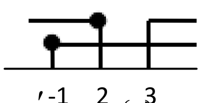
$$\frac{(x+1)(2-x)}{3-x} \leq 0 \wedge x \neq 3.$$

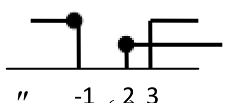
$((x+1)(2-x) \geq 0 \wedge 3-x<0) \vee$
$((x+1)(2-x) \leq 0 \wedge 3-x>0)$

$(((x+1 \geq 0 \wedge 2-x \geq 0) \vee (x+1 \leq 0 \wedge 2-x \leq 0)) \wedge x>3) \vee (((x+1 \leq 0 \wedge 2-x \geq 0) \vee (x+1 \geq 0 \wedge 2-x \leq 0)) \wedge x<3)$

$(((x \geq -1 \wedge x \leq 2) \vee (x \leq -1 \wedge x \geq 2)) \wedge x>3) \vee (((x \leq -1 \wedge x \leq 2) \vee (x \geq -1 \wedge x \geq 2)) \wedge x<3)$

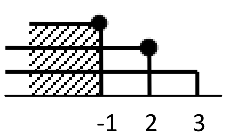
$((x \geq -1 \wedge x \leq 2 \wedge x>3) \vee (x \leq -1 \wedge x \geq 2 \wedge x>3)) \vee (x \leq -1 \wedge x \leq 2 \wedge x<3) \vee (x \geq -1 \wedge x \geq 2 \wedge x<3)$

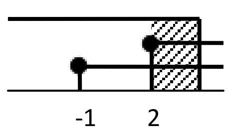




$R_1{}' : x = \{ \}$ $\quad R_1{}'' : x = \{ \}$

$R_1 : x = \{ \}$





$R_2{}' : x \in (-\infty, -1]$ $\quad R_2{}'' : x \in [2,3)$

$R_2 = R_2{}'' \cup R_2{}'$ $\quad R = R_1 \cup R_2$

$R : x \in (-\infty, -1] \cup [2,3)$

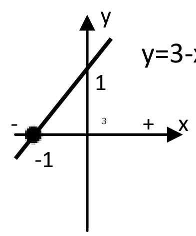
Пример 10: Решити неједначину:

$$\frac{(x+1)(2-x)}{3-x} \leq 0 \wedge x \neq 3.$$

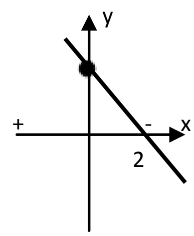
y=x+1 y=2-x

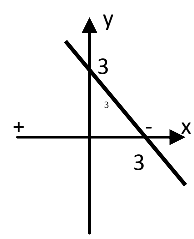
x	0	-1
y	1	0

x	0	2
y	2	0



y=3-x





x	0	3
y	3	0

X	-1	2	3	
x+1	-	+	+	+
2-x	+	+	-	-
3-x	+	+	+	-
R	-	+	-	+

$R : x \in (-\infty, -1] \cup [2,3)$

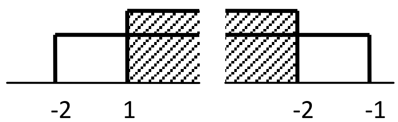
Пример 11: Решити неједначину:

$$\frac{-3}{(x+2)(1-x)} \geq 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 1.$$

(x+2)(1-x)<0

(x+2<0 $\wedge$ 1-x>0) $\vee$ (x+2>0 $\wedge$ 1-x<0)

(x<-2 $\wedge$ x<1) $\vee$ (x>-2 $\wedge$ x>1)



$R_1 : x \in (1,\infty)$ $R_2 : x \in (-\infty,-2)$

$R : x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$

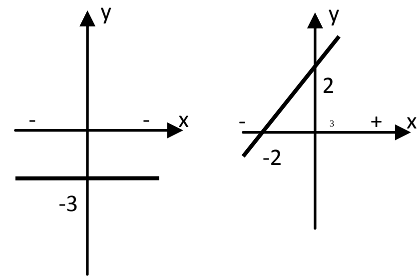
Овде треба да се сете да је количник позитиван, када је дељеник негативан, само када је и делилац негативан.

Пример 11: Решити неједначину:

$$\frac{-3}{(x+2)(1-x)} \geq 0 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 1.$$

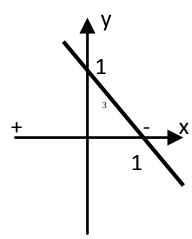
y=-3 y=x+2

x	0	-2
y	2	0



y=1-x

x	0	1
y	1	0



X	-2	1	
-3	-	-	-
2+x	-	+	+
1-x	+	+	-
R	+	-	+

$R : x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$

5. ПРОВЕРА СТЕЧЕНОГ ЗНАЊА

Одељење VIII_1

Задаци:

1.Решити линеарну неједначину

$$2 - 3x > 0$$

2.Решити неједначину

$$\frac{-3}{2-x} > 0 \wedge (x \neq 2)$$

3.Решити неједначину преко система линеарних неједначина

$$(x+1)(5x-3) > 0$$

4.Решити неједначину преко система линеарних неједначина

$$\frac{x+2}{1-x} \leq 0 \ \wedge (x \neq 1)$$

5.Решити неједначину преко система линеарних неједначина

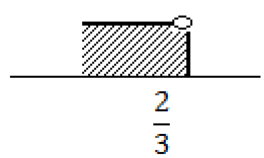
$$\frac{(2-x)(5+x)}{x+1} \geq 0 \ \wedge (x \neq -1)$$

Решења:

1. $2 - 3x > 0$

$3x < 2$

$x < \frac{2}{3}$



$R: x \in (-\infty, \frac{2}{3})$

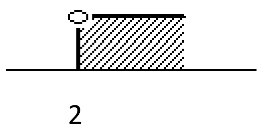
Ово је задатак основног нивоа.

2. $\frac{-3}{2-x} > 0 \ \wedge x \neq 2$

Бројилац је негативан, па и именилац мора бити негативан да би разломак био позитиван.

$2 - x < 0$

$x > 2$



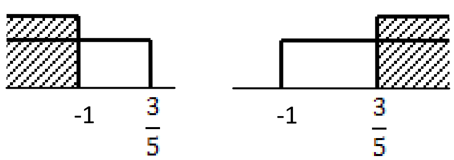
$R: x \in (2, \infty)$

Ово је задатак основног нивоа за обрађену тему.

3. $(x+1)(5x-3) > 0$

$(x + 1 > 0 \wedge 5x - 3 > 0) \vee (x + 1 < 0 \wedge 5x - 3 < 0)$

$(x > -1 \wedge x > \frac{3}{5}) \vee (x < -1 \wedge x < \frac{3}{5})$



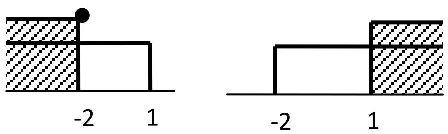
$R: x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{5}, \infty)$

Ово је задатак средњег нивоа.

4. $\frac{x+2}{1-x} \leq 0 \wedge x \neq 1$

$(x+2 \geq 0 \wedge 1-x < 0) \vee (x+2 \leq 0 \wedge 1-x > 0)$

$(x \geq -2 \wedge x > 1) \vee (x \leq -2 \wedge x < 1)$



$R: x \in (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$

Ово је задатак средњег нивоа.

5. $\frac{(2-x)(5+x)}{x+1} \geq 0 \ \wedge (x \neq -1)$

$((2-x)(5+x) \geq 0 \wedge x+1 > 0) \vee ((2-x)(5+x) \leq 0 \wedge x+1 < 0$

$((2-x \geq 0 \wedge 5+x \geq 0) \vee (2-x \leq 0 \ \wedge 5+x \leq 0) \wedge x > -1) \vee$

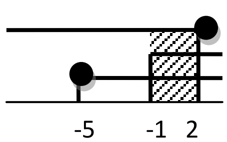
$((2-x \geq 0 \wedge 5+x \leq 0) \vee (2-x \leq 0 \wedge 5+x \geq 0) \wedge x < -1)$

$\big((x \leq 2 \wedge x \geq -5) \vee (x \geq 2 \wedge x \leq -5) \wedge x > -1\big) \vee$

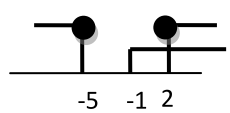
$\big((x \leq 2 \wedge x \leq -5) \vee (x \geq 2 \wedge x \geq -5) \wedge x < -1\big)$

$(x \leq 2 \wedge x \geq -5 \wedge x > -1) \vee (x \geq 2 \wedge x \leq -5 \wedge x > -1) \vee$

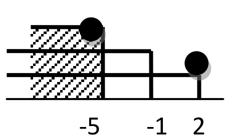
$(x \leq 2 \wedge x \leq -5 \wedge x < -1) \vee (x \geq 2 \wedge x \geq -5 \wedge x < -1)$



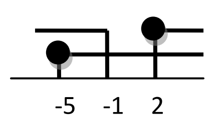
$R_1': x \in (-1, 2\,]$



$R_1'': x = \{\,\}$



$R_2': x \in (-\infty, -5\,]$



$R_2'': x = \{\,\}$

$R: R_1' \cup R_2'$

$R: x \in (-\infty, -5] \cup (-1, 2]$

Ово је задатак напредног нивоа.

Одељење $VIII_3$

Задаци:

1.Решити линеарну неједначину преко знака функције
$2-3x>0$.

2.Решити неједначину преко линеарних функција
$\frac{-3}{2-x}>0 \wedge (x \neq 2)$.

3.Решити неједначину преко знака линеарних функција
$(x+1)(5x-3)>0$.

4.Решити неједначину преко знака линеарних функција
$\frac{x+2}{1-x} \leq 0 \ \wedge (x \neq 1)$.

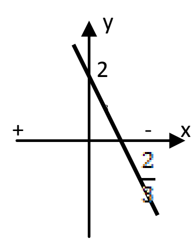
5.Решити неједначину помоћу линеарних функција
$\frac{(2-x)(5+x)}{x+1} \geq 0 \ \wedge (x \neq -1)$.

Решења:

1. $2-3x>0$

$y=2-3x$

x	0	2/3
y	-2	0

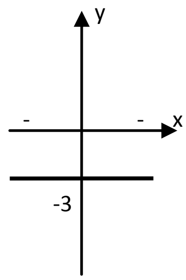


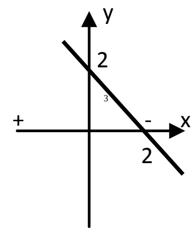
$R: (-\infty, \frac{2}{3})$

Овај задатак су сви ученици урадили што представља успех за ученике који имају недовољне оцене.

2. $\frac{-3}{2-x} > 0 \wedge (x \neq 2)$

$y = -3$





$y = 2 - x$

x	0	2
y	2	0

X		2
-3	-	-
2-x	+	-
R	-	+

$R: (2, \infty)$

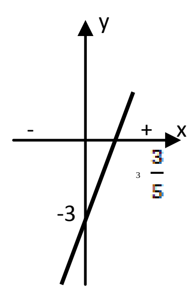
3. $(x+1)(5x-3) > 0$

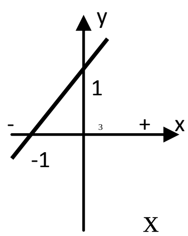
$y = x + 1$

x	0	-1
y	1	0

$y = 5x - 3$

x	0	3/5
y	-3	0





x		-1	3/5
x+1	-	+	+
5x-3	-	-	+
R	+	-	+

$R: x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{3}{5}, \infty)$

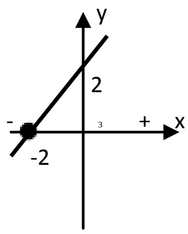
4. $\frac{x+2}{1-x} \leq 0 \ \wedge (x \neq 1)$

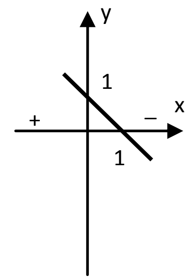
$y = x + 2$

$y = 1 - x$

x	0	-2
y	2	0

x	0	1
y	1	0





x		-2	1
x+2	-	+	+
1-x	+	+	-
R	-	+	-

$R: x \in (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$

5. $\frac{(2-x)(5+x)}{x+1} \geq 0 \ \wedge (x \neq -1)$

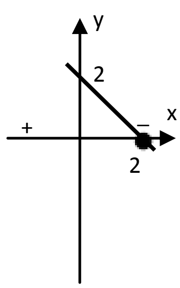
$y = 2 - x$

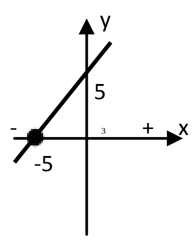
$y = 5 + xy = x + 1$

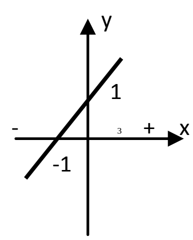
x	0	2
y	2	0

x	0	-5
y	5	0

x	0	-1
y	1	0







x		-5	-1	2
2-x	+	+	+	-
5+x	-	+	+	+
x+1	-	-	+	+
R	+	-	+	-

$R: x \in (-\infty, -5] \cup (-1, 2]$

6.ДИСКУСИЈА

Дате табеле представљају податке за одељења $VIII_1$ и $VIII_3$.

Одељење $VIII_1$

Редни број	Презиме и име	Оцена на полугодишту	Оцена на крају године	Бодови са теста	Бодови 1. задатак	Бодови 2. задатак	Бодови 3. Задатак	Бодови 4. задатак	Бодови 5. задатак	Оцена са теста
1.	**Ученица 1**	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
2.	**Ученица 2**	**4**	**4**	**70**	**20**	**20**	**15**	**15**	**0**	**4-**
3.	**Ученик 3**	**3**	**3**	**60**	**20**	**20**	**10**	**10**	**0**	**3**
4.	**Ученик 4**	**2**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
5.	**Ученица 5**	**3**	**4**	**60**	**20**	**20**	**20**	**0**	**0**	**3**
6.	**Ученица 6**	**5**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
7.	**Ученица 7**	**1**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
8.	**Ученица 8**	**3**	**4**	**80**	**20**	**20**	**20**	**20**	**0**	**4**
9.	**Ученик 9**	**2**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
10.	**Ученик 10**	**4**	**5**	**80**	**20**	**20**	**20**	**20**	**0**	**4**
11.	**Ученица 11**	**3**	**4**	**60**	**20**	**0**	**20**	**20**	**0**	**3**
12.	**Ученик 12**	**5**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
13.	**Ученица 13**	**5**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
14.	**Ученик 14**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
15.	**Ученица 15**	**5**	**5**	**70**	**20**	**20**	**15**	**15**	**0**	**4-**

16.	**Ученик 16**	**4**	**5**	**80**	**20**	**20**	**20**	**20**	**0**	**4**
17.	**Ученик 17**	**3**	**4**	**70**	**20**	**20**	**20**	**10**	**0**	**4-**
18.	**Ученик 18**	**2**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**
19.	**Ученица 19**	**5**	**5**	**80**	**20**	**20**	**20**	**20**	**0**	**4**
20.	**Ученица 20**	**5**	**5**	**80**	**20**	**20**	**20**	**20**	**0**	**4**
21.	**Ученик 21**	**2**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
22.	**Ученица 22**	**3**	**4**	**70**	**20**	**20**	**20**	**10**	**0**	**4-**
23.	**Ученица 23**	**4**	**5**	**80**	**20**	**20**	**20**	**20**	**0**	**4**

Ово одељење је на полугодишту имало просечну оцену 3,30, на крају школске године 3,74, а на тесту је просечна оцена била 3,22.

Просечна оцена на тесту је била мања од просечне оцене и на полугодишту и на крају школске године.

Има ученика који нису решили први задатак који представља основни ниво, а имају позитивну оцену. Већина ученика је урадила задатке основног и средњег нивоа, а задатак из напредног нивоа су урадили само напредни ученици. Овде има вредних ученика који су упорни и вежбају, али изгледа да је ово за њих било претешко. Грешили су у самој поставци заграда.

На овом примеру се региструје колико је једноставније и прецизније радити систем преко знака линеарне функције.

Одељење $VIII_3$

Редни број	Презиме и име	Оцена на полугодишту	Оцена на крају године	Бодови са теста	Бодови 1. задатак	Бодови 2. задатак	Бодови 3. задатак	Бодови 4. задатак	Бодови 5. задатак	Оцена са теста
1.	**Ученик 1**	**2**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
2.	**Ученица 2**	**3**	**4**	**70**	**20**	**20**	**15**	**15**	**0**	**4-**
3.	**Ученик 3**	**2**	**3**	**60**	**20**	**10**	**10**	**10**	**10**	**3**
4.	**Ученица 4**	**2**	**2**	**40**	**10**	**20**	**10**	**0**	**0**	**2**
5.	**Ученица 5**	**4**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
6.	**Ученица 6**	**1**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
7.	**Ученица 7**	**5**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
8.	**Ученица 8**	**1**	**2**	**50**	**20**	**20**	**10**	**0**	**0**	**3-**
9.	**Ученица 9**	**5**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
10.	**Ученица 10**	**3**	**4**	**90**	**20**	**15**	**15**	**20**	**20**	**5-**
11.	**Ученица 11**	**3**	**3**	**60**	**20**	**15**	**15**	**10**	**0**	**3**
12.	**Ученик 12**	**2**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
13.	**Ученица 13**	**4**	**4**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
14.	**Ученица 14**	**4**	**5**	**90**	**20**	**20**	**20**	**10**	**20**	**5-**
15.	**Ученица 15**	**2**	**2**	**40**	**20**	**20**	**0**	**0**	**0**	**2**
16.	**Ученица 16**	**4**	**4**	**80**	**20**	**20**	**20**	**0**	**20**	**4**

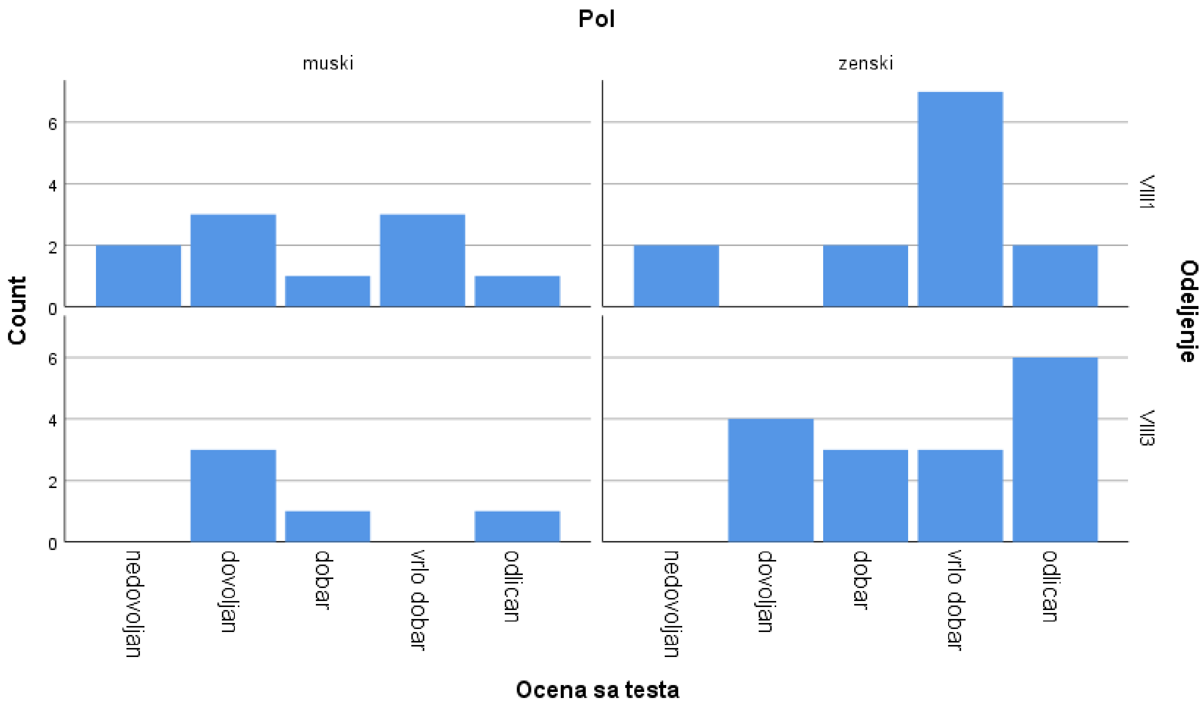
17.	**Ученица 17**	**3**	**3**	**60**	**20**	**15**	**15**	**10**	**0**	**3**
18.	**Ученик 18**	**2**	**2**	**40**	**15**	**15**	**10**	**0**	**0**	**2**
19.	**Ученица 19**	**4**	**4**	**80**	**20**	**20**	**20**	**10**	**10**	**4**
20.	**Ученица 20**	**4**	**5**	**100**	**20**	**20**	**20**	**20**	**20**	**5**
21.	**Ученица 21**	**1**	**2**	**40**	**20**	**10**	**10**	**0**	**0**	**2**

Ово одељење је на полугодишту имало просечну оцену 2,90, на крају школске године 3,33, а на тесту је просечна оцена била 3,48.

Просечна оцена на тесту је била већа од просечне оцене и на полугодишту и на крају школске године.

Први задатак је урадило 19 ученика. Само два ученика су делимично урадили први задатак и то један ученик је направио омашку у записивању бројева, а други је изоставио минус испред знака бесконачно. Пети задатак је урадило осам ученика и два делимично. Ученици са слабијим квалитетом су напредни задатак решили готово рутински.

7.АНАЛИЗИРАЊЕ РЕЗУЛТАТА СА ТЕСТА ПРЕКО ПРОГРАМА СПСС



Са датог хистограма видимо да су два дечака и две девојчице из одељења $VIII_1$ добили недовољну оцену на тесту. У одељењу $VIII_3$ нема недовољних оцена.

Три дечака из одељења $VIII_1$ и три дечака и четири девојчице из одељења $VIII_3$ добили су оцену довољан (2).

Један дечак и две девојчице из $VIII_1$ и један дечак и три девојчице из $VIII_3$ добили су оцену добар (3).

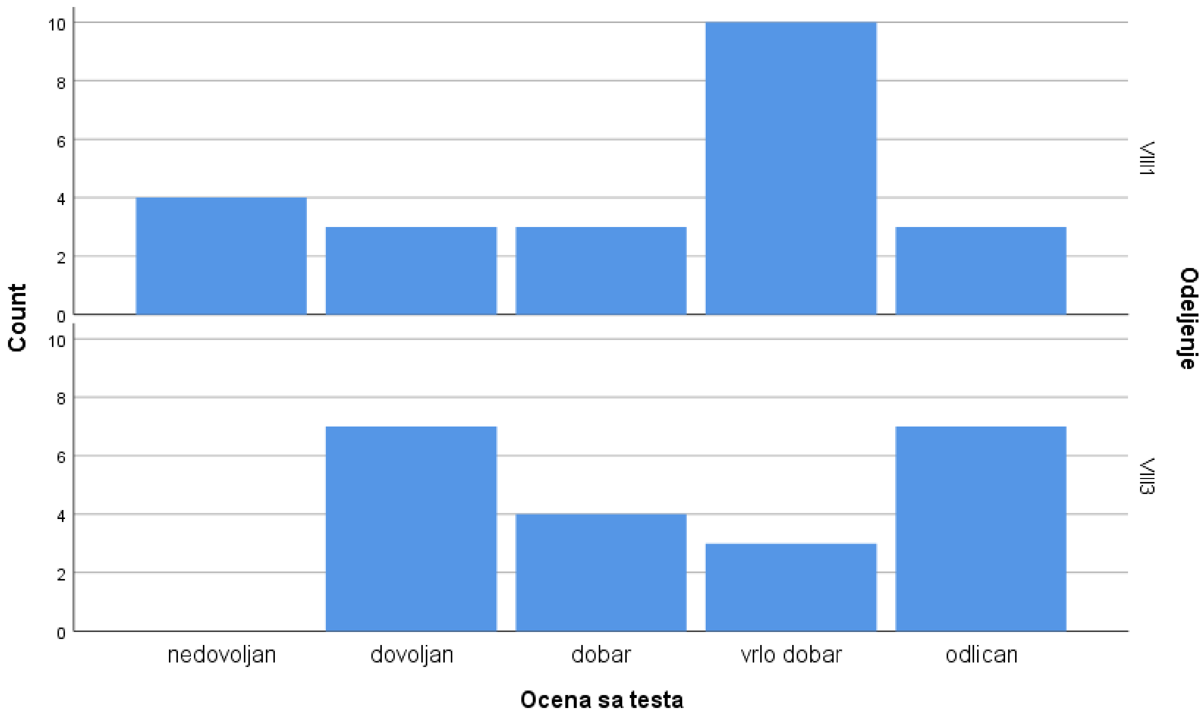
Три дечака и седам девојчица из $VIII_1$ и три девојчице из $VIII_3$ добили су оцену врло добар (4).

Један дечак и две девојчице из $VIII_1$ и један дечак и шест девојчица из $VIII_3$ добили су оцену одличан (5).

Odeljenje * Ocena sa testa Crosstabulation

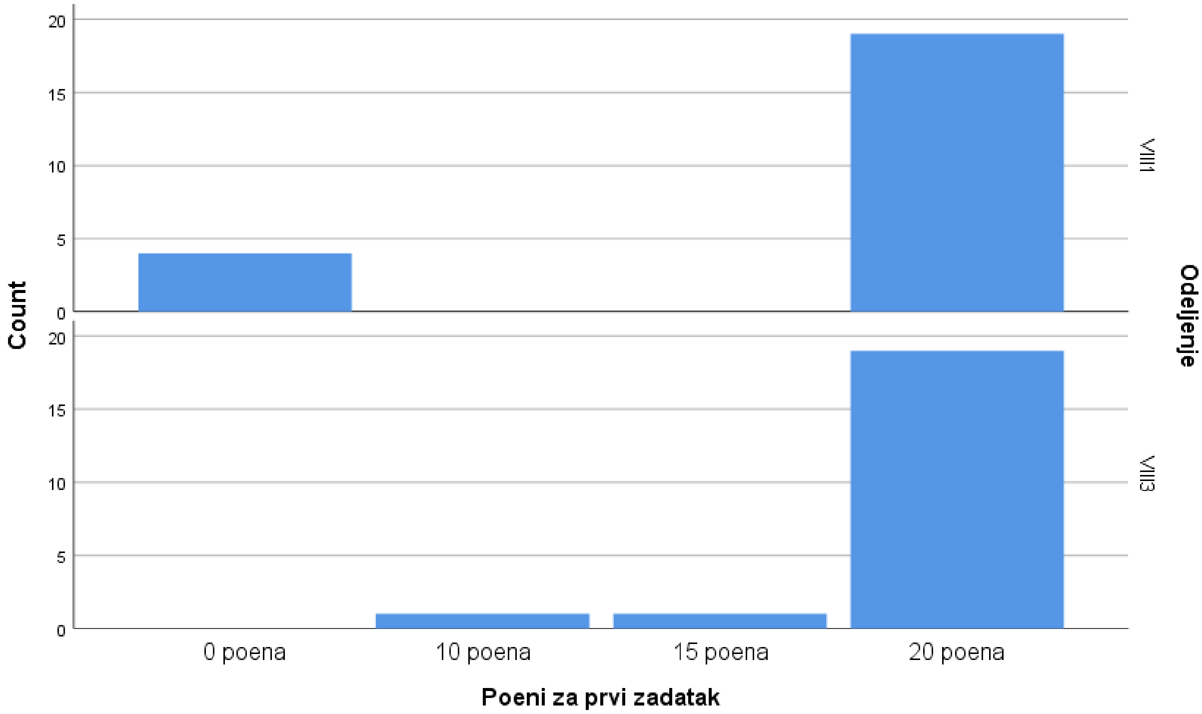
Count

		Ocena sa testa					
		nedovoljan	dovoljan	dobar	vrlo dobar	odlican	Total
Odeljenje	VIII1	4	3	3	10	3	23
	VIII3	0	7	4	3	7	21
Total		4	10	7	13	10	44



Са датог хистограма се види да је у одељењу $VIII_1$ било четири јединице, три двојке, три тројке, десет четворки и три петице.

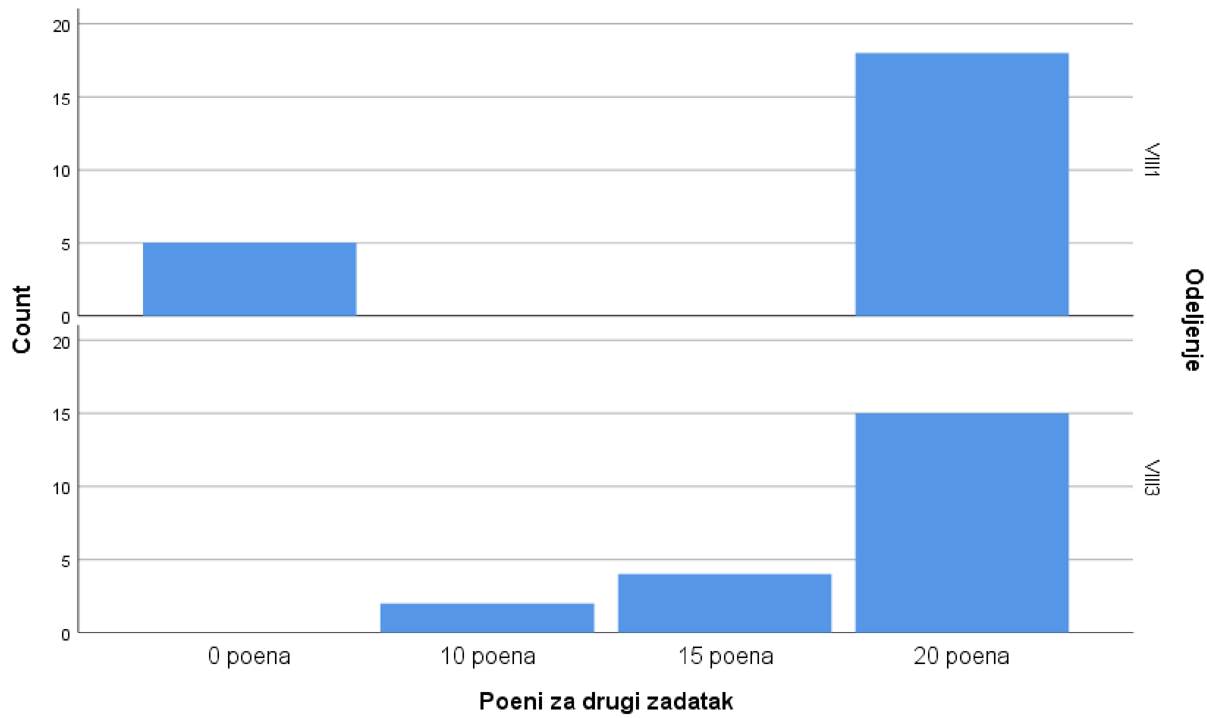
У одељењу $VIII_3$ је било седам двојки, четири тројке, три четворке и седам петица.



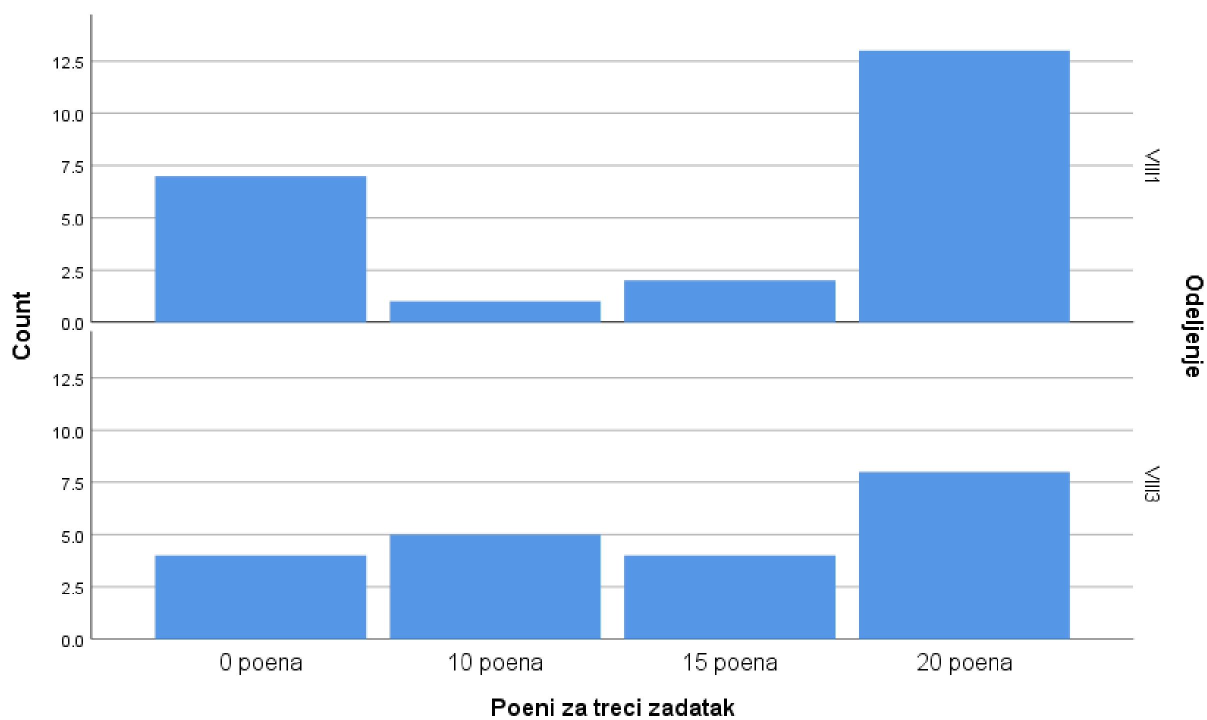
Четири ученика у одељењу VIII$_1$ није урадило први задатак, а деветнаест их је урадило комплетно тачно.

У одељењу VIII$_3$ два ученика је делимично урадило задатак, а деветнаест их је урадило комплетно тачно.

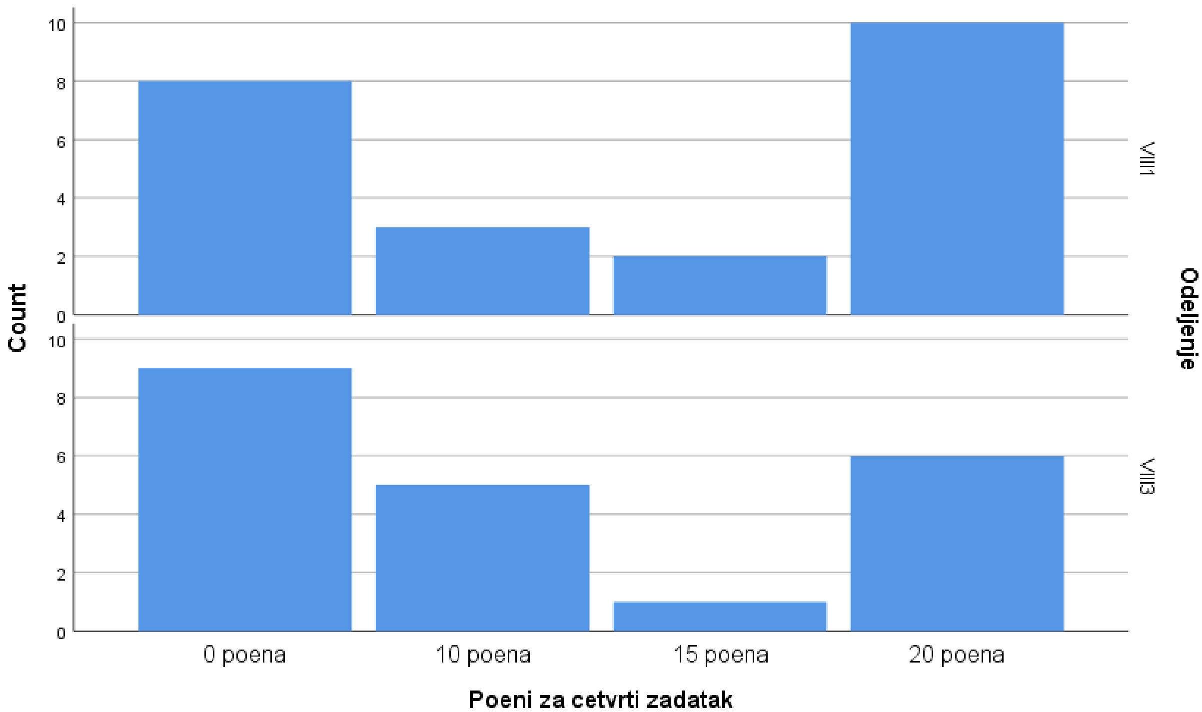
Забрињавајуће је што четири ученика из VIII$_1$ нису урадили овај задатак (основни задатак), а неки од њих имају позитивне оцене.



Пет ученика из $VIII_1$ није урадило други задатак, а осамнаест је урадило компетан задатак. У одељењу $VIII_3$ нема ученика који нису радили овај задатак, а тачно га је урадило петнаест ученика.

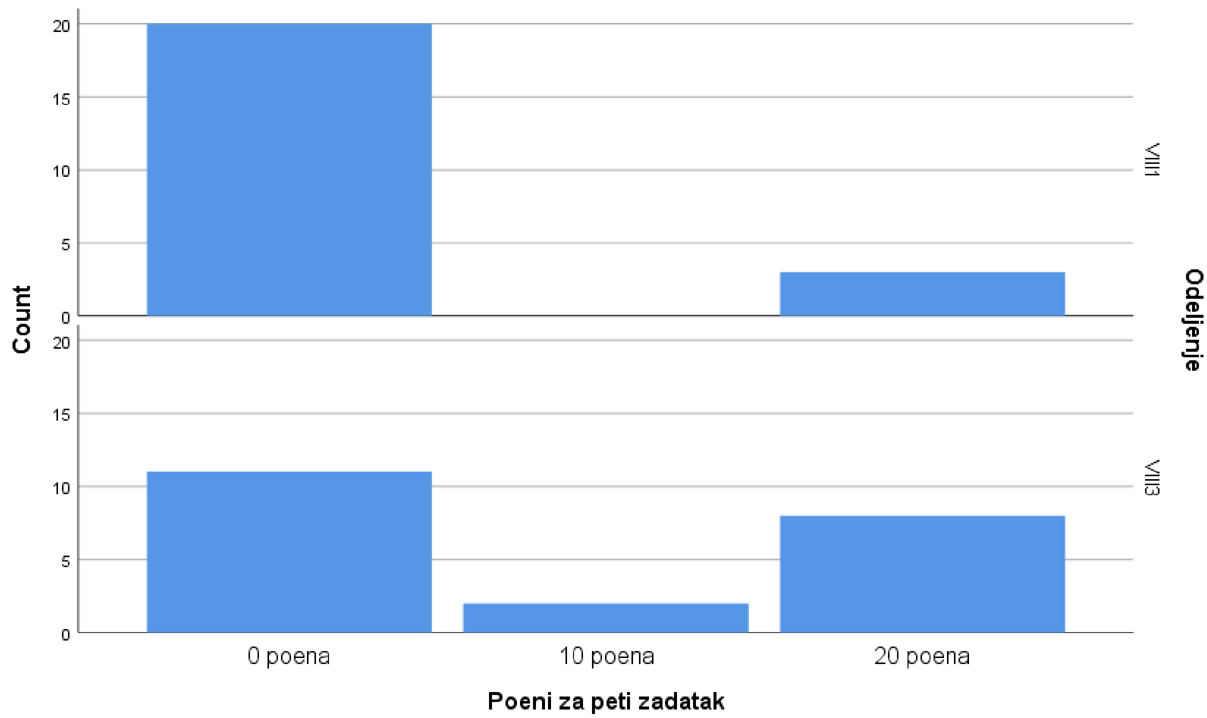


Трећи задатак у одељењу $VIII_1$ комплетно је урадило тринаест ученика, а није урадило седам. У одељењу $VIII_3$ осам ученика је урадило комплетно задатак, а четворо није имало ниједан поен.



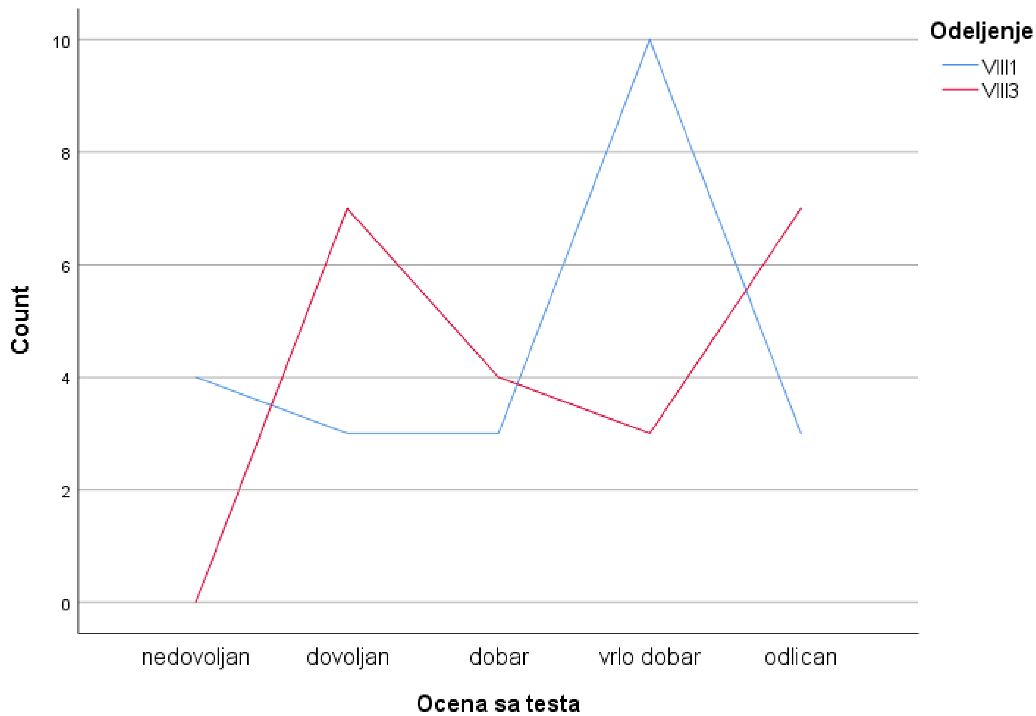
У одељењу $VIII_1$ четврти задатак није урадиоло осам ученика, док је њих десет урадило цео задатак.

Девет ученика није урадило четврти задатак у одељењу $VIII_3$, а шест ученика је имало максималан број бодова.



Двадесет ученика одељења VIII$_1$ није освојило бодове за пети задатак. Правили су грешке у самој поставци задатка. Нису обратили пажњу на заграде. Три ученика је урадило задатак.

У одељењу VIII$_3$ једанаест ученика није урадило пети задатак, њих осморо је урадило компетно, док је њих двоје урадило делимично.


Odeljenje
VIII1
VIII3
Count
10
8
6
4
2
0
nedovoljan
dovoljan
dobar
vrlo dobar
odlican
Ocena sa testa

8. ЗАКЉУЧАК

Овај експеримент је спроведен у школи где није било великог избора: имају само три одељења VIII разреда, тако да није довољно репрезентативан узорак.

Експериментом сам дошла до закључка да су ученици који су оквалификовани као слабији много боље урадили пети задатак- нарпедни и први задатак који се третира као основни. Задатак средњег нивоа су радили и једни и други приближно успешно (неуспешно).

Потребно је обратити пажњу на редослед реализације програма у VIII разреду. Прво треба обрадити наставну јединицу: линеарна функција и добро урадити одређивање знака линеарне функције. Најједноставније за цртање графика функције је одредити тачке пресека са осама. Функција је позитивна ако се њен график налази изнад x-осе, а негативна ако се њен графин налази испод x-осе.

Овакав начин решавања система линеарних неједначина (преко функције) треба обавезно показати у VIII разреду, због напредних ученика, али и због ученика који умеју да читају вредности са графика.

На овај начин се оспособљавају да примењују функцију и сигурно постигну бољи успех на ПИСА тесту.

Овакав начин предавања требало би поновити на још неком узорку како би се потврдили ови резултати.

9. ЛИТЕРАТУРА

- Математика 8, Уџбеник за осми разред основне школе, Н. Икодиновић, С. Димитријевић, Клет, Београд, 2016.
- Математика 8, Збирка задатака са решењима, Б. Поповић, С. Милојевић, Н. Вуловић, Клет, Београд, 2016.
- Математика за осми разред основне школе, В. Андрић, Ђ. Дугошија, В. Јоцковић, В.Мићић, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2010.
- Збирка задатака из математике за осми разред основне школе, В. Андрић, Ђ. Дугошија, В. Јоцковић, В.Мићић, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 2010.
- Математика за I разред средње школе, М. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1994.
- Математика са збирком задатака за I разред средњег образовања и васпитања, природно-математичке струке, П. Миличић, В. Стојановић, З. Каделбург, Б. Боричић, С.Тмушић, Д. Распоповић, Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1988.
- Mathèmatiques 2^e, Collection «Transmath», R. Barra, M. Glaymann, J. Malaval, J.J. Penesec, Nathnan, Avril, 1987.
- СПСС приручник за преживљавање, IV издрање, J. Palant, Вулкан, Београд