Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Polinomi nad poljem kompleksnih brojeva

Master rad

Mentor:
dr Miljan Knežević

Student:
Milica Ćurčić
1055/2016

Beograd, 2019.

Sadržaj

1 Uvod

Da bismo došli do saznanja o kompleksnim brojevima koja su nam dostupna, pa čak i do njihovog izjednačavanja po značaju sa realnim brojevima, a kasnije i povezivanja sa geometrijom, bilo je potrebno da prođe puno godina napornog rada mnogih matematičara.

Danas su kompleksni brojevi i polinomi zastupljeni u trećoj godini srednjih škola, a zadaci iz ove oblasti su česti na prijemnim ispitima za fakultete. U okviru kursa Školska praksa na masteru, upravo ovu temu sam prezentovala učenicima. Pripremajući se za čas, istražujući, primetila sam da nema puno izvora i tu se javila ideja i želja da upravo polinomi nad poljem kompleksnih brojeva budu tema master rada koji je pred vama.

Nepravedno zapostavljeni, na neki način, polinomi su zaslužni za nastanak kompleksnih brojeva. Problem koji je inicirao otkriće kompleksnih brojeva u 16. veku, sa kojim su se susreli italijanski matematičari Tartalja i Kardan, je rešavanje kubne jednačine, a rešenja te jednačine su upravo koreni odgovarajućeg polinoma.

Zato će stranice koje slede biti posvećene polinomima, počev od samog uvođenja polinoma nad poljem kompleksnih brojeva, osnovnih pojmova, deljivosti, preko raznih primera, do osnovne teoreme algebre, teoreme o faktorizaciji, Vietovih formula, da bismo došli do polinoma sa realnim koeficijentima i rešavanja gore pomenute kubne jednačine.

2 Polje kompleksnih brojeva

Nećemo previše detaljno zalaziti u algebarske strukture, uvođenje skupa kompleksnih brojeva, jer su to opširne teme same za sebe. Prirodno je da pre same priče o polinomima nad poljem kompleksnih brojeva napravimo kratak osvrt i podsećanje na samo polje kao algebarsku strukturu, a zatim i na konkretno polje kompleksnih brojeva.

Definicija 2.0.1. *Uređena trojka* $(S, *, \circ)$ *je polje ako važi:*

1) $(S, *)$ *je komutativna grupa,*

2) $(S \setminus \{0\}, \circ)$ *je komutativna grupa*
(0 je neutralni element u S *u odnosu na* $*$*),*

3) $(\forall a, b, c \in S)(a \circ (b * c)) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

Podsetimo se, **komutativna ili Abelova grupa je zatvorena, asocijativna, ima neutral, svaki element ima inverz i važi komutativnost**. Važan primer polja je svakako polje realnih brojeva $\mathbb{R}$, pomoću koga intuitivno dolazimo i do drugog važnog primera polja, a to je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.

Dakle, dobro poznata priča o nerešivosti jednačine $x^2 = a$, za $a \in \mathbb{R}$ u skupu realnih brojeva vodi do toga da je najmanje polje u kojem data jednačina $x^2 = a$ ima rešenje za svaki realan broj a upravo polje kompleksnih brojeva.

Poznato je da skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ možemo predstaviti i kao skup uređenih parova realnih brojeva $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i to na sledeći način. Kompleksan broj $z = a + b\imath$ predstavljamo kao (a, b), imaginarnu jedinicu kao (0,1). Neutralni element u odnosu na sabiranje je $0 = (0, 0)$, u odnosu na množenje $1 = (1, 0)$. Definisane su i binarne operacije:

1) $+$: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$,

2) $\cdot$: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

kao i unarne:

1) $-$: $-(a, b) = (-a, -b)$,

2) $^{-1}$: $(a, b)^{-1} = (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}), (a, b) \neq (0, 0)$.

Kada smo definisali binarne operacije i njima odgovarajuće unarne, odnosno suprotne i inverzne elemente, dolazimo do sledećeg tvrđenja.

Teorema 1. *Algebarska struktura* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *je polje.*

Dokaz. Za vežbu, po definiciji polja, proveravanjem ispunjenosti svih uslova. $\square$

Pre nego što definišemo polinom nad poljem kompleksnih brojeva, potrebno je da pomenemo i **odnos prstena i polja**. Za početak, podsetimo se definicije prstena.

Definicija 2.0.2. *Uređena trojka* $(S, *, \circ)$ *je prsten ako važi:*

1) $(S, *)$ *je komutativna grupa,*

2) $(S, \circ)$ *je polugrupa,*

3) $(\forall a, b, c \in S)(a \circ (b * c)) = (a \circ b) * (a \circ c)$.

Drugim rečima, prsten je struktura u kojoj su definisane asocijativne binarne operacije $+$ i $\cdot$, važi distributivnost $\cdot$ prema $+$, $+$ je komutativna, ima neutral 0 i za svaki element x iz prstena postoji suprotan x' iz prstena tako da važi $x + x' = 0$.

Ako ovo uporedimo sa definicijom polja, primetićemo da važi isto, sa tim što za polje zahtevamo postojanje neutrala i inverznih elemenata i za operaciju $\cdot$, kao i komutativnost operacije $\cdot$. Laički rečeno, u polju zahtevamo mogućnost deljenja i komutativnost množenja, pa još možemo i primetiti da je svako polje ujedno i prsten, a da obrnuto ne važi.

3 Definicija polinoma i operacije

3.1 Polinom nad poljem $\mathbb{C}$

Ukoliko dobro poznajemo definiciju polinoma i osnovnih operacija nad nekim prstenom $\mathbb{K}$, a koristeći zapažanja iz prethodnog odeljka, nećemo imati poteškoće u definisanju polinoma i operacija nad poljem kompleksnih brojeva.

Definicija 3.1.1. ***Polinom po promenljivoj*** x ***nad prstenom*** $\mathbb{K}$ *je izraz*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. *Ako je* $a_n \neq 0$, *broj* n *se naziva* ***stepenom polinoma*** $p(x)$, *sabirak* $a_n x^n$ *se naziva* ***najstarijim članom***, *sabirak* a_0 ***slobodnim članom***, *a koeficijent* a_n ***najstarijim koeficijentom*** *tog polinoma.*

Polinom čiji su svi koeficijenti jednaki nuli, $p(x) \equiv 0$, naziva se **nula-polinom** i njegov stepen se ne definiše. Stepen polinoma označavamo sa $st(p(x))$ ili kraće $st(p)$.
Gore navedena definicija je uopštena, $\mathbb{K}$ može biti prsten celih brojeva $\mathbb{Z}$ ili polje racionalnih $\mathbb{Q}$, realnih $\mathbb{R}$ ili kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$.
Sada možemo definisati polinom nad poljem $\mathbb{C}$ koristeći prethodnu, uopštenu definiciju.

Definicija 3.1.2. ***Polinom po kompleksnoj promenljivoj*** z ***nad poljem*** $\mathbb{C}$ *je izraz*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

pri čemu je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *i* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. *Ako je* $a_n \neq 0$, *broj* n *se naziva* ***stepenom polinoma*** $p(z)$, *sabirak* $a_n z^n$ *se naziva* ***najstarijim članom***, *sabirak* a_0 ***slobodnim članom***, *a koeficijent* a_n ***najstarijim koeficijentom*** *tog polinoma.*

Još jedan način za uvođenje polinoma nad poljem $\mathbb{C}$ jeste **pomoću preslikavanja** i to na sledeći način.

Definicija 3.1.3. *Neka su* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. *Preslikavanje* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *koje broju* z *dodeljuje broj* $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, *definisano sa* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *naziva se* ***kompleksni polinom***.

Ako je $p(z) = 0$, za neko $z \in \mathbb{C}$, tada kažemo da je z **nula polinoma** ili **koren polinoma** $p(z)$.

3.2 Jednakost polinoma

Ako bismo polinome $p(z)$ i $q(z)$ posmatrali kao funkcije, neformalno bismo mogli reći da su dva polinoma jednaka ako za svaku vrednost promenljive z važi $p(z) = q(z)$.

Definicija 3.2.1. *Neka su* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *i* $q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0$ *dva polinoma. Kažemo da su oni* ***jednaki*** *ako su istog stepena,* $st(p) = st(q)$*, i ako važi* $a_k = b_k$ *za sve* $k, 0 \leq k \leq st(p)$.

Primer 1. *Polinomi* $p(z) = z^3 - 2z + \imath$ *i* $q(z) = z^3 - 2z + \imath$ *su jednaki.*

3.3 Sabiranje polinoma

Zbir dva polinoma je takođe polinom.

Definicija 3.3.1. *Neka su* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *i* $q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0$ *dva polinoma. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti da je* $st(p) > st(q)$*. Tada je* ***zbir****:*
$p(z)+q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 + b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0$
$p(z)+q(z) = a_n z^n + \cdots + a_{m+1} z^{m+1} + (a_m + b_m) z^m + \cdots + (a_1 + b_1) z + (a_0 + b_0)$.

Primetimo da je $st(p+q) \leq max\{st(p), st(q)\}$. **Neutralni element** za sabiranje je nula polinom, a **suprotni polinom** polinoma $p(z)$ je $-p(z)$. Zato ne definišemo oduzimanje polinoma, već ga posmatramo kao sabiranje.

Primer 2. *Izračunati zbir polinoma* $p(z) = z^3 + 2z^2 + 3iq(z) = -2z^4 - z^3 + z$.

$p(z) + q(z) = (z^3 + 2z^2 + 3) + (-2z^4 - z^3 + z)$
$p(z) + q(z) = -2z^4 + (1 - 1)z^3 + 2z^2 + z + 3$
$p(z) + q(z) = -2z^4 + 2z^2 + z + 3.$

3.4 Množenje polinoma

Proizvod dva polinoma je takodje polinom.

Definicija 3.4.1. *Neka su* $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ *i* $q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0$ *dva polinoma. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti da je* $st(p) > st(q)$. *Tada je* ***proizvod****:*
$p(z) \cdot q(z) = (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0) \cdot (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0)$
$p(z) \cdot q(z) = \sum_{i=n}^{0} (a_i z^i \sum_{j=m}^{0} b_j z^j)$
$p(z) \cdot q(z) = a_n b_m z^{n+m} + \cdots + a_0 b_0$.

Primetimo da je $st(p \cdot q) = st(p) + st(q)$.

Primer 3. *Pomnožiti polinome* $p(z) = z^2 - 3$ *i* $q(z) = z + \imath$.
$p(z) \cdot q(z) = (z^2 - 3) \cdot (z + \imath)$
$p(z) \cdot q(z) = z^2 z + z^2 \imath - 3z - 3\imath$
$p(z) \cdot q(z) = z^3 + \imath z^2 - 3z - 3\imath$.

3.5 Deljivost polinoma

Definicija 3.5.1. *Za dva polinoma* $a(z)$ *i* $b(z)$, *takva da je* $b(z) \neq 0$ *jednoznačno su određena dva polinoma* $q(z)$ *i* $r(z)$ *tako da je*
$a(z) = b(z) \cdot q(z) + r(z)$, *pri čemu je* $st(r) < st(b)$. *Kažemo da je polinom* $a(z)$ ***deljiv*** *polinomom* $b(z)$ *ako je ostatak* $r(z) = 0$.

Kod sabiranja i množenja smo definisali operacije nad nekim polinomima $p(z)$ i $q(z)$. Uobičajeno je da za količnik dva polinoma koristimo polinom $q(z)$, a za ostatak $r(z)$, pa otuda malo odstupanje u oznakama od prethodnog. Algoritam deljenja polinoma nije komplikovan, što ćemo prikazati na primeru koji sledi.

Primer 4. *Odrediti količnik* $q(z)$ *i ostatak* $r(z)$ *pri deljenju polinoma* $a(z) = z^5 - z^3 + z + 1$ *sa* $b(z) = z^2 + z + 1$.

Najstariji član polinoma $a(z)$ delimo najstarijim članom polinoma $b(z)$ i dobijamo najstariji član količnika, $q(z)$. Sada, najstarijim članom količnika množimo ceo polinom $b(z)$ i potpisujemo ispod $a(z)$, zatim **menjamo znak**, potpisujemo, sabiramo i nastavljamo isti postupak (za polinom $a'(z) = z^4 - 2z^3 + z + 1$ i $b(z)$) sve dok ne dođemo do ostatka.

$$
\begin{array}{l}
(z^5 - z^3 + z + 1) : (z^2 + z + 1) = z^3 - z^2 - z + 2 \\
\underline{\pm z^5 \pm z^4 \pm z^3} \\
\qquad -z^4 - 2z^3 + z + 1 \\
\qquad \underline{\mp z^4 \mp z^3 \mp z^2} \\
\qquad\qquad -z^3 + z^2 + z + 1 \\
\qquad\qquad \underline{\mp z^3 \mp z^2 \mp z} \\
\qquad\qquad\qquad 2z^2 + 2z + 1 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\pm 2z^2 \pm 2z \pm 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -1
\end{array}
$$

Dakle, količnik je $q(z) = z^3 - z^2 - z + 2$, a ostatak $r(z) = -1$.

3.5.1 Bezuova teorema

Slika 1: Etjen Bezu

Teorema 2 (**Bezuova teorema**). *Ostatak koji se dobija pri deljenju polinoma a(z) sa (z-c) jednak je a(c).*

Dokaz. Neka je $a(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ i $b(z) = z - c$. Koristeći definiciju deljivosti možemo zapisati:

$a(z) = b(z) \cdot q(z) + r(z)$, odnosno

$a(z) = (z - c) \cdot q(z) + r(z)$, sada ako posmatramo $z = c$ dobijamo sledeće,

$a(c) = (c - c) \cdot q(z) + r(c)$, što je dalje,

$a(c) = r(c)$, a to je i trebalo dokazati, ostatak koji se dobija pri deljenju jednak je $a(c)$.

$\square$

Posledica 1. *Polinom a(z) deljiv je sa (z-c) akko a(c)=0.*

Primer 5. *Polinom $p(z)$ pri deljenju sa $z - \imath$ daje ostatak 3, a pri deljenju sa $z - 2$ ostatak 4. Koliki je ostatak pri deljenju sa $(z - \imath)(z - 2)$?*

$p(z) = (z - \imath) \cdot q_1(z) + 3$ *i* $p(z) = (z - 2) \cdot q_2(z) + 4$

$p(\imath) = 3$ *i* $p(2) = 4$

$p(z) = (z - \imath)(z - 2) \cdot q_3(z) + az + b$

$p(\imath) = a\imath + b = 3$

$p(2) = 2a + b = 4$

$a(2 - \imath) = 1$

$a = \frac{1}{2-\imath} = \frac{1}{2-\imath} \cdot \frac{2+\imath}{2+\imath} = \frac{2+\imath}{5}$

$\frac{2\imath-1}{5} + b = 3$

$b = \frac{16-2\imath}{5}$

Konačno, traženi ostatak je $r(z) = \frac{2+\imath}{5}z + \frac{16-2\imath}{5}$.

Kod ovakvih zadataka važno je napomenuti da ***stepen traženog ostatka mora biti manji od stepena polinoma kojim delimo***.

Primer 6. *Odrediti brojeve p i q tako da polinom $a(z) = z^3 + pz^2 + qz + 1$ bude deljiv sa $b(z) = z^2 - 3z - 4$.*

$a(z) = b(z) \cdot Q(z)$,

$a(z) = z^3 + pz^2 + qz + 1 = (z^2 - 3z - 4) \cdot (\alpha z - \beta)$,

$a(z) = z^3 + pz^2 + qz + 1 = \alpha z^3 - (\beta + 3\alpha)z^2 + (3\beta - 4\alpha)z + 4\beta$.

$z^3 : 1 \equiv \alpha$

$\alpha = 1$

$a(z) = z^3 + pz^2 + qz + 1 = z^3 - (\beta + 3)z^2 + (3\beta - 4)z + 4\beta$

$z^2 : p \equiv -\beta - 3$

$z : q \equiv 3\beta - 4$

$1 \equiv 4\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$

$p = -\frac{1}{4} - 3$, $q = 3 \cdot \frac{1}{4} - 4$

$p = -\frac{13}{4}$, $q = -\frac{13}{4}$.

4 Nule polinoma

Nule polinoma su od velikog značaja za teoriju polinoma. Nule, ili kako se još nazivaju i koreni polinoma, se mogu posmatrati i kao rešenja polinomu odgovarajuće jednačine. Ako je polinom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, njemu odgovarajuća jednačina je $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$. Sada još jasnije možemo uvideti da su nule ili koreni polinoma upravo one vrednosti za koje se polinom anulira.

Definicija 4.0.1. *Ako je $p(\alpha) = 0$, za neko $\alpha \in \mathbb{C}$, tada kažemo da je α* ***nula polinoma*** *$p(z)$.*

Ovde je pravi trenutak da pomenemo Bezuovu teoremu o kojoj je bilo reči kod deljivosti polinoma. Ako je $z = \alpha$ nula polinoma $p(z)$, pomoću Bezuove teoreme možemo zaključiti da je polinom $p(z)$ deljiv sa polinomom $(z - \alpha)$. Otuda polinom $p(z)$ možemo zapisati i na sledeći način $p(z) = (z - \alpha) \cdot q(z)$, gde je polinom $q(z)$ stepena manjeg za jedan od stepena polinoma $p(z)$. Sada nulu polinoma možemo definisati i na sledeći način.

Definicija 4.0.2. *$\alpha \in \mathbb{C}$ je nula polinoma $p(z)$ akko je $p(z) = (z - \alpha) \cdot q(z)$.*

Primer 7. *Odrediti bar jedan polinom čije su nule $\alpha_1 = \imath$ i $\alpha_2 = 7$.*

$p(z) = (z - \imath) \cdot (z - 7)$
$p(z) = z^2 - 7z - \imath z + 7\imath$
$p(z) = z^2 - (7 + \imath)z + 7\imath.$

Sada pogledajmo obrnut primer.

Primer 8. *Odrediti nule polinoma $p(z) = z^4 + 2z^3 - 14z^2 + 2z - 15$.*

Ako bismo krenuli da rešavamo kao jednačinu $p(z) = 0$,
odnosno $z^4 + 2z^3 - 14z^2 + 2z - 15 = 0$, ne bi bilo nemoguće, ali bi bilo znatno komplikovano u ovom trenutku.

Zato pokušajmo da se dosetimo drugog načina, koristeći da mora da važi $p(z) = 0$. Za početak izračunajmo $p(1)$, $p(-1)$, $p(\imath)$ i $p(-\imath)$.

$p(1) = 1 + 2 - 14 + 2 - 15 = -24 \neq 0$, *dakle 1 nije nula datog polinoma.*
$p(-1) = 1 - 2 - 14 - 2 - 15 = -32 \neq 0$, *ni -1 nije nula.*
$p(\imath) = 1 - 2\imath + 14 + 2\imath - 15 = 0$, *našli smo jednu nulu.*
$p(-\imath) = 1 + 2\imath + 14 - 2\imath - 15 = 0$, *i* $-\imath$ *je nula polinoma.*

Primetimo da je $-\imath$ *kompleksan broj, konjugovan broju* $\imath$. *Ovome će biti posvećena teorema u odeljku Polinomi sa realnim koeficijentima.*

Koristeći posledicu Bezuove teoreme, znamo da $(z - \imath)$ *deli* $p(z) = z^4 + 2z^3 - 14z^2 + 2z - 15$, *a isto važi i za* $(z + \imath)$, *pa će otuda i njihov proizvod* $(z - \imath)(z + \imath)$ *deliti dati polinom.*

$$
\begin{array}{l}
(z^4 + 2z^3 - 14z^2 + 2z - 15) : (z^2 + 1) = z^2 + 2z - 15 \\
\underline{-z^4 \qquad\quad + z^2} \\
\qquad 2z^3 - 15z^2 + 2z - 15 \\
\quad \underline{-2z^3 \qquad\quad \pm 2z} \\
\qquad\qquad -15z^2 \qquad - 15 \\
\quad \underline{\qquad\quad \mp 15z^2 \qquad \mp 15}
\end{array}
$$

Ostalo je još da nađemo dve nule rešavanjem kvadratne jednačine
$z^2 + 2z - 15 = 0$.
$z_3 = \frac{-2-8}{2} = -5$ *i* $z_4 = \frac{-2+8}{2} = 3$.

Konačno, nule polinoma $p(z) = z^4 + 2z^3 - 14z^2 + 2z - 15$ *su:*
$z_1 = \imath$, $z_2 = -\imath$, $z_3 = -5$ *i* $z_4 = 3$.

Kroz prethodni primer smo na delu videli kako se prožimaju deljivost polinoma, posledica Bezuove teoreme i nule polinoma.

4.1 Višestruke nule polinoma

Kao što kod realnih polinoma postoje višestruke nule, analogno postoje i kod kompleksnih polinoma.

Definicija 4.1.1. *$\alpha \in \mathbb{C}$ je **nula k-tog reda** polinoma $p(z)$ ili k**-tostruka nula**, ako $(z-\alpha)^k \mid p(z)$ i $(z-\alpha)^{k+1} \nmid p(z)$.*

Primer 9. *Odrediti bar jedan polinom čija je dvostruka nula $\alpha_1 = 1$ i druga nula $\alpha_2 = \imath$.*
$a(z) = (z-1)\cdot(z-1)\cdot(z-\imath)$
$a(z) = (z-1)^2\cdot(z-\imath)$
$a(z) = (z^2-2z+1)\cdot(z-\imath)$
$a(z) = z^3+\imath z^2-2z^2-2z\imath+z-\imath$, *kada malo lepše zapišemo:*
$a(z) = z^3+(\imath-2)z^2-(2\imath-1)z-\imath$

Primer 10. *Da li je $z=1$ dvostruka nula polinoma $p(z) = z^3-(2-\imath)z^2+(1-2\imath)z+\imath$?*

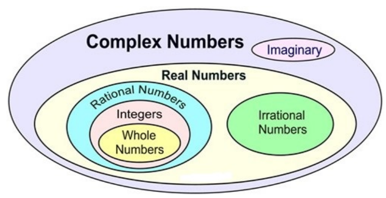
$p(1) = 1-2+\imath+1-2\imath+\imath = 0.$
Da bi nula bila dvostruka, potrebno je da prvi izvod u $z=1$ takođe bude 0, zato što ako je α dvostruka nula, polinom se može zapisati u obliku $p(z) = (z-\alpha)^2q(z)$. Diferenciranjem dobijamo $p'(z) = 2(z-\alpha)q(z)+(z-\alpha)^2q'(z)$, odnosno $p'(z) = (z-\alpha)[2q(z)+(z-\alpha)q'(z)]$, odakle se vidi da je α nula prvog izvoda polinoma.
Proverimo.

$p'(z) = 3z^2-2z(2-\imath)+1-2\imath$
$p'(1) = 3-4+2\imath+1-2\imath = 0.$

$z=1$ jeste dvostruka nula polinoma $p(z) = z^3-(2-\imath)z^2+(1-2\imath)z+\imath$.

5 Osnovna teorema algebre

Većini je dobro poznat "školski"pristup proširivanju skupa prirodnih brojeva uvođenjem suprotnih do celih, celih deljenjem, tačnije razlomcima do racionalnih, priča o $\sqrt{2}$ i π koja nas vodi do iracionalnih, da bismo najzad sve obuhvatili realnim brojevima. Tu dolazimo do onog sada već čuvenog da jednačina $x^2 + 1 = 0$ u skupu realnih brojeva nema rešenje i da rešenje, tog nazovimo problema, leži upravo kod kompleksnih brojeva.



Slika 2: Skup kompleksnih brojeva

Ako bismo ovu priču povezali sa realnim polinomima, primetićemo da realni polinom $p(x) = x^2 + 1$ nema nule. Logičan sled je da se zapitamo da li tako nešto važi i kod kompleksnih polinoma? Odgovor na to pitanje nam upravo daje **osnovna teorema algebre**. Osim što je teorema, nosi i epitet osnovne ili fundamentalne, i tako nam govori o svom značaju. Kako to biva, najčešće je formulacija ovakvih teorema izuzetno jednostavna.

Teorema 3 (**Osnovna teorema algebre**). *Svaki polinom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gde su $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \cdots, n$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, ima bar jednu nulu u $\mathbb{C}$.*

Postoji više dokaza ove teoreme. Algebarski, topološki su samo neki od njih. Naravno, ovde će biti reči o kompleksnom dokazu, koji je možda i najjednostavniji.

5.1 Liuvilova teorema

Slika 3: Žozef Liuvil

Kompleksni dokaz osnovne teoreme algebre će biti na neki način posledica Liuvilove teoreme. Zato pre samog dokaza treba nju spomenuti.

Teorema 4 (**Liuvilova teorema**)**.** *Svaka cela, ograničena po modulu funkcija f je konstanta.*

Podsetimo se, **funkcija je analitička u nekoj tački, ako je diferencijabilna u nekoj njenoj okolini**, a **cele funkcije su analitičke u svim tačkama konačne ravni**.
Napomena: Reč je o kompleksnim funkcijama kompleksne promenljive i o kompleksnoj diferencijabilnosti.

Dokaz. Funkcija f je ograničena, otuda postoji $M \geq 0$ tako da za svako $z \in \mathbb{C}$ važi $|f(z)| \leq M$. Neka je $\alpha \in \mathbb{C}$ i $\rho > 0$ proizvoljan broj. Koristeći Košijevu nejednakost:

$$|f'(\alpha)| \leq \frac{M_\rho}{\rho} \leq \frac{M}{\rho}.$$

Kada pustimo da ρ teži beskonačnosti dobijamo $f'(\alpha) = 0$, a kako smo α uzeli proizvoljno, sledi da je $f' \equiv 0$ na $\mathbb{C}$, odnosno da je f konstantna. □

Sada možemo dokazati osnovnu teoremu algebre.

Dokaz. Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $n \geq 1$.

Pretpostavimo da je $p(z) \neq 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$, tj. da polinom nema nulu.
Sada ćemo definisati funkciju $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sa $f(z) = \frac{1}{p(z)}$.
Kako je $p(z)$ cela funkcija, onda je i $f(z)$ cela funkcija.

Bez umanjenja opštosti možemo posmatrati za $a_n = 1$, jer iako nije 1, možemo podeliti ceo polinom sa a_n i dobiti da je najstariji član 1.

$a_n = 1$:
$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|}$
$|f(z)| = \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}|}$.

Kada $|z| \to \infty$, $\frac{1}{|z|^n} \to 0$, $\frac{a_{n-1}}{z}, \cdots, \frac{a_0}{z^n} \to 0$, a $\frac{1}{|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}|} \to 1$
Dakle, $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = 0 \Rightarrow f$ je ograničena.

Sada se pozovemo na Liuvilovu teoremu, f cela i ograničena $\Rightarrow f$ je konstantna. Dobili smo da je $f(z)$ konstantna odatle je i $p(z)$ konstantna, što je u kontradikciji sa $n \geq 1$.

Polazna pretpostavka da polinom nema nulu nas je dovela do kontradikcije, stoga zaključujemo da polinom mora imati bar jednu nulu. □

Slika 4: Alber Žirar

Zanimljivo je pomenuti da je prošlo gotovo dvesta godina od intuicije nekih matematičara (u nekim izvorima se spominje da je sličnu teoremu prvi formulisao francuski matematičar *Alber Žirar*) da zaista važi osnovna teorema algebre, do prvog potpunog dokaza kojeg nam je dao *Gaus*, 1815. godine.

Slika 5: Karl Fridrih Gaus

Na osnovnu teoremu algebre se prirodno nadovezuje faktorizacija polinoma, negde kao njena posledica, negde kao posebna teorema . Ovde će joj, kao teoremi, biti posvećena posebna sekcija, upravo zbog njene velike primene kroz različite zadatke, što će biti prikazano kroz primere.

6 Teorema o faktorizaciji polinoma

Faktorizacija predstavlja razlaganje nekog elementa, odnosno njegovo pojednostavljenje na polazne elemente. U slučaju faktorizacije polinoma govorimo o raščlanjenju polaznog polinoma na proizvod neraščlanjivih, u čemu nule polinoma igraju značajnu ulogu i važno je napomenuti da su faktori, neraščlanjeni polinomi, manjeg stepena od polaznog.
Postoji nekoliko uopštenih metoda za faktorizaciju polinoma, poput traženja najvećeg zajedničkog delioca i korišćenja distributivnog zakona, grupisanje sličnih oblika, prepoznavanje poznatih obrazaca (kvadrat binoma, razlika kvadrata, zbir ili razlika dva kuba, ili dva n-ta stepena...).

Primer 11. *Faktorisati polinom* $p(z) = z^3 - z$.

$p(z) = z(z^2 - 1) = z(z-1)(z+1)$.

Ovaj polinom ima tri nule, $z_1 = 0, z_2 = 1$ *i* $z_3 = -1$.

Prethodni primer, prilično jednostavan, ilustruje upravo tu situaciju kada možemo da prepoznamo neki poznati obrazac, u ovom slučaju razliku kvadrata. Često su ti primeri sa prepoznavanjima, grupisanjima zastupljeni u zadacima, naravno i među njima ima komplikovanijih primera. Poput sledećeg.

Primer 12. *Faktorisati polinom* $p(z) = z^4 + z^3 + z^2 + 3z - 6$.

$p(z) = (z^2+3)(z^2+z-2)$
$p(z) = (z^3 - z^2 + 3z - 3)(z+2)$
$p(z) = (z-1)(z^3 + 2z^2 + 3z + 6)$
$p(z) = (z^2+3)(z-1)(z+2)$

Ovaj polinom ima četiri nule, $z_1 = -\imath\sqrt{3}$,$z_2 = \imath\sqrt{3}$, $z_3 = 1$ *i* $z_4 = -2$.

Prethodni primeri u sebi sadrže samo zahtev da se dati polinom faktoriše. Teži zadaci povezuju više oblasti, pa tako možemo objediniti nule polinoma, Bezuovu teoremu, osnovnu teoremu algebre kao i gore pomenutu teoremu o faktorizaciji polinoma koju ćemo formulisati i koja će nam i dati kredibilitet da koristimo nule polinoma za faktorisanje.

Teorema 5 (**Teorema o faktorizaciji polinoma**). *Svaki polinom $P(z) \in \mathbb{C}$ n-tog stepena može se na jedinstven način predstaviti u obliku proizvoda n linearnih faktora.*
$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n), a_n \neq 0$
$\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *su nule polinoma* $P(z)$

Važno je napomenuti da se može desiti da su neki od $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ jednaki među sobom, pa se navedena faktorizacija iz teoreme može zapisati i u malo drugačijem obliku:

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\cdots(z-\alpha_m)^{k_m}$,
gde su $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ međusobno različite nule polinoma $P(z)$, a $k_1, \cdots, k_m$ su prirodni brojevi, takvi da je njihov zbir $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n = stP(z)$.
Ovakva faktorizacija se naziva **kanonska faktorizacija polinoma**.

Dokaz. Prema osnovnoj teoremi algebre, $P(z)$ ima bar jednu nulu. Označimo tu nulu sa α_1, a $P(z)$ označimo sa $P_n(z)$. Prema Bezuovoj teoremi $P_n(z)$ je deljiv sa $(z - \alpha_1)$, pa odatle sledi:
$P_n(z) = (z - \alpha_1) \cdot Q(z)$, sada $Q(z)$ označimo sa $P_{n-1}(z)$ koji prema osnovnoj teoremi algebre, ima bar jednu nulu α_2, nastavljamo analogno.

$$P_n(z) = (z - \alpha_1) \cdot P_{n-1},$$
$$P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdot P_{n-2},$$
$$\vdots,$$
$$P_n(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)\cdots(z - \alpha_n), \text{ što je i trebalo dokazati.}$$

□

7 Vietove formule

Slika 6: Fransoa Viet

Vietove formule povezuju nule polinoma sa njegovim koeficijentima. Posebno su značajne za polinome viših stepena, jer je izračunavanje nula tu znatno komplikovano, pa neretko Vietove formule budu i jedine koje daju informacije o nulama. Kada je reč o polinomu stepena dva, nule računamo dobro poznatom formulom, pa tu Vietove formule i nisu toliko značajne, ali svakako pomenimo ih.
Za kvadratni polinom, $P(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0, a_2 \neq 0$, gde su z_1 i z_2 njegove nule, važe sledeće formule:

$$z_1 + z_2 = -\frac{a_1}{a_2}, z_1z_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Za polinom trećeg stepena, $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0, a_3 \neq 0$, gde su z_1, z_2 i z_3 nule datog polinoma, ako primenimo teoremu o faktorizaciji polinoma i zapišemo malo drugačije, imamo sledeće:

$$P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = a_3(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$$
$$= a_3z^3 - a_3(z_1 + z_2 + z_3)z^2 + a_3(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)z - a_3z_1z_2z_3.$$

Iz ovakvog zapisa možemo da primetimo:

$$z_1 + z_2 + z_3 = -\frac{a_2}{a_3},$$
$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{a_1}{a_3},$$
$$z_1 z_2 z_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

Slično se može pokazati i za polinome većeg stepena.

Teorema 6. *Brojevi* $z_1, z_2, \cdots, z_n$, *su nule polinoma* $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$ *ako i samo ako važe* ***Vietove formule****:*

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n},$$
$$\vdots$$
$$z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Sada, koristeći teoremu, lako možemo zapisati, na primer, kako glase Vietove formule za polinom četvrtog stepena:

$$P(z) = a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0, a_4 \neq 0,$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{a_3}{a_4},$$
$$z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = \frac{a_2}{a_4},$$
$$z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 = -\frac{a_1}{a_4},$$
$$z_1 z_2 z_3 z_4 = \frac{a_0}{a_4}.$$

Primer 13. *Rešiti jednačinu* $2z^3 - z^2 - 7z + a = 0$*, ako se zna da je zbir dva rešenja* $z_1 + z_2 = 1$.

Iz Vietovih formula je $z_1+z_2+z_3 = \frac{1}{2}$*, pa iz uslova zadatka dobijamo* $z_3 = -\frac{1}{2}$.
Tražimo preostala dva rešenja.
Iz Vietove formule $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -\frac{7}{2}$*, dobijamo* $z_1z_2 = -3$.
Koristeći Vietovu formulu $z_1z_2z_3 = -\frac{a}{2}$ *i prethodne rezultate, dobijamo* $a = -3$.

Iz $z_1 + z_2 = 1$ *izrazimo* $z_1 = 1 - z_2$*, uvrstimo u* $z_1z_2 = (1 - z_2)z_2 = -3$ *i rešavanjem kvadratne jednačine po* z_2 *dobijamo preostala rešenja:*

$$z_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2},$$

$$z_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

8 Polinomi sa realnim koeficijentima

Nakon priče o polinomima nad poljem kompleksnih brojeva, treba pomenuti još neke važne primene koje je najlakše predstaviti pomoću odgovarajućih primera. Radi se o nekim karakterističnim slučajevima.

Teorema 7. *Ako je z koren polinoma $p(z)$ sa realnim koeficijentima, onda je i $\bar{z}$ koren istog polinoma.*

Dokaz. Posmatrajmo polinom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Naravno, $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ i $p(z) = 0$.
Tada $\overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 = p(\bar{z})$, odavde zaključujemo da je i $p(\bar{z}) = 0$. $\square$

Kada su $a + b\imath$ i $a - b\imath$ koreni polinoma, korisno je izvesti (iz Vietovih formula) sledeće:
$(z - a - b\imath)(z - a + b\imath) = z^2 - az + zb\imath - az + a^2 - ab\imath - b\imath z + ab\imath - b^2\imath^2$,
$(z - a - b\imath)(z - a + b\imath) = z^2 - 2az + a^2 + b^2$.

Primer 14. *Odrediti realne brojeve a i b kao i druga dva korena polinoma $p(z) = z^3 + z^2 + az + b$, ako je $z_1 = -3 + \imath$.*

Ako je jedan koren $z_1 = -3 + \imath$, drugi je njemu konjugovan, $z_2 = -3 - \imath$.
$z^3 + z^2 + az + b = (z + 3 - \imath)(z + 3 + \imath) \cdot Q(z)$
$= (z^2 + 6z + 10)(z - m)$
$= z^3 - z^2 m + 6z^2 - 6zm + 10z - 10m$
$= z^3 + (6 - m)z^2 + (10 - 6mz - 10m)$

$6 - m = 1$, *odavde je* $m = 5$
$(10 - 6m) = a$, *odnosno* $a = -20$
$-10m = b$, *odavde je* $b = -50$

Pošto su nam dva korena polinoma $p(z) = z^3 + z^2 - 20z - 50$ već poznata, treći, $z_3 = 5$, nalazimo pomoću Vietovih formula.

Teorema 8. *Ako polinom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$ sa celobrojnim koeficijentima ima racionalnu nulu $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, p i q uzajamno prosti, tada $p | a_0$ i $q | a_n$.*

Dokaz. $p(\frac{p}{q}) = a_n\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0$,
pomnožimo obe strane sa q^n,
$q^n p(\frac{p}{q}) = a_n p^n + q a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + q^{n-1} a_1 p + q^n a_0$.
Svi sabirci, osim možda prvog su deljivi sa q, slično,kada poslednju jednakost pomnožimo sa $\frac{1}{p}$, svi sabirci osim možda poslednjeg su deljivi sa p. Prema tome $q|p^n a_n$ i $p|q^n a_0$, pošto su p i q uzajamno prosti, sledi tvrđenje. $\square$

Primer 15. *Ispitati da li polinom $p(z) = z^3 + 2z + 3$ ima racionalne nule.*

Kandidati za racionalnu nulu, $z = \frac{p}{q}$, takvu da $p|3$ i $q|1$ su: $-3, -1, 1, 3$. Izračunavanjem $p(-3), p(-1), p(1), p(3)$ dobijamo da je samo $z = 1$ racionalna nula.

Još jedan karakterističan slučaj je **kada su koeficijenti polinoma racionalni brojevi, a jedan njegov koren iracionalan broj, na primer $a + b\sqrt{2}$, onda isti taj polinom ima i koren** $a - b\sqrt{2}$. Zadaci u kojima se ovo koristi su čest na prijemnim ispitima, pa evo jednog primera.

Primer 16. *Jedno rešenje jednačine $z^2 + 41 = 14z + \frac{10}{z}$ je $2 - \sqrt{3}$. Odrediti ostala rešenja.*
Pre samog rešenja mala digresija, važno je napomenuti da kao što koristimo izraze polinom i koren ili nula polinoma, ako polinom posmatramo kao jednačinu možemo govoriti o korenima kao o rešenjima jednačine, otuda ovakva formulacija primera.

$z^2 + 41 = 14z + \frac{10}{z}$, *prvo proširujemo sa z,*

Znamo da je drugo rešenje $z_2 = 2 + \sqrt{3}$.

$z^3 + 41z - 14z^2 - 10 = (z - 2 + \sqrt{3})(z - 2 - \sqrt{3}) \cdot Q(z)$
$= (z^2 - 4z - 1) \cdot Q(z)$
Koristeći teoremu o faktorizaciji, pomnožimo sa $(z - a)$

$= (z^2 - 4z - 1)(z - a)$, *poznat nam je slobodan član*
$= (z^2 - 4z - 1)(z - 10)$

Dakle, $z_3 = 10$ još jedno rešenje date jednačine.

9 Algebarske jednačine trećeg stepena

Dugo sam razmišljala da li da uvrstim ovo poglavlje. Sa jedne strane, otkud sad odjednom algebarske jednačine, pa još samo trećeg stepena, a sa druge, u uvodu sam pomenula da su upravo ove jednačine inicirale otkriće kompleksnih brojeva, jer su njena rešenja zapravo koreni odgovarajućeg kompleksnog polinoma. Dodatno, rad počinje i završava algebrom, pa će ovo biti simbolični pokazatelj da se ni jedna grana matematike ne može izdvojiti bez prožimanja sa nekom drugom i tu se na delu vidi lepota matematike.
Za početak definišimo algebarsku jednačinu trećeg stepena.

Definicija 9.0.1. *Jednačinu oblika* $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0, a_3 \neq 0$, *gde su* $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ *njeni koeficijenti nazivamo* ***algebarskom jednačinom trećeg stepena*** *ili kraće* ***kubnom jednačinom***.

Slika 7: Scipione Del Fero

Možemo da primetimo da je ta jednačina oblika $P(z) = 0$, gde je $P(z)$ **kompleksni polinom trećeg stepena sa realnim koeficijentima**. Opšta rešenja ove jednačine su objavljena tek u 16. veku u Italiji, što naravno ne znači da se o njima nije polemisalo i znatno ranije.
Del Fero, italijanski matematičar, je prvi rešio jedan tip kubne jednačine, ali je to držao u tajnosti i tek na samrti preneo svome učeniku, *Antoniju Mariji Fiori*.

Nikolo Fontana Tartalja, još jedan italijanski matematičar, Fiorin savremenik, izaziva ga na matematički dvoboj u rešavanju kubnih jednačina. Kasnije je zapisao: *"Uložio sam svu svoju snagu i umeće da bih našao pravilo za rešavanje kubnih jednačina. Zahvaljujući blagonaklonosti sudbine, to mi je i uspelo osam dana pre zakazanog dvoboja."* Tartalja odnosi pobedu, koja će zainteresovati još jednog matematičara, *Điraloma Kardana.*
Kardano od Tartalja dobija smernicu u stihovima, pomoću koje, budući da je bio školovani matematičar, izvlači metod za rešavanje algebarske jednačine trećeg stepena.

Slika 8: Nikolo Fontana Tartalja

Kada su kub i stvar zajedno
Jednaki nekom konstantnom broju
Pronađi druga dva koja se za taj razlikuju.
Tada ćeš usvojiti ovo kao naviku
Da im proizvod treba uvek biti jednak
Tačno kubu trećine od stvari
Ostaje onda kao opšte pravilo
Da će razlika njihovih kubnih korena
Biti jednaka toj osnovnoj stvari

(Ovim je stihovima Tartalja odao Kardanu formulu).

Slika 9: Đirolamo Kardano

Danas su formule za rešavanje kubne jednačine poznate pod nazivom **Kardano-Tartaljine formule**.

Jednačina $a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$ je ekvivalentna jednačini

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$
$$a = \frac{a_2}{a_3}, b = \frac{a_1}{a_3}, c = \frac{a_0}{a_3}.$$

Uvedimo nepoznatu $t = z + \frac{a}{3}$, odakle je $z = t - \frac{a}{3}$.
Jednačina $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ sada postaje:

$$t^3 + (b - \frac{a^2}{3})t + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$
$$t^3 + pt + q = 0,$$
$$p = b - \tfrac{a^2}{3} \text{ i } q = \tfrac{2a^3}{27} - \tfrac{ab}{3} + c \qquad .$$

Sada pretpostavimo da je $t = u + v$, gde su u i v nove nepoznate.
Zamenom dobijamo $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$,

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0,$$
$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Zahtevamo $3uv + p = 0$ i time jednačina postaje:

$$u^3 + v^3 + q = 0,$$

Za u i v važi:

$$u^3v^3 = -\tfrac{p^3}{27},\ u^3 + v^3 = -q$$

Znajući Vietove formule, primećujemo da kubovi nepoznatih u i v predstavljaju rešenja kvadratne jednačine:

$$s^2 - (u^3 + v^3)s + u^3v^3 = 0, \text{ odnosno}$$

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Rešenja ove jednačine su:

$$s_1 = u^3 = \frac{-q+\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}},$$
$$s_2 = v^3 = \frac{-q-\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}.$$

Dalje, određivanjem realnih ili kompleksnih brojeva čiji su kubovi jednaki nađenim rešenjima, dobijamo:

$$t = \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}}.$$

Primetimo da na ovaj način dobijamo devet rešenja, a znamo da moramo odabrati tri rešenja pošto se radi o kubnoj jednačini.

Prema osnovnoj teoremi algebre, znamo da mora imati bar jedno rešenje, kao i da ako je jedno rešenje kompleksan broj rešenje je i njemu konjugovan.

9.1 Diskriminanta algebarske jednačine trećeg stepena

Prisetimo se za trenutak kvadratne jednačine i diskusije o njenim rešenjima u zavisnosti od diskriminante. Primenimo slično. **Diskriminanta algebarske jednačine trećeg stepena**, ili kubne jednačine je $D = -4p^3 - 27q^2$, otuda opšte rešenje možemo i zapisati:

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{-D}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{-D}{108}}}$$

Na koji način sada možemo da nadjemo tri rešenja?

Ako sa U i V označimo rešenja, koja zadovoljavaju uslov $UV = -\frac{p}{3}$, jedno rešenje je $t_1 = U + V$.

Ostala rešenja nalazimo koristeći **neprimitivni kubni koren jedinice** (na primer $\alpha = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$).

$$t_2 = U\alpha + V\alpha \text{ i } t_3 = U\alpha^2 + V\alpha^2 .$$

Upravo je ovaj momenat važan, jer se u njemu ogleda ta potreba za kompleksnim brojevima, koja je i dovela do njihovog otkrića.

9.2 Priroda rešenja algebarske jednačine trećeg stepena u odnosu na diskriminantu

Kako se ponašaju rešenja u odnosu na znak diskriminante?
<u>Za $D < 0$</u> možemo uzeti za prvo rešenje da su U i V realni, $t_1 = U + V$, a ostala dva će biti konjugovano kompleksni par.

$$t_2 = \frac{-U - V}{2} + \imath\frac{U - V}{2}\sqrt{3},$$
$$t_3 = \frac{-U - V}{2} - \imath\frac{U - V}{2}\sqrt{3}.$$

<u>Za $D = 0$</u> $U = V = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$, otuda:

$$t_1 = 2U,$$
$$t_2 = -U,$$
$$t_3 = -U.$$

Sva rešenja su realna.

<u>Za $D > 0$</u> sva tri rešenja su realna i različita.

Primer 17. *Rešiti jednačinu* $z^3 - 3z^2 + 9z - 5 = 0$
Pratimo Kardanove korake i za početak uvodimo smenu.

$z = t - \frac{a}{3} = t - \frac{-3}{3} = t + 1$
$(t+1)^3 - 3(t+1)^2 + 9(t+1) - 5 = 0$
$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 3t^2 - 6t - 3 + 9t + 9 - 5 = 0$
$t^3 + 6t + 2 = 0$
$p = 6,\ q = 2.$

$D = -4p^3 - 27q^2 = -4 \cdot 6^3 - 27 \cdot 2^2$
$D = -4 \cdot 216 - 27 \cdot 4 < 0$
$D < 0$*, imaćemo jedno realno i jedan par konjugovano kompleksnih rešenja.*
Sada tražimo rešenje u obliku t=u+v koristeći:
$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$*, odakle je, zamenom vrednosti* p *i* q*,*
$u = \sqrt[3]{2}$

$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$,
$v = -\sqrt[3]{4}$

Moramo da proverimo uslov: $uv = \sqrt[3]{2} \cdot (-\sqrt[3]{4}) = -\sqrt[3]{8} = -2 = -\frac{p}{3}$

$t_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$
$t_2 = \frac{-u-v}{2} + \imath \frac{u-v}{2}\sqrt{3}$ $t_2 = \frac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2} + \imath \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt{3}$
$t_3 = \frac{-u-v}{2} - \imath \frac{u-v}{2}\sqrt{3}$
$t_3 = \frac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2} - \imath \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt{3}$
Vratimo smenu $z = t + 1$ *i dobijamo konačna rešenja.*
$z_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + 1$
$z_2 = \frac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}{2} + \imath \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt{3}$
$z_3 = \frac{-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+2}{2} - \imath \frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\sqrt{3}$

10 Primeri

Primeri koji slede su sa raznih matematičkih olimpijada, i ovom prilikom čestitka svim našim mladim matematičarima koji su na istim poneli najsjajnija odličja.

Primer 18 (Pripreme za MMO - Beograd, jun 2016.)**.** *Odrediti sve realne polinome P, takve da važi $P(x^2) = P(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$, za sve x.*

Jedini takvi konstantni polinomi su $P \equiv 0$ i $P \equiv 1$.
Pretpostavimo da P nije konstantan i posmatrajmo njegovu nulu c sa najvećim modulom.
Zamenom $x = c \pm \frac{1}{2}$ dobijamo da su i $(c \pm \frac{1}{2})^2$nule polinoma P, pa je $|(c \pm \frac{1}{2})^2| \leq |c|$.
Međutim, kako je $(c+\frac{1}{2})^2 - (c-\frac{1}{2})^2 = 2c$, ovo je moguće jedino ako je $(c+\frac{1}{2})^2 = c$ i $(c-\frac{1}{2})^2 = -c$, tj. $c = \frac{1}{2}\imath$.
Sledi da su $\pm\frac{1}{2}\imath$ nule polinoma P, pa $x^2 + \frac{1}{4}|P(x)$.
Stavljanjem $P(x) = (x^2+\frac{1}{4})Q(x)$ u polaznu jednačinu, dobijamo da i polinom Q zadovoljava uslove zadatka.
Na ovaj način induktivno dobijamo da su jedina rešenja zadatka $P \equiv 0$ i $P = (x^2+\frac{1}{4})^n$, za $n \in \mathbb{N}_0$.

Primer 19 (Dodatno izborno takmičenje za učešće na 33.BMO i 57.MMO)**.**
Niz polinoma $P_n(x)$ je određen uslovima
$P_0(x) = x^3 - 4x$ i $P_{n+1} = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1$.
Dokazati da je polinom $P_{2016}(x)$ deljiv polinomom x^{2016}. (Dušan Đukić)

Za $n \geq 1$ iz rekurentne veze sledi da je polinom P_n paran, otuda
$P_{n+2}(x) = (P_n(2+x)P_n(-x) - 1)(P_n(2-x)P_n(x) - 1) - 1$
$P_{n+2}(x) = P_n(2+x)P_n(2-x)P_n^2(x) - (P_n(2+x) + P_n(2-x))P_n(x)$, *odavde* $P_n \mid P_{n+2}$.
Polinom $P_n(2+x) + P_n(2-x)$ je deljiv sa x ako $x-2 \mid P_n(x)$.
(Biće deljiv i sa x^2 zato što je paran.)
Dakle, ako $x^k(x-2) \mid P_n(x)$, za neko $k \geq 2$, onda $x^{k+2}(x-2) \mid P_{n+2}(x)$.

Kako je P_0 neparan polinom,
$P_2(x) = P_0(x+2)P_0(x-2)P_0(x)^2 + (P_0(x+2) + P_0(x-2))P_0(x)$,

odavde $x^2(x-2) \mid P_2(x)$.
Dalje jednostavna indukcija daje $x^n(x-2) \mid P_n(x)$, *za* $2 \mid n$, $n \in \mathbb{N}$.

Primer 20 (57.MMO,Hong Kong, Kina-ponedeljak, 11. jul 2016.)**.** *Na tabli je napisana jednačina*
$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$,
sa po 2016 linearnih faktora na svakoj strani. Koja je najmanja vrednost k za koju je moguće obrisati tačno k od ovih 2043 linearnih faktora tako da na svakoj strani ostane bar jedan faktor i da pritom dobijena jednačina nema realnih rešenja? (Rusija)

Pošto nijedan faktor ne sme da se pojavi na obe strane jednačine, moramo obrisati bar 2016 faktora. Da bismo pokazali da je 2016 dovoljno, obrisaćemo sa leve strane faktore $x-k$ *sa* $k \mod 2, 3(mod4)$, *a sa desne strane faktore* $x-l$ *sa* $l \mod 1, 4(mod4)$.

Dobijamo jednačinu $A(x) = B(x)$, *gde su*
$A(x) = \prod_{i=0}^{503}(x-4\imath-1)(x-4\imath-4)$ *i*
$B(x) = \prod_{i=0}^{503}(x-4\imath-2)(x-4\imath-3)$.
Tvrdimo da ova jednačina nema realnih rešenja.

1) Za $x = 1, 2, \cdots, 2016$ *jedna strana gornje jednačine je nula, a druga nije.*

2) Za $2k-1 < x < 2k$, *za neko* $k = 1, 2, \cdots, 1008$, *onda je* $A(x) < 0 < B(x)$.

3) Neka je $x < 1$ *ili* $x > 2016$ *ili* $4k < x < 4k+1$, *za neko* $k = 1, 2, \cdots, 503$.
Tada važi:
$0 < (x-4\imath-1)(x-4\imath-4) < (x-4\imath-2)(x-4\imath-3)$, *za* $i = 0, 1, \cdots, 503$,
a množenjem ovih nejednakosti dobija se:
$0 < A(x) < B(x)$.
4) Neka je $4k+2 < x < 4k+3$, *za neko* $k = 1, 2, \cdots, 503$. *Tada važi:*
$(x-1)(x-2016) < (x-2)(x-2015) < 0$ *i*
$(x-4\imath)(x-4\imath-1) > (x-4\imath+1)(x-4\imath-2) > 0$, $i = 0, 1, \cdots, 503$, *a množenjem ovih nejednakosti dobija se:*
$A(x) < B(x) < 0$.
Ovim su svi slučajevi ispitani. Odgovor je 2016.

Napomena: Ako je $A(x) \neq B(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, lako se vidi da između svake dve nule jednog polinoma ima paran broj nula drugog.

Primer 21 (Dodatno izborno takmičenje za MMO, Beograd, 16.05.2012.)**.** *Neka je $P(x)$ polinom stepena 2012 sa realnim koeficijentima, takav da za sve realne brojeve a, b, c, za koje je $a + b + c = 0$ važi:*

$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geq 3P(a)P(b)P(c)$.

Može li polinom P(x) imati tačno 2012 različitih realnih nula? (Miloš Milosavljević)

Iz identiteta $x^3+y^3+z^3-3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$, sledi da je $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ ako i samo ako je $x+y+z \geq 0$ ili $x = y = z$. Prema tome, uslov zadatka je ekvivalentan sa:
$P(a) + P(b) + P(c) \geq 0$ kad god je $a + b + c = 0$. (*)
Dokažimo da polinom $P(x) = \prod\limits_{k=0}^{2011}(x - 1 - \frac{k}{4022})$, koji ima 2012 realnih nula, zadovoljava uslov (*).

Za $x \leq 1$ ili $x \geq \frac{3}{2}$ je $P(x) \geq 0$; štaviše, za $x \leq 0$ je $P(x) > 1$.
Za $1 < x < \frac{3}{2}$ važi $|x - 1 - \frac{k}{4022}| < \frac{1}{2}$ za $0 \leq k \leq 1$, te je $P(x) > -\frac{1}{2^{2012}}$.

Ako je $a + b + c = 0$, bar jedan od brojeva a, b, c, recimo a, nije pozitivan, te je $P(a) > 1$, i odatle
$P(a) + P(b) + P(c) > 1 - \frac{1}{2^{2012}} - \frac{1}{2^{2012}} > 0$.

Napomena: Rešenja primera nisu autorska, preuzeta su zajedno sa primerima sa sajta www.imomath.com.

11 Zaključak

Ovaj rad je nastao iz želje da obradim temu koja je slabije zastupljena a meni lično zanimljiva i koja omogućava predstavljanje za nijansu drugačije matematike i na nižim nivoima obrazovanja. Povezivanje kompleksnih polinoma sa već poznatim realnim polinomima, prikaz dokaza važnih teorema koje se u nastavi ne dokazuju baca novo svetlo koje među mladim čitaocima može pobuditi želju za daljim proučavanjem matematike.

Literatura

[1] Gojko Kalajdžić, Linearna algebra, Matematički fakultet, Beograd, 2009.

[2] Zoran Kadelburg, Srđan Ognjanović, Vladimir Mićić, Analiza sa Algebrom, Krug, Beograd, 2018.

[3] Miodrag Mateljević, Kompleksna analiza 1 i 2, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[4] Miodrag Mateljević, Kompleksne funkcije, Matematički fakultet, Beograd, april 2006.

[5] Marek Svetlik, Beleške sa vežbi kursa Odabrana poglavlja kompleksne analize, 2016.

[6] Živorad Ivanović, Srđan Ognjanović, Matematika 3-Zbirka zadataka i testova za 3. razred gimnazija i tehničkih škola, Krug, Beograd

[7] https://m4t3m4t1k4.wordpress.com/2012/02/09/formule-za-rješenja-kubne-jednačine, pristupljeno 25.5.2019.

[8] https://imomath.com/srb/index.php?options=29& lmm=1, pristupljeno 4.6.2019.