Математички факултет
Универзитет у Београду

Надежда Поповић

Функционалне једначине над полиномима

Мастер рад

Ментор: др Ђорђе Кртинић

Београд, 2019.

Чланови комисије:
др. Небојша Икодиновић
Математички факултет
Универзитет у Београду
др. Стефан Милошевић
Математички факултет
Универзитет у Београду

Датум одбране:

Садржај

1 Увод

Функционалне једначине су саставни део скоро сваке области математике, а испитивање појединих функционалних једначина је довело до великог броја резултата важних за математику.

У раду су обрађене поједине функционалне једначине, са акцентом на функционалне једначине дефинисане над прстеном полинома. Кроз разне примере анализирано је појављивање функционалних једначина у средњошколском образовању.

Полиноми су саставни део скоро сваке области у математици, а у овом раду дати су алати довољни за разумевање текста.

Друга глава садржи основне појмове везане за рад са полиномима и полиномним функцијама. Урађени су и бројни примери везани за добијање резултата анализирањем степена полинома, што често доводи до коришћења математичке индукције, као и за добијање резултата заменом "посебних"вредности, што се у средњошколским уџбеницима обично своди на решавање система једначина.

У трећој глави су обрађени примери везани за примене на дељивост полинома са целобројним коефицијентима као и лема о дељивости која овде има велику примену.

Четврта глава садржи примере карактеристичне за комбинаторику у којима се дефинишу рекурентни низови чија су решења полиноми. Овакав начин решавања задатака се углавном избегава у средњим школама, али се јавља на средњошколским такмичењима.

У петој глави је доказана Гаусова теорема о приказивању симетричног полинома преко елементарних симетричних полинома чија се примена често јавља у школској математици, што смо показали на примеру са неједнакостима средина. Примена ове теореме се у школском градиву обично среће у комбинацији са Виетовим формулама, па су и оне наведене и доказане, а приказано је и пар примера у којима је илустрована примена наведених резултата.

2 Основни појмови

У овом делу ћемо дефинисати појам полинома и полиномске функције, као и основне операције над њима.
Следећа дефиниција нам даје и појам степена полинома, као и појам нула полинома који ће нам требати за решавање неких задатака.
Дефиниција 2.1: Нека је $(R, +, \cdot)$ прстен. Полином над R је израз

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n,$$

где су $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ и зову се коефицијенти, а x је променљива. Полином чији су сви коефицијенти једнаки нули зове се нула полином. Ако је $a_n \neq 0$ и $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ онда је n степен полинома и пишемо $\deg\,(p) = n$. За нула полином степен се не дефинише. Ако је R прстен са јединицом и ако је $a_n = 1$, полином $p(x)$ се зове моничан полином.
У наставку рада ћемо се ограничити само на полиноме над пољем. Сада уводимо појам полиномске функције.
Дефиниција 2.2: Нека је f функција која сваком полиному $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$ придружује функцију $f(p)$ поља F у поље F, односно $f(p) : F \to F$ тако да за свако $x \in F$

$$f(p)(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Функцију $f(p)$, поља F у поље F, зовемо полиномска функција полинома p. Уобичајено је да се полиномска функција означава исто као и полином, али су то две различите ствари:
Пример 2.1: Посматрамо полиноме $p(x) = 1 - x^2$ и $q(x) = 1 - x$ над двоелементним прстеном (са елементима 0 и 1). Они су очигледно различити, али одређују једнаке полиномске функције: $p(0) = q(0) = 1, p(1) = q(1) = 0$.
У даљем тексту ћемо посматрати бесконачна поља и бесконачна поља каратеристике 0. Посматраћемо, пре свега полиноме над $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.
Нека је F бесконачно поље. Дефинишемо скуп полиномских функција као и операције над њима:
Дефиниција 2.3: Скуп свих полиномских функција над пољем F означавамо са $Pol(F)$.
Дефиниција 2.4: У скупу функција

$$F^F = \{f \mid f : F \to F\}$$

дефинишу се операције $+$ и $\cdot$ на следећи начин:

$$(\forall x \in F)(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\forall x \in F)(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

за све $f, g \in F^F$.
Корен (нула) полинома p је она вредност независне променљиве x за коју

је $p(x) = 0$.
Дефиниција 2.5: Вредност полинома p у тачки x је вредност његове полиномске функције у тачки x.
Теорема 2.1: Сваки полином $n-$тог степена има највише n корена.
Теорема 2.2: Полином p над бесконачним пољем F је нула полином ако и само ако је сваки елемент поља F корен полинома p.

Доказ. Нека су сви елементи поља F корени полинома p. За сваки полином p важи да је нула полином или deg $(p) = n$. На основу претходне теореме следи да ако је deg $(p) = n$, тада p има највише n корена што је контрадикција са условом да је сваки елемент поља F корен полинома p јер F није коначно поље. Значи p је нула полином. Обратно је очигледно. $\square$

Теорема 2.3: (Основни став алгебре) Сваки полином, степена различитог од нуле, над пољем комплексних бројева има бар један корен у том пољу.
Доказ ове теореме постоји у много облика, али није познат ниједан доказ који је чисто алгебарски. Постоје докази који користе комплексну анализу, топологију и геометрију.
Последица теореме је чињеница да сваки полином $p(z)$ има n нула на пољу комплексних бројева и може се на јединствени начин записати као:

$$p(z) = a_n(z - c_1) \cdot \ldots \cdot (z - c_n),$$

при чему неке нуле могу бити једнаке међу собом (вишеструке нуле).
На следећим примерима ћемо видети како нам корени полинома помажу у решавању неких задатака.
Пример 2.2: Нека је $p(x)$ полином са реалним коефицијентима такав да је $p(x) \geq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Доказати да се $p(x)$ може приказати као збир квадрата два полинома са реалним коефицијентима.

Решење. Ако је a реална нула полинома $p(x)$, прво показујемо да је парног реда. Заиста, ако је k ред нуле и k непарно онда је $p(x) = (x - a)^k \cdot q(x)$ за неки полином $q(x)$ са реалним коефицијентима и $q(a) \neq 0$. Како је $(x - a)^k$ негативан за $x < a$, а позитиван за $x > a$, онда је и $q(x)$ негативно за $x < a$, а позитивно за $x > a$. Пошто је полином је непрекидна функција, следи да је a нула полинома $q(x)$ што је контрадикција. Следи да је

$$p(x) = (x - a_1)^{2k_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_i)^{2k_i} \cdot r(x),$$

па је довољно показати да се $r(x)$, полином са реалним коефицијентима који нема реалних нула и који је позитиван, може приказати као збир квадрата два реална полинома. Ако је deg $(r(x)) = 0$ тврђење непосредно следи, а ако није, реални полином има особину да ако је $b + ic$ нула вишеструкости k, где је $c \neq 0$, онда је и $b - ic$ нула вишеструкости k, па је

$$r(x) = C \cdot \prod_{j=1}^{s} [(x - b_j - ic_j)(x - b_j + ic_j)] =$$
$$\sqrt{C} \prod_{j=1}^{s} (x - b_j - ic_j) \cdot \overline{\sqrt{C} \prod_{j=1}^{s} (x - b_j - ic_j)},$$

где је $C > 0$. Важи да је

$$\sqrt{C} \prod_{j=1}^{s} (x - b_j - ic_j) = h(x) + ig(x)$$

за неке g и h који су полиноми са реалним коефицијентима, па је

$$r(x) = (h(x) + ig(x))(h(x) - ig(x)) = (h(x))^2 - i^2(g(x))^2 = (h(x))^2 + (g(x))^2.$$

□

Пример 2.3: Одредити све полиноме $p(x)$ са реалним коефицијентима за које је

$$p(x^2) + p(x)p(x+1) = 0$$

за свако $x \in \mathbb{R}$.

Решење. Ако је r нула полинома, други сабирак је 0, па мора бити и први, а то значи да је и r^2 нула полинома. Настављањем овог поступка следи да су и $r^4, r^8, \ldots$ нуле полинома. Ако $p(x)$ није нула полином онда он има коначно нула, па је низ r^{2^k} састављен од коначно много чланова, па мора бити

$$|r| = 0 \text{ или } |r| = 1.$$

Слично, ако је r нула полинома, убацивањем $x = r - 1$ у дату везу следи да је други сабирак 0, па мора бити и први, те је и $(r-1)^2$ нула полинома. Настављањем овог поступка следи да су и $(r-1)^4, (r-1)^8, \ldots$ нуле полинома. Слично као за r добијамо да је

$$|r - 1| = 0 \text{ или } |r - 1| = 1.$$

Следи да фактори могу бити x и $x - 1$, односно полином је облика

$$p(x) = a \cdot x^m \cdot (x-1)^n,$$

за

$$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ и } m, n \in \mathbb{N}_0,$$

где m и n не могу оба бити нула. Одатле следи да:

$$\begin{aligned}
&p(x^2) + p(x)p(x+1) \\
&\quad = a \cdot x^{2m}(x^2-1)^n + a \cdot x^m (x-1)^n \cdot a \cdot (x+1)^m (x-1+1)^n \\
&\quad = a \cdot x^{2m}(x^2-1)^n + a \cdot x^m (x-1)^n \cdot a \cdot (x+1)^m x^n \\
&\quad = a \cdot x^m (x-1)^n (x^m (x+1)^n + a \cdot (x+1)^m x^n).
\end{aligned}$$

Да би тај полином био једнак нули мора бити

$$x^m(x+1)^n + a\cdot(x+1)^m x^n = 0$$
$$a\cdot(x+1)^m x^n = -x^m(x+1)^n.$$

Десна страна једначине има корен 0 реда m и корен -1 реда n, а лева страна има корен 0 реда n и корен -1 реда m, па да би то било једнако мора бити $m=n$, одакле следи да је $a=-1$. $\square$

Пример 2.4: Нека је $k\in\mathbb{N}$. Одредити све полиноме $p(x)$ такве да за свако $n\in\mathbb{N}$ важи да је

$$p(1)+\ldots+p(n)=n^k.$$

Решење. Како је

$$p(1)+\ldots+p(n)=n^k$$

и

$$p(1)+\ldots+p(n-1)=(n-1)^k$$

за свако $n\geq 2$, одузимањем добијамо да је

$$p(1)+\ldots+p(n)-p(1)-\ldots-p(n-1)=n^k-(n-1)^k$$

тј.

$$p(n)=n^k-(n-1)^k$$

за свако $n\in\mathbb{N}$. Нека је сад $n^k-(n-1)^k=q(n)$. Пошто су p и q полиноми, онда је и $p(n)-q(n)$ полином, а по овоме што смо добили следи да има бесконачно много нула, па су они идентички једнаки. Дакле, за свако $n\in\mathbb{N}$ важи

$$p(n)=n^k-(n-1)^k.$$

$\square$

Дељење полинома има велику улогу у области полинома, па ћемо у следећим теоремама и примерима показати основна тврђења везана за дељење полинома.

Теорема 2.4: Нека су $P(x)$ и $Q(x)$ полиноми над пољем F, при чему $Q(x)$ није нула полином. Тада над F постоје јединствени полиноми $S(x)$ и $R(x)$ тако да је испуњено:

$$P(x)=Q(x)S(x)+R(x);$$

при томе је или $R(x)=0$ или је степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$.

Доказ. Ако је $P(x)$ нула полином, или ако је степен полинома $P(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$, онда је тврђење о постојању полинома $S(x)$ и $R(x)$ тачно, јер је

$$P(x) = Q(x) \cdot 0 + P(x),$$

па је полином $S(x) = 0$, а $R(x) = P(x)$.
Нека је степен полинома

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

већи или једнак од степена n полинома

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

Тада је степен полинома

$$R_1(x) = P(x) - \tfrac{a_m}{b_n} x^{m-n} Q(x)$$

мањи од m јер се од $P(x)$ одузима водећи члан $a_m x^m$. Зато је испуњена једнакост

$$P(x) = Q(x) S_1(x) + R_1(x),$$

где је $S_1(x) = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$, а степен полинома $R_1(x)$ је мањи од степена полинома $P(x)$. Ако је мањи и од n доказ је готов, а ако није, аналогно се показује да важи

$$R_1(x) = Q(x) S_2(x) + R_2(x),$$

где је степен полинома $R_2(x)$ мањи од степена полинома $R_1(x)$.
Настављањем овог дељења добија се низ полинома $R_1(x), R_2(x), \ldots$ са опадајућим степенима, све до неког $R_k(x)$ чији је степен мањи од степена n полинома $Q(x)$. При томе је,

$$R_{k-1}(x) = Q(x) S_k(x) + R_k(x).$$

Из претходних једнакости следи

$$P(x) = Q(x)(S_1(x) + \ldots + S_k(x)) + R_k(x),$$

па ако је

$$S(x) = S_1(x) + \ldots + S_k(x) \text{ и } R(x) = R_k(x),$$

доказ првог дела је завршен. Заиста, степен полинома $R(x) = R_k(x)$ је мањи од степена полинома $Q(x)$ или је $R(x) = 0$.
Још је остало доказати јединственост полинома $S(x)$ и $R(x)$. Претпоставимо да је

$$P(x) = Q(x) S(x) + R(x) \text{ и } P(x) = Q(x) \tilde{S}(x) + \tilde{R}(x),$$

при чему је степен полинома $R(x)$ и $\tilde{R}(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$.
Следи

$$Q(x) S(x) + R(x) = Q(x) \tilde{S}(x) + \tilde{R}(x),$$

па је

$$Q(x)(S(x) - \tilde{S}(x)) = \tilde{R}(x) - R(x).$$

$\tilde{R}(x) - R(x)$ је или нула полином или је његов степен мањи од степена $Q(x)$. Следи да полином $S(x) - \tilde{S}(x)$ мора бити нула полином, јер би у противном степен полинома на левој страни једнакости био већи или једнак од степена полинома $Q(x)$. Дакле, $S(x) = \tilde{S}(x)$, а одатле $\tilde{R}(x) = R(x)$. □

Пример 2.5: Одреди остатак при дељењу полинома $S(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$ полиномом $T(x) = x^2 - x + 1$.

Решење.

$$\begin{array}{l}
(6x^3 - 2x^2 + x + 3) : (x^2 - x + 1) = 6x + 4 \\
\underline{-6x^3 + 6x^2 - 6x} \\
\qquad 4x^2 - 5x + 3 \\
\qquad \underline{-4x^2 + 4x - 4} \\
\qquad\qquad -x - 1
\end{array}$$

□

За полином $P(x)$ кажемо да је дељив полиномом $Q(x)$ ако постоји полином $S(x)$ тако да је $P(x) = Q(x) \cdot S(x)$.

Теорема 2.5: (Безуов став) Нека је $a \in F$. У прстену $F[x]$ остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $(x - a)$ је $P(a)$.

Доказ. На основу претходне теореме важи да је

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R,$$

где је остатак $R \in F$, јер његов степен мора бити мањи од степена полинома $(x - a)$ тј. од 1. Одатле следи да је

$$P(a) = (a - a)Q(a) + R,$$

односно $P(a) = R$. Зато је

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a).$$

□

Пример 2.6: Нека полином $P(x)$ при дељењу са $x - 1$ даје остатак 1, а при дељењу са $x - 2$ остатак 3. Наћи остатак тог полинома при дељењу са $(x - 1)(x - 2)$.

Решење. Нека је $P(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + ax + b$. Из Безуове теореме знамо: $P(1) = 1$ и $P(2) = 3$. Тада имамо: $P(1) = a \cdot 1 + b = 1$ и $P(2) = a \cdot 2 + b = 3$, па кад решимо овај систем једначина заменом $b = 1 - a$ добијамо да је $a = 2, b = -1$ тј. остатак је $2x - 1$. □

Ако је полином $P(x)$ из прстена $F[x]$ дељив са $(x-a)^k$ где је $k > 1$, онда је a вишеструка нула полинома $P(x)$.
Следећа теорема показује једно од основних тврђења везано за дељење полинома:
Теорема 2.6: (Хорнерова шема) При дељењу полинома $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ полиномом $x-c$ добија се количник $Q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-1}x^{n-1}$ и остатак R, при чему је

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = c \cdot b_{n-1} + a_{n-1}, \ldots, b_0 = c \cdot b_1 + a_1, R = c \cdot b_0 + a_0.$$

Пример 2.7: Поделити полином $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ са $x - 1$.

Решење. Из полинома $P(x) = 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ имамо да је $a_4 = 2, a_3 = -1, a_2 = 3, a_1 = -4, a_0 = 1$. Из полинома $x - 1$ имамо да је $c = 1$.
Постављамо Хорнерову шему:

	2	-1	3	-4	1
1	b_3	b_2	b_1	b_0	R

Помоћу формула из Теореме 2.6 имамо да је:

$$\begin{aligned}
b_3 &= a_4 = 2\\
b_2 &= a_3 + c \cdot b_3 = -1 + 1 \cdot 2 = 1\\
b_1 &= a_2 + c \cdot b_2 = 3 + 1 \cdot 1 = 4\\
b_0 &= a_1 + c \cdot b_1 = -4 + 1 \cdot 4 = 0\\
R &= a_0 + c \cdot b_0 = 1 + 1 \cdot 0 = 1.
\end{aligned}$$

Дакле, $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(2x^3 + x^2 + 4x) + 1$. $\square$

Теорема 2.7: Ако је $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n, a_n \neq 0, n \geq 1$ и ако су $c_1, c_2, \ldots, c_n$ различити реални корени полинома $P(x)$, тада је

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n). \text{ (факторизација полинома)}$$

Доказ. Доказ индукцијом по степену n полинома $P(x)$.
$n = 1$: Нека је c_1 корен полинома $P(x) = a_0 + a_1x$. Тада је $a_0 + a_1c_1 = 0$, па је $a_0 = -a_1c_1$, одакле следи

$$P(x) = -a_1c_1 + a_1x = a_1(x - c_1).$$

Претпоставимо да је тврђење тачно за све полиноме степена мањег од n, где је $n > 1$.
Пошто је c_1 корен полинома $P(x)$ важи $x - c_1 \mid P(x)$, па постоји $Q(x) \in F[x]$ тако да

$$P(x) = Q(x)(x - c_1).$$

Степен полинома $Q(x)$ је $n-1$, а водећи коефицијент a_n. Тада је

$$0 = P(c_j) = (c_j - c_1)Q(c_j), \;\; j = 2, \ldots, n.$$

Како је $c_j - c_1 \neq 0$, за $j \neq 1$, следи да је $Q(c_j) = 0$ за сваки $j = 2, \ldots, n$. Дакле, $Q(x)$ има $n-1$ различитих корена $c_2, \ldots, c_n$. Према индукцијској хипотези следи

$$Q(x) = a_n(x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n).$$

Заменом у $P(x) = Q(x)(x - c_1)$ добијамо

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n).$$

□

Полином $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ може се факторисати у облику

$$P(x) = a_n(x - c_1)^{k_1}(x - c_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x - c_r)^{k_r} \; a_n \neq 0,$$

где су $c_1, \ldots, c_r$ различити корени полинома $P(x)$ реда $k_1, \ldots, k_r$, респективно, и $k_1 + \ldots + k_r = n$.

Пример 2.8: Ако су $P(x)$ и $Q(x)$ различити полиноми са реалним коефицијентима и важи $P(Q(x)) = Q(P(x))$, доказати да је полином $P(P(x)) - Q(Q(x))$ дељив са $P(x) - Q(x)$.

Решење. Ако је

$$R(x) = P(x) + Q(x) = r_0 + \ldots + r_nx^n,$$

онда је

$$\begin{aligned} P(P(x)) - Q(Q(x)) &= P(P(x)) + Q(P(x)) - P(Q(x)) - Q(Q(x)) \\ &= R(P(x)) - R(Q(x)) \\ &= r_n(P(x) - Q(x))^n + \ldots + r_1(P(x) - Q(x)) + r_0 - r_0 \\ &= r_n(P(x) - Q(x))^n + \ldots + r_1(P(x) - Q(x)) \end{aligned}$$

где је сваки сабирак дељив са $P(x) - Q(x)$, па је и цео збир дељив са $P(x) - Q(x)$. □

Примена Безуовог става се види у следећем сложенијем примеру.

Пример 2.9: Ако је $n \in N$, $n \geq 2$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ полиноми са комплексним коефицијентима тако да

$$p_1(x^n) + xp_2(x^n) + \ldots + x^{n-2}p_{n-1}(x^n) = (1 + x + \ldots + x^{n-1})p_n(x^n).$$

Доказати да

$$(x - 1)^{n-1} \mid p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \ldots \cdot p_{n-1}(x).$$

Решење. Довољно је показати да $x - 1 \mid p_k(x)$ за $1 \leq k \leq n-1$. По Безуовом ставу $p_k(x)$ ће бити дељив са $x - 1$ ако и само ако је $p_k(1) = 0$. Ако узмемо да је $x = 1$ добићемо да је

$$p_1(1)+p_2(1)+\ldots+p_{n-1}(1)=np_n(1)$$

што је недовољно да покажемо тражено. Ако би ставили да је $x=2$

$$p_1(2^n)+2p_2(2^n)+\ldots+2^{n-2}p_{n-1}(2^n)=(1+2+\ldots+2^{n-1})p_n(2^n)$$

одакле опет немамо довољно да покажемо тражено, као и када би убацили неку другу вредност. Тражимо вредност помоћу које би добили што више јединица, а то ће нам дати решења једначине $x^n=1$ тј.

$$1,\omega,\omega^2,\ldots,\omega^{n-1}$$

где је $\omega=e^{\frac{2\pi}{n}i}$. Сада имамо n избора, и са било којим од тих n избора са леве стране ћемо добити линеарну комбинацију $p_1(1),p_2(1),\ldots,p_{n-1}(1)$, а са десне стране, са избором $x=1$ добијамо $np_n(1)$, док са свим осталим коренима добијамо 0. Убацујемо све корене осим 1 и добијамо хомоген систем линеарних једначина:

$$\begin{aligned}
p_1(1)+\omega p_2(1)+\ldots+\omega^{n-1}p_{n-1}(1)&=0\\
p_1(1)+\omega^2 p_2(1)+\ldots+(\omega^2)^{n-1}p_{n-1}(1)&=0\\
&\vdots\\
p_1(1)+\omega^{n-1}p_2(1)+\ldots+(\omega^{n-1})^{n-1}p_{n-1}(1)&=0.
\end{aligned}$$

Детерминанта система је

$$\begin{vmatrix}
1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1}\\
1 & \omega^2 & \omega^4 & \ldots & \omega^{2n-2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\
1 & \omega^{n-1} & \omega^{2n-2} & \ldots & (\omega^{n-1})^{n-1}
\end{vmatrix}.$$

Ово је Вандермандова детерминанта и њена вредност је $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\alpha_j-\alpha_i)$, где су $\alpha_i=\omega^i$. Она је различита од нуле пошто су корени из јединице различити, што значи да систем има само тривијално решење јер је хомоген. Тада следи да је

$$p_1(1)=p_2(1)=\ldots=p_{n-1}(1)=0$$

тј. сваки од ових $n-1$ полинома је дељив са $x-1$, па је онда њихов производ дељив са $(x-1)^{n-1}$ што је и требало доказати. $\square$

Два полинома су једнака ако су одговарајући коефицијенти једнаки. Ако имамо полиноме

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

и

$$q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

они ће бити једнаки само ако су једнаки коефицијенти:

$$a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Теорема 2.8: Полиноми $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ и $(b_0, b_1, \ldots, b_m)$ над пољем F једнаки су ако и само ако су њихове полиномске функције једнаке.

Доказ. Нека је

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \text{ и } Q = (b_0, b_1, \ldots, b_m).$$

Ако је $P = Q$, онда је очигледно да је $f(P) = f(Q)$. Претпоставимо да је $n \leq m$, што не умањује опшост доказа. Нека је сада

$$f(P) = f(Q),$$

што значи

$$\begin{gathered}(\forall x \in F) f(P)(x) = f(Q)(x) \\ \Leftrightarrow \\ (\forall x \in F) a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m \\ \Leftrightarrow \\ a_0 - b_0 + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_n - b_m)x^n - b_{n+1}x^{n+1} - \ldots - b_m x^m = 0,\end{gathered}$$

за свако $x \in F$, а из овог следи, због Теореме 2.2, да је њему одговарајући полином

$$(a_0 - b_0, a_1 - b_1, \ldots, a_n - b_m, -b_{n+1}, \ldots, b_m)$$

нула полином, па је $n = m$, јер би у супротном имали да је коефицијент $b_m = 0$ што је у супротности са дефиницијом полинома, и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$, тј. $P = Q$. □

На следећим примерима ћемо показати како се помоћу процене степена и изједначавањем коефицијената решавају неки задаци.

Пример 2.10: Да ли постоји полином $p(x)$ са комплексним коефицијентима тако да за свако $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ важи $p(\cos x) = \sin x$?

Решење. Из услова $p(\cos x) = \sin x$ имамо да је $(p(\cos x))^2 = \sin^2 x$ тј. $(p(\cos x))^2 = 1 - \cos^2 x$. Тада имамо да је $p(t)^2 = 1 - t^2$, за свако $t \in (0, 1)$. Нека је $p(t) = at + b$ за неке $a, b \in \mathbb{C}$. Тада је $p(t)^2 = a^2t^2 + 2abt + b^2$, па да би били једнаки мора да важи $a^2 = -1, 2ab = 0, b^2 = 1$. Добијени систем једначина нема решења, па тражени полином не постоји. □

Пример 2.11: Одредити све полиноме $p(x)$ за које је

$$2p(2x) = p(3x) + p(x).$$

Решење. Ако је $\deg\ (p(x)) = n$ и $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, онда је уз x^k коефицијент a_k. Онда имамо да је

$$p(2x) = a_n(2x)^n + \ldots + a_1(2x) + a_0 = a_n 2^n x^n + \ldots + 2a_1 x + a_0,$$

па је уз x^k коефицијент $2^k a_k$. Слично у

$$p(3x) = a_n 3^n x^n + \ldots + 3a_1 x + a_0,$$

па је уз x^k коефицијент $3^k a_k$. Сада изједначимо коефицијенте и добијемо да за коефицијент уз x^k треба да важи за свако $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2^k a_k &= 3^k a_k + a_k \\ 2^{k+1} a_k &= (3^k + 1) a_k \\ 2^{k+1} &= 3^k + 1 \text{ или } a_k = 0. \end{aligned}$$

Једнакост $2^{k+1} = 3^k + 1$ важи само за $k \in \{0, 1\}$, па је $p(x)$ нула полином или $p(x) = ax + b$. Тада добијамо да је

$$\begin{aligned} 2(2ax + b) &= 3ax + b + ax + b \\ 4ax + 2b &= 4ax + 2b, \end{aligned}$$

па изједначавањем коефицијената добијамо да је

$$4a = 4a \text{ и } 2b = 2b.$$

Следи да ово важи за све a и b. □

Пример 2.12: Одредити све полиноме са реалним коефицијентима за које важи

$$p(x^2) = (p(x))^2.$$

Решење. Нула полином је једно решење. Ако је $\deg p(x) = n$ и $p(x) = a_n x^n$ где је $a_n \neq 0$, по услову следи да је

$$a_n x^{2n} = a_n^2 x^{2n},$$

па пошто је $a_n \neq 0$ следи да је $a_n = 1$ тј. решења за $n \geq 0$ су полиноми $1, x, x^2, \ldots$. Ако $p(x)$ није моничан полином, онда је

$$p(x) = a_n x^n + a_k x^k + \ldots,$$

где је $k < n$ и $a_n, a_k \neq 0$. Тада је

$$p(x^2) = a_n x^{2n} + a_k x^{2k} + a_{k-1} x^{2(k-1)} + \ldots,$$

а

$$(p(x))^2 = a_n^2 x^{2n} + 2a_n a_k x^{n+k} + \ldots.$$

Изједначавањем коефицијената уз први ненула члан степена мањег од $2n$ добијамо да мора бити $2k = k + n$, а то је немогуће јер је $k < n$. Дакле, сва могућа решења су $0, 1$ и x^n за $n \in \mathbb{N}$. □

Пример 2.13: Нека су $n, k \in \mathbb{N}$. Одредити све полиноме са реалним коефицијентима степена k за које је

$$p(x^2) = (p(x))^n$$

Решење. Нека је

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots .$$

Тада је

$$p(x^2) = a_k x^{2k} + a_{k-1}x^{2(k-1)} + \dots,$$

а

$$(p(x))^n = a_k^n x^{nk} + na_k a_{k-1} x^{n(k-1)} + \dots .$$

Изједначавањем коефицијената уз први ненула члан степена мањег од $2n$ добија се да је $2k = nk$ тј. $n = 2$, па се задатак свео на претходни пример, али без решења 0 и 1 јер нам требају полиноми степена k. □

Полиноми се често јављају и као решења диференцијалних једначина. Наводимо два примера која би могла да се јаве на факултету, а решавају се помоћу идеја из средње школе.

Пример 2.14: Одредити полиномска решења диференцијалне једначине

$$y''' - 3y'' + 2y = 2x^2 - 4x - 7.$$

Решење. Ово је линеарна једначина са константним коефицијентима, па је опште решење $(Ax + B)e^x + Ce^{-2x} + y_p$, где је y_p партикуларно решење. Први део је полином ако и само ако је $A = B = C = 0$, па је решење једначине полином полином само ако је партикуларно решење полином. Пошто је полином са десне стране другог степена узећемо да је решење другог степена, $y_p = Px^2 + Qx + R$. Тада је

$$y''' - 3y'' + 2y = -3(2P) + 2(Px^2 + Qx + R) = 2Px^2 + 2Qx + 2R - 6P$$

које треба да буде једнако са $2x^2 - 4x - 7$. Изједначавањем коефицијената добијамо $2P = 2, 2Q = -4, 2R - 6P = -7$ тј. $P = 1, Q = -2, R = -\frac{1}{2}$, тј. тражено решење је $x^2 - 2x - \frac{1}{2}$. □

Пример 2.15: Одреди полиномска решења диференцијалне једначине

$$y'' - 2xy' + 2my = 0$$

где је $m \in \mathbb{N}_0$.

Решење. Тражимо решење у облику реда са центром конвергенције у 0. Нека је $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ решење. Тада је $y' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ и $y'' = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$, па је

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + 2m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

тј.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+2m\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

Коефицијент уз x^n за $n\geq 1$ је

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n+2ma_n.$$

Како је то једнако 0, следи да је $a_{n+2}=\frac{-2(m-n)}{(n+1)(n+2)}a_n$ за $n\geq 1$. За $n=0$ коефицијент уз слободан члан је $2a_2+2ma_0$, па претходна формула важи и за $n\geq 0$.

Да би добијени ред био полином, сви чланови почев од неког морају бити 0. Такође, a_{n+2} зависи од a_n, па једина шанса да први буде 0, а други не, јер нас интересују и нетривијална решења, је да се то добије за $n=m$.

Прво гледамо за непарно $m=2k-1$. Тада је и $n=2k-1$. Пошто нећемо да су сви нула, за парне ћемо узети да су нула тако што ћемо узети да је $a_0=0$, а $a_1=c_0$ (неки број различит од нуле). Следи да ће a_{n+2}, тј. a_{2k+1} бити 0 почев од $k=\frac{m+1}{2}$, па су једини ненула

$$a_{2k+1}=\frac{(-2)^k\prod\limits_{i=1}^{k}(m-i)}{(2k)!}\cdot c_0,\text{ за } 0\leq k\leq n.$$

Сада гледамо за парно $m=2l$. Тада је и $n=2l$. Слично као за непарне, сада узимамо $a_1=0$, а $a_0=c_1$ (неки број различит од нуле). Следи да ће a_{n+2} тј. a_{2l+2} бити 0 почев од $l=\frac{m}{2}$, па су једини ненула

$$a_{2l+2}=\frac{(-2)^{2l}\prod\limits_{i=1}^{l}(m-2i)}{(2l)!}\cdot c_1,\text{ за } 0\leq l\leq n.$$

Овакви полиноми се зову Ермитеови полиноми, па се и ова једначина зове Ермитеова једначина. Познатији запис ових полинома је

$$(-1)^m e^{x^2}(e^{-x^2})^{(m)}.$$

Хоћемо прво да проверимо да ли су ово уопште полиноми. Ако је $z=e^{-x^2}$, онда је $z'=-2xe^{-x^2}$ или полином првог степена пута z и коефицијент уз x је -2. Сада је $z''=(-2+4x^2)e^{-x^2}$, тј. полином другог степена пута z и коефицијент уз x^2 је 4. Индукцијом показујемо да је $z^{(m)}$ полином. Претпоставимо да важи за $z^{(m)}$ и доказујемо за $z^{(m+1)}$. Тада је $z^{(m+1)}=(z^{(m)})'=(p_n(x)e^{-x^2})'=p_n'(x)e^{-x^2}+p_n(x)(-2x)e^{-x^2}=((-2x)p_n(x)+p_n'(x))e^{-x^2}$. Када то помножимо са e^{x^2} добијамо полином степена $n+1$, где је коефицијент уз водећи члан $(-2)^{n+1}$.

Сада доказујемо да је задовољена једначина. Ако је $z=e^{-x^2}$, онда је $z'=-2xe^{-x^2}$, па следи да је $z'+2xz=0$. Диференцирамо ово $m+1$ пута и помоћу Лајбницовог правила добијамо $z^{(m+2)}+2xz^{(m+1)}+2(m+1)z^{(m)}=0$. Сменом $u=z^{(m)}$ добијамо $u''+2xu'+2(m+1)u=0$. Када заменимо

$y = ue^{x^2}$ следи $u = ye^{-x^2}$, па је

$$
\begin{aligned}
u' &= y'e^{-x^2} - 2xye^{-x^2} \\
u'' &= y''e^{-x^2} - 4xy'e^{-x^2} + (4x^2 - 2)ye^{-x^2}.
\end{aligned}
$$

Убацимо то у једначину и добијемо

$$
\begin{aligned}
&e^{-x^2}(y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y) + 2xe^{-x^2}(y' - 2xy) + 2(m+1)ye^{-x^2} = 0 \ / : e^{-x^2} \\
&y'' - 4xy' + 4x^2y - 2y + 2xy - 4x^2y + 2(m+1)y = 0 \\
&y'' + (-4x + 2x)y' + (2m + m - m)y = 0 \\
&y'' - 2xy' + 2my = 0
\end{aligned}
$$

што је полазна једначина. $\square$

3 Примена на дељивост

Посматрајмо полином $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ са целим коефицијентима. Разлика $P(k) - P(l)$ може се написати у облику у којем су сви сабирци дељиви полиномом $k - l$. Тако долазимо до јако важног својства полинома које је доказано у следећој леми.
Лема 3.1: Нека су $k, l \in \mathbb{Z}$. За полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима важи

$$k - l \mid P(k) - P(l).$$

Доказ. Нека је

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n.$$

Тада је

$$\begin{aligned} P(k) - P(l) &= (a_0 + a_1k + \ldots + a_nk^n) - (a_0 + a_1l + \ldots + a_nl^n) \\ &= (a_0 - a_0) + a_1(k - l) + a_2(k^2 - l^2) + \ldots + a_n(k^n - l^n) \\ &= a_1(k - l) + a_2(k^2 - l^2) + \ldots + a_n(k^n - l^n) \end{aligned}$$

што је дељиво са $k - l$. □

На следећа три примера је приказана примена ове леме.
Пример 3.1: Доказати да је $n(n + 1)(n + 2)$ дељиво са 6, за свако n.

Решење. Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ дефинисана са $f(1) = 6, f(2) = 12, f(3) = 60$ и $f(n+4) = 4f(n+3)-6f(n+2)+4f(n+1)-f(n)$. Нека је $p(x) = x(x+1)(x+2)$ решење. Тада имамо:

$$\begin{aligned} &4p(x + 3) - 6p(x + 2) + 4p(x + 1) - p(x) \\ &= 4(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 6(x + 2)(x + 3)(x + 4) \\ &+ 4(x + 1)(x + 2)(x + 3) - x(x + 1)(x + 2) \\ &= (x + 3)(x + 4)(4(x + 5) - 6(x + 2)) + (x + 1)(x + 2)(4(x + 3) - x) \\ &= (x + 3)(x + 4)(4x + 20 - 6x - 12) + (x + 1)(x + 2)(4x + 12 - x) \\ &= (x + 3)(x + 4)(-2x + 8) + (x + 1)(x + 2)(3x + 12) \\ &= (x + 3)(x + 4)(-2)(x - 4) + (x + 1)(x + 2)3(x + 4) \\ &= (x + 4)((x + 3)(-2x + 8) + 3(x + 1)(x + 2)) \\ &= (x + 4)(-2x^2 + 8x - 6x + 24 + 3x^2 + 6x + 3x + 6) \\ &= (x + 4)(x^2 + 11x + 30) \\ &= (x + 4)(x + 5)(x + 6) \\ &= p(x + 4), \end{aligned}$$

па $p(x)$ задовољава ову функционалну једначину. То важи за свако x, па и за природне бројеве:

$$\begin{aligned}
p(1) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \text{а то је дељиво са } 6 \\
p(2) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24, \text{а то је дељиво са } 6 \\
p(3) &= 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60, \text{а то је дељиво са } 6, \\
p(4) &= 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120, \text{а то је дељиво са } 6,
\end{aligned}$$

па ако су $p(n), p(n+1), p(n+2)$ и $p(n+3)$ дељиви са 6, онда ће и $p(n+4)$ бити дељиво са 6 због добијене формуле.

□

Пример 3.2: Одредити све полиноме са реалним коефицијентима за које је

$$x \cdot p(x-1) = (x-2018) \cdot p(x).$$

Решење. За $x = 0$ имамо:

$$\begin{aligned}
0 \cdot p(0-1) &= (0-2018) \cdot p(0) \\
0 &= (-2018) \cdot p(0) \\
0 &= p(0)
\end{aligned}$$

За $x = 1$ имамо:

$$\begin{aligned}
1 \cdot p(1-1) &= (1-2018) \cdot p(1) \\
p(0) &= (-2017) \cdot p(1) \\
0 &= (-2017) \cdot p(1) \\
0 &= p(1)
\end{aligned}$$

$$\dots$$

За $x = 2017$ имамо:

$$\begin{aligned}
2017 \cdot p(2017-1) &= (2017-2018) \cdot p(2017) \\
2017 \cdot p(2016) &= (-1) \cdot p(2017) \\
2017 \cdot 0 &= (-1) \cdot p(2017) \\
0 &= p(2017).
\end{aligned}$$

Добијамо $p(0) = p(1) = \ldots = p(2017) = 0$, па је

$$p(x) = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-2017)Q(x).$$

Заменом добијамо за свако x

$$x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-2018)Q(x-1) = (x-2018) \cdot x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-2017)Q(x),$$

одакле следи да је $Q(x) = Q(x-1)$. Дакле, полином $Q(x) - Q(x-1)$ има бесконачно много нула, па мора бити идентички једнак нула полиному. Ако је $\deg(Q(x)) = n \in \mathbb{N}$ онда је $Q(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, где је $a_n \neq 0$, па је $Q(x) - Q(x-1) = a_n(x^n - (x-1)^n) + \ldots + (a_0 - a_0) = a_n x^{n-1} + R(x)$, где је $\deg(R(x)) < n-1$, тј. важи $\deg(Q(x) - Q(x-1)) = n-1$. Дакле, у овом случају се не може добити нула полином, а ако је $Q(x) \equiv const$, онда је $Q(x) - Q(x-1) \equiv 0$, па следи да је $Q(x)$ константан полином. $\square$

Пример 3.3: Нека полином $p(x)$ са целобројним коефицијентима за четири различите целобројне вредности узима вредност 7. Да ли може $p(x)$ узимати вредност 14 у некој целобројној тачки?

Решење. По услову задатка имамо да је

$$p(x) - 7 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)q(x),$$

где је $q(x)$ полином са целобројним коефицијнетима. Ако је $p(m) = 14$ за неко $m \in \mathbb{Z}$ следи да је

$$7 = (m-x_1)(m-x_2)(m-x_3)(m-x_4)q(m)$$

где су $m - x_i$ међусобно различити за $i = 1, 2, 3, 4$, па је ово немогуће. Значи да не постоји тражени полином. $\square$

4 Примена у комбинаторици

Неки комбинаторни задаци могу да се реше постављањем одговарајуће рекурентне везе. У овом делу ћемо то показати на пар примера.

Пример 4.1: У скупу од n правих у равни никоје две нису паралелне и никоје три се не секу у истој тачки. Одредити на колико делова је раван подељена овим правама.

Решење. Нека је $f(n)$ број делова на које n правих дели раван. Тада је $f(1) = 2$ и следи да је $f(n+1) = f(n) + n$, па решавамо ову функционалну једначину.

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2 \\
f(2) &= f(1) + 1 = 2 + 1 = 3 \\
f(3) &= f(2) + 2 = 3 + 2 = 5 \\
&\dots \\
f(n) &= f(n-1) + n - 1 \\
f(n+1) &= f(n) + n \\
&= (f(n-1) + n - 1) + n \\
&= f(n-1) + n - 1 + n \\
&= (f(n-2) + n - 2) + n - 1 + n \\
&= f(n-2) + n - 2 + n - 1 + n \\
&\dots \\
&= (f(n-k) + n - k) + n - k + 1 + \dots + n - 2 + n - 1 + n \\
&\dots \\
&= (f(n-(n-1)) + n - (n-1))) + \dots + n - k + n - k + 1 + \dots \\
&+ n - 2 + n - 1 + n \\
&= f(1) + n - (n-1) + \dots + n - k + n - k + 1 + \dots + n - 2 \\
&+ n - 1 + n \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n} k \\
&= 2 + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{4}{2} + \frac{n^2 + n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 4}{2}.
\end{aligned}$$

Дакле, $f(n) = \frac{n^2 - n + 4}{2}$. □

Пример 4.2: Одреди број речи дужине n у којима ниједно од слова а није суседно слову б.(у азбуци од 30 слова)

Решење. Нека је $f(n)$ број тражених речи дужине n које се завршавају или са а или са б, а $g(n)$ број тражених речи које се не завршавају неким од ових слова, па је тражени број $f(n)+g(n)$. Важи да је $f(1)=2, g(1)=28$ и $f(n)=f(n-1)+2g(n-1), g(n)=2f(n-1)+2g(n-1)$, па решавамо тај систем једначина:

$$\frac{\begin{array}{c} f(n)=f(n-1)+2g(n-1) \\ g(n)=2f(n-1)+2g(n-1) \end{array}}{\begin{array}{c} 2g(n-1)=f(n)-f(n-1) \\ g(n)=2f(n-1)+2g(n-1) \end{array}}$$

$$g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \Rightarrow g(n)=\frac{f(n+1)-f(n)}{2}$$

$$\frac{g(n)=2f(n-1)+2g(n-1)}{\begin{array}{c} g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \\ \frac{f(n+1)-f(n)}{2}=2f(n-1)+2\cdot\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \\ \frac{f(n+1)-f(n)}{2}=2f(n-1)+f(n)-f(n-1) \end{array}}{\begin{array}{c} g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \\ \frac{f(n+1)-f(n)}{2}=f(n)+f(n-1) \end{array}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \\ f(n+1)-f(n)=2f(n)+2f(n-1) \end{array}}{\begin{array}{c} g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \\ f(n+1)-f(n)-2f(n)-2f(n-1)=0 \end{array}}$$

$$\begin{array}{c} g(n-1)=\frac{f(n)-f(n-1)}{2} \\ f(n+1)-3f(n)-2f(n-2)=0, \end{array}$$

па је карактеристични полином за последњу једначину x^2-3x-2 који има нуле $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, па је решење ове једначине у облику $f(n)=C_1 \cdot x_1^n + C_2 \cdot x_2^n$. Када уврстимо да је $f(1)=2$ и $f(2)=6$ добијамо систем једначина:

$$C_1\frac{3-\sqrt{17}}{2}+C_2\frac{3+\sqrt{17}}{2}=2$$
$$C_1\frac{(3-\sqrt{17})^2}{4}+C_2\frac{(3+\sqrt{17})^2}{4}=6.$$

Решење овог система је:

$$C_1 = -\frac{2\sqrt{17}}{17}$$
$$C_2 = \frac{6+2\sqrt{17}}{17+3\sqrt{17}}.$$

Следи да је

$$f(n) = -\tfrac{2\sqrt{17}}{17} \cdot (\tfrac{3-\sqrt{17}}{2})^n + \tfrac{6+2\sqrt{17}}{17+3\sqrt{17}} \cdot (\tfrac{3+\sqrt{17}}{2})^n,$$

а $g(n)$ добијамо када $f(n)$ убацимо у формулу $g(n) = \frac{f(n+1)-f(n)}{2}$, тј.

$$g(n) = \tfrac{17-\sqrt{17}}{34}(\tfrac{3-\sqrt{17}}{2})^n + \tfrac{10+4\sqrt{17}}{16+3\sqrt{17}}(\tfrac{3+\sqrt{17}}{2})^n,$$

па је решење

$$f(n) + g(n) = \tfrac{-5\sqrt{17}+17}{34}(\tfrac{3-\sqrt{17}}{2})^n + \tfrac{572+148\sqrt{17}}{425+99\sqrt{17}}(\tfrac{3+\sqrt{17}}{2})^n.$$

$\square$

5 Примена на симетричне полиноме

У овом делу ћемо видети примену на симетричне полиноме и на Виетове формуле које се у средњој школи јављају код решавања квадратних једначина. Доказаћемо и да се сваки симетричан полином може изразити преко елементарних симетричних полинома.
Дефиниција 5.1: Полином $p(x_1, \ldots, x_n)$ од n променљивих зове се симетричан полином по $x_1, \ldots, x_n$ ако је инваријантан за сваку пермутацију која је извршена над $x_1, \ldots, x_n$ тј. $p(x_1, \ldots, x_n) = p(x_{p_1}, \ldots, x_{p_n})$ за сваку пермутацију p скупа $1, 2, \ldots, n$.
Пример 5.1: Полиноми

$$
\begin{aligned}
p_1(a,b,c) &= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
p_2(a,b,c) &= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac
\end{aligned}
$$

су симетрични полиноми.
Дефиниција 5.2: Елементарни симетрични полином од n променљивих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пишемо као $e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ и дефинисани су као

$$
\begin{aligned}
e_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 1 \\
e_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le j \le n} x_j \\
e_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le j < k \le n} x_j x_k \\
&\ldots \\
e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n} x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_k}.
\end{aligned}
$$

Пример 5.2: За $n = 1$ имамо:

$$e_1(x_1) = x_1.$$

За $n = 2$ имамо:

$$
\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\
e_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2.
\end{aligned}
$$

За $n = 3$ имамо:

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 + x_2 + x_3 \\
e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\
e_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

За $n = 4$ имамо:

$$\begin{aligned}
e_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
e_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 \\
e_4(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}$$

Следећа теорема, која се још назива и Гаусова теорема за симетричне полиноме, показује једну важну особину симетричних полинома.
Теорема 5.1: Сваки симетрични полином $p(x_1, \ldots, x_n)$ може се на јединствени начин приказати као полином од елементарних симетричних полинома, тј.

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(e_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, e_n(x_1, \ldots, x_n)),$$

где је q неки полином од n променљивих.

Доказ. Нека је p симетричан полином који треба да представимо. Групишемо чланове тако да свака група садржи чланове одређеног степена, па је свака та група симетричан полином и ако можемо да представимо сваку групу као полином од e_i, можемо и p.
Уређујемо чланове лексикографски. Прво поређамо чланове полинома p тако да члан са највећим степеном уз x_1 буде први, тј. дефинишемо

$$ax_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} > bx_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}$$

ако $i_1 > j_1$ или ако $i_1 = j_1$ и $i_2 > j_2$ или ако $i_1 = j_1, i_2 = j_2$ и $i_3 > j_3$ итд., и онда поређамо чланове полинома p у опадајућем распореду.
Пошто је p симетричан, за сваки његов члан

$$c_1x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$$

могу да се пронађу чланови чији су експоненти пермутација експонената члана горе. Следи да за водећи члан полинома p нпр. $c_1x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n}$ важи да је $i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_n$. Нека је

$$g_1 = c_1e_1^{i_1-i_2} \cdot e_2^{i_2-i_3} \cdot \ldots \cdot e_{n-1}^{i_{n-1}-i_n} \cdot e_n^{i_n},$$

где су $e_1, \ldots, e_n$ елементарни симетрични полиноми. Онда је g_1 симетричан и лако је видети да има исти водећи члан као p. Следи да је $p - g_1$ исто симетричан са нижим степеном водећег члана који означавамо

$$c_2 x_1^{j_1} \cdot x_2^{j_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{j_n}.$$

Као малопре, следи из симетричности да је $j_1 \geq j_2 \geq \ldots \geq j_n$. Следи да може да буде

$$g_2 = c_2 e_1^{j_1 - j_2} \cdot e_2^{j_2 - j_3} \cdot \ldots \cdot e_n^{j_n},$$

где g_2 има исти водећи члан као $p - g_1$, и $p - g_1 - g_2$ има водећи члан чији је степен још нижи. Настављамо са овим поступком, који се зауставља кад не остане више чланова, пошто има само коначно много могућих монома

$$x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n}$$

датог степена. Тако да се мора десити да добијемо

$$p - g_1 - g_2 - \ldots - g_k = 0.$$

Онда је

$$p = g_1 + g_2 + \ldots + g_k$$

и то је репрезентација полинома p од елементарних симетричних полинома. Да би показали јединственост, довољно је показати да нула полином од $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да се јединствено прикаже као нула полином од $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Ово важи зато што два различита производа елементарних полинома $e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n}$ немају исти водећи члан. Водећи члан полинома $e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n}$ је

$$x_1^{k_1 + \ldots + k_n} \cdot x_2^{k_2 + \ldots + k_n} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$$

и функција

$$(k_1, \ldots, k_n) \mapsto (k_1 + \ldots + k_n, \ldots, k_n)$$

је инјекција. Тако да водећи члан у збиру различитих производа елементарних симетричних полинома се не може скратити, па та сума не може бити нула уколико није празна. $\square$

Елементарни симетрични полиноми се појављују у линеарној факторизацији моничних полинома:

$$\prod_{j=1}^{n} (\lambda - x_j) =$$
$$\lambda^n - e_1(x_1, \ldots, x_n)\lambda^{n-1} + e_2(x_1, \ldots, x_n)\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n e_n(x_1, \ldots, x_n),$$

тј. када замењујемо вредности за променљиве $x_1, \dots, x_n$ добијамо монични полином са променљивом λ чије су нуле вредности замењене са $x_1, \dots, x_n$ и чији коефицијенти су баш ти елементарни симетрични полиноми. Ове везе између нула и коефицијената су у ствари Виетове формуле.
Виетове формуле дају везу између коефицијената полинома и његових корена.
Теорема 5.2: Нека су $c_1, c_2, \dots, c_n$ корени, не обавезно различити, полинома $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_n \neq 0$. Тада је

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \dots + c_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ c_1c_2 + c_1c_3 + \dots + c_{n-1}c_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \dots &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ &\dots \\ c_1c_2\dots c_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

У следећа два примера су написане формуле за полиноме степена 2 и 3.
Пример 5.3: За $n = 2$: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -\frac{a_1}{a_2} \\ c_1c_2 &= \frac{a_0}{a_2}. \end{aligned}$$

Пример 5.4: За $n = 3$: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, a_3 \neq 0$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -\frac{a_2}{a_3} \\ c_1c_2 + c_2c_3 + c_1c_3 &= \frac{a_1}{a_3} \\ c_1c_2c_3 &= -\frac{a_0}{a_3}. \end{aligned}$$

Доказ. Доказ за $n = 3$: Упоређивањем коефицијената полинома $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ и факторисаног полинома

$$P(x) = a_3(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3) =$$
$$a_3x^3 - a_3c_1x^2 - a_3c_2x^2 - a_3c_3x^2 + a_3c_1c_2x + a_3c_1c_3x + a_3c_2c_3x - a_3c_1c_2c_3 =$$
$$a_3x^3 - a_3(c_1+c_2+c_3)x^2 + a_3(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3)x - a_3c_1c_2c_3,$$

добијамо

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_3(c_1+c_2+c_3) \\ a_1 &= a_3(c_1c_2+c_2c_3+c_1c_3) \\ a_0 &= -a_3c_1c_2c_3. \end{aligned}$$

Из горњих једнакости следе тражене формуле. За произвољно n се доказује слично. $\square$

На следећим примерима ћемо видети примену Виетових формула.
Пример 5.5: Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+ax+b=0$ и $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима, доказати да је $P(x_1)+P(x_2)$ цео број.

Решење. Из Виетових формула знамо

$$x_1 + x_2 = -a \text{ и } x_1 \cdot x_2 = b.$$

Даље је

$$P(x) = (x^2+ax+b)Q(x) + cx + d.$$

Прстен целих бројева $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ није поље, па се дељењем два полинома не мора добити полином са целобројним коефицијентима, али пошто делимо са моничним полиномом имамо да је $c, d \in \mathbb{Z}$, па је

$$\begin{aligned} &P(x_1)+P(x_2) \\ &\quad = (x_1^2+ax_1+b)Q(x_1)+cx_1+d+(x_2^2+ax_2+b)Q(x_2)+cx_2+d \\ &\quad = cx_1+d+cx_2+d \\ &\quad = c(x_1+x_2)+2d \\ &\quad = -ac+2d. \end{aligned}$$

Пошто је прва и друга заграда једнака 0, јер су x_1 и x_2 решења, следи да је $P(x_1)+P(x_2)$ цео број, јер су $a, c, d \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пример 5.6: Ако су $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq -1$ и решења једначине $x^2 + ax + b = -1$ цели бројеви, доказати да је $a^2 + b^2$ сложен број.

Решење. Из Виетових формула је

$$x_1 + x_2 = -a \text{ и } x_1 \cdot x_2 = b + 1 \neq 0,$$

па је

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (x_1 \cdot x_2 - 1)^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2^2 + 1 \\
&= (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1).
\end{aligned}$$

Пошто је $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ тврђење је доказано. □

Пример 5.7: Ако су a, b, c корени једначине

$$3x^3 + 9x^2 + 682x + 3 = 0,$$

израчунати

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Решење. Из Виетових формула имамо

$$a + b + c = -3, ab + bc + ac = \tfrac{682}{3} \text{ и } abc = -1.$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & b \\ b & a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} c & a \\ b & c \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a(a^2 - bc) - b(ac - b^2) + c(c^2 - ab) \\
&= a^3 - abc - abc + b^3 + c^3 - abc \\
&= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \\
&= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ac)) \\
&= (a + b + c)((a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) - (ab + bc + ac)) \\
&= (a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ac)) \\
&= (-3)(9 - 3 \cdot \frac{682}{3}) \\
&= (-3)(9 - 682) = (-3) \cdot (-673) = 2019.
\end{aligned}$$

□

Пример 5.8: Нека је

$$P(x) = ax^4 - ax^3 + cx^2 - 16bx + b$$

за неке $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$. Одредити све овакве полиноме којима су нуле позитивне.

Решење. Ако су x_1, x_2, x_3, x_4 нуле, по Виетовим формулама имамо

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -\frac{a_3}{a_4} = -\frac{-a}{a} = 1 \\
x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 &= -\frac{a_1}{a_4} = -\frac{-16b}{a} = \frac{16b}{a} \\
x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_3x_4 &= \frac{c}{a} \\
x_1x_2x_3x_4 &= \frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Тада је

$$\tfrac{1}{x_1} + \tfrac{1}{x_2} + \tfrac{1}{x_3} + \tfrac{1}{x_4} = 16.$$

По неједнакости између аритметичке и хармонијске средине следи

$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \tfrac{4}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}} = \tfrac{4}{16} = \tfrac{1}{4}.$$

Дакле, важи једнакост, па мора бити

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \tfrac{1}{4} \text{ тј. } p(x) = a \cdot (x - \tfrac{1}{4})^4.$$

Сада изједначимо полиноме

$$\begin{gathered}
a \cdot (x - \tfrac{1}{4})^4 = ax^4 - ax^3 + cx^2 - 16bx + b \\
a \cdot (x^4 - 4^3 \cdot \tfrac{1}{4} - 4 \cdot \tfrac{1}{4^3} + 6^2 \cdot \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^4}) = ax^4 - ax^3 + cx^2 - 16bx + b \\
ax^4 - ax^3 - ax \cdot \tfrac{1}{16} + 3ax^2\tfrac{1}{8} + a\tfrac{1}{256} = ax^4 - ax^3 + cx^2 - 16bx + b
\end{gathered}$$

добијамо

$$b = a\tfrac{1}{256}.$$

□

Литература

[1] Šešelja B., Tepavčević A. (2011), Algebra 2, Novi Sad: Symbol
[2] Doroslovački R. (2001), Elementi opšte i linearne algebre, Novi Sad: Stylos
[3] Blum-Smith B., Coskey S. (2016), The fundamental theorem on symmetric polynomials: History's first whiff of Galois theory, https://arxiv.org/pdf/1301.7116.pdf
[4] Milovanović G., Đorđević R. (2004), Linearna Algebra, Univerzitet u Nišu: Elektronski fakultet, http://www.mi.sanu.ac.rs/gvm/Teze/LinearAlgebra.pdf
[5] Barbeau EJ. (2003), Polynomials (Problem Books in Mathematics), Springer, http://poincare.matf.bg.ac.rs/zarkom/Polynomials-EJBarbeau.pdf
[6] https://imi.pmf.kg.ac.rs/moodle/file.php/23/Horner.pdf
[7] Arsenović M., Dragović V. (1999), Funkcionalne jednačine, Materijali za mlade matematičare, sveska 35, Društvo matematičara Srbije
[8] Baltić V., Djukić D., Krtinić Dj., Matić I. (2008), Pripremni zadaci za matematička takmičenja srednjoškolaca u Srbiji, Materijali za mlade matematičare, sveska 39, Društvo matematičara Srbije