Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Rešavanje jednačina trećeg i četvrtog stepena korišćenjem cirkularnih matrica

Master rad

Mentor prof. dr. Zoran Petrović

Student Ivana Jovanović 1137/2016

Beograd, jun 2019. godine

Sadržaj

1 Uvod

Veliki matematičari su još pre 15. veka pokušavali da pronađu jedinstveni postupak za rešavanje jednačina drugog, trećeg, četvrtog čak i petog stepena. Dobro su nam poznate standardne metode, počevši od nameštanja polinoma, združivanja, kvadratne formule, Vijetovih formula, trigonometrijskih smena, primene Bezuovog stava kao i Kardanovih formula. U ovom radu ćemo predstaviti jedinstvenu metodu rešavanja pomenutih jednačina uz pomoć cirkularnih matrica. Ideja ovog rada leži u Lagranžovoj analizi koja je okarakterisala rešenja u svetlu permutacija korena. Lagranž[1] je na osnovu Vijetove analize rešio jednačinu trećeg reda, a njegovo rešenje za jednačine četvrtog stepena je u suštini isto kao i Ferarijevo[2], koje će biti predstavljeno na kraju rada.

U poslednjem veku se dosta diskutovalo u krugu naučnika na temu polinoma nižeg stepena. Većina pristupa uključuje pojedine algebarske manipulacije koje dovode do rešenja. Sahov [3] pristup je zapravo najpribližniji cirkularnom, mada Ungar[4] ističe jedinstven pristup jednačinama drugog, trećeg i četvrtog stepena tako što pretpostavlja u svakom zasebnom slučaju jedinstvenu formu korena, iako je ne objašnjava.

U ovom radu će detaljno biti predstavljen postupak za rešavanje jednačina drugog, trećeg i četvrtog stepena uz pomoć cirkularnih matrica, kao i mnoštvo primera koje se pozivaju na definisane postupke.

[1] Joseph-Louis Lagrange, italijanski vanvremenski matematičar (1736-1813)
[2] Ludovico Ferrari, italijanski matematičar (1522-1565), u njegovim radovima se vidi uticaj njegovog učitelja Gerilama Cardana
[3] A. Pen-Tung Sah, američki matematičar (1902-1949)
[4] Abraham A. Ungar, profesor matematike na North Dakota State Univerzitetu

1.1 Cirkularne matrice

Matricu $C = [c_{ij}]_{n\times n}$ sa prvom vrstom $(c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$ nazivamo cirkularna matrica, ako ima sledeći oblik

$$C_{c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}} = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Cirkularna matrica je u potpunosti određena svojom prvom vrstom, odnosno kolonom, pa je kraće označavamo $C_{c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}} = (c_0, c_1, c_2, ..., c_{n-1})$. Kao što se može primetiti, cirkularne matrice imaju konstantne vrednosti na svakoj dijagonali koja je paralelna sa glavnom dijagonalom. Ono što nas najviše interesuje u vezi cirkularnih matrica je jednostavno izračunavanje njihovih sopstvenih vrednosti i sopstvenih vektora korišćenjem n-tog korena iz jedinice.

Navešćemo svojstva cirkularnih matrica (videti [2]):

-inverz cirkularne matrice je takođe cirkularna matrica

-za cirkularnu matricu $C = (0, 1, 0, 0, .., 0)$ reda n važi da je $C^n = I$, a sopstvene vrednosti su rešenja $\lambda^n = 1$.

Posmatrajmo cirkularnu matricu C formata 4×4. Neka je

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onda je

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i

$$C^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dobijamo da je $C^4 = I$, dakle jedinična matrica. Tražimo sopstvene vrednosti matrice C na poznati način.

$$CX = \lambda X$$

Pomnožimo s' desna sa C, pa dobijamo

$$C^2X = C\lambda X = \lambda^2 X$$

Ponovimo, pa je
$$C^3X = C\lambda^2X = \lambda^3X,$$
i još jednom pomnožimo s' desna sa C kako bi dobili C^4. Tada je
$$C^4X = C\lambda^3X.$$
Pošto je C^4 jedinična matrica i $CX = \lambda X$ dobijamo
$$X = \lambda^4X,$$
odakle sledi da je
$$\lambda^4 = 1.$$

Dakle, sopstvene vrednosti matrice C su koreni iz 1. Sada je
$$c_0I + c_1C + c_2C^2 + c_3C^3 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_3 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_0 \end{bmatrix} = C_{c_0,c_1,c_2,c_3}.$$
Posmatramo i cirkularnu matricu C formata 3×3 kako bi uvideli da važi gore navedeno. Dakle, neka je
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
pa je
$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dobijamo ponovo da je $C^3 = I$. Pa su sopstvene vrednosti matrice C rešenja $\lambda = \sqrt[3]{1}$. Dobijamo da je
$$c_0I + c_1C + c_2C^2 = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix} = C_{c_0,c_1,c_2}.$$
Neka je λ sopstvena vrednost cirkularne matrice $C = (0, 1, 0, 0, .., 0)$. Tada je λ^2 sopstvena vrednost matrice C^2, λ^3 sopstvena vrednost matrice C^3, ... ,λ^{n-1} sopstvena vrednost matrice C^{n-1}. Ako matricu $C_{c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}} = c_0I + c_1C + c_2C^2 + ... + c_{n-1}C^{n-1}$ zapišemo kao $p(C)$, tada je njena sopstvena vrednost $p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + ... + c_{n-1}\lambda^{n-1}$.

-polinom oblika $c_0 + c_1t + c_2t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$ nazivamo pridruženi polinom i obeležavamo ga sa $q(t)$.

U daljem radu sa C ćemo kraće označavati cirkularne matrice $C_{c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}}$.

Dakle, sopstvene vrednosti cirkularne matrice C se mogu dobiti uz pomoć pridruženog polinoma $q(t)$ i vrednosti n-tog korena iz 1 kada na mesto t-a u pridruženom polinomu stavimo vrednost n-tog korena iz 1. Ova perspektiva vodi do metode za rešavanje kvadratnih, kubnih i jednačina četvrtog stepena (videti [1]).

U toku rada ćemo se sretati sa cirkularnim matricama formata 2×2, 3×3 i 4×4, koje će tim redom odgovarati jednačinama drugog, trećeg i četvtog stepena.

Podsetićemo se određivanja sopstvenih vrednosti kao i sopstvenih vektora odgovarajuće matrice. Recimo, neka je

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tražimo skalar $\lambda \in R$ i vektor X

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

takav da je $f_x(X) = \lambda X$

$$\Leftrightarrow CX = \lambda X$$

$$\Leftrightarrow (C - \lambda I)X = 0,$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Dobijamo dve jednačine

$$(-1-\lambda)x + y = 0$$

i

$$1x + (-1-\lambda)y = 0.$$

Određujemo sopstvene vrednosti:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$1 + 2\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda(2+\lambda) = 0$$

Dobijamo $\lambda = 0$ ili $\lambda = -2$.
Za $\lambda = 0$, jednačine su $-x + y = 0$ i $x - y = 0$. Dobijamo da je $x = y$. Ako uzmemo da je $x = 1$, dobijamo

$$X = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Za $\lambda = -2$ jednačine su $x + y = 0$ i $x + y = 0$. Dobijamo da je $x = -y$, za $x = 1$, dobijamo

$$X = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

U radu ćemo razmatrati samo realne sopstvene vektore koji će se pojaviti kao kolone u svom uobičajenom matričnom zapisu. Naravno, neophodno je pronaći korene za $t^2 = 1$, $t^3 = 1$ i $t^4 = 1$ koji će nam biti važni tokom procesa rešavanja. Dobro su nam poznati koreni $t^2 = 1$ i $t^4 = 1$, dok su za $t^3 = 1$ sledeći:

$$\begin{aligned} t_0 &= 1 \\ t_1 &= -\tfrac{1}{2} + i\tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ t_2 &= -\tfrac{1}{2} - i\tfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Nekoliko primera će nam objasniti ideju pronalaska rešenja polinoma uz pomoć pridruženog polinoma zadate cirkularne matrice koja odgovara tom polinomu.

Primer Posmatrajmo zadatu matricu 4×4

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pošto je $n = 4$, dobijamo da su rešenja jednačine $t^4 = 1$ sledeća:
$t_0 = 1$, $t_1 = -1$, $t_2 = i$ i $t_3 = -i$. Pridruženi polinom matrice C je $q(t) = 1 + 2t + 1t^2 + 3t^3$, pa su sopstvene vrednosti od C sledeće:

$$q(1) = 7,$$

$$q(i) = i,$$

$$q(-1) = -3,$$

$$q(-i) = -i,$$

koje odgovaraju sopstvenim vektorima $v(\nu) = (1, \nu, \nu^2, \nu^3)$, odnosno:
$v(1) = (1, 1, 1, 1)$
$v(-1) = (1, -1, 1, -1)$
$v(i) = (1, i, -1, -i)$
$v(-i) = (1, -i, -1, i)$

Karakterističan polinom od C je

$$det(xI - C) = p(x) = (x - 7)(x + 3)(x - i)(x + i) = x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 4x - 21.$$

Primer Zadata je matrica 3×3

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & 1 & \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Kao što se može videti, pridružen polinom matrice je: $q(t) = 1 + \sqrt[3]{2}t + \sqrt[3]{4}t^2$. Za $n = 3$, koreni jednačine $t^3 = 1$ nam daju:

$$q(1) = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4},$$

$$q(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} + i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4})),$$

i

$$q(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2}(2 - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - i\sqrt{3}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})).$$

Karakterističan polinom možemo dobiti na dva načina; uz pomoć rešenja

$$p(x) = (x - q(1))(x - q(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}))(x - q(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}))$$

ili

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x-1 & -\sqrt[3]{2} & -\sqrt[3]{4} \\ -\sqrt[3]{4} & x-1 & -\sqrt[3]{2} \\ -\sqrt[3]{2} & -\sqrt[3]{4} & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)[(x-1)^2 - \sqrt[3]{8}] + \sqrt[3]{2}[-\sqrt[3]{4}(x-1) - \sqrt[3]{4}] - \sqrt[3]{4}[\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2}(x-1)]$$

$$= (x-1)^3 - 2(x-1) - 2(x-1) - 2 - 4 - 2(x-1)$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 6x + 6 - 6 = x^3 - 3x^2 - 3x - 1.$$

U prethodnim primerima su bile zadate cirkularne matrice, dok ćemo u narednom delu rada tražiti te odgovarajuće cirkularne matrice koje će nas odvesti do rešenja zadatog polinoma.

Uopšteno govoreći, za dati polinom $p(x)$, n-tog stepena, pokušavamo da nađemo odgovarajuću cirkularnu matricu C kojoj je $p(x)$ karakteristični polinom. Prvi red u cirkularnoj matrici C nam definiše različite koeficijente polinoma $q(t)$, a korene polaznog polinoma $p(x)$ ćemo dobiti uz pomoć pridruženog polinoma $q(t)$ i n-tog korena iz 1.

Prođimo kroz postupak rešavanja jednačina, počevši od kvadratnih.

2 Postupak za rešavanje kvadratnih jednačina

Posmatramo polinom

$$p(x) = x^2 + \alpha x + \beta.$$

Uporedo, razmatramo i 2×2 cirkularnu matricu C

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Karakterističan polinom od C je

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x - a & -b \\ -b & x - a \end{vmatrix} = x^2 - 2ax + a^2 - b^2.$$

Kada ih izjednačimo, dobićemo a i b koje tražimo. Znamo $-2a = \alpha$ i $a^2 - b^2 = \beta$. Dakle, dobijamo da je

$$\begin{aligned} a &= -\tfrac{\alpha}{2} \\ b &= \pm\sqrt{\tfrac{\alpha^2}{4} - \beta}. \end{aligned}$$

U daljem radu ćemo posmatrati samo jedno rešenje sistema, bez umanjenja opštosti definisaćemo b sa pozitivnim znakom.

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{2} & \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} \\ \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta} & -\frac{\alpha}{2} \end{bmatrix},$$

te je priduženi polinom zadat

$$q(t) = -\frac{\alpha}{2} + t(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}).$$

Kako su koreni za $t^2 = 1$ dobro poznati $t_1 = 1$ i $t_2 = -1$, dobijamo

$$q(1) = -\frac{\alpha}{2} + 1(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta})$$

i

$$q(-1) = -\frac{\alpha}{2} - 1(\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}),$$

koja predstavljaju rešenja kvadratne jednačine.

Primer Tražimo rešenja polinoma

$$p(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Znamo već da su rešenja ove jednostavne kvadratne jednačine $x_0 = 2$ i $x_1 = 1$, ali ćemo do njih doći primenom prethodne metode. Tražimo odgovarajuću cirkularnu matricu 2×2 jer je jednačina drugog stepena.

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix},$$

pa je

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -b & x-a \end{vmatrix} = x^2 - 2ax + a^2 - b^2.$$

Izjednačavanjem dobijamo da je $-2a = -3$ i $a^2 - b^2 = 2$, odnosno $a = \frac{3}{2}$, a kada dobijenu vrednost a uvrstimo u drugu jednačinu , dobijamo da je $b = \frac{1}{2}$ (već smo u prethodnom delu objasnili da ćemo bez umanjenja opštosti uzimati pozitivnu vrednost).

Za dobijene vrednosti a i b, dobijamo matricu

$$C = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

te je

$$q(t) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}t.$$

Vrednosti za t su 1 i -1 ($t^2 = 1$), pa dobijamo rešenja (koja smo i očekivali)

$$q(1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1) = 2$$

$$q(-1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1) = 1.$$

Primetimo da je

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

iz čega dobijamo

$$(\frac{3}{2} - \lambda)^2 - (\frac{1}{2})^2 = 0,$$

odnosno $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ (naš polazni polinom). A njegove sopstvene vrednosti su 2 i 1, što smo i dobili uz pomoć korena broja 1.

3 Postupak za rešavanje kubnih jednačina

Posmatramo polinom

$$p(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta_1 x + \gamma_1.$$

Pošto je trećeg stepena, jasno je da mu odgovara 3×3 cirkularna matrica

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}.$$

Karakterističan polinom od C je

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x-a & -b & -c \\ -c & x-a & -b \\ -b & -c & x-a \end{vmatrix} = (x-a)^3 - b^3 - c^3 - 3bc(x-a).$$

Želimo da pronađemo a, b i c. Na početku zadatka uvešćemo smenu: $y = x - a$, ($a = \frac{\alpha}{3}$ koja odgovara Kardanovim[5] formulama) koja će na prirodan način eliminasati kvadratni deo i na taj način značajno olakšati proces traženja odgovarajuće cirkularne matrice sa nulama na dijagonali. Kada smenu uvrstimo u polinom, dobijamo $p(t) = y^3 + \beta y + \gamma$ koja odgovara pomenutoj matrici

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ c & 0 & b \\ b & c & 0 \end{bmatrix},$$

dok je karakterističan polinom od C sada

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x & -b & -c \\ -c & x & -b \\ -b & -c & x \end{vmatrix} = x^3 - b^3 - c^3 - 3bcx.$$

Izjednačavanjem dobijamo da je

$$b^3 + c^3 = -\gamma$$

i

$$3bc = -\beta,$$

odnosno $b^3c^3 = -\frac{\beta^3}{27}$. Korišćenjem ideje Vijetovih formula prilikom rešavanja kvadratnih jednačina, dobijamo

$$x^2 + \gamma x - \frac{\beta^3}{27},$$

[5]Girolamo Cardano, italijanski vanvremenski matematičar (1501-1576)

te na osnovu kvadratne formule važi

$$x_{1/2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4 \cdot \frac{\beta^3}{27}}}{2},$$

odnosno,

$$b = \left[\frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 + 4\frac{\beta^3}{27}}}{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

i

$$c = \left[\frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 + 4\frac{\beta^3}{27}}}{2}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

*Napomena: Biramo samo jedan kubni koren za b i c.

Koreni $t^3 = 1$ su $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ i $t_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Kada se uvrste u pridruženi polinom, dobijamo

$$q(1) = b + c,$$

$$q(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2$$

i

$$q(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2,$$

a ovo su ujedno i rešenja kubne jednačine sa uvedenom smenom. Krajnja rešenja dobijamo kada vratimo smenu ili uz pomoć cirkularne matrice

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

i pridruženog polinoma $q(t) = a + bt + ct^2$, gde je $t = \sqrt[3]{1}$.

3.1 Primeri rešavanja jednačina trećeg stepena

Primer 1. *Prvo ćemo tražiti rešenja polinoma*

$$p(t) = t^3 - 3t^2 - 3t - 1,$$

čiju smo matricu videli u primeru na strani 7, ali ćemo sada na osnovu prethodno detaljno objašnjene metode doći do iste.
Prvo uvodimo smenu: $t + \frac{-3}{3} = x \Rightarrow t = x + 1$. Uvrstimo je u dati polinom gde dobijamo

$$(x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 3(x+1) - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3(x^2 + 2x + 1) - 3x - 3 - 1 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 6x - 3 - 3x - 3 - 1 = 0$$

$$x^3 - 6x - 6 = 0.$$

Primetimo da je $b^3 + c^3 = -\gamma$ i $b^3c^3 = -\frac{\beta^3}{27}$. Pošto je $\beta = -6$ i $\gamma = -6$ dobijamo da je

$$b^3 + c^3 = 6$$

i

$$b^3c^3 = -\frac{6^3}{27} = 8.$$

(Ideja za traženje rešenja kubne jednačine je sledeća: Ako je $u + v = p$ i $uv = q$. Tada je $u = m + \sqrt{n}$ i $v = m - \sqrt{n}$)

Tražimo b^3 i c^3 na sledeći način: Neka je $b^3 = m + \sqrt{n}$ i $c^3 = m - \sqrt{n}$
Kada ih saberemo, dobijamo $b^3 + c^3 = 2m = 6$, odnosno $m = 3$.
Kada ih pomnožimo, dobijamo razliku kvadrata
$b^3c^3 = m^2 - n \Rightarrow n = m^2 - b^3c^3 = 9 - 8 = 1$.

Kada uvrstimo dobijene vrednosti za m i n, dobijamo da je

$$b^3 = m + \sqrt{n} = 3 + \sqrt{1} = 3 + 1 = 4,$$

pa je $b = \sqrt[3]{4}$ i

$$c^3 = m - \sqrt{n} = 3 - \sqrt{1} = 3 - 1 = 2,$$

pa je $c = \sqrt[3]{2}$.
Naša cirkularna matrica glasi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{2} & 1 & \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{4} & \sqrt[3]{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenja su $q(t) = a + bt + ct^2 = 1 + \sqrt[3]{4}t + \sqrt[3]{2}t^2$, gde je t treći koren od 1.

$$q(1) = a + b + c = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4},$$

$$q(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) = a+b(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})+c(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 = 1+(\sqrt[3]{2})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})+(\sqrt[3]{4})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2$$

i

$$q(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = a+b(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})+c(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2 = 1+(\sqrt[3]{2})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})+(\sqrt[3]{4})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2.$$

Primer 2. *Primer jednačine trećeg stepena, sa tri realna rešenja*

Dat je polinom

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6.$$

Uvodimo smenu kako bi se oslobodili drugog stepena. Dakle, $t + \frac{-2}{3} = y$, odnosno $t = y + \frac{2}{3}$. Zamenimo u zadati polinom, te dobijamo

$$(y + \frac{2}{3})^3 - 2(y + \frac{2}{3})^2 - 5(y + \frac{2}{3}) + 6 =$$

$$y^3 + 3y^2\frac{2}{3} + 3y\frac{4}{9} + \frac{8}{27} - 2(y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) - 5y - \frac{10}{3} + 6 =$$

$$y^3 + 2y^2 + y\frac{4}{3} + \frac{8}{27} - 2y^2 - \frac{8}{3}y - \frac{8}{9} - 5y - \frac{10}{3} + 6 =$$

$$y^3 + (\frac{4}{3} - \frac{8}{3} - 5)y + \frac{8}{27} - \frac{8}{9} - \frac{10}{3} + 6 =$$

$$y^3 - \frac{19}{3}y + \frac{56}{27}.$$

Dakle, $\beta = -\frac{19}{3}$ i $\gamma = \frac{56}{27}$. Sada je

$$b^3 + c^3 = -\frac{56}{27}$$

i

$$3bc = \frac{19}{3},$$

odnosno $b^3c^3 = \frac{19^3}{9^3}$. Vijetovim formulama dobijamo rešenja jednačine, tj. koeficijente b i c matrice C. Znamo da je

$$x^2 + \frac{56}{27}x + \frac{6859}{729} = 0.$$

Kada je proširimo sa 729 dobijamo jednačinu

$$729x^2 + 1512x + 6859 = 0,$$

a njena rešenja su

$$x_{1/2} = \frac{-1512 \pm \sqrt{-17714700}}{1458}.$$

Nakon skraćivanja

$$x_{1/2} = \frac{-28 \pm 45i\sqrt{3}}{27}$$

dobijamo vrednosti

$$b = \sqrt[3]{\frac{-28 + 45i\sqrt{3}}{27}}$$

i

$$c = \sqrt[3]{\frac{-28 - 45i\sqrt{3}}{27}}.$$

Dalje, tražimo rešenja tako što pretpostavimo da je $-28 + 45i\sqrt{3}$ kub nekog binoma. Naime,

$$-28 + 45i\sqrt{3} = (m + i\sqrt{n})^3$$

$$-28 + 45i\sqrt{3} = m^3 + 3m^2 i\sqrt{n} - 3mn - in\sqrt{n}$$

$$-28 + 45i\sqrt{3} = (m^3 - 3mn) - i\sqrt{n}(3m^2 - n)$$

Za $n = 3$ sledi $3m^2 - n = 45$, odnosno $3m^2 - 3 = 45$. Dobijamo da je $m^2 = 16$. Rešenje je $m = -4$, jer zadovoljava i drugu jednačinu.
Vidimo da je

$$-28 + 45i\sqrt{3} = (-4 + i\sqrt{3})^3.$$

Dakle,

$$b = \sqrt[3]{\frac{(-4 + i\sqrt{3})^3}{3^3}} = \frac{-4 + i\sqrt{3}}{3}$$

i

$$c = \sqrt[3]{\frac{(-4 - i\sqrt{3})^3}{3^3}} = \frac{-4 - i\sqrt{3}}{3}.$$

Kao što je u uvodnom delu postupka rečeno, dato b i c zamenjujemo u pridruženi polinom

$$q(1) = b + c = \frac{-4 + i\sqrt{3}}{3} + \frac{-4 - i\sqrt{3}}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Obavezno se vraća smena, pa dobijamo rešenje $t = y + \frac{2}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -2$.

$$q(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$(\frac{-4 + i\sqrt{3}}{3})(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) + (\frac{-4 - i\sqrt{3}}{3})(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 = ... = \frac{1}{3}.$$

Nakon vraćanja smene, drugo rešenje $t = y + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$.

$$q(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) + (\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2 = ... = \frac{7}{3}.$$

Treće rešenje je, nakon smene, $t = y + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} + \frac{2}{3} = 3$.
Na osnovu prethodnih rešenja, polazni polinom je

$$p(t) = t^3 - 2t^2 - 5t + 6 = (x-3)(x+2)(x-1),$$

a cirkularna matrica glasi

$$C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-4+i\sqrt{3}}{3} & \frac{-4-i\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-4-i\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-4+i\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-4+i\sqrt{3}}{3} & \frac{-4-i\sqrt{3}}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

U ovom primeru ćemo proveriti da li karakterističan polinom date matrice odgovara zadatom polinomu.

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x-\frac{2}{3} & -\frac{-4+i\sqrt{3}}{3} & -\frac{-4-i\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{-4-i\sqrt{3}}{3} & x-\frac{2}{3} & -\frac{-4+i\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{-4+i\sqrt{3}}{3} & -\frac{-4-i\sqrt{3}}{3} & x-\frac{2}{3} \end{vmatrix} =$$

$(x-\frac{2}{3})[(x-\frac{2}{3})^2-(-\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})(-\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})]+(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})[-(x-\frac{2}{3})(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})-(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})^2]-(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})[(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})^2+(x-\frac{2}{3})(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})] =$

$(x-\frac{2}{3})[x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{19}{9}]+(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})[-(x-\frac{2}{3})(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})-\frac{16-8i\sqrt{3}-3}{9}]-(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})[(\frac{16+8i\sqrt{3}-3}{9}+(x-\frac{2}{3})(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})] =$

$(x-\frac{2}{3})[x^2-\frac{4}{3}x-\frac{15}{9}]+(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})[-(x-\frac{2}{3})(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})-\frac{13-8i\sqrt{3}}{9}]-(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})[(\frac{13+8i\sqrt{3}}{9}+(x-\frac{2}{3})(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})] =$

kada grupišemo dobijamo

$$(x-\frac{2}{3})[x^2-\frac{4}{3}x-\frac{15}{9}-\frac{19}{9}-\frac{19}{9}]-(\frac{13-8i\sqrt{3}}{9})(\frac{-4+i\sqrt{3}}{3})-(\frac{-4-i\sqrt{3}}{3})(\frac{13+8i\sqrt{3}}{9}) =$$

$$(x-\frac{2}{3})[x^2-\frac{4}{3}x-\frac{53}{9}]-\frac{-52+13i\sqrt{3}+32i\sqrt{3}+24-52-32i\sqrt{3}-13i\sqrt{3}+24}{27} =$$

$$(x-\frac{2}{3})[x^2-\frac{4}{3}x-\frac{53}{9}]+\frac{56}{27}=$$

$$x^3-\frac{4}{3}x^2-\frac{53}{9}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{106}{27}+\frac{56}{27}=$$

$$x^3-2x^2-5x+6,$$

a to je upravo naš polazni polinom.

Primer 3. *Sledeći primer sadrži dva kompleksna i jedno realno rešenje*

$$p(t)=t^3-3t^2+t-3.$$

Uvodimo smenu: $t+\frac{a}{3}=y$, odnosno $t=y+1$. Kada je uvrstimo u početnu jednačinu, dobijamo

$$(y+1)^3-3(y+1)^2+(y+1)-3=1+3y+3y^2+y^3-3(y^2+2y+1)+y+1-3=$$

$$1+3y+3y^2+y^3-3y^2-6y-3+y+1-3=$$

$$y^2-2y-4.$$

Dakle $\beta=-2$ i $\gamma=-4$. (Tražimo rešenja na već pomenuti način: $u+v=p$ i $uv=q$ tako da je $u=a+\sqrt{b}$ i $v=a-\sqrt{b}$.)

Pošto je

$$b^3+c^3=4$$

i

$$b^3c^3=\frac{2^3}{3^3},$$

pretpostavimo da je: $b^3=m+\sqrt{n}$ i $c^3=m-\sqrt{n}$. Kada ih saberemo, dobijamo $b^3+c^3=2m=4$, odnosno $m=2$.

Kada ih pomnožimo, dobijamo razliku kvadrata, odnosno $b^3c^3=m^2-n$ gde dalje sledi da je $n=m^2-\frac{8}{27}=4-\frac{8}{27}=\frac{100}{27}$.

Dobijamo da je

$$b^3=2+\sqrt{\frac{100}{27}}=2+\frac{10}{3\sqrt{3}}=\frac{54+30\sqrt{3}}{27}$$

i da je

$$c^3=2-\sqrt{\frac{100}{27}}=2-\frac{10}{3\sqrt{3}}=\frac{54-30\sqrt{3}}{27}.$$

Na sličan način, kao u prethodnom primeru, dobijamo da je

$$54 + 30\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})^3,$$

iz čega sledi da je

$$b = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

i

$$c = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$$

Sada kada smo našli b i c, lako pronalazimo rešenja:

$$q(1) = b + c = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 2,$$

a nakon vraćanja smene, dobijamo prvo rešenje $t = y + 1 = 2 + 1 = 3$.

$$q(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$(\frac{3+\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}) + (\frac{3-\sqrt{3}}{3})(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2})^2 = ... = -1 + i.$$

Posle vraćanja smene, drugo rešenje je $t = y + 1 = -1 + i + 1 = i$.

$$q(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$(\frac{3+\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}) + (\frac{3-\sqrt{3}}{3})(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2})^2 = ... = -1 - i,$$

a nakon smene, treće rešenje je $t = y + 1 = -1 - i + 1 = -i$. Našli smo sva tri rešenja, pa je polazni polinom

$$p(t) = t^3 - 3t^2 + t - 3 = (x^2 + 1)(x - 3),$$

a cirkularna matrica glasi

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3+\sqrt{3}}{3} & \frac{3-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{3} & 1 & \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{3} & \frac{3-\sqrt{3}}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 4. *Primer sardži dvostruko realno i jedno realno rešenje*

Tražimo rešenja polinoma

$$p(t) = t^3 - 5t^2 + 3t + 9.$$

Uvodimo smenu kako bi se oslobodili drugog stepena. Dakle $t + \frac{a}{3} = y$. Sledi, $t = y + \frac{5}{3}$.
Vraćamo u početnu:

$$(y + \frac{5}{3})^3 - 5(y + \frac{5}{3})^2 + 3y + (\frac{5}{3}) + 9 =$$

$$y^3 + 3y^2\frac{5}{3} + 3y\frac{25}{9} + \frac{125}{27} - 5(y^2 + \frac{10}{3}y + \frac{25}{9}) + 3y + 5 + 9 =$$

$$y^3 + 3y^2\frac{5}{3} + 3y\frac{25}{9} + \frac{125}{27} - 5y^2 - \frac{50}{3}y - \frac{125}{9} + 3y + 14 =$$

$$y^3 - \frac{16}{3}y + \frac{128}{27}.$$

Dobijamo : $\beta = -\frac{16}{3}$ i $\gamma = \frac{128}{27}$. (Na osnovu prethodnog primera smo utvrdili da se brže dolazi do rešenja smenom $u + v = p$ i $uv = q$ gde je $u = a + \sqrt{b}$ i $v = a - \sqrt{b}$, te ćemo je i u ovom slučaju iskoristiti). Znamo da je

$$b^3 + c^3 = -\frac{128}{27}$$

i

$$b^3c^3 = \frac{16^3}{9^3}.$$

Ako je $b^3 = m + \sqrt{n}$ i $c^3 = m - \sqrt{n}$, tada je

$$b^3 + c^3 = 2m = -\frac{128}{27},$$

odnosno $m = -\frac{128}{54} = -\frac{64}{27}$.

$$b^3c^3 = m^2 - n,$$

pa dalje sledi da je $n = m^2 - \frac{8}{27} = (-\frac{64}{27})^2 - \frac{16^3}{9^3} = \frac{4096}{729} - \frac{4096}{729} = 0.$

Dobijamo da je $b^3 = -\frac{64}{27}$ i da je $c^3 = -\frac{64}{27}$.

Jasno je da je

$$b = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3},$$

kao i da je

$$c = \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} = -\frac{4}{3}.$$

Rešenja su:

$$q(1) = b + c = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3},$$

a nakon smene, $t = y + \frac{5}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{5}{3} = -\frac{3}{3} = -1$.

$$q(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$-\frac{4}{3}(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}) - \frac{4}{3}(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$= ... = \frac{4}{3}.$$

Posle smene $t = y + \frac{5}{3} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$ i na kraju

$$q(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}) = b(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}) + c(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$-\frac{4}{3}(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}) - \frac{4}{3}(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2})^2 =$$

$$= ... = \frac{4}{3}.$$

Treće rešenje nakon smene je $t = y + \frac{5}{3} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$, te je polazni polinom

$$p(t) = t^3 - 5t^2 + 3t + 9 = (x - 3)^2(x + 1),$$

dok cirkularna matrica glasi

$$C = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

4 Postupak za rešavanje jednačina četvrtog stepena

Posmatramo polinom

$$p(x) = x^4 + \alpha_1 x^3 + \beta_1 x^2 + \gamma_1 x + \delta_1.$$

Slično kao u jednačinama trećeg stepena, u jednačinama četvrtog stepena smenom $y + \frac{\alpha}{4} = x$ eliminišemo kubni deo i na taj način značajno olakšavamo proces traženja odgovarajuće cirkularne matrice . Dobijamo polinom

$$p(x) = x^4 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

Kako bi izbegli trivijalne slučajeve, pretpostavljamo da nisu svi β, γ ili δ jednaki 0. Novom polinomu odgovara cirkularna matrica

$$C = \begin{bmatrix} 0 & b & c & d \\ d & 0 & b & c \\ c & d & 0 & b \\ b & c & d & 0 \end{bmatrix}$$

sa karakterističnim polinomom koji odgovara p. Karakterističan polinom od C je

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x & -b & -c & -d \\ -d & x & -b & -c \\ -c & -d & x & -b \\ -b & -c & -d & x \end{vmatrix} =$$

$$= x^4 - (4bd + 2c^2)x^2 - 4c(b^2 + d^2)x + c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2.$$

Izjednačavanjem sa p dobijamo sistem jednačina:

$$-(4bd + 2c^2) = \beta,$$

odnosno $4bd + 2c^2 = -\beta$

$$-4c(b^2 + d^2) = \gamma,$$

odnosno $4c(b^2 + d^2) = -\gamma$ i

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = \delta.$$

Kada treću jednačinu sistema zapisemo u malo drugačijem obliku, dobijamo sledeću formu. Naime,

$$c^4 - (b^2 + d^2)^2 - 4bdc^2 + 4(bd)^2 = \delta.$$

Primećujemo, kada u poslednju jednačinu uvrstimo prvu i drugu jednačinu sistema, jednačina će zavisiti samo od c. Dakle dobijamo sledeću formu jednačine

$$c^4 - \frac{\gamma^2}{16c^2} + \frac{(\beta + 2c^2)^2}{4} + (2c^2 + \beta)c^2 = \delta.$$

Kada je proširimo sa c^2 i malo sredimo, dobijamo

$$c^6 + \frac{\beta}{2}c^4 + (\frac{\beta^2}{16} - \frac{\delta}{4})c^2 - \frac{\gamma^2}{64} = 0,$$

što predstavlja jednačinu kubnog polinoma c^2, pa je metod rešavanja na dalje isti kao i za jednačine trećeg stepena. Koreni $t^4 = 1$ su $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = i$ i $t_4 = -i$. Dobijemo:

$$q(1) = b + c + d$$
$$q(-1) = -b + c - d$$
$$q(i) = -c + i(b - d)$$
$$q(-i) = -c - i(b - d)$$

Ovo su i rešenja jednačine četvrtog stepena sa uvedenom smenom. Krajnja rešenja dobijamo kada vratimo smenu.

4.1 Primeri jednačina četvrtog stepena

Primer 5. *Prvi primer sadrži dva realna rešenja i dva kompleksna*

$$p(y) = y^4 - 4y^3 - 20y^2 - 4y - 21.$$

Uvodimo smenu: $y - \frac{a}{4} = t$, odnosno $y = t + 1$.

$$(t+1)((t+1)^3 - 4(t+1)^2 - 20(t+1) - 4) - 21 =$$

$$(t+1)(t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 4(t^2 + 2t + 1) - 20t - 20 - 4) - 21 =$$

$$(t+1)(t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 4t^2 - 8t - 4 - 20t - 20 - 4) - 21 =$$

$$(t+1)(t^3 - t^2 - 25t - 27) - 21 =$$

$$t^4 - t^3 - 25t^2 - 27t + t^3 - t^2 - 25t - 27 - 21 =$$

$$t^4 - 26t^2 - 52t - 48.$$

Zaključujemo $\beta = -26$, $\gamma = -52$ i $\delta = -48$.

Koristimo jednačinu koju smo u prethodnom delu izveli:

$$c^6 + \frac{\beta}{2}c^4 + (\frac{\beta^2}{16} - \frac{\delta}{4})c^2 - \frac{\gamma^2}{64} = 0$$

Dakle,

$$c^6 + \frac{-26}{2}c^4 + (\frac{(-26)^2}{16} - \frac{-48}{4})c^2 - \frac{(-52)^2}{64} = 0$$

$$c^6 - 13c^4 + (\frac{169}{4} + \frac{48}{4})c^2 - \frac{169}{4} = 0$$

$$c^6 - 13c^4 + \frac{217}{4}c^2 - \frac{169}{4} = 0.$$

Uvodimo novu smenu $c^2 = x$ i time gornju jednačinu svodimo na kubnu

$$x^3 - 13x^2 + \frac{217}{4}x - \frac{169}{4} = 0.$$

Ponovo uvodimo smenu kako bi nestao drugi stepen. Smena je $x - \frac{13}{3} = m \Rightarrow x = m + \frac{13}{3}$. Dakle,

$$(m + \frac{13}{3})^3 - 13(m + \frac{13}{3})^2 + \frac{217}{4}(m + \frac{13}{3}) - \frac{169}{4} = 0$$

$$(m+\frac{13}{3})((m+\frac{13}{3})^2-13(m+\frac{13}{3})+\frac{217}{4})-\frac{169}{4}=0$$

$$(m+\frac{13}{3})(m^2+\frac{26}{3}m+\frac{169}{9}-13m-\frac{169}{3}+\frac{217}{4})-\frac{169}{4}=0$$

$$(m+\frac{13}{3})(m^2-\frac{13}{3}m+\frac{61}{36})-\frac{169}{4}=0$$

$$m^3-\frac{13}{3}m^2+\frac{601}{36}m+\frac{13}{3}m^2-\frac{169}{9}m+\frac{7813}{108}-\frac{169}{4}=0$$

$$m^3-\frac{75}{36}m+\frac{3250}{108}=0$$

$$m^3-\frac{25}{12}m+\frac{1625}{54}=0.$$

Tražimo rešenja na već poznati način. Pošto je $b^3+c^3=-\frac{1625}{54}$ i $b^3c^3=\frac{25^3}{36^3}$, neka je $b^3=m+\sqrt{n}$ i $c^3=m-\sqrt{n}$.
Kada ih saberemo, dobijamo

$$b^3+c^3=2m=-\frac{1625}{54},$$

odnosno $m=-\frac{1625}{108}$.

Kada ih pomnožimo, dobijamo razliku kvadrata

$$b^3c^3=m^2-n,$$

te sledi

$$n=m^2-\frac{8}{27}=(\frac{1625}{108})^2-\frac{15625}{46656}=\frac{10546875}{46656}.$$

Dobijamo da je

$$b^3=-\frac{1625}{108}+\sqrt{\frac{10546875}{46656}}=-\frac{1625}{108}+\sqrt{\frac{25\cdot 25\cdot 25\cdot 25\cdot 9\cdot 3}{16\cdot 4\cdot 9\cdot 9\cdot 9}}=-\frac{1625}{108}+\frac{1825\sqrt{3}}{216}=$$

$$=-\frac{3250}{216}+\frac{1825\sqrt{3}}{216}=\frac{-3250+1875\sqrt{3}}{216}$$

i da je

$$c^3=-\frac{1625}{108}-\sqrt{\frac{10546875}{46656}}=-\frac{3250+1875\sqrt{3}}{216}.$$

Tražimo kub binoma koji će za rešenje dati $-3250+1875\sqrt{3}$.

$$-3250 + 1875\sqrt{3} = (p + q\sqrt{3})^3$$
$$-3250 + 1875\sqrt{3} = p^3 + 3p^2q\sqrt{3} + 3p3q^2 + 3b^3\sqrt{3}$$
$$-3250 + 1875\sqrt{3} = (p^3 + 9pq^2) + (3qp^2 + 3q^3)\sqrt{3}$$

Kada izjednačimo imamo da je $3qp^2 + 3q^3 = 1875$ i $p^3 + 9pq^2 = -3250$.

$$3(qp^2 + q^3) = 1875$$
$$qp^2 + q^3 = 625.$$

Nakon nekoliko pokušaja utvrdimo da jednakost važi za $p = -10$ i $q = 5$. Dakle, $-3250 + 1875\sqrt{3} = (-10 + 5\sqrt{3})^3$ i pritom znamo da je $6^3 = 216$. Dobijamo vrednost za b i c:

$$b = \frac{-10 + 5\sqrt{3}}{6}$$

i

$$c = -\frac{10 + 5\sqrt{3}}{6}.$$

Znamo da je

$$q(1) = m = b + c = \frac{-10 + 5\sqrt{3}}{6} - \frac{10 + 5\sqrt{3}}{6} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}.$$

Vratimo smenu:

$$x = m + \frac{13}{3} = -\frac{10}{3} + \frac{13}{3} = \frac{3}{3} = 1.$$

Pošto je $c^2 = 1$ dobijamo dve situacije, ali biramo jednu. Uvrstimo $c = 1$ u preostale dve jednačine sistema koje smo u prethodnom delu izveli. Dakle:

$$4bd + 2c^2 = -\beta$$
$$4bd + 2 = 26 \Rightarrow 4bd = 24$$

i

$$4c(b^2 + d^2) = -\gamma$$
$$4(b^2 + d^2) = 52 \Rightarrow b^2 + d^2 = 13.$$

Dobijamo $b = 3$ i $d = 2$.

$$q(1) = b + c + d = 3 + 2 + 1 = 6.$$

Posle prve uvedene smene $y = 6 + 1 = 7$.

$$q(-1) = -b + c - d = -3 + 1 - 2 = -4.$$

Posle prve uvedene smene $y = -4 + 1 = -3$.

$$q(i) = -c + i(b - d) = -1 + i(3 - 2) = -1 + i.$$

Posle prve uvedene smene $y = -1 + i + 1 = i$.

$$q(-i) = -c - i(b - d) = -1 - i(3 - 2) = -1 - i.$$

Posle prve uvedene smene $y = -1 - i + 1 = -i$.

Polazni polinom je

$$p(y) = y^4 - 4y^3 - 20y^2 - 4y - 21 = (y - 7)(y + 3)(y^2 + 1),$$

a cirkularna matrica glasi :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 6. *Sledeći primer sadrži četiri kompleksna rešenja*

$$p(x) = x^4 + 3x^2 + 2$$

Kao što se može primetiti, ovo je jednostavan primer u kojem nemamo treći stepen, te odmah možemo preći na korišćenje jednačina koje smo dobili izjednačavanjem karakterističnog polinoma od C sa konstantama polinoma $p(x)$. Primetimo: $\alpha = 1, \beta = 3, \gamma = 0$ i $\delta = 2$.

Uvrstimo u jednačinu

$$c^6 + \frac{\beta}{2}c^4 + (\frac{\beta^2}{16} - \frac{\delta}{4})c^2 - \frac{\gamma^2}{64} = 0,$$

pa dobijamo:

$$c^6 + \frac{3}{2}c^4 + (\frac{3^2}{16} - \frac{2}{4})c^2 - \frac{0^2}{64} = 0$$

$$c^6 + \frac{3}{2}c^4 + \frac{9 - 8}{16}c^2 - 0 = 0$$

$$c^6 + \frac{3}{2}c^4 + \frac{1}{16}c^2 = 0.$$

Uvodimo smenu $c^2 = t$.

$$t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{16}t = 0.$$

Opet se svodi na rešanjanje jednačine trećeg stepena. Uvodimo smenu kako bi se oslobodili stepena 2. Smena $t + \frac{3/2}{3} = m \Rightarrow t = m - \frac{1}{2}$.

$$(m-\frac{1}{2})((m-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{2}(m-\frac{1}{2})+\frac{1}{16})=0$$

$$(m-\frac{1}{2})(m^2-m+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}m-\frac{3}{4}+\frac{1}{16})=0$$

$$(m-\frac{1}{2})(m^2+\frac{1}{2}-\frac{7}{16})=0$$

$$m^3+\frac{1}{2}m^2-\frac{7}{16}m-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{4}m+\frac{7}{32}=0$$

$$m^3-\frac{11}{16}m+\frac{7}{32}=0.$$

Dobijamo nove konstante : $\beta_1=-\frac{11}{16}$ i $\gamma_1=\frac{7}{32}$. Dalje, do rešenja dolazimo na već poznati način.

Pošto je

$$b^3+c^3=-\frac{7}{32}$$

i

$$b^3c^3=\frac{11^3}{16^3 27},$$

neka je $b^3=m+\sqrt{n}$ i $c^3=m-\sqrt{n}$. Kada ih saberemo, dobijamo

$$b^3+c^3=2m=-\frac{7}{32}\Rightarrow m=-\frac{7}{64}.$$

Kada ih pomnožimo, dobijamo razliku kvadrata $b^3c^3=m^2-n$ sledi

$$n=m^2-b^3c^3=(\frac{7}{64})^2-\frac{1331}{110592}=\frac{49}{4096}-\frac{1331}{110592}=\frac{-8}{110592}=-\frac{1}{13824}.$$

Dobijamo da je

$$b^3=-\frac{7}{64}+\sqrt{\frac{-1}{13824}}=-\frac{7}{64}+\sqrt{\frac{i^2}{4\cdot 4\cdot 16\cdot 9\cdot 6}}=$$

$$-\frac{7}{64}+\frac{i}{48\sqrt{6}}=-\frac{7}{64}+\frac{i\sqrt{6}}{48\cdot 6}=\frac{63+2i\sqrt{6}}{576}$$

Međutim, pošto je $576=2^6\cdot 3^2$, a mi u nastavku tražimo treći koren, jasno je da ceo izraz treba pomnožiiti sa 3 kako bi imenilac bio kub nekog broja. Dobijamo da je

$$b^3=\frac{-189+6i\sqrt{6}}{1728}.$$

Analogno,

$$c^3=\frac{-189-6i\sqrt{6}}{1728}.$$

Tražimo kub binoma koji će za rešenje dati $-189+6i\sqrt{6}$. U prethodnom primeru je detaljno izveden, te ćemo u ovom samo zapisati rešenja.

$$-189 + 6i\sqrt{6} = (3 + 2i\sqrt{6})^3$$

i

$$-189 - 6i\sqrt{6} = (3 - 2i\sqrt{6})^3.$$

Dakle,

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 + 2i\sqrt{6}}{1728}} = \frac{3 + 2i\sqrt{6}}{12}$$

i

$$c = \sqrt[3]{\frac{3 - 2i\sqrt{6}}{1728}} = \frac{3 - 2i\sqrt{6}}{12},$$

pa je

$$q(1) = m = b + c = \frac{3 + 2i\sqrt{6} + 3 - 2i\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{2}.$$

*Napomena, i q_2 i q_3 bi nas odveli do rešenja, tj. do konstanti koje čine cirkularnu matricu, ali svesno biramo samo q_1 jer je najlakše za dalji rad.

Vratimo smenu $t = m - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Dobijamo da je $c^2 = 0 \Rightarrow c = 0$. Kada uvrstimo c u preostale dve jednačine sistema koje smo izveli dobijamo:

$$4bd + 2c^2 = -\beta$$

$$4bd + 0 = -3 \Rightarrow bd = -\frac{3}{4}$$

i

$$4c(b^2 + d^2) = -\gamma.$$

Iz jednačine $0(b^2+d^2) = 0$ ne možemo ništa da dobijemo , pa ćemo pokušati preko treće jednačine sistema

$$c^4 - b^4 - d^4 - 4bdc^2 + 2b^2d^2 = \delta,$$

odnosno

$$-b^4 - d^4 + 2b^2d^2 = 2.$$

Nameštanjem dolazimo do uočivljivijeg rešenja

$$-b^4 - d^4 + 2b^2d^2 = 2$$

$$-(b^2 - d^2) + 4\frac{9}{16} = 2$$

$$-(b^2 - d^2) = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$(b^2 - d^2) = \frac{1}{4}$$

$$(b^2-d^2)-\frac{1}{4}=0$$
$$(b^2-d^2-\frac{1}{2})(b^2-d^2+\frac{1}{2})=0.$$

Opet svesno biramo realna rešenja, tj. $b^2-d^2-\frac{1}{2}=0$. Nameštamo na kvadrat binoma:

$$b^2-d^2-\frac{1}{2}=(b-d)^2+2bd-\frac{1}{2}\Leftrightarrow(b-d)^2+\frac{-3}{4}2=\frac{1}{2}$$
$$(b-d)^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\Rightarrow(b-d)^2=2.$$

Biram samo jedno rešenje $b-d=\sqrt{2}$. Imamo sistem koga čine dve jednačine : $bd=-\frac{3}{4}$ i $b-d=\sqrt{2}$. Kada uvrstimo b u prvu jednačinu, dobijamo jednačinu drugog stepena

$$4d^2+4\sqrt{2}d+3=0.$$

Detaljan postupak rešavanja dobijene jednačine je opisan u delu rešavanja kvadratnih jednačina. Odavde vidimo da je $\alpha=\sqrt{2}$ i $\beta=\frac{3}{4}$, a konstante cirkularne matrice su a i b.

$$-2a=\alpha\Rightarrow a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

i

$$a^2-b^2=\beta\Rightarrow b=\pm i\frac{1}{2}.$$

Odnosno, $d_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2}\Rightarrow b_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2}$,

i $d_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{1}{2}\Rightarrow b_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{1}{2}$.

Koristićemo d_1 i b_1

$$q(1)=b+c+d=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2}=i,$$
$$q(-1)=-b+c-d=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{1}{2}=-i,$$
$$q(i)=-c+i(b-d)=0+i(\sqrt{2})=i\sqrt{2},$$

i

$$q(-i)=-c-i(b-d)=0-i(\sqrt{2})=-i\sqrt{2}.$$

Dakle, polazni polinom

$$p(x)=x^4+3x^2+2=(x^2+2)(x^2+1),$$

a cirkularna matrica glasi :

$$C=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Drugi način: Sada ćemo i uz pomoć Ferarijevog metoda doći do rešenja zadatog polinoma. Ferarijev metod se koristi kod rešavanja jednačina četvrtog stepena. Pošto $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ predstavlja polinom četvrtog stepena, a naš u zadatku $x^4 + 3x^2 + 2$, zaključujemo da je: $a = 1, b = 0$, $c = 3, d = 0$ i $e = 2$.
Rešenja se dobijaju na sledeći način uz pomoć formule

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 8q}}{4},$$

gde su

$$p = \frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} + 4y_1}$$

i

$$q = y_1 \mp \sqrt{y_1^2 - \frac{4e}{a}}.$$

A y_1 predstavlja realno rešenje jednačine

$$y^3 - \frac{c}{a}y^2 + (\frac{bd}{a^2} - \frac{4e}{a}y) + (\frac{4ce}{a^2} - \frac{b^2e}{a^3} - \frac{d^2}{a^2}) = 0.$$

Prvo ćemo pronaći rešenja, pa ćemo dokazati metod. Kada se u prethodnu jednačinu uvrste koeficijenti, dobijamo

$$y^3 - 3y^2 - 8y + 24 = 0.$$

Ako se osvrnemo na prvi način rešavanja, primećujemo da kubike nisu iste. Rešenje u ovom slučaju je lako uočljivo, pa se nećemo zadržavati na rešavanju ove jednačine trećeg stepena uz pomoć cirkularnih matrica. Grupišemo:

$$y^2(y-3) - 8(y-3) = 0$$

$$(y^2 - 8)(y-3) = 0,$$

pa dalje sledi da je $y_1 = 3$. Sada je lako odrediti p i q.

$$p = 0 \pm \sqrt{-12 + 12} = 0$$

i

$$q = 3 \mp \sqrt{1} = 3 \mp 1.$$

Rešenja su:

-za $p = 0$ i $q = 2$ dobijamo $x_1 = \frac{0+\sqrt{-16}}{4} = i$ i $x_2 = \frac{0-\sqrt{-16}}{4} = -i$
-za $p = 0$ i $q = 4$ dobijamo $x_1 = \frac{0+\sqrt{-32}}{4} = i\sqrt{2}$ i $x_2 = \frac{0-\sqrt{-32}}{4} = -i\sqrt{2}$,
što se i poklapa sa našim rešenjem.

4.2 Prikaz Ferarijeve metode

Posmatramo polinom

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

odnosno

$$x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Grupišemo ga na sledeći način :

$$(x^2 + \frac{b}{2a}x)^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = 0.$$

Uvodimo novu promenljivu y tako da zadovolji prethodnu jednakost

$$(x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{y}{2})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} - y)x^2 + (\frac{d}{a} - \frac{b}{2a}y)x + (\frac{e}{a} - \frac{y^2}{4}) = 0.$$

Posmatramo jednakost koja važi za svako y. Biramo takvo y da je diskiminanta

$$(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} - y)x^2 + (\frac{d}{a} - \frac{b}{2a}y)x + (\frac{e}{a} - \frac{y^2}{4}),$$

jednaka nuli, što dalje dovodi do jednakosti

$$(\frac{d}{a} - \frac{b}{2a}y)^2 = 4(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} - y)(\frac{e}{a} - \frac{y^2}{4}).$$

Nakon sređivanja, dobijamo izraz

$$y^3 - \frac{c}{a}y^2 + (\frac{bd}{a^2} - 4\frac{e}{a})y + (4\frac{ce}{a^2} - \frac{b^2e}{a^3} - \frac{d^2}{a^2}) = 0.$$

Korišćenjem neke od metoda za rešavanje jednačina trećeg stepena, dobijamo jedno realno rešenje y_1.

Sa druge strane, kvadratni trinom $px^2 + qx + r$ možemo zapisati i kao

$$p((x + \frac{q}{2p})^2 - \frac{q^2 - 4pr}{4p^2}).$$

Za $D = 0$, dobijamo $q^2 = 4rp$, tj.

$$p((x + \frac{q}{2p})^2).$$

A pošto je $\frac{q}{2p} = \frac{q^2}{4p^2} = \frac{4pr}{4p^2} = \frac{r}{p}$, prethodni izraz možemo zapisati

$$p((x \pm \sqrt{\frac{r}{p}})^2).$$

Dalje, kada to primenimo u jednačini

$$(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}-y_1)x^2+(\frac{d}{a}-\frac{b}{2a}y_1)x+(\frac{e}{a}-\frac{y_1^2}{4}),$$

za $D=0$ dobijamo

$$(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}-y_1)(x\pm\frac{\sqrt{(\frac{e}{a}-\frac{y_1^2}{4})}}{\sqrt{(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}-y_1)}})^2.$$

Kada se vratimo u jednačinu i uvrstimo y_1 imamo

$$(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{y_1}{2})^2+(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}-y_1)x^2+(\frac{d}{a}-\frac{b}{2a}y_1)x+(\frac{e}{a}-\frac{{y_1}^2}{4})=0$$

što možemo zapisati na sledeći način:

$$(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{y_1}{2})^2=(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+y_1)(x\mp\frac{\sqrt{(\frac{y_1^2}{4}-\frac{e}{a})}}{\sqrt{(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+y_1)}})^2.$$

Kada korenujemo levu i desnu stranu jednakosti dobijamo

$$(x^2+\frac{b}{2a}x+\frac{y_1}{2})=\pm x\sqrt{(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}+y_1)}\mp\sqrt{\frac{y_1^2}{4}-\frac{e}{a}},$$

nakon svodjenja na kanonski oblik, imamo

$$x^2+(\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}+4y_1})x+\frac{1}{2}(y_1\mp\sqrt{y_1^2-\frac{4e}{a}})=0.$$

Ako je

$$p=\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}+4y_1}$$

i

$$q=y_1\mp\sqrt{y_1^2-\frac{4e}{a}},$$

jednačinu možemo zapisati

$$x^2+\frac{p}{2}x+\frac{q}{2}=0.$$

Uz pomoć kvadratne formule, za $a=1$, $b=\frac{p}{2}$ i $c=\frac{q}{2}$ dobijamo rešenja:

$$\begin{aligned}x&=\frac{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-4\frac{q}{2}}}{2}\\&=\frac{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{p^2-8q}}{2}\\&=\frac{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{p^2-8q}}{4}.\end{aligned}$$

Primer 7. *Sledeći primer sadrži četiri kompleksna rešenja*

$$p(y) = y^4 - 2y^3 + 11y^2 - 2y + 10.$$

Uvodimo smenu kako bi nestao treći stepen: $y - \frac{1}{2} = t$,odnosno $y = t + \frac{1}{2}$.

$$(t + \frac{1}{2})((t + \frac{1}{2})^3 - 2(t + \frac{1}{2})^2 + 11(t + \frac{1}{2}) - 2) + 10 =$$

$$(t + \frac{1}{2})(t^3 + \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{4}t + \frac{1}{8} - 2t^2 - 2t - \frac{1}{2} + 11t + \frac{11}{2} - 2) + 10 =$$

$$(t + \frac{1}{2})(t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{39}{4}t + \frac{25}{8}) + 10 =$$

$$t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{39}{4}t^2 + \frac{25}{8}t + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{39}{8}t + \frac{25}{16} + 10 =$$

$$t^4 + \frac{19}{2}t^2 + 8t + \frac{185}{16}.$$

Zaključujemo $\beta = \frac{19}{2}$, $\gamma = 8$ i $\delta = \frac{185}{16}$.

Koristimo u daljem toku rešavanja jednačinu: $c^6 + \frac{\beta}{2}c^4 + (\frac{\beta^2}{16} - \frac{\delta}{4})c^2 - \frac{\gamma^2}{64} = 0$. Dakle,

$$c^6 + \frac{19}{4}c^4 + (\frac{19^2}{16 \cdot 4} - \frac{185}{16 \cdot 4})c^2 - \frac{64}{64} = 0$$

$$c^6 + \frac{19}{4}c^4 + \frac{11}{4}c^2 - 1 = 0.$$

Uvodimo smenu $c^2 = x$ i tako prethodnu jednačinu svodimo na kubnu

$$x^3 + \frac{19}{4}x^2 + \frac{11}{4}t - 1 = 0.$$

Ponovo uvodimo smenu $x + \frac{19}{12} = m \Rightarrow x = m - \frac{19}{12}$, kako bi nestao drugi stepen. Dakle,

$$(m - \frac{19}{12})((m - \frac{19}{12})^2 + \frac{19}{4}(m - \frac{19}{12}) + \frac{11}{4}) - 1$$

$$(m - \frac{19}{12})(m^2 - \frac{19}{6}m + \frac{19^2}{12^2} + \frac{19}{4}m - \frac{19^2}{12 \cdot 4} + \frac{11}{4}) - 1$$

$$(m - \frac{19}{12})(m^2 + \frac{19}{12}m - \frac{326}{144}) - 1$$

$$m^3 + \frac{19}{12}m^2 - \frac{326}{144}m - \frac{19}{12}m^2 - \frac{19^2}{144}m + \frac{19 \cdot 326}{144 \cdot 12} - 1$$

$$m^3 - \frac{229}{48}m + \frac{2233}{864}.$$

Dobijamo nove konstante : $\beta_1 = -\frac{229}{48}$ i $\gamma_1 = \frac{2233}{864}$. Dalje, do rešenja dolazimo uz pomoć dobro poznate metode.

Pošto je

$$b^3 + c^3 = -\frac{2233}{864}$$

i

$$b^3c^3 = \frac{229^3}{48^3 \cdot 27},$$

pretpostavimo da je $b^3 = m + \sqrt{n}$ i $c^3 = m - \sqrt{n}$. Kada ih saberemo, dobijamo

$$b^3 + c^3 = 2m = -\frac{2233}{864} \Rightarrow m = -\frac{2233}{1728}.$$

Kada ih pomnožimo, dobijamo razliku kvadrata $b^3c^3 = m^2 - n$, te sledi

$$n = m^2 - b^3c^3 = (\frac{2233}{1728})^2 - \frac{229^3}{48^3 \cdot 27} = \frac{4986289}{2985984} - \frac{12008989}{2985984} = \frac{-7022700}{2985984}.$$

Dobijamo da je

$$b^3 = -\frac{2233}{1728} + \sqrt{\frac{-7022700}{2985984}} = -\frac{2233}{1728} + \sqrt{\frac{i^2 \cdot 100 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 17}{48 \cdot 48 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 9}} =$$

$$-\frac{2233}{1728} + \frac{i \cdot 10 \cdot 9 \cdot 17\sqrt{3}}{48 \cdot 9 \cdot 4} = \frac{-2233 + 1530i\sqrt{3}}{1728}.$$

Analogno,

$$c^3 = \frac{-2233 - 1530i\sqrt{3}}{1728}.$$

Tražimo kub binoma koji će za rešenje dati $-2233 + 1530i\sqrt{3}$.

$$(-2233 + 1530i\sqrt{3}) = (p + i\sqrt{3})^3$$

Dobijamo,

$$-2233 + 1530i\sqrt{3} = p^3 + 3ip^2q\sqrt{3} - 9pq^2 - 3iq^3\sqrt{3}.$$

Izjednačavanjem sa levom stranom izraza dobijamo sistem od dve jednačine: $p^3 - 9pq^2 = -2233$ i $3p^2q - 3q^3 = 1530$. Jednakost važi za $p = 11$ i $q = 6$. Dobijamo da je

$$b = \frac{11 + 6i\sqrt{3}}{12}$$

i da je

$$c = \frac{11 - 6i\sqrt{3}}{12}.$$

Znamo da je

$$q(1) = m = b + c = \frac{11 + 6i\sqrt{3}}{12} + \frac{11 - 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{22}{12}.$$

*Napomena, i q_2 i q_3 bi nas odveli do rešenja, tj. do konstanti koje čine cirkularnu matricu, ali svesno biramo samo q_1 jer je najlakše za dalji rad.

Vratimo smenu:

$$x = m - \frac{19}{12} = \frac{22}{12} - \frac{19}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Pošto je $c^2 = \frac{1}{4}$ dobijamo dve situacije, ali biramo $c = \frac{1}{2}$. Uvrstimo c u preostale dve jednačine sistema koje smo izveli. Dakle:

$$4bd + 2c^2 = -\beta$$

$$4bd + \frac{1}{2} = -\frac{19}{2} \Rightarrow 4bd = -10 \Rightarrow 2bd = -5$$

i

$$4c(b^2 + d^2) = -\gamma$$

$$2(b^2 + d^2) = -8 \Rightarrow b^2 + d^2 = -4.$$

Kada saberemo $b^2 + d^2 = -4$ i $2bd = -5$, dobijamo da je $(b+d)^2 = -9 \Rightarrow b + d = 3i$, a kada oduzmemo
$b^2 + d^2 = -4$ i $2bd = -5$, dobijamo da je $(b-d)^2 = 1 \Rightarrow b - d = 1$.

$$q(1) = b + c + d = 3i + \frac{1}{2}$$

Posle prve uvedene smene $y = 3i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3i + 1$.

$$q(-1) = -b + c - d = -3i + \frac{1}{2}$$

Posle prve uvedene smene $y = -3i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -3i + 1$.

$$q(i) = -c + i(b - d) = -\frac{1}{2} + i(1) = -\frac{1}{2} + i$$

Posle prve uvedene smene $y = -\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} = i$.

$$q(-i) = -c - i(b - d) = -\frac{1}{2} - i(1) = -\frac{1}{2} - i$$

Posle prve uvedene smene $y = -\frac{1}{2} - i + \frac{1}{2} = -i$.

Polazni polinom je

$$p(y) = y^4 - 2y^3 + 11y^2 - 2y + 10 = (y - (1+3i))(y - (1-3i))(y - i)(y + i),$$

a cirkularna matrica glasi

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3i+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3i-1}{2} \\ \frac{3i-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3i+1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3i-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3i+1}{2} \\ \frac{3i+1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3i-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

5 Primena

Značajno olakšava posao nastavnika prilikom sastavljanje zadataka za proveru znanja, jer zadavanjem cirkularne matrice dobijamo polinom, kao i njegova rešenja. U nastavku je prikazano nekoliko primera.

Primer 1. Neka je zadata cirkularna matrica

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredićemo rešenja polinoma kojem ova cirkularna matrica odgovara, kao i sam polinom. Pridruženi polinom zadate matrice je $q(t) = a + bt = 2 + 4\sqrt{2}t$, a rešenja su:

$$q(1) = 2 + 4\sqrt{2}t = 2 + 4\sqrt{2}$$

i

$$q(-1) = 2 - 4\sqrt{2}t = 2 - 4\sqrt{2}.$$

Dakle, polinom je

$$p(x) = (x - (2 + 4\sqrt{2}))(x - (2 - 4\sqrt{2})) =$$

$$((x-2) - 4\sqrt{2})((x-2) + 4\sqrt{2}) = (x-2)^2 - (4\sqrt{2})^2 = x^2 - 4x - 28.$$

Primer 2. Neka je zadata cirkularna matrica

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pridruženi polinom zadate matrice je $q(t) = a + bt + ct^2 = 2 + 3t + t^2$, pa su rešenja:

$$q(1) = 2 + 3 + 1 = 6,$$

$$q(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 3(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = i\sqrt{3}$$

i

$$q(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 + 3(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = -i\sqrt{3}.$$

A polinom glasi:

$$p(x) = (x-6)(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3}) = x^3 - 6x^2 + 3x - 18.$$

Primer 3. Neka je zadata cirkularna matrica

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

te je pridruženi polinom $q(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 = 2 + 3t + 1t^2$, a rešenja su :

$$q(1) = a + b + c + d = 2 + 3 + 1 + 0 = 6,$$

$$q(-1) = a - b + c - d = 2 - 3 + 1 - 0 = 0,$$

$$q(i) = a - c + i(b - d) = 2 - 1 + i(3 - 0) = 1 + 3i$$

i

$$q(-i) = a - c - i(b - d) = 2 - 1 - i(3 - 0) = 1 - 3i.$$

U pitanju je polinom,

$$p(x) = (x - 6)x(x - 1 - 3i)(x - 1 + 3i) = (x^2 - 6x)((x - 1)^2 - 9i^2)$$

$$= (x^2 - 6x)(x^2 - 2x + 1 + 9) = (x^2 - 6x)(x^2 - 2x + 10) =$$

$$= x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 6x^3 + 12x^2 - 60x = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 60x.$$

U ovom primeru ćemo odrediti karakteristični polinom zadate matrice kako bi uvideli da je jednak našem polinomu.

$$det(xI - C) = \begin{vmatrix} x-2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & x-2 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & x-2 & -3 \\ -3 & -1 & 0 & x-2 \end{vmatrix} =$$

$$(x-2)[(x-2)[(x-2)^2]+3[-3]-1[(x-2)]]+3[3[-(x-2)-9]-1[3(x-2)]]-1[-(x-2)[-(x-2)-9]-1] =$$

$$(x-2)[(x-2)^3-9-(x-2)]+3[-3(x-2)-27-3(x-2)]-[(x-2)^2+9(x-2)-1] =$$

$$(x-2)^4 - 9(x-2) - (x-2)^2 - 18(x-2) - 81 - (x-2)^2 - 9(x-2) + 1 =$$

$$(x-2)^4-2(x-2)^2-36(x-2)-80 = x^4-8x^3+24x^2-32x+16-2x^2+8x-8-36x+72-80 =$$

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 60x.$$

6 Zaključak

Zaključak je da je metod primenjiv, jednostavan za pamćenje i interesantan, pogotovo za rad u nastavi, jer je dovoljno zadati koeficijente cirkularne matrice i na osnovu njih odrediti korene polinoma, kao i sam polinom. Još jedna dobra strana ovog pristupa je što uočavamo i koristimo svojstva cirkularnih matrica. Jedno od važnijih svojstava je da za cirkularu matricu $C = (0, 1, 0, 0, .., 0)$ reda n važi da je $C^n = I$, a njene sopstvene vrednosti su rešenja $t^n = 1$, te za cirkularnu matricu $C_{c_0,c_1,c_2,...,c_{n-1}} = c_0 I + c_1 C + c_2 C^2 + ... + c_{n-1} C^{n-1}$ važi da su njene sopstvena vrednosti $q(t) = c_0 + c_1 t + ... + c_{n-1} t^{n-1}$.

Ovaj metod rešavanja jednačina drugog, trećeg i četvrtog stepena nije opisan u udžbenicima matematike srednjih škola, ali bih ga preporučila za rad sa nadarenom decom na dodatnoj nastavi, kao i nastavnicima u procesu osmišljavanja provere znanja.

Dobra strana ove metode je što njenom primenom sigurno pronalazimo rešenja zadatog polinoma.

Literatura

[1] Polynomial Equations and Circulant Matrices, Dan Kalman and James E. White, *The American Mathematical Monthly* Vol. 108, No. 9 (Nov., 2001), pp. 821-840

[2] Biljana M. Radičić "Prilog teoriji k-cirkularnih matrica", doktorska disertacija, Beograd 2016

[3] https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Ferrarimethod, pristupljeno 19.01.2019

[4] https://www.proofwiki.org/wiki/Ferrari, pristupljeno 19.01.2019