Универзитет у Београду
Математички факултет

МАСТЕР РАД

СВОЈСТВО ФИКСНЕ ТАЧКЕ ЗА ГРАСМАНОВЕ МНОГОСТРУКОСТИ

Студент: Катарина Ћојбашић

Ментор: др Бранислав Првуловић

Београд
Јун 2019.

Садржај:

Увод

Питање постојања фиксне тачке при сваком непрекидном пресликавању неког простора је веома значајно и геометријски интересантно питање. Неки простори имају особину да ће и после произвољне ротације, ширења или скупљања тачака унутар простора, увек постојати бар једна која је непомерена. Најважнији резултат на ову тему дао је Брауер, који је показао да диск било које димензије има својство фиксне тачке. За Грасманове многострукости, ово питање је посебно било актуелно седамдесетих и осамдесетих година двадесетог века. У овом раду су изложени неки главни резултати добијени на ову тему до сада.

У првом поглављу су уведени основни појмови који су потребни. Уведен је појам Лефшецовог броја и без доказа је наведена Лефшецова теорема о фиксној тачки. Она ће нам бити главно средство за испитивање својства фиксне тачке за неки простор. Након тога је наведена дефиниција Грасманових многострукости, као и опис њихове кохомологије.

У другом поглављу је изложен одговор на питање за специјалан случај Грасманових многострукости, а то су пројективни простори. Ово питање је потпуно решено и овде су изложени резултати за реалне, комплексне и кватернионске пројективне просторе. За реалне и комплексне пројективне просторе, $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ и $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ је показано да имају својство фиксне тачке ако и само ако је n парно. Ово је доказано Лефшецовом теоремом. За кватернионски пројективни простор $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ је показано да има својство фиксне тачке ако и само ако је $n \neq 1$. Овде су поред Лефшецове теореме коришћени и Стинродови степени.

У трећем поглављу је представљено шта је до сада урађено за Грасманове многострукости, као и неке хипотезе за оно што још увек није доказано. За реалне Грасманове многострукости $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ је показано да ако има својство фиксне тачке, онда је $n \neq k$ и nk је парно. Супротни смер није доказан, али се претпоставља да је тачан. Доказан је специјалан случај $k = 2$, $n \equiv 0, 1 \pmod 4$ и тај доказ је овде наведен. За комплексне Грасманове многострукости $G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$ је показано исто то, да ако имају својство фиксне тачке онда је $n \neq k$ и nk је парно. Затим су наведене две хипотезе. Прва је претпоставка о томе како изгледају ендоморфизми кохомолошког прстена $H^*\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)$, тј. скуп $\mathrm{End}\left(H^*\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right)$, а друга је да важи обрат горе наведеног тврђења: ако је $n \neq k$ и nk парно, онда $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ и $G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$ имају својство фиксне тачке. Показано је да ако важи прва хипотеза важи и друга, а затим су без доказа наведени специјални случајеви када је прва хипотеза доказана. За кватернионске Грасманове многострукости $G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$ је показано да ако имају својство фиксне тачке, онда је $n \neq k$. Затим су наведене хипотезе аналогне комплексном случају и показано да из прве следи друга и наведени су случајеви када је доказана прва хипотеза.

1 Лефшецова теорема и Грасманове многострукости

1.1 Лефшецова теорема о фиксној тачки

Лефшецова теорема је једно од најважнијих средстава за утврђивање да ли неки простор има фиксну тачку. У овом поглављу ћемо прво увести дефиницију трага пресликавања која је потребна за формулисање ове теореме, а на крају ћемо је и формулисати без доказа.

Дефиниција 1.1 *Нека је G слободна, коначно генерисана Абелова група и нека је $\phi \in End(G)$. Тада G има коначну базу и пресликавање ϕ можемо представити у тој бази помоћу матрице A. Траг пресликавања ϕ се дефинише као*

$$\mathrm{Tr}\,(\phi, G) = \mathrm{Tr}(\phi) := \mathrm{Tr}(A).$$

Ова дефиниција не зависи од избора базе простора G, јер су матрице пресликавања у разним базама сличне, па имају исти траг. Наредни једноставни пример ћемо често користити касније у раду.

Пример 1.2 *Нека је X путно повезан тополошки простор, на коме је дефинисано непрекидно пресликавање $f : X \to X$. Тада f у нултој хомологији, односно кохомологији, индукује идентичко пресликавање, па зато важи*

$$\mathrm{Tr}\,(f_*, H_0(X)) = 1, \quad \mathrm{Tr}\,\big(f^*, H^0(X;\mathbb{Z})\big) = 1,$$

јер је $H_0(X) \cong H^0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Дефиниција трага пресликавања се може проширити и на групе које нису слободне тако што се торзиони део занемари, али није могуће занемарити услов да група мора бити коначно генерисана.

Дефиниција 1.3 *Нека је G коначно генерисана Абелова група и нека је $\phi \in$ $\mathrm{End}(G)$. Посматрајмо торзиону подгрупу групе G*

$$T := \{g \in G \mid (\exists n \in \mathbb{N})\, ng = 0\}.$$

Добро је дефинисано пресликавање

$$\overline{\phi} : G/T \to G/T$$

$$\overline{\phi}\,([g]) = [\phi(g)].$$

G/T је слободна, коначно генерисана Абелова група, па можемо да дефинишемо траг пресликавања ϕ као

$$\mathrm{Tr}(\phi, G) = \mathrm{Tr}(\phi) := \mathrm{Tr}(\overline{\phi})$$

Још једна потребна дефиниција пре теоремене је дефиниција Лефшецовог броја.

Дефиниција 1.4 *Нека је X тополошки простор такав да је за свако $i \in \mathbb{N}_0$ $H_i(X)$ коначно генерисана група и $H_i(X) = 0$, почевши од неког природног броја $j \in \mathbb{N}$. Тада за непрекидно пресликавање $f : X \to X$ дефинишемо Лефшецов број L на следећи начин*

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_*, H_i(X)\right).$$

Следећи примери ће се такође користити у раду.

Пример 1.5 *Нека је X тополошки простор, а $\mathbb{1}_X$ идентичко пресликавање на X. Тада је $(\mathbb{1}_X)_* = \mathbb{1}_{H_i(X)}$ па је Лефшецов број*

$$L(\mathbb{1}_X) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(\mathbb{1}_{H_i(X)}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{rank}\left(H_i(X)\right) = \chi(X),$$

где је $\chi(X)$ Ојлерова карактеристика X.

Пример 1.6 *Нека је X контрактибилан тополошки простор и $f : X \to X$ било које непрекидно пресликавање. Тада је*

$$L(f) = \mathrm{Tr}(f_*, H_0(X)) = 1,$$

јер су све хомолошке групе сем $H_0(X)$ тривијалне.

Пример 1.7 *Нека је $f : S^n \to S^n$ непрекидно пресликавање. Тада је*

$$L(f) = 1 + (-1)^n \mathrm{Tr}(f_*, H_n(S^n)) = 1 + (-1)^n \deg(f).$$

Теорема 1.8 (Лефшец) *Нека је X компактан тополошки простор који има структуру многострукости или структуру CW-комплекса и нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање. Тада важи*

$$L(f) \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in X)\ f(x) = x.$$

Односно, ако је Лефшецов број од f различит од нуле, онда f има фиксну тачку.

Аналогне дефиниције и теорема постоје и за хомологију и кохомологију са коефицијентима у неком главном домену који не мора да буде $\mathbb{Z}$.

Дефиниција 1.9 *Нека је R главни домен, X тополошки простор такав да су $H_i(X;R)$ коначно генерисани R-модули за све $i \in \mathbb{N}_0$ и $H_j(X;R) = 0$ почевши од неког природног броја $j \in \mathbb{N}_0$. Тада за непрекидно пресликавање $f : X \to X$ дефинишемо Лефшецов број L_R на следећи начин*

$$L_R(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_*, H_i(X;R)\right).$$

Може се показати да је

$$L_R(f) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Tr}\left(f^*, H^i(X;R)\right).$$

Теорема 1.10 (Лефшец) *Нека је X компактан тополошки простор који има структуру многострукости или структуру CW-комплекса и нека је $f : X \to X$ непрекидно пресликавање, а R главни домен. Тада важи*

$$L_R(f) \neq 0 \Rightarrow (\exists x \in X)\, f(x) = x.$$

1.2 Грасманове многострукости

У овом поглављу су дефинисане Грасманове многострукости и њихове основне тополошке особине које су потребне у овом раду.

Дефиниција 1.11 *Нека је $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, где је $\mathbb{R}$ скуп реалних, $\mathbb{C}$ скуп комплексних, а $\mathbb{H}$ скуп кватернионских бројева. Штифелова многострукост $V_k(\mathbb{F}^{n+k})$ је скуп свих ортнормираних k-торки вектора у $\mathbb{F}^{n+k}$, где су $n, k \in \mathbb{N}$.*

Пример 1.12 $V_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = S^n$.
Заиста, ако у простору $\mathbb{R}^{n+1}$ посматрамо ортонормиране, односно јединичне векторе, добијамо скуп који чини сферу S^n.

Дефиниција 1.13 *Нека је $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Грасманова многострукост $G_k\left(\mathbb{F}^{n+k}\right)$ је количнички простор који се добија тако што се у $V_k\left(\mathbb{F}^{n+k}\right)$ поистовећују све k-торке вектора који разапињу исту k-раван, где су $k, n \in \mathbb{N}$.*

Познат пример Грасманових многострукости су пројективни простори, који ће бити посебно анализирани у другом поглављу.

$$H^*\left(G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right); \mathbb{Z}_2\right) = \mathbb{Z}_2[w_1, \ldots, w_k]/I_{k,n}$$

где су $w_i \in H^i\left(G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right);\mathbb{Z}_2\right)$, $i \in \{1,\ldots,k\}$, Штифел-Витнијеве класе канонског раслојења над $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$, а $I_{k,n} = (\overline{w}_{n+1},\ldots,\overline{w}_{n+k})$ идеал генерисан са $\overline{w}_{n+1},\ldots,\overline{w}_{n+k}$, где су $\overline{w}_i$ полиноми који се могу добити из једнакости

$$w\overline{w} = (1 + w_1 + \cdots + w_k)\,(1 + \overline{w}_1 + \overline{w}_2 + \cdots) = 1.$$

Класа $w = 1 + w_1 + \cdots + w_k$ се назива тотална Штифел-Витнијева класа. Може се израчунати да за $1 \le i \le k$ важи

$$\overline{w}_{n+i} = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+i} \frac{(a_1+\cdots+a_k)!}{a_1!\cdots a_k!} w_1^{a_1}\cdots w_k^{a_k},$$

где су $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{N}_0$.

За комплексне Грасманове многострукости важи

$$H^*\left(G_k(\mathbb{C}^{n+k});\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]/I_{k,n},$$

где су $c_i \in H^{2i}\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)$, $i \in \{1,\ldots,k\}$, Чернове класе канонског раслојења над $G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$, а $I_{k,n} = (\overline{c}_{n+1},\ldots,\overline{c}_{n+k})$ идеал генерисан са $\overline{c}_{n+1},\ldots,\overline{c}_{n+k}$, где су $\overline{c}_i$ полиноми који се могу добити из једнакости

$$c\overline{c} = (1 + c_1 + \cdots + c_k)\,(1 + \overline{c}_1 + \overline{c}_2 + \cdots) = 1$$

Класа $c = 1 + c_1 + \cdots + c_k$ се назива тотална Чернова класа. Може се израчунати да за $1 \le i \le k$ важи

$$\overline{c}_{n+i} = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+i} (-1)^{a_1+\cdots+a_k} \frac{(a_1+\cdots+a_k)!}{a_1!\cdots a_k!} c_1^{a_1}\cdots c_k^{a_k},$$

где су $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{N}_0$.

Сличан опис важи за кватернионски случај, односно

$$H^*\left(G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_k]/I_{k,n},$$

$c_i \in H^{4i}\left(G_k(\mathbb{H}^{n+k});\mathbb{Z}\right)$, $i \in \{1,\ldots,k\}$, а идеал $I_{k,n} = (\overline{c}_{n+1},\ldots,\overline{c}_{n+k})$ је генерисан са $\overline{c}_{n+1},\ldots,\overline{c}_{n+k}$, где су $\overline{c}_i$ полиноми који се могу добити из једнакости

$$c\overline{c} = (1 + c_1 + \cdots + c_k)(1 + \overline{c}_1 + \overline{c}_2 + \cdots) = 1.$$

Такође важи за $1 \le i \le k$,

$$\overline{c}_{n+i} = \sum_{a_1+2a_2+\cdots+ka_k=n+i} (-1)^{a_1+\cdots+a_k} \frac{(a_1+\cdots+a_k)!}{a_1!\cdots a_k!} c_1^{a_1}\cdots c_k^{a_k},$$

где су $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{N}_0$.

2 Својство фиксне тачке за пројективне просторе

2.1 Реални пројективни простор

Дефиниција 2.1 *Реални пројективни простор се дефинише за све природне бројеве на следећи начин*

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{x\sim\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}.$$

Лако се види да важи
$$G_1\left(\mathbb{R}^{n+1}\right) = \mathbb{R}\mathrm{P}^n.$$
Јединични вектори у $\mathbb{R}^{n+1}$ чине сферу $S^n = V_1(\mathbb{R}^{n+1})$. Важи да је

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{x\sim\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} \approx S^n /_{x\sim\lambda x, \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}},$$

јер је сфера компактан скуп који сече све класе еквиваленције и $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ је Хауздорфов простор.

Следећа теорема потпуно описује својство фиксне тачке на овом простору.

Теорема 2.2 $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ *има својство фиксне тачке ако и само ако је n паран број.*

Доказ: ($\Leftarrow$) Нека је $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Тада су ненула хомолошке групе простора $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}$

$$H_i\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & i \in \{1, 3, 5, ..., 2k-1\}. \end{cases}$$

Одавде очигледно важи да је Лефшецов број било ког непрекидног пресликавања $f : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}$ једнак

$$L(f) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \mathrm{Tr}\left(f_*, H_i\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}\right)\right) = \mathrm{Tr}\left(f_*, H_0\left(\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}\right)\right) = 1 \neq 0,$$

јер су све остале хомолошке групе торзионе. Одавде, на основу Лефшецове теореме имамо да f има фиксну тачку, односно да $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k}$ има својство фиксне тачке.
($\Rightarrow$) Доказаћемо да за $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, простор $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k-1}$ нема својство фиксне тачке. За то је довољно да пронађемо једно непрекидно пресликавање које нема фиксну тачку.

Посматрајмо пресликавање $f : S^{2k-1} \to S^{2k-1}$ дато са

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}) := (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Ово пресликавање је добро дефинисано и непрекидно. Такође је и непарно јер

$$f(-x) = f(-x_1, -x_2, \ldots, -x_{2k-1}, -x_{2k}) = (x_2, -x_1, \ldots, x_{2k}, -x_{2k-1}) = -f(x).$$

Зато оно може да се факторише кроз $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2k-1}$. Нека је

$$\pi : S^{2k-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2k-1}$$

природна пројекција. Дефинишимо пресликавање:

$$\overline{f} : \mathbb{R}\mathrm{P}^{2k-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2k-1},$$

тако да комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^n \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^n \arrow[r, "\overline{f}"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^n \end{tikzcd}$$

односно, $\pi \circ f = \overline{f} \circ \pi$. Ово пресликавање је непрекидно јер је π количничко. За f такође важи

$$\begin{aligned} \langle x, f(x) \rangle &= \langle (x_1, x_2, \ldots, x_{2k-1}, x_{2k}), (-x_2, x_1, \ldots, -x_{2k}, x_{2k-1}) \rangle \\ &= -x_1 x_2 + x_2 x_1 + \ldots - x_{2k-1} x_{2k} + x_{2k} x_{2k-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

односно вектори се сликају у себи ортогоналне. Одавде видимо да f нема фиксну тачку, а такође ни $\overline{f}$. $\square$

2.2 Комплексни пројективни простор

Дефиниција 2.3 *Комплексни пројективни простор се дефинише за све природне бројеве на следећи начин*

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}.$$

Лако се види да важи

$$G_1\left(\mathbb{C}^{n+1}\right) = \mathbb{C}\mathrm{P}^n.$$

Јединични вектори у $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ чине сферу $S^{2n+1} = V_1(\mathbb{R}^{2n+2}) = V_1(\mathbb{C}^{n+1})$. Важи да је

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} \approx S^{2n+1} /_{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}},$$

јер је сфера компактан скуп који сече све класе еквиваленције и $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ је Хауздорфов простор.

За комплексне пројективне просторе важи иста теорема као за реалне.

Теорема 2.4 $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ *има својство фиксне тачке ако и само ако је* $n \in \mathbb{N}$ *паран број.*

Доказ: $(\Leftarrow)$ Нека је $n = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тада је кохомолошки прстен простора $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k}$

$$H^*\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k};\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[c]/_{(c^{2k+1})},\ c \in H^2\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k};\mathbb{Z}\right).$$

Кохомолошке групе су:

$$H^0\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k};\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}\langle 1\rangle,$$
$$H^{2i}\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k};\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}\langle c^i\rangle,\ i \in \{1,\dots,2k\},$$

а остале су тривијалне.

Нека је $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k}$ неко непрекидно пресликавање. Тада је индуковано пресликавање у кохомологији f^* цело одређено на генератору друге кохомологије јер је оно ендоморфизам прстена. Значи, важи:

$$f^*(c) = mc,$$

за неко $m \in \mathbb{Z}$, па је

$$f^*\left(c^i\right) = \left(f^*(c)\right)^i = m^i c^i,\ \ i \in \{1, 2, \dots, 2k\}.$$

Сада можемо да израчунамо Лефшецов број пресликавања f.

$$\begin{aligned}
L(f) &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \mathrm{Tr}\left(f^*, H^i\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k}\right)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{2k}\mathrm{Tr}\left(f^*, H^{2i}\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k}\right)\right)\\
&= 1 + m + m^2 + \ldots + m^{2k} = \begin{cases} 2k+1, & m = 1\\ \frac{m^{2k+1}-1}{m-1}, & m \in \mathbb{Z}\setminus\{1\}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Одавде, $L(f) \neq 0$, па на основу Лефшецове теореме имамо да f има фиксну тачку, односно да $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k}$ има својство фиксне тачке.

$(\Rightarrow)$ Доказаћемо да за $n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}$, простор $\mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1}$ нема својство фиксне тачке. Посматрајмо пресликавање: $f : \mathbb{C}^{2k}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}^{2k}\setminus\{0\}$ дефинисано са

$$f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_{2k-1}, z_{2k}) := \left(-\overline{z}_2, \overline{z}_1, \dots, -\overline{z}_{2k}, \overline{z}_{2k-1}\right).$$

Ово пресликавање је добро дефинисано и непрекидно. Нека је

$$\pi : \mathbb{C}^{2k}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1}$$

природна пројекција. Дефинишимо пресликавање

$$\overline{f} : \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{2k-1},$$

тако да комутира дијаграм

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{2k} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^{2k} \setminus \{0\} \\ \pi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\ \mathbb{C}\mathrm{P}^n & \xrightarrow{\overline{f}} & \mathbb{C}\mathrm{P}^n \end{array}$$

односно, $\pi \circ f = \overline{f} \circ \pi$. Лако се види да се пресликавање $\overline{f}$ може овако дефинисати јер за $\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(\lambda z) = \left(-\overline{\lambda z}_2, \overline{\lambda z}_1, \ldots, -\overline{\lambda z}_{2k}, \overline{\lambda z}_{2k-1}\right) = \overline{\lambda} f(z).$$

Такође је и непрекидно јер је π количничко.

За f важи:

$$\begin{aligned} \langle z, f(z) \rangle &= \langle (z_1, z_2, \ldots, z_{2k-1}, z_{2k}), \overline{(-\overline{z}_2, \overline{z}_1, \ldots, -\overline{z}_{2k}, \overline{z}_{2k-1})} \rangle \\ &= \langle (z_1, z_2, \ldots, z_{2k-1}, z_{2k}), (-z_2, z_1, \ldots, -z_{2k}, z_{2k-1}) \rangle \\ &= -z_1 z_2 + z_2 z_1 + \ldots - z_{2k-1} z_{2k} + z_{2k} z_{2k-1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

односно вектори се сликају у себи ортогоналне. Одавде видимо да f нема фиксну тачку, а такође ни $\overline{f}$, јер ортогонални вектори не припадају истој класи, у истој класи су линеарно зависни вектори. $\square$

2.3 Кватернионски пројективни простор

Дефиниција 2.5 *Кватернионски пројективни простор се дефинише за све природне бројеве на следећи начин*

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^n := \left(\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}}.$$

Лако се види да важи

$$G_1\left(\mathbb{H}^{n+1}\right) = \mathbb{H}\mathrm{P}^n.$$

Јединични вектори у $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^{4n+4}$ чине сферу $S^{4n+3} = V_1\left(\mathbb{R}^{4n+4}\right) = V_1\left(\mathbb{H}^{n+1}\right)$. Важи да је

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^n = \left(\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}\right) /_{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}} \approx S^{4n+3} /_{x \sim \lambda x, \lambda \in \mathbb{H} \setminus \{0\}},$$

јер је сфера компактан скуп који сече све класе еквиваленције и $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ је Хауздорфов простор.

Теорема 2.6 $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ *има својство фиксне тачке ако и само ако је* $n \neq 1$.

Доказ: Кохомолошки прстен простора $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ има облик:

$$H^*\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}[c]/_{(c^{n+1})},\ c\in H^4\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}\right).$$

Кохомолошке групе су:

$$H^0\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}\langle 1\rangle,$$

$$H^{4i}\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}\right)=\mathbb{Z}\langle c^i\rangle,\ i\in\{1,\ldots,n\},$$

а остале су тривијалне.

Нека је $f:\mathbb{H}\mathrm{P}^n\to\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ неко непрекидно пресликавање. Тада је индуковано пресликавање у кохомологији f^* цело одређено на генератору четврте кохомологије јер је оно ендоморфизам прстена. Значи, важи:

$$f^*(c)=mc,\ m\in\mathbb{Z},$$

$$f^*\left(c^i\right)=\left(f^*(c)\right)^i=m^ic^i,\ i\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

Сада можемо да израчунамо Лефшецов број пресликавања f.

$$\begin{aligned}L(f)&=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\mathrm{Tr}\left(f^*,H^i\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^n\right)\right)\\&=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{Tr}\left(f^*,H^{4i}\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^n\right)\right)\\&=1+m+m^2+\ldots+m^n=\begin{cases}n+1, & m=1\\ \frac{m^{n+1}-1}{m-1}, & m\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}.\end{cases}\end{aligned}$$

Када је $n=2k$, $k\in\mathbb{N}$, слично као и у комплексном случају, $L(f)\neq 0$, па зато за све природне бројеве k, $\mathbb{H}P^{2k}$ има својство фиксне тачке.

За $n=1$ важи $\mathbb{H}\mathrm{P}^1\approx S^4$. Пресликавање $f:S^4\to S^4$ дато са

$$f(x)=-x$$

очигледно нема фиксну тачку, па $\mathbb{H}\mathrm{P}^1$ нема својство фиксне тачке.

Остали су још случајеви $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, за које ћемо доказати да $\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1}$ има својство фиксне тачке, чиме ће бити доказана теорема.

За непрекидно пресликавање $f:\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1}\to\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1}$ важи да је $L(f)=0$ једино у случају $m=-1$, на основу горње једнакости. Одавде не можемо да закључимо да $\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1}$ има својство фиксне тачке, јер је можда за нека пресликавања $L(f)=0$. Показаћемо да таквих пресликавања заправо нема, односно да непрекидно пресликавање $\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1}$ никада не индукује ендоморфизам чији је Лефшецов број нула, тј. за које је

$$f^*(c)=-c,\ c\in H^4\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1};\mathbb{Z}\right).$$

Претпоставимо да постоји овакво пресликавање. За пресликавање f^* тада важи да комутира са кохомолошким операцијама, на основу дефиниције кохомолошких операција.

У овом доказу ћемо користити Стинродове степене. Нека је $p \neq 2$ прост број и X произвољан тополошки простор. Стинродови степени су хомоморфизми

$$\mathcal{P}^i : H^l(X;\mathbb{Z}_p) \to H^{l+2i(p-1)}(X;\mathbb{Z}_p),\ i, l \in \mathbb{N}_0.$$

За ово пресликавање важи

1° $(\forall x)\, \mathcal{P}^0(x) = x$,

2° $(\forall x \in H^{2i}(X;\mathbb{Z}_p))\, \mathcal{P}^i(x) = x^p$,

3° $\mathcal{P}^i(xy) = \sum\limits_{j=0}^{i} \mathcal{P}^j(x)\mathcal{P}^{i-j}(y)$.

За $p = 3$ имамо Стинродово пресликавање

$$\mathcal{P}^1 : H^4\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1};\mathbb{Z}_3\right) \to H^8\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1};\mathbb{Z}_3\right).$$

Како је $H^8\left(\mathbb{H}\mathrm{P}^{2k+1};\mathbb{Z}_3\right) = \mathbb{Z}_3\langle c^2\rangle$, за неко $l \in \mathbb{Z}_3$ важи

$$\mathcal{P}^1(c) = lc^2.$$

Пресликавање $\mathcal{P}^1$ комутира са f^*, па имамо

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^1\left(f^*(c)\right) &= f^*\left(\mathcal{P}^1(c)\right)\\
\mathcal{P}^1(-c) &= f^*(lc^2)\\
l(-c)^2 &= -lc^2\\
lc^2 &= -lc^2\\
2l &= 0
\end{aligned}$$

Можемо да закључимо да је $l = 0$ на основу рачуна у $\mathbb{Z}_3$. Овим добијамо да је Стинродов степен $\mathcal{P}^1$ тривијалан. Показаћемо да то заправо није случај. Посматрајмо пресликавања

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\} \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{C}}"'] & \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\} \arrow[d, two heads, "\pi_{\mathbb{H}}"] \\
\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1} \arrow[r, dashed, "p"] & \mathbb{H}\mathrm{P}^n
\end{tikzcd}$$

Пројекција $\pi_{\mathbb{C}}$ поистовећује све колинеарни комплексни вектори у $\mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\}$, а $\pi_{\mathbb{H}}$ поистовећује колинеарне кватернионске векторе. Потребно је проверити да је пресликавање p добро дефинисано. Нека су $x, y \in \mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\}$ такви да

$$\pi_{\mathbb{C}}(x) = \pi_{\mathbb{C}}(y),$$

односно постоји $\lambda \in \mathbb{C}$ такво да $x = \lambda y$. Одавде одмах имамо да је

$$\pi_{\mathbb{H}}(x) = \pi_{\mathbb{H}}(y),$$

јер је $x = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$.

Желимо да видимо шта је инверзна слика тачке $x \in \mathbb{H}\mathrm{P}^n$. Како је x кватернионска права у $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$, њу можемо да посматрамо и као комплексну раван. У x се сликају све комплексне праве у тој комплексној равни, а то је баш простор $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2$. Зато је p раслојење са слојем S^2

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \approx S^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1} \\ & & \big\downarrow p \\ & & \mathbb{H}\mathrm{P}^n \end{array}$$

па имамо Гисинов дуги тачни низ

$$\cdots \longrightarrow H^1(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) \longrightarrow H^4(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) \xrightarrow{p^*} H^4(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1};\mathbb{Z}_3) \longrightarrow H^2(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) \longrightarrow \cdots .$$

Пошто је $H^1(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) = H^2(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3) = 0$, видимо да је p^* изоморфизам.

Нека је $z \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1};\mathbb{Z}_3)$ генератор. Изаберимо $c \in H^4(\mathbb{H}\mathrm{P}^n;\mathbb{Z}_3)$, за који важи $p^*(c) = z^2$. Тада имамо

$$p^*\left(\mathcal{P}^1(c)\right) = \mathcal{P}^1\left(p^*(c)\right) = \mathcal{P}^1\left(z^2\right) = z\mathcal{P}^1(z) + \mathcal{P}^1(z)z = 2z^4 \neq 0.$$

То је зато што је $H^8\left(\mathbb{C}\mathrm{P}^{2n+1};\mathbb{Z}_3\right) \neq 0$, јер је у нашем случају n бар 3. У рачуну смо користили чињеницу да је $\mathcal{P}^1(z) = z^3$, јер је $|z| = 2$, па то важи на основу дефиниције Стинродових степена.

Овим смо добили контрадикцију, тако да смо доказали да сва пресликавања кватернионских пројективних простора непарних димензија почевши од 3 имају ненула Лефшецов број, па самим тим имају фиксну тачку. $\square$

3 Својство фиксне тачке за Грасманијане

3.1 Реалне Грасманове многострукости

У овом поглављу се бавимо главном темом овог рада.

Теорема 3.1 *Ако $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке онда је $n \neq k$ и nk је парно.*

Доказ: Доказ изводимо контрапозицијом. Претпоставимо да је $n = k$ или nk непарно. Доказаћемо да тада реална Грасманова многострукост $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ нема својство фиксне тачке.

Нека је прво $n = k$. Пресликавање $g : G_n\left(\mathbb{R}^{2n}\right) \to G_n\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ дато са

$$g(v) = v^{\perp}$$

нема фиксну тачку.

Нека је сада nk непарно, односно оба броја n и k су непарна. У овом случају је $n + k$ парно, па можемо да дефинишемо пресликавање $g : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$, дато са

$$g : (x_1, x_2, x_3, x_4, ...) \to (-x_2, x_1, -x_4, x_3, ...).$$

Пресликавање g је линеарно, па се може представити матрицом

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

За ову матрицу важи

$$\det\left(A - \lambda E\right) = \left(\lambda^2 + 1\right)^{\frac{n+k}{2}},$$

па она нема реалне сопствене вредности. Посматрајмо сада пресликавања

$$\begin{array}{ccc} V_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right) & \xrightarrow{g\times\ldots\times g} & V_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right) \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right) & \xrightarrow{\overline{g}} & G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right) \end{array}$$

Пресликавање $g \times ... \times g$ је добро дефинисано (кодомен му је заиста $V_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$) јер ако су вектори ортонормирани у $\mathbb{R}^{n+k}$, односно ако су $x, y \in \mathbb{R}^{n+k}$ такви да

$\langle x, y \rangle = 0$, тада је

$$\begin{aligned}\langle g(x), g(y) \rangle &= \langle (-x_2, x_1, -x_4, x_3, ...), (-y_2, y_1, -y_4, y_3, ...) \rangle \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + ... \\ &= \langle x, y \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

Да би пресликавање $g \times ... \times g$ могло да се факторише потребно је да се две ортонормиране базе исте k-димензионе равни у $\mathbb{R}^{n+k}$ сликају у ортонормиране базе исте равни. То важи јер пресликавање чува ортогоналност, па обе базе имају исти ортогонални комплемент и у домену и у кодомену. Дакле, $\overline{g}$ је добро дефинисано.

Претпоставимо да $\overline{g}$ има фиксну тачку, односно да $\overline{g}([X]) = [X]$. Тачка $[X]$ је пројекција неке k-димензионе равни X која се са g слика сама у себе. Како је димензија k непарна, имамо да $g \mid_X$ има сопствени вектор, а самим тим и g има сопствени вектор, што је контрадикција. $\square$

Хипотеза 3.2 *Нека су $n, k \in \mathbb{N}$ такви да $n \neq k$ и nk је парно. Тада $G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке.*

Наредна дефиниција и две теореме ће бити потребни за доказ теореме 3.6.

Дефиниција 3.3 *Висина прве Штифел-Витнијеве класе $w_1 \in H^1\left(G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right);\mathbb{Z}_2\right)$ се дефинише као*

$$\text{heigth}(w_1) = \sup\{m \in \mathbb{N} \mid w_1^m \neq 0 \in H^*\left(G_k\left(\mathbb{R}^{n+k}\right);\mathbb{Z}_2\right)\}.$$

Теорема 3.4 *Нека су $s, n \in \mathbb{N}$ такви да важи $2^s < n + 2 \leq 2^{s+1}$. Тада је висина прве Штифел-Витнијеве класе $w_1 \in H^1\left(G_2\left(\mathbb{R}^{n+2}\right);\mathbb{Z}_2\right)$*

$$\text{heigth}(w_1) = 2^{s+1} - 2.$$

Теорема 3.5 (Принцип разлагања (Splitting Principle)) *Нека је $\xi : E \to X$ векторско раслојење реда $n \in \mathbb{N}$ над паракомпактним простором X. Тада постоји простор Y и пресликавање $g : Y \to X$ за које важи*

1) *Индуковано пресликавање $g^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ је инјективно*

2) *Пулбек раслојење $g^*\xi : g^*E \to Y$ разбија се у суму линијских раслојења $g^*(E) = \eta_1 \oplus \ldots \oplus \eta_n$.*

Сада ћемо доказати теорему која ће користити да се хипотеза 3.2. докаже за специјалне случајеве $k = 2$, $n = 4l$ или $n = 4l + 1$, који ће бити доказани одмах након ове теореме.

Теорема 3.6 *Нека је* $\phi \in End\left(H^*\left(G_2\left(\mathbb{R}^{n+2}\right);\mathbb{Z}_2\right)\right) = End\left(\mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/I_{2,n}\right)$*,* $n = 4k$ *или* $n = 4k + 1$*, пресликавање које комутира са Стинродовим квадратима. Тада је* ϕ *облика*

$$\phi(w_1) = \alpha w_1$$
$$\phi(w_2) = \alpha w_2,\ \alpha \in \mathbb{Z}_2$$

Доказ: За ϕ важи

$$\phi(w_1) = \alpha w_1$$
$$\phi(w_2) = \beta_1 w_1^2 + \beta_2 w_2,$$

$\alpha, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}_2$. Ово важи јер је $H^1\left(G_2\left(\mathbb{R}^{n+2}\right);\mathbb{Z}_2\right)$ генерисан са w_1, а $H^2(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2)$ је генерисан са w_1^2 и w_2.

Сада ћемо користити принцип разлагања. Нека је ξ канонско раслојење над $G_2(\mathbb{R}^{n+2})$. Тада постоји простор Y и пресликавање g такви да

$$g : Y \to G_2\left(\mathbb{R}^{n+2}\right)$$

и важи $g^*(\xi) = \eta = \eta_1 \oplus \eta_2$, где су η_1 и η_2 линијска раслојења. Важи да је пресликавање

$$g^* : H^*(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2) \to H^*(Y;\mathbb{Z}_2)$$

инјективно. Такође

$$\begin{aligned} w(\xi) &= 1 + w_1 + w_2, \\ w(\eta_1) &= 1 + x_1, \\ w(\eta_2) &= 1 + x_2, \\ w(\eta) &= 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2. \end{aligned}$$

Како је

$$w(\eta) = g^*(w(\xi)),$$

важи

$$g^*(w_1) = x_1 + x_2,$$
$$g^*(w_2) = x_1x_2.$$

Сада имамо

$$
\begin{aligned}
g^*\left(\mathrm{Sq}^1(w_2)\right) &= \mathrm{Sq}^1\left(g^*(w_2)\right)\\
&= \mathrm{Sq}^1(x_1x_2)\\
&= \mathrm{Sq}^1(x_1)x_2 + x_1\mathrm{Sq}^1(x_2)\\
&= x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1+x_2)\\
&= g^*(w_1w_2).
\end{aligned}
$$

Како је g_* инјективно, добијамо $\mathrm{Sq}^1(w_2) = w_1w_2$ и важи $\mathrm{Sq}^1(w_1) = w_1^2$. Пошто ϕ комутира са Стинродовим квадратима, имамо

$$
\begin{tikzcd}
H^2\left(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2\right) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{Sq}^1"'] & H^2(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2) \arrow[d, "\mathrm{Sq}^1"] \\
H^3(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2) \arrow[r, "\phi"] & H^3(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
w_2 \arrow[r, mapsto, "\phi"] \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Sq}^1"'] & \beta_1w_1^2+\beta_2w_2 \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Sq}^1"] \\
w_1w_2 \arrow[r, mapsto, "\phi"] & \phi(w_1w_2) = \mathrm{Sq}^1(\beta_1w_1^2+\beta_2w_2)
\end{tikzcd}
$$

Одакле имамо

$$
\begin{aligned}
\phi(w_1w_2) &= \phi(w_1)\phi(w_2)\\
&= \alpha w_1(\beta_1w_1^2+\beta_2w_2)\\
\mathrm{Sq}^1(\beta_1w_1^2+\beta_2w_2) &= \beta_1\mathrm{Sq}^1(w_1w_1)+\beta_2\mathrm{Sq}^1(w_2)\\
&= \beta_1(\mathrm{Sq}^1(w_1)w_1 + w_1\mathrm{Sq}^1(w_1)) + \beta_2w_1w_2\\
&= \beta_2w_1w_2.
\end{aligned}
$$

Када се ове две једначине изједначе имамо

$$
\begin{aligned}
\alpha w_1(\beta_1w_1^2+\beta_2w_2) &= \beta_2w_1w_2\\
\alpha\beta_1w_1^3+\alpha\beta_2w_1w_2 &= \beta_2w_1w_2.
\end{aligned}
$$

Сада ћемо размотрити ову једнакост у зависности од параметра α.

Ако је $\alpha = 1$, одмах имамо да је $\beta_1 = 0$, односно $\phi(w_1) = w_1$, $\phi(w_2) = \beta_2w_2$. Имамо да је

$$
\overline{w}_{n+1} = \sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a}w_1^aw_2^b = 0,
$$

јер је $\overline{w}_{n+1} \in I_{2,n}$. Зато је и

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a}w_1^a w_2^b\right) &= \phi(0)\\
\sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a}\phi\left(w_1^a\right)\phi\left(w_2^b\right) &= 0\\
\sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a}w_1^a\phi\left(w_2\right)^b &= 0\\
w_1^{n+1} + \sum_{a+2b=n+1,b\neq 0}\binom{a+b}{a}w_1^a\beta_2 w_2^b &= 0\\
w_1^{n+1} + \beta_2\sum_{a+2b=n+1,b\neq 0}\binom{a+b}{a}w_1^a w_2^b &= 0\\
(1+\beta_2)w_1^{n+1} + \beta_2\sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a}w_1^a w_2^b &= 0\\
(1+\beta_2)w_1^{n+1} &= 0
\end{aligned}$$

Потребно је показати да $w_1^{n+1} \neq 0$, односно да је $\mathrm{heigth}(w_1) \geq n+1$.

Размотримо прво случај $n = 4k$. Имамо да је за неко $s \in \mathbb{N}$, $2^s < 4k+2 \leq 2^{s+1}$. Тада је

$$\mathrm{heigth}(w_1) = 2^{s+1} - 2.$$

Сада нам је потребно да покажемо да је $\mathrm{heigth}(w_1) \geq 4k+1$, али ће нам касније бити потребно да је $\mathrm{heigth}(w_1) \geq 4k+2$, па ћемо то одмах показати. Имамо да је

$$4k+2 \leq 2^{s+1},$$

а нама је потребно да је

$$4k+2 \leq 2^{s+1} - 2.$$

Довољно је само показати да је $4k+2 \neq 2^{s+1}$. Претпоставимо супротно да је

$$4k+2 = 2^{s+1}.$$

Тада

$$2k+1 = 2^s,$$

што је контрадикција јер је $k \geq 1$.

За $n = 4k+1$, имамо исто да је за неко $s \in \mathbb{N}$, $2^s < 4k+3 \leq 2^{s+1}$ и важи

$$\mathrm{heigth}(w_1) = 2^{s+1} - 2.$$

Показаћемо да $w_1^{n+1} = w_1^{4k+2} \neq 0$. Потребно је да $4k+2 \leq 2^{s+1}-2$, односно $4k+4 \leq 2^{s+1}$. Како је $4k+3 \leq 2^{s+1}$, због парности имамо тражену неједнакост.

Добили смо да за $n = 4k$ и $n = 4k+1$, $w_1^{n+1} \neq 0$ па закључујемо да је $\beta_2 = 1$, што је требало показати.

Нека је $\alpha = 0$. Одмах имамо $\beta_2 = 0$, односно $\phi(w_1) = 0$, $\phi(w_2) = \beta_1 w_1^2$. Тада

$$\phi\left(\sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a} w_1^a w_2^b\right) = \phi(0),$$
$$\sum_{a+2b=n+1}\binom{a+b}{a}\phi\left(w_1^a\right)\phi\left(w_2^b\right) = 0.$$

Сви чланови које садрже w_1 нестају, тако да је потребно да n буде непарно да би било који члан остао. Тада добијамо

$$\beta_1 w_1^{n+1} = 0.$$

Малопре смо показали да $w_1^{n+1} \neq 0$, па $\beta_1 = 0$.

Нека је сада n парно. Како је такође $\overline{w}_{n+2} \in I_{2,n}$, имамо

$$\begin{aligned}\phi\left(\sum_{a+2b=n+2}\binom{a+b}{a} w_1^a w_2^b\right) &= \phi(0),\\ \beta_1 w_1^{n+2} &= 0,\\ \beta_1 &= 0.\end{aligned}$$

јер $w_1^{n+2} \neq 0$. $\square$

Теорема 3.7 *Ако је $n = 4k$ или $n = 4k+1$, $G_2(\mathbb{R}^{n+2})$ има својство фиксне тачке.*

Доказ: Неке је $f : G_2\left(\mathbb{R}^{n+2}\right) \to G_2(\mathbb{R}^{n+2})$. тада је $f^* \in End\left(H^*(G_2(\mathbb{R}^{n+2}); \mathbb{Z}_2)\right)$ и комутира са Стинродовим степенима, па за то пресликавање имамо две могућности, што смо показали у претходној теореми.

Нека је прво

$$f^*(w_1) = 0,$$
$$f^*(w_2) = 0.$$

Тада је

$$L_{\mathbb{Z}_2}(f) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \mathrm{Tr}\left(f^*, H^i(G_2\left(\mathbb{R}^{n+2}\right); \mathbb{Z}_2)\right) = \mathrm{Tr}\left(f^*, H^0\left(G_2(\mathbb{R}^{n+2}); \mathbb{Z}_2\right)\right) = 1,$$

јер је пресликавање тривијално на генераторима. Одавде видимо да f има фиксну тачку, на основу Лефшецове теореме.

Ако је

$$f^*(w_1) = w_1,$$
$$f^*(w_2) = w_2,$$

f^* је идентичко пресликавање, па је

$$L_{\mathbb{Z}_2}(f) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \mathrm{Tr}\left(f^*, H^i\left(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2\right)\right) = \sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \dim_{\mathbb{Z}_2} H^i\left(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2\right).$$

На основу симетричности димензија кохомолошких група имамо

$$\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i \dim_{\mathbb{Z}_2} H^i\left(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2\right) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H^n\left(G_2(\mathbb{R}^{n+2});\mathbb{Z}_2\right) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1 \neq 0 \ \ (mod\, 2),$$

за $n = 4k$ и $n = 4k+1$ Лефшецов број није нула, па за ове случајеве f има фиксну тачку. $\square$

За $n = 4k+2$ или $n = 4k+3$ овај доказ се не може применити, јер је тада $L_{\mathbb{Z}_2}(f) = 0$.

У примеру 3.10. ћемо показати да нису сви $\phi \in H^*\left(G_k(\mathbb{R}^{n+k});\mathbb{Z}_2\right)$ облика

$$w_i \to \alpha w_i, \ \ \alpha \in \mathbb{Z}_2,$$

што је била кључна чињеница за доказивање теореме изнад. Пре примера, наводимо теорему и последицу која ће нам бити у њему потребна.

Нека су $n, m \in \mathbb{N}$. Ове бројеве можемо посматрати у бинарном запису, односно

$$m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i,$$

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} b_j 2^j,$$

$a_i, b_j \in \mathbb{Z}_2$ и почевши од неког $k \in \mathbb{N}$ је $a_i = b_j = 0$ за $i, j \geq k$.

Теорема 3.8 *Нека су $m, n \in \mathbb{N}$. Тада је*

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{\infty} \binom{a_i}{b_i} \pmod 2,$$

где су $m = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 2^i, n = \sum_{j=0}^{\infty} b_j 2^j$ бинарни записи бројева m и n. Такође

$$\binom{0}{0} = \binom{1}{1} = \binom{1}{0} = 1, \ \ \binom{0}{1} = 0.$$

Последица 3.9 *Нека је $m, n \in \mathbb{N}_0$. Тада је $\binom{m}{n}$ паран ако и само ако постоји $i \in \mathbb{N}_0$ такав да је $\binom{a_i}{b_i} = 0$.*

Пример 3.10 *Ендоморфизам*

$$\tilde{\phi} : \mathbb{Z}_2[w_1, w_2] \to \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]$$

задат са

$$w_1 \mapsto 0,$$
$$w_2 \mapsto w_1^2,$$

индукује ендоморфизам $\phi : H^*\left(G_2\left(\mathbb{R}^{2^l}\right); \mathbb{Z}_2\right) \to H^*\left(G_2\left(\mathbb{R}^{2^l}\right); \mathbb{Z}_2\right)$.

Потребно је показати да је ово добро дефинисан ендоморфизам

$$H^*\left(G_2\left(\mathbb{R}^{2^l}\right); \mathbb{Z}_2\right) \cong \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]/_{I_{2,2^l-2}},$$

где је $I_{2,2^l-2} = (\overline{w}_{2^l-1}, \overline{w}_{2^l})$. Да би ендоморфизам био добро дефинисан, потребно је да је $\tilde{\phi}(\overline{w}_{2^l-1}), \tilde{\phi}(\overline{w}_{2^l}) \in I_{2,2^l-2}$, односно

$$\tilde{\phi}(\overline{w}_{2^l-1}) = p\overline{w}_{2^l-1} + q\overline{w}_{2^l},$$
$$\tilde{\phi}(\overline{w}_{2^l}) = r\overline{w}_{2^l-1} + s\overline{w}_{2^l},$$

за неке $p, q, r, s \in \mathbb{Z}_2[w_1, w_2]$. Прво је потребно да нађемо генераторе идеала.

Имамо да је

$$\overline{w}_{2^l} = \sum_{a+2b=2^l} \binom{a+b}{a} {w_1}^a w_2^b.$$

Потребно је одредити који од коефицијената су нула, односно парни, а који један, односно непарни (јер се налазимо у $\mathbb{Z}_2$). За одређивање тога, користићемо последицу 3.9. Како је

$$a + 2b = 2^l,$$

закључујмо да је a паран, односно,

$$a = 2k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{l-1}\}.$$

Одатле одмах добијамо да је

$$a + b = 2^{l-1} + k.$$

Размотримо најпре случај $k < 2^{l-1}$. У бинарном запису, број $2^{l-1} + k$ има 1 на $(l-1)$-ом месту, а остале цифре су цифре броја k. Број $2k$ има бинарни запис исти као k, само померен за једно место у лево, а на нултом месту је додата нула. На пример

$$2^{l-1} + k : 1 \ldots 01100101011$$

$$2k : 0 \ldots 11001010110$$

Због тога, ненула биномни коефицијенти $\binom{2^{l-1}+k}{2k}$ су они код којих се $2^{l-1}+k$ записује као непрекидан низ јединица било које дужине почевши од $(l-1)$-ог места па наниже.

$$100 \ldots 00$$

$$110 \ldots 00$$

$$111 \ldots 00$$

$$\ldots$$

$$111 \ldots 10$$

$$111 \ldots 11$$

Ово је испуњено за $k = 0$, $k = 2^{l-2}$, $k = 2^{l-2} + 2^{l-3}$, $\ldots$, $k = 2^{l-2} + 2^{l-3} + \cdots + 2 + 1$. Односно, коефицијенти који преостају су

$$\begin{aligned} &k = 2^{l-1} - 2^m, \; m \in \{0, 1, \ldots, l-1\}, \\ &a = 2^l - 2^{m+1}, \\ &b = 2^m. \end{aligned}$$

Случај који овде није разматран је случај $k = 2^{l-1}$, за који је $a + b = a$, $b = 0$, па је биномни коефицијент 1. Одавде имамо

$$\overline{w}_{2^l} = w_1^{2^l} + w_2 w_1^{2^l-2} + w_2^2 w_1^{2^l-4} + \cdots + w_2^{2^{l-2}} w_1^{2^{l-1}} + w_2^{2^{l-1}}.$$

Случно као у претходном сличају

$$\overline{w}_{2^l-1} = \sum_{a+2b=2^l-1} \binom{a+b}{a} {w_1}^a w_2^b.$$

Одавде видимо да a мора бити непарно, односно последња бинарна цифра је један. Нека је $a = 2k+1$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{l-1}-1\}$. Тада је $a + b = 2^{l-1} + k$. Да би коефицијент $\binom{a+b}{a}$ био различит од нуле, $a+b$ такође мора бити непарно, па видимо да $k \in \{1, 3, \ldots, 2^{l-1}-1\}$. У бинарном запису $2^{l-1}+k$, има 1 на $(l-1)$-ом месту, а остало су цифре k. Број $2k+1$ има бинарни запис исти као k, само померен у лево за једно место и додату јединицу на крају. На пример

$$2^{l-1} + k : 1...01010101101$$

$$2k+1: 0...10101011011$$

Зато, да би коефицијент био 1 број $a+b$ не сме имати низ јединица прекинут нулом, јер би се на том месту појавио $\binom{0}{1}$ коефицијент. Како су цифре на месту $l-1$ и 0 јединице, такође и све између морају бити јединице. Односно, једина могућност је $k=2^{l-1}-1$, односно $a=2^l-1$, $b=0$. Одатле имамо

$$\overline{w}_{2^l-1}=w_1^{2^l-1}.$$

Сада можемо да нађемо полиноме p,q,r,s.

$$\begin{aligned}\phi\left(\overline{w}_{2^l}\right)&=\phi\left(w_1^{2^l}+w_2w_1^{2^l-2}+w_2^2w_1^{2^l-4}+\cdots+w_2^{2^{l-2}}w_1^{2^{l-1}}+w_2^{2^{l-1}}\right)\\&=w_1^{2^l}=w_1\overline{w}_{2^l-1}+0\overline{w}_{2^l},\end{aligned}$$

па је $r=w_1, s=0$.

$$\phi\left(\overline{w}_{2^l-1}\right)=\phi\left(w_1^{2^l-1}\right)=0=0\overline{w}_{2^l-1}+0\overline{w}_{2^l},$$

па су $p=q=0$.

У [1] је доказана Хипотеза 3.2. за nk парно и за

1) $k\leq 7,\ \left[\frac{n}{2}\right]>\left[\frac{k}{2}\right]$,

2) $k>7,\ \left[\frac{n}{2}\right]>2\left[\frac{k}{2}\right]^2-\left[\frac{k}{2}\right]-1$.

3.2 Комплексне Грасманове многострукости

Теорема 3.11 *Нека је $n,k\in\mathbb{N}$. Ако $G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке онда је $n\neq k$ и nk је парно.*

Доказ: Доказ се изводи контрапозицијом. Претпоставимо да је $n=k$ или nk непарно. Доказаћемо да тада комплексна Грасманова многострукост нема својство фиксне тачке.

Нека је прво $n=k$. Пресликавање $g: G_n\left(\mathbb{C}^{2n}\right)\to G_n\left(\mathbb{C}^{2n}\right)$, дефинисано са

$$g(v)=v^{\perp}$$

нема фиксну тачку.

Нека је сада nk непарно, односно оба броја су непарна, па је $n+k=2m, m\in\mathbb{N}$. Посматрајмо пресликавање $g:\mathbb{C}^{2m}\to\mathbb{C}^{2m}$, дато са

$$g(z_1,z_2,\ldots,z_{2m-1},z_{2m})=\left(-\overline{z}_2,\overline{z}_1,\ldots,-\overline{z}_{2m},\overline{z}_{2m-1}\right).$$

Простор $\mathbb{C}^{2m}$ је изоморфан простору $\mathbb{H}^m$. Нека је $\Psi : \mathbb{C}^{2m} \to \mathbb{H}^m$ изоморфизам који повезује ова два простора. Пресликавање g може да се посматра као пресликавања дефинисано на $\mathbb{H}^m$, дефинисано тако да комутира следећи дијаграм.

$$\begin{tikzcd}
(z_1, z_2, \ldots, z_{2m-1}, z_{2m}) \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[d, "\Psi"'] & (-\overline{z}_2, \overline{z}_1, \ldots, -\overline{z}_{2m}, \overline{z}_{2m-1}) \arrow[d, "\Psi"] \\
(z_1 + z_2 j, \ldots, z_{2m-1} + z_{2m} j) \arrow[r, mapsto, "g"] & (\overline{z}_1 j - \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_{2m-1} j - \overline{z}_{2m})
\end{tikzcd}$$

Како је

$$(\overline{z}_1 j - \overline{z}_2, \ldots, \overline{z}_{2m-1} j - \overline{z}_{2m}) = (j(z_1 + z_2 j), \ldots, j(z_{2m-1} + z_{2m} j)),$$

имамо да је $g : \mathbb{H}^m \to \mathbb{H}^m$ у ствари множење са j са леве стране, односно

$$g : (w_1, \ldots, w_m) \mapsto j(w_1, \ldots, w_m) = (jw_1, \ldots, jw_m).$$

Сада посматрајмо пресликавања

$$\begin{tikzcd}
V_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right) \arrow[r, "g\times\ldots\times g"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & V_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right) \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right) \arrow[r, dashed, "\overline{g}"] & G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)
\end{tikzcd}$$

Пресликавање $g \times \cdots \times g$ је добро дефинисано јер се ортонормирани вектори у $\mathbb{C}^{n+k}$ њиме сликају у ортонормиране векторе. Заиста, нека су $z, w \in \mathbb{C}^{n+k}$ такви да $\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} = z_1\overline{w}_1 + \cdots + z_{2m}\overline{w}_{2m} = 0$. Тада је

$$\langle \tilde{g}(z), \tilde{g}(w)\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{z}_2 w_2 + \overline{z}_1 w_1 + \ldots + \overline{z}_{2n} w_{2n} + \overline{z}_{2n-1} w_{2n-1} = \overline{\langle z, w\rangle}_{\mathbb{C}} = 0,$$

па су и слике вектора $\mathbb{C}$-ортогонални. Такође је очигледно и

$$\|z\| = \|\overline{g}(z)\|,$$

па су слике јединичних вектора јединични вектори.

Да би пресликавање $g\times\ldots\times g$ могло да се факторише и да се добије добро дефинисано пресликавање $\overline{g}$, потребно је да се две ортонормиране базе k-димензионе равни сликају у исту раван. То важи јер пресликавање чува ортогоналност, па две базе исте k-равни имају исти ортогонални комплемент и у домену и у кодомену.

Претпоставимо да $\overline{g}$ има фиксну тачку, односно да $\overline{g}\left(\overline{V}\right) = \overline{V}$. Тада је $V = \pi^{-1}(\overline{V})$ k-димензиони комплексни векторски потпростор у $\mathbb{C}^{n+k}$ и важи $g(V) \subset V$.

Простор V је такође и $\mathbb{H}$-векторски потпростор од $\mathbb{H}^n$.

$$(\forall v_1, v_2 \in V)\; v_1 + v_2 \in V.$$

Ова особина важи јер је V комплексан векторски потпростор. Остаје да се покаже

$$(\forall v \in V)(\forall q \in \mathbb{H})\, qv \in V.$$

Показаћемо да ово такође важи.

$$\begin{aligned} qv &= (a + bi + cj + dk)v \\ &= (a + bi + (c + di)j)v \\ &= (a + bi)v + (c + di)(jv) \\ &= zv + wg(v) \in V, \end{aligned}$$

где су $z = a+bi, w = c+di \in \mathbb{C}$, а $g(v) \in V$. Ово важи јер је V комплексни векторски потпростор у $\mathbb{C}^{n+k}$.

Одавде имамо да је V векторски потпростор од $\mathbb{C}^{2m} = \mathbb{H}^m$, па је његова димензија као комплексног векторског простора парна. Овим смо доказали да ако $\overline{g}$ има фиксну тачку, k је парно, односно ако је k непарно (и n) $G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$ нема својство фиксне тачке. $\square$

Супротан смер није доказан, тако да ћемо овде навести хипотезу. Пре навођења хипотезе, потребно је размотрити како изгледа прстен $End\left(H^*\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right)$. Знамо да је

$$H^*\left(G_k(\mathbb{C}^{n+k});\mathbb{Z}\right) = \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k]/I_{k,n}.$$

Посматрајмо пресликавања:

$$\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k] \to \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k].$$

Она се могу посматрати на генераторима

$$\begin{aligned} &c_1 \to a_{11}c_1 \\ &c_2 \to a_{21}c_1^2 + a_{22}c_2 \\ &c_3 \to a_{31}c_1^3 + a_{32}c_1c_2 + a_{33}c_3 \\ &\quad \ldots \end{aligned}$$

где су $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ за свако $i, j \in \mathbb{N}$. Пресликавања простора $H^*\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)$ су она за која комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k] \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k] \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k]/I_{k,n} \arrow[r, dashed] & \mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k]/I_{k,n} \end{tikzcd}$$

Посматрајмо пресликавања $\tilde{\phi}_m \in End\left(\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_k]\right)$ дефинисана са

$$c_i \mapsto m^i c_i, \;\; i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Потребно је показати да овакво пресликавање индукује пресликавање $\phi_m \in End\left(H^*\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right)$. Нека је $c_1^{a_1}\dots c_k^{a_k} \in \mathbb{Z}[c_1,\dots,c_k]$. Тада је

$$\phi_m\left(c_1^{a_1}\dots c_k^{a_k}\right) = (mc_1)^{a_1}\dots(m^k c_k)^{a_k} = m^{a_1+2a_2+\dots+ka_k}c_1^{a_1}\dots c_k^{a_k} = m^i c_1^{a_1}\dots c_k^{a_k},$$

па је зато

$$\phi_m(\overline{c}_{n+j}) = m^{n+j}\overline{c}_{n+j} \in I_{k,n},$$

јер је $\overline{c}_{n+j}$ линеарна комбинација монома горе наведеног облика. Одавде видимо да се генератори идеала сликају у идеал, па су пресликавања ϕ_m добро дефинисана.

Хипотеза 3.12 *Ако је $n > k$, тада је $End\left(H^*\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right) = \{\phi_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.*

Сада ћемо навести хипотезу везану за фиксну тачку, а затим и везу између ове две хипотезе.

Хипотеза 3.13 *Нека је $n,k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$ и nk парно. Тада $G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке.*

Теорема 3.14 *Хипотеза 3.12 $\Rightarrow$ Хипотеза 3.13.*

Доказ: Нека је $f : G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right) \to G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)$ непрекидно пресликавање. Тада је $f^* = \phi_m$, $m \in \mathbb{Z}$, на основу Хипотезе 3.12.

$$L(\phi_m) = \sum_{i=0}^{nk} \mathrm{Tr}\left(\phi_m, H^{2i}\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right) = \sum_{i=0}^{nk} m^i \mathrm{rank}\left(H^{2i}\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right),$$

јер је пресликавање ϕ_m на $2i$-тим кохомолошким групама множење са m^i, па се траг тог пресликавања добија када се m^i помножи са одговарајућим рангом.

1) $m \neq \pm 1$

$$L(\phi_m) \equiv 1 \pmod{m} \Rightarrow L(\phi_m) \neq 0.$$

2) $m = 1$

$$L(\phi_1) = \chi\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right)\right) = \binom{n+k}{k} > 0.$$

3) $m = -1$. Овде ћемо користити чињеницу да је $H^{2i+1}\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right) = 0$, $H^{2i}\left(G_k(\mathbb{C}^{n+k});\mathbb{Z}\right) = H^i\left(G_{[\frac{k}{2}]}\left(\mathbb{R}^{[\frac{n+k}{2}]}\right);\mathbb{Z}\right)$ за све $i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} L(\phi_{-1}) &= \sum_{i=0}^{nk}(-1)^i \mathrm{rank}\left(H^{2i}\left(G_k(\mathbb{C}^{n+k});\mathbb{Z}\right)\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{nk}{2}}(-1)^i \mathrm{rank}\left(H^{i}\left(G_{[\frac{k}{2}]}\left(\mathbb{R}^{\frac{n+k}{2}}\right);\mathbb{Z}\right)\right) \\ &= \chi\left(G_{[\frac{k}{2}]}\left(\mathbb{R}^{[\frac{n+k}{2}]}\right)\right) \\ &= \binom{[\frac{n+k}{2}]}{[\frac{k}{2}]} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Овим смо доказали да $L(\phi_m) \neq 0$ у случајевима које разматрамо, па пресликавање има фиксу тачку. Тиме смо доказали да $G_k(\mathbb{C}^{n+k})$ има својство фиксне тачке за nk парно и $n \neq k$, ако важи Хипотеза 3.12. □

Неки специјални случајеви Хипотезе 3.12 су доказани, а одатле и Хипотезе 3.13. У [4] је показано да за $\phi \in End\left(G_2\left(\mathbb{C}^{n+2}\right);\mathbb{Z}\right)$ важи

$$\phi(c_1) = mc_1 \;\Rightarrow\; \phi = \phi_m,$$

односно, показано је да у специјалном случају $k = 2$ хипотезе важе.
Касније је у [1] показано исто то за

1) $k \leq 3$ и $n > 0$,

2) $k > 3$ и $n \geq 2k^2 - 2k - 1$.

У [3] је показано да за $\phi \in End\left(G_k\left(\mathbb{C}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)$ важи

$$\phi(c_1) = mc_1\,, m \neq 0 \;\Rightarrow\; \phi = \phi_m,$$

што је близу доказа Хипотезе 3.13.

3.3 Кватернионске Грасманове многострукости

Теорема 3.15 *Нека је $n, k \in \mathbb{N}$. Ако $G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке онда је $n \neq k$.*

Доказ: Овај смер се може доказати контрапозицијом. Претпоставимо да је $n = k$. Доказаћемо да тада кватернионска Грасманова многострукост нема својство фиксне тачке. Пресликавање $g : G_n(\mathbb{H}^{2n}) \to G_n(\mathbb{H}^{2n})$ дефинисано са

$$v \to v^{\perp}$$

нема фиксну тачку. $\square$

Хипотеза 3.16 *$End\left(H^*(G_k(\mathbb{H}^{n+k});\mathbb{Z})\right) = \{\phi_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$, где су ϕ_m ендоморфизми дефинисани на генераторима са*

$$\phi_m(c_i) = m^i c_i,$$

$i \in \{1, \dots, n\}$, $c_i \in H^{4i}\left(G_k(\mathbb{H}^{n+k});\mathbb{Z}\right)$.

Ова пресликавања су добро дефинисана и то се доказује на исти начин као у комплексном случају. Следи хипотеза која се односи на својство фиксне тачке на кватернионским многострукостима.

Хипотеза 3.17 *Нека је $n, k \in \mathbb{N}$ и $n \neq k$. Тада $G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке.*

Она је и доказана у неким специјалним случајевима, што је наведено на крају рада. Наредна теорема описује везу ове две хипотезе.

Теорема 3.18 *Хипотеза 3.16 $\Rightarrow$ Хипотеза 3.17.*

Доказ: Нека је $f : G_k(\mathbb{H}^{n+k}) \to G_k(\mathbb{H}^{n+k})$ непрекидно пресликавање. Тада је $f^* = \phi_m$, за неко $m \in \mathbb{Z}$, на основу Хипотезе 3.16. Лефшецов број тих пресликавања је

$$L(\phi_m) = \sum_{i=0}^{nk} \mathrm{Tr}\left(\phi_m, H^{4i}\left(G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right) = \sum_{i=0}^{nk} m^i \mathrm{rank}\left(H^{4i}\left(G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right);\mathbb{Z}\right)\right)$$

Ако

1) $m \neq \pm 1$
$$L(\phi_m) \equiv 1 \pmod{m} \;\Rightarrow\; L(\phi_m) \neq 0.$$

2) $m = 1$
$$L(\phi_1) = \chi\left(G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)\right) = \binom{n+k}{k} > 0.$$

3) $m=-1$

$$L(\phi_{-1}) = \begin{cases} 0, & nk \in 2\mathbb{N}-1 \\ \binom{[\frac{n+k}{2}]}{[\frac{k}{2}]} & nk \in 2\mathbb{N}. \end{cases}.$$

Одавде видимо да је Лефшецов број 0 када је $m=-1$ и nk непарно.

Оно што ћемо показати је да ниједно непрекидно пресликавање $G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right) \to G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$ не индукује ϕ_{-1}. Када то покажемо, показаћемо да сва непрекидна пресликавања имају фиксну тачку. Претпоставимо да неко непрекидно пресликавање $g : G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right) \to G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$ индукује ϕ_{-1}, односно $g^* = \phi_{-1}$. Важи

$$g^*(c_1) = -c_1,$$
$$g^*(c_2) = c_2.$$

g^* комутира са Стинродовим степеном

$$\mathcal{P}^1 : H^4(G_k(\mathbb{H}^{n+k}); \mathbb{Z}_3) \to H^8(G_k(\mathbb{H}^{n+k}); \mathbb{Z}_3),$$

$$\mathcal{P}^1(c_1) = ac_1^2 + bc_2,$$

$a, b \in \mathbb{Z}_3$. У том случају важи

$$\begin{aligned} g^*\left(\mathcal{P}^1(c_1)\right) &= -\mathcal{P}^1(c_1) \\ g^*\left(ac_1^2 + bc_2\right) &= -ac_1^2 - bc_2 \\ ag^*(c_1)^2 + bg^*(c_2) &= -ac_1^2 - bc_2 \\ ac_1^2 + bc_2 &= -ac_1^2 - bc_2 \\ 2ac_1^2 + 2bc_2 &= 0 \end{aligned}$$

Одавде имамо $a=b=0$. Дакле, имали бисмо да је $\mathcal{P}^1$ тривијално пресликавање. Показаћемо да то није случај. Посматрајмо композицију утапања

$$\mathbb{H}P^n = G_1\left(\mathbb{H}^{n+1}\right) \hookrightarrow G_2(\mathbb{H}^{n+2}) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow G_k(\mathbb{H}^{n+k}).$$

Нека је j утапање $\mathbb{H}P^n$ у $G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$. Имамо комутативни диаграм

$$\begin{tikzcd} H^4(G_k(\mathbb{H}^{n+k}); \mathbb{Z}_3) \arrow[r, "\mathcal{P}^1"] \arrow[d, "j^*"'] & H^8(G_k(\mathbb{H}^{n+k}); \mathbb{Z}_3) \arrow[d, "j^*"] \\ H^4(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}_3) \arrow[r, "\cong"] & H^8(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}_3) \end{tikzcd}$$

Како је j^* изоморфизам и $\mathcal{P}^1$ је такође, па не може бити нула пресликавање.

Овим смо доказали да за свако непрекидно пресликавање f на $G_k(\mathbb{H}^{n+k})$, $L(f^*) \neq 0$ када $n \neq k$, па сва пресликавања имају фиксну тачку.

Тиме смо доказали да $G_k\left(\mathbb{H}^{n+k}\right)$ има својство фиксне тачке за $n \neq k$, ако је тачна хипотеза 3.16. $\square$.

Неки специјални случајеви Хипотезе 3.16. су доказани.
У [4] је показано да за $\phi \in End(G_2\left(\mathbb{H}^{n+2}\right); \mathbb{Z})$ важи

$$\phi(c_1) = mc_1 \;\Rightarrow\; \phi = \phi_m,$$

чиме је показано да је хипотеза у овом специјалном случају тачна.
Касније је у [1] показано исто то за

1) $k \leq 3$ и $n > 0$,

2) $k > 3$ и $n \geq 2k^2 - 2k - 1$.

Литература

[1] H. Glover, W. Homer , *Endomorphisms of the cohomology rings of finite Grassmann manifolds*, Lecture notes in Math., vol 657, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1978, pp. 170-193.

[2] H. Glover, W. Homer , *Fixed point on flag manifolds*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 101, No. 2, 1982.

[3] M. Hoffman, *Endomorphisms of the cohomology of complex Grassmannians*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 281, No. 2 (Feb., 1984), pp. 745-760.

[4] L. O'Neill, *On the fixed point property for the Grassmann manifolds* ,Ph. D. Thesis, Ohio State University, 1974.

[5] R.E. Stong , *Cup product in Grassmannians*, North Holland Publishing Company, Topology and its Applications 13, 1982, 103-113.