

Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet



Master rad

Analiza efikasnosti transporta planetesimala kroz WASP-47 sistem

Nina Marić

Mentor:

docent dr Bojan Novaković

Komisija:

docent dr Bojan Novaković

vanredni profesor dr Anđelka Kovačević

docent dr Dušan Marčeta

Beograd, 2019.

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Ekstrasolarne planete	4
3	Dinamika planetarnih sistema	7
3.1	Problem 2 tela	8
3.2	Problem n tela	9
3.3	Ograničeni problem tri tela	10
3.4	Gravitacioni poremećaji	13
3.5	Rezonance u srednjem kretanju	14
3.6	Sekularne rezonance	15
4	Mala tela u planetarnim sistemima	16
4.1	Negravitacioni poremećaji	16
4.2	Efekat Jarkovskog	16
4.3	JORP efekat	18
4.4	Stabilnost kretanja	18
4.5	Značaj malih tela	19
5	Sistem WASP-47	20
6	Evolucija prstena planetezimala u sistemu WASP-47	25
6.1	Metodologija	25
6.2	Rezultati i diskusija	26
7	Zaključak	40
	Literatura	40

Sažetak

U poslednje dve decenije otkriveno je na hiljade vansolarnih planeta i planetarnih sistema. Posmatrački podaci su pokazali da se u okviru tih sistema nalazi i veliki broj plancezimala koji usled sudara sa planetama mogu značajno promeniti uslove koji na njima vladaju ili pak mogu dopremiti neke nestabilne, kao i organske molekule. Zbog ovih sudara je od važnosti poznavanje njihovog transporta kroz planetarni sistem. U ovom radu za simulaciju kretanja plancezimala u hipotetičkom prstenu usled gravitacionih poremećaja, kao i procene uticaja negravitacionih poremećaja odabran je sistem WASP-47. Sistem se sastoji od 4 planete, od kojih su dve veoma masivne, sa masama nešto većim od mase Jupitera pri čemu je poslednja, gasoviti džin sa potencijalno nastanjivim stenovitim satelitom, u nastanjivoj zoni. WASP-47 je po svojoj kompoziciji sličan Sunčevom sistemu stoga je posmatran kao interesantan za ispitivanje jer su i sami rezultati na kraju mogli biti upoređeni sa poznatim rezultatima našeg sistema. Za numeričku integraciju orbita 10 000 plancezimala za 2 miliona godina korišćen je Orbit9 integrator. Iz integracija su dobijeni sopstveni elementi malih tela, nakon čega su utvrđene glavne rezonance sistema. Kao najjače rezonance u srednjem kretanju izdvojene su 8:3 i 3:1, te je za nekoliko objekata na tim lokacijama određen kritični ugao kako bi se potvrdilo da su objekti u određenoj rezonanci. Pored rezonanci u srednjem kretanju, značajnu ulogu u dinamici plancezimala mogu imati i sekularne rezonance gde se kao najizraženija u ovom hipotetičkom prstenu pokazala linearna sekularna rezonanca perihela sa planetom 47c. Dva glavna mehanizma koja olakšavaju pražnjenje asteroidnog prstena su rezonance u srednjem kretanju i sekularne rezonance, kao i haotična difuzija velike poluose u regionu preklapanja rezonanci i/ili mogući bliski prilazi sa nekom od planeta. Stoga, usled gubitka plancezimala na lokacijama rezonanci, one će se u nekom trenutku isprazniti. Shodno tome, ispitano je dopremanje novih plancezimala na pomenute lokacije. Predstavljena je raspodela plancezimala po veličini u hipotetičkom prstenu, kao i uticaj negravitacionog mehanizma, efekta Jarkovskog, na dopremanje malih tela na lokacije rezonanci. Jedan od bitnih faktora za utvrđivanje stabilnosti na lokacijama usled njihovog pražnjenja i dopremanja novih objekata jeste i određivanje "poluživota" objekata u dve najjače rezonance sistema koji za 8:3 iznosi 11 miliona, tj. za 3:1 17 miliona godina. Kao rezultat dobijeno je da je fluks asteroida održiv i da se iz rezonanci u srednjem kretanju 8:3 i 3:1 na svakih milion godina transportuje okvirno 36 i 27 malih tela, respektivno. Ovo pražnjene regiona potencijalnih impaktora planeta ukazuje da bi se region mogao značajno isprazniti već nakon nekih 100 miliona godina što je neuporedivo brže nego u Sunčevom sistemu u kom i nakon 3.5 milijarde godina asteroidni prsten nije ispražnjen. Svakako međutim treba uzeti u obzir da nakon 100 miliona godina sudarna evolucija postaje značajna, što ovde nije razmatrano.

1 Uvod

Postoji stotinu milijardi galaksija u Univerzumu gde se u svakoj glaksiji, kao i našoj, nalazi nekoliko stotina milijardi zvezda. Ljudski rod je još od davnina spekulisao o postojanju drugih planetarnih sistema, kao i o mogućnosti postojanja života negde u Univerzumu. Tek u poslednje dve decenije otkriveno je na hiljade drugih planeta, uglavnom Keplerovim svemirskim teleskopom, u velikim rasponima prečnika i orbita. Neke od njih su giganti koji orbitiraju u blizini matične zvezde, druge su ledene ili stenovite. U početku su instrumentni i metodi uglavnom omogućavali detekciju najvećih planeta ali danas smo na ivici otkrića planetarnih sistema sličnih našem i čini se da ima milijardu vansolarnih planeta koje nisu mnogo drugačije od Zemlje, dok su planete poput Jupitera i Saturna manje zastupljene. Otkivanjem ovih raznolikosti pokrenuta su razmatranja više mogućih teorija o nastanku planetarnih sistema i mogućoj migraciji planeta. Stoga poseban izazov, u tom smislu, predstavlja objašnjenje nastanka i rane evolucije planetarnih sistema pre svega zbog značajnih razlika kako u osobinama otkrivenih planeta, tako i u strukturi planetarnih sistema kojima te planete pripadaju (Perryman, 2011).

Jedan interesantan sistem po svojoj kompoziciji WASP-47, koji je i tema ovog rada, otkriven je Keplerovom K2 misijom i nalazi se na udaljenosti od 870 svetlosnih godina u sazvežđu Vodolije. Ovaj raznoliki i kompleksan sistem prvi je otkriven u kome se vrući Jupiter nalazi u orbiti bliskoj matičnoj zvezdi sa dve planete Neptunovog tipa kao bliskim pratiocima. Njegova sličnost sa Sunčevim sistemom se ogleda u raznolikosti kompozicija planeta u sistemu, u obliku planetarskih orbita i odsustvu rezonanci u srednjem kretanju između planeta (Weiss et al., 2017).

Takođe, posmatrački podaci nedvosmisleno ukazuju da se u okviru planetarnih sistema nalazi i veliki broj manjih objekata, tzv. planetezimala, koje u Sunčevom sistemu znamo pod imenom asteroidi i komete (Bonsor et al., 2013). Prisustvo ovih objekata je sasvim očekivano imajući u vidu da su kilometarski objekti direktan produkt procesa nastanka planeta bez obzira na mehanizam nastanka istih. Planetezimali utiču na druge objekte u sistemu na više načina. Zbog njihove brojnosti i karaktersitika kretanja planetezimali se često sudaraju, kako međusobno tako i sa planetama. Sudari dovode do brojnih posledica po planete i mogu značajno da promene uslove koji na njima vladaju. Sa druge strane tim udarima na planetu mogu da dopreme druge nestabilne i organske molekule kao što su voda i aminokiseline (Rudolf et al., 2012). Iz pomenutih razloga poznavanje karakteristika transporta planetezimala iz jednog dela planetarnog sistema u drugi od velikog je značaja za razumevanje dugoročne evolucije čitavog sistema.

Transport malih tela kroz planetarni sistem nastaje usled dinamičke evolucije orbita tih objekata koja se javlja usled gravitacionih i negravitacionih poremećaja kretanja. WASP-47 planetarni sistem sastoji se od 4 planete od kojih su dve veoma masivne, sa masama nešto većim od mase Jupitera. Takođe, matična zvezda u ovom sistemu je tipa G9V (Vanderburg et al., 2017), po karakteristikama slična Suncu pa je samim tim i nivo negravitacionih efekata sličan onome u Sunčevom sistemu. Navedeni podaci ukazuju da je dinamika planetezimala u WASP-47 sistemu složena, kao i da su njihove orbite na dužim vremenskim skalama podložne značajnim promenama.

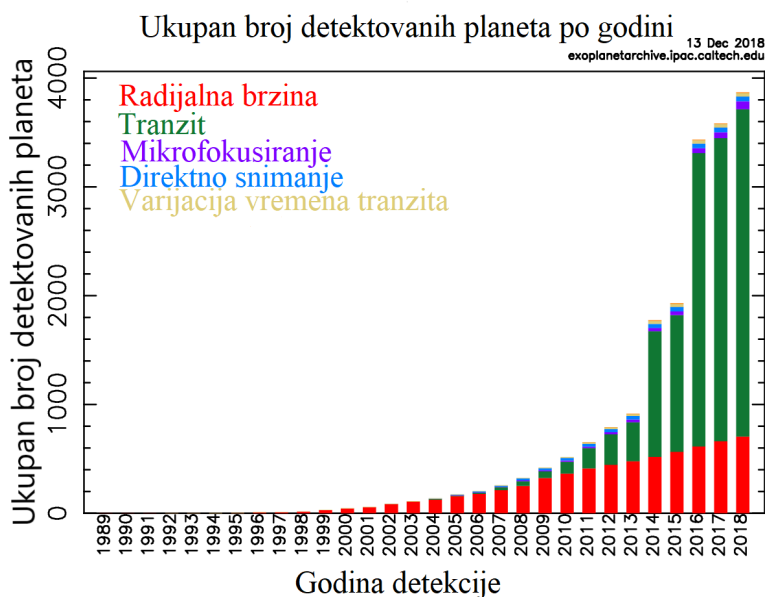
Cilj master rada je da se ispita stepen i efikasnost transporta planetezimala u WASP-47 sistemu i da se na osnovu toga proceni njihov značaj za globalnu evoluciju celog sistema. U ovu svrhu biće korišćene numeričke integracije orbita kako bi se simulirala dinamička evolucija, a zatim će na osnovu poređenja numeričkih rezultata sa analitičkim teorijama kretanja biti identifikovani glavni mehanizmi odgovorni za transport planetezimala.

Tekst u ovom radu organizovan je na sledeći način: u glavi 2. Ekstrasolarne planete dat je kratak pregled osnovnih karakteristika ekstrasolarnih planeta i njihove detekcije. U glavi 3. Dinamika planetarnih sistema kratko su opisani orbitalni elementi, a zatim u 3.1 i 3.2 pojašnjeni problemi 2- i n-tela, kao i ograničen problem tri tela u 3.3. U istom poglavlju opisani su gravitacioni poremećaji (3.4), rezonance u srednjem kretanju (3.5) i sekularne rezonance (3.6). Negravitacioni poremećaji opisani su u četvrtoj glavi "Mala tela u planetarnim sistemima", kao i stabilnost kretanja (4.4) i značaj malih tela (4.5). U narednoj, petoj glavi, opisan je sistem WASP-47. U šestoj glavi je opisana metodologija rada, dati su rezultati i diskusija, a u sedmoj su izneti neki zaključci ovog rada. Na kraju je priložena sva korišćena literatura.

2 Ekstrasolarne planete

U poslednjih nekoliko stotina godina naše saznanje o planetama je bilo ograničeno na Sunčev sistem sa osam planeta (Xie, 2018). Zahvaljujući sačuvanim pisanim dokumentima poznato nam je kako su grčki atomisti u 5. veku pre nove ere poimali život van Zemlje. Iako je još početkom 18. veka Isak Njutn u svom delu, kao dodatku drugom izdanju "Matematički principi prirodne filozofije", izložio mogućnost postojanja ekstrasolarnih (vansolarnih) planeta, planeta koje kruže oko neke druge matične zvezde izvan našeg planetarnog sistema¹, tek 1992. su astronomi Wolszczan and Frail (1992) objavili otkriće planete oko pulsara PSR 1257+12 udaljenog od nas 980 svetlosnih godina. To se ujedno smatra prvom otkrivenom planetom van Sunčevog sistema. Moderna era otkrića počela je 1995. kada je prvi put otkrivena planeta oko zvezde slične Suncu, 51 Pegasi b (Mayor & Queloz, 1995). Ono što je bilo interesantno za ovu planetu jeste što je njena procenjena masa slična masi Jupitera i nalazi se veoma blizu matične zvezde (Rice, 2014).

Usled napretka u detekciji ekstrasolarnih planeta koristeći različite tehnike sada znamo da skoro svaka zvezda u Mlečnom putu ima najmanje jednu planetu u orbiti oko nje (Cassan et al., 2012). Upravo usled pronalaska novih metoda detekcije i usavršavanjem postojećih svake godine se broj otkrivenih ekstrasolarnih planeta povećava i do kraja 2018. potvrđeno je 3777 otkrivenih planeta² i 2737 kandidata (videti sliku 1). Na osnovu dosadašnjih podataka uočen je širok spektar mogućih orbitalnih parametara i fizičkih svojstava i neke od njih su: centralna zvezda spektralnog tipa od F do M, planeta mase nešto veće od Meseca pa do više od 20 masi Jupitera, orbitalni periodi manji od jednog dana pa do više od 15 godina, planete čija orbita može da bude kružna ili da je karakteriše ekscentričnost koja može biti veća od 0.9. Takođe veliki je raspon vrednosti udaljenosti na kojima se planete mogu naći u odnosu na svoju matičnu zvezdu, od 0.014 AJ pa i na više od 670 AJ (Murray & Correia, 2010).



Slika 1: Ukupan broj detektovanih planeta po godinama. Preuzeto sa exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/exoplanetplots/

Svojstva mnogih ekstrasolarnih planetarnih sistema su poprilično drugačija od onoga što smo možda očekivali na osnovu saznanja koja imamo o Sunčevom sistemu, jer su mnoge otkrivene planete koje su blizu matične zvezde vrući Jupiteri i mnoge od njih imaju izrazito ekscentrične orbite (Marcy et al., 2012), za razliku od planeta u našem solarnom sistemu (Rice, 2014). Kasnija istraživanja su pokazala da su vrući Jupiteri veoma retke planete (u oko 100 zvezda sličnih Suncu ima samo jedan vrući Jupiter (Howard et al., 2012)). Zbog ograničenja i teškoća detektovanja planeta Zemljine veličine usled manjeg uticaja na matičnu zvezdu mogli bismo reći da su u Svemiru dominantne masivne planete. Međutim, Keplerovom misijom (NASA projekat) otkrivene su druge, manje, planete koje su takođe po svojim karakteristikama značajno drugačije od

¹exoplanets.nasa.gov

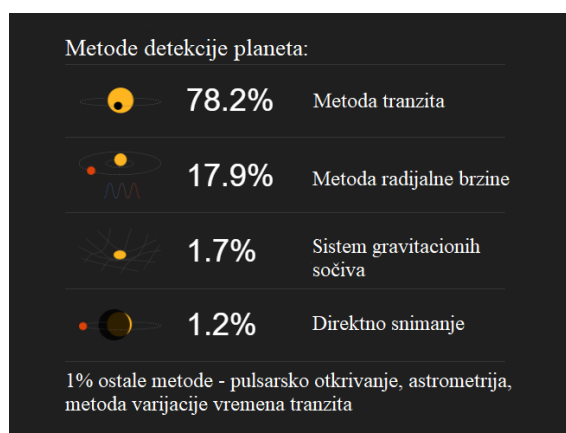
²exoplanetarchive.ipac.caltech.edu

planeta u Sunčevom sistemu ali su brojne i učestale u Galaksiji (Xie, 2018). Do sada najmanja otkrivena planeta je nešto veća od Meseca, Kepler-37b, najverovatnije stenovita bez atmosfere ili vode, slična Merkuru (Barclay et al., 2013). Danas je većina novih otkrivenih planeta u orbiti oko matične zvezde unutar orbite Merkura i veličine između Zemlje i Neptuna, te ih nazivamo Super-Zemljama. Procena je da su ovakve planete široko rasprostranjene i da čak 50% zvezda poput Sunca u svom sistemu ima planete manje od Neptuna sa orbitalnim periodom kraćim od 100 dana (Howard et al., 2012).

Razumevanje ovih egzo-sistema i njihovo proučavanje različitim metodama značajno doprinosi boljem razumevanju Sunčevog sistema i Univerzuma (Greicius, 2018). Planete u našem sistemu možemo da posmatramo jedino u trenutnoj fazi evolucije, dok nam posmatranje drugih planetarnih sistema daje mogućnost da promatramo planete različite starosti, od protoplanetarnog diska gde se planete još uvek formiraju do planetarnih sistema starih preko 10 milijardi godina. Sa druge strane, o Sunčevom sistemu imamo daleko bolje podatke nego o egzo-sistemima pa se na taj način znanja o planetarnim sistemima dopunjuju.

Jedna od predloženih klasifikacija ekstrasolarnih planeta uključuje klasifikaciju na osnovu mase planeta (Stern & Levison, 2002) ili zastupljenog nivoa elemenata značajnih za postojanje života (Lineweaver & Robles, 2006). Stern and Levison (2002) su naveli da "svaka klasifikacija treba biti fizički utemeljena, koja se može odrediti na lako opaženim karakteristikama, kvantitativno, jedinstveno, robusno prema novim otkrićima, a temelji se na najmanjem mogućem kriterijumu".

Metode detekcije Ekstrasolarne planete je izuzetno teško detektovati direktnim posmatranjem jer su znatno slabijeg sjaja od zvezde oko koje kruže što znači da je većina potvrđenih vansolarnih planeta detektovana indirektno. Najuspešnije indirektno metode su metode radijalne brzine i tranzita koje se pored otkrivanja planeta koriste i za potvrđivanje već detektovanih. Još neke od zastupljenih metoda su metoda sistema gravitacionih sočiva, direktno snimanje, astrometrija (pogledati sliku 2).



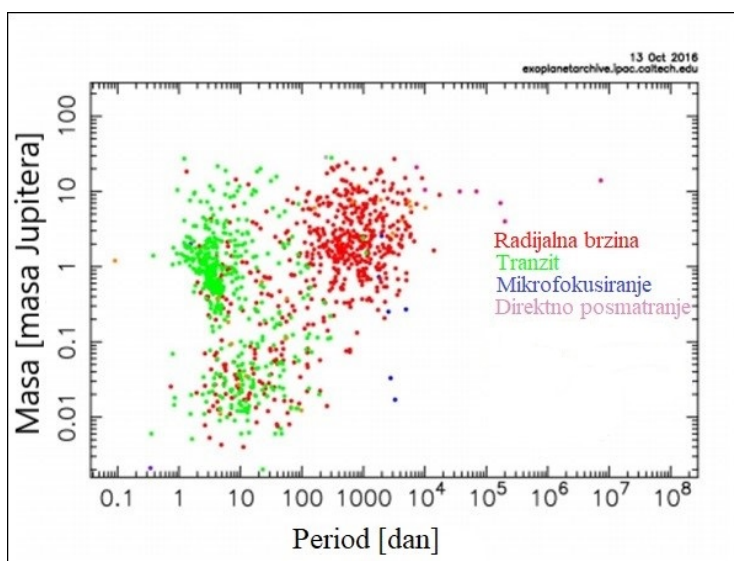
Slika 2: Slika prikazuje procenat ekstrasolarnih planeta detektovanih različitim tehnikama. Preuzeto sa exoplanets.nasa.gov

Otkrivanje planetarnih tranzita je među najstarijim metodama otkrivanja planeta, zajedno sa metodom radijalne brzine (RB). Metoda tranzita zasniva se na promeni sjaja zvezde kada planeta prolazi između posmatrača i matične zvezde. Prednost ovog metoda je što daje veliki broj parametara prilikom tranzita planete, pogotovo u kombinaciji sa metodom radijalne brzine (Deeg & Alonso, 2018). Međutim, postoje i nedostaci a to je mala verovatnoća da se tranzit pojavi u slučajno orijentisanom planetarnom sistemu. To znači da bi planeta bila detektovana fotometrijom, mora da preseče liniju posmatranja tj. da prođe tačno između Zemlje i posmatrane zvezde. Drugi problem jeste trajanje tranzita planete koji je suviše kratak u poređenju sa njenim orbitalnim periodom. Još jedan nedostatak je što se prilikom posmatranja dvojnih eklipsnih sistema zvezda može lako razaznati kao planeta koja kruži oko matične zvezde. Od značaja za detekciju vansolarnih planeta je posmatranje varijacije vremena tranzita- da li je vreme tranzita uvek isto ili postoje varijacije u njemu. Ovom metodom mogu se otkriti dodatne planete u planetarnom sistemu sa masama koje su potencijalno kao i masa Zemlje (Deeg, 1998). RB metod, zajedno sa metodom tranzita, je bio predložen još 1952. u radu Oto Struvea (Deeg & Alonso, 2018). Do 2012.

ovim metodom je otkriveno najviše vansolarnih planeta. Umesto planete posmatra se matična zvezda i meri se njeno kretanje. Ovom metodom možemo da procenimo masu planete, ali da bismo odredili pravu masu planete potrebno je znati inklinaciju i . Problem nestaje ukoliko planeta koja se posmatra vrši tranzit. U tom slučaju inklinacija je poznata pa je moguće odrediti tačnu masu planete (Zendejas, Segura, & A.C.Raga, 2010).

RB metoda detekcije isključuje lažno pozitivne rezultate. Glavni problem ove metode je njena neprimenjivost na zvezde masivnije i toplije od Sunca jer imaju manje spektralnih karakteristika. Problem se javlja i kod zvezda manje mase od Sunca koje su slabijeg sjaja pa je zbog manjka fotona nemoguće dobiti podatke zadovoljavajućeg kvaliteta (Stevens & Gaudi, 2013). Ujedno nije moguće posmatrati stotine zvezda odjednom sa jednim teleskopom (za razliku od metode tranzita).

Dakle, različitim metodama detekcije mogu se odrediti različite osobine ekstrasolarnih planeta i njihovih orbita. Slika 3 prikazuje mase planeta, izraženih u masama Jupitera, u funkciji perioda (u danima). S obzirom da će većina matičnih zvezda imati masu sličnu masi Sunca, period od približno 350 dana odgovara velikoj poluosi od 1AJ na x osi. Različite boje na slici predstavljaju različite metode kojima su planete detektovane. Planete koje su otkrivene metodom tranzita (zeleno boje) se uglavnom nalaze u blizini matične zvezde, dok se mikrofokusanjem³ (plava boja) uglavnom detektuju planete koje su malo udaljenije od zvezde ali može da detektuje planete masa u širokom rasponu. Ružičastom bojom je predstavljeno direktno snimanje i ovom metodom su detektovane masivne planete na velikim udaljenostima, dok metoda radijalnih brzina (crvena) je najpogodnija za otkrivanje masivnijih planeta (reda mase Jupitera) koje se nalaze blizu matične zvezde. Ono što vidimo na ovoj slici jeste da smo do sada detektovali planete u širokom rasponu masa i poluprečnika. Neke su veoma blizu matičnoj zvezdi, mnogo bliže nego planete u Sunčevom sistemu, a neke od tih bliskih planeta imaju masu malo veću od Zemlje. Druge su pak mase približne Neptunu, i takođe, javljaju se i veoma masivne planete tj. vrući Jupiteri, a takve mase u našem sistemu se javljaju samo u spoljašnjem delu sistema (Rice, 2014).



Slika 3: Slika prikazuje mase detektovanih planeta izražene u masama Jupitera u funkciji njihovog orbitalnog perioda. Različite boje su različite metode detekcije. Slika preuzeta iz Rice (2014)

Direktno snimanje ekstrasolarnih planeta daje mogućnost da se utvrdi spektar njihove atmosfere (ako je imaju) koji se potom analizira, što je prvi korak ka proceni zastupljenih hemijskih elemenata koji su neophodni za život kakav poznajemo, te da li je planeta nastanjiva ili ne. Međutim, kako je već rečeno, većina planeta je otkrivena indirektnim metodama ali u nekim slučajevima primenom metode tranzitne spektroskopije možemo nešto da zaključimo o atmosferi vansolarne

³Mikrofokusanje nastaje kada se svetlost pozadinskog objekta iskrivi pod uticajem gravitacije bližeg objekta (prema opštoj teoriji relativnosti, gravitacija savija prostor), koji ga, posmatrano sa Zemlje vizuelno zaklapa. Svetlost koja prolazi pored masivnog tela menja pravac kretanja usled savijenosti prostora. To je indikator da je svetlost "naišla" na neku egzoplanetu. U tom slučaju, gravitacija bližeg objekta deluje kao sočivo. Dakle, da bi se metoda mikrofokusanja uspešno primenila potrebno je da se bliži objekat (sočivo) nađe u liniji između pozadinskog (posmatranog) objekta i posmatrača sa Zemlje.

planete (Rice, 2014). Saznanje o zastupljenim hemijskim elementima u atmosferi vansolarne planete može poboljšati naše razumevanje o formiranju planeta i njihovoj evoluciji čime je potraga za drugim planetama delom i motivisana (Nikku, Knutson, & Desert, 2010). Jedan od glavnih ciljeva jeste da se nađe nastanjiva planeta, a kako ne znamo sve moguće uslove koji bi bili odgovarajući za formiranje života, obično nastanjivu zonu oko zvezde definišemo kao zonu u kojoj voda može da ostane u tečnom stanju (Perryman, 2011). Postoje mnogi drugi faktori koji mogu uticati na veličinu ove nastanjive zone (kao što su masa, radijus i temperatura zvezde, efekat staklene bašte, albedo planete, orbitalne karakteristike i td.) ali za zvezdu sličnu Suncu, procena lokacije ove zone određena je fotolizom vode i gubitkom vodonika (usled efekta staklene bašte (Seager, 2013)), dok se za spoljašnju uzima trenutak formiranja CO_2 oblaka (Kopparapu, 2013). Ovaj raspon nastanjive zone je malo veći za planete veće od Zemlje (Kasting et al., 1993).

3 Dinamika planetarnih sistema

Planetarni sistem je skup gravitaciono povezanih objekata koji orbitiraju oko jedne ili više zvezda. Uopšteno govoreći planetarni sistemi opisuju sisteme sa jednom ili više planeta iako se takvi sistemi mogu sastojati i od tela poput planeta patuljaka, asteroida, prirodnih satelita, meteoroida i kometa. Kretanje objekata pod međusobnim uticajem gravitacije postaje komplikovanije što ih je više u sistemu, a javljaju se i neke druge sile koje se nazivaju poremećajima i raznovrsnog su porekla (Anđelić, 1983). Kod tih objekata javljaju se i bliski prilazi, rezonance i dugotrajne sekularne interakcije dok se pod uticajem zračenja javljaju negravitacioni poremećaji. Prisustvo gasnog diska u ranoj fazi dovodi do dodatne dinamike u sistemu. Ovi efekti mogu dovesti do orbitalne evolucije, čak i do sudara ili izbacivanja objekata iz sistema (Butkevich, 2018; Raymond, A.Izidoro, & Morbidelli, 2018).

U svakom planetarnom sistemu planete i mala tela orbitiraju oko matične zvezde. Ta kretanja oko zvezde se mogu opisati Keplerovim zakonima (ima ih tri):

1) Planete oko svoje matične zvezde opisuju eliptične putanje pri čemu se zvezda nalazi u zajedničkoj žiži.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} \quad (1)$$

gde je r radijus vektor planete, p parametar elipse, e je ekscentričnost i v je prava anomalija.

2) Radijus vektor planete za jednaka vremena opisuje jednake površine.

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{dv}{dt} = const. \quad (2)$$

pri čemu se konstanta naziva sektorskom brzinom.

3) Kvadrati perioda obilaženja planeta oko matične zvezde srazmerni su kubovima velikih poluosa njihovih putanja.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_* + M)}{4\pi^2} \quad (3)$$

gde je a velika polusa, T orbitalni period, M_* masa zvezde izražena u masama Sunca, M masa planete izražena u masama Sunca i G gravitaciona konstanta (Šegan & Pejović, 2006). Međutim, ovi zakoni nisu dovoljni da opišu gde se tačno u orbiti nalazi planeta, ili kako je orbita orijentisana, Umesto toga, moraju se odrediti vrednosti orbitalnih elemenata. Za jednoznačno opisivanje putanje oko matične zvezde koristi se 6 orbitalnih elemenata. To su velika polusa (a), ekscentricitet (e), inklinacija (i), srednja anomalija (M), longituda uzlaznog čvora (Ω) i argument perihela (ω). Elementi a i e određuju oblik i veličinu elipse, i , ω i Ω određuju položaj elipse u prostoru (sa ovih pet elemenata je jedinstveno određena orbita tela oko Sunca), a M određuje gde se nebesko telo nalazi na toj orbiti.

U slučaju kada su $i = 0$ i/ili $e = 0$ ne može se definisati položaj čvorova i/ili se ne može odrediti pravac perihela. Stoga su i i ω i M , ili samo M u drugom slučaju, neodređeni i koriste se dva orbitalna ugla: longituda perihela (ϖ) i srednja longituda (λ) definisana kao $\omega + \Omega$ i $M + \omega + \Omega$, respektivno (Butkevich, 2018; Milankovic, 1935). O uticaju poremećaja na orbitalne elemente će biti reči kasnije.

Između ostalog razlikujemo dva osnovna tipa orbitalnih elemenata asteroida: oskulatorni i sopstveni elementi. Oskulatorni elementi su oni koje bi telo imalo kada bi nestala sva druga poremećajna tela, dakle kada bismo imali problem dva tela. Koriste se za izračunavanje efemerida ali zbog kratkoperiodičnih oscilacija koje se javljaju s vremenom usled gravitacionih i negravitacionih poremećaja ovi elementi nisu pogodni za analizu dinamičke evolucije asteroida. Sopstveni elementi, koji se dobijaju iz oskulatornih elemenata uklanjanjem kratkoperiodičnih i dugoperiodičnih poremećaja, su pak pogodni za analizu kretanja asteroida na dugim vremenskim intervalima jer predstavljaju kvazi integrale kretanja kao relativno dobru aproksimaciju neintegrabilnog problema N tela. Sopstveni elementi asteroida su a_p , e_p , i_p , Ω_p i ϖ_p ali se najčešće koriste samo tri sopstvena elementa a_p , e_p i i_p (Heppenheimer, 1979).

Kombinacija i razumevanje Keplerovih zakona i univerzalnog zakona gravitacije imali su snažan uticaj na naše razumevanje Univerzuma. Univerzalni zakon gravitacije navodi da svaka čestica privlači drugu česticu u Svemiru silom koja je direktno proporcionalna proizvodu njihovih masa i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti njihovih centara masa.

$$F_{grav} = \frac{GMM_1}{d^2}, \quad (4)$$

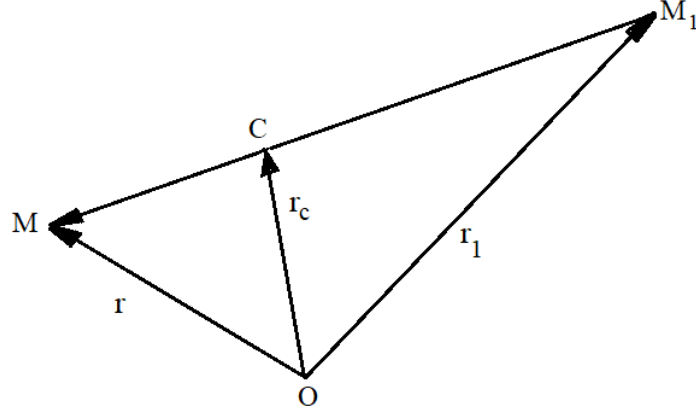
gde je G gravitaciona konstanta, d razdaljina između centra masa, a M i M_1 su mase dva objekta. Primenom ovog Njutnovog zakona na problem 3 i više tela pokazano je da uzajamne planetarne interakcije rezultiraju elipsama koje više nisu fiksirane. Umesto toga orbite planete polako rotiraju u prostoru na vremenskoj skali između 10^5 i 10^6 godina. Na osnovu kasnijih proračuna i posmatranja, univerzalni zakon gravitacije prihvaćen je kao vrlo dobra aproksimacija, a kao bolji model gravitacije primenjuje se Ajnštajnova teorija relativnosti (Murray & Dermott, 1999).

3.1 Problem 2 tela

Problem dva tela je možda najjednostavniji integrabilni problem u dinamici solarnog sistema. To se odnosi na interakciju dve materijalne tačke koje se kreću pod uzajamnom gravitacionom privlačnošću tj. usled Njutnovog univerzalnog zakona gravitacije. Širok spektar masa u solarnom sistemu dozvoljava da se orbite većine planeta i satelita aproksimiraju problemom dva tela i njihovim kretanjem koje se sastoji od manjeg tela koje se kreće oko mnogo većeg centralnog tela. Efekti drugih tela se obično mogu smatrati kao ona koja vrše poremećaje. Međutim, u ovom problemu se sistem smatra izolovanim od ovakvih uticaja (Milankovic, 1935). U ovakvom sistemu glavni zadatak je odrediti kretanje ta dva tela u odnosu na jedan nepomični kordinatni sistem iz zadanih početnih uslova. Problem dva tela predstavlja sistem običnih diferencijalnih jednačina drugog reda i rešavanjem tog sistema se dobija rešenje koje zavisi od vektora početnog položaja i brzine (Milankovic, 1935). Ako bismo razmatrali sistem od dva tela čije su mase M i M_1 , njihovi položaji u odnosu na neki nepokretan pol O bili bi određeni vektorima položaja r i r_1 (videti sliku 4). Sila kojom telo M deluje na telo M_1 je:

$$\vec{F} = G \frac{MM_1}{r'^3} (\vec{r} - \vec{r}_1), \quad (5)$$

gde je G gravitaciona konstanta, a $r' = |r - r_1|$ rastojanje između dva tela. Sila kojom telo M_1 deluje na M je ista ali suprotnog znaka.



Slika 4: Dva tela masa M i M_1 i njihovi vektori položaja u odnosu na neki nepokretan pol O . Slika je preuzeta iz [Anđelić \(1983\)](#)

Vektorske diferencijalne jednačina kretanja objekta u problemu dva tela su ([Milankovic, 1935](#)):

$$\vec{f} = G \frac{M_1}{r'^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}), \quad (6)$$

i

$$\vec{f}_1 = G \frac{M}{r'^3} (\vec{r} - \vec{r}_1) \quad (7)$$

gde je $r' = |\vec{r} - \vec{r}_1|$. Za određivanje centra mase C dinamičkog sistema i uzimajući u obzir ukupnu masu sistema M' , dobijamo:

$$(M + M_1)\vec{r}_c = M'\vec{r}_c, \quad (8)$$

gde je \vec{r}_c vektor položaja centra mase a $M' = M + M_1$ ukupna masa oba tela. S obzirom na treći Njutnov zakon prema kome zbir sila mora biti nula i diferenciranjem dva puta po vremenu jednačine 8, sledi da centar mase nema ubrzanje tj. da se kreće pravolinijski i uniformno ([Milankovic, 1935](#)). Ako bismo proučavali kretanje jednog od tela u odnosu na drugo, za diferencijalnu jednačinu kretanja tela M u odnosu na telo M_1 dobili bismo ([Anđelić, 1983](#)):

$$\frac{d\vec{r}'^2}{dt^2} = -G \frac{M + M_1}{r'^3} \vec{r}', \quad (9)$$

gde je $\vec{r}' = \vec{r}_1 - \vec{r}$ vektor položaja tela mase M u odnosu na telo mase M_1 . Ista jednačina se dobija i za određivanje kretanje tela M_1 u odnosu na M samo sa suprotnim znakom. S obzirom na strukturu ove jednačine koja odgovara onim jednačinama koje opisuju kretanje oko privlačnog centra u gravitacionom polju, dobijamo da se dva tela kreću jedno oko drugog po konusnim preseccima kao da je u centru privlačenja ukupna masa sistema ([Anđelić, 1983](#)). Za stvarne planetarne sisteme problem 2 tela je idealizovan model. Nezavisno od toga da li se primenjuje na planetu ili malo telo možemo uzeti u obzir da uvek postoji barem jedna druga planeta čiji gravitacioni uticaj treba uzeti u obzir jer ono može dovesti do promene eliptične orbite tela ([Rickman, 2007](#)).

3.2 Problem n tela

Uopšteniji problem je problem n tela i slično je definisan. Ovog puta kao zadatak da se usled proizvoljnog broja nebeskih tela iz inicijalnih uslova odredi njihovo kretanje. Takav sistem, gde sva tela međusobno interaguju jedino privlačnim gravitacionim silama jedni na druge, će evoluirati vremenom po drugom Njutnovom zakonu ([Milankovic, 1935](#)). Ako mase uočenih nebeskih tela označimo od M_1 do M_n i vektore položaja tela u odnosu na nepomični pol O u jednom odabranom koordinatnom sistemu sa r_1 do r_n , usled privlačnog dejstva ostalih masa na i -tu masu M_i njeno kretanje možemo izraziti kroz diferencijalnu jednačinu (kojih će ukupno biti n):

$$\vec{f}_i = -G \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{e_{ij}^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

gde je $\vec{e}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ uzajamni položaj tela M_i i M_j i pri čemu j ne uzima vrednost $j = i$. Ova vektorska diferencijalna jednačina se može izraziti i u skalarnom obliku u odnosu na Dekartov sistem pravougljih koordinata. Dalje, za n vektorskih diferencijalnih jednačina drugog reda i $3n$ skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja u najopštijem slučaju, mogu se izvesti samo tri vektorska i jedan skalarni integral što nije dovoljno za potpuno rešenje dinamičkog problema u kretanju n -tela. Prvi integral sistema vektorskih diferencijalnih jednačina koji kaže da je količina kretanja uočenog sistema od n -tela u vremenu nepromenjiva glasi:

$$\sum_i M_i \vec{v}_i = \vec{A}, \quad (11)$$

gde je na levoj strani količina kretanja uočenog dinamičkog sistema od n -tela, a desno konstantan vektor nezavisan od vremena. Ovaj integral smo dobili imajući u vidu treći Njutnov zakon i rastavljanjem svih sila koje međusobno deluju na tela u parove i integracijom nakon sabiranja svih n parova. Drugi vektorski integral proističe iz integracije prvog:

$$\sum_i M_i \vec{r}_i = \vec{A}t + \vec{B}, \quad (12)$$

gde je \vec{B} konstantno i nezavisno od vremena i iz kog dobijamo da se centar mase sistema od n -tela kreće pravolinijski u odnosu na neki nepokretni referentni sistem. Prva dva integrala su integrali količine kretanja, a treći vektorski integral predstavlja integral kinetičkog momenta i, takođe, integral površine problema od n -tela i glasi:

$$2 \sum_i M_i \vec{S}_i = \vec{C}, \quad (13)$$

gde je S_i sektorska brzina tela M_i , a C konstantan vektor u odnosu na vreme. Na kraju, poslednji, ali skalarni, integral problema je integral energije sistema n -tela i glasi (Andelić, 1983):

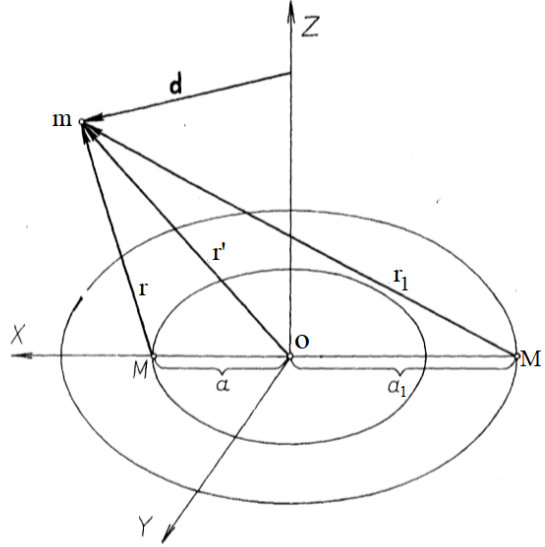
$$T = U + h, \quad (14)$$

gde je T kinetička energija, U funkcija sile a h konstanta. Kao što je rečeno, za problem n -tela možemo odrediti 3 vektorska i 1 skalarni integral iz čega možemo odrediti samo 10 jednačina a to nije dovoljno za rešenje ovog problema (Milankovic, 1935).

3.3 Ograničeni problem tri tela

Posebnu pažnju možemo obratiti na ograničeni problem tri tela. U ovom sistemu imamo dva tela masa M i M_1 koja se kreću oko svog zajedničkog težišta po Keplerovim elipsama, a treće telo u odnosu na druga dva ima zanemarljivu masu m i ono ne privlači druga dva tela niti remeti njihovo kretanje (Milankovic, 1935). Međutim, ako su inicijalni uslovi kretanja ova dva glavna tela takvi da se kreću po kružnim, koplanarnim, a ne eliptičnim orbitama, imamo naizgled idealizovan model ali dobru aproksimaciju za mala tela poput asteroida i kometa za vremenski kratak period koji se zove kružni ograničeni problem tri tela (Milankovic, 1935). Iako se čini da je ovaj problem malo primenjiv u Sunčevom sistemu jer orbite objekata nisu koplanarne i kružne, za određene sisteme se kretanje sistema može lako razumeti relativno jednostavnom analizom.

Za opisivanje kretanja malog tela obično se koristi Dekartov pravougli koordinatni sistem OXYZ (baricentrični sistem) sa početkom u centru masa O tela M i M_1 (videti sliku 5).



Slika 5: Dekartov pravougli koordinatni sistem OXYZ sa početkom u centru masa O tela M i M_1 . Ovo je koordinatni sistem koji se koristi za pojašnjene redukovano problema tri tela u kome je masa malog tela m zanemarljiva u odnosu na druga dva objekta. Slika je preuzeta iz [Andelić \(1983\)](#).

Vreme za koje oba tela obiđu oko svojih putanja je T , tj. vreme za koje se koordinatni sistem obrne oko svoje ose Z . Ugaona brzina te rotacije n je data kao ([Milankovic, 1935](#)):

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (15)$$

Ravan OXY se poklapa sa ravni orbita tela M i M_1 , a čija se orbita nalazi na osi OX i orijentisana je od M_1 ka M . Osa OZ je normalna na ravan orbita ova dva velika tela i rotacija sistema je usmerena u pravcu Z ose. OY sa OX i OZ formira sistem i ovako formirani koordinatni sistem naziva se Jakobijev. U opštem slučaju malo telo m nalazi se van ravni orbita dva velika tela. Da bismo posmatrali malo telo u ravni orbita dva glavna objekta, pored njihovih gravitacionih sila koje deluju na masu m treba uvesti centrifugalnu silu F_c jer se sve posmatra u odnosu na pokretni sistem:

$$\vec{F}_c = \frac{mn^2 d^2}{d} \vec{d}_0 = mn^2 \vec{d}, \quad (16)$$

gde je d dužina normale iz tela spuštenu na CZ osu, \vec{d}_0 jedinični vektor te normale orijentisan od ose CZ ka telu, i Koriolisovu silu F_k :

$$F_k = 2m(\vec{v} \times \vec{n}), \quad (17)$$

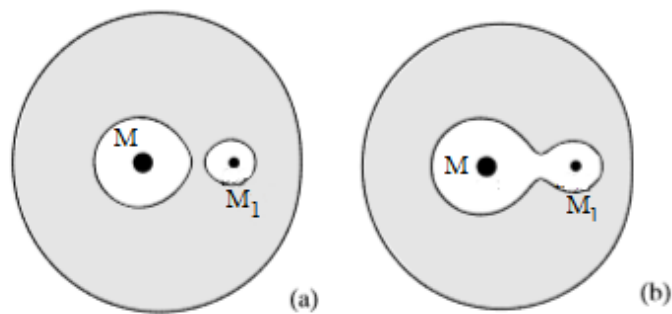
gde je $\vec{v} = \frac{d\vec{r}'}{dt}$. Dakle, vektorska diferencijalna jednačina kretanja malog tela u odnosu na centar mase C kao pol je:

$$\frac{d\vec{r}'}{dt^2} = -G\frac{M}{r^3}\vec{r} - G\frac{M_1}{r_1^3}\vec{r}_1 + n^2\vec{d} + 2(\vec{v} \times \vec{n}), \quad (18)$$

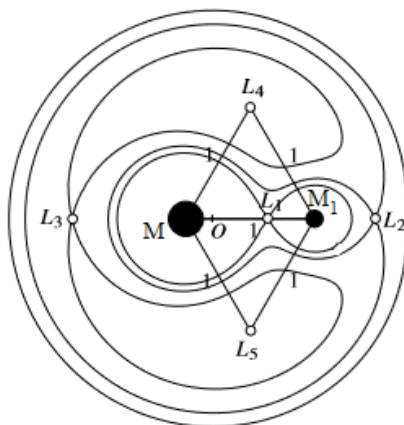
gde je prvi član sa desne strane gravitaciona sila od tela M , a drugi član gravitaciona sila od tela M_1 . Jednačina u skraćenom obliku može da se napiše kao ([Andelić, 1983](#)):

$$\frac{d\vec{r}'}{dt^2} = \text{grad}U + 2(\vec{v} \times \vec{n}) \quad (19)$$

Integracijom ove jednačine kretanja dobijamo $C_j = 2U - v^2$ Jakobijevu konstantu kretanja iliti Jakobijev integral i to je jedini integral kružnog ograničenog problema tri tela. Ne možemo ga iskoristiti za tačno određivanje orbitalnog kretanja ali ga možemo iskoristiti da odredimo region u kome se čestica ne može kretati ([Rickman, 2007](#)). Zbog jednostavnosti posmatraćemo ovo kretanje u XY ravni. Dakle, ako izjednačimo $v = 0$, možemo odrediti regije gde je brzina malog tela nula. Uzimajući u obzir ovu regiju definiše se predeo u kom je kretanje manjeg objekta moguće ili nemoguće i dobijamo takozvanu Hilovu graničnu krivu (videti sliku 6).



Slika 6: Krive koje označavaju područje u kom je brzina manjeg tela jednaka nuli za različite vrednosti Jakobijeve konstante. Sivi region označava deo u kome kretanje trećeg tela nije moguće. Slika je preuzeta iz [Rickman \(2007\)](#)



Slika 7: Lagranžove tačke. Slika je preuzeta iz [Milankovic \(1935\)](#)

Ako se pod određenim inicijalnim uslovima asteroid u inicijalnom momentu našao orbitirajući oko tela mase M (unutar bele površine. Slika 6a), siva površina predstavlja područje u koje asteroid ne može da dođe jer ne može da pređe preko granične krive. U ovom slučaju malo telo će se zvati satelitom tela mase M . Isti slučaj je i ako orbitira oko tela mase M_1 . Ako je vrednost C_j takva da Hilova granična kriva izgleda kao na slici 6b), telo koje orbitira oko tela M potencijalno, u nekom momentu, može da pređe u orbitu oko tela mase M_1 ali nikada neće moći da bude izbačeno iz sistema. Kada je Jakobijev integral dovoljno velik, region mogućeg kretanja je podeljen na 2, čak i 3, odvojena dela pri čemu kretanje tela sve vreme ostaje ograničeno u okviru jednog od tih regiona ([Marchal & Bozis, 1982](#)). U kružnom slučaju u ravni CXY telo m je u relativnoj ravnoteži prema M i M_1 u tačkama L_4 i L_5 . To su Lagranžove tačke libracije ograničenog problema tri tela koje se smatraju stabilnim (videti sliku 7). Primera radi, u sistemu Sunce-Jupiter postoji nekoliko hiljada asteroida, takozvani Trojanci, smešteni u tačkama L_4 i L_5 . U kolinearnom slučaju mogu postojati još tri tačke L_1 , L_2 i L_3 koje se nazivaju Ojlerove tačke libracije i može se reći da su generalno nestabilne ([Andelić, 1983](#)).

Tokom bliskih prilaza Jakobijev integral ostaje konstantan ([Murray & Dermott, 1999](#)), ali kod a , e i i malog tela dolazi do promene. Aproksimacija odnosa orbitalnih elemenata malog tela pre i posle bliskog prilaza je data kao

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)} \cos i = \frac{1}{2a_1} + \sqrt{a_1(1-e_1^2)} \cos i_1, \quad (20)$$

gde su a , e i i inicijalni a a_1 , e_1 i i_1 orbitalni elementi malog tela nakon bliskog prilaza. Ovaj odnos se naziva Tisserandov odnos ([Murray & Dermott, 1999](#)). Dakle, Tisserandov parametar T je izveden iz Jakobijevog integrala i prvobitno je bio namenjen za proveru identifikovanog objekta, posebno

otkrivenih kometa sa svrhom utvrđivanja da li je već identifikovana ili novootkrivena (Carusi, Kresak, & Valsecchi, 1995). Određivanje parametra T u odnosu na neku drugu planetu se računa po formuli

$$T = \frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_p}(1-e^2)\cos(i)} \quad (21)$$

gde su a , e i i orbitalni elementi malog tela, a a_p je velika poluosa tela koje vrši poremećaj (Kresak, 1967). Tiserandov parametar je koristan za razumevanje ishoda bliskih prilaza upoređivanjem dinamičkih osobina orbite malog tela pre i posle bliskog prilaza sa planetom, kao i određivanje relativne brzine objekta u momentu presecanja orbite planete. Iz toga potiču različite vrednosti Tiserandovog parametra za različite planete u interakciji sa određenim malim telom. U Sunčevom sistemu se Tiserandov parametar najčešće računa u odnosu na Jupiter jer ima najveći dinamički uticaj na komete i asteroide (Levison, 1996).

3.4 Gravitacioni poremećaji

Govoreći o problemu 2 tela, spomenuto je da se planete ili drugi manji objekti kreću oko centralnog tela skoro sasvim tako kao kada bi svako od tih tela bila samo pod uticajem centralnog objekta (najčešće matične zvezde). Slično važi i za satelite planeta koji se kreću tako kao da su samo pod uticajem privlačne sile svoje planete. Međutim, pošto izolovan sistem dva tela u prirodi ne postoji, trebaju se uzeti u obzir poremećaji u kretanju manjeg tela (ili tela koje se posmatra) u ovom dvojnomo sistemu prouzrokovano drugim objektima. Radi jednostavnosti razmotrićemo problem tri tela. Neka je dato jedno poremećajno telo mase M_1 . Masa malog tela čije kretanje želi da se posmatra je zanemarljiva, a masa Sunca, tj. tela oko koga se posmatrano telo kreće, je M_\odot . Imajući u vidu jednačinu 10, jednačina kretanja ovog malog posmatranog tela glasi:

$$\vec{f} = -\frac{GM_\odot}{r^3}\vec{r} - \frac{GM_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3}(\vec{r} - \vec{r}_1) - \frac{GM_1}{r_1^3}\vec{r}_1, \quad (22)$$

gde je \vec{r} vektor položaja malog tela u odnosu na Sunce, a r_1 heliocentrični radijus vektor. Prvi deo jednačine je uticaj Sunca na malo telo, drugi član je direktni poremećaj koji dolazi od uticaja poremećajnog objekta na malo telo, a treći član je indirektni poremećaj i zavisi od izbora koordinatnog sistema (ukoliko bi centar koordinatnog sistema bio u centru mase ovi poremećaji se ne bi pojavili). Prilikom bliskih prilaza, kada je udaljenost planete i malog tela dovoljno mala, direktni poremećaji mogu postati dominantni nasuprot gravitaciji zvezde čak i kada je masa planete mnogo manja (Murray & Dermott, 1999). Kod odsustva poremećajnog tela kretanje se odvija samo pod uticajem centralnog tela i svodi se na problem dva tela. Orbitalni elementi ostaju konstantni a srednja anomalija (M) se menja linearno u vremenu. Sa druge strane, ako se pojavi treće telo koje vrši poremećaje u kretanju posmatranog tela dolazi i do promene orbitalnih elemenata (Radović, 2017).

Jednačinu 22 možemo zapisati i kao:

$$\vec{f} = -\nabla\left(-\frac{GM_\odot}{r}\right) - \nabla R \quad (23)$$

gde je prvi član na desnoj strani ubrzanje koje potiče usled uticaja Sunca sa potencijalom $-GM_\odot/r$, a drugi član je mnogo manje perturbujuće ubrzanje izazvano potencijalom R , tačnije funkcijom poremećaja koju zapisujemo kao:

$$R = -GM_1\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} - \frac{\vec{r}_1\vec{r}}{r_1^3}\right), \quad (24)$$

gde ∇ označava gradijent vektora a $\vec{r}_1\vec{r}$ je skalarni proizvod vektora \vec{r}_1 i \vec{r} (Rickman, 2007). Funkciju poremećaja rešavamo razvojem u trigonometrijski red i opšti oblik za problem tri tela je dat kao (Radović, 2017):

$$R = GM_1 \sum S(a, a_1, e, e_1, i, i_1) \cos(j_1\lambda_1 + j_2\lambda + j_3\varpi_1 + j_4\varpi + j_5\Omega_1 + j_6\Omega) \quad (25)$$

gde je M_1 masa tela koje vrši poremećaj, $a_1, e_1, i_1, \varpi_1, \Omega_1$ njegovi orbitalni elementi, dok su a, e, i, ϖ, Ω orbitalni elementi tela čije se kretanje posmatra, j_i proizvoljne celobrojne konstante čija suma mora biti jednaka nuli, a funkcija $S(a, a_1, e, e_1, i, i_1)$ daje koeficijente koji su funkcije elemenata a, a_1, e, e_1, i, i_1 . Funkciju poremećaja razvijamo u trigonometrijski (kosinusni) red po uglovima

elementima (npr. argumentu perihela, longitudi čvora, srednjoj longitudi). Amplitude članova razvoja predstavljene su stepenim redovima po ekscentričnosti i nagibu, a čije su amplitude, linearne kombinacije tzv. Laplasovih koeficijenata i njihovih izvoda koji zavise od odnosa velikih poluosa putanja poremećajnog i malog tela koje trpi poremećaj. Znajući eksplicitni oblik funkcije S i dopuštene kombinacije uglova pod \cos funkcijom, možemo odrediti one članove koji čine dominantni doprinos jednačini kretanja i obrnuto, one koji se mogu zanemariti (Murray & Dermott, 1999). Znamo da kada imamo sistem u kome ne postoji poremećeno kretanje usred dejstva drugog tela, srednja longituda λ i λ_1 rastu linearno sa stopom n i n_1 . Suprotno tome, svi drugi uglovi su konstantni u sistemu bez poremećaja. Stoga, kada posmatramo sistem sa poremećajima λ i λ_1 brzo variraju, dok se u svim drugim uglovima javljaju spore varijacije. Reći ćemo da svaki argument koji ne uključuje srednju longitudu je sporo varijajući ugao tj. sekularni uglovi. To ne znači da su svi drugi uglovi brzi uglovi. Kao bitni ugao se javlja i rezonantni (kritični) ugao. Argument kosinusa u tom razvoju koji odgovara određenoj rezonanci (npr. rezonanca 3:2) naziva se kritičnim uglom σ . Za dat primer rezonance kritični ugao bi bio oblika: $\sigma = 3\lambda_2 - 2\lambda_1 - \varpi_1$. Bilo koji drugi argument koji nije niti sekularan, niti rezonantni, se smatra kratko periodičnim. Ako bismo želeli da odredimo koje promene (sekularne, kratko periodične) u kretanju tela koje posmatramo će biti dominantne, trebali bismo da nađemo uslove pod kojima je $j_1 n_1 + j_2 n \approx 0$, gde su j_1 i j_2 celi brojevi.

Pod uticajem poremećajne sile M se više ne menja linearno a dolazi i do kratko-periodičnih promena kod drugih orbitalnih elemenata (Takashi, 2016). Još jedna od pojava je precesija orbitalnih uglova ϖ i Ω (Radović, 2017). Kod gravitacionih fenomena, kao što su orbitalne rezonance, njihov odnos perioda može se izraziti kao odnos dva cela broja. One u velikoj meri povećavaju međusobni gravitacioni uticaj tela i u većini slučajeva to dovodi do nestabilnih interakcija dovodeći do promene orbite tela. Razlikujemo rezonance u srednjem kretanju i sekularne rezonance (Rickman, 2007).

3.5 Rezonance u srednjem kretanju

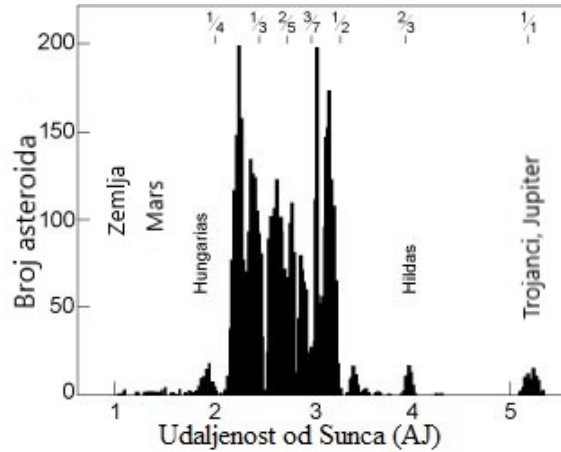
Rezonance u srednjem kretanju se javljaju kada dva tela imaju periode revolucije takve da se mogu predstaviti kao dva cela broja u srazmeri, tačnije $k_1 n_1 - k_2 n_2 \approx 0$ gde su k_1 i k_2 pozitivni celi brojevi, a n_1 i n_2 srednja dnevna kretanja malih tela ili planeta. Što su k_1 i k_2 manji brojevi to je rezonanca snažnija, mada zavisi i od udaljenosti i mase planete sa kojom je u rezonanci. Kao primer možemo uzeti rezonancu u Sunčevom sistemu Pluton-Neptun 2:3. Ceo broj 2 označava koliko obilaska oko centralnog tela (Sunca) je napravio Pluton, dok je do momenta susretanja ove dve planete na istoj "početnoj" poziciji Neptun napravio 3. Takođe, ako sa p obeležimo period planete, a $p+q$ period malog tela i ako su ta dva objekta u rezonanci, q tada označava red i snagu rezonance (Murray & Dermott, 1999). Širina ovih rezonanci u srednjem kretanju proporcionalna je ekscentricitetu orbite gde je sa povećanjem e rezonancom obuhvaćen i veći deo faznog prostora (Novaković, 2012).

Rezonance u srednjem kretanju imaju različite uticaje na kretanje objekata u njima. Mogu da dovedu do spore promene orbitalnih parametara (Nesvorny & Morbidelli, 1998) ili do nagle promene orbitalnih elemenata koje mogu da dovedu do transporta u unutrašnjost planetarnog sistema, kao i do izbacivanja asteroida iz planetarnog sistema (Morbidelli & Moons, 1995). Takođe, rezonance u srednjem kretanju mogu da budu i uzrok stabilnosti (Murray & Dermott, 1999).

Primer stabilnog kretanja u rezonanci u Sunčevom sistemu je Pluton i Plutinski koji se nalaze u rezonanci 2:3, uprkos mnogo većem Neptunu. Ostali objekti koji blisko prilaze Neptunu a nisu u rezonanci sa njim, i kojih ima značajnije više, usled velike nestabilnosti bivaju izbačeni iz njegove blizine. Manja grupa trans-Neptunskih objekata nalazi se u 1:1, 3:5, 4:7, 2:5 rezonanci sa Neptunom. U Sunčevom sistemu najjače su rezonance sa Jupiterom jer je to najmasivnija planeta (Sisto, Ramos, & Gallardo, 2018). Na slici 8 se mogu uočiti i primeri stabilnih rezonanci u srednjem kretanju. Na oko 4.0 AJ nalazi se Hilda grupa i njena lokacija se poklapa sa lokacijom 3:2 rezonance sa Jupiterom. Kao primer se uočavaju i Trojanci koji se nalaze na orbiti Jupitera, dakle u 1:1 rezonanci (Fejoz et al., 2011).

Sa druge strane orbita može da bude i destabilizovana. Primer u Sunčevom sistemu dat je na slici 8. Za pojedine vrednosti velike poluose (npr. 2.5 AJ, 2.8 AJ, 3.3 AJ) uočava se značajan pad broja asteroida. Te strukture nazivaju se Kirkvudovim prazninama. Njihove lokacije poklapaju

se sa lokacijama glavnih rezonanci u srednjem kretanju sa Jupiterom i najizraženije rezonance u ovom sistemu su 2:1, 3:1, 4:1, 5:2 i 7:3. Ove nastale praznine se objašnjavaju preklapanjem više rezonanci koje mogu biti i različitih tipova, kao i bliskim prilazima sa planetom sa kojom su u rezonanci (Fejzo et al., 2011).



Slika 8: Raspodela asteroida po velikoj poluosi u zavisnosti od udaljenosti od Sunca. Na slici se mogu uočiti Kirkvudove praznine, kao i lokacije pojedinih stabilnih rezonanci.

Pored rezonanci u srednjem kretanju između dva tela, značajne su i one između tri tela za koje važi $kn - k_1n_1 - k_2n_2 \approx 0$ sa istim oznakama kao i u slučaju dva tela (Nesvorny & Morbidelli, 1998).

3.6 Sekularne rezonance

Longituda perihela ϖ i uzlaznog čvora Ω se menja usled precesije orbite tela. Brzina promene ova dva sekularna ugla označava se sa $\frac{d\varpi}{dt} = g$ i $\frac{d\Omega}{dt} = s$ gde g i s predstavljaju frekvencije datih uglova. Kada su srazmerni periodi precesije dve orbite javljaju se sekularne rezonance koje moraju biti povezane sa promenom barem jednog sekularnog ugla (ϖ ili Ω). Razlikujemo linearne i nelinearne sekularne rezonance. Linearne rezonance su one koje nastaju usled samerljivosti frekvenci g ili s planete i asteroida i mogu se izraziti kao $kg + k_i g_i \approx 0$, kada je uključena samo g frekvencija, i $ks + k_i s_i \approx 0$ kada je uključena samo s frekvencija gde se indeks i odnosi na planetu. Nelinearne uključuju samerljivost višeg reda i često se mogu izraziti kao kombinacija linearnih sekularnih rezonanci (Carruba, Vokrouhlick, & Novaković, 2018). Kod nelinearnih rezonanci obe frekvencije mogu biti uključene $kg + k_i g_i + ls + l_j s_j \approx 0$, k i l su celi brojevi a i i j se odnose na planete jer se može raditi i o dve različite planete (Morbidelli & Henrard, 1991). Naj snažnije sekularne rezonance se javljaju kada je uključen samo jedan sekularni ugao (s ili g frekvencija) i jedna planeta (Morbidelli & Henrard, 1991).

U periodu od nekoliko miliona godina, sekularne rezonance će promeniti ekscentricitet i nagib malog tela. Efekti ovih rezonanci se najviše proučavaju u kontekstu dugogodišnjeg razvoja orbita malih tela u sklopu asteroidnog prstena. Rezonance koje uključuju samo g utiču na ekscentričnost orbite asteroida, dok rezonance koje uključuju samo frekvenciju s utiču na inklinaciju orbite asteroida (Carruba et al., 2018). Veoma bitne sekularne rezonance su prisutne u vrednostima a , e i i glavnog asteroidnog pojasa u Sunčevom sistemu koje prouzrokuju velike varijacije ekscentriciteta oko specifičnog regiona pojasa tako da pojedini asteroidi presecaju orbite planeta dovodeći do mogućnosti njihovog izbacivanja iz solarnog sistema ili sudara sa samim planetama. Sekularne rezonance se javljaju i u blizini rezonanci u srednjem kretanju 3:1, 5:2 ili 2:1. Preklapanje ovih rezonanci dovodi do zone haotičnog kretanja uz veliku promenu ekscentriciteta (Rickman, 2007). Najvažnije linearne sekularne rezonance u asteroidnoj dinamici se javljaju na $v_6 = g - g_6 = 0$ *arcsec/god*, $v_5 = g - g_5 = 0$ *arcsec/god* i $v_16 = s - s_6 = 0$ *arcsec/god* (Milani & Knežević, 1992).

Kozai rezonance koje se javljaju kada je kod samog asteroida $\omega = \Omega$ prouzrokuju sinhronizovane oscilacije inklinacije i ekscentriciteta perturbovane orbite. To znači da dok e raste, i opada i

obrnuto. Ovo se javlja samo kod tela sa visokom inklinacijom. Takve orbite teže ka tome da budu nestabilne jer će veliki ekscentricitet dovesti do sudara (Sidorenko, 2018).

4 Mala tela u planetarnim sistemima

Sva mala tela smatraju se ostatkom materijala iz procesa formiranja planeta koji se odvijao tokom formiranja solarnog sistema od solarne magline (solar nebula). Mala tela Sunčevog sistema su asteroidi, komete i sitno usitnjena materija koja pluta međuplanetarnim prostorom. U unutrašnjem i spoljašnjem pojasu Sunčevog sistema nakon formiranja planeta ostala su stenovita i pretežno ledena tela koja nisu učestvovala u formiranju planeta ili nisu, zarobljeni gravitacijom planete, postali planetarni sateliti. Poslednja istraživanja pak tvrde da su mnoga od ovih tela naknadno migrirala sa njihovog mesta formiranja usled migracije džinovskih planeta. Danas, u unutrašnjem pojasu Sunčevog sistema, ovi ostaci su uglavnom asteroidi i njihovi fragmenti, a spoljašnji pojas čine objekti iz Kajperovog pojasa i Ortovog oblaka (Wyatt, 2009).

Predmet mnogih istraživanja je bila dinamika ovih malih tela. Pored pomenutih gravitacionih efekata, na promenu orbitalnih elemenata malih tela utiču i njihovi bliski prilazi sa nekom od unutrašnjih planeta. Gravitaciona interakcija između planetezimala dovodi do veće disperzije e i i , a to kao posledicu ima veće relativne brzine. Malo telo će na kraju biti ili izbačeno iz sistema ili će doći do sudara sa planetom. Verovatnoća sudara, bliskog prilaza i izbacivanja su od velikog značaja za procenu sudbine i porekla malih tela.

Poznato je da se u nekim ekstrasolarnim sistemima takođe nalazi pojas planetezimala (komete i asteroidi) sličan asteroidnom prstenu i Kajperovom pojasu u Sunčevom sistemu. Ovo je prvi put otkriveno posmatrajući daleko infracrveno područje bliskih zvezda (Wyatt, 2009).

4.1 Negravitacioni poremećaji

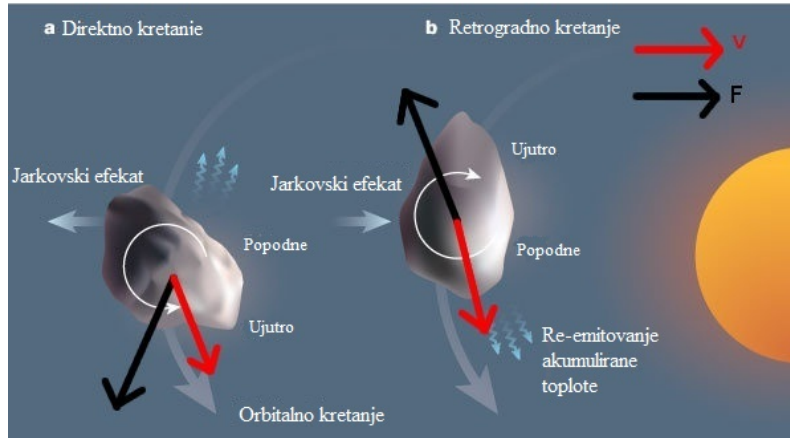
Kretanje asteroida se nalazi pod uticajem kako gravitacionih, tako i negravitacionih poremećaja. Zajedničko svim negravitacionim silama je da su proporcionalne poprečnom preseku čestica, odnosno malih tela. Jačina negravitacionih poremećaja raste sa odnosom $\approx 1/D$, gde je D poluprečnik malog tela (Vokrouhlicky et al., 2005). Najznačajniji negravitacioni poremećaji za tela od nekoliko metara do nekoliko desetina kilometara su Jarkovski i JORP.

4.2 Efekat Jarkovskog

Efekat Jarkovskog utiče na transport malih tela. Javlja se kao posledica razlike u temperaturi na površini malog tela usled toplotnog zračenja nekog drugog spoljašnjeg izvora. Različite temperature na površini tela dovode do razlike u re-emitovanju akumulirane toplote. Javlja se sila koja telo "gura" u suprotnom smeru od toplije strane tela. Ova sila zavisi od nekoliko parametara kao što su blizina zvezde koja vrši uticaj zračenjem, brzine i nagiba ose rotacije, kao i njegovih drugih termičkih osobina. Kao posledica efekta Jarkovskog dolazi do promene velike poluose tela i razlikujemo dnevni efekat, usled obrtanja oko svoje ose, i sezonski, usled kretanja oko Sunca (Vokrouhlicky et al., 2015). Kada je osa rotacije normalna na ravan kretanja tada je i dnevni efekat najveći, a sezonski efekat je veći kada se osa rotacije nalazi u orbitalnoj ravni.

Za tela koja rotiraju u direktnom smeru, u pravcu kretanja tela, pored radijalne sile postoji i konstantna transverzalna komponenta⁴ u istom pravcu kao kretanje. Ta transverzalna komponenta dovodi do povećanja velike poluose putanje (Vokrouhlicky et al., 2015). Kod retrogradnog kretanja transverzalna komponenta se nalazi u suprotnom pravcu od pravca kretanja i dovodi do smanjenja velike poluose (videti slike 9 i 10).

⁴Transverzalna komponenta sile nastaje usled razlike između tačaka maksimalne apsorpcije i maksimalne re-emisije toplote, koja se javlja kao posledica rotacije tela



Slika 9: Promene velike poluose orbite asteroida usled dejstva efekta Jarkovskog. Usled rotacije malog tela (asteroida) najtoplija tačka je malo pomerenjena u odnosu na tačku gde pada najviše zraka spoljašnjeg izvora toplotnog zračenja. U zavisnosti od smera rotacije ta sila dovodi do povećanja (kod kretanja u direktnom smeru), tj. smanjenja (kod rotacije u retrogradnom smeru) orbitalne brzine, pa time posledično i velike poluose orbite. Slika je preuzeta sa www.meteoweb.eu

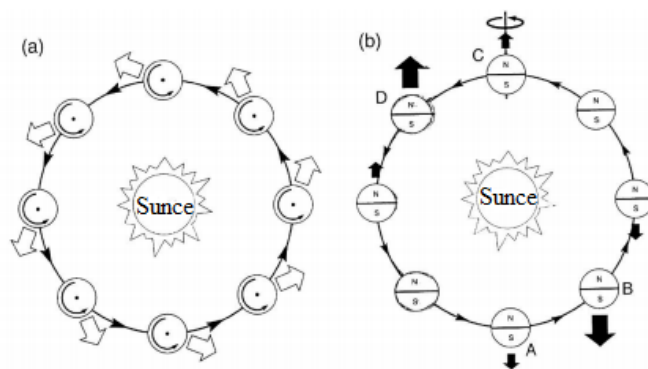
Sezonska komponenta efekta Jarkovskog javlja se kada nagib ose rotacije tela nije 0° i ona uvek smanjuje veliku poluosu (Novaković, 2012).

Procena promene velike poluose se najbolje može odrediti skalirajući jednačinu u odnosu na najbolje procenjenju promenu $\frac{da}{dt}$ za asteroid Bennu (Spoto, Milani, & Knežević, 2015):

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{dt}|_{Bennu} = \frac{\sqrt{a_B}(1-e_B^2)}{\sqrt{a}(1-e^2)} \frac{D_B \rho_B \cos(\phi)}{D \rho \cos(\phi_B)} \frac{1-A}{1-A_B}, \quad (26)$$

gde su gustina ρ_B , ekscentricitet e_B , prečnik D_B su vrednosti za Bennu date u radu Spoto et al. (2015), a elementi bez indeksa B su elementi za planetezimal. U zavisnosti da li vršimo procenu velike poluose a za unutrašnju ili spoljašnju granicu prstena (ili minimalno i maksimalno a koje asteroid može da dostigne), i vrednost za $\cos(\phi) = \pm 1$ se menja. Spoto et al. (2015) su takođe dali procene ovih parametara za pojedine familije asteroida i gde je gustina asteroida procenjena za $D = 1\text{km}$.

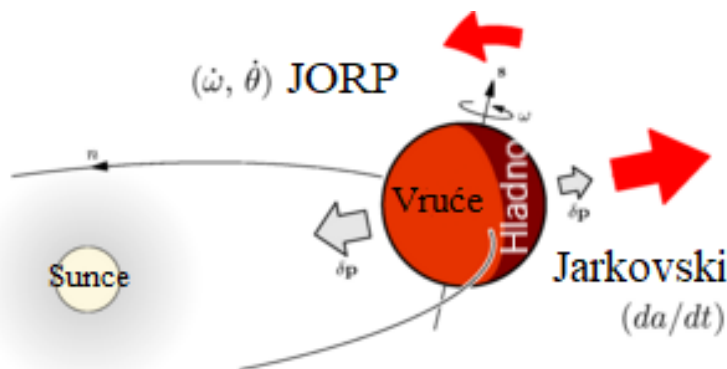
Dnevni efekat je dominantniji za tela veća od 100m. Efekat Jarkovskog na velike asteroide je veoma mali, ali na milionskoj vremenskoj skali orbite značajno mogu da se promene. Ovo je deklarirano kao glavni doprinos pojave novih asteroida malih prečnika u rezonantne zone. Sezonski efekat dominira jedino ako je dnevno dejstvo dovoljno malo. Ovo se može desiti zbog veoma brze rotacije (nema vremena za hlađenje strane koja je trenutno u senci, pa je skoro jednaka raspodela temperature po logitudi tela), zbog male veličine (celo telo se zagreje odjednom). Sezonski uticaj je važniji za manje fragmente asteroida (od nekoliko pa do 100m) pod uslovom da njihove površine nisu pokrivene slojem izolacionog regolita i nemaju izuzetno spore rotacije (Bottke et al., 2006).



Slika 10: Na slici 10(a) prikazana je dnevna komponenta efekta Jarkovskog. Osa rotacije je normalna na ravan kretanja i asteroid rotira u direktnom smeru što dovodi do uvećanja velike poluose. 10(b) prikazuje sezonsku komponentu efekta Jarkovskog čija se osa rotacije nalazi u ravni kretanja. Strelica obeležava silu koja se javlja usled sezonskog zagrevanja severne i južne hemisfere, a kao posledica dolazi do smanjenja velike poluose putanje. U tački A se apsorbovana energija na severnoj strani (N) izrači sa iste strane, dok u tački B nastaje sila koja "gura" asteroid sa severne strane i pomera ga u pravcu označenom strelicom. Slika je preuzeta sa www.meteoweb.eu

4.3 JORP efekat

JORP (YORP, Yarkovsky-O/Keefe-Radzievskii-Paddack) efekat nastaje usled nepravilnog oblika malog tela i dovodi do promene rotacionih parametara (brzine i nagiba ose rotacije) i varijacija je drugog reda efekta Jarkovskog. Promena tih parametara obrnuto je proporcionalna kvadratu prečnika i na vremenskoj skali od milijardu godina JORP efekat može da dovede do promene ose rotacije asteroida za 180° , što kao posledicu ima i promenu smera dejstva efekta Jarkovskog (videti sliku 11). JORP može direktno da se detektuje merenjem promena u fazi sideričke rotacije tela (Vokrouhlick et al., 2015). Ovaj efekat za dovoljno mala tela prestaje, a potencijalno objašnjenje toga je da se temperaturna ravnoteža na površini malih asteroida postiže gotovo istovremeno (Vokrouhlick et al., 2015).



Slika 11: Prikaz dejstva Jarkovskog i JORP efekta. Strana asteroida koja je okrenuta ka Suncu postaje toplija od suprotne strane što dovodi do nejednakosti u re-emitovanju akumulirane toplote. Tačnije, dovodi do nastanka sile koja utiče na orbitalno kretanje- efekat Jarkovskog, i torzije koja utiče na rotaciju asteroida- JORP efekat. Slika preuzeta sa catalina.lpl.arizona.edu

4.4 Stabilnost kretanja

Na dovoljno velikoj vremenskoj skali, nijedna orbita neće zauvek ostati u stabilnom kretanju. Modeli formiranja planeta sugerišu da bi orbite planeta trebale biti prostorno bliske i da vremenska skala sudara ili izbacivanja, u tom slučaju, odgovara trenutnoj starosti sistema (pogledati Fabrycky

(2010)). Pitanje stabilnosti u Sunčevom sistemu je u bliskoj vezi sa teorijom haosa dinamičkih sistema. Glavno pitanje teorije stabilnosti je da li su orbitalni elementi planete evoluirali samo usled periodičnih oscilacija ili su njihove varijacije usled haotičnog kretanja. Samo u slučaju kada su promene orbitalnih elemenata nastale usled periodičnih oscilacija omogućena je stabilnost kretanja. Svaka rezonanca je povezana sa nekim haotičnim regionima faznog prostora ali u većini slučajeva da bi došlo do tog haotičnog kretanja potrebna je izuzetno duga vremenska skala (Fabrycky, 2010). Nekorošev teorema tvrdi da čak i ako postoji haos, odstupanja od regularnog kretanja ograničena su tokom konačnog vremena. Na stabilnost kretanja malih tela utiču pre svega rezonance, neregularni poremećaji i bliski prilazi sa drugim planetama ili masivnim objektima. Haotično kretanje igra značajnu ulogu u nestabilnosti kretanja asteroida i do njega dovodi preklapanje rezonanci, separatriše rezonanci i, opet pomenuti, bliski prilazi. Rezonance same po sebi ne dovode do haotičnog kretanja. Primer toga u Sunčevom sistemu jesu Kirkvudove praznine, praznine oformljene usled izbacivanja malih tela, koje se nalaze na nekim mestima gde i snažne rezonance u srednjem kretanju. Sa druge strane je primer Hilda grupa koja se nalazi u 3:2 rezonanci sa Jupiterom, kao i prethodno pomenuti Plutinski, gde rezonance imaju ulogu zaštitnog mehanizma. Ono što pak dovodi do haotičnog kretanja jeste preklapanje rezonanci nezavisno od toga kog su tipa (Bottke et al., 2006). Wisdom (1980) je otkrio da se preklapanjem rezonanci za čestice zanemarljive mase može objasniti haotičnost orbita u blizini planete na kružnoj orbiti. Za planete čija je velika poluosa $1AJ$ i masa m u odnosu na zvezdu, našao je da za a u okviru $\frac{|\Delta a|}{a} < 1.3m^{\frac{2}{7}}$ planete, orbita čestice je haotična što će dovesti ili do sudara sa planetom ili do izbacivanja iz sistema (Duncan, Quinn, & Tremaine, 1989). Drugi mehanizam koji dovodi do haosa su separatriše rezonanci. Uske zone koje se nalaze sa obe strane uz granice rezonanci ali su od daleko manjeg značaja nego preklopljene rezonance zbog manjeg područja koji obuhvataju (Bolotin, Tur, & Yanovsky, 2009). Posmatrani multiplanetni sistemi su često blizu nestabilnosti (Barnes, Goździewski, & Raymond, 2008). Za meru haotičnosti kretanja u dinamičkom sistemu koristi se vreme Ljapunova (T_L). Ono pokazuje koliko brzo se razilaze (divergiraju) dve orbite koje su inicijalno bile bliske tj. za koje vreme se rastojanje između njih poveća eksponencijalan broj puta. Što je to vreme kraće, tela koja su se kretala na tim orbitama će se brže razići (haos će biti jači). Tipično T_L snažno haotičnog asteroida iznosi manje od 10 000 godina, a u slučaju stabilnog nekoliko stotina hiljada godina. To znači da je vreme Ljapunova vrlo veliko za stabilne orbite. Dve orbite koje su inicijalno bile bliske takve i ostaju tokom proizvoljnog vremenskog perioda ili potencijalno divergiraju ali vrlo sporo. Takođe, nije moguće da asteroidi imaju manje haotično kretanje od planeta koje vrše gravitacioni uticaj na njih (Yu, Yin, & Khoo, 2018; Winter, Mourao, & Winter, 2010).

4.5 Značaj malih tela

Po Papagianisu u globalu život prati sledećih pet osnovnih principa: 1) Da bi se život razvijao, absorbuje energiju i materiju iz svog okruženja; 2) Širi se kao gas okupirajući svaki raspoloživi prostor; 3) adaptira se na uslove svakog dostupnog prostora; 4) Konstantno se razvija ka višim oblicima života i 5) Brzina kojom se to dešava se povećava kako se povećava i stepen razvijenosti života. Za nastanak života nije dovoljna samo Sunčeva energija već su potrebni i drugi izvori. Materijali poput izotopa vodonika i helijuma za nuklearnu fuziju su u konstantnoj potražnji, stoga je asteroidni prsten najbolji izvor sirovina kao i vode u vidu leda (Papagiannis, 1983). Asteroidi i komete su udarima možda dopremili vodu u čvrstom agregatnom stanju (led) i druge molekule bazirane na ugljeniku na planete. Međutim, iako se asteroidima možda mogu dopremiti neophodni elementi za nastanak (Voosen, 2018) i razvoj kompleksnog oblika života (pre svega voda), takođe mogu i da ugroze život koji se tu razvio učestalim razarajućim udarima .

Sa druge strane, smatra se da su se mala tela najmanje izmenila u odnosu na svoje prvobitne osobine te da razumevanje njihovog nastanka, dinamičkih i fizičkih osobina, može doprineti razumevanju mnogih pitanja i problema vezanih za Sunčev sistem a sa tim i druge planetarne sisteme. Takozvane "nove" komete bi mogle da obezbede potpunije informacije o sastavu i kretanju materije u ranom Sunčevom sistemu jer su to komete koje prolaze po prvi put kroz unutrašnji deo sistema i čije osobine još uvek nisu značajno narušene pod uticajem Sunca. Međutim, pojava kometa je sporadična (Knežević, 1989). Karakteristike asteroida pružaju mogućnost testiranja trenutnih teorijskih modela kao i razvijanje novih teorijskih koncepata koji se odnose na evolutivni proces u Sunčevom sistemu (Novaković, Hsieh, & Gronchi, 2018).

Sudari između asteroida igraju važnu ulogu u evoluciji glavnog asteroidnog prstena. Razumevanje procesa u kome nastaju fragmenti a potom i reakumulacija fragmenata je od ključnog značaja

za proučavanje formiranja Solarnog sistema ili unutrašnje strukture asteroida (Ševeček, Brož, Nešvorný, et al., 2018).

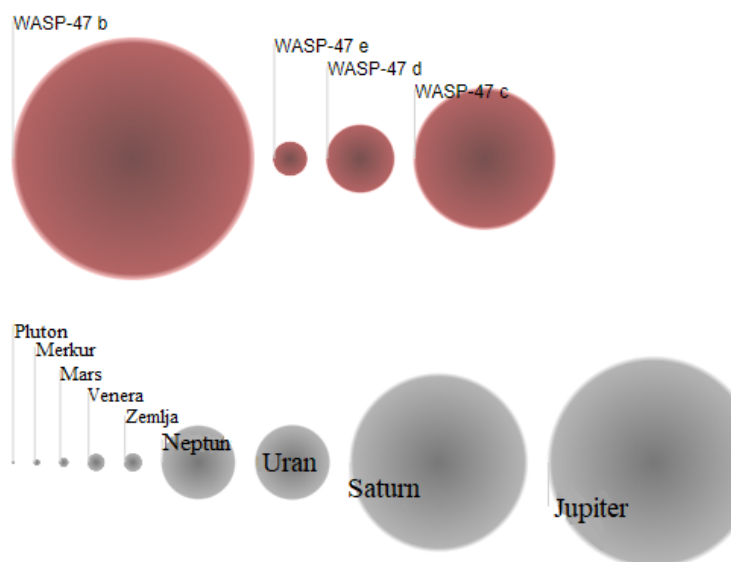
Uočeni krateri na Meseu i stenovite planete ukazuju na bitan dokaz o fluksu impaktora u unutrašnjem delu Sunčevog sistema. Broj zabeleženih kratera na svakoj površini je mera inteziteta kojom je ona bombardovana malim telima tokom vremena. Ako je starost površine poznata, karakteristike kratera mogu da pruže informacije o poreklu populacije impaktora. Sa druge strane, ako je populacija impaktora dobro kategorizovana, pomoću karakteristika kratera starost površine može biti procenjena. Čest slučaj je da su oboje, starost površine i karakteristike populacije impaktora, nepoznati te dolazimo do problema koji nije moguće rešiti (Holsapple, 1993).

5 Sistem WASP-47

Oko 1% zvezda Sunčevog tipa u svom sistemu imaju džinovske planete, vruće Jupitera (Sinukoff et al., 2017) koje su jedne od planeta koje je najlakše detektovati. Razlog tome je njihova veličina. Keplerova lista planeta kandidata ukazuje na to da su ovakve planete ređe u planetarnim sistemima (Hellier et al., 2012). Većina vrućih Jupitera su, zbog svoje veličine i kratkog perioda obilaska oko zvezde, pogodni za određivanje mnogih planetarnih karakteristika, kao što su masa jezgra i atmosfera. Otkrivanje drugih planeta u sistemu vršena je pomoću detektovanja malih promena u periodičnosti vremena tranzita vrućih Jupitera (varijacija u vremenu tranzita-TTV). Na ovaj način nađeno malo planeta, sve dok Kepler misija nije otkrila manje tranzitne planete sa većim periodom od vrućeg Jupitera. Usled ovih nedostataka TTV metode (varijacija vremena tranzita) za vruće Jupitera (period između 0.8 i 6.3 dana), data je pretpostavka da u sistemima ove planete nemaju bliske susedne planete, iako je bilo poznato da u pojedinim sistemima vrući Jupiteri imaju daleke pratiocice čiji je period veći od 200 dana (Knutson et al., 2014; Endl et al., 2014), kao i da topli Jupiteri (period 6.3 do 15.8 dana) imaju bliske pratiocice. Ovaj nedostatak je doveo do ideje da se vrući Jupiteri formiraju van snežne linije, lokacije koja razdvaja toplo suvo područje od ledenog i turbolentnog. Tela formirana sa spoljašnje strane ove linije bi trebala da sadrže velike količine vode, ali i druga jedinjenja kao što su amonijak, metan, ugljen-dioksid i ugljen-monoksid koji se kondenzuju u čvrsta ledena zrnca. Temperatura kondenzacije zavisi od isparljivih jedinjenja i parcijalnog pritiska pare u maglini protozvezde. Stvarna temperatura i udaljenost snežne linije zavise od fizičkog modela sistema (Stammler, Birnstiel, & Dullemond, 2017). Nakon ovog formiranja, planete migriraju ka unutrašnjosti sistema kroz visoko ekscentričnu migraciju (HEM, planete imaju orbite velike ekscentričnosti tokom migracije, ali kada planeta dođe blizu zvezde, plimne sile deluju na orbitu planete i ona postane kružna (Giacalone, Matsakos, & K[Pleaseinsertintopreamble]nigl, 2017)), proces koji bi destabilizovao orbite kratko-periodičnih pratilaca. Međutim, statistička istraživanja su pokazala da to ne važi za sve vruće Jupitera te neki od njih mogu da imaju bliske pratiocice i ovaj tip visoko ekscentrične migracije ih neće isključiti (Becker et al., 2015).

WASP-47 je prvi otkriveni sistem u kome vrući Jupiter kao pratioca ima manju džinovsku planetu sa kraćim periodom. Kompaktnost i usklađenost orbitalnih ravni sistema WASP-47, zajedno sa direktnom rotacijom zvezde je u skladu sa postepenom migracijom kroz protoplanetarni disk, za razliku od dinamičke evolucije koja uključuje planeta-planeta bliske prilaze ili poremećaje od strane udaljenih zvezda (Dai et al., 2015). Planetarni sistem WASP-47 je otkriven posmatranjima sa Zemlje misijom "Širokougaona potraga za planetama" (Wide Angle Search for Planets, WASP) (Vanderburg et al., 2017) i jedini je do sada poznati sistem u kome vrući Jupiter kao bliske pratiocice ima jednu unutrašnju i jednu spoljašnju masivnu planetu (Almenara et al., 2016). Ovaj sistem omogućava jednu od retkih prilika, a to je određivanje masa planeta pomoću dva različita metoda: Dopler metodom i varijacijom vremena tranzita (Dai et al., 2015). Karakterišu ga tri sličnosti sa Sunčevim sistemom: 1) orbite su približno kružne i koplanarne, 2) planete se ne nalaze u rezonanci srednjeg kretanja i 3) planete imaju različite kompozicije. Nijedna od trenutno postojećih teorija formiranja vansolarnih planeta ne objašnjava adekvatno ove tri karakteristike jer je nepoznato kako je moguće da planeta poput Jupitera ima bliske masivne pratiocice bez značajno izmenjenih dinamičkih osobina njihovog kretanja. Utvrđivanje načina formiranja sistema će biti od velikog značaja za razumevanje uopštenog načina formiranja. Kompozicija planeta može da ukaže na to gde su one formirane u protoplanetarnom disku. Na primer, planete bogate vodom mogu nastati iza snežne linije, dok velika poluosa i ekscentricitet govore o dinamici sistema (Weiss et al., 2017). Precizno merenje mase planete, gustine i orbitalne dinamike planetarnih sistema je od velike važnosti za razumevanje formiranja planeta. Kombinacijom metoda radijalne brzine i TTV postiže se bolja procena masa planeta u multiplanetarnim sistemima i omogućava procenu

apsolutne gustine, radijusa i mase bez uključivanja teorijskog zvezdanog modela. Za WASP-47 ta procena je limitirana zbog ograničenih dinamičkih informacija usled kratkog vremenskog perioda dobijenog za svetlosnu krivu K2 misijom. Dostiže se tačnost od oko 22% za radijus zvezde i tranzitnih planeta, između 40% i 60% za masu i između 1.5% i 38% za gustinu (Almenara et al., 2016). Sistem WASP-47 čine četiri planete (videti sliku 12): vrela Jupiter (planeta "47b"), unutrašnja susedna "47e" i spoljašnja "47d" planeta koje su sub-Neptuni i dugoperiodična džinovska planeta "47c" ekscentrične orbite (Weiss et al., 2017).



Slika 12: Aproksimacija veličina planeta planetarnog sistema WASP-47. Planete Sunčevog sistema su prikazane kao poređenje. Preuzeto sa www.openexoplanetcatalogue.com

Formiranje planetarnog sistema WASP-47: Postoje dve teorije o načinu formiranja ovog sistema. Jedna zastupa to da su se u kompaktnom sistemu kao što je WASP-47 unutrašnje planete formirale na mestu na kome se trenutno nalaze iz protoplanetarnog diska koji je bio masivniji od potrebnog minimuma solarne magline (Chiang & Laughlin, 2013). Glavno pitanje je: ako su se sve planete formirale na mestu gde se trenutno nalaze iz iste magline, kako je WASP-47b dostigao nekontrolisan rast jer bi to značilo da su susedne planete ostale siromašne gasom. Zbog nedovoljne količine gasa za ovakvo formiranje svih planeta u sistemu predložena je modifikacija u formiranju gde se akretovani materijal transportovao kroz disk iz spoljašnjeg dela do mesta lokacije formiranja planeta (Chatterjee & Tan, 2014). S obzirom da planetu 47b okružuju dve masivne planete teško je objasniti stopu akrecije.

Druga teorija kaže da su se planete formirale na nekom drugom mestu u disku i interagujući sa diskom migrirale na trenutnu poziciju. Migracija tipa I i II menja ju ekscentričnost orbite planeta dozvoljavajući im da zadrže skoro kružne orbite što i jeste u skladu sa orbitama unutrašnjih planeta sistema WASP-47. Spora migracija može zarobiti planete u rezonanci srednjeg kretanja. Planete 47b i 47d su blizu 2:1 rezonance u srednjem kretanju, ali se u njoj ne nalaze. To znači da ako je u formiranju ovog sistema u nekom momentu migracija imala ulogu, mehanizam je morao biti takav da spreči ove dve planete da uđu u 2:1 rezonancu ili da ih iz nje izbaci (Adams, Laughlin, & Bloch, 2008; Goldreich & Schlichting, 2014). Deck and Batygin (2015) su ustanovili da ako je unutrašnja planeta u blizini rezonance prvog reda u srednjem kretanju masivnija, izbacivanje iz rezonance je malo verovatno (što je i slučaj sa ove dve planete). Takođe, migracija ne objašnjava veliki ekscentricitet planete 47c, i planete 47e i 47d bi migrirale kroz disk ne akretujući gas.

Planeta-planeta rasipanje i Kozai-Lidov oscilacije su mehanizam migracije velikih tela. Kada je protoplanetarni disk već raspršen, mogu dovesti do umerenih i velikih ekscentričnosti orbite što možda može da pojasni umeren ekscentricitet planete 47c. Kozai-Lidov oscilacije su inicirane samo kada dve planete imaju uzajamne nagibe najmanje 40°. Planete razmenjuju ugaoni moment izazivajući dramatične varijacije u nagibima i ekscentricitetu planeta tokom vremena (Kozai, 1962; Lidov, 1962). Najjači dokaz prethodnog uticaja Kozai-Lidov oscilacija bi bilo posmatranje

uzajamnog nagiba putanje između planete 47c i unutrašnjeg dela solarnog sistema i/ili nenultog nagiba između planete 47b i ose rotacije zvezde (Weiss et al., 2017). Neveu-VanMalle et al. (2016) u radu pak izlažu da na osnovu geometrije ovog sistema najverovatnije je došlo do migracije u interakciji sa diskom jer planeta-planeta razbacivanje ne bi održalo unutrašnji deo sistema koplarnim. Takođe, skorašnji rezultati su pokazali da Kozai interakcije ne utiču na mnogoplanetne sisteme. U tom slučaju spoljašnje planete mogu da zaštite unutrašnje od sekularnih interakcija (Neveu-VanMalle et al., 2016).

Jedno od objašnjenja trenutnih orbita i kompozicija planeta jeste da nisu sve nastale u isto vreme. Po kojoj god teoriji se ovaj sistem formirao, odgovara mu formiranje u dva nivoa. Prvo su džinovske planete oformljene u kombinaciji diska i/ili planetom izazvanom migracijom dobijajući trenutnu kompoziciju džinovskih planeta i formirajući radialnu raspodelu planetezimala. Nakon što se gas u disku potroši akrecijom planetezimala formiraju se planete malih masa, pretežno stenovitih. U sistemu WASP-47, orbitalne karakteristike i kompozicija planeta malih masa daju uvid u način formiranja džinovskih planeta jer one za nastanak trebaju male količine gasa čija akrecija mora da nastupi pre nego gas iz diska potpuno nestane. To ograničava vreme za koje planeta 47b mora da migrira. Dakle, mora da se nađe na sadašnjoj poziciji pre nego se formiraju planete 47e i 47d, u suprotnom bi bile uništene usled migracije planete 47b (Weiss et al., 2017).

Gasni disk utiče na planetne ekscentričnosti na vremenskoj skali od 10^3 godina (Papaloizou & Larwood, 2000), visoko ekscentrična migracija (HEM) ne može nastati u gasnom disku. Vremenska skala migracije I u gasnom disku je mnogo kraća nego vremenska skala HEM. Ako bi se razmatrala HEM planete 47b u osiromašenom disku i u kratkom vremenskom periodu pre nego gas potpuno ne nestane, da bi se susedne planete formirale sila koja će orbitu planete 47b učiniti kružnom mora biti dovoljno brza. S obzirom da gas više nije prisutan na planetu deluje jedino plimna sila sa zvezde. Vremenska skala za to je 10^8 godina, što je za magnitudu duže od životnog veka diska. Glavni problem je što za uspostavljanje te kružne orbite nema dovoljno vremena te postoji mogućnost da je WASP-47b nastala unutar 1 AJ, dakle unutar snežne linije (Weiss et al., 2017). Broj Jupitera koji migriraju mehanizmom HEM je znatno manji nego što to sam mehanizam predviđa (Sinukoff et al., 2017).

Velika ekscentričnost planete 47c ukazuje na neke međuplanetne interakcije u prošlosti jer nestabilnosti do kojih dolazi u gasnom disku, a koje mogu da dovedu do promene e , važe samo za vrednosti $e < 0.1$ (Duffell & Chiang, 2015). S obzirom da planeta 47b nije mogla toliko da utiče na planetu 47c, druga masivna tela koja su razmenila ugaoni momenat sa planetom 47c možda se još uvek nalaze u tom sistemu. Sa druge strane, možda je WASP-47c izbacila to drugo masivno telo koje je uticalo na ekscentricitet planete (Weiss et al., 2017).

Dokaz o formiranju u dva nivoa takođe može da uključi: odnos C/O za WASP-47 47b, 47e i 47d usled formiranja unutar snežne linije, poravnanje ose rotacije zvezde sa orbitama planeta koje vrše tranzit a imale su prethodno skoro kružne orbite i neki masivni objekat koji je uticao na ekscentričnost orbite planete 47c (Weiss et al., 2017).

Orbite unutrašnje tri planete su kružne i variraju od 0 do 0.06 što je zahtevana granica stabilnosti ($e_b < 0.011$, $e_d < 0.025$). Prosečna ekscentričnost detektovanih planeta u sistemu WASP-47 je < 0.09 , dok je u solarnom sistemu (ne računajući Pluton) to 0.08 (Weiss et al., 2017).

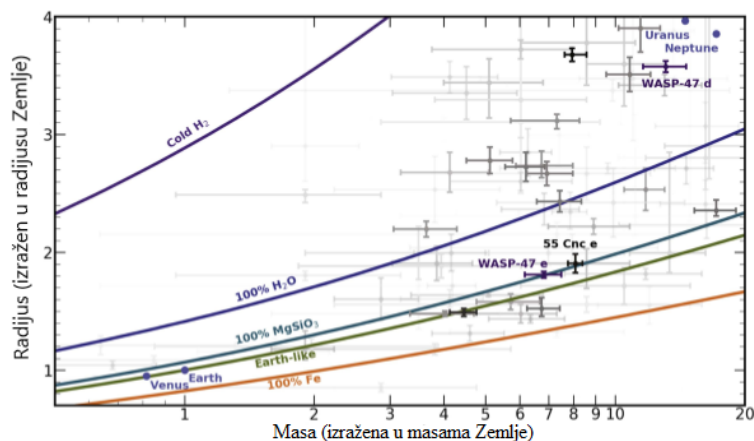
Koristeći Mercury integrator, Becker et al. (2015) je izvršio simulaciju stabilnosti sistema za 10 miliona godina i dobio da sistem malog ekscentriciteta ostaje stabilan, kao i da stabilnost nije pod velikim uticajem masa planeta (pod uslovom da su orbite gotovo kružne). Stabilni sistem se javlja u širokom opsegu planetarnih masa. To ukazuje na to da su planete u ovom sistemu ili migrirale kroz disk ili su naišle na neko usporenje pred kraj migracije što je dovelo do sadašnjeg kompaktnog sistema. S obzirom da HEM ne može biti jedini mehanizam formiranja vrućih Jupitera, velika je verovatnoća da postoji više od jednog mehanizma za njihovo formiranje (Becker et al., 2015).

Za zvezde koje u svom sistemu imaju blisku džinovsku planetu, ustanovljeno je da mogu imati širok raspon nagiba ose rotacije, ali zvezde čiji je mnogoplanetarni sistem kompaktna, uglavnom je nagib mali (Sanchis-Ojeda et al., 2015). Zvezda u WASP-47 sistemu je G9 tipa i ima samo 4% veću masu od Sunca, približno 14% veći radijus i oko 200K nižu efektivnu temperaturu. Najveća protivrečnost između zvezde i Sunca je sastav jer zvezda u WASP-47 ima metaličnost 2.5 puta veću nego Sunce. U zavisnosti od primenjenog modela, zavisi i procenjena starost zvezde. Po Vanderburg et al. (2017) ona iznosi $6.7_{-1.1}^{+1.5}$ milijardi godina, a po Almenara et al. (2016) je 7.1 ± 1.5 milijardi godina. Uzimajući da je osa rotacije normalna na pravac vizure, $i_* = 90^\circ$, dobijen je period

rotacije $P_{rot} = 31.3 \pm 3.5$ dana (Almenara et al., 2016).

WASP-47b je vreo Jupiter tipične veličine za tu masu sa periodom od 4.2 dana i nagibom orbitalne ravni od $i_b < 90^\circ$ (Almenara et al., 2016). Ono što ovu planetu čini neobičnom su bliske susedne planete, što je u suprotnosti sa većinom planeta tog tipa. I druge dve unutrašnje planete imaju znatno kraći period obilaska (planeta 47e manje od jednog dana i planeta 47d 9.0 dana) od spoljašnje planete 47c ekscentrične orbite koja oko matične zvezde obilazi za 580.7 dana. Ovakav stabilan sistem, sa bliskim unutrašnjim planetama, u poređenju sa do tada 2217 otkrivenih planeta Kepler misijom je nedvosmisleno jedinstven i do sada nedovoljno proučen. Koristeći fotometriju i Rositer MekLaufin efekat (spektroskopski fenomen posmatran prilikom tranzita planete, detaljnije pogledati u Triaud (2017)), dobijeno je da nagibi ose rotacije orbite planete 47b i ose rotacije zvezde nisu u velikoj neusklađenosti. Weiss et al. (2017) su masu planeta, koristeći RB i TTV, odredili za 47e, 47b i 47d 9.1 ± 1 , 358 ± 12 i 13.6 ± 2 masi Zemlje, respektivno (Weiss et al., 2017). Dok su Almenara et al. (2016) odredili kao $9.1^{+5.5}_{-3.6}$, 383^{+190}_{-120} , 16.8^{+12}_{-7} masi Zemlje, respektivno, i takođe odredili masu planete 47c kao 500^{+320}_{-190} masi Zemlje.

WASP-47e je primer planete sa ultra kratkim periodom po klasifikaciji Sanchis-Ojeda et al. (2014) i dobili su da su takve planete gotovo uvek manje od $2R_z$ Zemlje, kao i da se često pojavljuju u kompaktnim multiplanetnim sistemima. Obe ove karakteristike poseduje i planeta 47e. Takve planete su uglavnom stenovite, sa tankim atmosferskim omotačem ili bez njega, zbog intezivnog zagrevanja usled blizine zvezde i moguće fotoevaporacije atmosfere. Određena srednja gustina planete 47e je $11.2 \pm 3.6 \text{ gcm}^{-3}$, što odgovara stenovitim planetama. Primera radi, izmerene dimenzije planete u skladu su sa modelom Zeng and Sasselov (2013) za telo čiji su sastav stene sa visokim sadržajem rude gvožđa (50%Fe i 50%MgSiO₃). Rogers (2015) je izložio u svom radu da radijus od 1.6 radijusa Zemlje predstavlja kritičnu vrednost koja razdvaja manje planete pretežno stenovite od većih planeta sa atmosferom male gustine. Budući da je WASP-47e procenjenog radijusa od 1.8 radijusa Zemlje i stenovite kompozicije, planeta se čini kao izuzetak od pravila. Jako zračenje je moglo da ukloni gasovitu atmosferu ostavivši samo gusto kamenito jezgro. Zasnovano na trenutnim procenama zvezdanih parametara i orbitalne distance planete 47e, ona prima oko 3800 puta više zračenja sa zvezde nego Zemlja (Dai et al., 2015). Na slici 13 dat je odnos mase i radijusa planete 47e i 47d i upoređen sa plotovanim podacima drugih planeta različitih kompozicija. Planeta 47e na osnovu svog radijusa i mase ne odgovara u potpunosti kompoziciji koju imaju planete slične Zemlji (32.5% gvozdeno jezgro, 67.5% silikatni omotač) pre svega jer je 47e manje gustine nego stenovite planete slične Zemlji. U teoriji, zbog razlike u kompoziciji radijus stenovitih planeta ne bi trebao da se promeni više od 2%, ali kod planete 47e radijus je 7% veći nego što je to kod planeta sličnih Zemlji iste mase. Najverovatnije je da WASP-47e ima jezgro slično Zemlji i gasovit omotač. Na slici je data i 55Cnc planeta kao poređenje u sličnosti kompozicije sa WASP-47e. 55 Cnc e je, kao i WASP-47e, planeta sa ultra kratkim periodom (manje od dana) i male gustine. Obe zvezde u ovim sistemima imaju veliku metaličnost ($[Fe/H] = 0.38$ za WASP-47 i $[Fe/H] = 0.31$ za 55 Cnc), oba sistema imaju planete džinove sa kratkim periodom (WASP-47b i 55 Cnc b) i džinove sa dugim orbitalnim periodom (WASP-47c i 55 Cnc d). Mada, planete 55 Cnc sistema nisu tako blisko poravnate jedna sa drugom (uočen je tranzit jedino najbliže planete u sistemu 55 Cnc). Sličnosti između ova dva sistema ukazuju na verovatnoću sličnog porekla (Vanderburg et al., 2017).

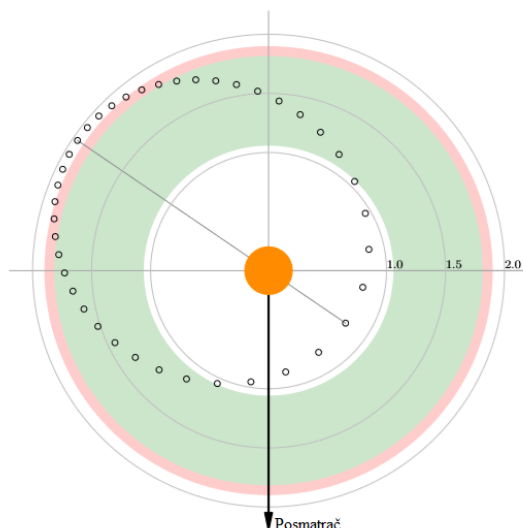


Slika 13: Radijus u funkciji mase za manje ekstrasolarne planete. Planete iz Sunčevog sistema predstavljene su plavom bojom, WASP-47 ljubičastom. Takođe 55 Cnc e je predstavljena radi poređenja zbog sličnosti kompozicije sa WASP-47e. Obe planete su manje gustine od planeta sličnih Zemlji. Preuzeto iz [Vanderburg et al. \(2017\)](#).

WASP-47d je po masi, radijusu i gustini do sada jedna od najbližnjih otkrivenih planeta Neptunu. Kompozicija planete može se opisati kao dvoslojni model H/He omotača sa jezgrom od silikata i gvožđa ([Weiss et al., 2017](#)). WASP-47d mora da ima vodonik/helijum omotač male gustine kako bi odgovarao izmerenoj masi i radijusu (13.1 ± 1.5 mase Zemlje i 3.576 ± 0.046 radijusa Zemlje), mada se većina mase planete nalazi u gustom jezgrom ([Vanderburg et al., 2017](#)).

WASP-47c je detektovana jedino RB metodom, te je teško precizno odrediti masu planete ([Weiss et al., 2017](#)). Ako je vrući Jupiter, planeta 47b, formiran izvan snežne linije i pod uticajem planete 47c migrirao, može se očekivati da je ravan orbite planete 47c drugačija u odnosu na ravan unutrašnjosti sistema. Veliku orbitalnu ekscentričnost planete 47c je teško objasniti. Nakon disipacije diska, njen ekscentricitet orbite trebao je biti pobuđen od strane druge, udaljenije planete. Iako tranzit WASP-47c do sada nije uočen usled dugog perioda rotacije i njene udaljenosti, sa njegovom detekcijom pokrenula bi se mnoga istraživanja o osobinama i formiranju planeta ovog sistema ([Vanderburg et al., 2017](#)), mada [Weiss et al. \(2017\)](#) kao verovatnoću da ova planeta vrši tranzit daje 10%. Bilo bi moguće proučavati atmosferu kako planete 47c, tako i 47b pomoću JWST, određivanjem i upoređivanjem zastupljenih elemenata u atmosferi i, sledbeno tome, određujući mesto njihovog nastanka. Za sada je najveća prepreka detekcije njenog tranzita upravo vreme revolucije ([Vanderburg et al., 2017](#)).

Nastanjiva zona sistema WASP-47 se očekuje između 1.06 i 1.8 AJ ([Kopparapu, 2013](#)) i u ovoj zoni se nalazi planeta 47c. S obzirom na veliku ekscentričnost orbite, planeta 47c tokom svog obilaska oko matične zvezde izlazi iz nastanjive zone (videti sliku 14). [Williams and Pollard \(2002\)](#) zastupaju tvrdnju da je stabilnost klime planete pre uslovljena srednjom insolacijom kroz orbitu, nego njenim vremenom provedenim u nastanjivoj zoni. Efektivna insolacija planete 47c je $64\% \pm 5.2\%$ insolacije kojoj je izložena Zemlja, što odgovara središnjem delu nastanjive zone. Stoga, hipotetički stenoviti satelit koji rotira oko WASP-47c ima velike šanse da bude nastanjiv ([Almenara et al., 2016](#)).



Slika 14: Šematski prikaz orbite planete WASP-47c. Matična zvezda je predstavljena narandžastim krugom u centru. Maksimalna orbita je predstavljena praznim crnim krugovima. Kretanje planete je direktno. Velika poluosa je prikazana tankom sivom linijom, i jedinice koncentričnih krugova su u AJ. Popunjena zelena oblast je nastanjiva zona koja se nalazi između minimalne i maksimalne vrednosti staklene bašte po modelu [Kopparapu \(2013\)](#), dok crveni deo odgovara proširenom modelu nastanjive zone. Preuzeto iz ([Almenara et al., 2016](#)).

6 Evolucija prstena planetezimala u sistemu WASP-47

6.1 Metodologija

Kako bi se ispitali stepen i efikasnost transporta planetezimala u sistemu WASP-47 numerički je simulirana dinamička evolucija hipotetičkog prstena ovih objekata. U tu svrhu najpre je određena lokacija snežne linije u sistemu WASP-47, u čijoj okolini je postavljen prsten planetezimala. Dimenzije prstena određene su u proporciji sa dimenzijom prstena asteroida u Sunčevom sistemu.

Za procenu lokacije snežne linije u sistem WASP-47 korišćena su dve formule dostupne u literaturi. Prema [Martin and Livio \(2013\)](#) položaj ove linije određen je sa:

$$R \approx 2.7 \left(\frac{M}{M_*} \right)^{\frac{1}{3}} AJ \quad (27)$$

gde je M masa centralne zvezde planetarnog sistema, a M_* masa Sunca. Na osnovu ovog pristupa dobija se da je snežna linija na oko 2.79 AJ.

Sa druge strane, [Ogihara and Ida \(2009\)](#) su za određivanje lokacije snežne linije dali sledeću jednačinu:

$$R \approx 2.7 \left(\frac{L_*}{L_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} AJ \quad (28)$$

gde je L_* luminoznost zvezde, izražena u luminoznosti Sunca L_{\odot} . Prema ovome lokacija snežne linije u sistemu WASP-47 je na oko 2.88 AJ. Na osnovu dobijenih vrednosti, i imajući u vidu da bi prsten planetezimala trebao biti širine oko 0.3 AJ, kao i da posmatrački podaci ukazuju da se takvi prsteni nalaze u okolini snežne linije, uzeto je da se prsten prostire na udaljenosti između 2.7 i 3.0 AJ od matične zvezde.

Prsten planetezimala predstavljen je sa 10 000 test objekata. Inicijalne vrednosti velikih poluosa malih tela dodeljene su nasumično u okviru intervala koji pokriva prsten. Nasumične vrednosti su takođe dodeljene i za ekscentricitet orbite u rasponu od 0.0 do 0.1. Ovaj interval odgovara pretpostavci da u ranoj fazi evolucije sistema nije dolazilo do velikih dinamičkih interakcija, te da orbite malih tela nisu značajno ekscitovane. Slično, raspodela vrednosti nagiba putanjskih ravni je Gausova u intervalu od 0.0 do 1.0 stepen, shodno očekivanju da se veći broj asteroida nalazi u istoj ravni sa planetama, tj. u ravni diska.

Sledeći korak bila je integracija orbita test objekata. Numeričke integracije orbita urađene su korišćenjem javno dostupnog softverskog paketa OrbFit. Ovaj paket je do sada korišćen u mnogim

naučnim analizama kretanja tela u Sunčevom sistemu, a ovdje je po prvi put uspešno primenjen na jedan ekstrasolarni planetski sistem. Dizajniran je za numeričke simulacije orbita N+M tela, što uključuje N masivnih tela (obično to su zvezda i planete) i M malih tela (test objekata), zanemarljive mase.

Integracija u ovom radu vršena je u dinamičkom modelu sa 3 planete sistema WASP-47, i za period od 2 miliona godina. Kao što je već rečeno, ovaj planetarni sistem sastoji se od 4 planete. Kako međutim korak integracije (a samim tim i brzina) zavisi od najkraćeg orbitalnog perioda u sistemu, planeta 47*e*, najbliža matičnoj zvezdi, je isključena iz simulacija. Testovi su pokazali da je ovo opravdano zbog njene relativno male mase (pogledati 5. poglavlje) i praktično zanemarljivog uticaja na kretanje planete 47*c*.

Analiza dinamičkih karakteristika i efikasnosti transporta malih tela iz prstena planetezimala u sistemu WASP-47 urađena je korišćenjem kako samih izlaza iz numeričkih integracija, tako i na osnovu njihovih sopstvenih orbitalnih elemenata, određenih po algoritmu koji su razvili [Knežević and Milani \(2000\)](#).

6.2 Rezultati i diskusija

U ovom delu predstavimo glavne rezultate ove teze. Kao što je već par puta pomenuto, glavni cilj rada je proučavanje dinamičkih karakteristika planetezimala koji se nalaze u hipotetičkom prstenu.

Kretanje malih tela u nekom planetarnom sistemu, zavisi pre svega od gravitacionih uticaja planeta. Kako je prsten planetezimala postavljen na udaljenosti od 2.7 do 3.0 AJ, kretanje objekata iz prstena je najviše pod uticajem planete 47*c*. Iz tog razloga potrebno je pre kretanja samih planetezimala, proučiti osnovne karakteristike kretanja planete 47*c*.

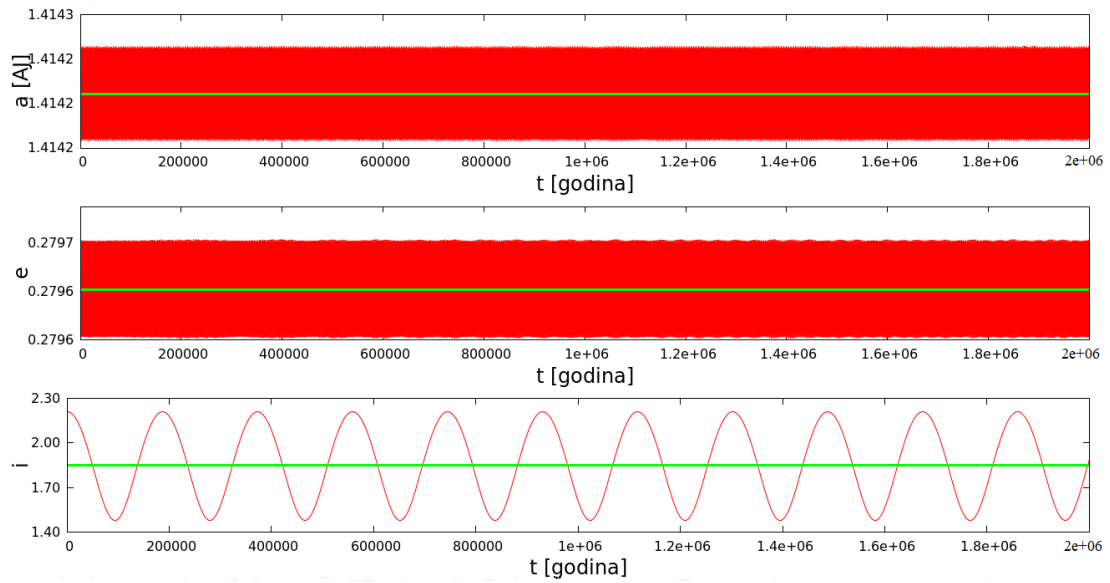
Pošto nas ovde zanimaju dugoročne karakteristike kretanja, za analizu nam nisu pogodni oskulatorni elementi koje dobijamo iz integracija, već nam je potreban neki vid konstanti kretanja. Kod malih tela u tu svrhu koristimo sopstvene orbitalne elemente, dok ćemo za planetu odrediti neki vid srednjih elemenata. Ovi elementi za planetu 47*c* određeni su linearnim fitom vremenskih serija oskulatorne velike poluose, ekscentriciteta i inklinacije.

Na slici 15 prikazane su promene elemenata a , e , i , kao i frekvencija g i s u toku vremena (videti sliku 16), dobijene iz integracija za planetu 47*c*. Takođe, prikazani su i linearni fitovi za svaki od parametara. Da bi odredili sekularne frekvencije, najpre su numeričkim diferenciranjem određene brzine promena njima odgovarajućih uglova u vremenu, a zatim su linearnim fitovanjem ovih podataka izračunate srednje vrednosti frekvencija. Dobijeni srednji elementi planete 47*c* prikazani su u tabelici 1.

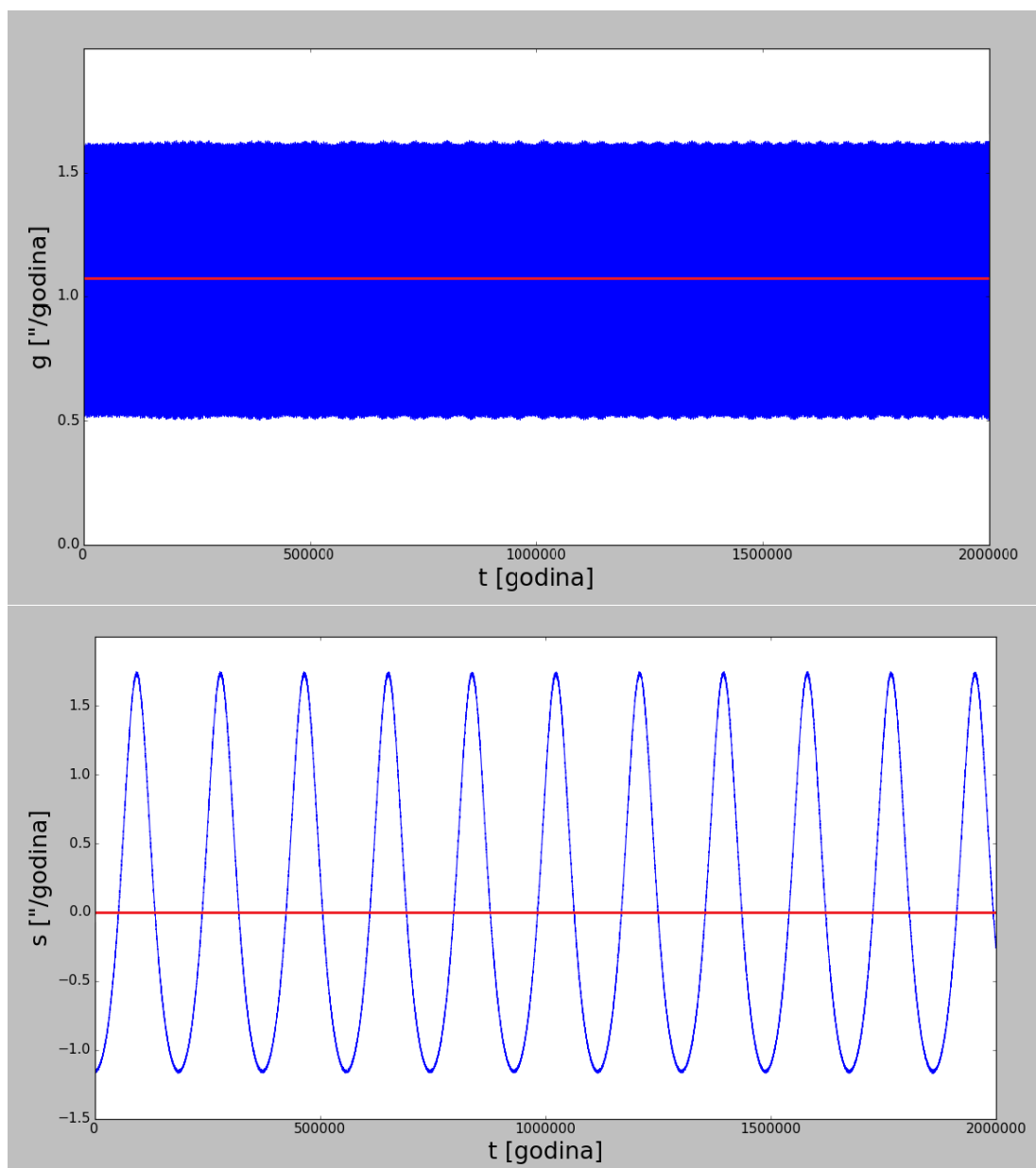
Tablica 1: Srednje vrednosti parametara a , e , i , g i s planetu 47*c*, određene iz integracija od 2 miliona godina.

Parametar	Vrednost
a	1.41421 AJ
e	0.2796
i	$1^{\circ}.8575$
g	1.065 "/god
s	0.000 "/god

Podaci o vrednostima srednjih elemenata kretanja planete 47*c* pomažu nam da bolje razumemo dobijene rezultate za kretanje malih tela.



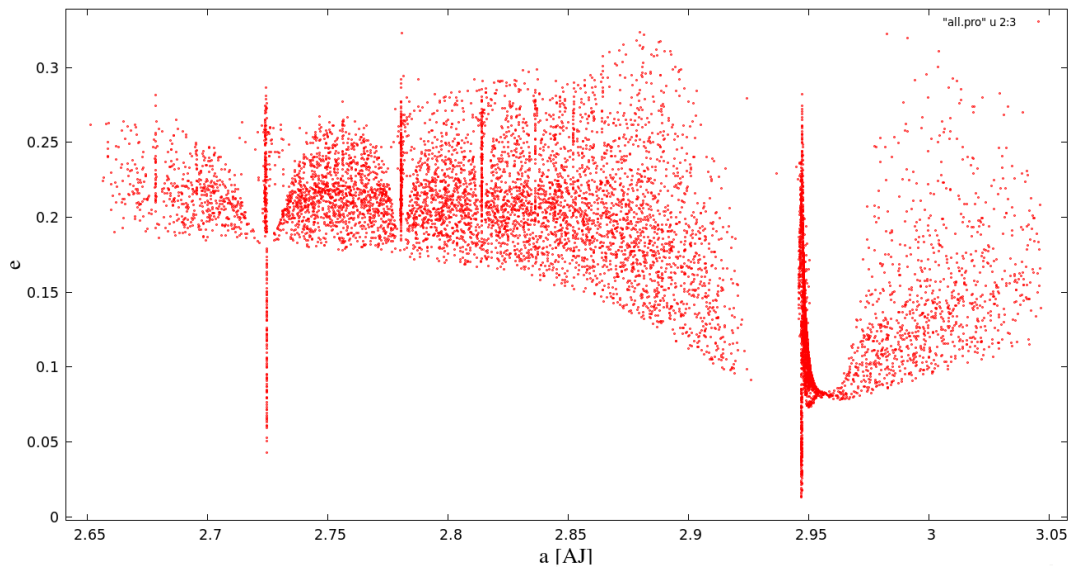
Slika 15: Na prvom grafiku (smer od gore na dole) prikazana je promena velike poluose planete 47c u funkciji vremena (crvenom bojom) i linearni fit (linija zelene boje) u intervalu od 2 miliona godina. Na drugom i trećem grafiku date su e i i (crvenom bojom) i njihov linearni fit (zelenom bojom) u funkciji vremena u intervalu od 2 miliona godina, respektivno.



Slika 16: Sekularne frekvencije uglova za planetu 47c. Na gornjem grafiku prikazana je sekularna frekvencija g (plavom bojom) u zavisnosti od vremena i linearni fit (crvenom bojom) frekvence u intervalu od 2 miliona godina, i na donjem grafiku data je sekularna frekvencija s (plavom bojom) u zavisnosti od vremena i njen linearni fit (crvenom bojom) za 2 miliona godina.

Ispitivanje karakteristika kretanja planetezimala (test objekata) započecemo analizom raspodele njihovih sopstvenih orbitalnih elemenata u ravni velika poluosa - ekscentricitet, prikazanoj na slici 17. Lako se mogu uočiti dve specifičnosti na ovoj slici. Kao prvo, jedan broj objekata izgleda raspoređen duž vertikalnih linija, i kao drugo, vrednosti sopstvenih ekscentriciteta su značajno veće od njihovih početnih (oskulatornih) vrednosti. Pored toga, minimalne vrednosti ekscentriciteta su izgleda spregnute sa vrednošću sopstvene velike poluose na kojoj se neki objekat nalazi.

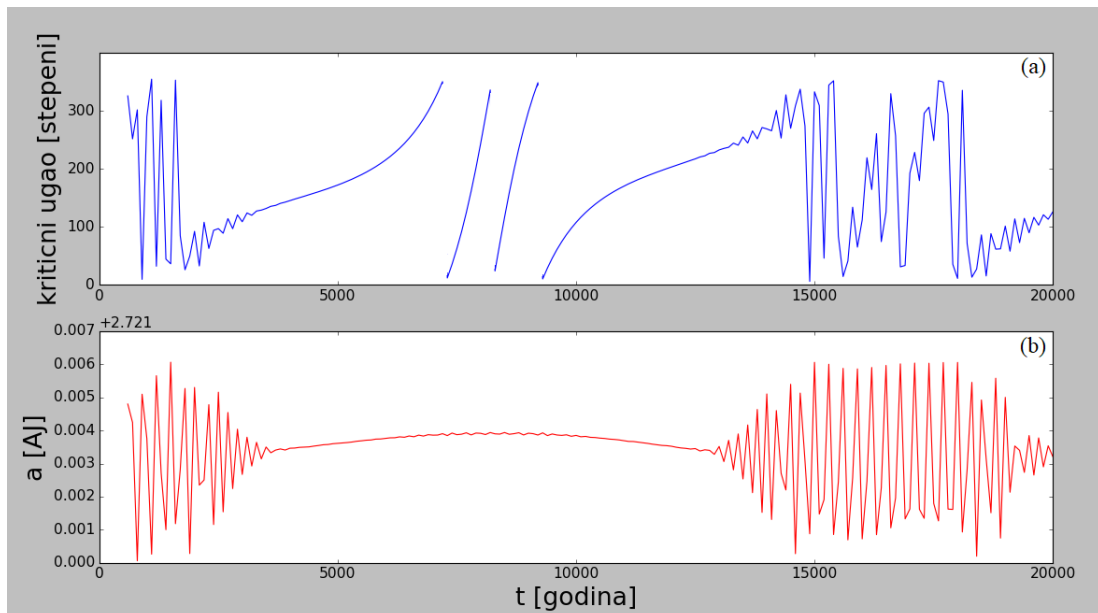
Prva karakteristika, tj. pojava vertikalnih linija, poznato je da se javlja na mestima gde se nalaze rezonance u srednjem kretanju, a predstavlja artefakt procedure za određivanje sopstvenih elemenata. Najuočljivije vertikalne linije javljaju se na velikim poluosama od 2.723, 2.780, 2.813 i 2.947 AJ. Na osnovu III Keplerovog zakona (jednačina 3), može se pokazati da navedene lokacije odgovaraju redom rezonancama 8:3, 11:4, 14:5 i 3:1 u srednjem kretanju, sva sa planetom 47c.



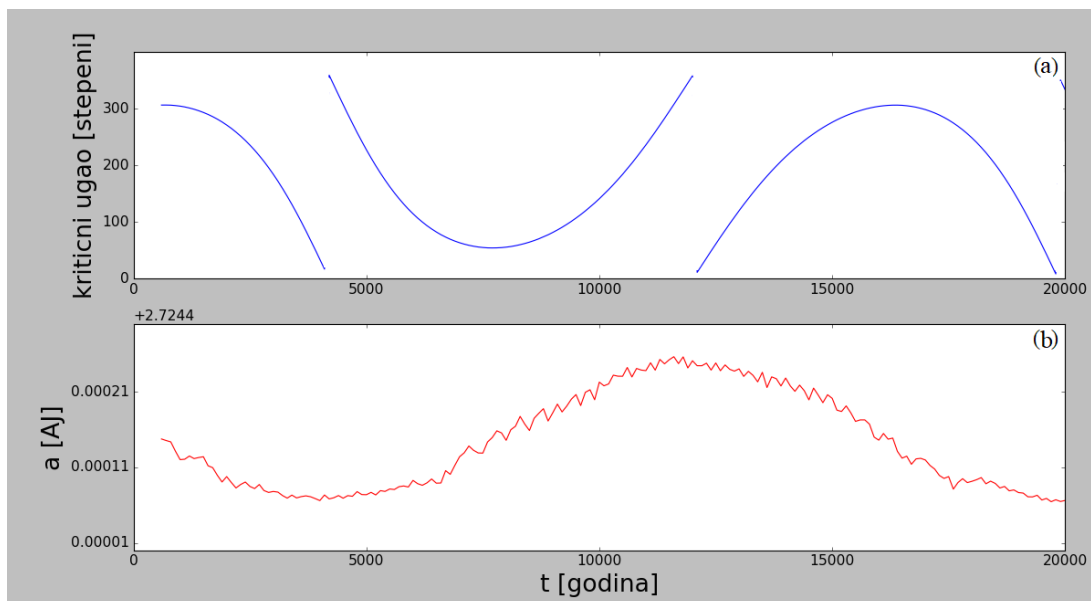
Slika 17: Raspodela sopstvenih elemenata test objekata u a-e ravni.

Kako je libracija rezonantnog kritičnog ugla jedina sigurna potvrda da je neki objekat u rezonanci, a ujedno i o kojoj rezonanci se radi, izdvojeno je po nekoliko asteroida koji se nalaze na lokacijama neke od pomenutih rezonanci i analizirana je promena njihovih odgovarajućih kritičnih uglova u vremenu. Na taj način potvrđeno je da se zaista radi o rezonancama u srednjem kretanju, koje su prvobitno identifikovane na osnovu III Keperovog zakona.

Prvi takav primer dat je za rezonancu 8:3 u srednjem kretanju sa planetom 47c. Kritični ugao $\sigma = 8\lambda_1 - 3\lambda_2$ je određen na osnovu dela jednačine 25 (uzevši u obzir samo brze uglove), za dva izdvojena test objekata, br. 101383 i 102048, koji su nalaze u 8:3 rezonanci. Može se primetiti da je kritični ugao prvog objekta jedan deo vremena u cirkulaciji a drugi u libraciji (slika 18), dok je kod drugog objekta kritični ugao konstantno u libraciji na posmatranom intervalu (slika 19).



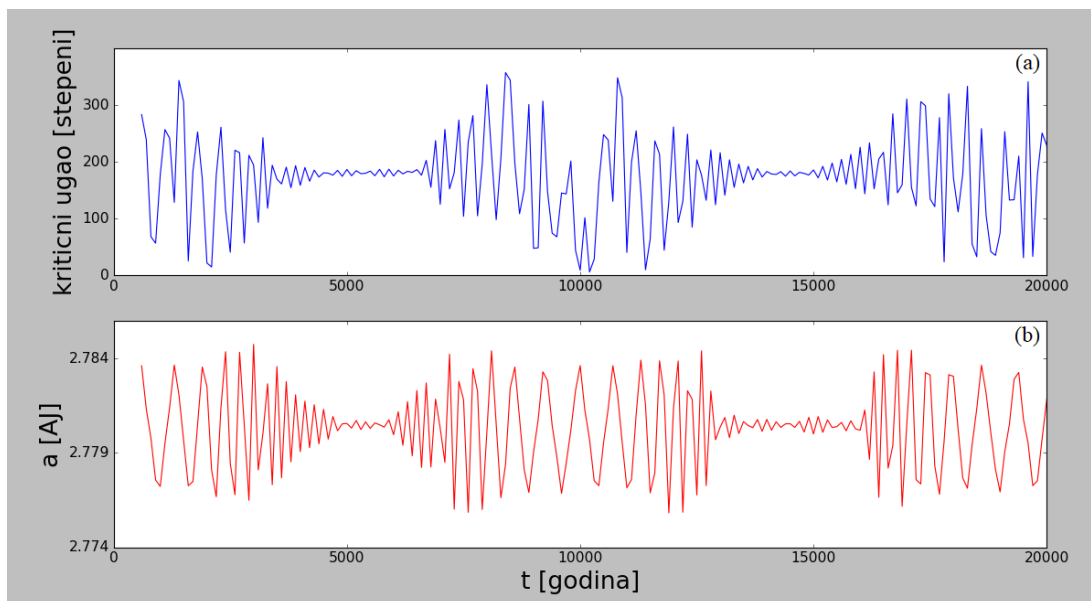
Slika 18: Na panelu (a) data je promena kritičnog ugla u vremenu za rezonantni test objekat br. 101383 skalirana na interval od 0-360°. Promena ugla od 0 do 360° govori da je u pitanju cirkulacija, međutim primećujemo da se ovde na pojedinim mestima javljaju oscilacije oko jedne vrednosti ili veoma spore promene ugla što ukazuje na to da je test objekat u rezonanci ili blizu nje. Na panelu (b) se nalazi velika poluosa u funkciji vremena za isti objekat, i u istom vremenskom intervalu kao i kritični ugao.



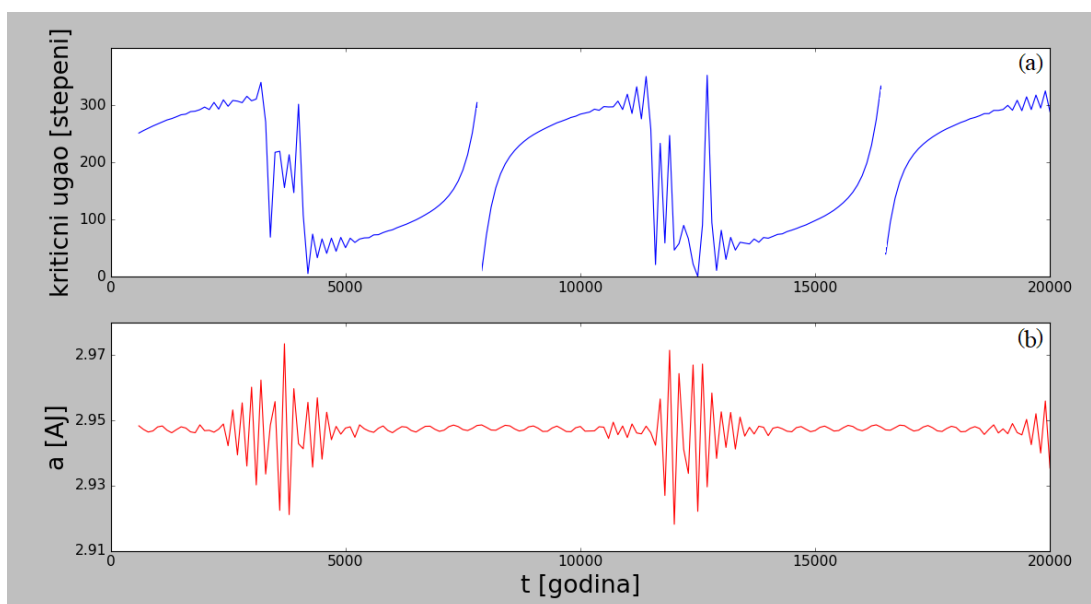
Slika 19: Na panelu (a) data je promena kritičnog ugla u funkciji vremena objekta br. 102048 koji je u rezonanci 8:3. Primćuje se da kritični ugao osciluje oko 0° sa velikom amplitudom. Na panelu (b) je data promena velike poluose u zavisnosti od vremena za isti test objekat.

Slična analiza urađena je i za objekte br. 102285 i 103174 koji se nalaze u 11:4 odnosno 3:1 rezonanci u srednjem kretanju sa planetom 47c. Njihovi kritični uglovi se određuju na osnovu jednačina $\sigma = 11\lambda_1 - 4\lambda_2$, odnosno $\sigma = 3\lambda_1 - \lambda_2$. Na slici 20 dati su velika poluosa i rezonantni kritični ugao objekta koji se nalazi u 11:4 rezonanci. Kritični ugao se na intervalima sa centrom na oko 5 odnosno 15 hiljada godina, nalazi u libraciji, i osciluje sa veoma malom amplitudom oko neke konstantne vrednosti, što potvrđuje pretpostavljeno rezonantno kretanje ovog objekta. Važno je primetiti i korelaciju između promena kritičnog ugla i velike poluose, gde libraciji kritičnog ugla odgovaraju prigušene oscilacije velike poluose.

Slika 21 se odnosi na objekat br. 103174, koji je u interakciji sa najsnažnijom rezonancom u prstenu 3:1. Odlikuju ga povremene izrazito velike oscilacije velike poluose. Kritični ugao je samo povremeno u libraciji, ali njegovo ponašanje ukazuje da se objekat nalazi u rezonanci ili u njenoj neposrednoj blizini. U ovom slučaju takođe uočavamo poprilično dobru korelaciju između ponašanja velike poluose i kritičnog ugla.

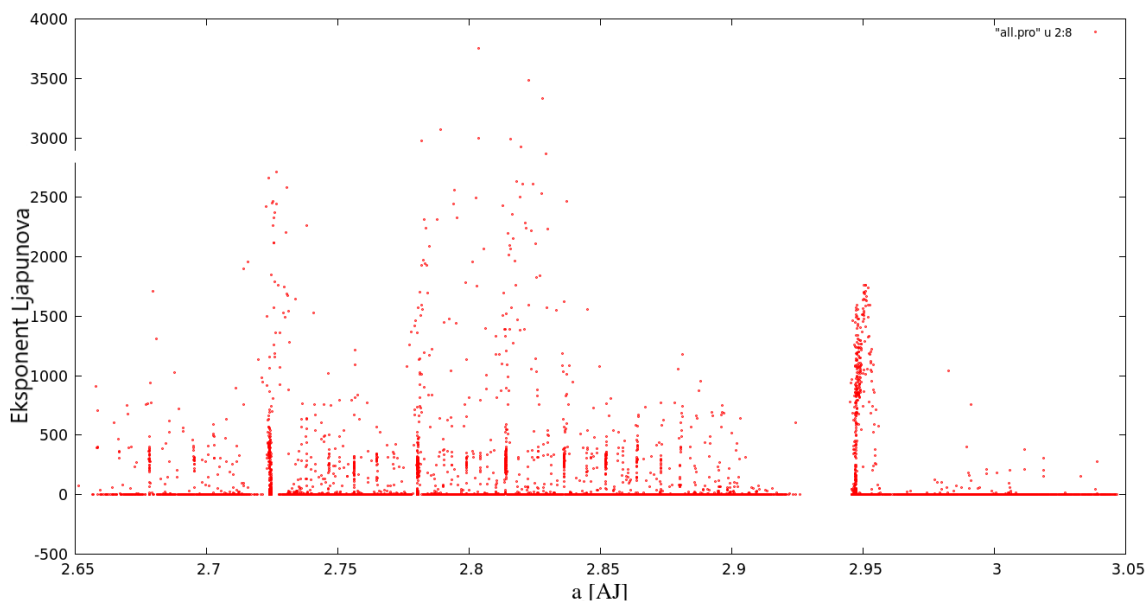


Slika 20: Isto kao i na slici 18, ali za test objekat u rezonanci 11:4



Slika 21: Isto kao i na slici 18, ali za test objekat u rezonanci 3:1.

Da bismo ispitali stabilnost kretanja test objekata odredili smo i njihove eksponente Ljapunova. Ovi rezultati prikazani su na slici 22, gde možemo videti promenu vrednosti eksponenta Ljapunova u funkciji sopstvene velike poluose. Primitimo da veća vrednost eksponenta Ljapunova ukazuje na nestabilnije objekte, pa samim tim i na lokacije rezonanci, pre svega u srednjem kretanju. Dati su eksponenti Ljapunova (T_e) pomnoženi sa milion godina. Stoga se vreme Ljapunova, koje je inverz eksponenta Ljapunova, dobija kao $T_L = 10^6/T_e$. Možemo primetiti da veliki broj objekata ima vremena Ljapunova kraća od 10 hiljada godina (stabilne orbite imaju vreme Ljapunova duža od 10^5 godina), što znači da su njihove putanje haotične.



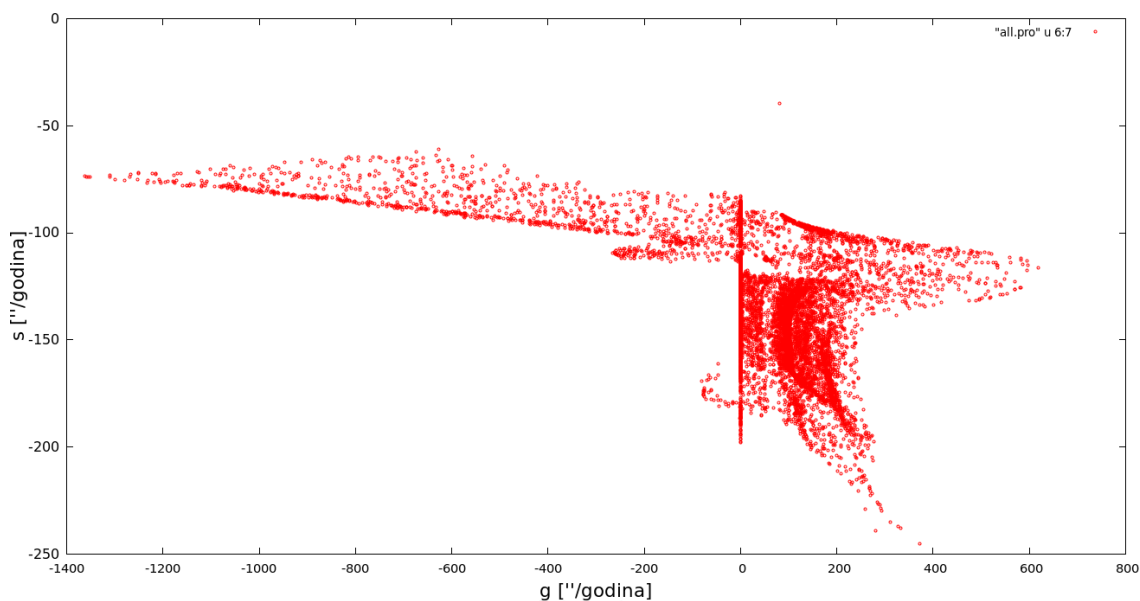
Slika 22: Vrednosti eksponenta Ljapunova za test objekte u funkciji velike poluose. Možemo uočiti da se identifikovane lokacije rezonanci u srednjem kretanju dobro poklapaju sa mestima gde imamo porast u vrednosti eksponenta.

Pored rezonanci u srednjem kretanju, značajnu ulogu u dinamici planetezimala mogu imati i sekularne rezonance. Na slici 23 date su frekvencije longitude čvora s i longitude perihela g objekata iz hipotetičkog prstena planetezimala. U toj ravni se sekularne rezonance vide kao linije, bilo vertikalne, horizontalne ili pod nagibom. Vertikalne linije predstavljaju g rezonance, tj. rezonance perihela, dok horizontalne predstavljaju s ili t_i rezonance čvora. Linije pod nagibom su povezane sa kombinacijama pomenuta dva tipa sekularnih rezonanci.

Najuočljivija sekularna rezonanca povezana je sa vertikalnom linijom koja se nalazi na frekvenciji od $g \approx 1.159''/god$. Imajući u vidu da je odgovarajuća frekvencija planete 47c, $g_c = 1.065''/god$, što je vrlo blizu vrednosti frekvencije perihela kod test objekta koji su raspoređeni duž pomenute vertikalne linije, zaključujemo da se najverovatnije radi o linearnoj sekularnoj rezonanci

$$g - g_c \approx 0 \tag{29}$$

gde je g frekvencija longitude perihela planetezimala, a g_c planete 47c.



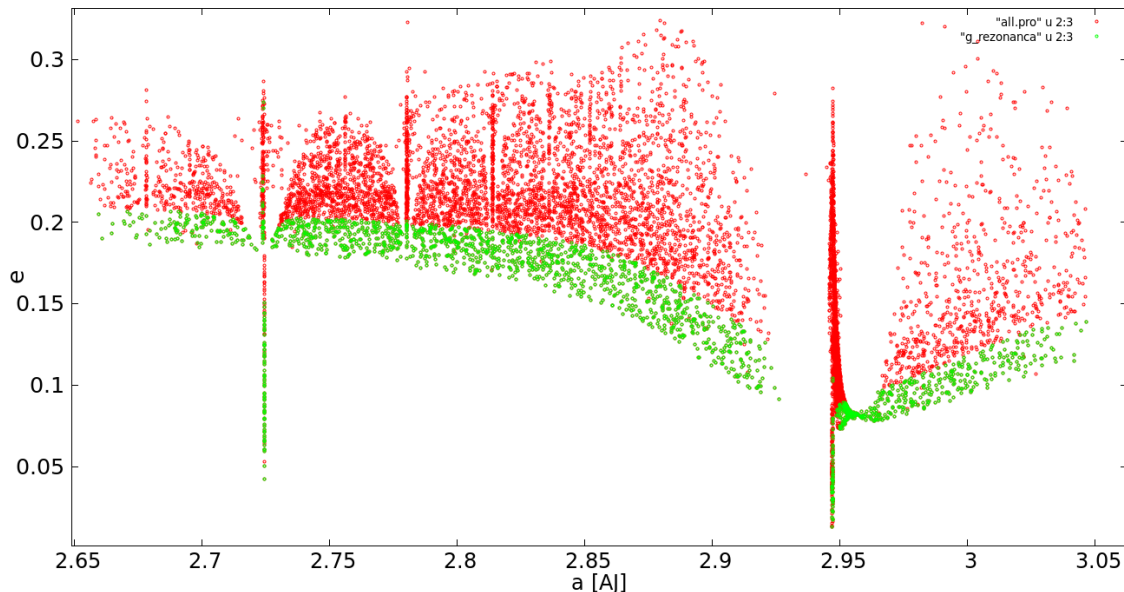
Slika 23: Sekularne frekvencije longitude čvora s i longitude perihela g test objekata.

Vratimo se sada na pitanje uzroka druge specifičnosti primećene u raspodeli sopstvenih elemenata planetezimala u ravni velika poluose - ekscentricitet (slika 17). Na slici se vidi da su minimalne vrednosti ekscentriciteta spregnute sa vrednostima velike poluose i to tako što je e_{min} generalno veće na manjim vrednostima poluose. Postoje dva moguća uzroka za ovu pojavu. Sa jedne strane to je vrednost prinudnih oscilacija koje potiču od poremećaja u kretanju planete 47c. Kao što je poznato, vrednosti prinudnog ekscentriciteta rastu sa približavanjem planeti i izjednačavaju se sa vrednošću ekscentriciteta planete na lokaciji gde se planeta nalazi. Sa druge strane, sličan efekat mogu da proizvedu i sekularne rezonance. Videli smo već da je bar jedna linearna sekularna rezonanca prisutna u prstenu planetezimala. Da bi ispitili njen mogući uticaj na pomenutu strukturu, moramo utvrditi položaj rezonance $g - g_c$ u ravni $a - e$.

Sekularne rezonance su trodimenzionalne strukture u prostoru elemenata a , e i i , što znači da njihov položaj zavise od svakog od pomenuta tri elementa. To znači da kada god projektujemo položaj neke od sekularnih rezonanci na ravan, moramo imati u vidu da on zavisi i od trećeg elementa. Iako usled promene nagiba položaj krive sekularne rezonance $g - g_c$ u $a - e$ ravni može značajno da se promeni, u ovom slučaju moguće je lokalizovati njen položaj jer su inklinacije svih planetezimala slične, tj, nalaze se u ograničeno malom intervalu vrednosti.

Jedan način da se aproksimativno odredi lokacija objekata koji su u rezonanci (tj. položaj rezonance) jeste da se izdvoje sva tela čije g frekvencije su približno iste kao i frekvencija g_c . Kako su tipične širine jačih sekularnih rezonanci u glavnom prstenu asteroida oko $\pm 0.5''/god$, izdvajamo one objekte čije frekvencije se od frekvencije planete razlikuju za najviše $\pm 0.5''/god$. Kada se objekti čije frekvencije ispunjavaju navedeni uslov isplotuju drugom bojom u ravni $a - e$, dobijamo put rezonance $g - g_c$ u ovoj ravni (videti sliku 24). Na osnovu dobijenog rezultata jasno je da ova sekularna rezonanca ima ulogu u formiranju raspodele planetezimala u $a - e$ ravni.

Nastali lučni oblik je verovatno jednim delom posledica prinudnih oscilacija, ali izgleda da ipak ključnu uloga u njegovom formiranju ima linearna sekularna rezonanca $g - g_c$.



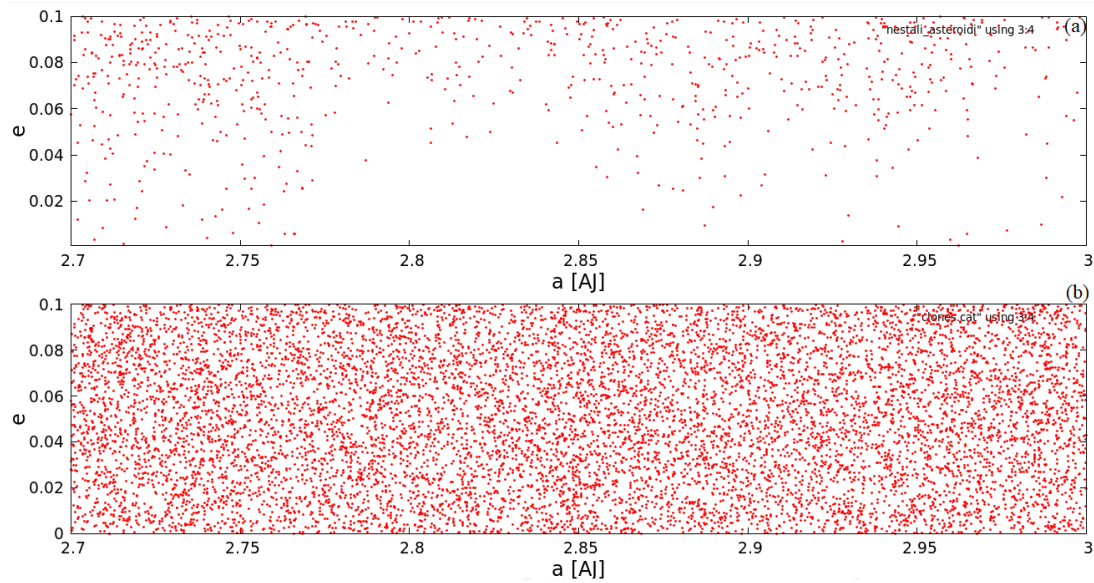
Slika 24: Isto kao i na slici 17, ali su ovde objekti čije se frekvencije perihela razlikuju za manje od $\pm 0.5''/god$ od odgovarajuće frekvencije planete 47c, prikazani zelenom bojom. Položaj ovih objekata odgovara položaju linearne sekularne rezonance $g - g_c$.

Jedan broj test objekata u posmatranom prstenu izložen je značajnim dinamičkim poremećajima, usled kojih su izbačeni iz tog regiona. Za takva mala tela integracija je u nekom trenutku prekinuta. Konkretno, od 10000 objekata čije su putanje numerički integraljene, sopstvene elemente odredili smo za njih 9187. Poremećaji kretanja kod preostalih 813 objekata (oko 8% od ukupne populacije) bili su suviše veliki da bi se mogli odrediti njihovi sopstveni elementi.

Da bi bolje razumeli uzroke i mehanizme izbacivanja ovih objekata, dodatno je analizirana populacija od njih 813 koji su izbačeni tokom integracija od 2 miliona godina. Na slici 25 (gornji panel) prikazana je raspodela početnih vrednosti velike poluose i ekscentriciteta izbačenih objekata. Najviše izbačenih planetezimala je iz unutrašnjosti prstena kao i iz najjače rezonance 3:1. Ovo je

očekivan rezultat ako imamo u vidu da su ključni parametri za izbacivanje jačina rezonance i mogući bliski prilazi sa nekom od planeta. Kada su uzrok rezonance, onda su jače rezonance očekivano efektivnije, i zato je jedan od regiona prstena iz kog je izbačen veći broj objekata povezan sa lokacijom najjačnije rezonance u srednjem kretanju koja preseca prsten, a to je 3:1 rezonanca sa planetom 47c, koja se kao što smo videli nalazi na oko 2.95 AJ.

S druge strane, bliski prilazi za objekte u prstenu su potencijalno mogući pre svega sa planetom 47c. Pošto je srednje afelsko rastojanje ove planete, određeno na osnovu elemenata datih u tabeli 1, $Q_c \approx 1.81$ AJ, jedino objekti blizu unutrašnje granice prstena mogu potencijalno prići dovoljno blizu, i to samo pod uslovom da imaju prilično veliki ekscentricitet orbite. U tom smislu najbolji kandidati da imaju bliske prilaze planeti 47c, jesu objekti koji se nalaze u 8:3 rezonanci u srednjem kretanju. Ova rezonanca nalazi se blizu unutrašnje granice prstena, na 2.72AJ, i dovoljno je snažna da izazove oscilacije ekscentriciteta velike amplitude, tako da kada su u okolini maksimuma ekscentriciteta, objekti iz rezonance mogu prići blizu planete.

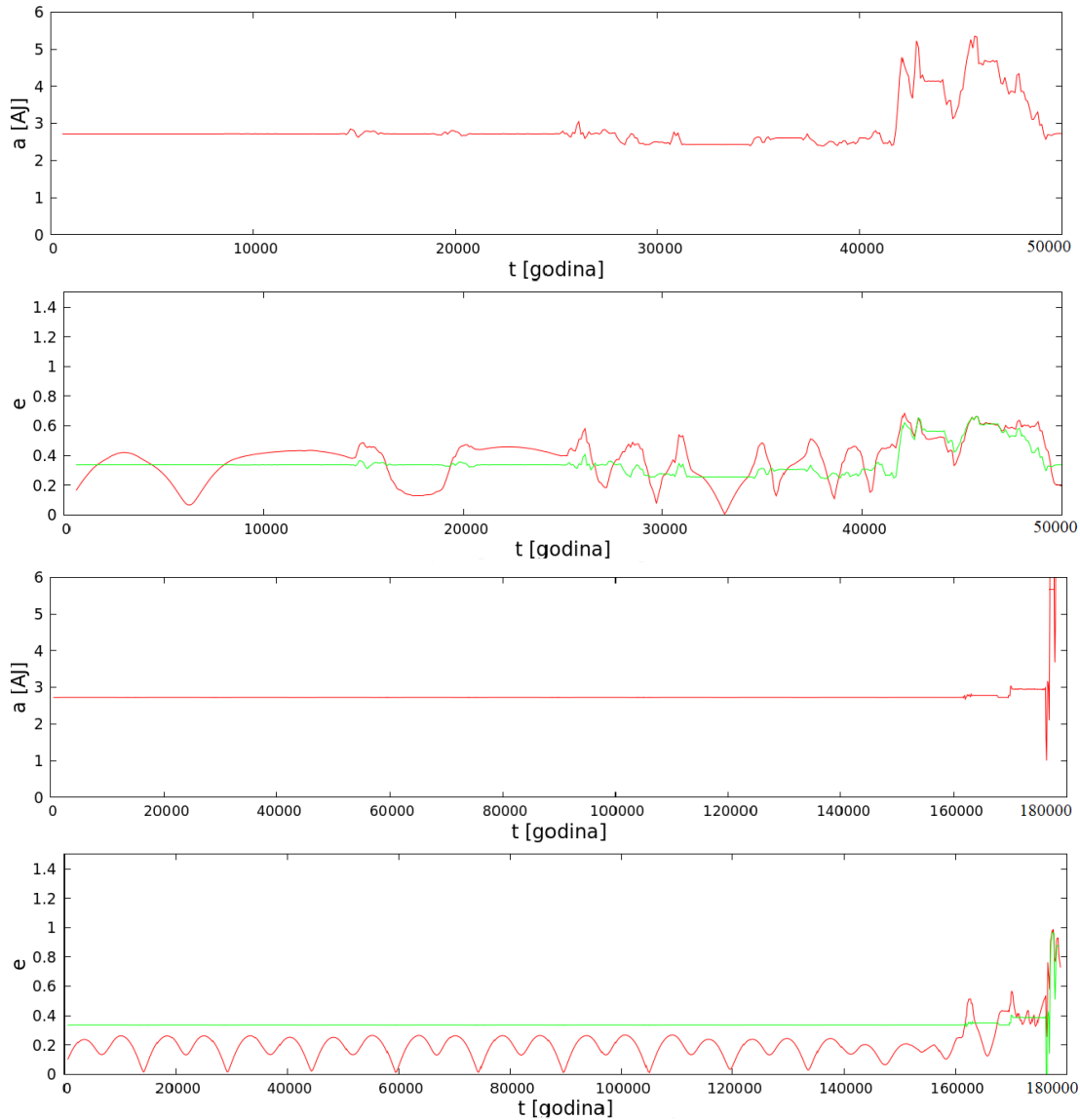


Slika 25: Gornji panel prikazuje raspodelu početnih vrednosti velike poluose i ekscentriciteta 813 izbačenih test objekata. Donji panel je raspodela početnih vrednosti velike poluose i ekscentriciteta svih 10 000 test objekata.

Da bi potvrdili hipotezu da su objekti koji se nalaze blizu unutrašnje granice prstena, po velikoj poluosi, zaista izbačeni usled kombinovanog dejstva rezonance 8:3 i bliskih prilaza sa planetom 47c, nasumično su odabrana dva test objekta, br. 100004 i 100029, koji su izbačeni sa te lokacije, i analizirano je njihovo kretanje. Na slici 26 prikazana je promena velikih poluosa i ekscentricitet ovih test objekata. Objekat čiji su elementi prikazani na gornja dva panela pomenute slike, prvu veću promenu velike poluose (prvi gornji panel) ima nakon oko 15 hiljada godina, a zatim ima još nekoliko sličnih varijacija, da bi nešto nakon 400 hiljada godina bio izbačen iz prstena. Ako ovo ponašanje velike poluose uporedimo sa vrednostima ekscentriciteta u tim trenucima (drugi panel odozgo), vidimo da su varijacije u velikoj poluosi dobro korelisane sa promenom ekscentriciteta, i po pravilu se javljaju u okolini maksimuma ekscentriciteta. Na istom panelu sa ekscentricitetom (videti sliku 26) prikazana je i minimalna vrednost ekscentriciteta za koji orbita tog objekta, u datom trenutku i za odgovarajuću veliku poluosu, preseca orbitu planete 47c. Očigledno je da u maksimumima ekscentriciteta ovaj test objekat preseca orbitu planete i može imati bliske prilaze sa njom.

Slično ponašanje uočava se i kod test objekta 100029 (donja dva panela na slici 26). Ovaj objekat ostao je nešto duže u sistemu, ali se može primetiti da je izbačen veoma brzo nakon što je njegov ekscentricitet porastao dovoljno da orbita preseče orbitu planete 47c. Kada je e planetezimala iznad pomenute granice, njegova orbita preseca orbitu planete 47c i može doći do bliskih prilaza sa planetom. U slučaju da se nalazi blizu ove granice, takođe postoji mogućnost bliskih prilaza sa planetom. Na slici primećujemo da su se orbite planete i planetezimala

100004 učestalo presecale sve dok objekat nije izbačen iz sistema, čime se potvrđuje pretpostavka da su tela sa tih lokacija izbačena usled bliskih prilaza i rezonance u srednjem kretanju. Takođe, oscilacije e objekta 100029 su bile dovoljno velike i blizu granice presecanja orbite planete, te je moglo doći do bliskih prilaza što je doprinelo njegovom izbacivanju iz sistema.

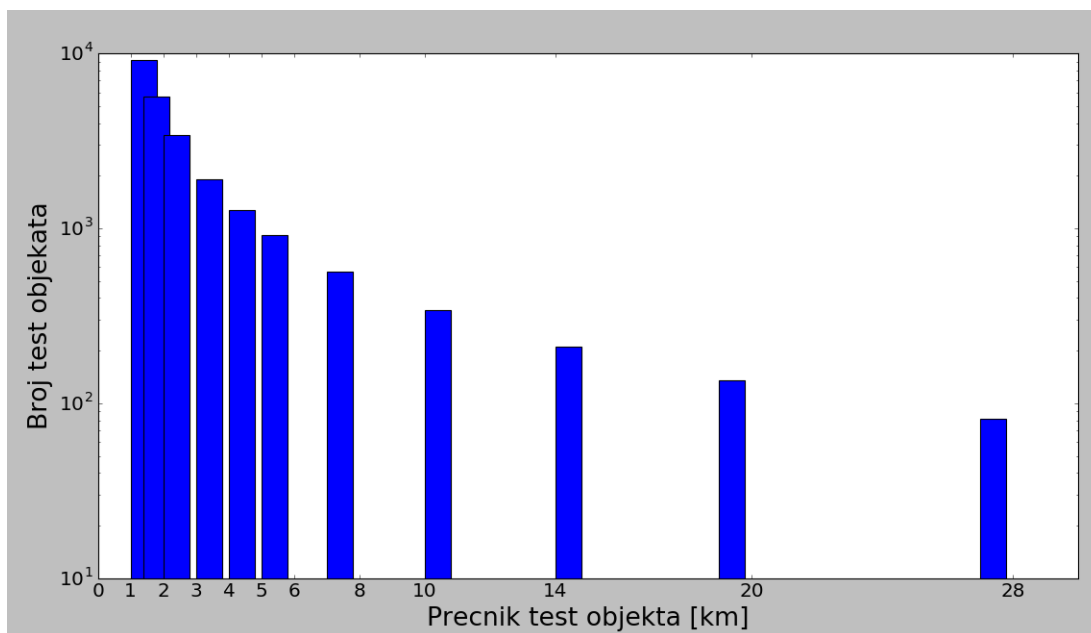


Slika 26: Na prvom grafiku (od gore ka dole) prikazana je promena velike poluose u funkciji vremena test objekta 100004 koji je izbačen iz hipotetičkog prstena. Grafik dva prikazuje promenu ekscentričnosti orbite u zavisnosti od vremena istog planetezimala. Na grafiku tri i četiri vide se velika poluosa i ekscentricitet test objekta 100029 u zavisnosti od vremena. Na graficima dva i četiri crvenom bojom je predstavljen ekscentricitet test objekata, a zelenom usrednjeni ekscentricitet planete 47c. Oba planetezimala su se nalazila u rezonanci 8:3.

Usled gubitka planetezimala iz prstena na lokacijama rezonanci, u nekom trenutku će se one isprazniti. Dopremanjem novih planetezimala na lokacije rezonanci uočavamo fluks koji ukazuje na vreme pražnjenja i "punjenja" ovih regiona. Mehanizam dopremanja planetezimala u rezonance jeste efekat Jarkovskog. Da bi se procenilo koliko Jarkovski može biti efikasan u sistemu WASP-47, potrebno je da pretpostavimo određenu raspodelu po veličini tih planetezimala s obzirom da je efekat Jarkovskog obrnuto proporcionalan veličini planetezimala. Raspodela po veličinama objekata u asteroidnom prstenu rađena je na osnovu jednačine iz rada [Tsirvoulis et al. \(2018\)](#):

$$N(> D) = N_t D^{-\alpha} \quad (30)$$

gde je N broj objekata koji je veći od zadate veličine D , dok je N_t ukupan broj objekata. Uzimamo eksponent $\alpha = 1.43$ za kumulativnu raspodelu test objekata manjih od 100 km, dok je za objekte veće od 100 km, korišćena vrednost $\alpha = 2.5$, koja je preuzeta iz napomenutog rada. Na slici 27 i u tabeli 2 mogu se videti raspodele test objekata u hipotetičkom prstenu u funkciji njihovog prečnika izraženog u kilometrima koja je dobijena na osnovu jednačine 30. Pretpostavljeno je da objekata manjih od 1km nema, a najveći broj, čak 3508, se nalazi između 1 i 1.4km. U intervalu od 1.4 do 2km se nalazi 2269 objekata i taj broj nastavlja da opada sve do 100km, s tim da objekata većih od 100km u ovom hipotetičkom prstenu ima 13.



Slika 27: Histogram kumulativne raspodele prečnika planetezimala, određene na osnovu jednačine 30.

Tablica 2: Broj test objekata u hipotetičkom prstenu za date intervale prečnika

Poluprečnik [km]	Broj test objekata
1-1.4	3508
1.4-2	2269
2-3	1501
3-4	644
4-5	346
5-7	351
7-10	227
10-14	130
14-19	75
19-27	54
27-37	29
37-52	21
52-72	12
72-100	7
>100	13

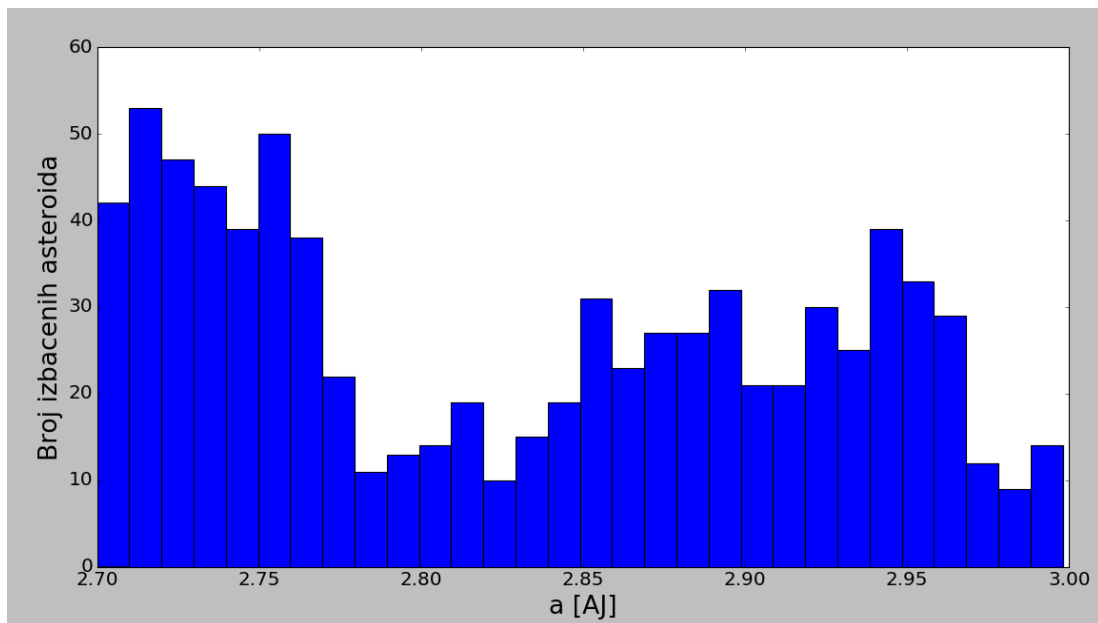
Pored procene veličine objekata u ovom prstenu neophodne za procenu efekta Jarkovskog, potrebno je odrediti i kojom brzinom se gube asteroidi iz rezonanci u srednjem kretanju. Na osnovu brzine gubitka planetezimala iz rezonance i efekta Jarkovskog koji doprema nove objekte na tu

lokaciju, možemo utvrditi da li fluks u rezonancama može biti stabilan. Na slici 28 data je raspodela po poluosi izbačenih test objekata. Može se uočiti u kom opsegu poluose se nalazi najveći broj izbačenih planetezimala. Ovde se rezonanca u srednjem kretanju 8:3 nalazi u unutrašnjem delu prstena gde i bliski prilazi sa planetom 47c mogu imati značajnu ulogu. Određen je i broj izbačenih objekata u 3:1 rezonanci u srednjem kretanju. Da bismo odredili brzinu gubitka malih tela, odredićemo dinamički poluživot test objekata (vreme koje je potrebno da bi se izbacila polovina objekata u populaciji koju posmatramo). Za ovo je neophodno odrediti granice rezonance. Uzimajući u obzir raspodelu po poluosi broja izbačenih test objekata i odredivši vrednost velike poluose za koju broj tih objekata značajno opada u oblasti rezonance, za rezonancu u srednjem kretanju 8:3 je uzet interval od 2.70 do 2.78 AJ, a za 3:1 interval od 2.89 do 2.96. Za unutrašnju rezonancu procena je da se u rasponu od 0.08 AJ u početnom trenutku nalazilo 2667 objekata, te da se u ovom intervalu velike poluose nalazi 314 izbačenih malih tela. "Poluživot" smo odredili na osnovu jednačine iz rada Wood et al. (2018)

$$N = N_0 * b^t \quad (31)$$

gde je N ukupan broj asteroida u tom regionu, N_0 je broj izbačenih iz regiona, b je konstanta koju određujemo fitom, a t je vreme i za njegovu vrednost je uzeto 2 miliona godina (vremenski interval integracije sistema WASP-47 u ovoj simulaciji). Dobijeno vreme potrebno da se izbaci polovina objekata sa ove lokacije u rezonanci 8:3, dakle 1225 planetezimala, je 11 miliona godina. Za spoljašnju rezonancu u srednjem kretanju, u kojoj je inicijalno bilo 2143 objekata i izbačeno je 177, na osnovu jednačine 31 za "poluživot" dobijeno vreme je 17 miliona godina.

Pitanje je koliko brzo efekat Jarkovskog može dopremiti nove planetezimale na ove lokacije. Na osnovu jednačine 26 i rada Spoto et al. (2015), urađena je procena efekta Jarkovskog za test objekte u ovom hipotetičkom prstenu. Procena vrednosti promene velike poluose za familiju primitivnih ugljeničnih asteroida, tipa C, (kao što je na primer 1726 Hoffmeister) na rastojanju od 2.76 AJ do 2.8 AJ za objekte od 1km je $-5.90 * 10^{-4} AJMgod^{-1}$ na unutrašnjem delu pojasa planetezimala, a $5.86 * 10^{-4} AJMgod^{-1}$ na spoljašnjem delu za milion godina. Ovu procenu možemo uzeti za hipotetički prsten test objekata u sistemu WASP-47 jer granice pojasa odgovaraju toj familiji, ekscentricitet oba prstena je približan (za WASP između 0.0 i 0.1, a za 1726 Hoffmeister od 0.05 do 0.046) kao i pretpostavka da se radi o primitivnim ugljeničnim asteroidima. Procenu efekta Jarkovskog za test objekte ostalih veličina dobijamo deljenjem vrednosti efekta za 1km sa prečnikom u kilometrima objekta za koji vršimo procenu efekta.



Slika 28: Raspodela po poluosi 813 izbačenih test objekata iz hipotetičkog prstena. Od početnih 10 000 objekata, simulacija je završena za 9187 planetezimala stoga se 813 smatra izbačenim iz sistema u toku 2 miliona godina, za koliko je rađena simulacija.

Na osnovu fluksa koji je dobijen numerički i procenjenog poluživota, u tabelama 3 i 4 dati su brojevi trenutnih, pristiglih i izbačenih test objekata iz ove dve rezonance. Svakom planetezimalu je dodeljena nasumična vrednost efekta u intervalu $[-\frac{da}{dt}, \frac{da}{dt}]$. Odnos $\frac{da}{dt}$ predstavlja sekularni uticaj na veliku poluosu i vrednosti koje su dodeljene planetezimalima su u rasponu između $-5.90 * 10^{-4} AJMgod^{-1}$ i $5.86 * 10^{-4} AJMgod^{-1}$ (pogledati prethodni pasus). Uzimajući u obzir procenu efekta Jarkovskog za test objekte u ovom prstenu, na osnovu jednačine

$$a(t) = a_0 + \frac{da}{dt}t, \quad (32)$$

gde je $a(t)$ nova lokacija test objekta na koje će on da pristigne za vreme t , a_0 lokacija na kojoj se prethodno nalazio, i $\frac{da}{dt}$ procena efekta Jarkovskog, određena je nova velika poluosa objekata koji pristižu na lokaciju rezonance u različitim vremenskim intervalima. Vremenski intervali za 8:3 su uzimani na svakih 11 miliona godina, a za 3:1 na svakih 17 miliona što su vrednosti "poluživota" rezonanci. Vremenski periodi duži od 100 miliona godina nisu uzimani u obzir jer tada sudarna evolucija postaje značajna.

Rezultati dobijeni za broj novih prispelih objekata u rezonance (u tabelama 3 i 4) za svaki interval je prikazana polovina ostalih objekata, kao i broj trenutnih nakon novih prispelih planetezimala. Objekti su smatrani "prispelim" ako je nova vrednost njihove velike poluose unutar ranije određenih vrednosti širine rezonance (za 8:3 između 2.70 i 2.78 AJ, a za 3:1 od 2.89 do 2.96 AJ) i ako se objekat prethodno već nije nalazio u toj rezonanci. Rezultati koji su očekivani bi trebali da pokažu da li u dve najjače, ispitane, rezonance u ovom sistemu postoji održiv fluks, tj. da broj prispelih i izbačenih asteroida sa tih lokacija treba da bude okvirno isti što ukazuje da postoji konstantan fluks asteroida koji napuštaju prsten planetezimala.

Imajući u vidu sve pomenute sličnosti između WASP-47 planetarnog sistema, u kome smo pretpostavili 10 000 objekata, i Sunčevog sistema, gde očekujemo reda veličine milion asteroida što je 100 puta više objekata, dobijene vrednosti za WASP-47 treba pomnožiti sa 100. U Sunčevom sistemu rezonanca 3:1 se smatra kao jedna od glavnih izvora malih tela bliskih Zemlji. Poluživot ovih objekat je relativno kratak (10 miliona godina). [Strom et al. \(2015\)](#) su u svom radu izložili da je fluks poplucije malih tela bliskih Zemlji stabilan poslednjih 3.7 i 3.8 milijardi godina. Sa druge strane, [Bottke et al. \(2006\)](#) su u radu procenili da je fluks malih tela u okolini Zemlje konstantan i da oko 220 asteroida na svakih milion godina bude izbačeno iz unutrašnjeg dela asteroidnog prstena ($a < 2.8AJ$) od čega oko 100 treba da bude poreklom iz rezonance 3:1 ([Morbidelli & Vokrouhlicky, 2003](#)). Uporedivši dobijene rezultate i one poznate u Sunčevom sistemu, dobijeno je da u sistemu WASP47 u rezonancama 8:3 i 3:1 stanje takođe skoro stabilno, tj. da je broj usled pristizanja i izbacivanja planetezimala na lokacijama rezonanci skoro konstantan. Na 100 miliona godina sa lokacija ovih rezonanci okvirno bude izbačeno 3600 i 2780 asteroida, respektivno. Takođe, do tog stabilnog stanja (konstantnog fluksa) dolazi nakon približno 30 miliona godina od početnog trenutka integracije u ovom sistemu. Mada se u tabelama može uočiti blagi porast broja planetezimala nakon 70 miliona godina, a jedan od uzroka tome može da bude i raspodela planetezimala u hipotetičkom prstenu. Iako je efekat Jarkovskog glavni mehanizam putem kog su asteroidi konstantno dopremani u rezonance i blizina planete ima značajan uticaj na asteroide u unutrašnjoj rezonanci, treba uzeti u obzir da u ovoj simulaciji sudari između tela, kao i JORP efekat nisu uzeti u obzir.

Tablica 3: Broj trenutnih, pristiglih i izbačenih test objekata iz rezonance 8:3. Ovi brojevi se odnose na prsten u kome ima 9187 planetezimala

Milioni godina	Izbačeni	Pristigli	Trenutno
0	-	-	2450
11	1225	46	1271
22	636	74	710
33	355	120	475
44	237	163	401
55	200	197	398
66	199	235	434
77	217	283	500
88	250	317	567
99	283	351	635

Tablica 4: Broj trenutnih, pristiglih i izbačenih test objekata iz rezonance 3:1. Ovi brojevi se odnose na prsten u kome ima 9187 planetezimala

Milioni godina	Izbačeni	Pristigli	Trenutno
0	-	-	2143
17	1072	58	1130
34	565	119	684
51	342	191	533
68	266	247	514
85	257	308	565
102	282	371	654

Zanimljivo bi bilo osvrnuti se na kraju na rad [Došović \(2018\)](#) u kome je obrađena tema dinamike kretanja malih tela i transport vode u ekstrasolarnom sistemu Trappist-1. Uzimajući u obzir da je zvezda u Trappist-1 sistemu spektralne klase M8 i da je samim tim mnogo manje mase i radijusa od Sunca, kao i da ovaj sistem čini 7 Zemljolikih planeta od koje su čak tri u nastanjivoj zoni, razlike u odnosu na sistem WASP-47 već postaju značajne. Kao i u WASP sistemu, tako i u TRAPPIST javljaju se dve najznačajnije rezonance u srednjem kretanju sa poslednjom planetom u sistemu odgovorne za transport planetezimala. U WASP je to 3:1 i 8:3, a u TRAPPIST 1:2 i 2:3. Kao rezultate [Došović \(2018\)](#) je predstavio da je uloga efekta Jarkovskog u tom sistemu, za razliku od WASP sistema, zanemariva i da ne postoji efikasan mehanizam koji bi dovodio nove planetezimale u regione rezonanci u srednjem kretanju. To ovaj sistem čini bezbednim za potencijalan život u njemu po pitanju sudarnih katastrofa. Da li će efekat Jarkovskog biti od značaja u planetarnom sistemu, zavisi od nekoliko faktora: koliko su posmatrani objekti udaljeni od izvora toplote (zvezde), kolika je masa i sjaj same zvezde, kao i od raspodele poveličinama posmatranih objekata. Takođe, "poluživot" je manji od 3 miliona godina, što ukazuje na pražnjenje potencijalnih impaktora nakon nekoliko miliona godina. U sistemu WASP-47 to nije slučaj. "Poluživot" je znatno duži, efekat Jarkovskog je od bitnog značaja i sudarna evolucija nakon 100 miliona godina postaje od značaja što može dovesti u pitanje bezbednost ovog sistema.

7 Zaključak

Prilikom formiranja planeta uloga asteroida je od značaja, između ostalog, i zbog dopremanja materija i vode unutar nastanjive zone jednog sistema. Pitanje efikasnosti transporta ledenih planetezimala van snežne linije u orbite koje presecaju nastanjivu zonu se sve više razmatra usled ekspanzije proučavanja nastanjivosti vansolarnih planeta. U tom smeru kao predmet ovog rada bio je egzo-sistem WASP-47 koji se sastoji od 4 planete, od kojih su dve veoma masivne, sa masama nešto većim od masa Jupitera pri čemu je poslednja, gasoviti džin sa potencijalno nastanjivim stenovitim satelitom, u nastanjivoj zoni. Po svojoj kompoziciji koja je slična Sunčevom sistemu po pitanju raznolikosti planeta i obliku putanjskih orbita, te matičnom zvezdom po karakteristikama sličnoj Suncu, samim tim i nivoom negravitacionih efekata u sistemu, WASP-47 je bio interesantan za ispitivanje stepena i efikasnosti transporta planetezimala, te proceni njihovog značaja za globalnu evoluciju celog sistema.

U svrhu ispitivanja te efikasnosti korišćene su numeričke integracije orbita u Orbit9 za 10 000 test objekata na 2 miliona godina. U sistemu su uočene dve značajne rezonance u srednjem kretanju, 8:3 i 3:1, sa planetom 47c, koje su dovele do najvećeg broja izbačenih asteroida u sistemu, kao i jedna najuočljivija linearna sekularna rezonanca perihela $g - g_c$, takođe sa planetom 47c. Još jedan bitan uočen mehanizam u unutrašnjem delu asteroidnog prstena je bliski prilaz malih tela sa planetom 47c koja se ujedno nalaze i u rezonanci 8:3. Takvo ponašanje dovodi i do haotičnog kretanja te do izbacivanja velikog broja planetezimala iz prstena.

Da bismo odredili efikasnost transporta malih tela kroz sistem, bilo je neophodno odrediti fluks asteroida u dve analizirane rezonance u srednjem kretanju. Rezultati su pokazali da u sistemu WASP47 postoji održiv fluks asteroida i da u rezonancama 8:3 i 3:1 na svakih milion godina u rezonance pristigne okvirno 18, odnosno 13 planetezimala. Efekat Jarkovskog je sasvim sigurno glavni mehanizam za dopremanje malih tela na lokacije rezonance, ali treba imati u vidu da ovaj model neće prikazati realan fluks jer u stvarnosti se transport objekata van sistema sporije dešava usled JORP efekata koji ovde nije uzet u obzir, ili dolazi do regeneracije broja asteroida usled kolizija. Raspodela planetezimala po veličini takođe može imati značajan uticaj jer je Jarkovski obrnuto proporcionalan prečniku tela.

U budućem radu bi bilo interesantno proučiti stopu sudara planetezimala koji su transportovani u blisku orbitu oko planete 47c, kao i potencijalnu mogućnost dopremanje vode na satelit ovog gasnog džina. Takođe, proširiti simulaciju i analizu na potencijalne Trojance planete 47c.

Literatura

- Adams, F. C., Laughlin, G., & Bloch, A. M. (2008). Turbulence Implies that Mean Motion Resonances are Rare. *The Astrophysical Journal*, Volume 683, Issue 2, pp. 1117-1128.
- Almenara, J. M., et al. (2016). Absolute densities, masses, and radii of the wasp-47 system determined dynamically. *A and A* 595, L5.
- Andelić, T. P. (1983). Uvod u astrodinamiku. Matematički institut, Beograd.
- Barclay, T., et al. (2013). A sub-mercury-sized exoplanet. *Nature*, Volume 494, Issue 7438, pp. 452-454.
- Barnes, R., Goździewski, K., & Raymond, S. N. (2008). The Successful Prediction of the Extrasolar Planet HD 74156d. *The Astrophysical Journal Letters*, Volume 680, Issue 1, pp. L57.
- Becker, J. C., et al. (2015). Wasp-47: A hot jupiter system with two additional planets discovered by k2. *The Astrophysical Journal Letters*, 812:L18 (6pp).
- Bolotin, Y., Tur, A., & Yanovsky, V. (2009). *Chaos: Concepts, control and constructive use*. Springer.
- Bonsor, A., Kennedy, M. G., Crepp, J. R., Johnson, J. A., Wyatt, M. C., et al. (2013). Spatially resolved images of dust belt(s) around the planet-hosting subgiant CrB. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 431, Issue 4, p.3025-3035.
- Bottke, W. F., et al. (2006). Yarkovsky and yorp effects: Implications for asteroid dynamics. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.* 34: 157–191.
- Butkevich, A. G. (2018). Proper motion and secular variations of keplerian orbital elements. *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*, Volume 5, id.18.
- Carruba, V., Vokrouhlick, D., & Novaković, B. (2018). Asteroid families interacting with secular resonances. *Planetary and Space Science*, Volume 157, p. 72-81.

- Carusi, A., Kresak, L., & Valsecchi, G. (1995). Conservation of the tisserand parameter at close encounters of interplanetary objects with jupiter. *Earth, Moon, and Planets*, Volume 68, Issue 1-3, pp. 71-94.
- Cassan, A., Kubas, D., Beaulieu, J. P., Dominik, M., Horne, K., Greenhill, J., et al. (2012). One or more bound planets per milky way star from microlensing observations. *Nature*, 481(7380), 167–169..
- Chatterjee, S., & Tan, J. C. (2014). Inside-out Planet Formation. *The Astrophysical Journal*, Volume 780, Issue 1, article id. 53, 12 pp..
- Chiang, E., & Laughlin, G. (2013). The minimum-mass extrasolar nebula: in situ formation of close-in super-Earths. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 431, Issue 4, p.3444-3455.
- Dai, F., Winn, J. N., Arriagada, P., Butler, R. P., Crane, J. D., et al. (2015). Doppler monitoring of the wasp-47 multiplanet system. *The Astrophysical Journal Letters*, 813:L9 (6pp).
- Deck, K. M., & Batygin, K. (2015). Migration of Two Massive Planets into (and out of) First Order Mean Motion Resonances. *The Astrophysical Journal*, Volume 810, Issue 2, article id. 119, 20 pp..
- Deeg, H. (1998). Photometric detection of extrasolar planets by the transit-method. *Proceedings of a Workshop held in Puerto de la Cruz, Tenerife, Spain, 17-21 March 1997*, ASP Conference Series 134.
- Deeg, H., & Alonso, R. (2018). Transit photometry as an exoplanet discovery method. *Instituto de Astrofísica de Canarias, C. Via Lactea S/N, E-38205 La Laguna, Tenerife, Spain*.
- Duffell, P. C., & Chiang, E. (2015). Eccentric Jupiters via Disk-Planet Interactions. *The Astrophysical Journal*, Volume 812, Issue 2, article id. 94, 11 pp..
- Duncan, M., Quinn, T., & Tremaine, S. (1989). The long-term evolution of orbits in the solar system - A mapping approach. *Icarus* (ISSN 0019-1035), vol. 82, Dec. 1989, p. 402-418..
- Endl, M., Caldwell, D. A., Barclay, T., Huber, D., Isaacson, H., et al. (2014). Kepler-424 b: A “Lonely” Hot Jupiter that Found a Companion. *The Astrophysical Journal*, Volume 795, Issue 2, article id. 151, 13 pp..
- Fabrycky, D. C. (2010). Non-keplerian dynamics. *Exoplanets*, edited by S. Seager. Tucson, AZ: University of Arizona Press, 2010, 526 pp. ISBN 978-0-8165-2945-2., p.217-238.
- Fejoz, J., et al. (2011). Kirkwood gaps and diffusion along mean motion resonances in the restricted planar three-body problem. eprint arXiv:1109.2892.
- Giacalone, S., Matsakos, T., & Königl, A. (2017). A Test of the High-eccentricity Migration Scenario for Close-in Planets. *The Astronomical Journal*, Volume 154, Issue 5, article id. 192, 10 pp..
- Goldreich, P., & Schlichting, H. E. (2014). Overstable Librations can Account for the Paucity of Mean Motion Resonances among Exoplanet Pairs. *The Astronomical Journal*, Volume 147, Issue 2, article id. 32, 11 pp..
- Greicius, T. (2018). What in the world is an 'exoplanets'? nasa.gov.
- Hellier, C., Anderson, D. R., Cameron, A. C., Doyle, A. P., Fumel, A., et al. (2012). Seven transiting hot jupiters from wasp-south, euler and trappist: Wasp-47b, wasp-55b, wasp-61b, wasp-62b, wasp-63b, wasp-66b and wasp-67b. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 426, 739–750.
- Heppenheimer, T. A. (1979). Reduction to proper elements for the entire solar system. *Celestial Mechanics*, vol. 20, Oct. 1979, p. 231-241..
- Holsapple, K. A. (1993). The scaling of impact processes in planetary sciences. *Annual review of earth and planetary sciences*. Vol. 21 (A94-10876 01-91), p. 333-373..
- Howard, A. W., Marcy, G. W., Bryson, S. T., Jenkins, J. M., Rowe, J. F., et al. (2012). Planet Occurrence within 0.25 AU of Solar-type Stars from Kepler. *The Astrophysical Journal Supplement*, Volume 201, Issue 2, article id. 15, 20 pp..
- Kasting, J., Whitmire, D., & Reynolds, R. (1993). Habitable zones around main sequence stars. *Icarus*, Volume 101, Issue 1, p. 108-128..
- Knežević, Z. (1989). Sopstveni elementi malih planeta kao parametri klasifikacije u familije. *Doktorska disertacija, Matematički fakultet u Beogradu*.
- Knežević, Z., & Milani, A. (2000). Synthetic proper elements for outer main belt asteroids. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 78, Issue 1–4, pp 17–46.
- Knutson, H. A., Fulton, B. J., Montet, B. T., Kao, M., Ngo, H., et al. (2014). Friends of Hot Jupiters. I. A Radial Velocity Search for Massive, Long-period Companions to Close-in Gas Giant Planets. *The Astrophysical Journal*, Volume 785, Issue 2, article id. 126, 23 pp..

- Kopparapu, R. K. (2013). A revised estimate of the occurrence rate of terrestrial planets in the habitable zones around kepler m-dwarfs. *The Astrophysical Journal Letters*, 767:L8 (5pp).
- Kozai, Y. (1962). Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *Astronomical Journal*, Vol. 67, p. 591.
- Kresak, L. (1967). Relation of meteor orbits to the orbits of comets and asteroids. *SCoA*, 11, 9.
- Levison, H. F. (1996). *Comet Taxonomy*. ASPC, 107, 173.
- Lidov, M. L. (1962). The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planetary and Space Science*, Volume 9, Issue 10, p. 719-759..
- Lineweaver, C. H., & Robles, J. A. (2006). Towards a classification system of terrestrial planets. *Proceeding of the 6th Australian Space Science Conference*.
- Marchal, C., & Bozis, G. (1982). Hill stability and distance curves for the general three-body problem. *Celestial Mechanics*, Volume 26, Issue 3, pp.311-333.
- Marcy, G. W., Butler, R. P., Vogt, S. S., Fischer, D. A., Wright, J. T., et al. (2012). Exoplanet properties from Lick, Keck and AAT. *Physica Scripta*, Volume 130, Issue , id. 014001.
- Martin, R. G., & Livio, M. (2013). On the formation and evolution of asteroid belts and their potential significance for life. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, Volume 428, Issue 1, p.L11-L15.
- Mayor, M., & Queloz, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature* 1995, 378, 355– 359..
- Milani, A., & Knežević, Z. (1992). Asteroid proper elements and secular resonances. *Icarus* 98, 211–232.
- Milankovic, M. (1935). *Nebeska mehanika*. Izdanje zadužbine Luke Čelovića-Trebinjca.
- Morbidelli, A., & Henrard, J. (1991). Secular resonances in the asteroid belt: Theoretical perturbation approach and the problem of their location. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (ISSN 0923-2958), vol. 51, no. 2, 1991, p. 131-167..
- Morbidelli, A., & Moons, M. (1995). Numerical evidence on the chaotic nature of the 3/1 mean motion commensurability. *Icarus*, Volume 115, Issue 1, p. 60-65..
- Morbidelli, A., & Vokrouhlicky, D. (2003). The Yarkovsky-driven origin of near-Earth asteroids. *Icarus* 163 (2003) 120–134.
- Murray, C. D., & Correia, A. C. M. (2010). *Keplerian Orbits and Dynamics of Exoplanets*. Exoplanets, edited by S. Seager. Tucson, AZ: University of Arizona Press, 2010, 526 pp. ISBN 978-0-8165-2945-2., p.15-23.
- Murray, C. D., & Dermott, S. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University press.
- Nesvorný, D., & Morbidelli, A. (1998). Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt. *The Astronomical Journal*, 116:3029E3037.
- Neveu-VanMalle, M., Queloz, D., Anderson, D. R., Brown, D. J. A., Cameron, A. C., et al. (2016). Hot jupiters with relatives: discovery of additional planets in orbit around wasp-41 and wasp-47. *A and A* 586, A93.
- Nikku, M., Knutson, H., & Desert, J. M. (2010). Atmospheric composition and thermal structure of super-Earth GJ 1214b. *Spitzer Proposal ID 70148*.
- Novaković, B. (2012). *Planetarna astronomija*. Katedra za astronomiju- Matematički fakultet u Beogradu.
- Novaković, B., Hsieh, H. H., & Gronchi, G. F. (2018). Special issue on asteroids - introduction. *Icarus*, Volume 304, p. 1-3..
- Ogihara, M., & Ida, S. (2009). N-body simulations of planetary accretion around m dwarf stars. *The Astronomical Journal*, 699:824-838.
- Papagiannis, M. D. (1983). The importance of exploring the asteroid belt. *Acta Astronautica* Vol. 10, No. 10, pp. 709-712. 198.
- Papaloizou, J. C. B., & Larwood, J. D. (2000). On the orbital evolution and growth of protoplanets embedded in a gaseous disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 315, Issue 4, pp. 823-833.
- Perryman, M. (2011). *The Exoplanet Handbook*. Published in the United States of America by Cambridge University Press, New York.
- Radović, V. (2017). *Razvoj algoritma za ispitivanje pripadnosti asteroida familijama*. Doktorska disertacija, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu.
- Raymond, S. N., Izidoro, A., & Morbidelli, A. (2018). Solar System Formation in the Context of Extra-Solar Planets. eprint arXiv:1812.01033.

- Rice, K. (2014). The Detection and Characterization of Extrasolar Planets. *Challenges 2014*, Vol. 5, p. 296-323.
- Rickman, H. (2007). Dynamics of planetary system. Dept. of Astronomy and Space Physics, Uppsala University, PAN Space Research Center, Warsaw.
- Rogers, L. A. (2015). Most 1.6 Earth-radius Planets are Not Rocky. *The Astrophysical Journal*, Volume 801, Issue 1, article id. 41, 13 pp..
- Rudolf, D., et al. (2012). Water delivery in the early Solar System. arXiv:1506.01851v1.
- Sanchis-Ojeda, R., Rappaport, S., Winn, J. N., Kotson, M. C., Levine, A., et al. (2014). A Study of the Shortest-period Planets Found with Kepler. *The Astrophysical Journal*, Volume 787, Issue 1, article id. 47, 18 pp..
- Sanchis-Ojeda, R., Winn, J. N., Dai, F., Howard, A. W., Isaacson, H., et al. (2015). A low stellar obliquity for wasp-47, a compact multiplanet system with a hot jupiter and an ultra-short period planet. *The Astrophysical Journal Letters*, 812:L11 (5pp).
- Seager, S. (2013). Exoplanet habitability. *340 Science* 577.
- Sidorenko, V. V. (2018). The eccentric kozai-lidov effect as a resonance phenomenon. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Volume 130, Issue 1, article id. 4, 23 pp.
- Sinukoff, E., Howard, A. W., Petigura, E. A., Fulton, B. J., Isaacson, H., et al. (2017). Mass constraints of the wasp-47 planetary system from radial velocities. *The Astronomical Journal*, 153:70 (8pp).
- Sisto, R. P. D., Ramos, X. S., & Gallardo, T. (2018). The dynamical evolution of escaped jupiter trojan asteroids, link to other minor body populations. eprint arXiv:1811.00352.
- Spoto, F., Milani, A., & Knežević, Z. (2015). Asteroid family ages. *Icarus*, Volume 257, p. 275-289.
- Stammler, S. M., Birnstiel, T., & Dullemond, C. P. (2017). Can ice lines create rings? the influence of ice lines on dust growth in protoplanetary disks. *RevMexAA (Serie de Conferencias)*, 49, 78-78.
- Stern, A., & Levison, H. (2002). Regarding the criteria for planethood and proposed planetary classification schemes. *Highlights of Astronomy*, International Astronomical Union, Vol. 12.
- Stevens, D. J., & Gaudi, B. S. (2013). A posteriori transit probabilities. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Vol. 125, No. 930, pp. 933-950.
- Strom, R. G., et al. (2015). The inner solar system cratering record and the evolution of impactor populations *Orbital and Absolute Magnitude Distribution of the Near-Earth Objects*. *Research in Astronomy and Astrophysics*, Volume 15, Number 3.
- Takashi, I. (2016). High-order analytic expansion of disturbing function for doubly averaged circular restricted three-body problem. *Advances in Astronomy*, vol. 2016, id.894509.
- TriAUD, A. H. M. J. (2017). The Rossiter-McLaughlin Effect in Exoplanet Research. *Handbook of Exoplanets*, Edited by Hans J. Deeg and Juan Antonio Belmonte. Springer Living Reference Work.
- Tsirvoulis, G., et al. (2018). Reconstructing the size distribution of the primordial main belt. *Icarus*, Volume 304, p. 14-23..
- Vanderburg, A., et al. (2017). Precise masses in the wasp-47 system. *The Astronomical Journal*, 154:237 (14pp).
- Vokrouhlick, D., et al. (2015). The yarkovsky and yorp effects. *Asteroids IV* (P. Michel et al., eds.), pp. 509-531. Univ. of Arizona, Tucson.
- Vokrouhlicky, D., et al. (2005). Non-gravitational perturbations and evolution of the asteroid main belt. 2005 International Astronomical Union.
- Voosen, P. (2018). Nasa's asteroid explorer dawn soon to go dark. *Science*, Volume 362, Issue 6412, pp. 275-275.
- Weiss, L. M., Deck, K. M., Sinukoff, E., Petigura, E. A., Agol, E., et al. (2017). New insights on planet formation in wasp-47 from a simultaneous analysis of radial velocities and transit timing variations. *The Astronomical Journal*, 153:265 (15pp).
- Williams, M. D., & Pollard, D. (2002). Earth-like worlds on eccentric orbits: excursions beyond the habitable zone. *International Journal of Astrobiology*.
- Winter, O. C., Mourao, D. C., & Winter, S. M. G. (2010). Short lyapunov time: a method for identifying confined chaos. *A and A* 523, A67.
- Wisdom, J. (1980). The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem. *Astronomical Journal*, vol. 85, p. 1122-1133..
- Wolszczan, A., & Frail, D. A. (1992). A planetary system around the millisecond pulsar PSR1257+12. *Nature* (ISSN 0028-0836), vol. 355.

- Wood, J., et al. (2018). Measuring the severity of close encounters between ringed small bodies and planets. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 480, Issue 3, p.4183-41982.
- Wyatt, M. (2009). *Dynamics of small bodies in planetary systems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Xie, J. W. (2018). The Rise of New Planets: Super-Earths and Sub-Neptunes. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, Volume 42, Issue 3, p. 325-342..
- Yu, X., Yin, J., & Khoo, S. (2018). Generalized lyapunov criteria on finite-time stability of stochastic nonlinear systems. arXiv:1810.07927.
- Zendejas, J., Segura, A., & A.C.Raga. (2010). Atmospheric mass loss by stellar wind from planets around main sequence m stars. *Icarus* 2010 (2010) 539-544.
- Zeng, L., & Sasselov, D. (2013). A Detailed Model Grid for Solid Planets from 0.1 through 100 Earth Masses. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, Volume 125, Issue 925, pp. 227.
- Đošović, V. (2018). *Nastanjivost planeta u sistemu TRAPPIST-1: Značaj i uloga planetezimala*. Master teza, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu.
- Šegan, S., & Pejović, N. (2006). *Osnovi astronomije*. Vesta Co, Beograd.
- Ševeček, P., Brož, M., Nesvorný, D., et al. (2018). SPH/N-body simulations of small ($D = 10$ km) asteroidal breakups and improved parametric relations for Monte-Carlo collisional models. eprint arXiv:1803.10666.