Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Regularne grane višeznačnih funkcija

Master rad

Mentor:
prof. dr Miodrag Mateljević

Student:
Ivana Jelić

Beograd,
2019.

Sadržaj

1 Uvod

U skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$, jednostavna jednačina

$$z^2 + 1 = 0,$$

nema rešenja.
Formalno, u nameri da se reši ova jednačina, može se uvesti imaginarna jedinica i za koju važi:

$$i^2 = -1.$$

U literaturi se imaginarna jedinica definiše i kao $\sqrt{-1}$, mada je koren u realnoj analizi definisan samo za nenegativne brojeve.

Brojevi oblika $x + iy$, gde su x i y realni brojevi, nazivaju se kompleksnim brojevima. Pojam kompleksnog broja $x + iy$ postaje jasniji ako se identifikuje sa uređenim parom (x, y); tj. ako skup $\mathbb{C}$ kompleksnih brojeva identifikujemo sa vektorskim prostorom $\mathbb{R}^2$.

Kompleksan broj $z \in \mathbb{C}$ nema jedinstven argument. Preciznije, ako je poznat jedan argument α broja z, onda se svi ostali argumenti broja z razlikuju od α za $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dakle, pridruživanje argumenta nije preslikavanje u pravom smislu. Koristeći ova i druga svojstva, definišemo grane nekih funkcija u kompleksnoj ravni. Značaj toga je primena ovih osobina na složenijim funkcijama.

2 Kompleksni brojevi

Definicija 1. ***Kompleksni brojevi*** *su izrazi oblika* $x + iy$*, pri čemu su* x *i* y *realni brojevi, a* i *imaginarna jedinica, za koje su relacija jednakosti i operacije sabiranja i množenja definisane na sledeći način:*

1. *dva kompleksna broja* $x + iy$ *i* $u + iv$ *su jednaka ako i samo ako važi da je*
$$x = u \text{ i } y = v;$$
2. *zbir dva kompleksna broja* $x + iy$ *i* $u + iv$ *je kompleksan broj*
$$(x + u) + i(y + v);$$
3. *proizvod dva kompleksna broja* $x + iy$ *i* $u + iv$ *je kompleksan broj*
$$(xu - yv) + i(xv + yu).$$

Ovako definisana struktura predstavlja skup kompleksnih brojeva i označava se simbolom $\mathbb{C}$. Uobičajeno je da se kompleksni brojevi označavaju jednim slovom, na primer, $z = x + iy$, a relaciju jednakosti, kao i operacije sabiranja i množenja, označavamo kao u skupu realnih brojeva.

Definicija 2. *Za kompleksan broj* $z = x + iy$*, realan broj* x *je njegov* ***realni deo****, koji se označava sa* $\mathrm{Re}\,(z)$*, a realan broj* y *je njegov* ***imaginarni deo*** *i označava se sa* $\mathrm{Im}\,(z)$*.*

Kompleksni brojevi oblika $x + i \cdot 0$ imaju značajno svojstvo da je zbir takva dva broja kompleksan broj istog oblika, takođe i proizvod takva dva broja je kompleksan broj istog oblika. Sada, ta svojstva mogu biti prikazana i u obliku jednakosti:

$$(x + i \cdot 0) + (u + i \cdot 0) = (x + u) + i \cdot 0,$$
$$(x + i \cdot 0) \cdot (u + i \cdot 0) = (x \cdot u) + i \cdot 0.$$

Prilikom sabiranja dva kompleksna broja oblika $x + i \cdot 0$, može se uočiti da se, ustvari, sabiraju njihovi realni delovi, a kod proizvoda da se realni delovi pomnože. Zbog toga ćemo uvesti oznaku, da brojeve oblika $x + i \cdot 0$ obeležavamo sa x. Operacije sabiranja i množenja takvih brojeva vrše na isti način kao i sa realnim brojevima. Sledi zaključak da je skup realnih brojeva sadržan u skupu kompleksnih brojeva.

U skupu kompleksnih brojeva postoji i podskup koji čine brojevi oblika $0 + i \cdot y$. Takvi brojevi se nazivaju čisto imaginarnim brojevima.

Imaginarna jedinica je broj $i = 0 + i \cdot 1$ i on ima sledeća svojstva:

$$i^2 = (0 + i \cdot 1) \cdot (0 + i \cdot 1) = -1 + i \cdot 0 = -1,$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i,$$
$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1,$$
$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Iz navedenog sledi da je $i^5 = i$ i kako bi se stepeni imaginarne jedinice povećavali, tako bi se smenjivale četiri dobijene vrednosti, $i, -1, -i, 1$, odnosno proizilazi sledeće:

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i, \text{ pri čemu } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Relacija jednakosti ima uobičajena svojstva te relacije, refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost.

Sva svojstva operacija sabiranja i množenja u skupu realnih brojeva se prenose i na skup kompleksnih brojeva, a to će biti pokazano u narednim teoremama.

Teorema 1. *Sabiranje kompleksnih brojeva ima sledeća svojstva:*

1° *Operacija je komutativna. Za svaka dva kompleksna broja z_1 i z_2 važi:*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$

2° *Operacija je asocijativna. Za svaka tri kompleksna broja z_1, z_2 i z_3 važi:*

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) = z_1 + z_2 + z_3.$$

3° *Broj* 0 *je neutralni element za sabiranje. Za svaki kompleksan broj z važi:*

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

4° *Za svaki kompleksan broj z postoji njegov suprotan broj z', takođe kompleksan broj, takav da važi*

$$z + z' = z' + z = 0.$$

Dokaz.

1° Sabiranjem bilo koja dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ i $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$, pri čemu znamo da su x_1, y_1, x_2, y_2 realni brojevi i da komutativnost važi u skupu realnih brojeva, može se zaključiti sledeće:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + i \cdot y_1 + x_2 + i \cdot y_2 \\ &= (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i \cdot (y_2 + y_1) \\ &= z_2 + z_1. \end{aligned}$$

2° Slično kao i za komutativnost, asocijativnost važi u skupu realnih brojeva, iz čega proizilazi da za bilo koja tri kompleksna broja $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ i $z_3 = x_3 + i \cdot y_3$ važi:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= (x_1 + i \cdot y_1 + x_2 + i \cdot y_2) + x_3 + i \cdot y_3 \\ &= ((x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)) + x_3 + i \cdot y_3 \\ &= (x_1 + x_2) + x_3 + i \cdot ((y_1 + y_2) + y_3) \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + i \cdot (y_1 + (y_2 + y_3)) \\ &= x_1 + (x_2 + x_3) + i \cdot y_1 + i \cdot (y_2 + y_3) \\ &= x_1 + i \cdot y_1 + ((x_2 + x_3) + i \cdot (y_2 + y_3)) \\ &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

3° 0 je neutral za sabiranje u skupu realnih brojeva, što će biti pokazano i za skup kompleksnih brojeva. Zapisivanjem 0 u obliku $0 = 0 + i \cdot 0$, može se pokazati da za bilo koji kompleksan broj $z = x + i \cdot y$ važi:

$$z + 0 = x + i \cdot y + 0 + i \cdot 0 = (x + 0) + i \cdot (y + 0) = x + i \cdot y = z.$$

4° Pretpostavimo da za bilo koji kompleksan broj $z = x + i \cdot y$ postoji njegov suprotan broj, z', koji ispunjava ovo tvrđenje. Neka je $z' = u + i \cdot v$, odakle je:

$$z + z' = x + i \cdot y + u + i \cdot v = (x + u) + i \cdot (y + v) = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

Odavde sledi $x + u = 0$ i $y + v = 0$, odnosno $u = -x$ i $v = -y$.
Pa je suprotan broj kompleksnog broja z oblika
$z' = -x + i \cdot (-y) = -(x + i \cdot y) = -z$. Dakle, postoji jedinstveni kompleksan broj z', takav da važi $z + z' = 0$ i taj kompleksan broj ze može označiti sa $-z$. □

Teorema 2. *Množenje kompleksnih brojeva ima sledeća svojstva:*

1° *Operacija je komutativna. Za svaka dva kompleksna broja z_1 i z_2 važi:*

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

2° *Operacija je asocijativna. Za svaka tri kompleksna broja z_1, z_2 i z_3 važi:*

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3.$$

3° *Broj 1 je neutralni element za množenje. Za svaki kompleksan broj z važi:*

$$z \cdot 1 = 1 \cdot z = z.$$

4° *Za svaki kompleksan broj z, različit od nule, postoji njegov inverz z', takođe kompleksan broj, takav da važi:*

$$z \cdot z' = z' \cdot z = 1.$$

5° *Množenje je distributivno u odnosu na sabiranje. Za svaka tri kompleksna broja z_1, z_2 i z_3 važi:*

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3.$$

Dokaz.

1°
$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) \\
&= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot i \cdot y_2 + i \cdot y_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 \\
&= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \\
&= (x_2 \cdot x_1 - y_2 \cdot y_1) + i \cdot (y_2 \cdot x_1 + x_2 \cdot y_1) \\
&= (x_2 + i \cdot y_2) \cdot (x_1 + i \cdot y_1) \\
&= z_2 \cdot z_1.
\end{aligned}$$

2° Asocijativnost važi u skupu realnih brojeva, kao i za komutativnost slično se pokazuje da važi i u skupu kompleksnih brojeva.

3° 1 je neutral za množenje u skupu realnih brojeva. Kako bi se pokazalo da je neutral i u skupu kompleksnih brojeva, 1 se može zapisati i u obliku $1 = 1 + i \cdot 0$, i pokazaćemo da za bilo koji kompleksan broj $z = x + i \cdot y$ važi:

$$\begin{aligned} z \cdot 1 &= (x + i \cdot y) \cdot (1 + i \cdot 0) \\ &= (x \cdot 1 - y \cdot 0) + i \cdot (x \cdot 0 + y \cdot 1) \\ &= x + i \cdot y \\ &= z. \end{aligned}$$

4° Neka je $z = x + i \cdot y$ kompleksan broj različit od nule, onda je bar jedan od realnih brojeva x i y različit od nule, pa je i $x^2 + y^2 \neq 0$. Pretpostavimo da za svaki takav kompleksan broj postoji $z' = u + i \cdot v$ takav da važi:

$$z \cdot z' = z' \cdot z = 1, \text{ odnosno } (x + i \cdot y) \cdot (u + i \cdot v) = 1,$$
$$(x \cdot u - y \cdot v) + i \cdot (x \cdot v + y \cdot y) = 1 + i \cdot 0.$$

Dva kompleksna broja su jednaka ako i samo ako su im jednaki njihovi realni i imaginarni delovi, dakle:

$$x \cdot u - y \cdot v = 1 \text{ i } x \cdot v + y \cdot u = 0.$$

Koristeći uslov $x^2 + y^2 \neq 0$, sledi da poslednji sistem jednačina ima jedinstveno rešenje

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \; v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Dakle, postoji jedinstveni kompleksan broj z', tako da je $z \cdot z' = 1$ i to je broj $z' = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$. Dobijeni broj se može označiti sa $\dfrac{1}{z}$.

5° Koristeći dokazana svojstva operacija za sabiranje i množenje kompleksnih brojeva, lako se pokazuje i da važi distributivnost množenja prema sabiranju.
□

Na osnovu prethodnih svojstava, može se zaključiti da se sa kompleksnim brojevima, njihovim zbirovima i proizvodima može operisati na isti način kao sa realnim brojevima.

Primer 1. *Neka je $z_1 = 3 + 2i$ i $z_2 = 1 - 4i$. Izračunati zbir, razliku i proizvod ova dva kompleksna broja.*

Rešenje. Iz definicije sabiranja, oduzimanja i množenja dobijamo sledeće:
$z_1 + z_2 = 4 - 2i$, $z_1 - z_2 = 2 + 6i$ i $z_1 \cdot z_2 = 11 - 10i$. △

Primer 2. *Naći realni i imaginarni deo količnika kompleksnih brojeva iz prethodnog primera.*

Rešenje. Kako je

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{3+2i}{1-4i} \\
&= \frac{3+2i}{1-4i}\cdot\frac{1+4i}{1+4i} \\
&= \frac{-5+14i}{17} \\
&= -\frac{5}{17}+i\frac{14}{17}
\end{aligned}
$$

sledi da je $\mathrm{Re}\,(z) = -\frac{5}{17}$ i $\mathrm{Im}\,(z) = \frac{14}{17}$. △

Primer 3. *Naći realan i imaginaran deo kompleksnog broja* $(1+i)^6$.

Rešenje.

$$
\begin{aligned}
(1+i)^6 &= \Big((1+i)^2\Big)^3 \\
&= \big(1+2\cdot i+i^2\big)^3 \\
&= (1+2i-1)^3 \\
&= (2i)^3 \\
&= 8\cdot i^3 \\
&= 8\cdot(-i) \\
&= -8i,
\end{aligned}
$$

može se zaključiti da je $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ i $\mathrm{Im}\,(z) = -8$. △

Definicija 3. *Svaki kompleksan broj $z = x + i\cdot y$ ima svoj **konjugovano kompleksni broj** $\overline{z} = x - i\cdot y$.*

Definicija 4. ***Modul** kompleksnog broja $z = x + i\cdot y$ je nenegativan broj $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Primer 4. *Izračunati modul kompleksnog broja $z = 5+12i$ i njemu konjugovano kompleksnog broja.*

Rešenje. Primenom definicije za računanje modula kompleksnog broja dobijamo da je moduo broja z jednak:
$|z| = \sqrt{5^2+12^2} = \sqrt{25+144} = 13$.
Konjugovano kompleksni broj broja z je:
$\overline{z} = 5-12i$, iz čega sledi da je moduo tog broja jednak:
$|\overline{z}| = \sqrt{5^2+(-12)} = \sqrt{25+144} = 13$.

△

Lema 1. *Za svaki kompleksan broj $z = x+i\cdot y$ važi da je modul tog broja jednak modulu njemu konjugovano kompleksnog broja.*

Dokaz. Kako je $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, njemu odgovarajući konjugovano kompleksni broj je $\overline{z} = x-i\cdot y$, a modul tog broja se računa na isti način, iz čega zaključujemo da je $|\overline{z}| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, odnosno da je modul bilo kog kompleksnog broja jednak modulu njemu konjugovano kompleksnog broja. □

Stav 1. *Za svaki kompleksan broj $z = x + i \cdot y$ važe sledeća svojstva:*

a) $z + \overline{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$;

b) $z - \overline{z} = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)$;

c) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

d) $\overline{(\overline{z})} = z$;

e) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;

f) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$;

g) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

h) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, pri čemu je $z_2 \neq 0$;

i) $\left|z^2\right| = |z|^2$;

j) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

k) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, pri čemu je $z_2 \neq 0$.

Dokaz.

a) $z + \overline{z} = x + i \cdot y + x - i \cdot y = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,(z)$;

b) $z - \overline{z} = x + i \cdot y - (x - i \cdot y) = x + i \cdot y - x + i \cdot y = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)$;

c) $z \cdot \overline{z} = (x + i \cdot y) \cdot (x - i \cdot y) = x^2 + y^2 - ixy + ixy = x^2 + y^2 = |z|^2$;

d) $\overline{(\overline{z})} = \overline{(\overline{x + i \cdot y})} = \overline{x - i \cdot y} = x + i \cdot y = z$;

e)
$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2} \\ &= \overline{x_1 + x_2 + i \cdot (y_1 + y_2)} \\ &= x_1 + x_2 - i \cdot (y_1 + y_2) \\ &= x_1 - iy_1 + x_2 - iy_2 \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}; \end{aligned}$$

f) Slično kao pod d);

g)
$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)} \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) - i \cdot (x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2) \\ &= (x_1 - iy_1) \cdot (x_2 - iy_2) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\right)} \\
&= \overline{(x_1+iy_1)\cdot\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)} \\
&= (x_1-iy_1)\cdot\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2}+i\cdot\frac{y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) \\
&= \frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2} \\
&= \frac{\overline{x_1+iy_1}}{\overline{x_2+iy_2}} \\
&= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\left|z^2\right| &= \left|x^2-y^2+2ixy\right| \\
&= \sqrt{\left(x^2-y^2\right)^2+(2xy)^2} \\
&= \sqrt{x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2y^2} \\
&= \sqrt{x^4+2x^2y^2+y^4} \\
&= \sqrt{\left(x^2+y^2\right)^2} \\
&= \left|x^2+y^2\right| \\
&= |z|^2;
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2| &= |(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)| \\
&= |x_1x_2-y_1y_2+ix_1y_2+ix_2y_1| \\
&= |(x_1x_2-y_1y_2)+i\,(x_1y_2+x_2y_1)| \\
&= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2-2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+2x_1x_2y_1y_2+x_2^2y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2} \\
&= \sqrt{x_1^2\left(x_2^2+y_2^2\right)+y_1^2\left(x_2^2+y_2^2\right)} \\
&= \sqrt{\left(x_1^2+y_1^2\right)\cdot\left(x_2^2+y_2^2\right)} \\
&= \sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2} \\
&= |z_1|\cdot|z_2|;
\end{aligned}$$

k) Koristeći svojstva c) i h) dobija se:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2=\frac{z_1}{z_2}\cdot\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_1}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}\text{ iz čega sledi }\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

□

Primer 5. *Dati su kompleksni brojevi $z_1=2-3i$ i $z_2=1+2i$. Izračunati:*

a) $\overline{z_1+z_2}$;

b) $\overline{z_1 - z_2}$;

c) $\overline{z_1 \cdot z_2}$;

d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

Rešenje. a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{2 - 3i} + \overline{1 + 2i} = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$;

b) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2} = \overline{2 - 3i} - \overline{1 + 2i} = 2 + 3i - (1 - 2i) = 2 + 3i - 1 + 2i = 1 + 5i$;

c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{2 - 3i} \cdot \overline{1 + 2i} = (2 + 3i) \cdot (1 - 2i) = 2 + 6 - 4i + 3i = 8 - i$;

d) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{2 - 3i}}{\overline{1 + 2i}} = \dfrac{2 + 3i}{1 - 2i} \cdot \dfrac{1 + 2i}{1 + 2i} = \dfrac{-4 + 5i}{5} = -\dfrac{4}{5} + i.$

$\triangle$

Stav 2. *Za bilo koja dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ i $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ važe sledeća svojstva:*

a) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2$;

b) $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2$;

c) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

Dokaz. Koristeći svojstva iz prethodnog stava sledi:

a)
$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1 \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2;
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
|z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2) \cdot \overline{(z_1 - z_2)} \\
&= (z_1 - z_2) \cdot (\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\
&= z_1 \cdot \overline{z_1} - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 - z_1 \cdot \overline{z_2} - \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2;
\end{aligned}$$

c) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 =$
$|z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2$
$2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

$\square$

Stav 3. *U skupu kompleksnih brojeva važe sledeća svojstva:*

a) $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$;

b) $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2$;

c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

d) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$.

Dokaz.

a) Pošto je $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2}$, lako se može zaključiti da važi $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$;

b) Pošto je $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) + |z_2|^2$ i primenom svojstva pod a) sledi da je $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq |z_1 \cdot \overline{z_2}|$, a kako važi $|z_1 \cdot \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$, pa sledi zaključak da je $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) \leq |z_1| \cdot |z_2|$, odnosno
$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1| + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2$;

c) Koristeći svojstvo pod b) dobijamo da važi $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ i znajući da je modul bilo kod kompleksnog broja nenegativan broj sledi
$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

d) $|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2 + z_3 - z_3| = |(z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$.

$\square$

3 Argument

Neka je $z = x + iy$, $z \neq 0$, iz čega sledi da je $x^2 + y^2 > 0$. Ovaj broj se drugačije može zapisati na sledeći način:

$$x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Na osnovu

$$\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq 1, \ \left|\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leq 1, \ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1,$$

postoji tačno jedan realan broj $\varphi' \in [0, 2\pi)$, takav da važi:

$$\cos\varphi' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \sin\varphi' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Isto tako, postoji tačno jedan realan broj $\varphi \in (-\pi, \pi]$, takav da važi:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

odnosno

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{i} \quad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Na osnovu ovakvog zapisa proizilazi da bilo koji kompleksan broj z, različit od nule, može biti zapisan u sledećem obliku:

$$z = x + iy = |z|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

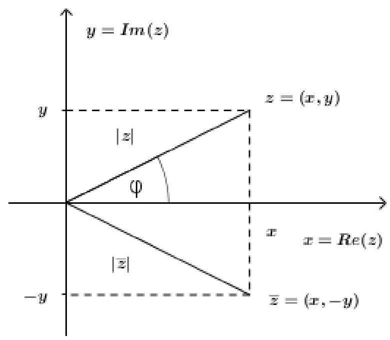
Zbog periodičnosti sinusne i kosinusne funkcije, može se zaključiti da iz prethodnih svojstava sledi da za svako $k \in \mathbb{Z}$ važi:

$$\cos(\varphi + 2k\pi) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \sin(\varphi + 2k\pi) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1}$$

Definicija 5. *Ugao je deo ravni oivičen sa dve poluprave koje imaju zajednički početak.*

Definicija 6. *Orijentisani ugao je ugao kod kog znamo u kom smeru se imaginarno krećemo između polupravih koje ga oivičavaju.* ***Pozitivno orijentisan ugao*** *je onaj kod kog se imaginarno krećemo u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Ugao suprotne orijentacije ovom uglu je* ***negativno orijentisan ugao****.*

Definicija 7. *Interval $(-\pi, \pi]$ se može nazvati* ***osnovni interval****.*



Na slici se jasno može videti da je broj $|z|$ jednak rastojanju tačke z od koordinatnog početka. Takođe, može se uočiti da je kosinus pozitivno orijentisanog ugla φ jednak $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, a sinus tog ugla je $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, pri čemu $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Definicija 8. *Svaki kompleksan broj z, $z \neq 0$, se može zapisati u obliku*

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)\,, \tag{2}$$

*gde je $r = |z|$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Ovaj zapis se zove **trigonometrijski oblik** zapisa kompleksnog broja. Pozitivan broj r je **modul**, a φ je **argument** kompleksnog broja z.*

Jednakosti (1) pokazuju da za svaki kompleksan broj $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pri čemu je $z \neq 0$, postoji beskonačno mnogo realnih brojeva φ_k, $\varphi_k = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, za koje važi jednakost (2).
Oznaka: Sa **Argz** obeležavaćemo skup $\{\varphi_k | \varphi_k = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Oznaka: Sa $\mathbf{arg_0 z}$ obeležavaćemo vrednost iz skupa $\operatorname{Arg} z$ za koju važi da pripada osnovnom intervalu.
Oznaka: Sa $\mathbf{arg_k z}$ obeležavaćemo vrednost iz skupa Arg za koju važi da pripada $k-$tom intervalu, odnosno $\arg_k z = \varphi_k = \varphi + 2k\pi$, pri čemu $\varphi \in (-\pi, \pi]$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Primer 6. *Kompleksan broj $z = 1 + i$ zapisati u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. Imamo da je $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, iz čega dobijamo da je

$$z = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

odnosno $\cos\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Stoga je $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $r = \sqrt{2}$, pa je trigonometrijski zapis oblika:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$\triangle$

Primer 7. *Kompleksan broj $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$, $\alpha \in (-\pi, \pi)$ zapisati u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. $r = |z| = \sqrt{(1+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2} = \sqrt{1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + sin^2\alpha} =$

$$\sqrt{2 + 2\cos\alpha} = \sqrt{2\,(1+\cos\alpha)} = \sqrt{4 \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = 2\cos\frac{\alpha}{2},$$

pri čemu je neophodno da važi da je $\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$, a to je ispunjeno u ovom zadatku.

$$\cos\varphi = \frac{1+\cos\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Iz čega sledi da je $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$, pa je traženi zapis oblika

$$z = 2\cos\frac{\alpha}{2}\Big(\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}\Big).$$

$\triangle$

Primer 8. *Kompleksan broj $z \neq 0$ zapisan je u trigonometrijskom obliku, $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pri čemu $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Zapisati u trigonometrijskom obliku broj $\dfrac{1}{z}$.*

Rešenje. Kako je $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, sledi
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\cdot\overline{z}} = \dfrac{r\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r^2} = \dfrac{1}{r}\,(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$
Odatle proizilazi da je $\arg_0\dfrac{1}{z} = -\arg_0 z$.
Ovo svojstvo jedino ne važi za $z \in \mathbb{R}$, pri čemu je $z < 0$, tada je
$\arg_0\dfrac{1}{z} = \arg_0 z = \pi$. $\triangle$

Iz prethodnog primera se može videti da je uslov $z \neq 0$ neophodan, jer ako je $z = 0$, onda je $|z| = 0$, odnosno argument nije određen, odnosno

$$0 = 0\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \varphi \text{ je proizvoljno},$$

pa ovaj zapis ne predstavlja zapis kompleksnog broja 0.

Teorema 3. *Proizvod kompleksnih brojeva z_1 i z_2, zapisanih u trigonometrijskom obliku $z_1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ je kompleksan broj zapisan u trigonometrijskom obliku $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, takav da je*

$r = r_1\cdot r_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ili $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi$ ili $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi$ i φ je tačno jedan od ova tri broja i to onaj koji pripada osnovnom intervalu.

Dokaz. Neka je $z_1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Množenjem se dobija:

$$\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= r_1\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\\
&= r_1 r_2\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\,(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2))\\
&= r_1 r_2\,(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).
\end{aligned}$$

Iz prethodnih jednačina se može uočiti da je modul proizvoda dva kompleksna broja jednak proizvodu njihovih modula. Ako je $\varphi_1 + \varphi_2 \in (-\pi, \pi]$, odatle sledi da je argument proizvoda jednak zbiru njihovih argumenata, tj.
$\arg_0 (z_1 \cdot z_2) = \arg_0 z_1 + \arg_0 z_2$. Ako $\varphi_1 + \varphi_2 \notin (-\pi, \pi]$, onda se argument proizvoda koji se od $\varphi_1 + \varphi_2$ razlikuje za 2π, pa će $\varphi_1 + \varphi_2 + 2\pi$ ili $\varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi$ pripadati osnovnom intervalu. $\square$

Teorema 4. $(Moavrova formula)$ *Ako je* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*, onda za svako* $n \in \mathbb{N}$ *važi:*

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{3}$$

Dokaz. Prethodna formula će biti dokazana matematičkom indukcijom.
Baza indukcije za $n = 1$ važi $z^1 = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Pretpostavimo da važi za $n-1$, odnosno $z^{n-1} = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{n-1} = r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi)$, pokazaćemo da važi i za n.
$z^n = z^{n-1} \cdot z = r^{n-1}(\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi) \cdot (r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$
$r^n \cdot (\cos(n-1)\varphi\cos\varphi - \sin(n-1)\varphi\sin\varphi +$
$i(\cos(n-1)\varphi\sin\varphi + \sin(n-1)\varphi\cos\varphi)) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,
što je i trebalo pokazati. $\square$

Na osnovu Moavrove formule, može se zaključiti da važi $\arg_0 z^n = n\arg_0 z$, naravno ako argument broja z^n ne pripada osnovnom intervalu, onda važi $\arg_k z^n = n\arg_k z$, za neko $k \in \mathbb{Z}$.

Primer 9. *Izračunati modul i argument kompleksnog broja* $z = \dfrac{1-i}{1+i}$*. Zapisati dati broj u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,
$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
Na osnovu primera 8, znamo da važi: $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Sledi
$\dfrac{1-i}{1+i} = (1-i)\dfrac{1}{1+i} =$
$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
$1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
Odavde se može zaključiti da je $|z| = 1$, a $\arg_0 z = -\dfrac{\pi}{2}$. Takođe, ovaj primer je mogao biti urađen na dosta kraći način racionalisanjem:
$\dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{1-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i} = \dfrac{1-2i-1}{2} = \dfrac{2i}{2} = -i =$
$1 \cdot (0 + i \cdot (-1)) = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. $\triangle$

U ovom primeru je izvršeno deljenje kompleksnih brojeva tako što su oni predstavljeni u trigonometrijskom obliku i uzeto je u obzir da je imenilac različit od nule, pa je taj količnik zapisan kao proizvod brojioca i recipročne vrednosti imenioca.

Teorema 5. *Neka su z_1 i $z_2 \neq 0$ kompleksni brojevi zapisani u trigonometrijskom obliku, $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Onda je* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Dokaz. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} \cdot \dfrac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$
$\dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$
$\dfrac{r_1}{r_2} \cdot \dfrac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{1}$.
Primetimo da je moduo količnika dva kompleksna broja jednak količniku modula ta dva broja, a argument je jednak razlici argumenata tih brojeva, tj. $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$. □

Primer 10. *Izračunati modul i argument kompleksnog broja* $z = \dfrac{1}{\left(\sqrt{3} - i\right)^3}$. *Zapisati dati broj u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. $\sqrt{3} - i = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, pa je
$\dfrac{1}{\sqrt{3} - i} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$, iz čega sledi
$\dfrac{1}{\left(\sqrt{3} - i\right)^3} = \dfrac{1}{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{8} \cdot i = \dfrac{i}{8}$.
$|z| = \dfrac{1}{8}$, $\arg_0 z = \dfrac{\pi}{2}$. △

U ovom primeru predstavljena formula koja liči na Moavrovu, ali je stepen negativan. Videli smo da tvrđenje važi i u takvim slučajevima.

Teorema 6. *Neka je $z \neq 0$ kompleksan broj predstavljen u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Za svako $k \in \mathbb{Z}$ važi:*

$$z^k = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi). \tag{4}$$

To je trigonometrijski zapis kompleksnog broja z^k ako je $k\varphi \in (-\pi, \pi]$. Ako nije, tada $\arg_0 z^k = k\varphi + 2m\pi$, za jedinstveno $m \in \mathbb{Z}$, za koje je $k\varphi + 2m\pi \in (-\pi, \pi]$.

Dokaz. Za $k \in \mathbb{N}$ to je Moavrova formula.
Za $k = 0$ trivijalno važi $z^0 = 1$.
Za $-k \in \mathbb{N}$ važi

$z^k = \left(\frac{1}{z}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{r}\left(\cos\left(-\varphi\right) + i\sin\left(-\varphi\right)\right)\right)^{-k}.$

Koristeći se Moavrovom formulom sledi

$z^k = \left(\frac{1}{r}\right)^{-k}\left(\cos\left(\left(-k\right)\left(-\varphi\right)\right) + i\sin\left(\left(-k\right)\left(-\varphi\right)\right)\right) = r^k\left(\cos k\varphi + i\sin k\varphi\right).$ □

Primer 11. *Izračunati modul i argument kompleksnog broja $z = (1-i)^{-10}$. Zapisati dati broj u trigonometrijskom obliku.*

Rešenje. $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$(1-i)^{-10} = (\sqrt{2})^{-10}\left(\cos\left(\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{10\pi}{4}\right)\right) =$

$2^{-5}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\right).$

Znamo da $\frac{5\pi}{2} \notin (-\pi, \pi]$, ali zato $\frac{5\pi}{2} - 2\pi = \frac{\pi}{2} \in (-\pi, \pi]$, to je i $\arg_0 z = \frac{\pi}{2}$ i $|z| = 2^{-5}$. A trigonometrijski zapis ovog broja je:

$z = (1-i)^{-10} = \frac{1}{32}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$ △

Oznaka: Trigonometrijski zapis bilo kog kompleksnog broja različitog od nule, $z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$, se može zapisati i kao $z = |z|\operatorname{cis}\varphi$, odnosno $\frac{z}{|z|} = \operatorname{cis}\varphi$.

Definicija 9. *Neka je $M \subseteq \mathbb{C}$ i $F : M \to P(\mathbb{C})$*[1]*. Tada funkciju F nazivamo kompleksnom višeznačnom funkcijom kompleksne promenljive.*

Primer kompleksne višeznačne funkcije kompleksne promenljive jeste funkcija Arg definisana sa $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} | z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\}$.

Teorema 7. *Za svako $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ postoji jedinstveno $\varphi \in (-\pi, \pi]$ tako da je $\varphi \in \operatorname{Arg} z$.*

Primer 12. *Odrediti* $\operatorname{Arg} z$ *za:*

a) $z = 1$;

b) $z = 4$;

c) $z = -5$;

d) $z = i$;

e) $z = -3i$;

f) $z = 1 + i$;

g) $z = 1 - i$;

[1] $P(\mathbb{C})$ je partitivni skup, skup svih podskupova skupa $\mathbb{C}$

h) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

i) $z = -\sqrt{3} + i$.

Rešenje.

a) Kako je $|z| = 1$, dobijamo da je $1 = 1 \cdot (1 + i \cdot 0)$, odnosno $\cos\varphi = 1$ i $\sin\varphi = 0$. Stoga je $\varphi = 0$ i sledi da je
$\operatorname{Arg} 1 = \{\varphi_k | \varphi_k = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

b) Kako je $|z| = 4$, dobijamo da je $4 = 4 \cdot (1 + i \cdot 0)$, odnosno $\cos\varphi = 1$ i $\sin\varphi = 0$. Stoga je $\varphi = 0$ i sledi da je
$\operatorname{Arg} 4 = \{\varphi_k | \varphi_k = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

c) Kako je $|z| = 5$, dobijamo da je $-5 = 5 \cdot (-1 + i \cdot 0)$, odnosno $\cos\varphi = -1$ i $\sin\varphi = 0$. Stoga je $\varphi = \pi$ i sledi da je
$\operatorname{Arg}(-5) = \{\varphi_k | \varphi_k = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

d) Kako je $|z| = 1$, dobijamo da je $i = 1 \cdot (0 + i \cdot 1)$, odnosno $\cos\varphi = 0$ i $\sin\varphi = 1$. Stoga je $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i sledi da je
$\operatorname{Arg} i = \{\varphi_k | \varphi_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

e) Kako je $|z| = 3$, dobijamo da je $-3i = 3 \cdot (0 + i \cdot (-1))$, odnosno $\cos\varphi = 0$ i $\sin\varphi = -1$. Stoga je $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i sledi da je
$\operatorname{Arg}(-3i) = \{\varphi_k | \varphi_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

f) Kako je $|z| = \sqrt{2}$, dobijamo da je $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, odnosno
$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Stoga je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ i sledi da je
$\operatorname{Arg}(1 + i) = \{\varphi_k | \varphi_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

g) Kako je $|z| = \sqrt{2}$, dobijamo da je $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, odnosno
$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ i $\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Stoga je $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ i sledi da je
$\operatorname{Arg}(1 - i) = \{\varphi_k | \varphi_k = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

h) Kako je $|z| = 2$, dobijamo da je $1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, odnosno
$\cos\varphi = \frac{1}{2}$ i $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Stoga je $\varphi = \frac{\pi}{3}$ i sledi da je
$\operatorname{Arg}\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \{\varphi_k | \varphi_k = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;

i) Kako je $|z| = 2$, dobijamo da je $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$, odnosno $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. Stoga je $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ i sledi da je $\operatorname{Arg}\left(-\sqrt{3} + i\right) = \{\varphi_k | \varphi_k = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} = \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$\triangle$

Često je od interesa izdvojiti granu višeznačne funkcije.

Definicija 10. *Neka je $M \subset \mathbb{C}$ i $F : M \to P(\mathbb{C})$ kompleksna višeznačna funkcija kompleksne promenljive.* ***Grana*** *višeznačne funkcije F je funkcija $f : M \to \mathbb{C}$ takva da je $f(z) \in F(z)$, za svako $z \in M$.*

Definicija 11. *Jedna grana višeznačne funkcije* Arg *jeste funkcija* $\arg_0 : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $\arg_0 z$ *jeste ona vrednost iz skupa* $\operatorname{Arg} z$ *koja pripada osnovnom intervalu. Takva vrednost postoji na osnovu Teoreme 7.*

Primer 13. *Odrediti* $\arg_0 z$ *za:*

a) $z = 1$;

b) $z = 4$;

c) $z = -5$;

d) $z = i$;

e) $z = -3i$;

f) $z = 1 + i$;

g) $z = 1 - i$;

h) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

i) $z = -\sqrt{3} + i$.

Rešenje.

a) Kako je $\operatorname{Arg} 1 = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0 1 = 0$;

b) Kako je $\operatorname{Arg} 4 = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0 4 = 0$;

c) Kako je $\operatorname{Arg}(-5) = \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0(-5) = \pi$;

d) Kako je $\operatorname{Arg} i = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0 i = \frac{\pi}{2}$;

e) Kako je $\operatorname{Arg}(-3i) = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0(-3i) = -\frac{\pi}{2}$;

f) Kako je $\operatorname{Arg}(1 + i) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,sledi da je $\arg_0(1 + i) = \frac{\pi}{4}$;

g) Kako je $\operatorname{Arg}(1-i) = \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0(1-i) = -\frac{\pi}{4}$;

h) Kako je $\operatorname{Arg}\big(1+i\sqrt{3}\big) = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0\big(1+i\sqrt{3}\big) = \frac{\pi}{3}$;

i) Kako je $\operatorname{Arg}\big(-\sqrt{3}+i\big) = \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je $\arg_0\big(-\sqrt{3}+i\big) = \frac{5\pi}{6}$.

$\triangle$

4 Koren kompleksnog broja

Jednačina oblika $x^n = a$ se može rešiti, ali je veliko pitanje nad kojim skupom brojeva. Stoga, prvo će biti pokazano kako to izgleda u skupu realnih brojeva, a zatim u skupu kompleksnih brojeva.

4.1 Realni koren realnog broja

Teorema 8. *Za svaki prirodan broj n i za svaki realan broj $x \geq 0$, postoji tačno jedan realan broj $y \geq 0$, takav da je $y^n = x$.*

Dokaz ove teoreme je preuzet iz [6].

Dokaz. Posmatrajmo skup $A = \{z \in \mathbb{R}^+ | z^n \leq x\}$. Taj podskup skupa $\mathbb{R}$ je ograničen odozgo (brojem 1 ako je $x \leq 1$, a brojem x ako je $x > 1$). Stoga skup A ima supremum. Označimo $y = \sup A$; dokazaćemo da je $y^n = x$.
Pod pretpostavkom da je $y^n < x$, $x - y^n = \varepsilon > 0$. Za svako pozitivno h, $h \leq 1$, binomna formula daje

$$\begin{aligned}
(y+h)^n &= y^n + ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3}h^3 + ... \\
&= y^n + h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3}h^2 + ...\right) \\
&\leq y^n + h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3} + ...\right) \\
&= y^n + h\left((1+y)^n - y^n\right).
\end{aligned}$$

Izaberimo $0 < h \leq 1$ tako da je $h < \dfrac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n}$; za to je dovoljno uzeti $h = \dfrac{1}{2}$, ako je $\dfrac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n} \geq 2$, odnosno $h = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n}$, ako je $\dfrac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n} < 2$. Onda je $(y+h)^n \leq y^n + \varepsilon = x$, što znači da postoji u skupu A element $y + h$, veći od y. Zbog $y = \sup A$ takav element ne može postojati.
Pretpostavimo sada da je $y^n > x$, $y^n - x = \varepsilon > 0$. Za svako pozitivno $h \leq 1$ binomna funkcija daje

$$\begin{aligned}
(y-h)^n &= y^n - ny^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2}h^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3}h^3 + ... \\
&= y^n - h\left(ny^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3}h^2 - ...\right) \\
&\geq y^n - h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2}h + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3}h^2 + ...\right) \\
&\geq y^n - h\left(ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}y^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^{n-3} + ...\right) \\
&= y^n - h\left((1+y)^n - y^n\right).
\end{aligned}$$

Opet možemo izabrati $h < \dfrac{\varepsilon}{(1+y)^n - y^n}$, $0 < h \leq 1$. Nalazimo da je $(y-h)^n \geq y^n - \varepsilon = x$, što znači da postoji realan broj $y - h < y = \sup A$ koji zadovoljava uslov: za sve $z \in A$ je $(y-h)^n \geq z^n$ i zbog toga $y - h \geq z$. Ova kontradikcija dokazuje da nije moguće da bude $y^n > x$.
Kako ne može biti ni $y^n < x$, ni $y^n > x$, to je $y^n = x$, pa broj y ima traženu osobinu.
Jedinstvenost sledi iz činjenice da bi iz pretpostavki $y_1^n = x$ i $y_2^n = x$, $y_1 < y_2$ sledelo $x = y_1^n < y_2^n = x$, što je nemoguće. □

Detaljnije o ovome se može naći na linku [7].

Definicija 12. *Neka je $x > 0$ i $n \in \mathbb{N}$. Jednoznačno određeni pozitivan broj y, takav da je $y^n = x$, jeste n-ti koren broja x, u oznaci $\sqrt[n]{x}$.*

Teorema 9. *Neka je data jednačina $x^n = a$ u polju realnih brojeva. Tada:*

1. *Ako je n paran broj i $a > 0$, onda jednačina ima tačno dva rešenja: $x = \sqrt[n]{a}$ ili $x = -\sqrt[n]{a}$;*
2. *Ako je n paran broj i $a = 0$, onda jednačina ima tačno jedno rešenje $x = 0$;*
3. *Ako je n paran broj i $a < 0$, onda jednačina nema rešenja;*
4. *Ako je n neparan broj i $a \geq 0$, onda jednačina ima tačno jedno rešenje: $x = \sqrt[n]{a}$;*
5. *Ako je n neparan broj i $a < 0$, onda jednačina ima tačno jedno rešenje: $x = -\sqrt[n]{|a|}$.*

Primer 14. *Rešiti sledeće jednačine u skupu realnih brojeva:*

a) $x^2 = 4$;

b) $x^4 = 0$;

c) $x^6 = -64$;

d) $x^5 = 32$;

e) $x^7 = -128$.

Rešenje.

a) $x = 2$ ili $x = -2$;

b) $x = 0$;

c) jednačina nema rešenja;

d) $x = 2$;

e) $x = -2$.

△

4.2 Koren kompleksnog broja

Definicija 13. *Neka je n prirodan broj i z kompleksan broj. Pod n-tim korenom broja z podrazumevamo svaki kompleksan broj čiji je* ***n-ti*** *stepen jednak z.*

Pokazaćemo da se trigonometrijski oblik kompleksnog broja može primeniti prilikom izračunavanja korena kompleksnih brojeva.

Neka je $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$, $\alpha \in (-\pi, \pi]$.
Posmatrajmo n kompleksnih brojeva oblika

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \{0,1,2,...,n-1\}. \tag{5}$$

Primenjujući Moavrovu formulu zaključujemo da je za svako k iz navedenog skupa ispunjeno

$$\begin{aligned}
{z_k}^n &= \left(\sqrt[n]{|a|}\right)^n \left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)^n \\
&= |a|\left(\cos n\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin n\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right) \\
&= |a|\left(\cos(\alpha+2k\pi) + i\sin(\alpha+2k\pi)\right) \\
&= |a|\left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right) \\
&= a.
\end{aligned}$$

Ovde sledi da za svaki od brojeva z_k, $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$, jeste rešenje jednačine $z_n = a$, pa je i n-ti koren broja a.
Neka su $k_1, k_2 \in \{0,1,2,...,n-1\}$ i različiti su, pri čemu je $k_1 < k_2$, tada
$\dfrac{\alpha+2k_1\pi}{n} \neq \dfrac{\alpha+2k_2\pi}{n}$ i razlika $k_2 - k_1 < n$. Sledi
$0 < \dfrac{\alpha+2k_2\pi}{n} - \dfrac{\alpha+2k_1\pi}{n} = \dfrac{2(k_2-k_1)\pi}{n} < 2\pi$,
iz čega se može zaključiti da su z_{k_1} i z_{k_2} različiti kompleksni brojevi. Prema tome, relacija (5) nam daje n različitih korena broja a.
Važno je napomenuti da se argumenti kompleksnih brojeva z_k mogu razlikovati od $\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$ za 2π, kako bi se obezbedilo da $\varphi_k = \arg_0 z_k$.

Teorema 10. *Polinom stepena $n \geq 1$ sa koeficijentima iz skupa kompleksnih brojeva može imati najviše n nula.*

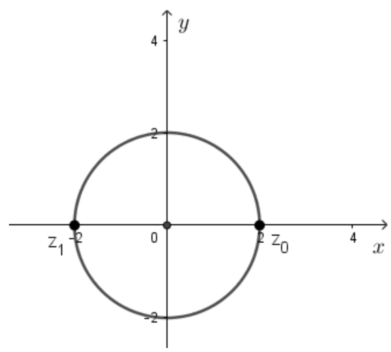
Dokaz. Dokazaćemo matematičkom indukcijom.
Baza indukcije, za $n = 1$ važi da polinom stepena 1 ima najviše jednu nulu.
Zaista, ako je $P_1(z) = a_1 z + a_0$, onda je $P_1(z) = 0$ ako i samo ako je $z = -\dfrac{a_0}{a_1}$.
Pretpostavimo da proizvoljni polinom P_n stepena $n \geq 1$ ima najviše n nula.
Pokazaćemo da važi i za proizvoljni polinom stepena $n+1$.
Neka je P_{n+1} proizvoljan polinom stepena $n+1$. Postoje dve mogućnosti:
Prva je da polinom P_{n+1} nema nula. Tada tvrđenje neposredno sledi.
Drugo je da polinom P_{n+1} ima nulu z_k, iz čega sledi da je

$P_{n+1}(z) = (z - z_k)\, Q_n(z)$, gde je Q_n polinom stepena n.
Na osnovu pretpostavke sledi da polinom Q_n ima najviše n nula, a na osnovu toga sledi da polinom P_{n+1} ima najviše $n+1$ nulu. $\square$

Primer 15. *Naći sve druge korene brojeva* 4 *i* -4.

Rešenje. Prvo je potrebno izračunati druge korene broja 4.
$z = 4$, može biti zapisan u trigonometrijskom obliku
$z = 4(1 + i \cdot 0) = 4 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, $|z| = 4$, $\arg_0 z = 0$, pa je
$z_k = \sqrt{4} \cdot \left(\cos \dfrac{0 + 2k\pi}{2} + i \sin \dfrac{0 + 2k\pi}{2} \right)$, $k \in \{0, 1\}$,
$z_0 = 2 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) = 2 \cdot 1$,
$z_0 = 2$,
$z_1 = 2 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi) = 2 \cdot (-1 + i \cdot 0) = 2 \cdot (-1)$,
$z_1 = -2$.

Prikažimo u kompleksnoj ravni tačke koje odgovaraju brojevima z_0 i z_1. Primetimo da pripadaju kružnici poluprečnika 2 čiji je centar koordinatni početak i dijametralno su suprotne.



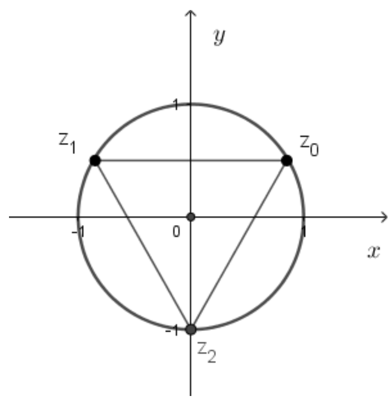
Računamo druge korene broja -4.
$z = -4$, zapišimo ovaj broj u trigonometrijskom obliku
$z = 4(-1 + i \cdot 0) = 4 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$, $|z| = 4$, $\arg_0 z = \pi$, pa je
$z_k = \sqrt{4} \cdot \left(\cos \dfrac{\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi + 2k\pi}{2} \right)$, $k \in \{0, 1\}$,
$z_0 = 2 \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot (0 + i \cdot 1)$,
$z_0 = 2i$,
$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \dfrac{3\pi}{2} + i \sin \dfrac{3\pi}{2} \right) = 2 \cdot \left(\cos \left(-\dfrac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\dfrac{\pi}{2} \right) \right) = 2 \cdot (0 + i \cdot (-1))$,
$z_1 = -2i$. $\triangle$

Primer 16. *Izračunati sve treće korene broja* i.

Rešenje. $z = i = 1 \cdot (0 + i \cdot 1) = 1 \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \sin \dfrac{\pi}{2} \right)$, $|z| = 1$, $\arg_0 z = \dfrac{\pi}{2}$, pa je
$z_k = 1 \cdot \left(\cos \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \dfrac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right)$, $k \in \{0, 1, 2\}$,
$z_0 = \cos \dfrac{\pi}{6} + i \sin \dfrac{\pi}{6}$,
$z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \dfrac{1}{2}$,

$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6},$
$z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$
$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$
$= \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$
$z_2 = -i.$

Prikažimo u kompleksnoj ravni tačke koje odgovaraju brojevima z_0, z_1, z_2. Primetimo da pripadaju jediničnoj kružnici čiji je centar koordinatni početak i predstavljaju temena jednakostraničnog trougla.

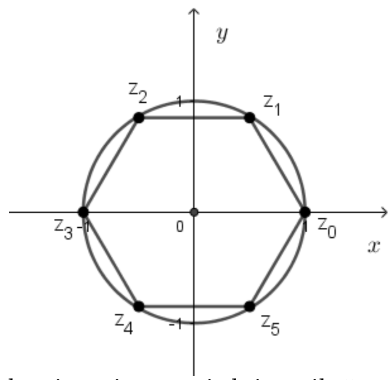


△

Primer 17. *Naći sve šeste korene broja* 1.

Rešenje. Imamo da je $z = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)$, $|z| = 1$, $\arg_0 z = 0$, pa je
$z_k = \sqrt[6]{1}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{6} + i\sin\frac{0 + 2k\pi}{6}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
$z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$
$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
$z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$
$z_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$
$z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$
$z_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Prikažimo u kompleksnoj ravni tačke koje odgovaraju brojevima z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5. Primetimo da pripadaju jediničnoj kružnici čiji je centar koordinatni početak i predstavljaju temena pravilnog šestougla.

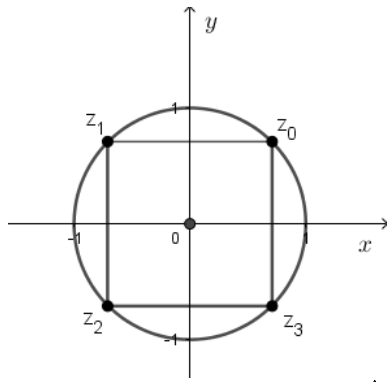


Zanimljivo je da broj z_1 ima svojstvo da njegovi stepeni daju svih šest šestih korena broja 1, odnosno $z_1^1 = z_1$, $z_1^2 = z_2$, $z_1^3 = z_3$, $z_1^4 = z_4$, $z_1^5 = z_5$, $z_1^6 = z_0$. Ovo svojstvo ima i broj z_5, ali ga ostali nemaju. $\triangle$

Primer 18. *Naći sve četvrte korene broja -1.*

Rešenje. Kako je
$z = -1 = 1 \cdot (-1 + i \cdot \sin 0) = (\cos \pi + i \sin \pi)$, $|z| = 1$, $\arg_0 z = \pi$, pa je
$z_k = \sqrt[4]{1}\left(\cos \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, iz čega sledi
$z_0 = \cos \dfrac{\pi}{4} + i \sin \dfrac{\pi}{4}$,
$z_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
$z_1 = \cos \dfrac{3\pi}{4} + i \sin \dfrac{3\pi}{4}$,
$z_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
$z_2 = \cos \dfrac{5\pi}{4} + i \sin \dfrac{5\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$,
$z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
$z_3 = \cos \dfrac{7\pi}{4} + i \sin \dfrac{7\pi}{4} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$,
$z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Prikažimo u kompleksnoj ravni tačke koje odgovaraju brojevima z_0, z_1, z_2, z_3. Primetimo da pripadaju jediničnoj kružnici čiji je centar koordinatni početak i predstavljaju temena pravilnog četvorougla.



△

Teorema 11. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, pri čemu je $r = |z|$ i $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju n-tim korenima kompleksnog broja z pripadaju kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{r}$ čiji je centar koordinatni početak i predstavljaju temena pravilnog n-tougla, čije jedno teme odgovara kompleksnom broju $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$.*

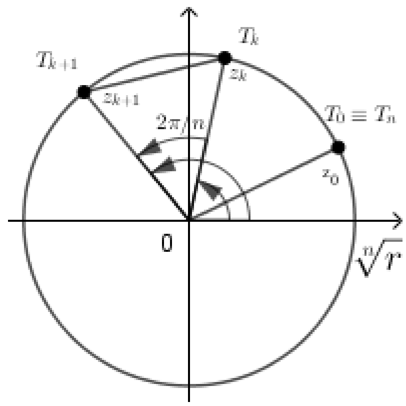
Dokaz. Ako se zna da su $n-$ti koreni broja a oblika
$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.
Za svako $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ je $|z_k| = \sqrt[n]{r}$, odakle sledi prvi deo tvrđenja. U pravilnom n-touglu su centralni uglovi koji odgovaraju njegovim stranicama jednaki $\frac{2\pi}{n}$. Ako su T_k i T_{k+1} susedna temena, koja odgovaraju kompleksnim brojevima
$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$,
$z_{k+1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(k+1)\pi}{n}\right)\right)$,
razlika orijentisanih uglova $\angle xOz_{k+1}$ i $\angle xOz_k$ jednaka je $\frac{2\pi}{n}$. Kako to važi za svako $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, uz $T_n \equiv T_0$, tačan je i drugi deo tvrđenja naše teoreme.

□

Teorema 12. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju n-tim korenima broja 1 pripadaju jediničnoj kružnici čiji je centar koordinatni početak i predstavljaju temena pravilnog n-tougla čije je jedno teme tačka $T_0(1, 0)$.*

Primer 17. ilustruje ovo tvrđenje u slučaju $n = 6$.

Teorema 13. *Rešenja jednačine oblika $z^n = a$, $a \neq 0$, pripadaju kružnici poluprečnika $\sqrt[n]{|a|}$ čiji je centar koordinatni početak. Tačke u kompleksnoj ravni koje odgovaraju rešenjima ove jednačine predstavljaju temena pravilnog n-tougla.*



4.3 Osnovni stav algebre

Definicija 14. *Disk sa središtem z_0 i poluprečnika r, u oznaci $K[z_0, r)$, je skup koji obuhvata sve kompleksne broje z za koje važi $|z - z_0| < r$.*

Definicija 15. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{C}$ otvoren skup i $z_0 \in \Omega$. Funkcija $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je diferencijabilna u tački z_0 ako postoji $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$.*

Definicija 16. *Funkcija f je holomorfna (analitička, regularna) u tački z_0, ako postoji disk $K[z_0, r)$ takav da funkcija f ima izvod u svakoj tački $z \in K[z_0, r)$.*

Primer 19. *Ispitati da li su sledeće funkcije holomorfne u proizvoljnoj tački:*

a) $f(z) = z^2$;

b) $f(z) = \overline{z}$;

c) $f(z) = e^z$.

Rešenje.

a) Ispitaćemo da li postoji limes $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2zh + h^2}{h} = 2z$. Zaključujemo da je funkcija diferencijabilna za svako z, sledi da je funkcija $f(z) = z^2$ holomorfna u proizvoljnoj tački;

b) Ispitaćemo da li postoji limes

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\overline{z+h}\right) - \overline{z}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1, h = x, x > 0, \\ -1, h = iy, y > 0, \end{cases}$$

kao što vidimo iz primera, dati limes ne postoji, iz čega sledi da funkcija $f(z) = \overline{z}$ nije diferencijabilna, a samim tim nije ni holomorfna ni u jednoj tački;

c) Ispitaćemo da li postoji limes $\lim_{h\to 0}\frac{e^{z+h}-e^z}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^z\left(e^h-1\right)}{h}=e^z$.
Zaključujemo da je funkcija diferencijabilna za svako z, sledi da je funkcija $f(z)=e^z$ holomorfna u proizvoljnoj tački.

$\triangle$

Često se za granu neke višeznačne funkcije postavljaju i dodatni uslovi, na primer, da je neprekidna, holomorfna itd...

Teorema 14. *(Liuvilova teorema) Ako je funkcija f holomorfna na $\mathbb{C}$ i funkcija $|f|$ ograničena, tada je f konstantna.*

Teorema 15. *(Osnovni stav algebre) Polinom n-tog stepena, $n\in\mathbb{N}$, čiji su koeficijenti kompleksni brojevi, ima bar jednu nulu u skupu kompleksnih brojeva.*

Dokaz. Neka je P polinom koji nema nula u $\mathbb{C}$. Tada je sa $f(z)=\dfrac{1}{P(z)}$ korektno definisana holomorfna funkcija $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Kako je $\lim_{z\to\infty}P(z)=\infty$, onda je $\lim_{z\to\infty}f(z)=0$. Otuda je funckija $|f|$ ograničena na $\mathbb{C}$, tj. funkcija f ispunjava uslove Liuvilove teoreme, iz čega sledi da je f konstantna funkcija. A kako je $P=\dfrac{1}{f}$, sledi da je i P konstantna funkcija. $\square$

Teorema 16. *Polinom n-tog stepena, $n\in\mathbb{N}$, čiji su koeficijenti kompleksni brojevi, ima tačno n nula u skupu kompleksnih brojeva.*

Dokaz. Neka je $P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+...+a_0$ polinom stepena n. Kako je pokazano u dokazu Osnovnog stava algebre, da polinom n-tog stepena ima bar jednu nulu, pretpostavimo da je a nula polinoma P, onda važi $P(z)=(z-a)\,Q(z)$, pri čemu je $Q(z)$ polinom stepena $n-1$. Po istom principu polinom $Q(z)$ ima bar jednu nulu. Tako nastavljajući postupak, sledi da se polinom P može zapisati kao proizvod n faktora. $\square$

5 Logaritam kompleksnog broja

5.1 Eksponencijalna funkcija

Definicija 17. *Eksponencijalna funkcija za kompleksan broj z se definiše na sledeći način:*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}. \tag{6}$$

Oznaka: $\exp(z) = e^z$.

Definicija 18. *Eksponencijalna funkcija za kompleksan broj $z = x + iy$ se definiše na sledeći način:*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y). \tag{7}$$

Ako je imaginarni deo kompleksnog broja jednak nuli, odnosno $z = x$, onda se eksponencijalna funkcija svodi na realnu eksponencijalnu funkciju.
Funkcije sinus i kosinus su 2π periodične, stoga je eksponencijalna funkcija periodična sa periodom $i2\pi$.
Važi $e^x > 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$. Osim toga, ni za jedan realan broj y ne mogu istovremeno biti $\cos y = 0$ i $\sin y = 0$. Prema tome, $e^z \neq 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$.

Posledica 1. *Definicija 17. je ekvivalentna Definiciji 18.*

Dokaz. Dat je kompleksan broj $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Kako važi da je $e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$, razvićemo eksponencijalnu, kosinusnu i sinusnu funkciju u Tejlorov red. Dobijamo

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \\ \cos y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots, \\ \sin y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \frac{y^7}{7!} - \dots. \end{aligned}$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\cos y + i \sin y &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \\
&= \frac{1}{0!} + i \frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \dots \\
&= \frac{(iy)^0}{0!} + \frac{(iy)^1}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \dots \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(iy)^l}{l!} \\
&= e^{iy}
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(iy)^l}{l!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{(iy)^{n-j}}{(n-j)!}$.
Da bismo nastavili sa dokazivanjem, neophodno je da primenimo binomnu formulu

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^k b^{m-k},$$

a kako je

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

sledi da je

$$\frac{1}{k!\,(m-k)!} = \frac{\binom{m}{k}}{m!}$$

što ćemo primeniti u nastavku dokaza.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \frac{(iy)^{n-j}}{(n-j)!} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{\binom{n}{j} x^j (iy)^{n-j}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j (iy)^{n-j} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (x+iy)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\
&= e^z.
\end{aligned}$$

□

5.2 Eksponencijalni zapis kompleksnog broja

Definicija 19. *Za bilo koji kompleksan broj $z \neq 0$, eksponencijalni zapis tog broja se definiše na sledeći način:*

$$z = re^{i\varphi}, \text{ pri čemu je } r = |z|, \text{ a } \varphi \in \operatorname{Arg} z.$$

Znajući da se svaki kompleksan broj, različit od nule, može predstaviti na bezbroj načina, zbog periodičnosti argumenta, važi sledeće:

$$z = re^{i(\varphi + 2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}.$$

5.3 Svojstva eksponencijalne funkcije

Teorema 17. *Za eksponencijalnu funkciju važe sledeća osnovna svojstva:*

a) $e^z \neq 0$;

b) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$;

c) $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$;

d) $\left|e^{iy}\right| = 1,\ y \in \mathbb{R}$;

e) $|e^z| = e^x$.

Dokaz.

a) Kako je $e^z e^{-z} = e^0 = 1$, sledi ovo tvrđenje, kao i tvrđenje pod b);

c)
$$\begin{aligned}
\exp(\overline{z}) &= e^{\overline{z}} = e^{x-iy} \\
&= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) \\
&= e^x(\cos y - i\sin y) \\
&= \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} \\
&= \overline{\exp(z)};
\end{aligned}$$

d) Za bilo koji realan broj y imamo da važi:
$\left|e^{iy}\right| = |\cos y + i\sin y| = \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1$;

e) $|e^z| = \left|e^x \cdot e^{iy}\right| = |e^x| \cdot \left|e^{iy}\right| = e^x \cdot 1 = e^x$, znamo da za bilo koji realan broj x eksponencijalna funkcija je pozitivna, pa važi $|e^x| = e^x$, uz pomoć čega je traženo svojstvo pokazano.

$\square$

Kako važi da je $\left|e^{iy}\right| = 1$, sledi da je e^{iy} tačka kružnice čiji je centar koordinatni početak poluprečnika 1. Obrnuto, ako je w tačka jedinične kružnice čiji je centar koordinatni početak i ako je $y = \arg w$, tada je $e^{iy} = w$. Prema tome, preslikavanje $y \to e^{iy}$ je bijekcija iz skupa $\{y : 0 \leq y < 2\pi\}$ na jediničnu

kružnicu u skupu $\mathbb{C}$.
Ako je $z \in \mathbb{C}$ proizvoljan kompleksan broj različit od nule, tada je $\dfrac{z}{|z|}$ tačka jedinične kružnice sa istim argumentom kao z, odnosno z je tačka kružnice poluprečnika $|z|$ čiji je centar koordinatni početak.

Primer 20. *Neka je funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadata sa $f(z) = e^z$. Ispitati da li je data funkcija ,,1-1" i ,,na".*

Rešenje. Funkcija je ,,1-1" ako i samo ako $f(z_1) = f(z_2)$ implicira da je $z_1 = z_2$.
Neka je $z_1 = 0$ i $z_2 = i2\pi$.
$f(0) = 1$ i $f(i2\pi) = 1$, iz čega zaključujemo da je $f(z_1) = f(z_2)$.
Kako su z_1 i z_2 različiti, sledi da funkcija nije ,,1-1".
Funkcija je ,,na" ako i samo ako za svako $w \in \mathbb{C}$ postoji $z \in \mathbb{C}$ tako da važi da je $w = f(z)$.
Neka je $w = 0$, iz toga sledi da je $f(z) = 0$, za neko $z \in \mathbb{C}$, odnosno da je $e^z = 0$, a to je ekvivalentno sa $e^{x+iy} = 0$, tj. $e^x(\cos y + i \sin y) = 0$.
Kako važi da je $e^x > 0$, za svako $x \in \mathbb{R}$ i da ni za jedan realan broj y ne mogu istovremeno biti $\cos y = 0$ i $\sin y = 0$, zaključujemo da je $e^z \neq 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$, odnosno da funkcija nije ni ,,na". △

Primer 21. *Odrediti e^z za:*

a) $z = 0$;

b) $z = 1$;

c) $z = i$;

d) $z = -3i$;

e) $z = 1 + i$;

f) $z = 1 - i$;

g) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

h) $z = -\sqrt{3} + i$.

Rešenje.

a) $e^0 = 1$;

b) $e^1 = e$;

c) $e^i = e^{0+i\cdot 1} = e^0 e^{i\cdot 1} = 1 \cdot ((\cos 1 + i \sin 1) = \cos 1 + i \sin 1$;

d) $e^{-3i} = e^{0+i\cdot(-3)} = 1 \cdot (\cos(-3) + i \sin(-3)) = \cos 3 - i \sin 3$;

e) $e^{1+i} = e^1 e^{i\cdot 1} = e \cdot (\cos 1 + i \sin 1)$;

f) $e^{1-i} = e^1 \cdot (\cos(-1) + i \sin(-1)) = e(\cos 1 - i \sin 1)$;

g) $e^{1+i\sqrt{3}} = e^1 e^{i\cdot\sqrt{3}} = e\cdot\left(\cos\sqrt{3} + i\sin\sqrt{3}\right)$;

h) $e^{-\sqrt{3}+i} = e^{-\sqrt{3}}\cdot(\cos 1 + i\sin 1)$.

$\triangle$

5.4 Logaritamska funkcija

Kompleksan broj $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ nema jedinstven argument. Preciznije, ako je poznat jedan argument φ broja z, onda se svi ostali argumenti tog broja razlikuju od φ za $2k\pi$, pri čemu $k \in \mathbb{Z}$. Stoga pridruživanje $z \to \operatorname{Arg} z$ nije preslikavanje u pravom smislu reči. Ako je $\arg_0 z$ glavna vrednost argumenta kompleksnog broja z, tada je $z \to \arg_0 z$ preslikavanje iz skupa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ na skup $(-\pi,\pi]$. Za svako $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ postoji jedinstvena reprezentacija $z = |z|\, e^{i\arg_0 z}$.

Definicija 20. *Prirodni logaritam je funkcija* $\operatorname{Ln}: \mathbb{C}\setminus\{0\} \to P(\mathbb{C})$ *definisana na sledeći način:*
$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$, *gde je* $\ln|z|$ *uobičajeni logaritam broja* $|z|$.

Drugi primer kompleksne višeznačne funkcije kompleksne promenljive jeste funkcija Ln, za koju važi $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\cdot\{\varphi\in\mathbb{R} | z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\}$, pri čemu je desna strana prethodne jednakosti po definiciji jednaka
$\{\ln|z| + i\varphi | \varphi \in \operatorname{Arg} z\}$.

Primer 22. *Odrediti* $\operatorname{Ln} z$ *za:*

a) $z = 1$;

b) $z = i$;

c) $z = -3i$;

d) $z = 1 + i$;

e) $z = 1 - i$;

f) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

g) $z = -\sqrt{3} + i$.

Rešenje.

a) Kako je $\operatorname{Arg} 1 = \{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln} 1 = \{\ln 1 + i\cdot 2k\pi\ , k\in\mathbb{Z}\} = \{0 + i\cdot 2k\pi\ , k\in\mathbb{Z}\} = \{i\cdot 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$;

b) Kako je $\operatorname{Arg} i = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln} i = \{\ln|i| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\} = \{\ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\} = \{i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k\in\mathbb{Z}\}$;

c) Kako je $\operatorname{Arg}(-3i) = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln}(-3i) = \{\ln|-3i| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} =$
$\{\ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\}$;

d) Kako je $\operatorname{Arg}(1+i) = \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln}(1+i) = \{\ln|1+i| + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} =$
$\{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\}$;

e) Kako je $\operatorname{Arg}(1-i) = \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln}(1-i) = \{\ln|1-i| + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} =$
$\{\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\}$;

f) Kako je $\operatorname{Arg}\left(1+i\sqrt{3}\right) = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln}\left(1+i\sqrt{3}\right) = \{\ln\left|1+i\sqrt{3}\right| + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} =$
$\{\ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\}$;

g) Kako je $\operatorname{Arg}\left(-\sqrt{3}+i\right) = \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, sledi da je
$\operatorname{Ln}\left(-\sqrt{3}+i\right) = \{\ln\left|-\sqrt{3}+i\right| + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\} =$
$\{\ln 2 + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\}$.

△

Definicija 21. *Jedna grana višeznačne funkcije* Ln *jeste funkcija* $\mathbf{ln_0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\ln_0 z$ *jeste ona vrednost iz skupa* $\operatorname{Ln} z$ *definisana sa* $\ln_0 z = \ln|z| + i\arg_0 z$, *odnosno* $\ln_0 z = \ln|z| + i\varphi$, *pri čemu* $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

Primer 23. *Odrediti* $\ln_0 z$ *za:*

a) $z = 1$;

b) $z = i$;

c) $z = -3i$;

d) $z = 1 + i$;

e) $z = 1 - i$;

f) $z = 1 + i\sqrt{3}$;

g) $z = -\sqrt{3} + i$.

Rešenje.

a) Kako je $\mathrm{Ln}\, 1 = i \cdot 2k\pi$ sledi da je $\ln_0 1 = 0$;

b) Kako je $\mathrm{Ln}\, i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ sledi da je $\ln_0 i = i\frac{\pi}{2}$;

c) Kako je $\mathrm{Ln}\,(-3i) = \ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ sledi da je $\ln_0 (-3i) = \ln 3 - i\frac{\pi}{2}$;

d) Kako je $\mathrm{Ln}\,(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ sledi da je $\ln_0 (1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$;

e) Kako je $\mathrm{Ln}\,(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ sledi da je $\ln_0 (1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$;

f) Kako je $\mathrm{Ln}\left(1+i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ sledi da je $\ln_0 \left(1+i\sqrt{3}\right) = \ln 2 + i\frac{\pi}{3}$;

g) Kako je $\mathrm{Ln}\left(-\sqrt{3}+i\right) = \ln 2 + i\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$ sledi da je $\ln_0 \left(-\sqrt{3}+i\right) = \ln 2 + i\frac{5\pi}{6}$.

$\triangle$

Ako je $z = x$, pri čemu je $x > 0$, onda je $\arg_0 z = 0$ i uvedena definicija $\ln_0$ se poklapa sa definicijom logaritma pozitivnog realnog broja.
Važi svojstvo:

$$e^{\mathrm{Ln}\, z} = z, \text{ za } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

ali ne i svojstvo $\mathrm{Ln}\, e^z = z$.
Po definiciji je

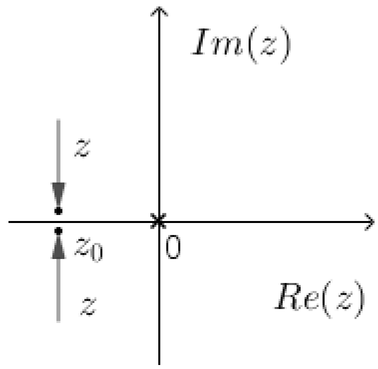
$$\begin{aligned}
\ln_0 e^z &= \ln|e^z| + i\arg_0 e^z \\
&= \ln e^x + i\arg_0 e^x e^{iy} \\
&= x + i\left(\arg_0 e^x + \arg_0 e^{iy}\right) \\
&= x + i(0+y) \\
&= x + iy \\
&= z
\end{aligned}$$

za $x \in \mathbb{R}$ i $y \in (-\pi, \pi]$.

Primer 24. *Ispitati da li su funkcije* $\arg_0$ *i* $\ln_0$ *neprekidne na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Rešenje. Vrednost funkcije $\arg_0 z$ zavisi od imaginarnog dela kompleksnog broja $z \in (-\infty, 0]$. Sledi

$$\lim_{z \to z_0} \arg_0 z = \begin{cases} -\pi, & \operatorname{Im} z < 0, \\ \pi, & \operatorname{Im} z \geq 0, \end{cases}$$



odnosno funkcija $\arg_0$ nije neprekidna na $(-\infty, 0]$, a samim tim nije neprekidna ni funkcija $\ln_0$.
Ali, ako posmatramo skup $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, onda funkcija $\arg_0$ jeste neprekidna. Takođe, funkcija $\ln_0$ na skupu $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ jeste neprekidna, štaviše funkcija $\ln_0$ je i holomorfna na tom skupu, jer je inverzna funkcija funkciji
$\exp : \Omega \to \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, pri čemu je skup $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. $\triangle$

Zaključujemo da za svako $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ važe oba svojstva

$$e^{\ln_0 z} = z \quad \text{i} \quad \ln_0 e^z = z.$$

Definicija 22. *Neka je Ω prosto povezana oblast i funkcija f holomorfna na Ω. Funkcija F je primitivna funkcija funkcije f na Ω ako je F holomorfna na Ω i $F'(z) = f(z)$ za svako $z \in \Omega$.*

Sledeće tri teoreme su delovi Velike teoreme[2] čiji potpun dokaz možete naći u knjizi [8] na strani 274.

Teorema 18. *Za svaku holomorfnu funkciju f na prosto povezanoj oblasti Ω postoji njoj odgovarajuća primitivna funkcija F.*

Teorema 19. *Neka je Ω prosto povezana oblast, funkcija f holomorfna na Ω i funkcija $\frac{1}{f}$ takođe holomorfna na Ω. Tada postoji funkcija g holomorfna na Ω takva da je $f = e^g$.*

Dokaz. Ako je funkcija f holomorfna i nema nula na Ω, tada je funkcija $\frac{f'}{f}$ takođe holomorfna na Ω. Na osnovu Teoreme 18. postoji funkcija g holomorfna na Ω takva da je $g' = \frac{f'}{f}$, odnosno g primitivna funkcija funkcije $\frac{f'}{f}$.

[2] Velika teorema se sastoji iz 9 delova koji se lančano dokazuju. Teoreme 18., 19. i 20. predstavljaju poslednja tri dela Velike teoreme.

Možemo dodati konstantu funkciji g tako da važi da je $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ za neko $z_0 \in \Omega$. Izvod funkcije fe^{-g} na Ω je

$$(f \cdot e^{-g})' = f' \cdot e^{-g} + f \cdot (-g' \cdot e^{-g}) = f' \cdot e^{-g} - f \cdot \frac{f'}{f} \cdot e^{-g} = f' \cdot e^{-g} - f' \cdot e^{-g} = 0.$$

Naš izbor funkcije g dokazuje da je izvod funkcije fe^{-g} jednak 0 na Ω, stoga funkcija fe^{-g} je konstantna na prosto povezanoj oblasti Ω. Kako je $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ sledi da je konstanta jednaka 1, odnosno $f = e^g$. $\square$

Teorema 20. *Neka je Ω prosto povezana oblast, funkcija f holomorfna na Ω i funkcija $\frac{1}{f}$ takođe holomorfna na Ω. Tada postoji funkcija h holomorfna na Ω takva da je $f = h^2$.*

Dokaz. Na osnovu prethodne teoreme važi da je $f = e^g$ i neka je funkcija $h = e^{\frac{g}{2}}$, sledi da je $f = h^2$. $\square$

6 Zaključak

U ovom radu su prikazane regularne grane višeznačnih funkcija. Da bi se došlo do krajnjeg cilja, bilo je neophodno uvesti osnovne pojmove iz kompleksne analize, kao što su: osnovna svojstva skupa kompleksnih brojeva, definisanje pojmova argument i koren kompleksnog broja, Osnovni stav algebre, eksponencijalna i logaritamska funkcija. Dakle, uvedeni pojmovi su dalje omogućili definisanje regularnih grana višeznačnih funkcija.

Na kraju, definicije, stavovi, teoreme, navedeni u ovom radu, su preuzeti iz literature, a primeri su samostalno rešeni.

Literatura

[1] M. Mateljević, Kompleksne funkcije 1 i 2, Društvo matematičara Srbije, 2006.

[2] M. Jevtić, M. Mateljević, Analitičke funkcije - zbirka zadataka, PMF, Beograd 1980.

[3] M. Mateljević, O kompleksnim brojevima i osnovnom stavu algebre, Nastava matematike, XLVII, 3-4, Beograd 2002.

[4] M. Mateljević, Promena argumenta duž puta i Žordanove teoreme, Nastava matematike, XLIX, 1-2, Beograd 2004.

[5] A. Zolić, Z. Kadelburg, S. Ognjenović, Analiza sa algebrom 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za I razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd 2016.

[6] Z. Kadelburg, V. Mićić, S. Ognjanović, Analiza sa algebrom 3, udžbenik sa zbirkom zadataka za III razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd 2015.

[7] http://poincare.matf.bg.ac.rs/∼svetlik/korenovanjeMS.pdf, pristupljeno 10.12.2018.

[8] Walter Rudin, Real and complex analysis, McGraw-Hill International Editions, 1987.