Универзитет у Београду

Математички факултет

МАСТЕР РАД

<u>ТЕМА:</u>

ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦИЈА

Ментор: др. Небојша Икодиновић

Студент: Наталија Ивановић 1117/2015

УВОД

У овом раду посматраћемо реалне функције реалне променљиве. Другим речима, то су функције облика $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ чији су домени и кодомени или скупови реалних бројева $\boldsymbol{R}$, или су подскупови скупа реалних бројева $\boldsymbol{R}$.

Примери:

1. За скуп $\boldsymbol{A} \neq \emptyset$ функција $f: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A}$ дефинисана са $f(x) = x$ за свако $x \in \boldsymbol{A}$ се назива функција идентитета ($f \equiv \mathrm{id}_A$).

2. За скупове $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \neq \emptyset$ и $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{R}$ функција $f: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ дефинисана са $f(x) = c, c \in \boldsymbol{B}, c = const$, је константна функција. Она у свакој тачки $x \in \boldsymbol{A}$ има исту вредност $c \in \boldsymbol{B}$.

Особине функције

Функција $f: \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{R})$ је:

1. **„1-1“** функција ако и само ако за свако $x_1 \in \boldsymbol{A}$ и за свако $x_2 \in \boldsymbol{A}$ важи да ако је $f(x_1) = f(x_2)$ онда је и $x_1 = x_2$.
2. **„на“** функција ако и само ако за свако $y \in \boldsymbol{B}$ постоји $x \in \boldsymbol{A}$ такво да је $f(x) = y$.
3. **бијекција**[1] ако и само ако је „1-1“ и „на“.
4. **парна** ако и само ако је њен домен $\boldsymbol{A}$ симетричан у односу на тачку 0, тј. ако за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да и $-x \in \boldsymbol{A}$ и за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да је $f(-x) = f(x)$. График парне функције је симетричан у односу на $y -$ осу.
5. **непарна** ако и само ако је њен домен $\boldsymbol{A}$ симетричан у односу на тачку 0, тј. ако за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да и $-x \in \boldsymbol{A}$ и за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да је $f(-x) = -f(x)$. График непарне функције је симетричан у односу на координатни почетак.
6. **ограничена одозго** ако и само ако постоји $M \in \boldsymbol{R}$ такав да је $f(x) < M$ за свако $x \in \boldsymbol{A}$.
7. **ограничена одоздо** ако и само ако постоји $m \in \boldsymbol{R}$ такав да је $m < f(x)$ за свако $x \in \boldsymbol{A}$.

[1] Ако је функција f бијекција, тада постоји њена инверзна функција $f^{-1}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A}$, али ћемо то касније детаљније објаснити.

8. **ограничена** ако и само ако постоји $M \in \boldsymbol{R}$ и $m \in \boldsymbol{R}$ такви да за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да је $m \leq f(x) \leq M$ или постоји $M \in \boldsymbol{R}$ такво да за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да је $|f(x)| \leq M$.
9. **периодична** постоји позитиван број $\omega \in \boldsymbol{R}$ такав да за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи да је $x + \omega \in \boldsymbol{A}$ и $x - \omega \in \boldsymbol{A}$ и $f(x + \omega) = f(x - \omega) = f(x)$. У том случају се број ω назива периодом функције f. Свака периодична функција има бесконачно много **периода**, а ако међу њима постоји најмањи, онда се он назива **основни период** функције.
10. **позитивна** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако и само ако је $f(x) > 0$ за свако $x \in \boldsymbol{I}$.
11. **негативна** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако и само ако је $f(x) < 0$ за свако $x \in \boldsymbol{I}$.
12. **има нулу** ако и само ако постоји $x \in \boldsymbol{A}$ тако да је $f(x) = 0$. Нулама функције одређене су тачке пресека графика функције f са $x -$ осом.
13. **растућа** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако за свако $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ из $x_1 \leq x_2$ следи да је $f(x_1) \leq f(x_2)$.
14. **строго растућа** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако за свако $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ из $x_1 < x_2$ следи да је $f(x_1) < f(x_2)$.
15. **опадајућа** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако за свако $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ из $x_1 \leq x_2$ следи да је $f(x_1) \geq f(x_2)$.
16. **строго опадајућа** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако за свако $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ из $x_1 < x_2$ следи да је $f(x_1) > f(x_2)$.
17. **конвексна** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако и само ако за произвољне $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ и произвољне бројеве $a_1 \geq 0$ и $a_2 \geq 0$ такве да је $a_1 + a_2 = 1$, важи $f(a_1 x_1 + a_2 x_2) \leq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$.
18. **строго конвексна** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако и само ако за произвољне $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ $(x_1 \neq x_2)$ и произвољне бројеве $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ такве да је $a_1 + a_2 = 1$, важи $f(a_1 x_1 + a_2 x_2) < a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$.
19. **конкавна** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако и само ако за произвољне $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ и произвољне бројеве $a_1 \geq 0$ и $a_2 \geq 0$ такве да је $a_1 + a_2 = 1$, важи $f(a_1 x_1 + a_2 x_2) \geq a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$.
20. **строго конкавна** на интервалу $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{A}$ ако и само ако за произвољне $x_1, x_2 \in \boldsymbol{I}$ $(x_1 \neq x_2)$ и произвољне бројеве $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$ такве да је $a_1 + a_2 = 1$, важи $f(a_1 x_1 + a_2 x_2) > a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2)$.

Операције са функцијама

Дефиниција: Нека су $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ и $g\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ две функције. Функција $h\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ дефинисана као $h(x) = f\big(g(x)\big)$, за свако $x \in \boldsymbol{A}$ је композиција функција f и g. За функцију h чешће користимо запис $g \circ f$.

Нека су дате функције $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, $g\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ и $h\colon \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{D}$. За композицију функција f, g и h важи:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$$

при чему је $\big((f \circ g) \circ h\big)(x) = h\big((f \circ g)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big)$ и

$\big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = (g \circ h)(f(x)) = h\big(g(f(x))\big)$ за свако $x \in \boldsymbol{A}$.

Пример: Нека је $f\colon \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{N}$ дефинисана са $f(x) = x^2$ и $g\colon \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q}$ дефинисана са $g(x) = \frac{x}{2}$. Одредити $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = f\big(g(x)\big) = f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$$

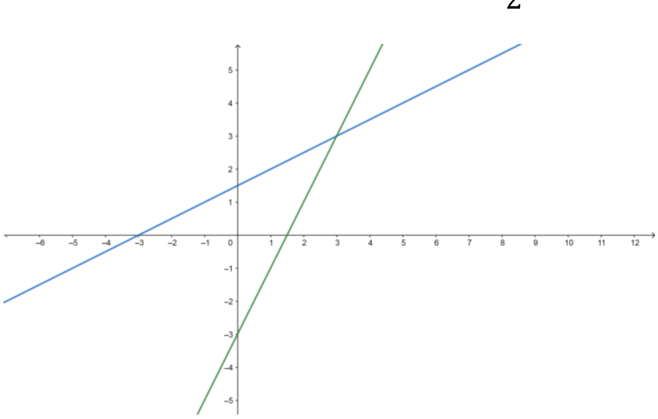
Теорема: Нека је $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ бијекција. Тада постоји функција $g\colon \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}$ таква да за свако $y \in \boldsymbol{B}$ постоји јединствено $x \in \boldsymbol{A}$ и важи да је $g \circ f \equiv id_{\boldsymbol{A}}$ и $f \circ g \equiv id_{\boldsymbol{B}}$.

Запис који чешће користимо за инверзну функцију функције f је f^{-1}, тј. $g = f^{-1}$. Графици међусобно инверзних функција су симетрични у односу на праву $y = x$.

Пример: Одредити инверзну функцију f^{-1} функције $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = 2x - 3$.

Дата функција f јесте бијекција па самим тим има смисла тражити њену инверзну функцију $f^{-1}\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

$$y = 2x - 3 \qquad 2x = y + 3 \qquad x = \frac{y+3}{2} \qquad f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$$



Лимес функције и непрекидност функције

Дефиниција: За функцију $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ кажемо да има **граничну вредност** $a \in \boldsymbol{R}$ у тачки $x_0 \in \boldsymbol{A}$ ако за било које $\varepsilon > 0$ постоји неко $\delta > 0$ такво да је $|f(x) - a| < \varepsilon$ за све оне $x \in \boldsymbol{A}$ за које је $x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta$. Поред термина гранична вредност користимо и термин **лимес**. Пишемо:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Пример: Одредити лимес функције $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = x^2$ када $x \to -1$.

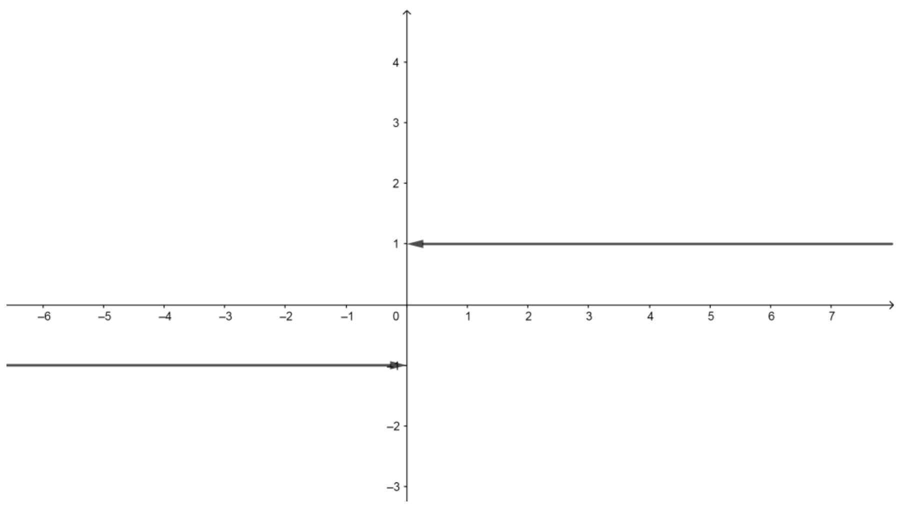
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x^2 = (-1)^2 = 1$

Дефиниција: За функцију $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ кажемо да је **непрекидна** у тачки $x_0 \in \boldsymbol{A}$ ако за сваки реалан број $\varepsilon > 0$ постоји релан број $\delta > 0$ такав да за свако $x \in \boldsymbol{A}$ важи $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ када је $|x - x_0| < \delta$. Ако је функција f непрекидна у свакој тачки $x_0 \in \boldsymbol{A}$, тада је она непрекидна на целом скупу $\boldsymbol{A}$. Ако у некој тачки $x_0 \in \boldsymbol{A}$ функција f није непрекидна, онда она у тој тачки има прекид, тј. тачка x_0 је тачка прекида функције f на скупу $\boldsymbol{A}$.

Примери:

1. Функција $f(x) = x$ је непрекидна на целом скупу $\boldsymbol{R}$.

2. Функција $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ има тачку прекида за $x_0 = 0$.



$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

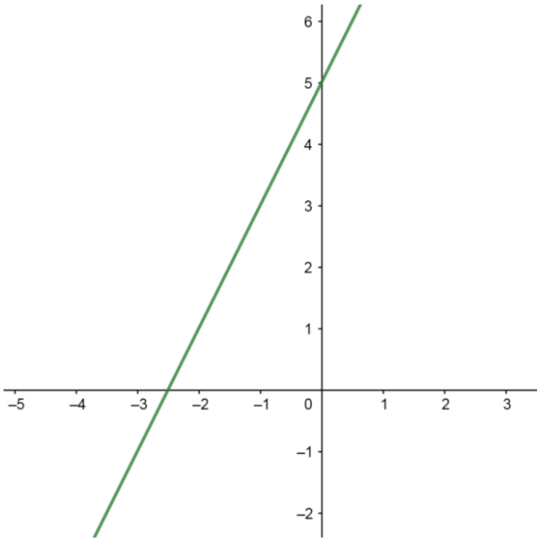
Преглед елементарних функција

У даљем делу ћемо се бавити елементарним функцијама (линеарна, степена, експоненцијална, логаритамска функција и тригонометријске функције). Показаћемо њихове области дефинисаности и неке основне особине.

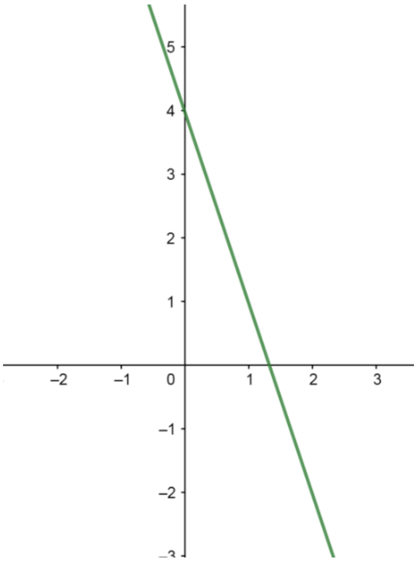
1. Линеарна функција

Линеарна функција $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ је функција облика $f(x) = ax + b$, $(a, b \in \boldsymbol{R}, a \neq 0)$. Реалан број a је коефицијент правца функције f, док је реалан број b одсечак на y −оси. Линеарна функција f:

1. је непрекидна на свом домену
2. је бијекција
3. је нити парна нити непарна
4. није ограничена нити одозго нити одоздо
5. није периодична
6. има нулу у тачки $x = -\frac{b}{a}$.
7. је монотоно растућа ако и само ако је $a > 0$. У том случају функција f је негативна на $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$, а позитивна на $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$.
8. је монотоно опадајућа ако и само ако је $a < 0$. У том случају функција f је негативна на $\left(-\frac{b}{a}, +\infty\right)$, а позитивна на $\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)$.
9. није конвексна нити конкавна, тј. линеарна функција f је права линија.



$f(x) = 2x + 5$

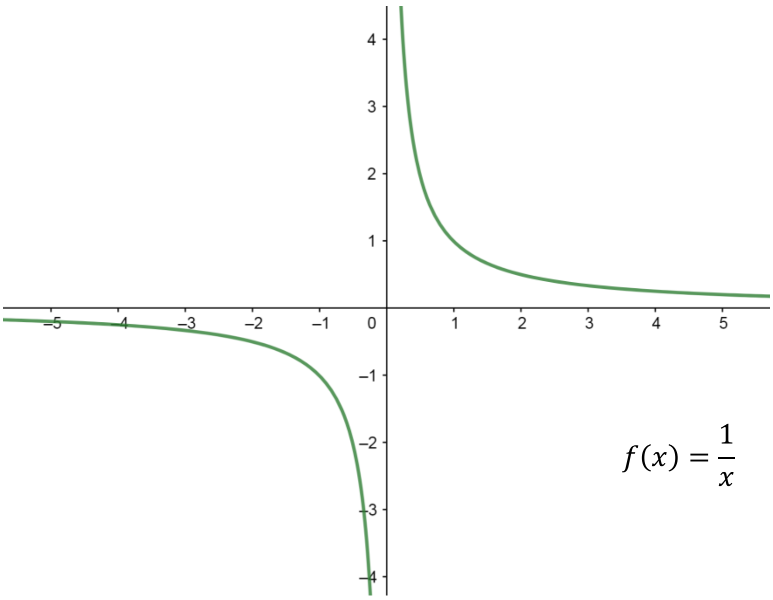


$f(x) = -3x + 4$

2. Функција обрнуте пропорционалности

Функција $f: \boldsymbol{R}\backslash\{0\} \to \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \frac{1}{x}$ се назива функцијом обрнуте пропорционалности. Ова функција f:

1. је „1-1“ функција и пресликава $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ на $\boldsymbol{R}\backslash\{0\}$.
2. је непарна, тј за свако $x \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ важи да је $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.
3. није ограничена (није ограничена нити одозго, нити одоздо)
4. није периодична
5. нема нуле
6. је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$.
7. је опадајућа на $(-\infty, 0)$ и на $(0, +\infty)$, али није опадајућа на свом домену који је унија ових интервала.
8. је конкавна на $(-\infty, 0)$, а конвексна на $(0, +\infty)$.

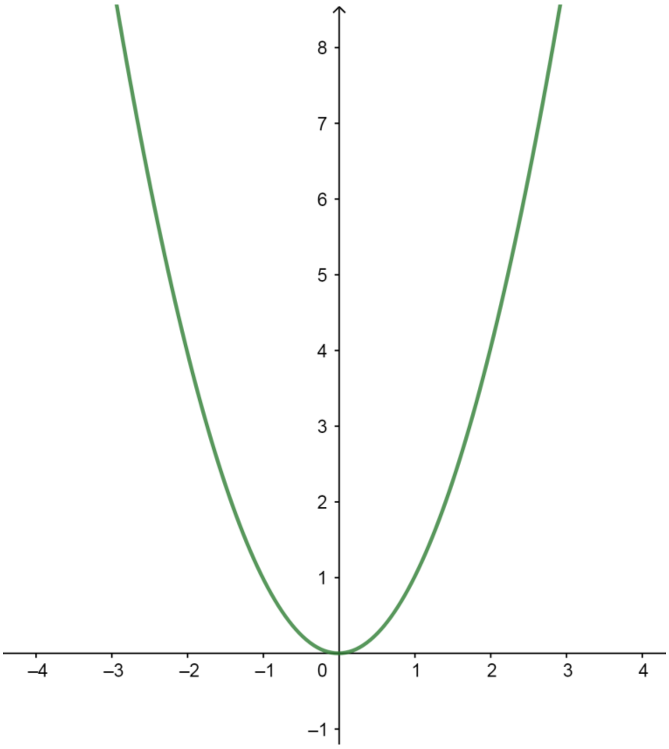


3. Степене функције

I случај: Посматрајмо прво функције облика $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = x^{2n}, n \in \boldsymbol{N}$. Ове функције имају сличне особине и сличан график. Зато ћемо детаљно размотрити квадратну функцију $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисану са $f(x) = x^2$. Квадратна функција f:

1. није „1-1“ и пресликава скуп $\boldsymbol{R}$ у скуп $\boldsymbol{R}$.
2. је парна, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.
3. је ограничена одоздо са 0 или било којим негативним реалним бројем, тј. $0 \leq x^2 = f(x)$. Она није ограничена одозго па самим тим није ограничена.
4. није периодична.

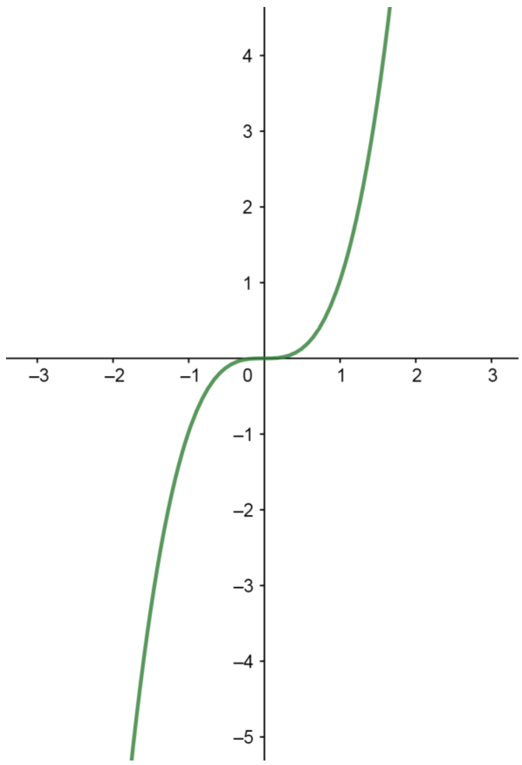
5. има нулу за $x = 0$.
6. је позитивна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
7. је строго опадајућа на $(-\infty, 0)$, а строго растућа на $(0, +\infty)$.
8. је строго конвексна на $\boldsymbol{R}$.



$f(x) = x^2$

II случај: Посматрајмо затим функције облика $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = x^{2n+1}, n \in \boldsymbol{N}$. Ове функције имају сличне особине и сличан график. Зато ћемо детаљно размотрити функцију $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисану са $f(x) = x^3$. Функција f:

1. је бијекција на $\boldsymbol{R}$.
2. је непарна функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
3. није ограничена
4. није периодична
5. узима вредност 0 ако је $x = 0$. Она је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$.
6. је растућа на свом домену.
7. је конкавна на $(-\infty, 0)$, а конвексна на $(0, +\infty)$.

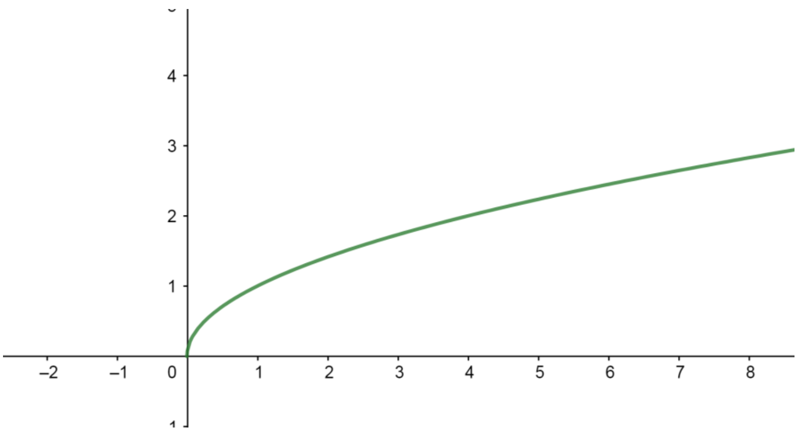


$f(x) = x^3$

III случај: Следеће су функције $f: \boldsymbol{R}_0^+ \rightarrow \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = \sqrt[2n]{x}, n \in \boldsymbol{N}$. Особине ових функција су сличне као и графици. Из тог разлога ћемо размотрити функцију $f: \boldsymbol{R}_0^+ \rightarrow \boldsymbol{R}$ дефинисану са $f(x) = \sqrt{x}$. Функција f:

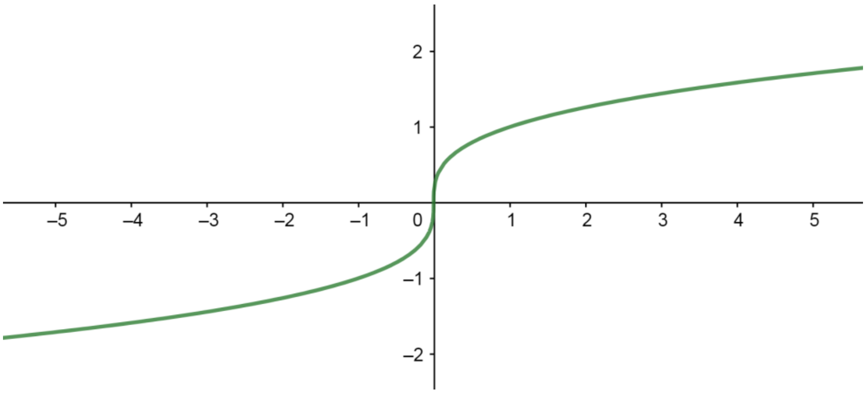
1. је „1-1“ пресликавање и пресликава $\boldsymbol{R}_0^+$ у $\boldsymbol{R}$.
2. је нити парана нити непарна.
3. је ограничена одоздо, али није ограничена одозго па није ограничена.
4. није периодична.
5. има нулу за $x = 0$.
6. је позитивна на $(0, +\infty)$.
7. је растућа на $(0, +\infty)$.
8. је конкавна на $(0, +\infty)$.

$f(x) = \sqrt{x}$



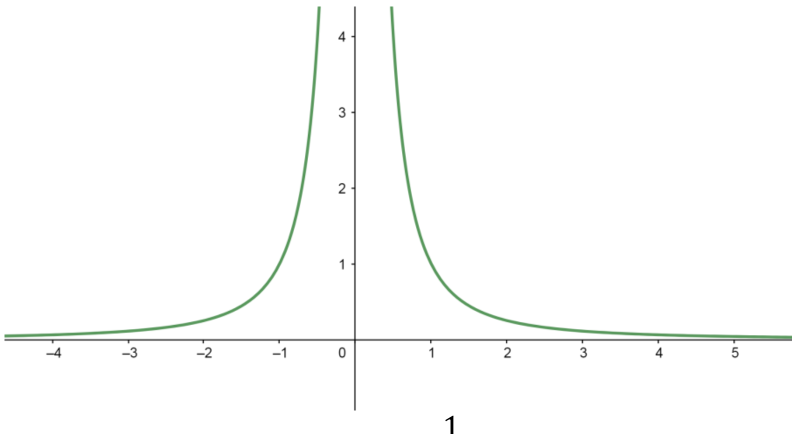
IV случај: Следећи случај степених функција су функције $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}, n \in \boldsymbol{N}$. Особине ових функција су сличне као и графици. Из тог разлога ћемо размотрити функцију $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисану са $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Функција f:

1. је бијекција на скупу $\boldsymbol{R}$.
2. је непарна, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ је $f(-x) = \sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x} = -f(x)$.
3. није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго.
4. није периодична.
5. има нулу за $x = 0$.
6. је позитивна на $(0, +\infty)$, а негативна на $(-\infty, 0)$.
7. је растућа на $\boldsymbol{R}$.
8. је конвексна на $(-\infty, 0)$, а конкавна на $(0, +\infty)$.



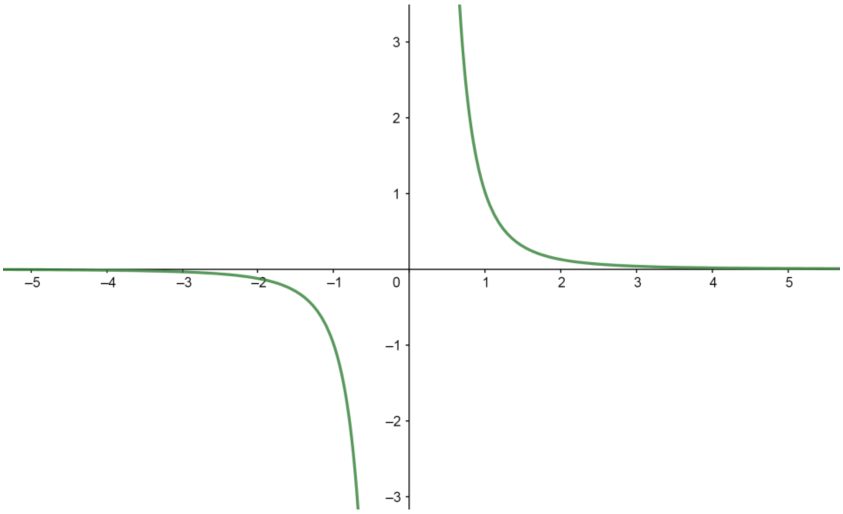
$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

V случај: Последњи случај степених функција су функције чији је изложилац негативан број. Нећемо их детаљно анализирати, али ћемо дефинисати функције у општем случају и приказати график неких таквих функција.



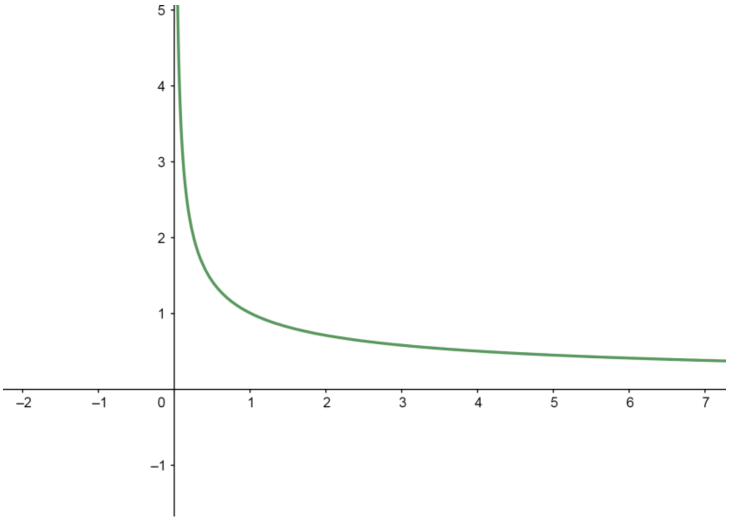
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Функције $f\colon \boldsymbol{R}\backslash\{0\} \to \boldsymbol{R}^{+}$ дефинисане са $f(x) = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}, n \in \boldsymbol{N}$.



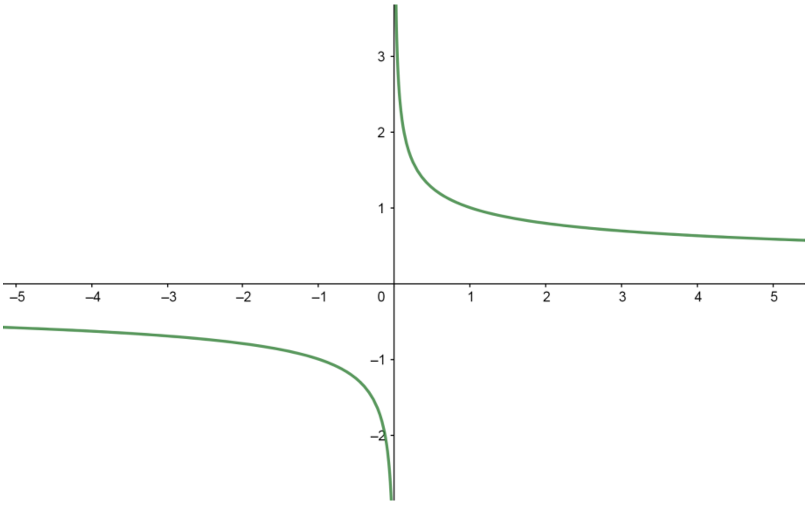
$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Функције $f: \boldsymbol{R} \backslash \{0\} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = x^{-(2n+1)} = \frac{1}{x^{2n+1}}, n \in \boldsymbol{N}$.



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Функције $f: \boldsymbol{R}^{+} \to \boldsymbol{R}^{+}$ дефинисане са $f(x) = x^{-\frac{1}{2n}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2n}}}, n \in \boldsymbol{N}$.



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

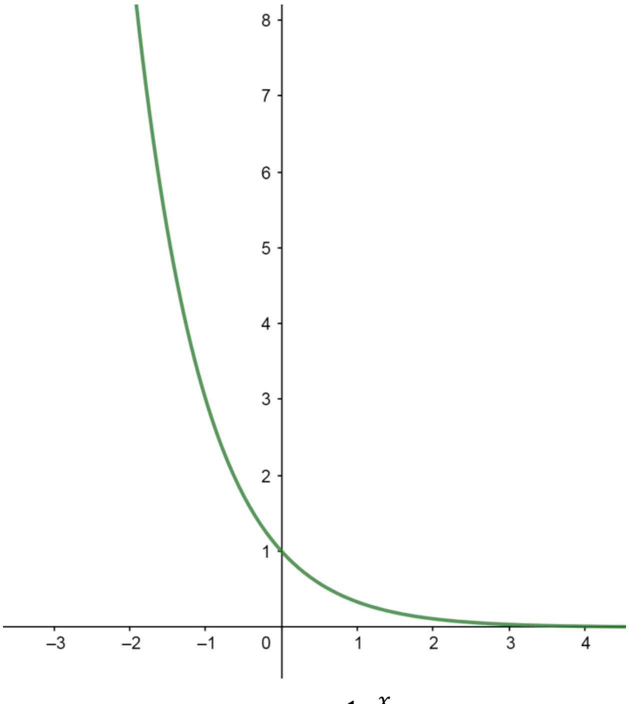
Функције $f: \boldsymbol{R}\backslash\{0\} \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = x^{-\frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2n+1}}}, n \in \boldsymbol{N}$.

4. Експоненцијална функција

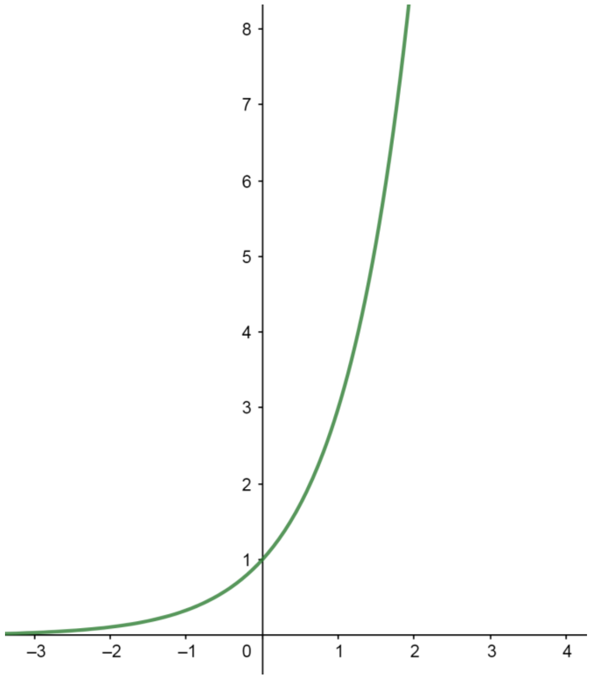
Функција $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$ дефинисана са $f(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$ се назива експоненцијалном функцијом. Функција f:

1. је „1-1“ функција и пресликава скуп реалних бројева $\boldsymbol{R}$ на скуп позитивних реалних бројева $\boldsymbol{R}^+$.
2. нити је парна нити је непарна.
3. је ограничена одоздо x −осом, али није ограничена одозго па није ограничена.
4. није периодична.
5. нема нулу и позитивна је на свом домену.
6. је монотоно растућа на $\boldsymbol{R}$ ако и само ако је $a > 1$, а монотоно опадајућа на $\boldsymbol{R}$ ако и само ако је $0 < a < 1$.
7. је конвексна на $\boldsymbol{R}$.

Специјалан случај експоненцијалне функције је функција $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$ дефинисана са $f(x) = e^x$ где је $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828 \ldots$



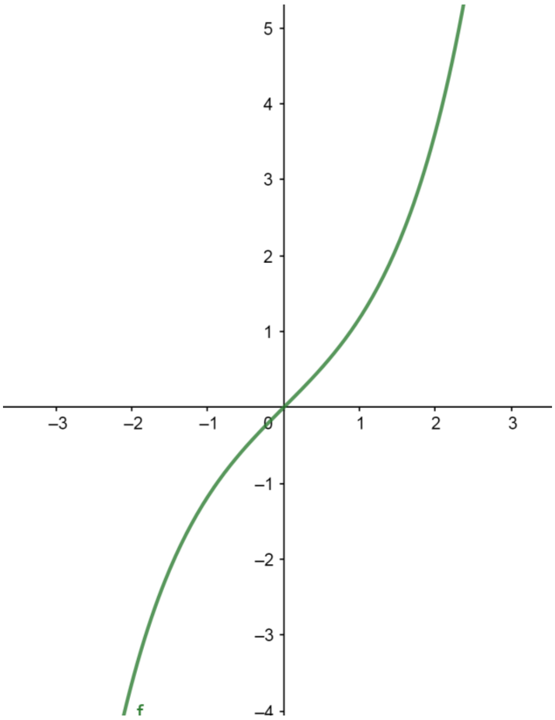
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



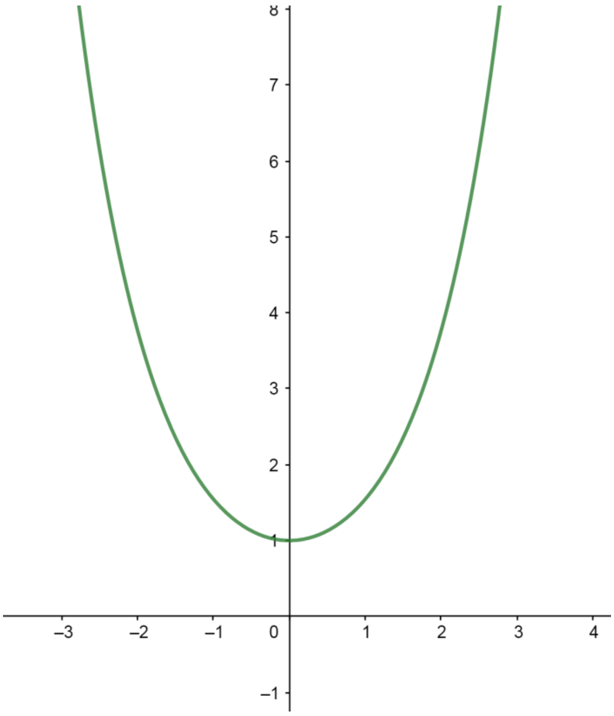
$f(x) = 3^x$

На основу дефиниције експоненцијалне функције $f(x) = e^x$ можемо дефинисати функцију $f(x) = \text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ која се назива *хиперболички синус* и функцију $f(x) = \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ која се назива *хиперболички косинус*. Функција $f(x) = \text{sh}x$ је непарна функција, а функција $f(x) = \text{ch}x$ је парна функција. Хиперболички синус и хиперболички косинус задовољавају следеће једнакости:

1. $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
2. $\text{sh}2x = 2\,\text{sh}x\,\text{ch}x$
3. $\text{ch}2x = \text{ch}^2\text{x} - \text{sh}^2 x$
4. $\text{ch}(x \pm y) = \text{ch}\,x\,\text{ch}\,y \pm \text{sh}\,x\,\text{sh}\,y$
5. $\text{sh}(\text{x} \pm \text{y}) = \text{shx}\,\text{chy} \pm \text{chx}\,\text{shy}$



$f(x) = \text{sh}x$



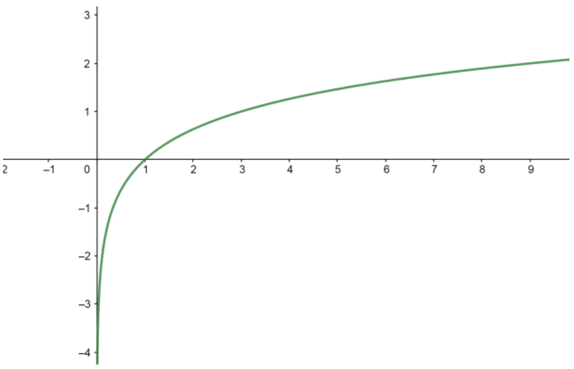
$f(x) = \text{ch}x$

5. Логаритамска функција

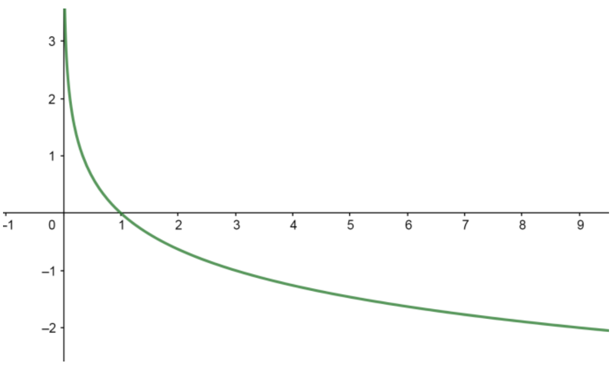
Функција $f: \boldsymbol{R}^{+} \rightarrow \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \log_a x \ (x > 0, a > 0, a \neq 1)$ се назива логаритамском функцијом. Она је инверзна функција експоненцијалне функције $g(x) = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$. Функција f:

1. је „1-1“ функција и пресликава скуп позитивних реалних бројева $\boldsymbol{R}^{+}$ на скуп реалних бројева $\boldsymbol{R}$.
2. нити је парна нити је непарна.
3. није ограничена одоздо, нити је ограничена одозго па није ограничена.
4. није периодична.
5. има нулу за $x = 0$.
6. позитивна на $(1, +\infty)$, а негативна на $(0,1)$ ако и само ако је $a > 1$, тј. позитивна на $(0,1)$, а негативна на $(1, +\infty)$ ако и само ако је $0 < a < 1$.
7. је монотоно растућа на $(0, +\infty)$ ако и само ако је $a > 1$, а монотоно опадајућа на $(0, +\infty)$ ако и само ако је $0 < a < 1$.
8. је конвексна на $(0, +\infty)$ ако и само ако је $a > 1$, а конкавна на $(0, +\infty)$ ако и само ако је $0 < a < 1$.

Специјалан случај логаритамске функције је функција природног логаритма, тј. функција $f: \boldsymbol{R}^{+} \rightarrow \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \log_e x = \ln x$ која је инверзна функција експоненцијалној функцији $f(x) = e^x$.



$f(x) = \log_3 x$



$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Особине које задовољава логаритамска функција су:

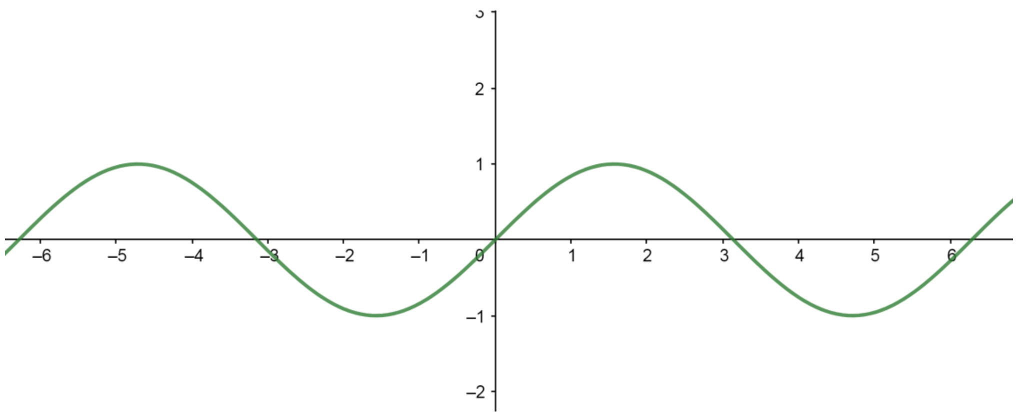
1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ за свако $x, y \in (0, +\infty)$ и свако $a > 0, a \neq 1$.
2. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ за свако $x, y \in (0, +\infty)$ и свако $a > 0, a \neq 1$.
3. $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ за свако $x \in (0, +\infty)$, свако $a > 0, a \neq 1$ и свако $n \in \boldsymbol{N}$.

5. Тригонометријске функције

1. Синус функција

Функција $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \sin x$ је синус функција. Ова функција f:

1. није „1-1“ функција и пресликава скуп реалних бројева $\boldsymbol{R}$ на $[-1,1]$.
2. је непарна функција, тј за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$.
3. је ограничена функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $|\sin x| \leq 1$.
4. је периодична функција са основним периодом $\omega = 2\pi$.
5. има бесконачно много нула на свом домену: $\sin x = 0$ за свако $x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
6. је позитивна на сваком од интервала облика $(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \boldsymbol{Z}$, а негативна на сваком од интервала облика $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
7. је монотоно растућа на сваком од интервала облика $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \boldsymbol{Z}$, а монотоно опадајућа на сваком од интервала облика $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \boldsymbol{Z}$.
8. је конкавна на сваком од интервала облика $[2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \boldsymbol{Z}$, а конвексна на сваком од интервала облика $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], k \in \boldsymbol{Z}$.

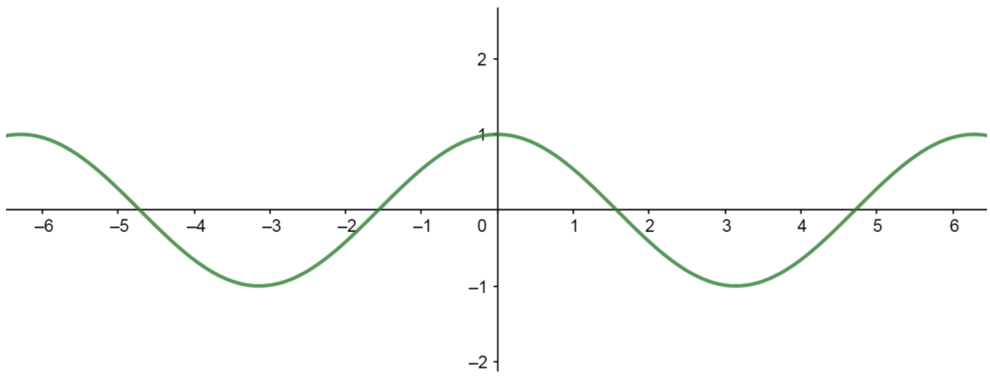


$f(x) = \sin x$

2. Косинус функција

Функција $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \cos x$ је косинус функција. Ова функција f:

1. није „1-1“ функција и пресликава скуп реалних бројева $\boldsymbol{R}$ на $[-1,1]$.
2. је парна функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.
3. је ограничена функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $|\cos x| \leq 1$.
4. је периодична функција са основним периодом $\omega = 2\pi$.
5. има бесконачно много нула на свом домену: $\cos x = 0$ за свако $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
6. је позитивна на сваком од интервала облика $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$, а негативна на сваком од интервала облика $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.
7. монотоно растућа на сваком од интервала облика $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi], k \in \boldsymbol{Z}$, а монотоно опадајућа на сваком од интервала облика $[2k\pi, (2k+1)\pi], k \in \boldsymbol{Z}$.
8. је конвексна на сваком од интервала облика $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \boldsymbol{Z}$, а конкавна на сваком од интервала облика $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in \boldsymbol{Z}$.

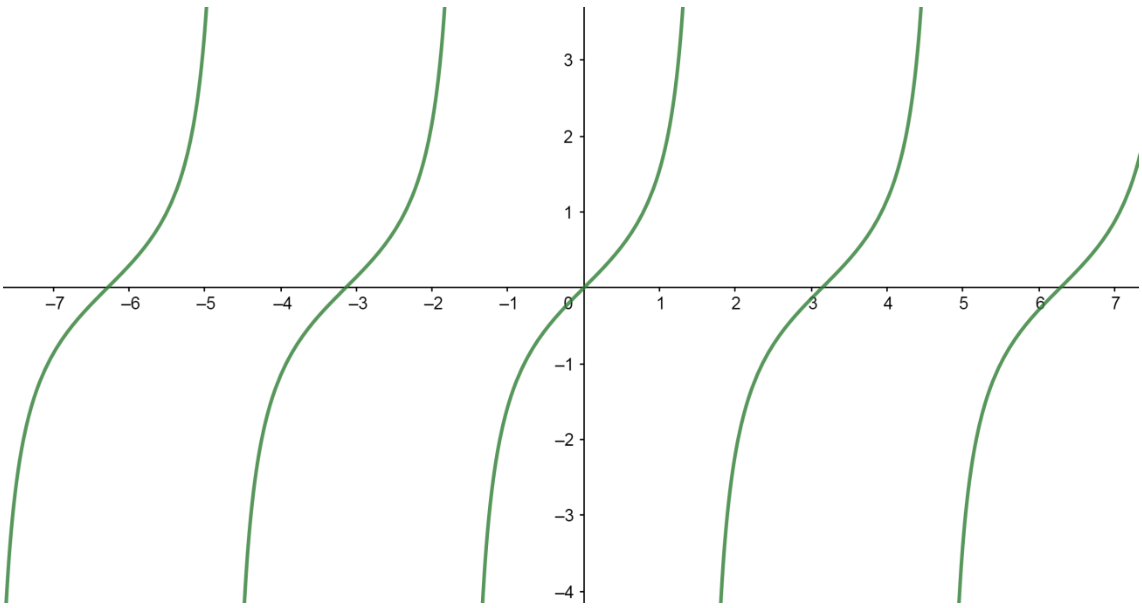


$f(x) = \cos x$

3. Тангенс функција

Функција $f: \boldsymbol{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \boldsymbol{Z}\right\} \rightarrow \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, $(\cos x \neq 0)$ је тангенс функција. Функција f:

1. није „1-1" функција и пресликава скуп $\boldsymbol{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ на $\boldsymbol{R}$.
2. је непарна функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ важи да је $f(-\mathrm{x}) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x = -f(x)$.
3. није ограничена одозго нити је ограничена одоздо па није ограничена функција.
4. је периодична функција са основним периодом $\omega = \pi$.
5. има бесконачно много нула, тј. $\operatorname{tg} x = 0$ за свако $x = k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
6. је позитивна на сваком од интервала облика $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$, а негативна на сваком од интервала облика $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$.
7. је растућа на сваком од интервала облика $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$, али није растућа на свом домену који је унија ових интервала.
8. је конвексна на сваком од интервала облика $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$, а конкавна на сваком од интервала облика $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$.

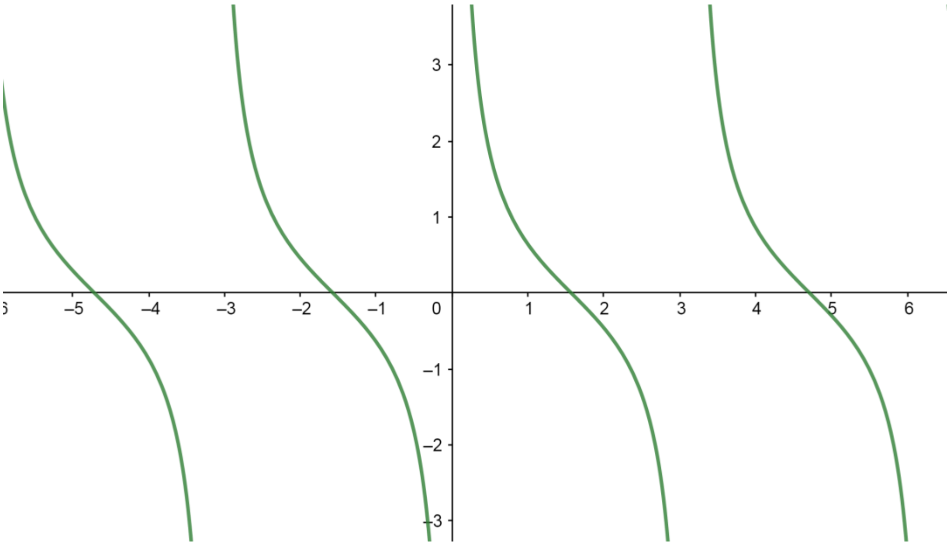


$f(x) = \operatorname{tg} x$

4. Котангенс функција

Функција $f\colon \boldsymbol{R}\backslash\{k\pi | k \in \boldsymbol{Z}\} \to \boldsymbol{R}$ дефинисана са $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$, $(\sin x \neq 0)$ је котангенс функција. Функција f:

1. није „1-1“ функција и пресликава скуп $\boldsymbol{R}\backslash\{k\pi | k \in \boldsymbol{Z}\}$ на $\boldsymbol{R}$.
2. је непарна функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}\backslash\{k\pi | k \in \boldsymbol{Z}\}$ важи да је $f(-\mathrm{x}) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -f(x)$.
3. није ограничена одозго нити је ограничена одоздо па није ограничена функција.
4. је периодична функција са основним периодом $\omega = \pi$.
5. има бесконачно много нула, тј. $\operatorname{ctg} x = 0$ за свако $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}$.
6. је позитивна на сваком од интервала облика $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$, а негативна на сваком од интервала облика $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$.
7. је опадајућа на сваком од интервала облика $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \boldsymbol{Z}$, али није опадајућа на свом домену који је унија ових интервала.
8. је конвексна на сваком од интервала облика $\left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$, а конкавна на сваком од интервала облика $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), k \in \boldsymbol{Z}$.



$f(x) = \operatorname{ctg} x$

5. Адиционе формуле тригонометријских функција

1. Функције негативног угла:

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$$
$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$$

2. Везе између синуса и косинуса:
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
3. Формуле двоструког угла:
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right)$$
4. Формуле половине угла:
$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \quad (x \neq (4k+1)\pi, k \in \boldsymbol{Z})$$
5. Адиционе формуле:
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad \left(x + y \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \boldsymbol{Z}\right)$$
$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x} \quad (x + y \neq k\pi, k \in \boldsymbol{Z})$$

6. Трансформација збира у производ тригонометријских функција:
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\cos x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

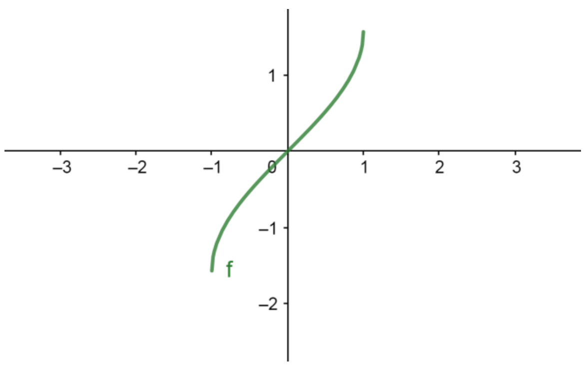
6. Инверзне тригонометријске функције

У уводном делу смо дефинисали да је функција бијекција ако и само ако је „1-1“ и „на“. Ако је функција бијекција, онда има смисла говорити о њеној инверзној функцији. Тригонометријске функције нису бијективне функције, тј. нису „1-1“ функције па самим тим не можемо дефинисати њихове инверзне функције. Али рестрикције тригонометријских функција на $\boldsymbol{R}$ јесу бијекције те можемо дефинисати њихове инверзне функције.

1. Аркус синус функција

Функција $f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ дефинисана са $f(x) = \sin^{-1}x = \text{arcsin}x$ је аркус синус функција и она је инверзна функција рестрикције синусне функције $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ дефинисане са $f(x) = \sin x$. Функција f:

1. је „1-1“ функција и пресликава $[-1,1]$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. је непарна функција, тј. за свако $x \in [-1,1]$ важи да је $f(-x) = \text{arcsin}(-x) = -\text{arcsin}x = -f(x)$.
3. је ограничена функција, тј. за свако $x \in [-1,1]$ важи да је $|\text{arcsin}x| \leq \frac{\pi}{2}$.
4. је периодична функција.
5. има нулу за $x = 0$.
6. је позитивна на $[0,1]$, тј. негативна на $[-1,0]$.
7. је монотоно растућа на свом домену.
8. је конкавна на $[-1,0]$, а конвексна на $[0,1]$.

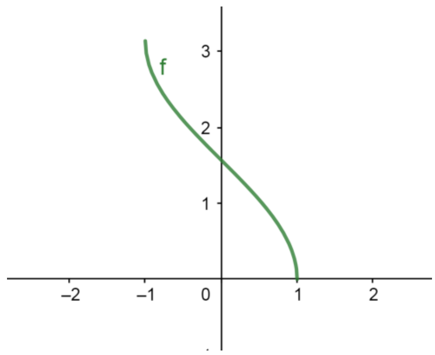


$f(x) = \text{arcsin}x$

2. Аркус косинус функција

Функција $f\colon[-1,1] \to [0,\pi]$ дефинисана са $f(x) = \cos^{-1}x = \arccos x$ је аркус косинус функција и она је инверзна функција рестрикције косинусне функције $f\colon[0,\pi] \to [-1,1]$ дефинисане са $f(x) = \cos x$. Функција f:

1. је „1-1“ функција и пресликава $[-1,1]$ на $[0,\pi]$.
2. је нити парна нити непарна функција. За свако $x \in [-1,1]$ важи да је $f(-x) = \arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
3. је ограничена функција, тј. за свако $x \in [-1,1]$ важи да је $0 \leq \arccos x \leq \pi$.
4. је периодична функција.
5. има нулу за $x = \frac{\pi}{2}$.
6. је позитивна на $[-1,1]$.
7. је монотоно опадајућа на свом домену.
8. је конвексна на $[-1,0]$, а конкавна на $[0,1]$.

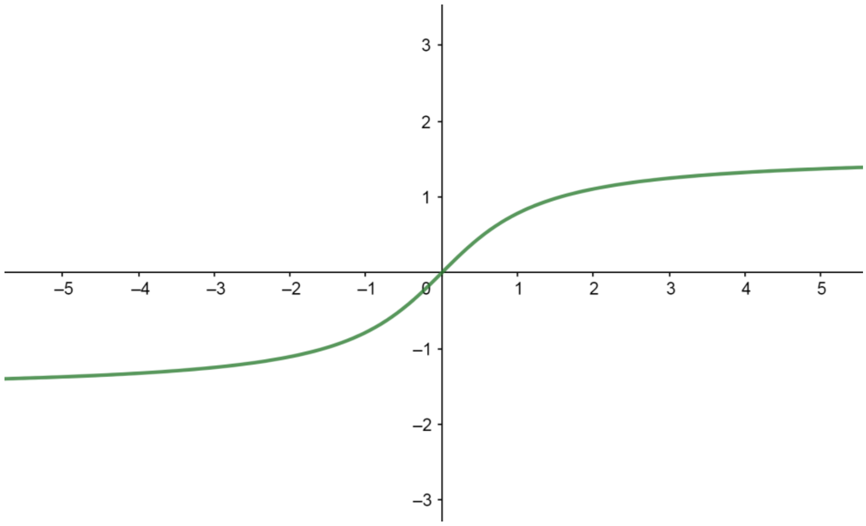


$f(x) = \arccos x$

3. Аркус тангенс функција

Функција $f\colon \boldsymbol{R} \to \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ дефинисана са $f(x) = \mathrm{arctg}x$ је аркус тангенс функција и она је инверзна функција рестрикције тангес функције $f\colon\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = \mathrm{tg}\,x$. Функција f:

1. је „1-1“ функција и пресликава $\boldsymbol{R}$ на $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
2. је непарна функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $f(-x) = \mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x = -f(x)$.
3. је ограничена функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $|\arctan x| \leq \frac{\pi}{2}$.
4. је периодична функција.
5. има нулу за $x = 0$.
6. је позитивна на $(0,+\infty)$, а негативна на $(-\infty,0)$.
7. је монотоно растућа на $\boldsymbol{R}$.
8. је конкавна на $(0,+\infty)$, а конвексна на $(-\infty,0)$.



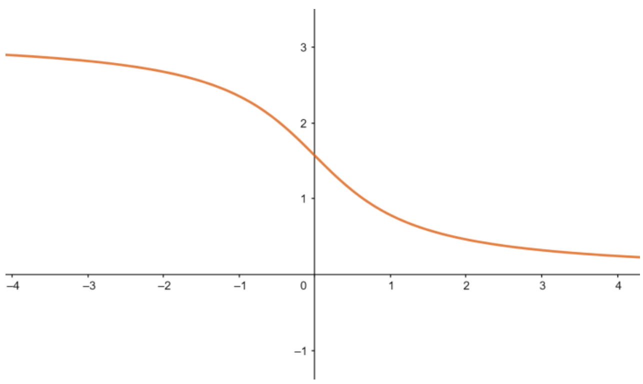
$f(x) = \text{arctg}x$

4. Аркус котангенс функција

Функција $f: \boldsymbol{R} \to (0, \pi)$ дефинисана са $f(x) = \text{arcctg}x$ је аркус котангенс функција и она је инверзна функција рестрикције котангес функције $f: (0, \pi) \to \boldsymbol{R}$ дефинисане са $f(x) = \text{ctg}\, x$. Функција f:

1. је „1-1" функција и пресликава $\boldsymbol{R}$ на $(0, \pi)$.
2. је нити непарна нити непарна функција. За свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $f(-x) = \text{arcctg}(-x) = \pi - \text{arcctg}x$.
3. је ограничена функција, тј. за свако $x \in \boldsymbol{R}$ важи да је $0 \leq \text{arcctg}x \leq \pi$.
4. је периодична функција.
5. нема нуле на свом домену.
6. је позитивна на $\boldsymbol{R}$.
7. је монотоно опадајућа на $\boldsymbol{R}$.
8. је конвексна на $(0, +\infty)$, а конкавна на $(-\infty, 0)$.

$f(x) = \text{arcctg}x$



Функционалне једначине елементарних функција

У претходом делу смо се упознали са елементарним математичким функцијама. Видели смо неке њихове особине, начин решавања и скицирање графика. За претходне функције важи следећа дефиниција:

Дефиниција:

1. Константна, линеарна, степена, експоненцијална, логаритамска, тригонометријске и инверзне тригонометријске функције су елементарне функције.
2. Ако су f и g елементарне функције, онда су и $f+g; f-g; f\cdot g; \frac{f}{g}; f\circ g$ такође елементарне функције на области на којој су дефинисане.
3. Све елементарне функције се добијају коначном применом претходних правила.

У математици се често срећемо са функционалним једначинама, а да тога нисмо свесни. Неке од основних особина функције $f\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{R})$ су дефинисане уз помоћ функционалних једначина:

1. одређивање парности функције $f(x) = f(-x)$ за свако $x \in \boldsymbol{A}$ или
2. периодичности функције где постоји $\omega \in \boldsymbol{R}$ такав да је $f(x+\omega) = f(x)$ за свако $x \in \boldsymbol{A}$ или
3. диференциабилност функције f (Функција f је диференцијабилна у тачки $x_0 \in \boldsymbol{A}$ ако постоји коначна гранична вредност $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Тај лимес се назива изводом функције f у тачки x_0 и обележава $f'(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$)

су изражене уз помоћ функционалних једначина. Функционална једначина је једначина у којој је непозната променљива представљена функцијом. Постоји много начина за решавање функционалних једначина, али се у великом броју случајева оне не могу свести на алгебарске једначине већ се морају применити неке друге методе. У наставку ћемо показати неке основне методе за решавање функционалних једначина, а затим ћемо се позабавити и компликованијим методама. Покушаћемо да линеарну, степену, експоненцијалну и логаритамску функционалну једначину решимо уз помоћ Кошијевих метода, а тригонометријске функционалне једначине да решимо уз помоћ Даламберових метода.

Први примери

1. Дате су функционалне једначине $f(x+1)=3x+2$ и $g(2x+3)=2-3x$. Одредити:

а) $f(x)$ и $g(x)$

б) $f\circ g$

в) $f^{-1}\circ g$

Решење:

а) Уводимо смене:

$$\begin{aligned} x+1&=t\\ x&=t-1\\ f(t)&=3(t-1)+2\\ f(t)&=3t-3+2\\ f(t)&=3t-1\\ f(x)&=3x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+3&=m\\ 2x&=m-3\\ x&=\frac{m-3}{2}\\ g(m)&=2-3\cdot\frac{m-3}{2}\\ g(m)&=2-\frac{3m-9}{2}\\ g(m)&=\frac{4-3m+9}{2}\\ g(m)&=\frac{13-3m}{2}\\ g(x)&=\frac{13-3x}{2} \end{aligned}$$

б) $(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{13-3x}{2}\right)=3\cdot\frac{13-3x}{2}-1=\frac{39-9x}{2}-1=\frac{39-9x-2}{2}=\frac{37-9x}{2}$ за свако $x\in\boldsymbol{R}$.

в) $f^{-1}(x)=?$
$(f^{-1}\circ f)(x)=x$
$f^{-1}\big(f(x)\big)=x$
$f^{-1}(3x-1)=x$
смена: $3x-1=t$
$x=\frac{t+1}{3}$

$$f^{-1}(t)=\frac{t+1}{3}$$
$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{3}$$

$(f^{-1}\circ g)(x)=f^{-1}\big(g(x)\big)=f^{-1}\left(\frac{13-3x}{2}\right)=\frac{\frac{13-3x}{2}+1}{3}=\frac{\frac{13-3x+2}{2}}{3}=\frac{15-3x}{6}=\frac{5-x}{2}$ за свако $x\in\boldsymbol{R}$.

2. Ако је $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$ одредити $f(5)$ и $f(3)$. $(x\neq -2, x\neq 1)$

Решење: смена $\frac{3x-1}{x+2}=t$

$3x-1=tx+2t$
$3x-tx=2t+1$
$x(3-t)=2t+1$
$x=\frac{2t+1}{3-t}$, $t\neq 3$ јер би у супротном $\frac{3x-1}{x+2}=3 \;\Rightarrow 3x-1=3x+6 \;\Rightarrow -1=6$ што нема смисла.

$$f(t)=\frac{\frac{2t+1}{3-t}+1}{\frac{2t+1}{3-t}-1}=\frac{\frac{2t+1+3-t}{3-t}}{\frac{2t+1-3+t}{3-t}}=\frac{t+4}{3t-2}$$

$f(x)=\frac{x+4}{3x-2}$ за свако $x\in \boldsymbol{R}\setminus\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$$f(5)=\frac{5+4}{15-2}=\frac{9}{13}$$

3. Решити функционалну једначину $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right)=x\ (x\neq 2, x\neq -1)$.

Решење: смена $\frac{x-2}{x+1}=t \;\Rightarrow \frac{x+1}{x-2}=\frac{1}{t}$

$x-2=tx+t$
$x-tx=t+2$
$x(1-t)=t+2$

$$x=\frac{t+2}{1-t}$$

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t}$$

Ако уместо t ставимо $\frac{1}{t}$ добијамо $f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{\frac{1}{t}+2}{1-\frac{1}{t}}=\frac{\frac{1+2t}{t}}{\frac{t-1}{t}}=\frac{1+2t}{t-1}$. Имамо систем од две једначине са две непознате:

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{t+2}{1-t} \qquad (-2)$$
$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}$$

$$-4f(t)-2f\left(\frac{1}{t}\right)=-2\,\frac{t+2}{1-t}$$
$$f(t)+2f\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1+2t}{t-1}$$
$$-3f(t)=\frac{-2t-4}{1-t}+\frac{1+2t}{t-1}$$
$$-3f(t)=\frac{(-2t-4)(t-1)+(1+2t)(1-t)}{(1-t)(t-1)}$$

$$-3f(t)=\frac{(1-t)(4t+5)}{(1-t)(t-1)}$$
$$-3f(t)=\frac{4t+5}{t-1}$$
$$f(t)=\frac{4t+5}{3-3t}$$

$f(x)=\frac{4x+5}{3-3x}$ за свако $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{1\}$.

4. Одредити област дефинисаности функционалне једначине $f(x^2) = x$.

смена $x^2 = t, t \geq 0$
$x = \sqrt{t}$
$f(t) = \sqrt{t}$
$f(x) = \sqrt{x}$ за свако $x \in \boldsymbol{R}_0^+$.

Карактеризација линеарне функције

Посматрајмо функцију $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ дефинисану са $f(x) = cx$ где је $c \in \boldsymbol{R}$ константа. Захваљујући дистрибутивности множења у односу на сабирање важи да функција помножена константом задовољава:

$$f(x+y) = c \cdot (x+y) = \underbrace{c \cdot x + c \cdot y}_{} = f(x) + f(y)$$

$$f(x) = c \cdot x$$
$$f(y) = c \cdot y$$

Теорема 1 (Прва Кошијева једначина)[2]: Нека је $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ непрекидна функција таква да за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

Тада за неко $c \in \boldsymbol{R}$ је $f(x) = c \cdot x$.

Доказ: 1. Посматрајмо случај када је $x = y = 0$. Тада је $f(0) = 2 \cdot f(0)$ одакле следи да је $f(0) = 0$.

2.Затим ћемо посматрати случај када је $y = -x$. Тада је

$0 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x)$ што је еквивалентно са $f(-x) = -f(x)$.

3. На основу индукције следи да је:

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$$

4. Ако ставимо да је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$ добија се да за сваки природан број n важи $f(nx) = nf(x)$

[2] Француски математичар *Augustin Louis Cauchy* 1789.-1857.

Такође, ако у претходну једнакост уместо x ставимо $\frac{x}{n}$, добијамо да важи $f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x)$

На крају, ако у једнакости уместо x ставимо mx, онда добијамо да за $m, n \in \boldsymbol{N}$ важи

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = f\left(\frac{1}{n}(mx)\right) = \frac{1}{n}f(mx) = \frac{m}{n}f(x)$$

Захваљујући непарности функције следи да је $f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x)$.

На крају, можемо закључити да за свако $r = \frac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$ важи да је

$$f(rx) = rf(x)$$

Ако ставимо да је $f(1) = c$ тада за сваки рационалан број r важи

$$f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = cr$$

5. Остало је још да размотримо случај када је i ирационалан број. Тада постоји низ рационалних бројева $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = i$. Због непрекидности функције f важи $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} r_n\right) = f(i)$.

Онда је и

$$f(i) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} (r_n \cdot c) = c \cdot \lim_{n\to\infty} r_n = c \cdot i$$

чиме је теорема доказана.

Последица: Непрекидна реална функција f је решење функционалне једначине

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$ ако и само ако је $f(x) = cx$ за неко $c \in \boldsymbol{R}$.

Примери:

1. Наћи све функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, такве да за свако $x \in \boldsymbol{R}$ су испуњени следећи услови:

1) $f(x+1) = f(x) + 1$
2) $f(x^2) = (f(x))^2$

Решење: Из једначине (1) за свако $x \in \boldsymbol{R}$ и $n \in \boldsymbol{N}$ важи $f(x+n) = f(x) + n$. Нека је $x = \frac{p}{q}$, где су $p, q \in \boldsymbol{N}$. Тада је:

$$f((x+q)^2) = \big(f(x+q)\big)^2$$
$$f(x^2 + 2qx + q^2) = \big(f(x+q)\big)^2$$
$$f(x^2 + 2xq + q^2) = \big(f(x+q)\big)^2$$

(3) $\Rightarrow 2p + q^2 + f(x^2) = (f(x) + q)^2$

$$2p + q^2 + f(x^2) = \left(f(x)\right)^2 + 2qf(x) + q^2$$

$$f(x) = \frac{p}{q} = x$$

Једнакост важи за сваку функцију $f(x) = x$.

2. Наћи све непрекидне функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такве да је $f(x) + f(y) + f(z) = 0$ за све $x, y, z \in \boldsymbol{R}$ за које је $x + y + z = 0$.

Решење: За $x = y = z = 0$ добијамо да је $f(0) = 0$. За $y = -x$ и $z = 0$ и користећи да је $f(0) = 0$ важи да је $f(-x) = -f(x)$. Коначно за $z = -x - y$ добијамо:

$$f(x) + f(y) + f(-x-y) = 0$$
$$f(x) + f(y) - f(x+y) = 0$$
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

тј. решење задовољава прву Кошијеву једначину. На основу теореме 1, решење задатка је линеарна функција $f(x) = cx, c \in \boldsymbol{R}, c = const$.

Карактеризација експоненцијалне функције

Теорема 2 (Друга Кошијева једначина): Непрекидна функција $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ је решење функционалне једначине

$$f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (2)$$

за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$ ако и само ако је $f(x) \equiv 0$ или је $f(x) = a^x$ за $a \in \boldsymbol{R}^+$.

Доказ 1: Прво ћемо одредити знак функције $f(x)$ за било који реалан број x. Из једнакости (2) можемо закључити да је

$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ одакле следи да је $f(x) \geq 0$. Дакле, функција f је ненегативна функција за свако $x \in \boldsymbol{R}$.

Ако је $f(x) = 0$ за неко $x = x_0$ онда важи да је

$$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$$

Посматрајмо случај када је $f(x) \neq 0$. Како је функција $f(x)$ позитивна, функција $g(x) = \ln f(x)$ је добро дефинисана. Тада се почетна једначина (2) може представити у својству функције g:

$$g(x) + g(y) = g(x+y), \quad \forall x, y \in \boldsymbol{R}$$

што на основу прве Кошијеве једначине важи $g(x) = cx$. Ако се вратимо у почетну функцију f налазимо да важи $f(x) = a^x$ где је $a = e^c$.

Претходни доказ претпоставља да је решење линеарне Кошијеве једначине познато. Међутим, показаћемо још један доказ теореме 2 који не зависи од решења линеарне Кошијеве једначине.

Доказ 2: Претпоставимо да $f(x)$ идентички није једнако 0, тј. да постоји неко $x \in \boldsymbol{R}$ такво да је $f(x) \neq 0$. Стављајући да је $x = y = 0$ у једначину (2) добијамо:

$$f(0) = (f(0))^2 \ \Rightarrow \ f(0)(f(0)-1) = 0 \ \Rightarrow \ f(0) = 0 \ \vee \ f(0) = 1$$

Ако би било да је $f(0) = 0$, онда је $f(x) = f(x+0) = f(x) \cdot f(0) = 0$ за свако $x \in \boldsymbol{R}$ што је контрадикција са претпоставком. Закључујемо да је $f(0) = 1$.

Такође, ако је $x = -y$ онда је

$$f(0) = f(x)f(-x) \ \Rightarrow \ f(-x) = \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$$

Индукцијом можемо доказати за сваки природан број $n > 0$ важи тврђење:

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$$

У првом доказу смо показали да тврђење важи за $n = 2$. Претпоставимо да тврђење важи и за неко n_0:

$$f\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0}\right) = f(x_1)f(x_2)\cdots f\left(x_{n_0}\right)$$

и показаћемо да тврђење важи и за $n_0 + 1$

$$\begin{aligned} f\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0} + x_{n_0+1}\right) &= f\left(\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0}\right) + x_{n_0+1}\right) = \\ &= f\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0}\right) f\left(x_{n_0+1}\right) = \\ &= f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) f\left(x_{n_0+1}\right) \end{aligned}$$

Стављајући да је $x_i = x$ за свако i, следи да је $f(nx) = (f(x))^n$.

Сада хоћемо да покажемо да тврђење важи и за рационалан број $x = \frac{my}{n}, m \in \boldsymbol{N},\ n \in \boldsymbol{N}^+$.

$$f(my) = f\left(\frac{my}{n}\right)^n \ \Rightarrow \ f(y)^m = f\left(\frac{m}{n}y\right)^n \ \Rightarrow \ f\left(\frac{m}{n}y\right) = f(y)^{m/n}$$

Даље је $f\left(-\frac{m}{n}y\right) = f(y)^{-\frac{m}{n}}$. До сада смо доказали да теорема важи за

$f(qz) = f(z)^q,\ \forall z \in \boldsymbol{R}, q \in \boldsymbol{Q}$.

Ако је $z = 1$, $f(q) = a^q$ где је $a \equiv f(1)$.

Ако је r ирационалан број, тада постоји низ рационалних бројева $(q_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ такав да је $\lim_{n\to\infty} q_n = r$. Из особине низа $(q_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ следи да је $f(q_n) = a^{q_n}$. А како је функција f непрекидна, следи:

$f(r) = f\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(q_n) = \lim_{n\to\infty} a^{q_n} = a^r$ чиме је теорема доказана.

Пример: Решити функционалну једначину $2f(x+y) + f(x-y) = f(x)(2e^y + e^{-y})$ за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$ у скупу функција $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$.

Решење: Увешћемо следеће смене:

$x = 0, y = t$
$x = t, y = 2t$
$x = t, y = -2t$

Добијамо систем једначина:

$2f(t) + f(-t) = a(2e^t + e^{-t})$
$2f(3t) + f(-t) = f(t)(2e^{2t} + e^{-2t})$
$2f(-t) + f(3t) = f(t)(2e^{-2t} + e^{2t})$

где је $a = f(0)$. Елиминацијом $f(3t)$ и $f(-t)$ из система једнчина, добијамо да је

$6f(t) = 3a(2e^t + e^{-t}) - 3f(t)e^{-2t}$

одакле је $f(t) = ae^t$ решење почетне једначине.

Карактеризација логаритамске функције

Теорема 3 (Трећа Кошијева једначина): Непрекидна функција $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ је решење функционалне једначине

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad x, y > 0 \qquad (3)$$

ако и само ако је $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = \log_a x$ за неко $a > 0$ и $a \neq 1$.

Доказ 1: Нека је $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ функција дефинисана са $g(x) = f(e^x)$, $e^x: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$ за свако $x \in \boldsymbol{R}$. Обзиром да је функција f непрекидна, онда је и функција g непрекидна. Тада је:

$$g(\ln x) + g(\ln y) = g(\ln(xy)) = g(\ln x + \ln y)$$

или

$$g(w_1) + g(w_2) = g(w_1 + w_2).$$

На основу прве Кошијеве једначине, решење последње функционалне једначине је $g(w) = cw$ што враћањем на фукцију f добијамо $f(x) = c\ln x = \frac{\ln x}{\ln \alpha} = \log_a x$ где је $c = \frac{1}{\ln a}$.

Доказ претходне теореме се ослања на чињеницу да је решење друге Кошијеве једначине познато. Зато ћемо још једном доказати теорему чији доказ не зависи од решења друге Кошијеве једначине.

Доказ 2: Стављајући да је $x = y = 1$ у почетну једначину (3), добијамо:

$$f(1) = 2f(1) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0.$$

Такође, ако је $y = \frac{1}{x}$ важи:

$$f(1) = f(x \cdot x^{-1}) = f(x) + f(x^{-1}) \quad \Rightarrow \quad f(x^{-1}) = -f(x).$$

Индукцијом ћемо показати да тврђење важи и за производ коначно много промењљивих $x_1, x_2, \dots, x_n, n > 0$.

Претпоставимо да за $n > 0$ важи:

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n).$$

За $n = 2$ тврђење важи. Покажимо да тврђење важи и за неко n_0:

$$f\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0}\right) = f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f\left(x_{n_0}\right).$$

Индукцијом доказујемо да тврђење важи и за n_{0+1}:

$$\begin{aligned} f\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0} x_{n_0+1}\right) &= f\left(\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0}\right) x_{n_0+1}\right) = \\ &= f\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0}\right) + f\left(x_{n_0+1}\right) = \\ &= f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f\left(x_{n_0}\right) + f\left(x_{n_0+1}\right). \end{aligned}$$

Стављајући да је $x_i = x$ важи $f(x^n) = nf(x)$.

Ако ставимо да је $x = y^{\frac{m}{n}}, m, n \in \boldsymbol{N}$ онда важи:

$$f(y^m) = nf\left(y^{\frac{m}{n}}\right) \;\Rightarrow\; mf(y) = nf\left(y^{\frac{m}{n}}\right) \;\Rightarrow\; f\left(y^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n} f(y).$$

У претходној једнакости смо доказали да тврђење важи и за било који рационалан број $q \in \boldsymbol{Q}$

$$f(y^q) = qf(y) \qquad y \in \boldsymbol{R}, q \in \boldsymbol{Q}.$$

Остало је да покажемо да тврђење важи и за ирационалан број r. У том случају постоји низ рационалних бројева $(q_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ такав да је $\lim_{n \to \infty} q_n = r$. Из дефиниције низа $(q_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ важи:

$$f(y^{q_n}) = q_n f(y),$$

а из непрекидности функције f следи:

$$f(y^r) = \lim_{n\to\infty} f(y^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} q_n f(y) = rf(y).$$

Коначно, ако ставимо да је $y = a = const$ и $x = a^r$, добијамо облик функције f:

$$f(x) = f(a)\log_a x = \log_b x$$

где је $f(a) = \frac{1}{\log_a b}$.

Карактеризација степене функције

Теорема 4 (Четврта Кошијева једначина): Непрекидна функција $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ је решење функционалне једначине

$$f(xy) = f(x)f(y) \text{ за свако } x, y \in \boldsymbol{R}^+ \qquad (4)$$

ако и само ако је $f(x) \equiv 0$ или је $f(x) = a^x$ за неко $a \in \boldsymbol{R}$.

Доказ 1: Прво докажимо да је $f(x) > 0$ за свако $x \neq 0$. Из једначине (4) видимо да је $f(x) = f(\sqrt{x})^2$ што имплицира да је $f(x) \geq 0$, за свако $x \in \boldsymbol{R}^+$. Ако постоји неко $x_0 \neq 0$ такво да је $f(x_0) = 0$ онда

$$f(x) = f\left(\frac{x}{x_0}x_0\right) = f\left(\frac{x}{x_0}\right)f(x_0) = 0$$

за свако $x \in \boldsymbol{R}^+$ чему се добија тривијално решење. Пошто тражимо и нетривијално решење функције f, претпоставићемо да је $f(x) > 0$ за $\forall x \in \boldsymbol{R}^+$.

Дефинисаћемо функцију $g(x) = \ln f(x)$. Почетна једнакост постаје изражена функцијом g:

$$g(x) + g(y) = g(xy).$$

Последња једнакост има два решења, $g(x) = 0$ или $g(x) = \log_\alpha x = \frac{\ln x}{\ln y}$ на основу чега је

$$f(x) = 1 \text{ или } f(x) = e^{g(x)} = x^c$$

где је $c = \frac{1}{\ln \alpha} \neq 0$.

Као и у претходним доксима, ослањали смо се на чињеницу да је познато решење треће Кошијеве једначине. Зато ћемо понудити доказ који је независан од решења треће Кошијеве једначине.

Доказ 2: Стављаући да је $x = y = 1$ у једначину (4), добијамо:

$$f(1) = f(1)^2 \quad \Rightarrow \; f(1)(f(1) - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0 \; \vee \; f(1) = 1$$

одакле следи да је $f(1) = 1$.

Такође, ако је $y = \frac{1}{x}$ за $x \neq 0$, онда је

$$f(1) = f(x)f(x^{-1}) \quad \Rightarrow \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

Претпоставимо да тврђење важи за неко $n > 0$:

$$f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n).$$

Тада је индукцијом за $n = 2$ једначина добро дефинисана. Претпоставимо да је добро дефинисана и за неко $2 < n_0 < n$.

$$f\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0}\right) = f(x_1)f(x_2) \cdots f\left(x_{n_0}\right)$$

и докажимо да важи и за $n_0 + 1$:

$$\begin{aligned} f\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0} x_{n_0+1}\right) &= f\left(\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0}\right) x_{n_0+1}\right) = \\ &= f\left(x_1 x_2 \cdots x_{n_0}\right) f\left(x_{n_0+1}\right) = \\ &= f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n) f\left(x_{n_0+1}\right). \end{aligned}$$

Ако ставимо да је $x_i = x$ за $\forall i$ онда важи $f(x^n) = f(x)^n$.

Ако ставимо да је $x = y^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in \boldsymbol{N}, n \neq 0$, онда тврђење важи и на скупу рационалних бројева:

$$f(y^m) = f\left(y^{\frac{m}{n}}\right)^n \quad \Rightarrow \; f\left(y^{\frac{m}{n}}\right) = f(y)^{\frac{m}{n}}.$$

Такође важи $f\left(y^{-\frac{m}{n}}\right) = f(y)^{-\frac{m}{n}}$ и да је $f(y^q) = f(y)^q$ за свако $y \in \boldsymbol{R}_+, q \in \boldsymbol{Q}$.

Остало је још да докажемо да тврђење важи и на скупу ирационлних бројева. Нека је $r \in \boldsymbol{R}$ ирационалан број. Тада постоји низ рационалних бројева $(q_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ такав да је $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = r$. Тврђење важи на скупу рационалних бројева, па је:

$$f(y^{q_n}) = f(y)^{q_n},$$

а из непрекидности функције f следи:

$$f(y^r) = \lim_{n\to\infty} f(y^{q_n}) = \lim_{n\to\infty} f(y)^{q_n} = f(y)^r.$$

На крају, ако ставимо да је $y = a = const$ и $x = a^r$, онда добијамо облик функције f:

$$f(x) = f(a)^{\log_a x}.$$

Ако је $f(a) = 1$, онда је $f(x) = 1$. Ако је $f(a) \neq 1$, онда ћемо дефинисати константу c таква да је $f(a) = a^c$ при чему је:

$$f(x) = x^c, \quad c \neq 0.$$

Пример: Да ли функција $\operatorname{sgn}(x)$ која задовољава једнакост $\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y)$ може бити решење претходне функционалне једначине?

Решење:

Функција $\operatorname{sgn}(x)$ није непрекидна функција. Непрекидност функције је главни услов да би функција задовољавала четврту Кошијеву једначину. На основу тога функција $\operatorname{sgn}(x)$ не може бити решење четврте Кошијеве једначине.

Карактеризација неких класа рационалних функција

Могуће је карактерисати x^k, за неке вредности k, посебним функционалним једначинама:

Тврђење 1: Непрекидна функција $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ решење је функционалне једначине:

$$(f(x)+f(y))(f(u)+f(v)) = f(xu-yv)+f(xv+yu) \quad x,y,u,v \in \boldsymbol{R} \quad (5)$$

ако и само ако важи једно од решења:

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = \frac{1}{2}$
3. $f(x) = x^2$.

Доказ: Ако претпоставимо да је f константна функција, тј. $f(x) = c$ добија се

$4c^2 = 2c \quad \Leftrightarrow \quad 2c(2c-1) = 0$ одакле је $c = 0$ или $c = \frac{1}{2}$.

Претпоставимо да функција f није константна функција. Ако у једначину (5) ставимо $x = y = 0$, тада:

$$2f(0)\big(f(u)+f(v)\big) = 2f(0) \quad \Leftrightarrow \quad 2f(0)(f(u)+f(v)-1) = 0.$$

Ако је $f(0) \neq 0$, тада је за $u = v, 2f(u) = 1$, па би функција f била константна, што је контрадикција. Дакле, за неконстантно решење је $f(0) = 0$.

Ако у једначину (5) ставимо $u = 1, y = v = 0$ добија се:

$$(f(x)+f(0))(f(1)+f(0)) = f(x)+f(0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)f(1) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 1,$$

јер f није константна нула функција.

Ако се у једначину (5) стави $u = v = 1, x = 0$ и $y = -x$ тада је:

$$(f(0)+f(-x))(f(1)+f(1)) = f(x)+f(-x) \quad \Leftrightarrow \quad 2f(-x) = f(x)+f(-x)$$
$$\Leftrightarrow \quad f(-x) = f(x)$$

на основу чега закључујемо да је функција f парна. Због парности функције f довољно је посматрати случај за позитивне вредности аргумената.

Ако у једначину (5) ставимо $y = v = 0$ добија се да је за позитивне вредности x и u:

$$(f(x)+f(0))(f(u)+f(0)) = f(xu)+f(0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)f(u) = f(xu).$$

На основу Четврте Кошијеве једнакости, добијамо $f(x) = x^a$. Тада је за $x = y = u = v > 0$

$$(x^a+x^a)(x^a+x^a) = 0^a+(2x^2)^a \quad \Leftrightarrow \quad 4x^{2a} = 2^a x^{2a} \quad \Leftrightarrow \quad 2^a = 2^2 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

Ова функционална једначина је карактеризација квадратне функције. Општу квадратну функцију могуће је окарактерисати следећом функционалном једначином:

Тврђење 2: Непрекидна функција $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ је решење функционалне једначине

$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$ за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$ ако и само ако је $f(x) = ax^2$ за неко $a \in \boldsymbol{R}$. (6)

Доказ: Ако у функционалну једначину (6) ставимо $y = 0$ добија се

$$f(x) + f(x) = 2f(x) + 2f(0) \quad \Rightarrow f(0) = 0.$$

Ако ставимо $x = 0$ тада је $f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y)$, тј.

$f(-y) = f(y)$ па је функција f парна функција.

Ако у једначину (6) ставимо да је $x = y$ тада је $f(2x) = 2f(x) + 2f(x) = 4f(x)$. Ставимо $2x$ уместо x и x уместо y. Тада је $f(3x) + f(x) = 2f(2x) + 2f(x) = 10f(x)$. Докажимо индукцијом да је $f(nx) = n^2 f(x), n \in \boldsymbol{N}$. Претпоставимо да тврђење важи за све природне бројеве који су мањи од n. Ако у функционалну једначину (6) уместо x ставимо nx и уместо y ставимо x и искористимо индукцијску претпоставку, добијамо:

$$f\big((n+1)x\big) + f\big((n-1)x\big) = 2f(nx) + 2f(x) \quad \Rightarrow$$
$$f((n+1)x) - (n-1)^2 f(x) = 2n^2 f(x) + 2f(x) = (n+1)^2 f(x)$$

Из $f(mx) = m^2 f(x)$ следи

$$f(x) = f\left(m\frac{x}{m}\right) = m^2 f\left(\frac{x}{m}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m^2} f(x), \;\; m, n \in \boldsymbol{N}$$

Можемо закључити да је $f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n^2}{m^2} f(x)$ за све $n \in \boldsymbol{Z}, m \in \boldsymbol{N}$.

Искористимо непрекидност функције f. Нека низ рационалних бројева $(r_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ тежи ка x када $n \to \infty$. Тада је:

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n \cdot 1) = \left(\lim_{n\to\infty} (r_n)^2\right) f(1) = x^2 f(1)$$

Ако ставимо да је $f(1) = a$ добија се тврђење.

Тврђење 3: Нека је непрекидна функција $f: \boldsymbol{R}^+ \rightarrow \boldsymbol{R}^+$ и нека $f(x) \rightarrow 0$ када $x \rightarrow \infty$. Ако је за свако $x, y > 0$ $f\big(xf(y)\big) = yf(x)$, тада је $f(x) \equiv 0$ или $f(x) = \frac{1}{x}$. (7)

Доказ: Најпре ставимо $x = y = 1$. Тада је $f\big(f(1)\big) = f(1)$. Ако у једначину (7) ставимо $x = 1$ и $y = f(1)$ добија се $f\Big(f\big(f(1)\big)\Big) = (f(1))^2$. Када на леву страну два пута применимо $f\big(f(1)\big) = f(1)$, добија се $f(1) = (f(1))^2 \Leftrightarrow f(1)(f(1) - 1) = 0$. Ако је $f(1) \neq 0$ онда је $f(1) = 1$.

Ако у једначину (7) ставимо $x = y$ тада је $f\big(xf(x)\big) = xf(x)$, па за свако x функција f преслика $xf(x)$ на самог себе. Дакле, $t = xf(x)$ је непокретна тачка функције f. Ако покажемо да је 1 једина непокретна тачка функције f добићемо $xf(x) = 1$.

Нека је x непокретна тачка функције f, тј. $f(x) = x$ и нека је $x > 1$. Тада из $f\big(xf(x)\big) = xf(x)$ следи да је $f(x^2) = x^2$. Применом да је

$f\big(x^2 f(x^2)\big) = x^2 f(x^2)$ и $f(x^2) = x^2$, добија се да је $f(x^4) = x^4$, тј. у општем случају је $f(x^{2n}) = x^{2n}$ за $n > 0$. Ако је $x > 1$, тада $x^k \rightarrow +\infty$ када $k \rightarrow +\infty$ па би тада и $f(x^k)$ тежило бесконачности. По претпоставци $f(x)$ тежи нули када x тежи бесконачности па за $x > 1$ не може бити $f(x) = x$.

Нека је $0 < x < 1$ и нека је $f(x) = x$. Из $f(1) = 1$ добија се $f\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = 1$. Ако у ову једнакост заменимо да је $x = f(x)$ и применимо функционалну једначину (6), добија се:

$$1 = f\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = f\left(\frac{1}{x} \cdot f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$$

Добили смо да је $\frac{1}{x} > 1$ непокретна тачка функције f, а то је на основу претходно доказаног немогуће. Дакле, једина непокретна тачка функције f је $1 = xf(x)$. Одавде следи да је $xf(x) = 1$ тј. $f(x) = \frac{1}{x}$.

Последица: Претходно тврђење нам даје карактеризацију функције $f: \boldsymbol{R}^+ \rightarrow \boldsymbol{R}^+$ дефинисане са $f(x) = \frac{1}{x}$.

Карактеризација тригонометријских функција

Теорема 5 (Прва Даламберова једнакост)[3]: Непрекидна реална функција $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ је решење функционлне једначине

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \quad \forall x,y \in \boldsymbol{R} \qquad (8)$$

ако и само ако је за неко $a \in \boldsymbol{R}$ важи:

1. $f(x)=0$
2. $f(x)=\cos ax$
3. $f(x)=\operatorname{ch} ax$

Доказ: Посматрајмо адиционе формуле косинуса збира и разлике:

$$\cos(x \pm y)=\cos x\cos y \mp \sin x \sin y$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y)=\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

Ако у једначину (8) ставимо $y=0$, добијамо $2f(x)=2f(x)f(0)$. Одатле следи $f(x)\equiv 0$ или $f(0)=1$. У наставку ћемо испитати нетривијално решење. Како је функција f непрекидна функција и $f(0)=1$, тада постоји $\varepsilon>0$ тако да $f(x)>0, \forall x \in [-\varepsilon,\varepsilon]$.

Стављајући у једначини (8) да је $x=0$ налазимо

$$f(y)+f(-y)=2f(0)f(y) \;\; \Leftrightarrow \;\; f(-y)=f(y)$$

Из овога закључујемо да је фукција f парна и једино што треба је да нађемо вредности за $x>0$. Прво ћемо одредити вредности функције f у тачкама $\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \ldots \in [0,\varepsilon]$. У овим вредностима ставићемо да је $y=x$

$$f(x)^2=\frac{1+f(2x)}{2}.$$

За $x=\varepsilon$ знамо да је $f(\varepsilon)>0$. Или је $f(\varepsilon)\le 1$ или $f(\varepsilon)>1$. Испитаћемо први случај јер до доказа другог случаја долазимо на сличан начин. Дефинишимо број $\theta_0 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ такав да је $f(\varepsilon)=\cos\theta_0$. Ако ставимо $x=\frac{\varepsilon}{2}$ налазимо

$$f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2=\frac{1+f(\varepsilon)}{2}=\frac{1+\cos\theta_0}{2}=\cos^2\frac{\theta_0}{2} \quad \Leftrightarrow \;\; f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\cos\frac{\theta_0}{2}$$

пошто су оба позитивна. Затим, ако је $x=\frac{\varepsilon}{4}$ долазимо до

$$f\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2=\frac{1+f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}{2}=\frac{1+\cos\frac{\theta_0}{2}}{2}=\cos^2\frac{\theta_0}{4} \;\; \Leftrightarrow \;\; f\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)=\cos\frac{\theta_0}{4}$$

Можемо закључити да је $f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right)=\cos\frac{\theta_0}{2^n} \quad \forall n \in \boldsymbol{N}^*$.

[3] Француски математичар *Jean le Rond d'Alembert* 1717.-1783.

Одредићемо вредности функције f у тачкама $\frac{m\varepsilon}{2^n}, m, n \in \boldsymbol{N}^*$. Због тога морамо изаћи ван интервала $[0, \varepsilon]$. За $x = ny$

$$f\big((n+1)y\big) = 2f(ny)f(y) - f\big((n-1)y\big).$$

У претходну једнакост ставимо $n = 2, y = \frac{\varepsilon}{2^n}$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\varepsilon}{2^n}\right) &= 2f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) f\left(\frac{3\varepsilon}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \\ &= 2\cos\frac{\theta_0}{2^n}\cos\frac{\theta_0}{2^{n-1}} - \cos\frac{\theta_0}{2^n} = \\ &= \cos\frac{3\theta_0}{2^n} \end{aligned}$$

при чему је

$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x = \\ &= \cos(2x)\cos x - 2\sin^2 x\cos x = \cos(2x)\cos x - 2\frac{1-\cos(2x)}{2}\cos x = \\ &= 2\cos(2x)\cos x - \cos x. \end{aligned}$$

Иначе је

$$f\left(\frac{m\varepsilon}{2^n}\right) = \cos\frac{m\theta_0}{2^n}.$$

Нека је $x \in \boldsymbol{R}^+$. Бирамо низ бројева $\frac{m\varepsilon}{2^n}, m, n \in \boldsymbol{N}^*$такав да је $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left(\frac{m\varepsilon}{2^n}\right) = x$. Тада је $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{x}{\varepsilon}$, а како је функција f непрекидна, следи

$$f(x) = \cos\left(\frac{\theta_0}{\varepsilon}x\right) \quad x \in \boldsymbol{R}^+.$$

Дефинишимо $a = \frac{\theta_0}{\varepsilon}$ и на основу парности функције f следи

$$f(x) = \cos(ax), \qquad x \in \boldsymbol{R}.$$

Случај када је $f(\varepsilon) > 1$ доказујемо на сличан начин. Тада ћемо изабрати неко $\xi_0 > 0$ тако да је $f(\varepsilon) = \operatorname{ch}\xi_0$. Понављајући кораке добијамо да је

$$f(x) = \operatorname{sh}(ax), \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Теорема 6 (Друга Даламберова једнакост): Непрекидна реална функција $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ је решење функционалне једначине

$$f(x+y)f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2 \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R} \qquad (9)$$

ако и само ако за неко $a \in \boldsymbol{R}$ важи:

1. $f(x) = 0$
2. $f(x) = \sin ax$
3. $f(x) = \operatorname{sh} ax$

Напомена: Претходна једначина може бити записана у облику:

$$f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}. \qquad (10)$$

Доказ: Тривијално решење је $f(x) = 0$. Испитаћемо да ли функционална једначина има нетривијална решења. Претпоставимо да постоји неко $x_0 \in \boldsymbol{R}$ такво да је $f(x_0) \neq 0$. Сада можемо дефинисати функцију g на следећи начин:

$$g(x) = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)}.$$

Овако дефинисана функција g зависи од вредности променљиве x_0. Међутим, ово није тачно. Функција g је независна од променљиве x_0. Нека је $\tilde{x}_0$ променљива у којој је $f(\tilde{x}_0) \neq 0$. Онда дефинишимо следеће

$$\tilde{g}(x) = \frac{f(x+\tilde{x}_0) - f(x-\tilde{x}_0)}{2f(\tilde{x}_0)}.$$

Показаћемо да је $g(x) \equiv \tilde{g}(x)$. Заиста, множењем и дељењем десне стране једнакости која дефинише функцију $\tilde{g}(x)$ и примењујући једнакост (10) добијамо:

$$\tilde{g}(x) = \frac{f(x+\tilde{x}_0)f(x_0) - f(x-\tilde{x}_0)f(x_0)}{2f(\tilde{x}_0)f(x_0)} =$$

$$= \frac{f\left(\frac{x+\tilde{x}_0+x_0}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x+\tilde{x}_0-x_0}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-\tilde{x}_0+x_0}{2}\right)^2 + f\left(\frac{x-\tilde{x}_0-x_0}{2}\right)^2}{2f(\tilde{x}_0)f(x_0)}$$

$$= \frac{\left[f\left(\frac{x+\tilde{x}_0+x_0}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x+\tilde{x}_0-x_0}{2}\right)^2\right] - \left[f\left(\frac{x-\tilde{x}_0+x_0}{2}\right)^2 - f\left(\frac{x-\tilde{x}_0-x_0}{2}\right)^2\right]}{2f(\tilde{x}_0)f(x_0)}$$

$$= \frac{f(x+x_0)f(\tilde{x}_0) - f(x-x_0)f(\tilde{x}_0)}{2f(\tilde{x}_0)f(x_0)} = \frac{f(x+x_0) - f(x-x_0)}{2f(x_0)} = g(x).$$

Функција $g(x)$ задовољава прву Даламберову једнакост, одакле је:

$$2g(x)g(y) = 2\left(\frac{f(x+x_0)-f(x-x_0)}{2f(x_0)}\right)\left(\frac{f(y+x_0)-f(y-x_0)}{2f(x_0)}\right) =$$
$$= \frac{1}{2f(x_0)}[f(x+x_0)f(y+x_0) - f(x+x_0)f(y-x_0)$$
$$- f(x-x_0)f(y+x_0) + f(x-x_0)f(y-x_0)].$$

Ставимо да је:

$$u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x = u+v, \quad y = u-v.$$

Тада је:

$$2g(x)g(y) = \frac{1}{2f(x_0)}[f(u+v+x_0)f(u-v+x_0) - f(u+v+x_0)f(u-v-x_0)$$
$$- f(u+v-x_0)f(u-v+x_0) + f(u+v-x_0)f(u-v-x_0)] =$$
$$= \frac{1}{2f(x_0)}\left[f\big((u+x_0)+v\big)f\big((u+x_0)-v\big) - f\big(u+(v+x_0)\big)f\big(u-(v+x_0)\big)\right.$$
$$\left.- f\big(u+(v-x_0)\big)f\big(u-(v-x_0)\big) + f\big((u-x_0)+v\big)f\big((u-x_0)-v\big)\right]$$

Искористићемо једначину (9) и записати нови облик десне стране претходне једначине:

$$2g(x)g(y) =$$
$$= \frac{f(u+x_0)^2 - f(v)^2 - f(u)^2 + f(v+x_0)^2 - f(u)^2 + f(v-x_0)^2 + f(u-x_0)^2 - f(v)^2}{2f(x_0)}$$
$$= \frac{f(2u+x_0)f(x_0) - f(2v+x_0)f(x_0) - f(2v-x_0)f(x_0) + f(2u-x_0)f(x_0)}{2f(x_0)} =$$
$$= \frac{f(2u+x_0) - f(2v+x_0) - f(2v-x_0) + f(2u-x_0)}{2f(x_0)} =$$
$$= \frac{f(2u+x_0) - f(2u-x_0)}{2f(x_0)} + \frac{f(2v+x_0) - f(2v-x_0)}{2f(x_0)} = g(2u) + g(2v)$$

или

$$2g(x)g(y) = g(x+y) + g(x-y).$$

Како је g непрекидна функција, следи да је

$$g(x) = 0, \qquad g(x) = \cos(bx), \qquad g(x) = \cosh(bx)$$

Сада ћемо се пребацити на функцију f:

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)g(x),$$

за свако $x \in \boldsymbol{R}$ и за свако $y \in \boldsymbol{R}$ тако да је $f(y) \neq 0$.

Ако је $g(x) \equiv 0$, онда је

$$f(x+y) - f(x-y) = 0 \Rightarrow f(x+2y) = f(x) \Rightarrow f(2y) = f(0).$$

Из овога се види да је $f(0) = 0$ па је и $f(x) \equiv 0$. Ово решење се не може разматрати због почетне претпоставке (разматрамо нетривијална решења).

Ако је $g(x) = \cos(bx)$, онда је:

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos(bx).$$

За $x = 0$ налазимо да је:

$$f(y) - f(-y) = 2f(y) \quad \Rightarrow \quad f(-y) = -f(y).$$

Одатле је:

$$f(x+y) - f(x-y) = 2f(y)\cos(bx). \qquad (11)$$

Потребно је да решимо функционалну једначину (11). Ако ставимо $x = 0$ и $y = \theta$, тада је $f(\theta) + f(-\theta) = 2a\cos\theta$ где је $a = f(0)$.

Ако ставимо $x = \theta + \frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ у једначину (11), тада је

$$f(\theta + \pi) + f(\theta) = 0.$$

На крају, ако ставимо $x = \frac{\pi}{2}$ и $y = \theta + \frac{\pi}{2}$ у једначину (11), тада је

$$f(\theta + \pi) + f(-\theta) = -2b\sin\theta$$

где је $b = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Када решимо систем од три једначине са три непознате $f(\theta)$, $f(-\theta)$ и $f(\theta+\pi)$ добијамо решење $f(\theta) = a\sin x + b\cos x$ па је на основу тога решење једначине (11) $f(x) = A\sin(bx) + B\cos(bx)$ за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$. Одатле следи да је $f(x) = A\sin(bx)$ коначан резултат. На сличан начин показујемо да је

$$f(x) = A\,\mathrm{sh}(bx)$$

за $g(x) = \mathrm{ch}(bx)$.

Примери:

1. Нека су $f, g\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ функције, различите од константи за које важи:

1. $f(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$
2. $g(x+y) = g(x)g(y) - f(x)f(y)$ за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$.

Наћи све могуће вредности $f(0)$ и $g(0)$.

Решење:

Заменом да је $x = y = 0$ добијамо да је $f(0) = 2f(0)g(0)$ и $g(0) = (g(0))^2 - (f(0))^2$. Ако је $f(0) \neq 0$, онда је $g(0) = \frac{1}{2}$. Међутим, тада из друге релације добијамо да је $(f(0))^2 = -\frac{1}{4}$ што је контрадикција. Дакле, $f(0) = 0$. Опет, из друге релације добијамо да је $g(0) = 0$ или $g(0) = 1$. Ако је $g(0) = 0$ онда је $f(x) = f(0)\cdot 0 + g(x)\cdot 0 = 0$. Што значи да је $g(0) = 1$. Најпознатије функције које задовољавају услове задатка су $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \cos x$.

2. Решити функционалну једначину $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cos y$ где су $x,y\in \boldsymbol{R}$, $f\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$.

Решење:

Заменом да је $x=0, y=t; x=\frac{\pi}{2}+t, y=\frac{\pi}{2}; x=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{2}+t$ добијамо једначине:

$$f(t)+f(-t)=2a\cos t$$
$$f(\pi+t)+f(t)=0$$
$$f(\pi+t)+f(-t)=2b\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-2b\sin t$$

где је $f(0)=a$ и $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=b$. Одатле лако следи да је $f(t)=a\cos t+b\sin t$.

3. Наћи све функције $f,g\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ које задовољавају следећи функционалну једначину:

$\sin x+\cos y=f(x)+f(y)+g(x)-g(y)$.

Решење:

Узимајући да је $x=y$ добијамо да је $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{2}$. Затим је

$\sin x-f(x)-g(x)=f(y)-g(y)-\cos y$.

Лева страна не зависи од y, а десна од x па су обе стране константне. Следи:

$g(x)=\sin x-f(x)+C$, тј. $g(x)=\frac{\sin x-\cos x}{2}+C$.

Теорема 7: Непрекидне реалне функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ и $g: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ су решења функционалне једначине

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \text{ за свако } x, y \in \boldsymbol{R} \text{ ако и само ако је} \tag{12}$$

1. $f(x) = c$ $\quad g(x) = \sqrt{c(1-c)}$ $\quad 0 \leq c \leq 1$

или је

2. $f(x) = \cos ax$ $\quad g(x) = \sin ax$ $\quad$ за неко $a \in \boldsymbol{R}$.

Доказ: Нека је $f(x) = c$ константна функција. Тада је $g(x) = \sqrt{c(1-c)}$ при чему је $c \geq 0$ јер у супротном функција g не би постојала.

Претпоставимо да функција f није константна функција. Ако у функционалну једначину (12) заменимо места промењљивој x и y добијамо:

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x) = f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x-y)$$

Ако ставимо $y = 0$ добија се $f(-x) = f(x)$, тј. функција f је парна функција. Ако би и функција g била парна, онда би важило

$$f(x+y) = f\big(x-(-y)\big) = f(x)f(-y) + g(x)g(-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x-y).$$

Када се у ову једнакост стави $y = \frac{x}{2}$, добија се за свако $x \in \boldsymbol{R}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right) = f(0) = c,$$

па би функција f била константна функција, што је контрадикција. Дакле, функција g не може бити парна функција.

Због парности функције f важи да је:

$$f(x-y) = f\big(-(x-y)\big) = f\big(-x-(-y)\big) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y).$$

Ако сада одузмемо полазну једначину (12) и ставимо $y = x$ добија се:

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y) \quad \Rightarrow \quad (g(x))^2 - \big(g(-x)\big)^2 = 0$$

Када се факторише и искористи да функција g није парна функција, добија се:

$$(g(x) - g(-x))(g(x) + g(-x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(-x) = -g(x)$$

тј. функција g је непарна функција.

Сада се елиминише функција f. Функција f је парна, а функција g је непарна, па је:

$$f(x+y) = f\big(x-(-y)\big) = f(x)f(-y) + g(x)g(-y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

Када се ова једнакост сабере са полазном једначином (12), добија се да је:

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$. На основу Прве Даламберове једнакости важи да је $f(x)\equiv 0$ или $f(x)\equiv 1$, када је $a=0$, или је за $a\neq 0$ $f(x)=\cos ax$ или $f(x)=\mathrm{ch}ax$. Константна решења су већ одређена и треба видети које неконстантно решење задовољава полазну једначину (5).

Последица непраности функције g је $g(-x)+g(x)=0 \quad \Rightarrow \quad g(0)=0$ када се стави да је $x=0$. Ако у полазну једначину (5) ставимо да је $y=0$, добија се:

$$f(x)=f(x)f(0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)\big(1-f(0)\big)=0$$

Функција f није константна па је $f(0)=0$. Ако се у полазну једначину (5) стави да је $y=x$ тада је:

$(f(x))^2+(g(x))^2=f(0)=1 \quad \Rightarrow \quad |f(x)|\leq 1 \quad \Rightarrow \quad f(x)=\cos ax,\ \ a\neq 0.$

Тада је

$(g(x))^2=1-\cos^2 ax=\sin^2 ax \quad \Leftrightarrow \quad (g(x)+\sin ax)(g(x)-\sin ax)=0,$

па је $g(x)=\sin ax$ или је $g(x)=-\sin ax$. У другом случају се изабере негативно a, јер то не утиче на косинус због парности.

Решени задаци

У овом делу ћемо дати неке примере који ће илустровати примену претходних теорема у решавању функционалних једначина. Задаци су прикупљени са разних такмичења широм света. Већина задатака су средњи по тежини или сложенији.

1. Ако је $f(x+3) = x^2 + 8x + 16$ одредити $f(x)$ за свако $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Ако је $f(x-1) = 2x - 3$ одредити $f\big(f(x^2 - x + 1)\big)$ за свако $x \in \boldsymbol{R}$.

3. Наћи све функције $f: \boldsymbol{R}\backslash\{0\} \to \boldsymbol{R}$ које задовољавају једнакост $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$.

4. Одредити све функције $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такве да је $x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4$.

5. Наћи све функције $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такве да за произвољне вредности $x, y \in \boldsymbol{R}$ важи једнакост $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$.

6. Наћи све функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ које задовољавају једнакост $2f(x+y) + 6y^3 = f(x+2y) + x^3, \forall x, y \in \boldsymbol{R}$.

7. Наћи све функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такве да је $f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$ за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$.

8. Јенсенова[4] функционална једначина: Над пољем рационалних бројева одредити све функције $f: \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ које задовољавају једнакост $f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

9. Наћи све функције $f: \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{Q}$ које задовољавају функционалну једначину

$f(x) + f(t) = f(y) + f(z)$ за све рационалне бројеве $x < y < z < t$ који формирају аритметички низ.

10. Над пољем реалних бројева решити функционалну једначину

$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$.

11. Наћи све функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такве да за свако $x, y \in \boldsymbol{R}$ важи

$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy)$.

12. Наћи све функције $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такве да за произвољне $x, y \in \boldsymbol{R}$ важи:

$x^2 f(y) + yf(x^2) = f(xy) + a$, где је a реални параметар.

[4] Дански математичар *Johan Ludwig Jensen* 1859.-1925.

Решења

1. Увешћемо смену $t = x + 3$ одакле је $x = t - 3$. Враћајући се у почетну једначину важи:

$f(t) = (t-3)^2 + 8(t-3) + 16 = t^2 - 6t + 9 + 8t - 24 + 16 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$
$f(x) = (x+1)^2$

2. Увешћемо смену $t = x - 1$. Тада

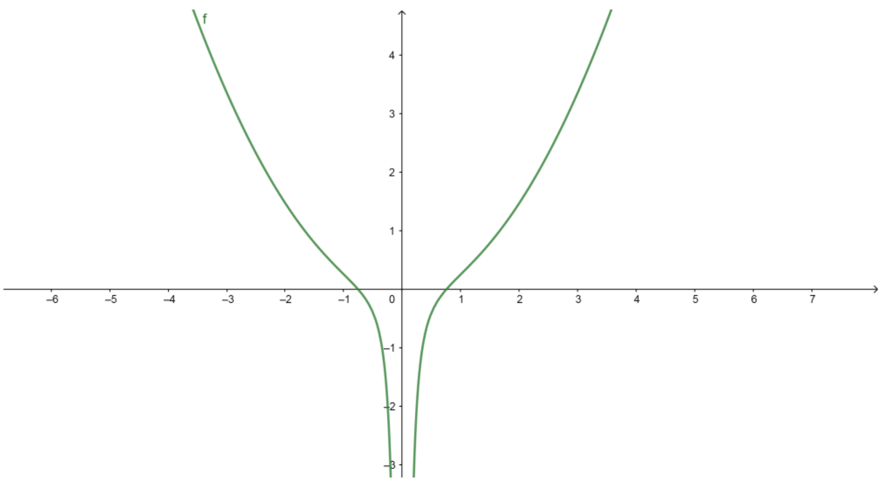
$x = t + 1$
$f(t) = 2(t+1) - 3 = 2t + 2 - 3 = 2t - 1$
$f(x) = 2x - 1$
$f(x^2 - x + 1) = 2(x^2 - x + 1) - 1 = 2x^2 - 2x + 2 - 1 = 2x^2 - 2x + 1$
$f\left(f(x^2 - x + 1)\right) = 2(2x^2 - 2x + 1) - 1 = 4x^2 - 4x + 2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1$

3. Ако уместо $\frac{1}{x}$ ставимо x добијамо:

$f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = x^2 \quad \Rightarrow 3f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ Имамо систем две једначине са две непознате:

$$f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$$
$$3f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \qquad (-3)$$

$-8f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{3x^2}{8} - \dfrac{1}{8x^2}$



4.

$x^2f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 \quad \Rightarrow \quad f(1-x) = 2x - x^4 - x^2f(x)$

смена $x \to 1-t$

$(1-t)^2f(1-t) + f\big(1-(1-t)\big) = 2(1-t) - (1-t)^4$

$(1-t)^2\big(2t - t^4 - t^2f(t)\big) + f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4$

$(1-t)^2(2t-t^4) - (1-t)^2t^2f(t) + f(t) = 2(1-t) - (1-t)^4$

$f(t)[1 - t^2(1-t)^2] = 2(1-t) - (1-t)^4 - (1-t)^2(2t-t^4)$

$f(t)[1 - t^2(1-t)^2] = (1-t)[2 - (1-t)^3 - (1-t)(2t-t^4)]$

$L = f(t)[1 - t^2(1-2t+t^2)]$

$L = f(t)(1 - t^2 + 2t^3 - t^4)$

$D = (1-t)[2 - (1 - 3t + 3t^2 - t^3) - (2t - t^4 - 2t^3 + t^5)]$

$D = (1-t)[2 - 1 + 3t - 3t^2 + t^3 - 2t + t^4 + 2t^3 - t^5]$

$D = (1-t)(1 + t - t^2 + t^3 + t^4 - t^5)$

$D = (1-t)(1+t)(1 - t^2 + 2t^3 - t^4)$

$L = D \quad \Rightarrow \quad f(t)(1 - t^2 + 2t^3 - t^4) = (1-t)(1+t)(1 - t^2 + 2t^3 - t^4)$

$f(t) = (1-t)(1+t)$ и $1 - t^2 + 2t^3 - t^4 \neq 0$

$f(x) = 1 - x^2$ и $2 - 3x + 2x^2 + x^3 - x^4 \neq 0$

5. Сменом $g(x) = f(x) - x^2$. Тада добијамо:

$g(x-y) = f(x-y) - (x-y)^2 = f(x) + f(y) - 2xy - x^2 - y^2 + 2xy$

$g(x-y) = f(x) + f(y) - x^2 - y^2 = f(x) - x^2 + f(y) - y^2$

$g(x-y) = g(x) + g(y)$

Ако је $x = y = 0$ онда је $g(0) = 0$.

Ако је $x = y$ онда је $0 = g(0) = g(x) + g(x) = 2g(x) \quad \Rightarrow g(x) \equiv 0$.

Одавде следи да $0 = g(x) = f(x) - x^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2$ задовољава услове задатка.

6. Ако ставимо да је $y = 0$ важи:

$2f(x) = f(x) + x^3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^3$

$f(x+y) = (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$f(x+2y) = (x+2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 2y^3 + 6y^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 + x^3$

$2x^3 + 6x^2y + 6xy^2 + 8y^3 = 2x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 \quad \Rightarrow \quad 6 = 12$

Лева и десна страна једначине нису једнаке па самим тим и једначина нема решење.

7. Функција $f(x) = x$ је једно решење функционалне једначине. Међутим, функција $f(x) = -x$ је такође решење дате функционалне једначине.

8. Ако од леве и десне стране једнакости $f(0)$, добијамо следећу једнакост:

$(f(x) - f(0)) + (f(y) - f(0)) = 2\left(f\left(\frac{x+y}{2}\right) - f(0)\right)$.

нека је $g: \boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{Q}$ функција дефинисана са $g(x) = f(x) - f(0)$ (13). Тада добијамо:

$g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right)$, тј. добијамо исту функционалну једначину као на почетку задатка, али за коју знамо да је $g(0) = 0$. Ако ставимо $(x, y) = (t, 0)$ добијамо $g(t) = 2g\left(\frac{t}{2}\right)$. Ако ставимо $(x, y) = (1,2)$ добијамо $g(1) + g(2) = 2g\left(\frac{3}{2}\right)$. Ако у последњу једнакост уведемо $g(t) = 2g\left(\frac{t}{2}\right)$ добијамо:

$g(x) + g(y) = 2g\left(\frac{x+y}{2}\right) = g(x + y)$ (14)

одакле закључујемо да функција g задовољава прву Кошијеву једначину. Решење функционалне једначине (14) је $g(x) = cx$ где је $c \in \boldsymbol{R}, c = const.$ Када се вратимо у једначину (13) $f(x) = cx + a$ где је $a = f(0) \in \boldsymbol{R}$ је решење задатка.

9. Запишимо почетну једначину у следећем облику

$f(a) + f(a + 3d) = f(a + d) + f(a + 2d)$ за неко $d > 0$.

Ако у функцију f уместо a ставимо $a - d$ добијамо: $f(a - d) + f(a + 2d) = f(a) + f(a + d)$. Сабирањем последње две једначине важи: $f(a - d) + f(a + 3d) = 2f(a + d)$ за свако $a \in \boldsymbol{Q}, d > 0$ и даље примењујући Јенсенову функционалну једначину долазимо до решења.

10. Ставимо $a = x + y, b = x - y$. Тада је $x^2 - y^2 = ab,\ 2x = a + b,\ 2y = a - b$. Добијамо нову једначину $bf(a) - af(b) = ab(a^2 - b^2)$. Ако је $a = b = 0$ онда је $0 = 0$ што нам не даје решење. Ако је $a = 0$ онда је $bf(0) = 0$ па је $f(0) = 0$. Претпоставимо да је $a, b \neq 0$ и ако једнакост поделимо са ab добијамо:

$$\frac{f(a)}{a} - \frac{f(b)}{b} = a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2$$

Ако ставимо да је $\frac{f(a)}{a} - a^2 = c$ за неку константу c кад год је $a \neq 0$, тј. $f(x) = x^3 + cx$ је решење функционалне једначине за неку константу c.

11. Законом да је $x = y = 0$ добијамо да је $f(0) = (f(0))^3$ одакле је $f(0) = 0$ или $f(0) = -1$ или је $f(0) = 1$.

1. Ако је $f(0) = 0$ тада замењујући да је $y = 0$ добијамо $f(x) = 0$.

2. Посматрајмо случај $f(0) = \pm 1$. Ако заменимо $y = -x$ добијамо $f(0) = f(x)f(-x)f(-x^2)$. Следи да је $f(x) \neq 0$ за сваки реалан број x. Даље, замењујући x са $x - 1$ и $y = 1$ добијамо:

$$f(x) = f(x-1)^2 f(1)$$
$$f(x-1) = f(x)f(-1)f(-x)$$

Даље је $f(x) = \big(f(x)f(-1)f(-x)\big)^2 f(1), f(x)\big(f(-x)\big)^2 = c$ где је c константа различита од 0. Замењујући x са $-x$ добијамо: $(f(x))^2 f(-x) = c$. Закључујемо да је $f(x) = f-(x)$ тј. $f(x) = \sqrt[3]{c} = \sqrt[3]{f(0)}$. За $f(0) = 1$ имамо $f(x) = 1$, а за $f(0) = -1$ је $f(x) = -1$. Дакле, једначина има три решења $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ и $f(x) = -1$.

12. Заменом $x = y = 1$ добијамо $2f(1) = f(1) + a$, тј. $f(1) = a$. За $x = 1, y = -1$ имамо $f(-1) - f(1) = f(-1) + a$, тј. $f(1) = -1$. Дакле, једначина нема решења за $a \neq 0$. Нека је $a = 0$. Како смо већ добили да је $f(1) = a = 0$, заменимо $y = 1$. Добијамо:

$x^2 f(1) + 1 \cdot f(x^2) = f(x) + a$, тј. $f(x)(x^2 + x - 1) = 0$. Ако је $x^2 + x - 1 \neq 0$ онда $f(x) = 0$. Нека је x_1 решење квадратне једначине $x^2 + x - 1 = 0$. Из $f(x_1^2) = f(x_1)$ добијамо да је једино решење функционалне једначине нула функција.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ђ. Дугошија, Ж. Ивановић, *Тригонометрија*
2. Ђ. Пауни, *Функционалне једначине класичних математичких функција*
3. З. Каделбург, В. Мићић, С. Огњановић, *Анализа са алгебром*
4. Ј. Манојловић, *Елементарне функције*
5. М. Арсеновић, В. Драговић, *Функционалне једначине*
6. C. Efthimiou, *Introduction to functional equation*
7. D. Eiteneer, *Trigonometric Functions*
8. E. Chen, *Introduction to functional equations*