Универзитет у Београду - Математички факултет

Даница Фатић

Шварц-Пикова лема и примене

мастер рад

Београд, 2019.

Ментор:
др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:
др Миодраг Матељевић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Марек Светлик, асистент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Садржај

Увод

Шварц-Пикова лема је класичан резултат комплексне анализе са многобројним применама. Примена Шварц-Пикове леме на аналитиче функције које сликају јединични диск у себе, осврт на хиперболичку геометрију на јединичном диску и Поенкареов диск су теме обрађене у овом раду.

У првој глави је доказана веома битна теорема принципа максимума модула, а у другој Шварцова лема које представљају веома битне резултате и кључне доказе из којих следи Шварц-Пикова лема. Трећа глава садржи сам доказ Шварц-Пикове леме као и њене последице и примене. У четвртој глави је тема хиперболичка геометрија на јединичном диску, Поенкареов диск модел, као и хиперболичко растојање између тачака. Такође, у овој глави кратак осврт на метрике и увођење Поенкареове метрике или хиперболичке метрике, као и однос еуклидског и хиперболичког растојања.

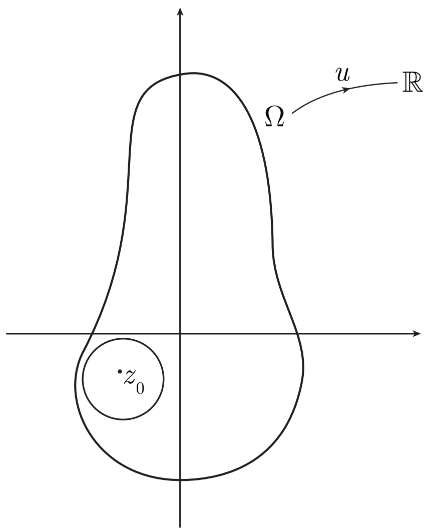
Рад има има за циљ да покаже да аналитичке функције не повећавају хиперболичко растојање које је на природан начин дефинисано на јединичном диску.

1

Принцип максимума модула

Теорема 1.1 (Принцип максимума)**.** *Нека је $u : \Omega \to \mathbb{R}$ хармонијска функција, где је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област. Ако постоји константа M таква да је $u(z) \leq M$, за свако $z \in \Omega$, онда је u константа на Ω или $u(z) < M$ за свако $z \in \Omega$.*

Ако је u непрекидна на $\partial\Omega$ и Ω ограничен, онда u достиже максимум на $\partial\Omega$.



Слика 1

Доказ. Нека је тачка $z_0 \in \Omega$, и функција у тој тачки достиже максимум тј. $u(z_0) = M$, пошто је Ω област (отворен и повезан скуп) постоји $r_0 > 0$ и $B(z_0, r_0) \subset \Omega$ тако да важи према Кошијевој интегралној формули важи:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta}) d\theta.$$

Из тога ће следити $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (u(z_0) - u(z_0 + \rho \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta})) d\theta = 0$. Како је вредност итеграла једнака нули, а подинтегрална вредност већа или једнака од нуле, можемо закључити да важи:

$$u(z_0) = u(z_0 + \rho \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta}), \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \text{ за свако } \rho,\ 0 < \rho < r_0.$$

На основу тога, ако је $u(z_0) = M$, онда постоји постоји $r_0 > 0$, тако да $u(z) = M$, за свако z за које важи $|z - z_0| < r_0$. Ако посматрамо скуп $A = \{z \in \Omega | u(z) = M\}$, за такав скуп смо показали да мора бити отворен. Посматрајмо скуп $B = \{z \in \Omega \mid u(z) < M\}$, да ли можемо нешто закључити у вези са тим да ли је отворен или затворен. Како знамо да је скуп B заправо инверзна слика скупа $(-\infty, M)$ тј. $B = \{z \in \Omega \mid u(z) < M\} = u^{-1}((-\infty, M))$, следи да је скуп B отворен скуп(биће отворен пошто је скуп $(-\infty, M)$ отворен а функција u^{-1} непрекидна). Област Ω можемо представити као унију два скупа

$$\Omega = \{z \in \Omega \mid u(z) = M\} \cup \{z \in \Omega \mid u(z) < M\}.$$

Пошто знамо да је област Ω отворен и повезан скуп, а успели смо да га представимо као унују два отворена дисунктна скупа и знамо да је $A \neq \emptyset (z_0 \in A)$, следи да је

$$\{z \in \Omega \mid u(z < M) = \emptyset.$$

На основу претходног, видимо да важи $\Omega = \{z \in \Omega \mid u(z) = M\}$ тј. $u \equiv M$ на Ω. Тиме смо доказали да уколико постоји тачка у Ω у којој се достиже максимум, да дата функција мора бити константна.
Докажимо други део теореме. Како је Ω - ограничен, онда $\partial\Omega$ и $\overline{\Omega}$ су компакти, па непрекидна функција u на њима достиже максимум. Треба да докажемо да су ти максимуми на овим компактима једнаки. Знамо да важи $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega}$ па ће бити:

$$\max_{\partial\Omega}(u(z)) \leq \max_{\overline{\Omega}}(u(z)).$$

Међутим, према првом делу доказа теореме, видели смо да се максимум не може достићи на Ω зато што би у супротном, функција била константна. Самим тим јасно је да максимум мора бити на $\overline{\Omega}$. $\square$

Још једном треба напоменути да у претходној теореми, функције са којим радимо имају кодомен скуп реалних бројева. Следећа теорема показује да слично важи и за функције које за кодомен имају скуп комплексних бројева.

Теорема 1.2 (Принцип максимума модула). *Нека је $f : \Omega \to \mathbb{C}$ хармонијска функција и $\Omega \subset \mathbb{C}$ област. Ако постоји константа M таква да је $|u(z)| \leq M$ за свако $z \in \Omega$, онда је f константа на Ω или $|u(z)| < M$ за свако $z \in \Omega$.*

Ако је f непрекидна на $\partial\Omega$ и Ω ограничен, онда $|f|$ достиже максимум на $\partial\Omega$.

Доказ. Neka је тачка $z_0 \in \Omega$ таква да важи $|f(z_0)| = M$. Тада можемо записати вредност функције у тачки z_0 као $f(z_0) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}M$ за неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Посматрајмо функцију $g(z) = \mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)$. Функција g је хармонијска па је onda $\mathfrak{Re}(g(z))$ је реално хармонијска функција. Приметимо да за ту функцију важи:

$$\mathfrak{Re}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)) \leq |\,\mathfrak{Re}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z))| \leq |\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)| = |f(z)| \leq M.$$

Како функција достиже максимум у некој тачки на Ω, можемо закључити, на основу претходне теореме да важи $\mathfrak{Re}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z_0)) = \mathfrak{Re}(M) = M$ за свако $z \in \Omega$. Функцију $g(z) = \mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)$ можемо записати као:

$$\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z) = \mathfrak{Re}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)) + \mathfrak{i}\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)) = M + \mathfrak{i}\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z))$$

$$|\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)| = |f(z)| \leq M \Rightarrow \quad \mathfrak{Im}(\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z)) = 0$$

Видимо да је функција $g(z) = \mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha} f(z) = M$ за свако $z \in \Omega$ заправо константна функција, па онда функцију f можемо записати као $f(z) = M\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$ чиме смо доказали да је константна. Доказ да функција дистиже максимум на граници области је исти као у претходној теореми. $\square$

Напомена. Ако је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и $f : \Omega \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, онда је f и хармонијска функција, па принцип максимума модула важи за холоморфне функције.

Последица 1.1 (Принцип минимума модула)**.** *Нека је $\Omega \subset \mathbb{C}$ област и функција f холоморфна на Ω и $f(z) \neq 0$ за свако $z \in \Omega$. Ако $|f|$ достиже локани минимум у некој тачки $a \in \Omega$, тада је f константна функција.*

Доказ. Пошто је $f \neq 0$ у то је функција $\frac{1}{f}$ холоморфна на Ω, па на њу можемо применити Принцип максимума модула, одакле директно следи тврђење. $\square$

Пример 1.1. *Нека је Ω област, $\mathbb{D}$ јединични диск тако да $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$ и нека је функција f холоморфна и неконстантна на Ω. Претпоставимо још да је $|f(z)| = r$ за свако $z \in \Omega$. Доказати да тада функција f има бар једну нулу у $\mathbb{D}$.*

Доказ. Ако је $r = 0$, биће на основу принципа максимума модула $|f| = 0$ на целом $\mathbb{D}$, што се противи условима датим у примеру(функција је неконстантна). Тако да r мора бити веће од нуле. На основу принципа максимума модула, максимум од $|f|$ је r. Ако функија нема нула у $\mathbb{D}$, онда је функција $\frac{1}{f}$ холоморфна на Ω, па и за њу важи принцип максимума модула који се достиже за $|z| = 1$, и једнак је $\frac{1}{r}$, тако да је и минимум функције f такође r. Из тога можемо да закључимо да је $|f(z)| = r$ за свако $z \in \mathbb{D}$. На основу теореме о отвореном пресликавању, можемо закључити да је f константна на Ω. Због теореме о јединости аналитичке функције, f је константна на целом $\mathbb{D}$. Како је то у контрадикцији са претпоставком, долазимо до закључка да ће функција f имати бар једну нулу на јединичном диску. $\square$

2

Шварцова лема

Теорема 2.1 (Шварцова лема)**.** *Нека је* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *холоморфна функција, где је* $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ *и важи* $f(0) = 0$*. Онда је*

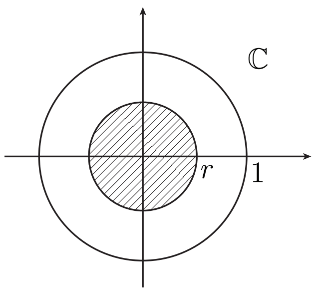
$$|f(z)| \le |z|, \quad \text{за свако } |z| < 1.$$

Једнакост важи за неко $z \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ *ако и само ако је* $f(z) = \mathfrak{e}^{i\alpha} z$ *за неко* $\alpha \in \mathbb{R}$*, тј. функција* f *је ротација чији је центар тачка* 0.

Доказ. Посматрајмо функцију $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ у некој тачки z где је $z \neq 0$. Функција g је аналитичка на $\mathbb{D} \backslash \{0\}$. Посматрајмо Маклоренов развој функције $f(z)$ у тачки $z = 0$. У услову теореме нам је дато да $f(0) = 0$. Важиће:

$$f(z) = f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots = z f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \cdots = z \left(f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} z + \cdots \right) = z h(z).$$

Посматрајмо функцију $h(z) = f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} z + \cdots$. Функција h ће бити аналитичка на $\mathbb{D}$. Како су функције $h(z) = g(z)$ на $\mathbb{D}$, то следи да је $g(z)$ аналитичка на $\mathbb{D}$. Посматрајмо функцију g на неком диску $D(0, r)$.



Слика 2

За све тачке на граници тј. $|z| = r$ за модуо функције g важиће:

$$|g(z)| = |\frac{f(z)}{z}| = \frac{|f(z)|}{|z|} \le \frac{1}{r}.$$

За $|z| \le r$, $|g(z)|$ има максимум на $|z| = r$ према принципу максумума модула. За $|z| \le r$ важи $|g(z)| \le \frac{1}{r}$. Ако узмемо да r тежи 1^- тј. $\lim\limits_{r \to 1^-} |g(z)| \le \lim\limits_{r \to 1^-} \frac{1}{r} = 1$ за $|z| < 1$. На основу тога видимо да важи$|f(z)| \le |z|$ за свако $|z| < 1$.

Треба да докажемо други део теореме. Нека је z_0 тачка таква да важи $|z_0| < 1$

$z_0 \neq 0$ и $|f(z_0)| = |z_0|$. Посматрајући функцију $g = \frac{f(z)}{z}$, видимо да важи $|g(z_0)| = 1$. Како је достигла максимум у некој тачку јединичног диска, према принципу максимума модула, функција g је константа. Модуо функције је 1, па онда можемо записати $g(z) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Из тога даље следи да је $f = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha} z$ тј. функција f је ротација, што је и требало доказати. □

Последица 2.1. *Сваки холоморфни аутоморфизам на $\mathbb{D}$ који фиксира нулу је ротација.*

Доказ. Нека је функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфни аутоморфизам и важи да је $f(0) = 0$. Докажимо да ова функција мора бити ротација. Функција задовољава услове Шварцове леме па ће важити $|f(z)| \leq |z|$ за свако z, из јединичног диска тј. $|z| < 1$. Како је функција f аутоморфизам, онда постоји и инверзна функција $f^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ за коју важи $f^{-1}(0) = 0$. Сада применимо Шварцову лему и на f^{-1} пошто задовољава тражене услове. Добијамо:

$$|f^{-1}(w)| \leq |w| \text{ за } |w| < 1, \quad w = f(z)$$

$$|z| \leq |f(z)| \Rightarrow |f(z)| = |z|, \quad \text{ за свако } z, \quad |z| < 1$$

На основу Шварцове леме, пошто важи претходна једнакост, доказали смо да функција f мора бити ротација. □

Геометријски гледано, Шварцова лема тврди ако имамо функцију која диск слика у диск, при чему се центар слика у центар, да та фунција је или ротација или је слика сваке тачке ближа центру у односу на ту саму тачку.

Уведимо функцију која ће нам бити од великог значаја у даљем раду.

Нека је за неко фиксирано $\alpha \in \mathbb{D}$:

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}.$$

Дефинишимо $\mathbb{K} = \partial\mathbb{D}$. За ову функцију важиће следећа теорема.

Теорема 2.2. *Функција φ_α је $1-1$ пресликавање које слика диск $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$, слика $\mathbb{K}$ на $\mathbb{K}$ и a слика у 0. Инверз функције φ_α је функција $\varphi_{-\alpha}$ и важи:*

$$\varphi_\alpha'(0) = 1 - |a|^2, \quad \varphi_\alpha'(a) = \frac{1}{1 - |a|^2}.$$

Доказ. Функција φ_α је холоморфна у $\mathbb{D} \backslash \{\frac{1}{a}\}$ пошто $\frac{1}{a}$ не припада $\mathbb{D}$. Директном провером добијамо да су функције $1-1$.

$$\varphi_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}, \quad \varphi_\alpha(z) = w,$$

$$w = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \quad w - \overline{\alpha}zw = z - \alpha, \quad z = \frac{w+\alpha}{1+\overline{\alpha}w}.$$

На основу ових једнакости закључујемо да су φ_α и $\varphi_{-\alpha}$ инверзне функције.

Треба да докажемо да је слика јединичне кружнице такође јединична кружница. Нека је $t \in \mathbb{R}, z = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{R}$. Онда важи:

$$|\varphi_\alpha(z)| = \left|\frac{\mathfrak{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\mathfrak{e}^{\mathrm{i}t}}\right| = \left|\frac{\mathfrak{e}^{\mathrm{i}t} - \alpha}{\mathfrak{e}^{-\mathrm{i}t} - \overline{\alpha}}\right| = 1$$

(зато што $|z| = |\overline{z}|$ важи за свако $z \in \mathbb{C}$).

Доказали смо да важи $\varphi_\alpha(z) \in \mathbb{K}$, исто ће важити и за $\varphi_{-\alpha}$ па доказујемо једнакост $\varphi_\alpha(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Како је $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ и $\varphi_{-\alpha}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ важи $\varphi_\alpha(\varphi_{-\alpha}) \subseteq \varphi_\alpha(\mathbb{D})$, а самим тим важи и $\mathbb{D} \subseteq \varphi_\alpha(\mathbb{D})$ као и једнакост $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Нађимо извод функције φ_α.

$$\varphi_\alpha'(z) = \frac{1 - \overline{\alpha}\alpha + \overline{\alpha}(z-\alpha)}{(1-\overline{\alpha}\alpha)^2} = \frac{1 - \overline{\alpha}\alpha + \overline{\alpha}\alpha - \alpha\overline{\alpha}}{(1-\overline{\alpha}\alpha)^2} = \frac{1-|\alpha|^2}{(1-\alpha\overline{\alpha})^2}$$

Када заменимо вредности у изводу функције добијамо да важи:

$$\varphi_\alpha'(0) = 1 - |a|^2, \quad \varphi_\alpha'(a) = \frac{1}{1-|a|^2}$$

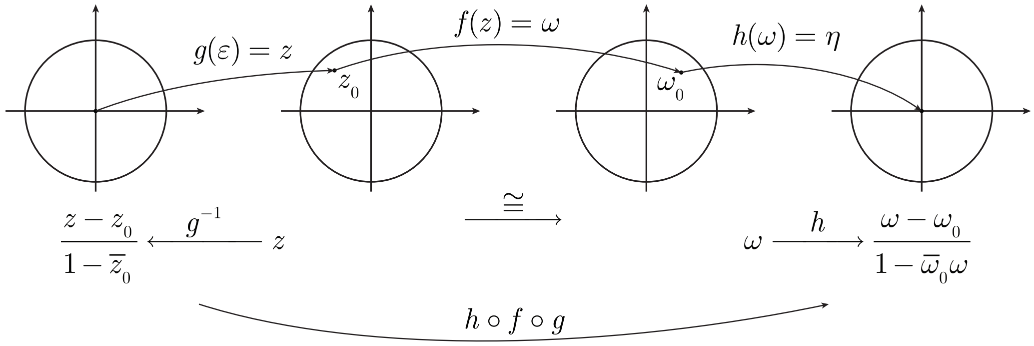
□

Теорема 2.3. *Група аутоморфизама јединичног диска (у односу на композицију функција) је облика*

$$Aut_{hol}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}\right) \;\middle|\; 0 \le \alpha < 2\pi, \quad |z_0| < 1 \right\}.$$

Доказ.
$\Leftarrow$) Функција $f(z) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ је аутоморфизам који пресликава $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$, следи из претходне теореме.

$\Rightarrow$) Обрнуто, нека је функција f таква да важи $f \in Aut_{hol}(\mathbb{D})$.



Слика 3

Дефинишимо функције $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ тако да је $h(w) = \frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}$ и $g^{-1}(z) = \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, где су $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$. Напоменимо да важи $g(z) = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ на основу претходне теореме. Сада посматрајмо функцију $h \circ f \circ g$ која је холоморфни аутоморфизам јединичног диска који фиксира нулу тј. важи:

$$(h \circ f \circ g)(0) = (h(f(z_0)) = h(w_0) = 0$$

Према последици Шварцове леме, видимо да посматрана функција мора бити ротација (аутоморфизам који фиксира нулу) тј. можемо је записати као:

$$h \circ f \circ g(\xi) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\xi \text{ је ротација} \quad \text{за неко } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Како је $g(\xi) = z$ важиће $\xi = \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ па даље ће претходна једнакост моћи да се напише као:

$$h(f(z)) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.$$

Пошто функција h има инверз(на основу претходне теореме), функција f ће изгледати:

$$f(z) = h^{-1}\left(\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right) = \frac{\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z} + w_0}{1+\overline{w_0}\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}}.$$

Изаберемо јединствено z_0 у $\mathbb{D}$ тако да $f(z_0) = w_0 = 0$, па је

$$f(z) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}.$$

□

Теорема 2.4 (Диференцијална верзија Шварцове леме)**.** *Нека је дата холоморфна функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ тако да важи $f(0) = 0$. Онда је$|f'(0)| \leq 1$. Једнакост ће важити ако и само ако је функција f ротација.*

Доказ. Већ смо доказали да ће при овим условима важити $|f(z)| \leq |z|$. Посматрајмо први извод дате функције у нули.

$$|f'(0)| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}\right| = \left|\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1.$$

Ако је $|f'(0)| = 1$, онда је аналитичка функција $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, и важи $g(0) = f'(0)$, па је $|g(0)| = 1$. Пошто функција $|g|$ достиже максимум у некој тачки унутар јединичног диска,према принципу максимума модула, g је константна на $\mathbb{D}$, а такође и $|g|$ је константна на $\mathbb{D}$, па важи модуо од g једнак 1 на целом јединичном диску тј. биће $|g(z)| = 1$ што даље води томе да функција $g(z) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ па онда функција$f(z) = z\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Тиме смо доказали да у случају једнакости $|f'(0)| = 1$ функција f мора бити ротација. □

Пример 2.1. *Одредити све функције f непрекидне на $\overline{\mathbb{D}}$ и холоморфне на $\mathbb{D}$ са својством $|f(z)| = 1$ за $z \in \partial\mathbb{D}$.*

Доказ. Једно од решења је свакако константна функција $f(z) = a$ за $|a| = 1$.

Потражимо друга решења. Претпоствимо да функција није константна, у једном од претходних примера смо показали да она мора имати бар једну нулу на јединичном диску. Означимо са $z_1, z_2, \ldots, z_m$ нуле на јединичном диску (њихов број мора бити коначан у супротном ће функција бити $f \equiv 0$). Посматрајамо функцију

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{m} \frac{z - z_i}{1 - \overline{z}_i z}}.$$

Функција је холоморфна на $\mathbb{D}$ и нема нула у $\mathbb{D}$. Ако применимо теорему која важи за функцију φ_α закључујемо да $|g(z)| = 1$ за $|z| = 1$. Функција g је константна (зато што нема нула на јединичном диску, поменути пример) и важи $g(z) = C$ за свако $z \in \mathbb{D}$. Због услова датих у примеру видимо да $|C| = 1$. Добили смо да за функције које задовољавају ове услове важи

$$f(z) = C \prod_{i=1}^{m} \frac{z - z_i}{1 - \overline{z}_i z}. \qquad \square$$

Теорема 2.5 ([5],[4, стр. 77])**.** *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ хармонијска функција таква да важи $f(0) = 0$. Онда је*

$$|f(z)| \leq \frac{4}{\pi} \arctan|z|, \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}.$$

Ова неједнакост је најоштрија процена за сваку тачку једничног диска $z \in \mathbb{D}$.

Теорема 2.6 ([6, Теорема 1])**.** *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ хармонијска функција. Тада важи:*

$$\left| f(z) - \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} f(0) \right| \leq \frac{4}{\pi} \arctan|z|, \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}.$$

Теорема 2.7 ([15, Теорема 6])**.** *Нека је $u : \mathbb{D} \to (-1, 1)$ хармонијска функција таква да је $u(0) = b$ и $a = \tan \frac{b\pi}{4}$. Тада је*

$$\frac{4}{\pi} \arctan \frac{a - |z|}{1 - a|z|} \leq u(z) \leq \frac{4}{\pi} \arctan \frac{a + |z|}{1 + a|z|}, \qquad \text{за свако } z \in \mathbb{D}.$$

Ова неједнакост је оштра за сваку тачку јединичног диска $\mathbb{D}$.

Теорема 2.8 (Принцип субординације)**.** *Нека су f, g холоморфне функције јединичног диска $\mathbb{D}$ у неку просто повезану област Ω и $f(0) = g(0)$. Претпоставимо да је g $1 - 1$ и $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$, тада важи*

$$|f'(0)| \leq |g'(0)| \text{ и } f(\overline{\mathbb{U}_r}) \subset g(\overline{\mathbb{U}_r})$$

где је $0 < r < 1$, $\overline{\mathbb{U}_r} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

Доказ. Пошто је g пресликавање $1-1$ оно је у ствари конформно пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ на $g(\mathbb{D})$. Нека је h инверз од g. Тада је $h \circ f$ холоморфно пресликавање јединичног диска $\mathbb{D}$ у себе и $(h \circ f)(0) = 0$ пошто је $f(0) = g(0)$. Користећи Шварцову лему закључујемо да важи:

$$(h \circ f)'(0)| \leq 1 \text{ и } |(h \circ f)(z)| \leq |z| \text{ за свако } z \in \mathbb{D}.$$

Како је $(h \circ f)'(0) = \frac{f'(0)}{g'(0)}$, из прве неједнакости ћемо добити $|f'(0)| \leq |g'(0)|$.
Фиксирајмо неко r тако $0 < r < 1$. Нека је $z \in \overline{\mathbb{U}_r}$ тј. $|z| \leq r$ и $f(z) = w$, $w \in f(\overline{\mathbb{U}_r})$.
Из друге неједнакости добијамо да важи

$$|(h \circ f)(z)| \leq |z|, \quad |h(w)| \leq |z|, \quad |h(w)| \leq r.$$

Пошто је $f(\mathbb{D}) \subset g(\mathbb{D})$ постоји неко z_1 тако да $z_1 = g^{-1}(w)$ и за то z_1 важи $|g^{-1}(w)| \leq r$ тј. $|z_1| \leq r$ па је $z_1 \in \overline{\mathbb{U}_r}$.Тиме смо добили да је $w \in g(\overline{\mathbb{U}_r})$ па ће бити $f(\overline{\mathbb{U}_r}) \subset g(\overline{\mathbb{U}_r})$ што је и требало доказати.

$\square$

3

Шварц-Пикова лема

Теорема 3.1 (Шварц-Пикова лема). *Нека је функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ аналитичка, онда важи*

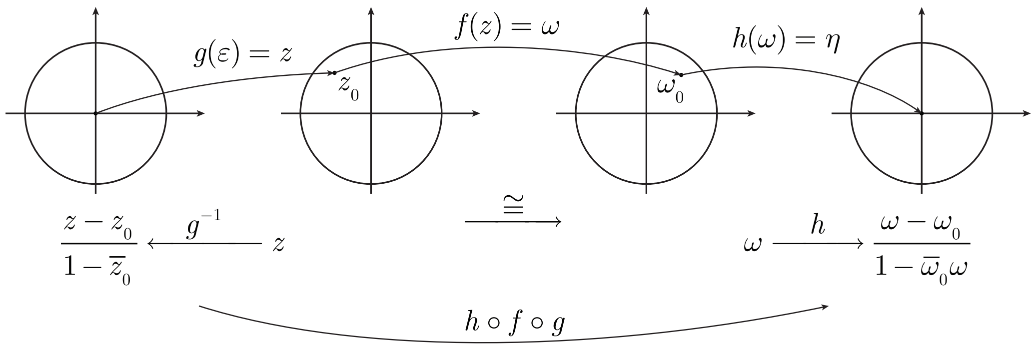
$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad \text{за свако } z \in \mathbb{D}$$

као и

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)} f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2} z_1} \right|, \quad \text{за свако } z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$$

Једнакост важи у неким тачкама јединичног диска $\mathbb{D}$, ако и само ако је f холоморфни аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$.

Доказ. Дефинишимо функције $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ и $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ тако да је $h(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w}$ и $g^{-1}(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$, где су $z_0, w_0 \in \mathbb{D}$. Напоменимо да важи $g(z) = \frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}$. Сада посматрајмо функцију $h \circ f \circ g$ која је холоморфни аутоморфизам јединичног диска који фиксира нулу тј. важи $(h \circ f \circ g)(0) = (h(f(z_0)) = h(w_0) = 0$. Применимо



Слика 4

Шварцову лему на функцију $h \circ f \circ g$. Доказали смо да модуо првог извода у нули мора бити мањи или једнак један тј. $|(h \circ f \circ g)'(0)| \leq 1$.
Када израчунамо извод ове сложене функције видећемо да важи $|h'(f(g(0)))f'(g(0))g'(0)| \leq 1$. На основу даљег рачуна, како смо дефинисали функције f и g добићемо неједнакост $|h'(w_0)||f'(z_0)||g'(0)| \leq 1$. Затим, када израчунамо прве изводе функција h у тачки w_0 и функције g у нули, добијамо да важи:

$$|\frac{1}{1 - |w_0|^2}||f'(z_0)||1 - |z_0|^2| \leq 1.$$

Пошто се тачке w_0 и z_0 налазе у јединичном диску, биће $|\frac{1}{1-|w_0|^2}| = \frac{1}{1-|w_0|^2}$ као и $|1-|z_0|^2| = 1-|z_0|^2$. Због тога претходна неједнакост се своди на $\frac{1}{1-|w_0|^2}|f'(z_0)|(1-|z_0|^2) \leq 1$. Па из претходног следи прва неједнакост коју је требало доказати

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1-|w_0|^2}{1-|z_0|^2}.$$

Напомена:

$$z = g(\xi) = \frac{\xi + z_0}{1+\overline{z}_0\xi},$$

$$g'(\xi) = \frac{(1+\overline{z}_0\xi)-(\xi+z_0)\overline{z}_0}{(1+\overline{z}_0\xi)^2} = \frac{1+\overline{z}_0\xi-\xi\overline{z}_0-z_0\overline{z}_0}{(1+\overline{z}_0\xi)^2} = \frac{1-|z_0|^2}{(1+\overline{z}_0\xi)^2},$$

$$|g'(0)| = 1-|z_0|^2 \quad |h'(w_0)| = \frac{1}{1-|w_0|^2}.$$

Проверимо шта се догађа ако за неку тачку важи једнакост. Узмимо неку тачку z_0 тако да важи једнакост, онда би то значило да мора важити и $|(h\circ f\circ g)'(0)| = 1$. Онда ће важити да је функција $h\circ f\circ g$ холоморфни аутоморфизам на $\mathbb{D}$ који фиксира 0. Из тога ће следити да посматрана функција мора бити ротација $(h\circ f\circ g)(\xi) = \mathfrak{e}^{i\alpha}\xi$. Како постоје инверзне функције h^{-1} и g^{-1}, онда је функција f једнака $f = h^{-1}\circ(h\circ f\circ g)\circ g^{-1}$ тј. $f = h^{-1}\circ\mathfrak{e}^{i\alpha}\xi\circ g^{-1}$. Како су све три функције холоморфни аутоморфизми јединичног диска, то ће бити и њихова композиција тј. f је холоморфни аутоморфизам на $\mathbb{D}$. Друга неједнакост теореме такође следи из Шварцове леме. Посматрамо исту функцију дефинисану у првом делу теореме, када применимо Шварцову лему, добићемо следећу неједнакост:

$$|h\circ f\circ g(g^{-1}(z))| \leq |g^{-1}(z)|.$$

Пошто смо користили инверзну функцију, важиће $|h\circ f(z)| \leq |g^{-1}(z)|$, а када функцију f, биће $|h(w)| \leq |g^{-1}(z)|$. На основу дефиниције ових функција h и g, следи неједнакост

$$\left|\frac{w-w_0}{1-\overline{w}_0 w}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|.$$

Тачке w и w_0 су у ствари слике функције f тј. $f(z_0) = w_0$ и $f(z) = w$ па добијамо да важи друга неједнакост ове теореме

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{1-\overline{f(z_0)}f(z)}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right|, \text{ за сваке две тачке } z_0, z \in \mathbb{D}.$$

Ако у претходном важи једнакост онда ће важити и једнакост у $|h\circ f\circ g(g^{-1}(z))| \leq |g^{-1}(z)|$ па је према Шварцовој леми $h\circ f\circ g$ холоморфни аутоморфизам на $\mathbb{D}$ који фиксира 0. Како ћемо функцију f моћи записати kao $f = h^{-1}\circ(h\circ f\circ g)\circ g^{-1}$, закључујемо да она мора бити холоморфни аутоморфизам јединично диска $\mathbb{D}$. $\square$

Последица 3.1. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање и $z \in \mathbb{D}$. Тада је*
$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|}$$

Доказ. Прво приметимо да за неко a и b важи:
$$\begin{aligned}\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|^2 = \frac{(a-b)\overline{(a-b)}}{|1-\bar{b}a|^2} &= \frac{|a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - b\bar{a}}{|1-\overline{ba}|^2} \\ &= 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{|1-\bar{b}a|^2} \\ &\geq 1 - \frac{(1-|a|^2)(1-|b|^2)}{(1-|a||b|)^2} \\ &= \frac{(|a|-|b|)^2}{(1-|a||b|)^2},\end{aligned}$$

па је
$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right| \geq \left|\frac{|a|-|b|}{1-|a||b|}\right|.$$
Ако применимо Шварц-Пикову лему за $z_1 = z$ и $z_2 = 0$, добија се:
$$\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right| \leq |z|$$
Када применимо добијену неједнакост узимајући да је $a = f(z)$, $b = f(0)$, добија се:
$$\left|\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(z)||f(0)|}\right| \leq \left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right| \leq |z|$$
Из чега ће важити:
$$\left|\frac{|f(z)|-|f(0)|}{1-|f(z)||f(0)|}\right| \leq |z|.$$

Из ове неједнакости закључујемо да важи:
$$|f(z)| - |f(0)| \leq |z| - |z||f(z)||f(0)|,$$
као и
$$|f(0)| - |f(z)| \leq |z| - |z||f(z)||f(0)|.$$
Комбинујући ове две неједнакости, добијамо да важи тражена неједнакост. □

Пример 3.1. *Холоморфно пресликавање $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ које није идентитет може имати највише једну фиксну тачку.*

Доказ. Претпоставимо супротно, тј. да пресликавање има две различите фиксне тачке $a, b \in \mathbb{D}$. Дефинишимо функцију $F = \varphi_a \circ f\varphi_{-a}$ која је холоморфно пресликавање као композиција таквих функција и слика јединични диск у себе.

Како важи:

$$F(0) = (\varphi_a \circ f\varphi_{-a})(0) = (\varphi_a \circ f)(a) = \varphi_a(a) = 0,$$

онда се може применити Шварцова лема. Како је $F(\varphi_a(a)) = (\varphi_a \circ f)(b) = \varphi_a(b) \neq 0$, јер $a \neq b$, биће $|F(\varphi_a)| = |\varphi_a|$. Ова функција је ротација тј. $F(z) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ и неко $z \in \mathbb{D}$. Пошто је $f(\varphi_a(b)) = \varphi_a(b)$, функција је идентитет па је $\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$. Биће $\varphi_a \circ f \circ \varphi_{-a} = id_{\mathbb{D}}$. Па можемо закључити да је $f = \varphi_{-a} \circ \varphi_a$, па ће f бити идентитет, што је у контрадикцији са условима примера. □

Теорема 3.2. *За холоморфну функцију*

$$f : D(0,r) \to D(0,R), \quad r > 0,\ R > 0$$

и за $z, w \in D(0,r)$ важи:

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w}\right| \leq \frac{2Rr}{|r^2 - \overline{w}z|}.$$

Доказ. Узмимо произвољне $z, w \in D(0,r)$ и нека је $z_1 = \frac{z}{r}$, $w_1 = \frac{w}{r}$. Следи $z_1, w_1 \in \mathbb{D}$. Дефинишимо функцију $g(\xi) = \frac{f(r\xi)}{R}$. Тада је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција као композиција таквих, па применом Шварц-Пикове леме добијамо:

$$\left|\frac{g(z_1) - g(w_1)}{1 - \overline{g(w_1)}f(w_1)}\right| = \left|\frac{z_1 - w_1}{1 - \overline{w_1}z_1}\right|.$$

Из претходног следи:

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{1 - \frac{\overline{f(w)}f(z)}{R^2}}\right| = Rr\left|\frac{z - w}{r^2 - \overline{w}z}\right|,$$

и важи:

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w}\right| = \frac{Rr|1 - \frac{\overline{f(w)}f(z)}{R^2}|}{|r^2 - \overline{w}z|},$$

а како имамо:

$$\left|1 - \frac{\overline{f(w)}f(z)}{R^2}\right| \leq 1 + \frac{|f(w)||f(z)|}{R^2} \leq 2,$$

то следи тражена једнакост. □

Теорема 3.3. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција и $f(0) = 0$. Тада је*

$$|f(z)| \leq |z|\frac{|f'(0)| + |z|}{1 + |f'(0)||z|}$$

за све $z \in \mathbb{D}$.

Доказ. Тејлоров развој функције f на јединичном диску је $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Тада је $a_0 = f(0) = 0$ и $a_1 = f'(0)$. Функција $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty}$ је холоморфна на јединичном диску јер је представљена степеним редом и важи $f(z) = zg(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Како је $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ за све $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ и $g(0) = f'(0)$, применом Шварцове леме добијамо да је $|g(z)| \leq 1$ за све $z \in \mathbb{D}$. Најпре, претпоставимо да важи $|g(z_0)| = 1$ за неко $z_0 \in \mathbb{D}$ тада ће у Шварцовој леми важити једнакост па ће функција f бити ротација, тј. важиће $f(z) = z\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ за све $z \in \mathbb{D}$ и неко $\alpha \in \mathbb{R}$. Следи

$$|f(z)| = |\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha} z| = |z| = |z| \left| \frac{|\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}| + |z|}{1 + |\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}||z|} \right| = |z| \frac{|f'(0)| + |z|}{1 + |f'(0)||z|}$$

за све $z \in \mathbb{D}$, тј. доказили смо теорему.

Ако претпоставимо да је $|g(z)| < 1$ за све, онда је $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна функција, па применом последице 3.1 добијамо:

$$|g(z)| \leq \frac{|g(0)| + |z|}{1 + |g(0)||z|} = \frac{|f'(0)| + |z|}{1 + |f'(0)||z|}$$

за све $z \in \mathbb{D}$.

Специјално, за $z \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ важи:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{|f'(0)| + |z|}{1 + |f'(0)||z|},$$

односно

$$|f(z)| \leq |z| \frac{|f'(0)| + |z|}{1 + |f'(0)||z|}.$$

Једнакост ће важити и у нули, пошто су тада и лева и десна страна једнаке нули, па је завршно са тим доказана теорема. $\square$

4

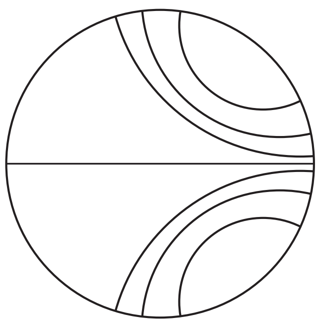
Хиперболичка геометрија на јединичном диску

1. Поенкареов диск модел

У овог поглављу разматраћемо само особине основних геометријских појмова и релација у моделу хиперболичке геометрије,конкретно у планиметрији. у моделу хиперболичке геометрије важе све аксиоме Хилбертовог система аксиома као и аксиома Лобачевског.

Аксиома Лобачевског: Постоје права a и тачка A ван праве a тако да у њима одређеној равни кроз тачку A пролазе две различите праве a_1 и a_2 које са правом a немају заједничких тачака.

Уочимо у еуклидској равни круг k који ћемо звати апсолтни круг или само апсолута. Сваку тачку која припада унутрашњости тог круга k, не рачунајући и тачке самог круга, зваћемо H тачкама. H-права је онај круг или права који је ортогоналан на k, тачније, „праве“ у овом моделу су отворене тетиве које садрже центар круга и отворени лукови кругова нормални на посматрани. Прецизније, нека је l круг ортогоналан на круг k. Тада пресек круга l са унутрашњости круга k даје отворен лук, који представља „праву“ у Поенкареовом диск моделу, док је права p отворена тетива која садржи центар посматраног круга и такође представља „праву“ у Поенкареовом диск моделу.



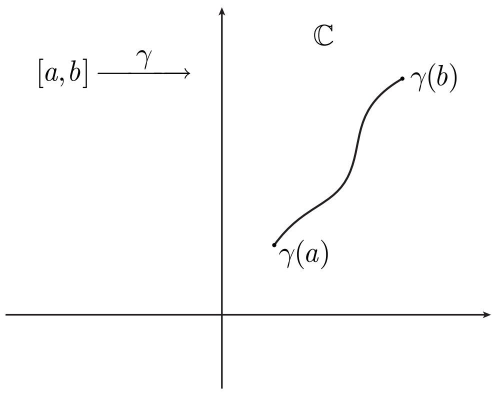
Слика 5

Дефиниција 4.1. *Функција ρ је метрика на области $\Omega \in \mathbb{D}$ ако је $\rho(z) > 0$ за све $z \in \Omega$ и $\rho \in C^2(\Omega)$. У односу на метрику ρ, дужина вектора υ у тачки $z \in \Omega$ једнака је $|\upsilon|_{\rho,z} = \rho(z)|\upsilon|$, где је $|\upsilon|$ стандардна(еуклидска)дужина вектора υ.*

Такође, дужина непрекидно диференцијлне криве $\gamma : [a, b] \to \Omega$ јесте дата са $l_\rho(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|_{\rho,\gamma(t)} dt$. Дужина део по део непрекидно диференцијабилне криве јесте сума дужина њених непрекидно диференцијабилних делова. Приметимо да је:

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b \rho(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = \int_\gamma \rho(z)|dz|$$

Растојање између тачака $z_0, z_1 \in \Omega$, у односу на метрику ρ, дефинишемо као $d_\rho(z_0, z_1) = \inf_\gamma l_\rho(\gamma)$, при чему се наведени инфимум узима по свим део по део непрекидно диференцијабилним кривама $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ таквим да је $\gamma(0) = z_0$ и $\gamma(1) = z_1$.



Слика 6

Дефиниција 4.2. *За дати скуп X функција $d : X \times X \to [0, \infty)$ назива се матриком на X, а (X, d) метричким простором ако је*

(1) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ за све $x, y \in X$
(3) $d(x, y) \leq d(x, z)(z, y)$ за све $x, y, z \in X$

Покажимо да је (Ω, d_ρ) метрички простор. Одмах по дефиницији важи $d_\rho(z_0, z_1) \geqslant 0$ и $d_\rho(z_0, z_0) = 0$ за све $z_0, z_1 \in \Omega$. Нека је $d_\rho(z_0, z_1) = 0$ за неке $z_0, z_1 \in \Omega$ и претпоставимо да је $z_0 \neq z_1$. Тада постоји $\epsilon > 0$ тако да је $D(z_0, \epsilon) \subset \Omega$ и $z_1 \notin D(z_0, \epsilon)$. Затворен диск $D[z_0, \epsilon]$ је компактан скуп тако да функција ρ на њему достиже свој минимум $m = \min_{D[z_0,\epsilon]} \rho > 0$ По дефиницији је $d_\rho(z_0, z_1) = inf_\gamma \int_\gamma \rho(z)|dz|$, то постоји део по део непрекидно диференцијабилна крива $\gamma : [0, 1] \to \Omega$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ таква да је $inf_\gamma \int_\gamma \rho(z)|dz| < m\epsilon$. Из тога даље следи

$$m\epsilon > \int_\gamma \rho(z)|dz| \geqslant \int_{\gamma \bigcap D[z_0,\epsilon]} \rho(z)|dz| \geqslant m \int_{\gamma \bigcap D[z_0,\epsilon]} |dz| \geq m\epsilon$$

Добили смо контрадикцију пошто $\gamma \bigcap D[z_0, \epsilon]$ представља део криве садржан у затвореном диску $D[z_0, \epsilon]$. Према томе, ако је $d_\rho(z_0, z_1) = 0$ мора бити $z_0 = z_1$.

За део по део непрекидну криву $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\gamma(0) = z_0$ и $\gamma(1) = z_1$ дефинишемо $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$. Тада је $\gamma^{-1} : [0,1] \to \Omega$ део по део непрекидно диференцијабилна крива и $\gamma^{-1}(0) = z_1$, $\gamma^{-1}(1) = z_0$. Осим тога, важи и:

$$l_\rho(\gamma^-) = \int_0^1 \rho(\gamma^-(t))|(\gamma^-)'(t)|dt = \int_0^1 \rho(\gamma(1-t))|(\gamma'(1-t)|dt = \int_0^1 \rho(\gamma(s))|\gamma'(s)|ds = l_\rho(\gamma)$$

Тиме добијамо да важи:

$$d_\rho(z_0, z_1) = \inf_\gamma l_\rho(\gamma) = \inf_{\gamma^-} l_\rho(\gamma^-) = d_\rho(z_1.z_0)$$

Нека су $\gamma : [0,1] \to \Omega$, $\beta : [0,1] \to \Omega$ део по део непркидно диференцијабилне криве такве да је $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_2$ и $\beta(0) = z_2$, $\beta(1) = z_1$ где су z_0, z_1, z_2 произвољно одабране тачке из Ω. Дефинишимо део по део непрекидно диференцијабилну криву $\alpha : [0,1] \to \Omega$ на следећи начин

$$\alpha(t) = \begin{cases} \beta(2t) & \text{за } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2t-1) & \text{за } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

За криву α важи $\alpha(0) = z_0$, $\alpha(1) = z_2$. Даље следи

$$d_\rho(z_0, z_1) \leq l_\rho(\alpha) = \int_0^1 \rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|dt =$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \rho(\gamma(2t))|\gamma'(2t)|(2dt) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \rho(\beta(2t-1))|\beta'(2t-1)|d(2t-1) =$$

$$\int_0^1 \rho(\gamma(s))|\gamma'(s)|ds + \int_0^1 \rho(\beta(s))|\beta'(s)|ds = l_\rho(\gamma) + l_\rho(\beta)$$

Када пређемо на инфимуме по свим кривим γ и β добијамо $d_\rho(z_0, z_1) \leq d_\rho(z_0, z_2) + d_\rho(z_2, z_1)$.

Дефиниција 4.3. *Нека су Ω_1, Ω_2 области и ρ_1, ρ_2 метрике на њима, тим редом. За холоморфно, бијективно пресликавање $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ кажемо да је изометрија парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_2, ρ_2) ако важи $\rho_1(z) = (f^*\rho_2)(z)$ за све $z \in \Omega_1$, где је $(f^*\rho_2) = \rho_2(f(z))|f'(z)|$.*

Лема 4.1. *Ако је f изометрија парова (Ω_1, ρ_1) и (Ω_2, ρ_2), g изометрија парова (Ω_2, ρ_2) и (Ω_3, ρ_3), тада је $f \circ g$ изометрија парова (Ω_1, ρ_1), (Ω_3, ρ_3).*

Доказ. Уочимо да ће пресликавање $f \circ g$ бити холоморфно и бијективно као композиција таквих. За произвољно $z \in \Omega_1$ важи:

$$((g \circ f)^*\rho_3)(z) = \rho_3((g \circ f)(z))|(g \circ f)'(z)| =$$

$$\rho_3(g(f(z)))|g'(f(z))||f'(z)| = \rho_2(f(z))|f'(z)| = \rho_1(z)$$

Дакле, следи доказ леме да је $g \circ f$ изометрија парова (Ω_1, ρ_1), (Ω_3, ρ_3) $\square$

Дефиниција 4.4. *За метрику $\rho(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$ на јединичном диску $\mathbb{D}$ кажемо да је Поинкареова или хиперболичка метрика.*

Лема 4.2. *Нека је ρ Поинкареова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$ и $h \in Aut(\mathbb{D})$. Тада је h изометрија парова $(\mathbb{D}, \rho)$ и $(\mathbb{D}, \rho)$.*

Доказ. Функција $h \in Aut(\mathbb{D})$,па самим тим знамо да мора постојати α и $a \in \mathbb{D}$ такви да је $h(z) = \mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ за све $z \in \mathbb{D}$. Функција h је холоморфна и бијективна. Важи

$$(h^*\rho)(z) = \rho(h(z))|h'(z)| = \frac{2}{1-|\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\alpha}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}|^2} \cdot \Big|\frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}\Big|$$

Закључили смо да је $(h^*\rho)(z) = \rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$. Према томе, h је заиста изометрија парова $(\mathbb{D}, \rho)$ и $(\mathbb{D}, \rho)$. $\square$

Посматрајмо сада неку функцију h која је холоморфни аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ у себе $h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $h \in Aut(\mathbb{D})$. Желимо да покажемо да је h хиперболичка изометрија тј. $d_\rho(h(z_1), h(z_2)) = d_\rho(z_1, z_2)$ за произвољне две тачке $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$. Нека је дата нека крива γ део по део непрекидно диференцијабилна таква да $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$, $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(1) = z_2$.Нека је $\Gamma = h \circ \gamma$ крива, такође део под део непрекидно диференцијабилна и њену хиперболичку дужину можемо израчунати као:

$$l_\rho(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{2}{1-|w|^2}|dw| = \int_0^1 \frac{2}{1-|\Gamma(t)|^2}|\Gamma'(t)|dt.$$

Пошто је h аутоморфизам на $\mathbb{D}$ важиће једнакост у Шварц-Пиковој леми тј. $\frac{|h'(\gamma(t))|}{1-|h(\gamma(t))|^2} = \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2}$. Па је се претходна једнакост своди на:

$$\int_0^1 \frac{2}{1-|h(\gamma(t))|^2}|h'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_0^1 \frac{2}{1-|\gamma(t)|^2}|\gamma'(t)|dt = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz|$$

Узмимо инфимум по свим кривим γ

$$\inf_\gamma \int_{h\circ\gamma} \frac{2}{1-|w|^2}|dw| = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz| = d_\rho(z_1, z_2).$$

Знамо да је $(h \circ \gamma)(0) = h(z_1)$, $(h \circ \gamma)(1) = h(z_2)$. Нека је $C : [0, 1] \to \mathbb{D}$ нека део по део непрекидно диференцијабилна крива тако да важи $C(0) = h(z_1)$, $C(1) = h(z_2)$. Онда је по дефиницији $d(h(z_1), h(z_2)) = \inf_C \int_C \frac{2}{1-|w|^2}|dw|$. Пошто је $h \circ \gamma$ "само једна врста" C онда ће бити:

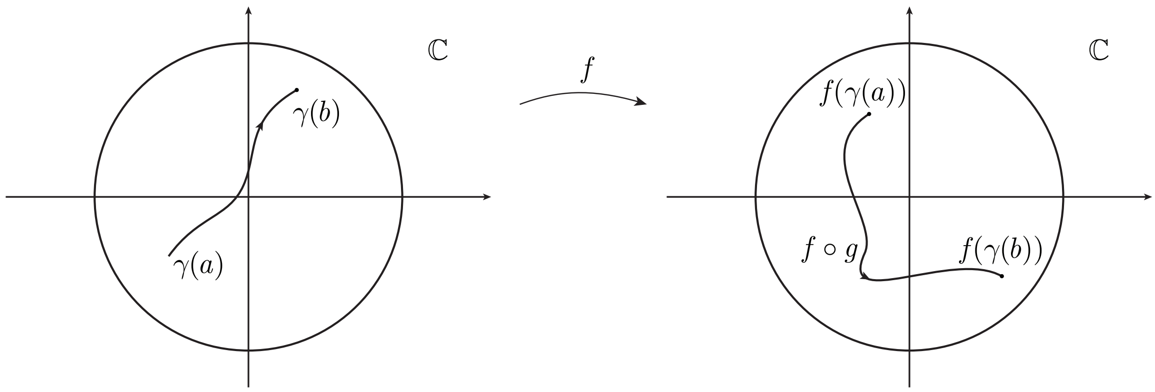
$$\{h\circ\gamma \mid \gamma[0, 1] \to \mathbb{D}, \gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2\} \subset \{C \mid C : [0, 1] \to \mathbb{D}, C(0) = h(z_1), C(1) = h(z_2)\}$$

Како је инфимум по мањем скупу већи онда важи:

$$\inf_\gamma \int_{h\circ\gamma} \frac{2}{1-|w|^2}|dw| \geqslant \inf_C \int_C \frac{2}{1-|w|^2}|dw| = d(h(z_1), h(z_2))).$$

Добили смо да је $d_\rho(z_1, z_2) \geqslant d_\rho(h(z_1), h(z_2))$. Али пошто је h аутоморфизам онда имамо и h^{-1} који је такође аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, $h^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ па ће бити и $d_\rho(h(z_1), h(z_2)) \geqslant d_\rho(h^{-1}(h(z_1)), h^{-1}(h(z_2)))$ тј. $d_\rho(z_1, z_2) = d_\rho(h(z_1), h(z_2))$.

Оно што можемо закључити на основу претходног је да холоморфни аутоморфизми



Слика 7

јединичног диска чувају хиперболичку дужину.
Узмимо да је f изометрија парова (Ω_1, ρ_1), (Ω_2, ρ_2). Ако је $\gamma : [a, b] \to \Omega_1$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, означимо $f^*\gamma = f \circ \gamma$. Тада је $f^*\gamma : [a, b] \to \Omega_2$ такође, део по део непрекидно диференцијабилна крива. Важи:

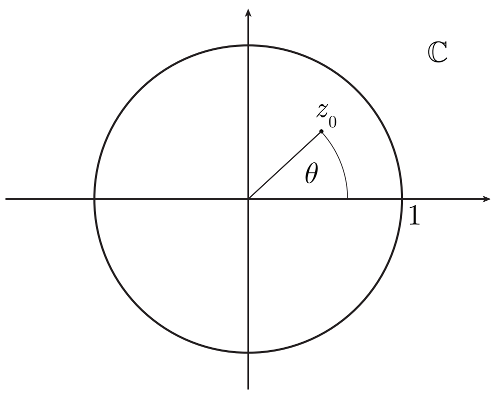
$$l_{\rho_1}(\gamma) = \int_\gamma \rho_1(z)|dz| = \int_\gamma \rho_2(f(z))|f'(z)||dz| = \int_{f\circ\gamma} \rho_2(w)|dw| = \int_{f^*\gamma} \rho_2(w)|dw| = l_{\rho_2}(f^*\gamma)$$

Из претходног, може се закључити да важи

$$d_{\rho_1}(z_0, z_1) = \inf_\gamma l_{\rho_1}(\gamma) = \inf_{f^*\gamma} l_{\rho_2}(f^*\gamma) = d_{\rho_2}(f(z_0), f(z_1))$$

У ствари, важиће $d_{\rho_1}(z_0, z_1) = d_{\rho_2}(f(z_0), f(z_1))$ за све $z_0, z_1 \in \Omega_1$. Осим тога за све $z \in \Omega_1$ важиће $\rho_1(z)|(f^{-1})'f(z)| = \rho_1(z)\frac{1}{|f'(z)|} = \rho_2(f(z))$. На основу тога следи $\rho_1(f^{-1}(w))|(f^{-1})'(w))| = \rho_2(w)$ за све $w \in \Omega_2$, тако де је пресликавање f^{-1} изометрија парова (Ω_1, ρ_1), (Ω_2, ρ_2).

Посматрајмо јединични диск и узмимо неку тачку $z_0 \in \mathbb{D}$. Нека је $z_0 = r_0\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$,



Слика 8

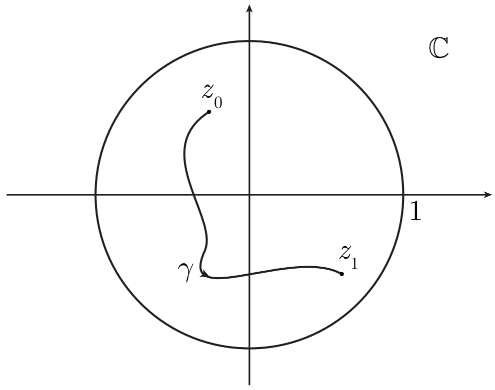
$\gamma : [0, r_0] \to \mathbb{D}$ и $t \to t\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Еуклидска дужина криве γ је: $l(\gamma) = \int\limits_{\gamma} |dz| = \int\limits_{0}^{r_0} |d(t\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta})| = \int\limits_{0}^{r_0} |\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta_0}|dt = \int\limits_{0}^{r_0} dt = r_0 < 1$

Хиперболичка дужина криве γ:

$$l_\rho(\gamma) = \int\limits_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \int\limits_{0}^{r_0} \frac{2|d(t\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta_0})|}{1-|t\mathfrak{e}^{\mathrm{i}\theta_0}|} = \int\limits_{0}^{r_0} \frac{2dt}{1-t^2} =$$

$$= \int\limits_{0}^{r_0} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \ln \frac{1+t}{1-t}\Big|_0^{r_0} = \ln \frac{1+r_0}{1-r_0}$$



Слика 9

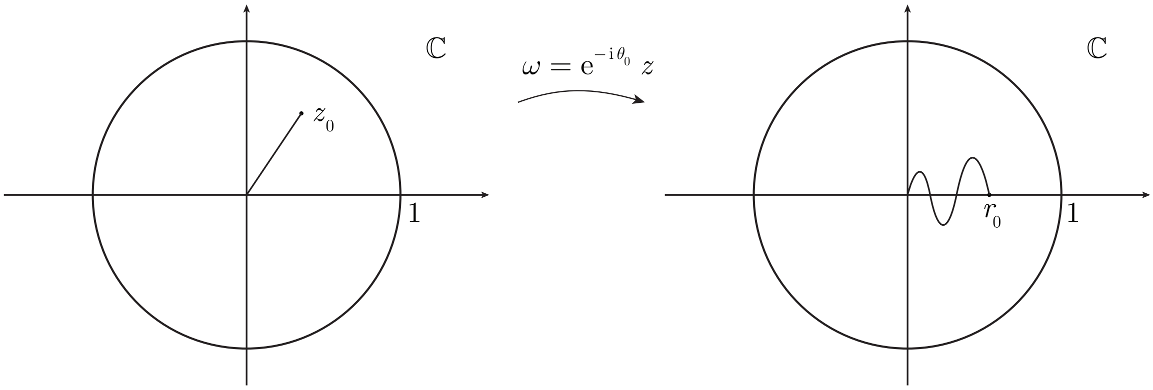
Лема 4.3. *За произвољно одабране тачке $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ важи $d_\rho(z_0, z_1) = \ln \frac{1+|\varphi_{z_0}(z_1)|}{1-|\varphi_{z_0}(z_1)|}$, где је ρ Поинкареова метрика на јединичном диску $\mathbb{D}$.*

Доказ. Ако је $z_0 = z_1$ тада је $d_\rho(z_0, z_1) = 0$ и $|\varphi_{z_0}(z_0)| = 0$ па тривијално следи једнакост. Зато ћемо претпоставити да је $z_0 \neq z_1$. Пресликавање φ_{z_0} јесте аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, па применом претходног става добијамо $d_\rho(z_0, z_1) = d_\rho(\varphi_{z_0}(z_0), \varphi_{z_0}(z_1)) = d_\rho(0, \varphi_{z_0}(z_1))$. Ротација $f : z \to \mathfrak{e}^{-\mathrm{i}arg\varphi z_0(z_1)}$ такође је један аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$, тако да је:

$$d_\rho(0, \varphi_{z_0}(z_1)) = d_\rho(0, \mathfrak{e}^{-\mathrm{i}arg\varphi_{z_0}(z_1)}\varphi_{z_0}(z_1)) = d_\rho(0, |\varphi_{z_0}(z_1)|)$$

Из претходног добијамо $d_\rho(z_0, z_1) = d_\rho(0, |\varphi_{z_0}(z_1)|) = d_\rho(0, r)$, где је $r = |\varphi_{z_0}(z_1)|$. Нека је $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{D}$ произвољно одабрана, део по део непрекидно диференцијабилна крива, таква да је $\gamma(0) = 0$ и $\gamma(1) = r$. Neka је $\alpha = Re(\gamma)$ и $\beta = Im(\gamma)$ тј. $\gamma(t) = \alpha(t) + \mathrm{i}\beta(t)$ за све $t \in [0, 1]$. Следи да је $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(1) = r$. Тада је:

$$l_\rho(\gamma) = \int_\gamma \rho(z)|dz| = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz| = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}dt \geqslant \int_0^1 \frac{2|\alpha'(t)|}{1-\alpha(t)^2}dt = l_\rho(\alpha)$$



Слика 10

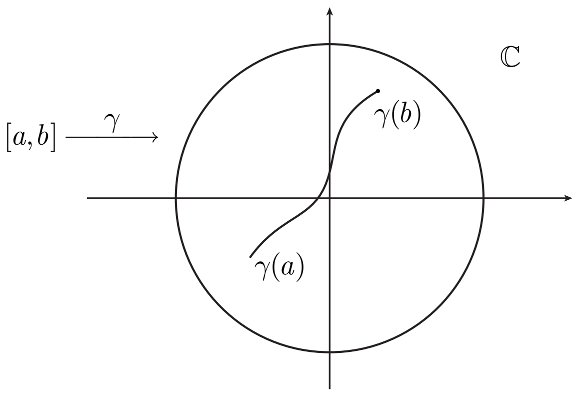
Нека је функција α_1 добијена модификацијом функције α, тако што је α_1 на интервалима опадања функције α константно једнака вредности функције α у почетној тачки посматраног интервала опадања. Ван интервала опадања функције α, функције α_1 и α су једнаке. Сада је α_1 растућа функција $\alpha_1(0) = 0$, $\alpha_1(1) = r$. Према томе важи:

$$l_\rho(\gamma) \geqslant l_\rho(\alpha) \geqslant l_\rho(\alpha_1) = \int_0^1 \frac{2\alpha_1'(t)}{1-\alpha_1(t)^2} dt = \int_0^r \frac{2}{1-s^2} ds = \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Преласком на инфимум по свим кривим γ добијамо да важи $d_\rho(0,r) \geqslant \ln \frac{1+r}{1-r}$. Са друге стране, посматрајмо криву $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ дефинисану са $\Gamma(t) = rt$. Важи $\Gamma(0) = 0$ и $\Gamma(1) = r$, тако да је:

$$d_\rho(0,r) \leq l_\rho(\Gamma) = \int_0^1 \frac{2\Gamma'(t)}{1-\Gamma(t)^2} = \int_0^r \frac{2}{1-s^2} ds = \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Добијамо да важи $d_\rho(0,r) = \ln \frac{1+r}{1-r}$ односно $d_\rho(z_0, z_1) = d_\rho(0,r) = \ln \frac{1+r}{1-r} = \ln \frac{1+|\varphi_{z_0}(z_1)|}{1-|\varphi_{z_0}(z_1)|}$.
$\square$



Слика 11

Теорема 4.1. *Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно пресликавање и ρ Поинкареова метрика. Тада важи:*
(а)$(f^*\rho)(z) \leq \rho(z)$ за све $z \in \mathbb{D}$.
(б)$l_\rho(f * \gamma) \leq l_\rho(\gamma))$ за сваку део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$
(ц)$d_\rho(f(z_0), f(z_1)) \leq d_\rho(z_0, z_1)$ за све $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$.

Доказ. (а)Познато нам је да важи

$$(f^*\rho)(z) = \rho(f(z))|f'(z)| = \frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{2}{1-|z|^2} = \rho(z)$$

за све $z \in \mathbb{D}$,при чену смо у горе наведеној неједнакости користили Шварц-Пикову лему.
(б)За произвољну део по део непрекидно диференцијабилну криву $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ важи:

$$l_\rho(f * \gamma) = \int_{f*\gamma} \rho(z)|dz| = \int_0^1 \rho(f(\gamma(t)))|f'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt =$$
$$\int_\gamma \rho(f(z))|f'(z)||dz| = \int_\gamma (f * \rho)(z)|dz|$$

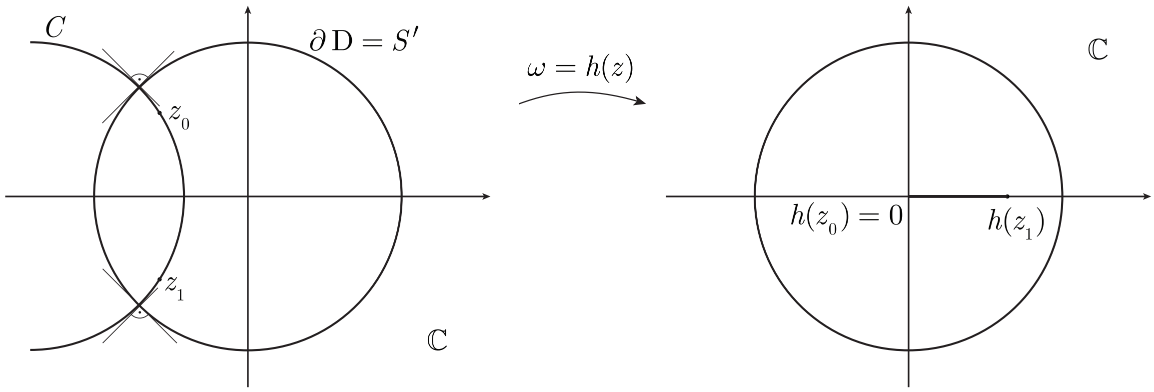
Ако искористимо део под (а) добијамо $l_\rho(f * \rho) \leq \int_\gamma (f * \rho)(z)|dz| = l_\rho(\gamma)$.
(ц)Нека је $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$ и $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива таква да важи $\gamma(0) = z_0$ и $\gamma(1) = z_1$. Тада је $f*\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}$ део по део непрекидно диференцијабилна крива, при чему је $(f*\gamma)(0) = f(z_0)$ и $(f*\gamma)(1) = f(z_1)$. Следи $d_\rho(f(z_0), f(z_1)) \leq l_\rho(f*\gamma) \leq l_\rho(\gamma)$. Преласком на инфимум по свим таквим кривама γ добићемо $d_\rho(f(z_0), f(z_1)) \leq d_\rho(z_0, z_1)$. □

Лема 4.4. *За две тачке $z_0, z \in \mathbb{D}$ можемо наћи аутоморфизам h на $\mathbb{D}$, такав да је $h(z_0) = 0$ и $h(z)$ је реално.*

Доказ. Како h мора бити холоморфни аутоморфизам јединичмог диска $\mathbb{D}$ знамо да ће бити облика $h(z) = \mathfrak{e}^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$, где је $h \in Aut(\mathbb{D})$. Узмимо да је $\alpha = -\arg \frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$. При тако изабраном h биће $h(z_0) = 0$ као и $\arg h(z) = 0$ тј. слика $h(z)$ ће бити реална вредност. □

Теорема 4.2. *За било које две тачке $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq z_1$ отворен лук круга који садржи тачке z_0 и z_1 и нормалан је на S^1 је јединствен пут чијом ћемо интеграцијом наћи хиперболичко растојање између дате две тачке.*

Доказ. Узмимо функцију h дефинисану као у претходној леми, уочимо круг C који је нормалан на S^1 и садржи тачке $z_0, z \in \mathbb{D}$. Како ће функција сликати дате тачке у нулу и неку реалну вредност, тада ће слика $h(C \cap \mathbb{D})$ бити дијаметар на реалној оси (пошто комфорно пресликавање чува углове). Како ће бити $d_\rho(z_0, z) =$



Слика 12

$d_\rho(h(z_0), h(z))$ Тиме смо доказали да је тај отворен лук крива по којој вршимо интеграцију при рачунању хиперболичког растојања. $\square$

Циљ рада је био да покажемо како аналитичке функције утичу на хиперболичко растојање између две тачке тј. да упоредимо хиперболичко растојање између две тачке јединичног диска са хиерболичким растојање између слика тих тачака при чему их пресликавамо аналитичким функцијама јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе. Већ смо то доказали али истакнимо још једном резултат следећом теоремом.

Теорема 4.3. *Аналитичко пресликавање $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ је или аутоморфизам који је изометрија (чува хиперболичку метрику) или није аутоморфизам који је контракција.*

Ако је функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ онда је $d_\rho(f(z_0), f(z_1)) \leq d_\rho(z_0, z_1)$ за свако $z_0, z_1 \in \mathbb{D}$

Једнакост важи за било који пар $z_0 \neq z_1$ ако и само ако $f \in Aut(\mathbb{D})$.

$$d_\rho(f(z_0), f(z_1)) = d_\rho(z_0, z_1) \quad \text{за свако } z_0, z_1 \in \mathbb{D} \text{ ако } f \in Aut(\mathbb{D})$$

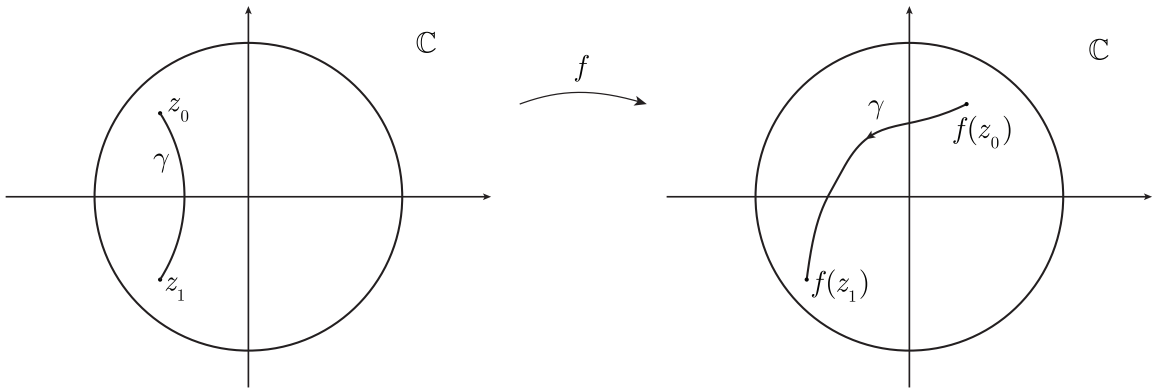
$$d_\rho(f(z_0), f(z_1)) < d_\rho(z_0, z_1) \quad \text{за свако } z_0, z_1 \in \mathbb{D} \text{ ако } f \notin Aut(\mathbb{D})$$

Доказ. Хиперболичко растојање $d_\rho(f(z_0), f(z_1))$ између тачака $f(z_0)$ и $f(z_1)$ тражимо као инфимум одређеног интеграла по свим кривама чије су ово почетна и крајња тачка. У претходној теореми смо показали да се овај инфимум достиже и да се хиперболичка дужина може рачунати као $\int\limits_{f\circ\gamma} \frac{2|dw|}{1-|w|^2}$. Па ће важити:

$$d_\rho(f(z_0), f(z_1)) = \int\limits_{f\circ\gamma} \frac{2|dw|}{1-|w|^2} = \int\limits_{\gamma} \frac{2|f'(z)||dz|}{1-|f(z)|^2}.$$

У претходном изразу према Шварц-Пиковој леми је:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{2|f'(z)||dz|}{1-|f(z)|^2} \leq \int\limits_{\gamma} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = d_\rho(z_0, z_1),$$



Слика 13

Из овога можемо закључити да ако не важи једнакост у Шварц-Пиковој леми тада ће важити $d_\rho(f(z_0), f(z_1)) < d_\rho(z_0, z_1)$, само треба напоменути да ако не важи једнакост онда функција f није холоморфни аутоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$. Ако једнакост важи за неки пар тачака z_0 и z_1, $z_0 \neq z_1$, ако и само ако:

$$\int_\gamma \frac{2|f'(z)||dz|}{1-|f(z)|^2} = \int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2}.$$

тј. на основу Шварц-Пикове леме је $f \in Aut(\mathbb{D})$. $\square$

2. Хиперболичка метрика на просто повезаним областима

Теорема 4.4 (Риманова теорема, [17, Теорема 14.8]). *Свака просто повезана област Ω у комплексној равни (различита од целе комплексне равни) је конформно еквивалентна јединичном диску $\mathbb{D}$.*

Риманова теорема нам омогућава пренесемо хиперболичку метрику јединичног диска на сваку просто повезану област која је прави подскуп комплексне равни.

Дефиниција 4.5. *Нека је функција f конформно пресликавање просто повезане области Ω на јединични диск $\mathbb{D}$. Онда хиперболичку метрику $\rho_\Omega(z)|dz|$ на Ω дефинишемо*

$$\rho_\Omega(z) = \rho(f(z))|f'(z)|.$$

Показаћемо да је метрика ρ_Ω независно од избора конформне функције f , $f : \Omega \to \mathbb{D}$, тј. да зависи само од области Ω. Претпоставимо онда да је функција f конформно пресликавање просто повезане области Ω на јединични диск $\mathbb{D}$. Онда је скуп свих конформних пресликавања Ω на $\mathbb{D}$ дат са $h \circ f$, где је функција h која припада $Aut(\mathbb{D})$. Сваки конформни аутоморфизам h јединичног диска $\mathbb{D}$ је хиперболичка изометрија, тако да за свако w у $\mathbb{D}$ важи:

$$\rho(w) = \rho(h(w))|h'(w)|.$$

Ако узмемо да је функција $g = h \circ f$, $w = f(z)$ добијамо следеће:

$$\rho(g(z))|g'(z)| = \rho(h(f(z)))|h'(f(z))||f'(z)| = \rho(f(z))|f'(z)|.$$

Из овога закључујемо да хиперболичка метрика ρ_Ω на Ω неће зависити од избора конформног пресликавања $f : \Omega \to \mathbb{D}$. Хиперболичко растојање ρ_Ω на просто повезаној области Ω која је прави подскуп комплексне равни може се дефинисати на два начина. Можемо га дефинисати преко хиперболичке метрике јединичног диска као $d_\Omega(z, w) = d_\rho(f(z), f(w))$ за неко конформно пресликавање $f : \Omega \to \mathbb{D}$, а већ смо показали да оно неће зависити од избора функције f. Други начин дефинисања овог хиперболичког растојања би био преко хиперболичке дужине криве γ део по део непрекидно диференцијабилне која спаја тачке z, w у Ω, узимајући њихов инфимум тј. $d_\Omega(z, w) = inf_\gamma \int_\gamma \rho_\Omega(z)|dz|$. Ове две дефиниције су еквивалентне. Суштина претходне дефиниције је да се све особине Поинкареовог диск модела преносе, без битних промена, на просто повезане области које су прави подскупови комплексне равни. Ако је $f : \Omega \to \mathbb{D}$ конформно пресликавање, онда је f изометрија хиперболичке метрике и хиперболичког растојања на Ω и $\mathbb{D}$. Следећа теорема је директна последица претходне дефиниције тако да ћемо њен доказ изоставити.

Теорема 4.5 ([3, Теорема 6.3])**.** *Нека су Ω_1 и Ω_2 просто повезане области које су прави подскупови комплексне равни $\mathbb{C}$, и нека је f конформно пресликавање Ω_1 на Ω_2. Тада је f хиперболичка изометрија, тако да за свако z у Ω_1 важи:*

$$\rho_{\Omega_2}(f(z))|f'(z)| = \rho_{\Omega_1}(z),$$

и за свако $z, w \in \Omega_1$

$$d_{\Omega_2}(f(z), f(w)) = d_{\Omega_1}(z, w).$$

Приметимо да ако је γ део по део непрекидно диференцијабилна крива у Ω_1 онда из дефиниције важи $l_{\Omega_2}(f \circ \gamma) = l_{\Omega_1}(\gamma)$. Претходна теореме тврди да сваки елемент од $Aut(\Omega)$, група конформних изоморфизама на Ω, је хиперболичка изометрија.

Теорема 4.6 (Шварц-Пикова лема за просто повезане области, [3, Теорема 6.4])**.** *Нека су Ω_1 и Ω_2 просто повезане области које су прави подскупови комплексне равни $\mathbb{C}$, и нека је f холоморфно пресликавање Ω_1 на Ω_2. тада је или*
(а) f је хиперболичка контракција тј. за свако z и w у Ω_1,важи:

$$\rho_{\Omega_2}(f(z), f(w)) < d_{\Omega_1}(z, w) \quad \rho_{\Omega_2}(f(z))|f'(z)| < \rho_{\Omega_1}(z),$$

или
(б)f је хиперболичка изометрија тј. f је конформно пресликавање Ω_1 на Ω_2 и за свако z и w у Ω_1 важи:

$$\rho_{\Omega_2}(f(z), f(w)) = d_{\Omega_1}(z, w) \quad \rho_{\Omega_2}(f(z))|f'(z)| = \rho_{\Omega_1}(z).$$

Доказ. Како смо већ доказали претходном теоремом да важи тврђење под (б), потребно је само доказати део теореме под (а). Неке је $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфно пресликавање које није бијекција. Узмимо неку тачку z_0 у Ω_1 и нека је $w_0 = f(z_0)$. Затим конструишемо функцију h која је холоморфна бијекција на јединичном диску $\mathbb{D}$, и холоморфну бијекцију $g : \Omega_1 \to \Omega_2$. Ове конструкције можемо извршити тако да је $h(0) = z_0$ и $g(z_0) = w_0 = f(z_0)$. Сада можемо да конструишемо неку нову функцију $k = (gh)^{-1}fh$. Тада је k холоморфна функција јединичног диска $\mathbb{D}$ на себе и важи $k(0) = 0$ пошто је $k(0) = h^{-1}(g^{-1}(f(h(0)))) = h^{-1}(g^{-1}(f(z_0)))) = h^{-1}(g^{-1}(w_0)) = h^{-1}(z_0) = 0$. Треба напоменути да k није конформни изоморфизам јединичног диска $\mathbb{D}$ иначе би функција f била холоморфна бијекција. Према Шварцовој леми важи да $|k'(0)| < 1$. Из тога ћемо добити следеће:

$$|k'(0)| = \Big|\frac{f'(h(0))h'(0)}{gh'(0)}\Big| = \Big|\frac{f'(h(0))h'(0)}{g'(h(0))h'(0)}\Big| = \Big|\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\Big| < 1.$$

Како ће из тога важити

$$\rho_{\Omega_2}(f(z_0))|f'(z_0)| < \rho_{\Omega_2}(g(z_0))|g'(z_0)| = \rho_{\Omega_1}(z_0).$$

А самим тим важи и $\rho_{\Omega_2}(f(z), f(w)) < d_{\Omega_1}(z, w)$. $\square$

Литература

[1] L. V. Ahlfors, "Conformal Invarinats", McGraw-Hill, New York, 1973.

[2] L. V. Ahlfors, "Complex analysis", Mc.Graw Hill, Inc. Third Edition, 1979.

[3] A.F. Beardon and D. Minda, *The Hyperbolic Metric and Geometric Function Theory*, Proceedings of the International Workshop on Quasiconformal Mappings and their Applications (New Delhi, India, 2007), Narosa Publishing House, pp. 10-56.

[4] P. Duren,*Harmonic mappings in the plane*, Cambridge University Press, 2004.

[5] E. Heinz, *On one-to-one harmonic mappings*, Pacific J. Math. 9 (1959), 101-105.

[6] H. W. Hethcote, *Schwarz lemma analogues for harmonic functions*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 8, No. 1 (1977), 65-67.

[7] D. Kalaj, M. Vuorinen, *On harmonic functions and the Schwarz lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), no. 1, 161-165.

[8] D. Khavinson, *An extremal problem for harmonic functions in the bal*l, Canadian Math. Bulletin 35(2) (1992), 218-220.

[9] M. Knežević, M. Mateljević, *On the quasi-isometries of harmonic quasi-conformal mappings*, J. Math. Anal. Appl, 2007, 334(1), 404-413.

[10] M. Knežević, *Harmonijska i kvazikonformna preslikavanja, kvazi-izometrije i krivina*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu - Matematički fakultet, 2014.

[11] M. Marković, *On harmonic functions and the hyperbolic metric*, Indag. Math. 26 (2015) 19-23.

[12] M. Mateljević, "Kompleksne funkcije 1 i 2", Zavod za udžbenike, Beograd 2012.

[13] M. Mateljević, "Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic Maps", Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[14] M. Mateljević, *Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 464 (2018) 78-100.

[15] M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings*, arXiv:1808.06647v1 [math.CV], http://arxiv.org/abs/1808.06647

[16] M. Mateljević, A. Khalfallah, *Schwarz lemmas for mappings with bounded Laplacian*, arXiv:1810.08823v1 [math.CV], http://arxiv.org/abs/1810.08823

[17] W.Rudin, "Real and complex analysis", McGraw-Hill Book Co. Singapore, Third Edition, 1987.