МИЛАН ТАСИЋ

ТЕОРИЈА ВЕКТОРА

БЕОГРАД
1931

ЗА ШТАМПАРИЈУ „ПРИВРЕДНИК“ КНЕЗ МИХАИЛОВА 3 — БЕОГРАД
БЛАГОЈЕВИЋ Д. ЖИВОЈИН — КОНДИНА БР. 10.

Своме драгом пријатељу

Добривоју Стошовићу,

директору

Привилеговане аграрне банке у Београду,

посвећујем ову књигу.

15 априла 1931.
У Београду.

Писац.

Предговор.

Књига садржи онај део Теорије вектора, који се најчешће примењује у Механици, Теориској физици и Диференцијалној геометрији, и који се може сматрати као основ целокупној Теорији вектора.

Градиво је излагано поступно и педагошки, лаким и јасним стилом тако, да га сваки онај који се бави егзактним наукама може лако и брзо схватити.

15 априла 1931.
У Београду.

Писац.

I.

Основни појмови.

§ 1. Скалари и вектори.

Количине, које се јављају у Математици, Физици и Механици двојаке су: једне су потпуно одређене кад је позната само њихова *бројна вредност;* а друге су потпуно одређене тек онда, кад је поред њихове *бројне вредности*, познат још и њихов *правац* и *смер.*

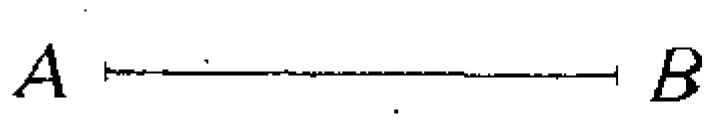
Количине, које су потпуно одређене, кад је позната само њихова бројна вредност, називају се скаларне величине или само скалари.

Такве су величине: време, маса, рад, температура и друге којима се бави Математика.

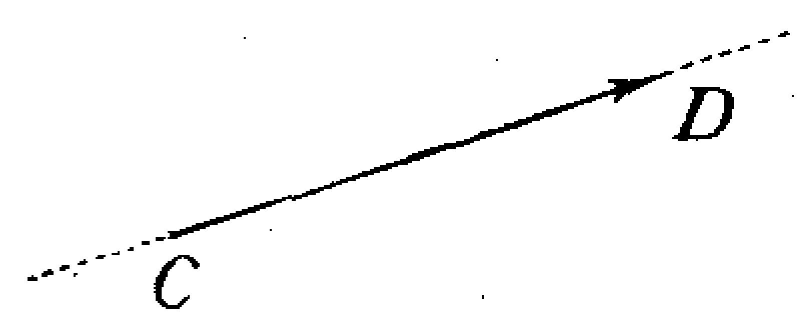
Количине, које су потпуно одређене тек онда, кад је сем њихове бројне вредности познат још и њихов правац и смер називају се управљене величине или вектори.

Такве су величине: сила, брзина, убрзање и друге, које се јављају у Физици и Механици.

Дужи, које геометриски претстављају скаларне величине називају се такође скалари, и оне немају ни правца ни смера (сл. 1).



Сл. 1.



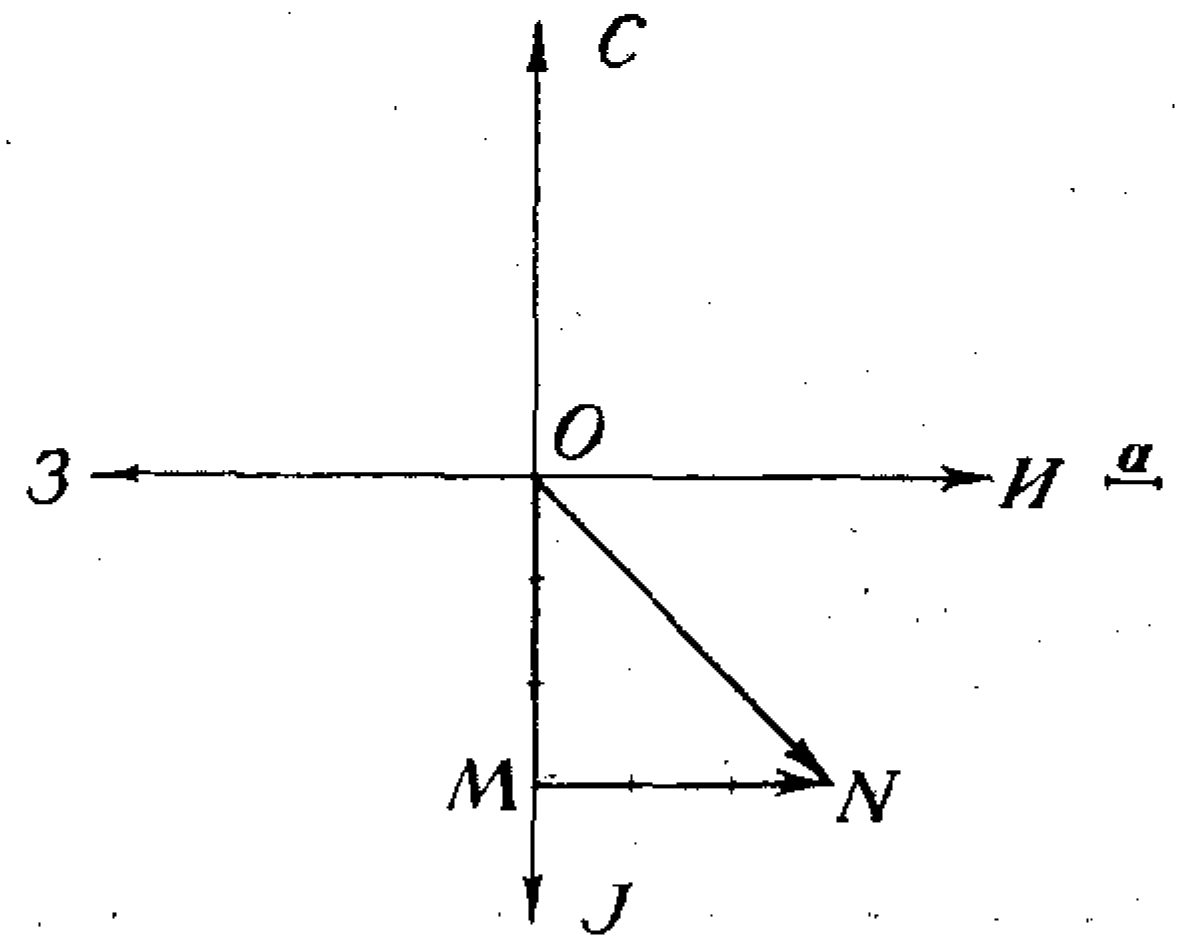
Сл. 2.

Дужи, које геометриски претстављају управљене величине називају се вектори. Сваки вектор има свој почетак, крај, величину, правац и смер (сл. 2).

При рачунању с векторима, ако је резултат вектор, мора се увек знати његова величина, правац и смер.

Пример. — Једна рибарска барка крене из места O правцем на југ са брзином од две миље на сат. Ветар дува са запада на исток и носи барку такође две миље на сат на исток. Одредити пређени пут, правац и смер кретања барке после 3 сата.

Ако место O узмемо као почетак координатног система, онда је југ доле, север горе, исток десно, запад лево (сл. 3). Барка се креће под дејством двеју истовремених сила, свога мотора и ветра. Узимајући у обзир принцип независности дејства сила, барка ће после 3 сата бити у истом месту, као кад би се кретала прво 3 сата само под дејством свога мотора, а затим 3 сата само под дејством ветра.



Сл. 3.

Кад би се кретала 3 сата само под дејством свога мотора она би приспела у место M, узимајући да нам графички дуж a претставља 1 миљу; а кад би се одатле кретала 3 сата на исток, она би дошла у место N. Те отуда, кад се барка креће под истовременим дејством свога мотора и ветра, она ће после 3 сата доћи у место N.

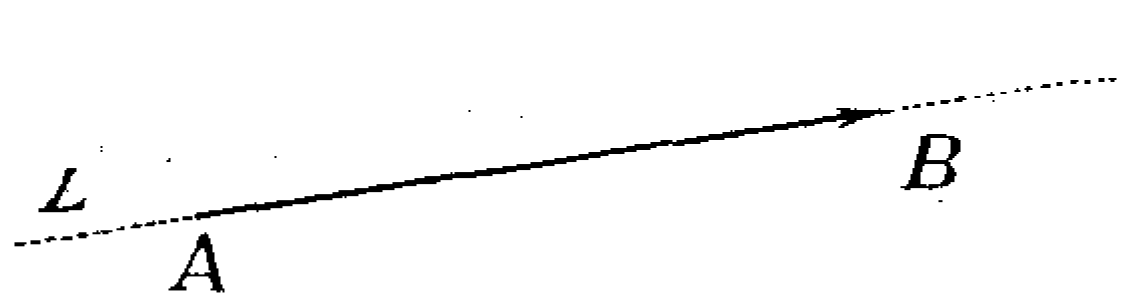
Пређени пут је $ON = 8{,}4853$ миље.

Правац кретања је југоисток, а смер негативан, узимајући да је кретање на горе — на север — позитивно.

Како се рачуна са скаларима учи нас Математика; а како се рачуна са векторима излаже нам Теорија вектора.

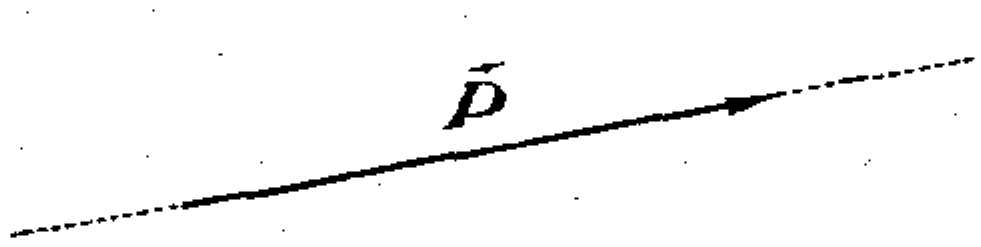
§ 2. Величина, правац, смер и обележавање вектора.

Ако нам је дат извесан вектор AB (сл. 4), онда је његова величина или интензитет — дужина AB, његов правац — линија L, на којој лежи; а смер стрелица, која означава куд је вектор управљен.



Сл. 4.

Тачка A је почетак или нападна тачка; а тачка B је крај вектора AB.



Сл. 5.

Сл. 6.

Векторе обележавамо великим латинским писменима, као што је означено (сл. 4), или једним великим писменом (сл. 5), или једним малим писменом (сл. 6).

При писању, векторе изражавамо на тај начин, што изнад писмена, којима смо их обележили стављамо малу стрелицу, те према томе вектор AB изражавамо са

$$\overrightarrow{AB},$$

вектор P са

$$\vec{P},$$

а вектор v са

$$\vec{v}.$$

Кад хоћемо да изразимо само интензитет каквог вектора, онда заграђујемо његова писмена, којима смо га обележили, двема вертикалним линијама, или пишемо писмена без стрелице, те је тако

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB,\ \left|\vec{P}\right| = P;\ \left|\vec{v}\right| = v.$$

Многи писци векторе обележавају великим и малим готским писменима

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \ldots;\ \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \ldots$$

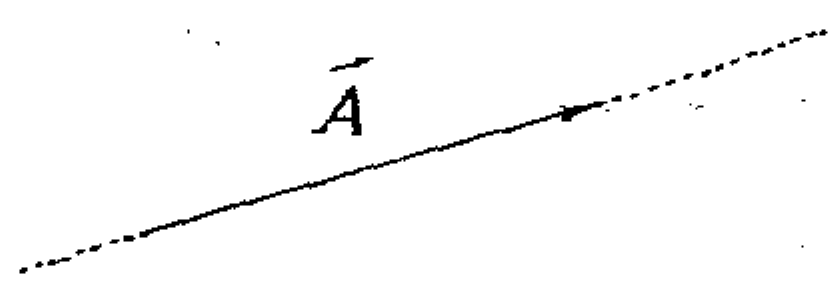
и то без стрелице, а интензитете вектора обележавају латинским великим и малим писменима, те је према томе

$$|\mathfrak{A}| = \mathrm{A}\ldots;\ |\mathfrak{a}| = a, \ldots.$$

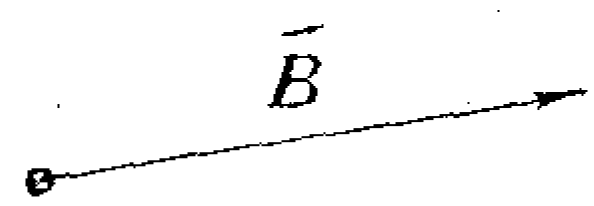
§ 3. Везани и слободни вектори.

Вектор, чији је положај везан за какву праву или тачку назива се *везани вектор*.

Вектор $\vec{A}$ (сл. 7) и вектор $\vec{B}$ (сл. 8) су везани вектори.

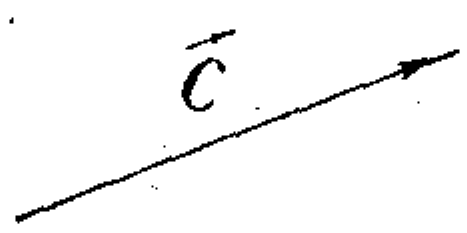


Сл. 7.

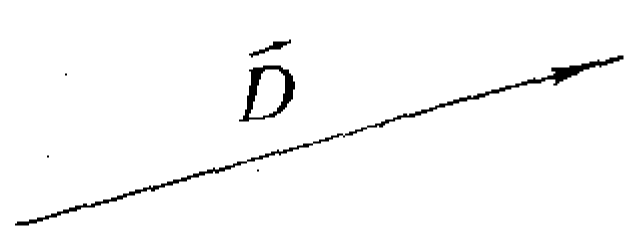


Сл. 8.

Вектор, чији положај није везан ни за какву праву ни тачку, назива се *слободан вектор*.



Сл. 9.

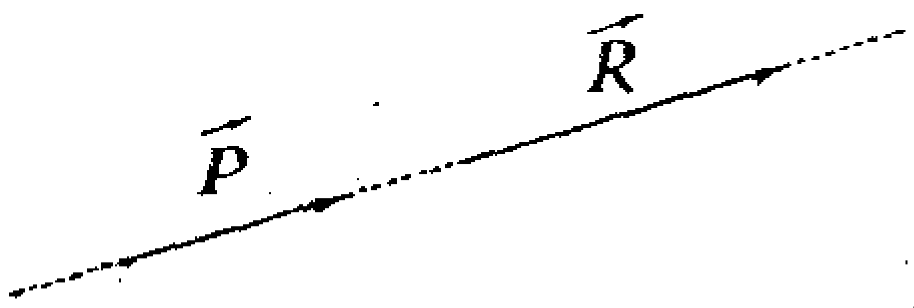


Сл. 10.

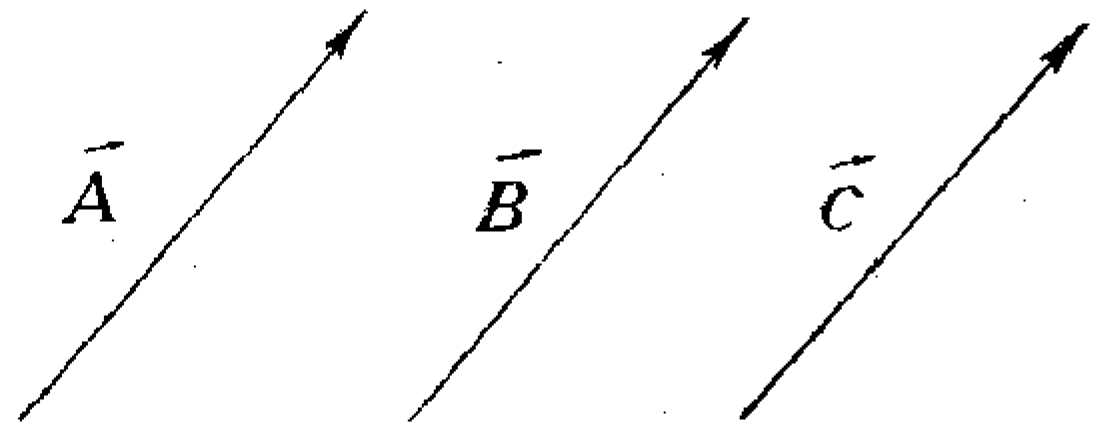
Вектор $\vec{C}$ (сл. 9) и вектор $\vec{D}$ (сл. 10) су слободни вектори.

Два везана вектора за неку праву једнаки су, кад су везани за исту праву, кад имају једнаке интензитете и исте смерове (сл. 11) или кад се поклапају.

Два везана вектора за једну тачку су једнаки, ако су везани за исту тачку, ако имају исте интензитете и смерове, што ће рећи кад се поклапају.



Сл. 11.



Сл. 12.

Два или више слободних вектора су једнаки, кад имају једнаке интензитете и смерове, а правци су им паралелни (сл. 12). Једнакост вектора изражава се истим знаком као и једнакост скалара,

$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}.$$

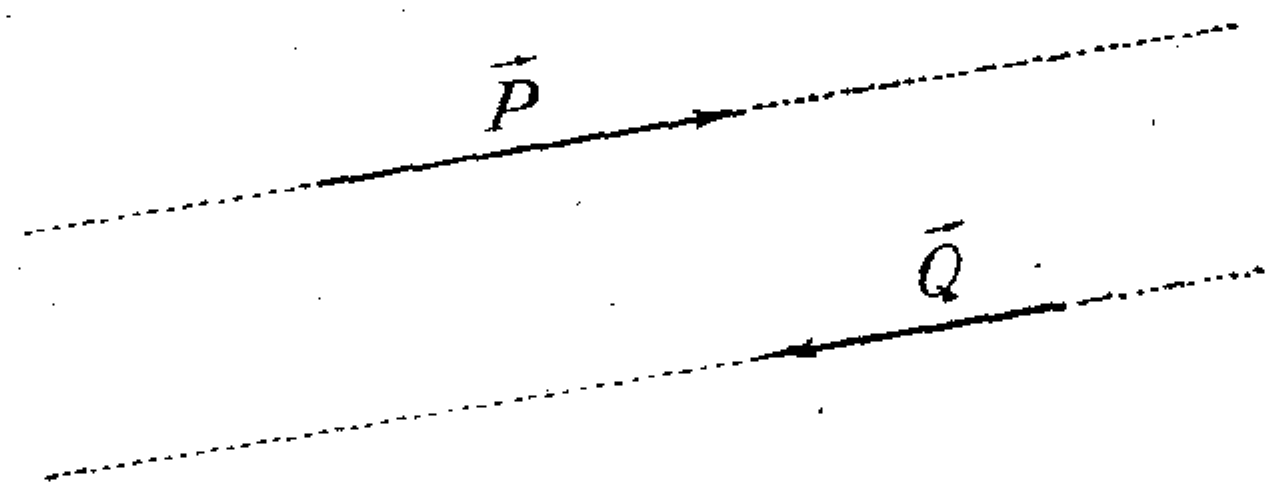
Два вектора једнаких интензитета, истих или паралелних праваца, а супротних смерова зову се *супротни вектори*. Тако су вектори $\vec{M}$ и $\vec{N}$ (сл. 13) и $\vec{P}$ и $\vec{Q}$ (сл. 14) супротни вектори, па је

$$\vec{M} = -\vec{N}, \quad \vec{P} = -\vec{Q},$$

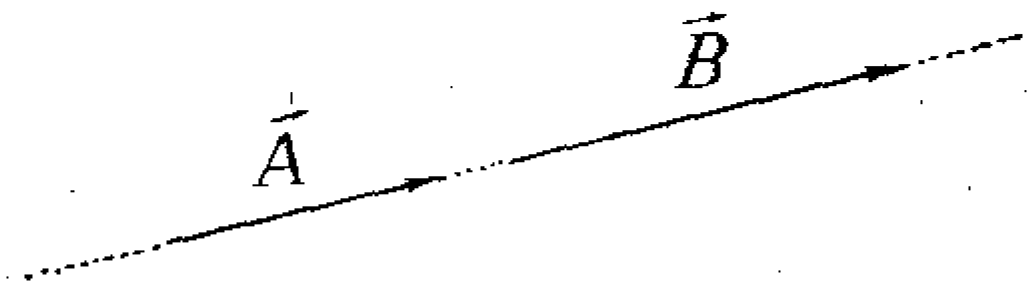
или

$$\vec{M} + \vec{N} = 0 \quad , \quad \vec{P} + \vec{Q} = 0.$$

Сл. 13.



Сл. 14.

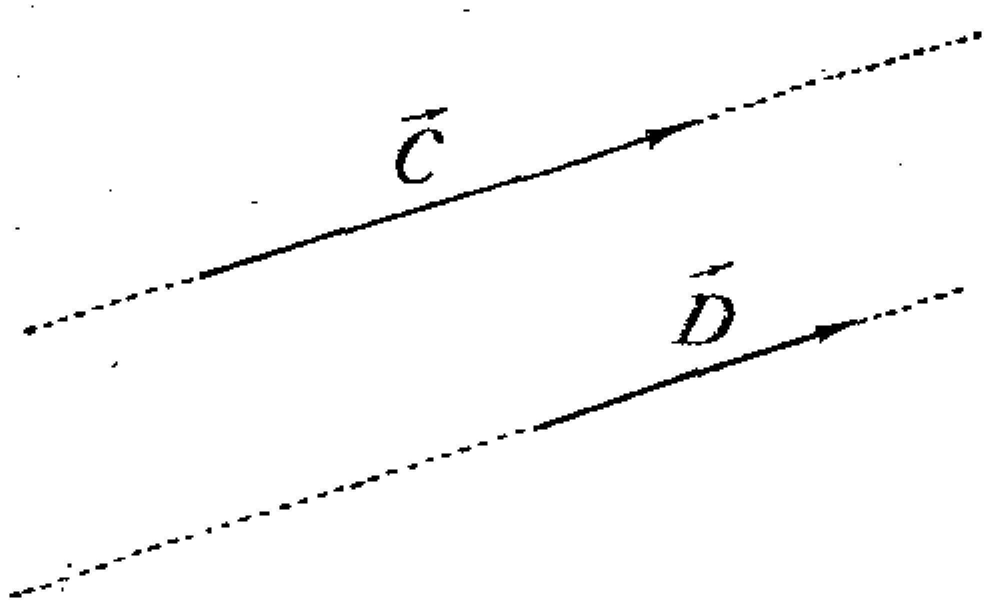


Сл. 15.

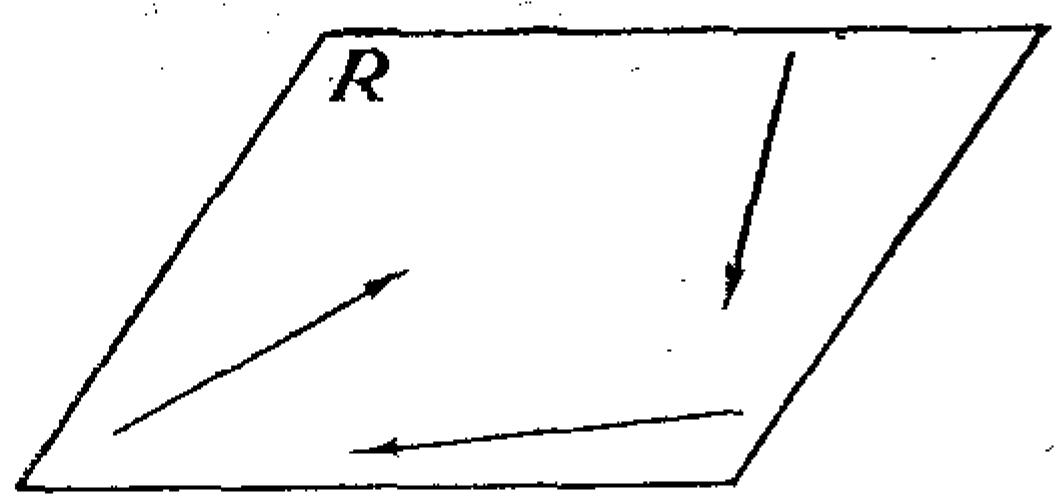
Вектори, који имају исти правац (сл. 15), или чији су правци паралелни (сл. 16), зову се *колинеарни вектори*.

Колинеарност два вектора изражава се знаком, којим се изражава паралелност двеју правих; тако је у нашем случају

$$\vec{A} \parallel \vec{B}\,; \ \vec{C} \parallel \vec{D}\ .$$



Сл. 16.



Сл. 17.

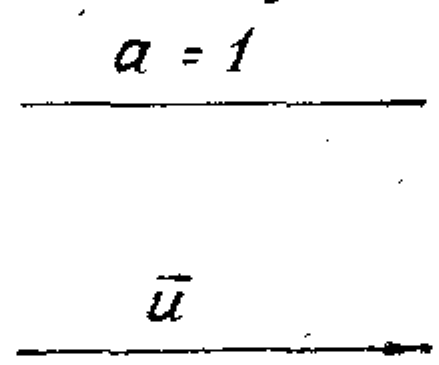
Колинеарни вектори не морају имати исти смер.

Вектори, који леже у једној равни R (сл. 17) називају се *компланарни*.

§ 4. Јединични вектор или орт.

Вектор, чији је интензитет једнак јединици назива се *јединични вектор* или *орт*.

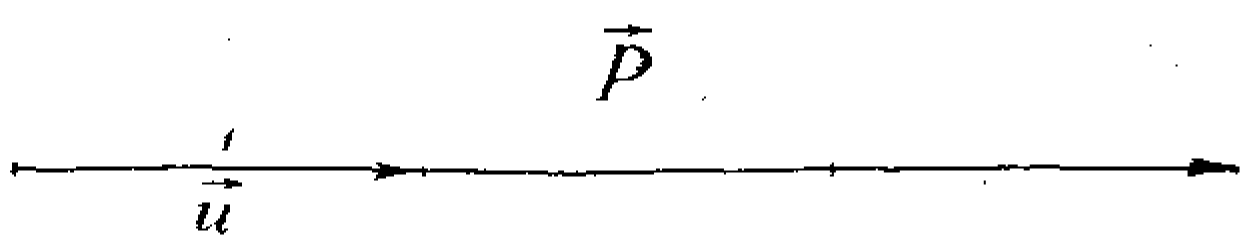
Ако дуж a (сл. 18) претставља геометријски извесну јединицу* за мерење количина, онда је вектор $\vec{u}$, чији је интензитет једнак $a = 1$ јединични вектор или орт.



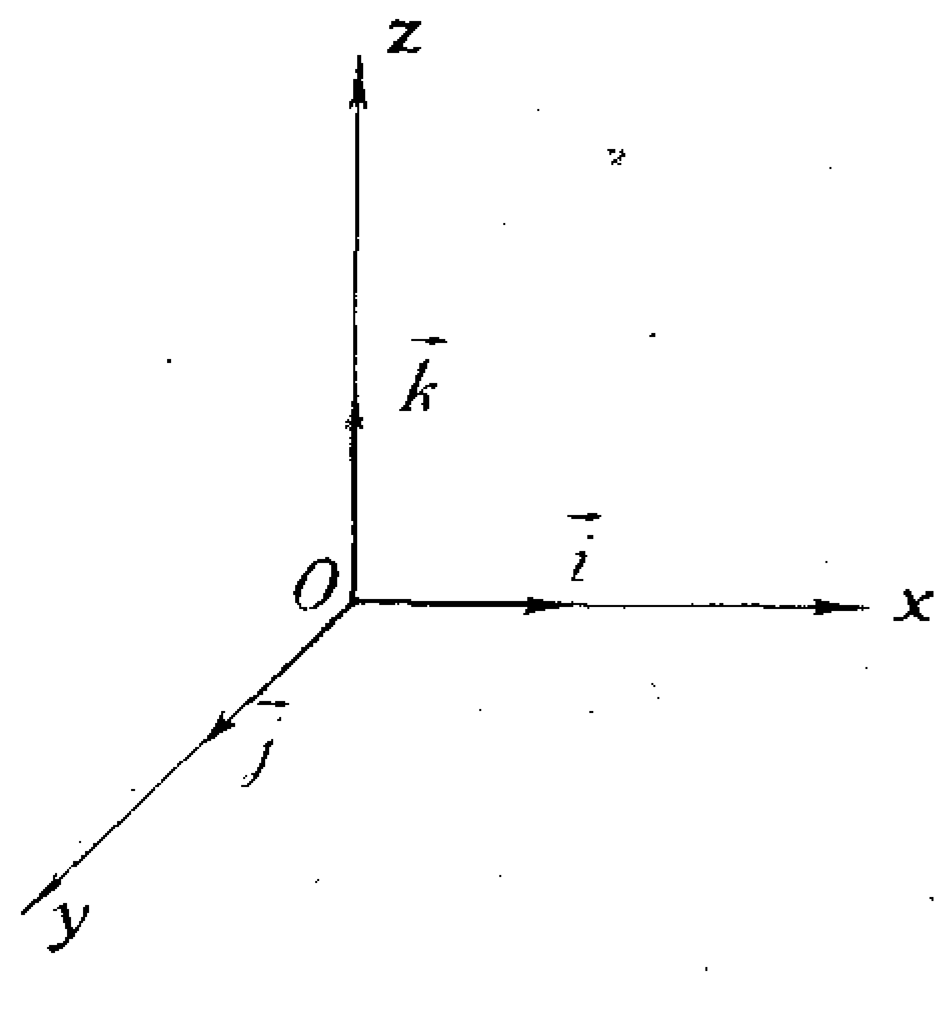
Сл. 18.

Сваки вектор може се претставити као производ из његовог интензитета и орта истог правца и смера. Тако бисмо неки вектор $\vec{P}$, који има правац и смер орта $\vec{u}$, а интензитет 3 (сл. 19), могли претставити у облику

$$\vec{P} = 3\ \vec{u}.$$



Сл. 19.



Сл. 20.

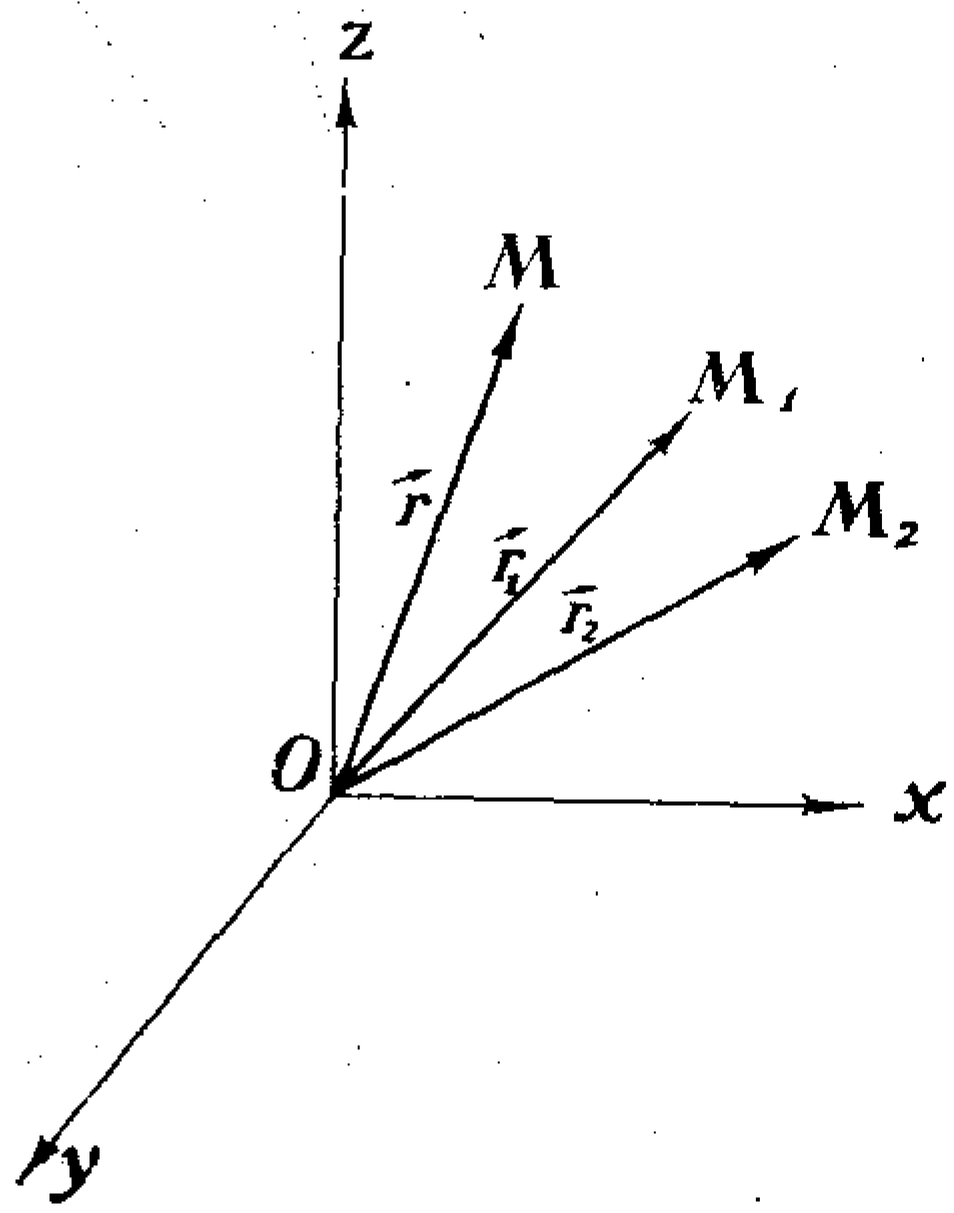
Како се сваки вектор може сматрати као производ из његовог интензитета и орта и како орт одређује правац и смер, то се интензитет сваког вектора сматра као позитиван.

* Та јединица може бити према природи вектора дин, см. и др.

Ортови $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$*, који одређују правац и смер координатних оса у Декартовом систему (сл. 20) називају се *основни ортови.*

§ 5. Вектор положаја.

Вектор, који одређује положај једне тачке у односу на једну утврђену тачку зове се *вектор положаја.* То је вектор, чија је нападна тачка у утврђеној тачци, а крај у оној тачци, чији положај одређујемо. Тако би вектор $\vec{r}$, који одређује положај неке тачке M у погледу на почетак O једног Декартовог координатног система, био вектор положаја тачке M с обзиром на тај почетак (сл. 21).

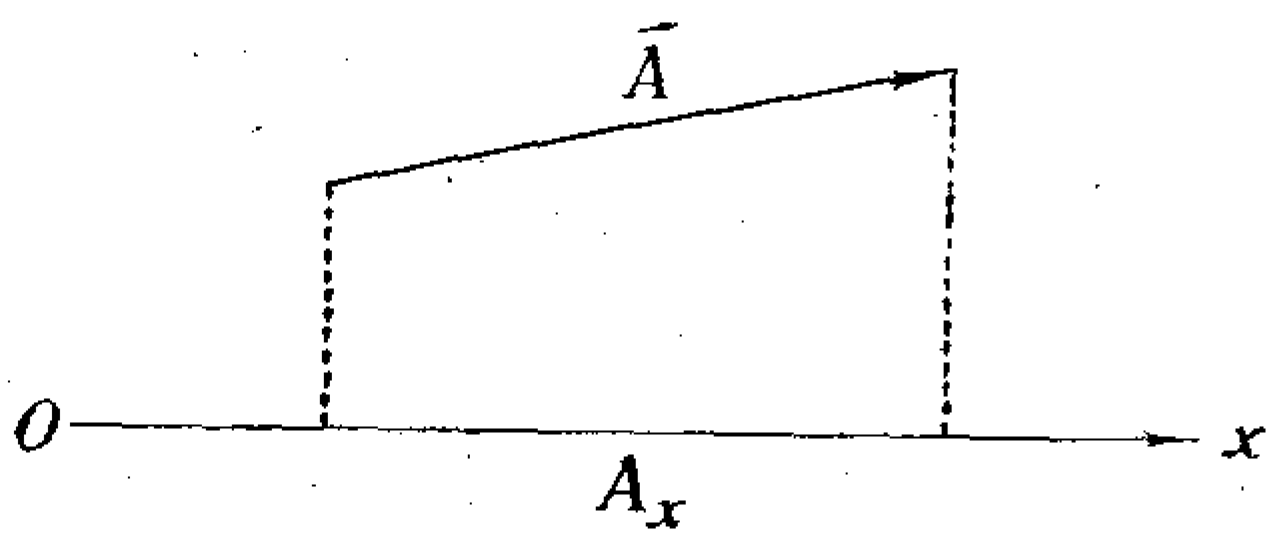


Сл. 21.

Кад би тачка M мењала свој положај, онда би се мењали: величина, правац и смер вектора положаја $\vec{r}$ тако, да би положаји M_1, $M_2, \ldots$ били одређени векторима положаја $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2, \ldots$

§ 6. Пројекција вектора.

Кад из почетне и крајње тачке вектора $\vec{A}$ (сл. 22) спустимо нормале на осу Ox, добићемо његову пројекцију A_x.



Сл 22.

*Пројекција вектора на неку осу је скалар.***

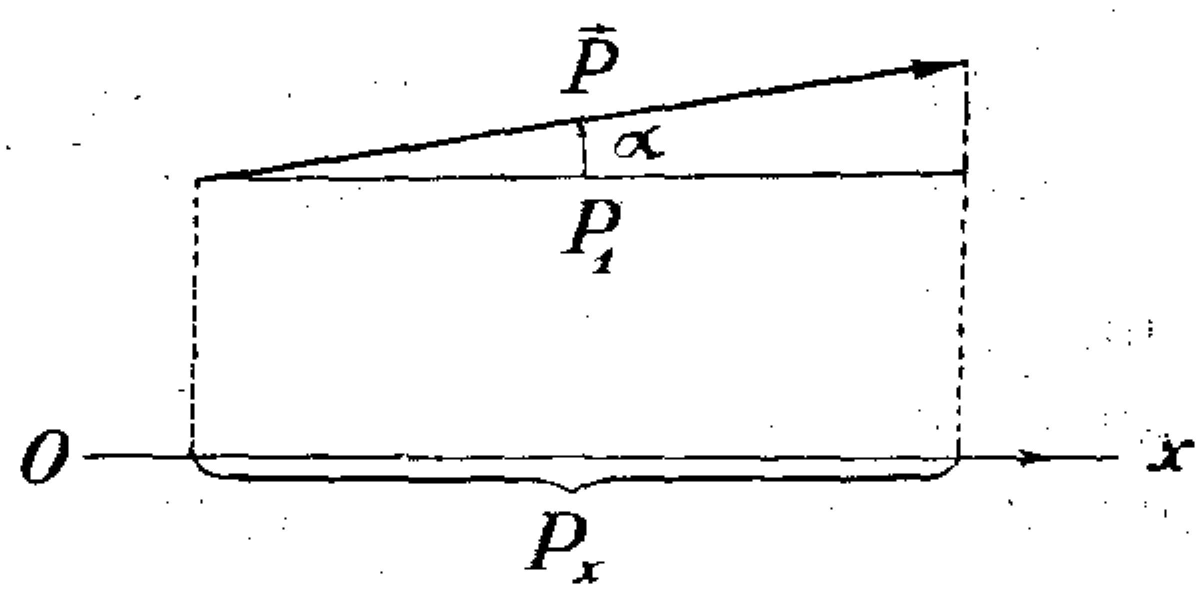
---

* Основни ортови $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ се врло често пишу и без стрелица, али ми ћемо их писати са стрелицом.

** Пројекција вектора на неку праву је вектор.

Разлика између праве и осе је у томе: што права нема одређени смер; а оса увек има одређени смер.

Ако пројицирамо извесан вектор $\vec{P}$ на осу Ox, добићемо његову пројекцију P_x (сл. 23). Кад из почетне тачке вектора $\vec{P}$ повучемо дуж P_1 паралелну са x-осом, добићемо угао α, који оса x затвара са правцем вектора $\vec{P}$.



Сл. 23.

Како је $P_1 = P_x$, то је

$$P_x = P \cos\alpha \, ,$$

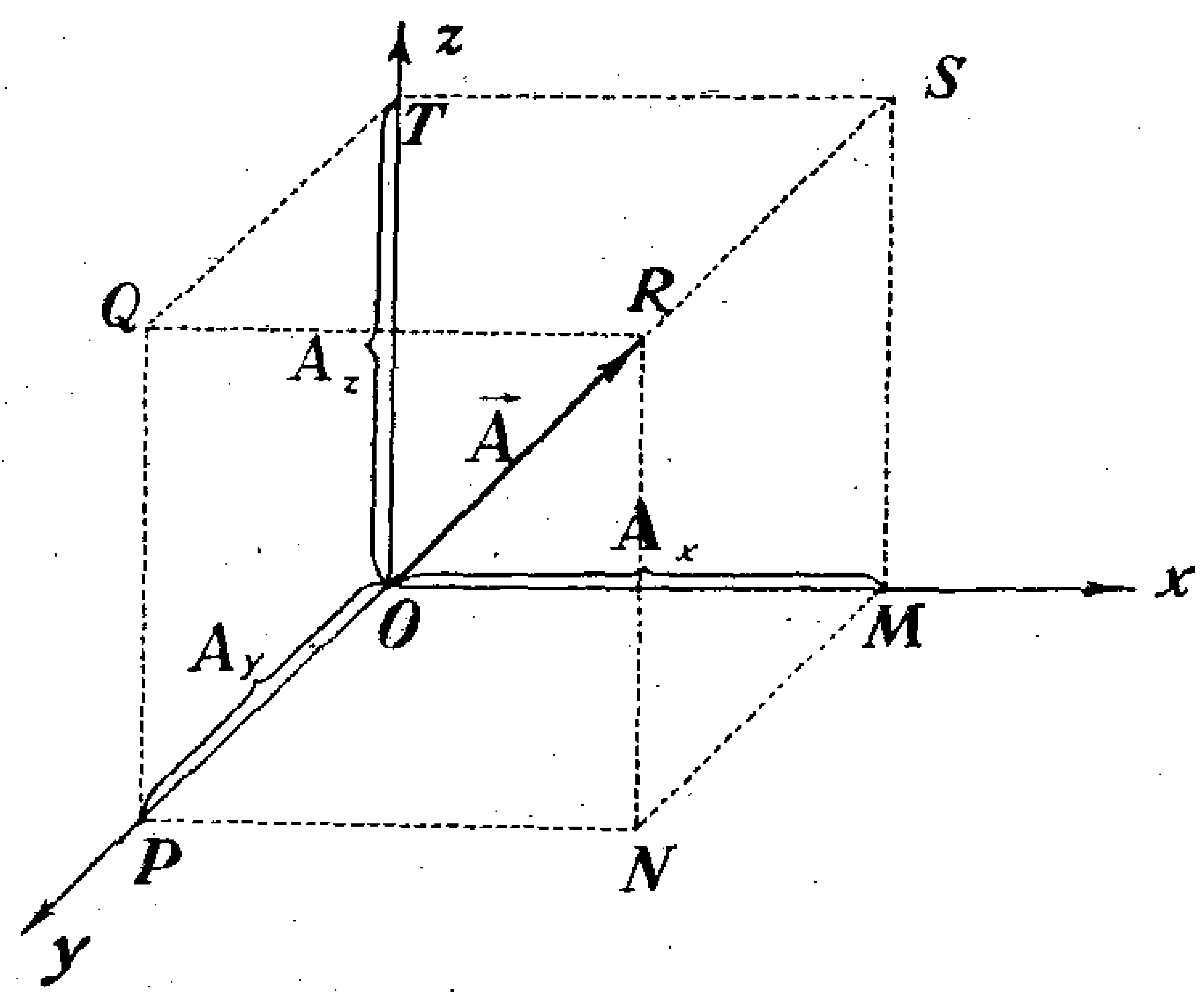
одакле излази:

Пројекција вектора на неку осу једнака је интензитету вектора помноженом косинусом угла, кога заклапа правац вектора са том осом.

Како је интензитет вектора увек позитиван, то ће пројекција бити позитивна, кад је косинус угла, кога заклапа вектор са осом позитиван, а негативна, кад је косинус угла негативан.

§ 7. Координате вектора.

Кад пројицирамо вектор $\vec{A}$ (сл. 24) на координатне осе Декартовог правоуглог система, добићемо његове пројекције A_a, A_y, A_z.



Сл. 24.

Нека су углови α, β, γ, које правац вектора $\vec{A}$ заклапа са x, y и z-осом, онда је према претходном параграфу

$$\left.\begin{aligned} A\cos\alpha &= A_x \\ A\cos\beta &= A_y \\ A\cos\gamma &= A_z \end{aligned}\right\} \qquad (1).$$

Ако у крајњој тачки вектора $\vec{A}$ поставимо равни паралелне са координатним равнима, добићемо паралелопипед *PNMOTQRS*, чија је дијагонала вектор $\vec{A}$, а ивице, пројекције вектора на координатне осе. А кад је то тако, онда за углове α, β и γ важи познати образац из Аналитичке Геометрије

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (2)$$

Кад једначине (1) дигнемо на квадрат и саберемо их добићемо

$$A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

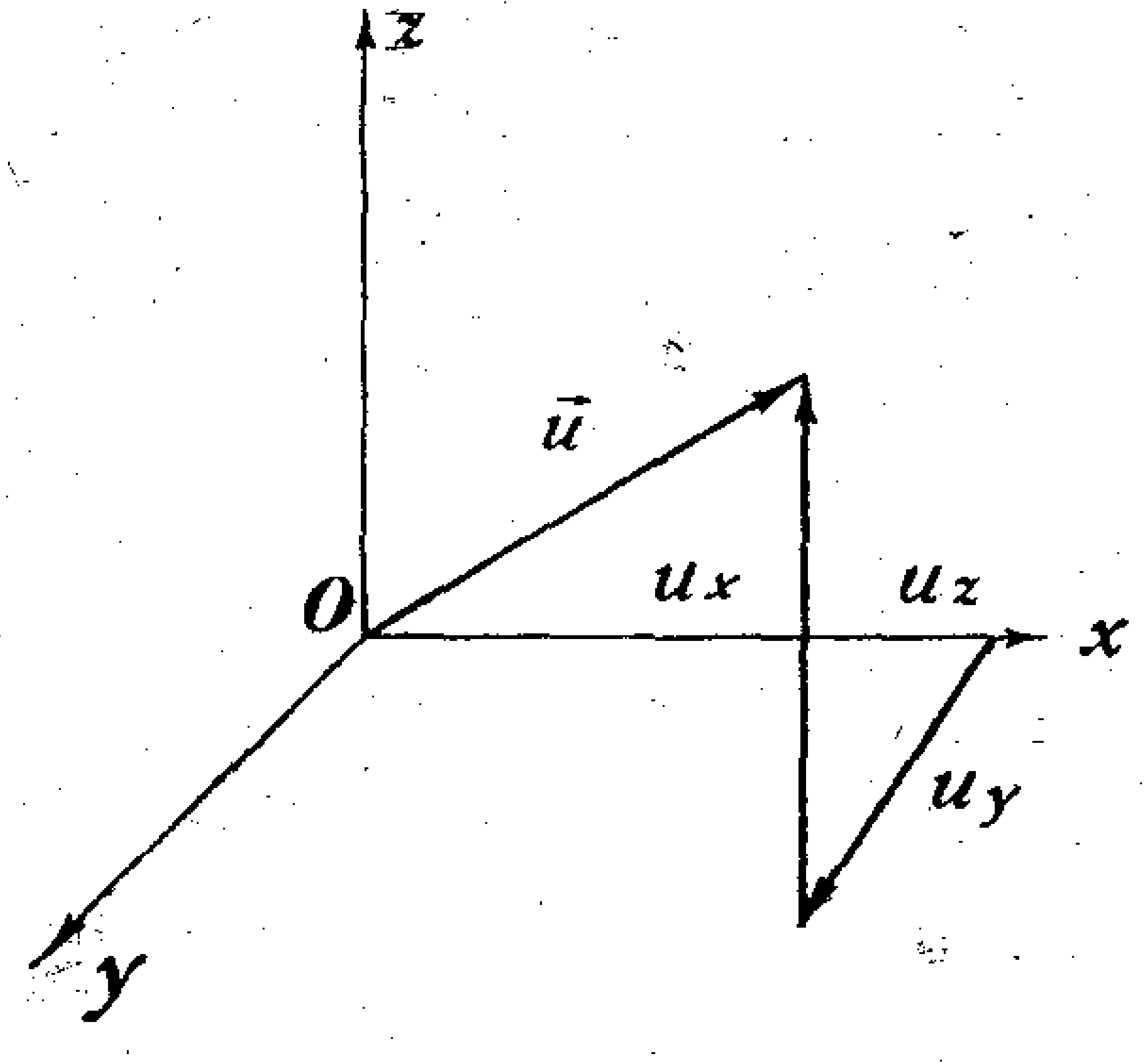
или с обзиром на израз (2)

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2,$$

или

$$A = +\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \qquad (3)$$

Из једначине (3) можемо увек одредити интензитет вектора $\vec{A}$, кад су познате његове пројекције A_x, A_y, A_z; а кад знамо интензитет и пројекције, помоћу једначина (1) знамо и углове, које вектор заклапа са координатним осама, а кад све то знамо, онда је и положај вектора потпуно одређен. Како су A_x, A_y, A_z у исто време и координате крајње тачке вектора $\vec{A}$, то се оне сматрају у исто време и координатама вектора $\vec{A}$, јер га потпуно одређују у координатном систему.



Сл. 25.

Ако је вектор $\vec{u}$ (сл. 25) орт, онда су његове пројекције на координатне осе u_x, u_y, u_z, а углови, које он заклапа са координатним осама α, β, γ. Према једначинама (1) за орт имаћемо

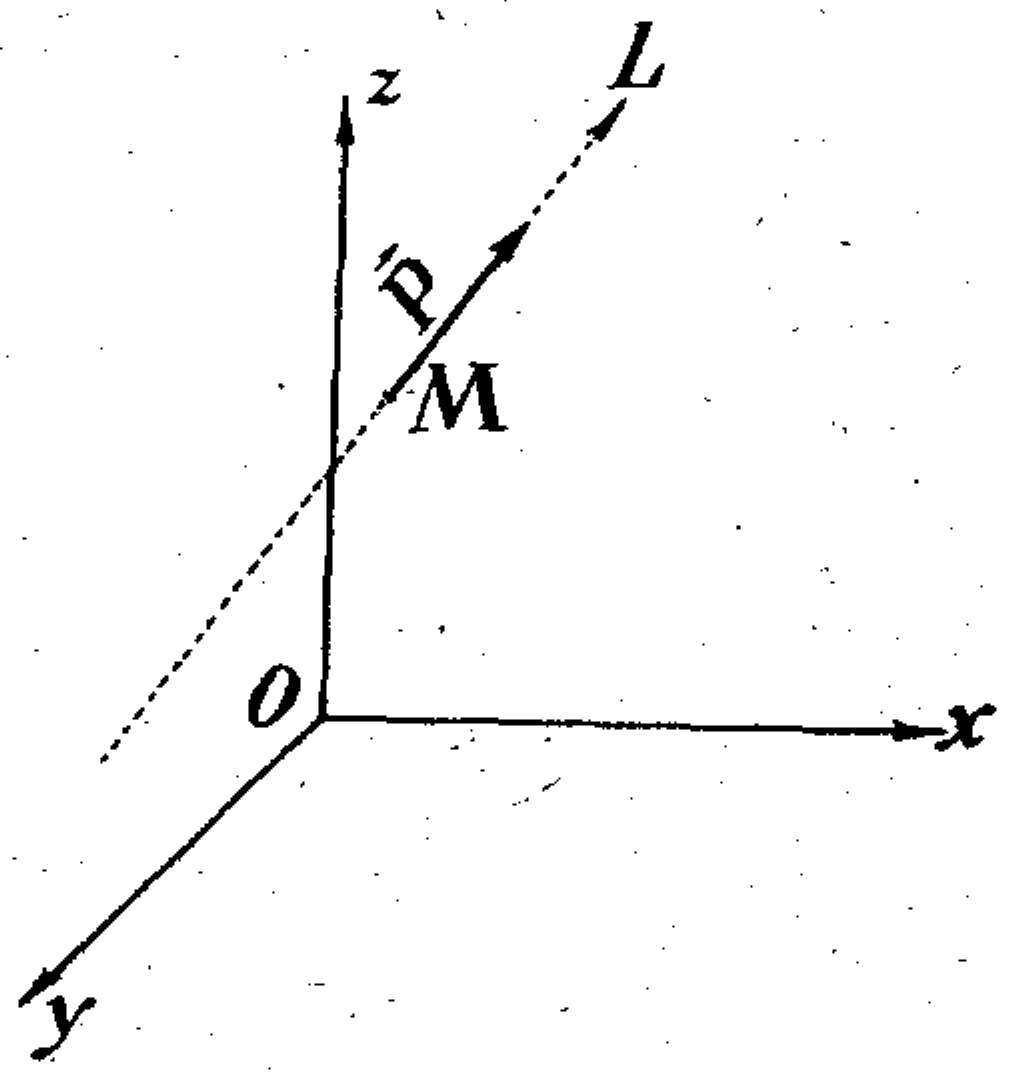
$$\cos\alpha = u_x,$$
$$\cos\beta = u_y,$$
$$\cos\gamma = u_z,$$

одакле према једначини (2) је

$$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1,$$

што је требало и очекивати, пошто орт има за интензитет јединицу.

Кад је вектор $\vec{P}$ везан за праву L (сл. 26) која у овом случају има и назначени смер, који се сматра за позитиван онда је вектор $\vec{P}$ потпуно одређен кад је познат положај праве L у Декартовом координатном систему $Oxyz$, и кад је познат његов интензитет $|\vec{P}|$ са знаком (+) плус или (—) минус, према томе да ли вектор има исти или супротан смер праве L.



Сл. 26.

Како је положај праве L у координатном систему одређен њеним једначинама

$$y = mx + n$$
$$z = px + q,$$

где имамо четири непозната параметра m, n, p, q, то је везани вектор потпуно одређен кад су позната пет података

$$\pm |\vec{P}|, m, n, p, q.$$

И ако су за одредбу везаног вектора потребни пет података, махом се везани вектор, ради симетрије образаца, изражава помоћу шест података, о којима ће одмах бити говора.

Ако везани вектор $\vec{P}$ сматрамо за један тренутак као слободан, онда је он одређен својим пројекцијама P_x, P_y, P_z, које се у овом случају изражавају са X, Y, Z.

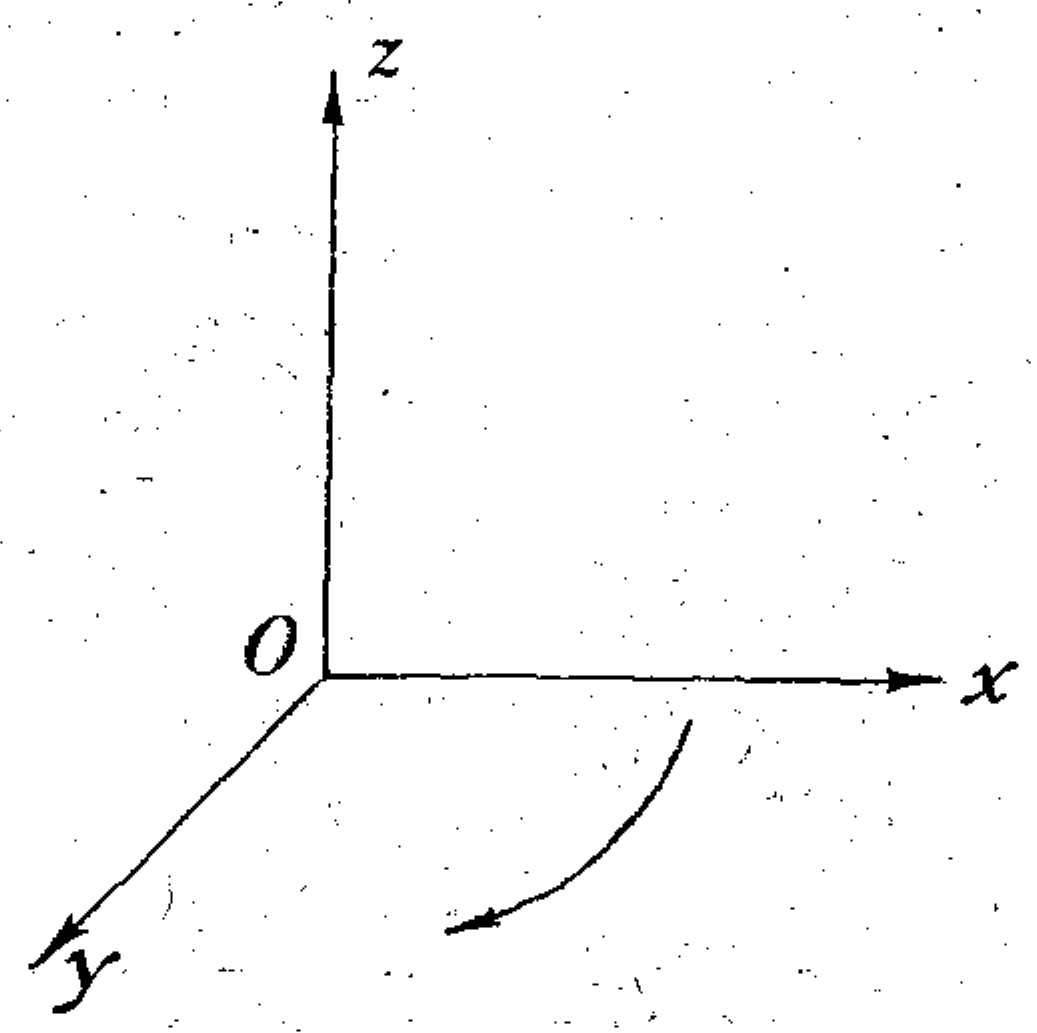
Положај нападне тачке M потпуно је одређен кад су познате њене координате x, y, z; а кад знамо положај нападне тачке и пројекције вектора онда знамо и сам вектор, те је тако везани вектор $\vec{P}$ одређен подацима

$$(x, y, z, X, Y, Z).$$

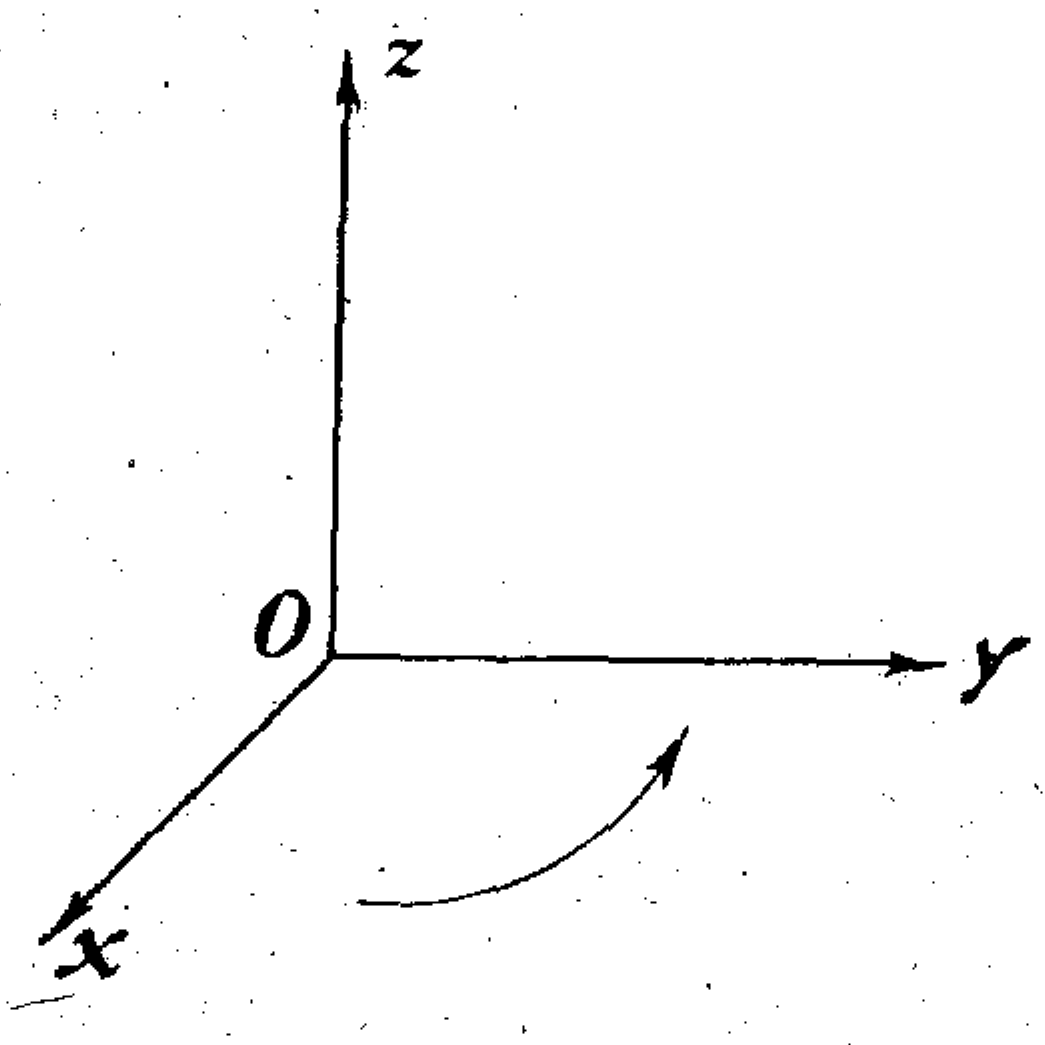
§ 8. Леви и десни координатни систем.

Координатни систем (сл. 27) назива се *леви координатни систем*, јер кад замислимо да стојимо у почетку O и леђима окренути z-оси, онда видимо, да се x-оса мора кретати с лева на десно, да би дошла у положај y-осе; а координатни систем (сл. 28) назива се *десни*, јер се x-оса мора кретати с десна на лево, да би дошла у положај y-осе.

Десни координатни систем се примењује махом у Теоријској физици, Небеској механици и Астрономији.

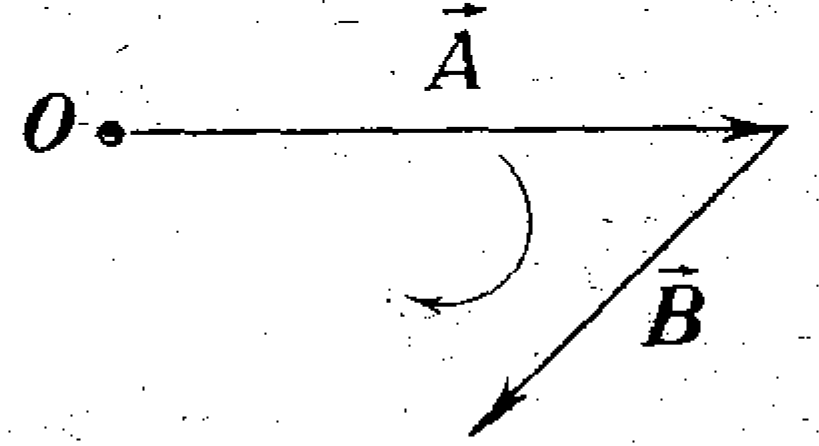


Сл. 27.

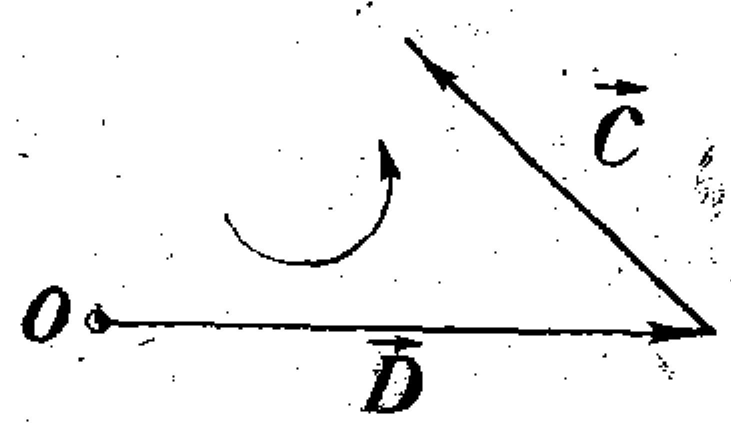


Сл. 28.

Кад стојимо у почетку O и посматрамо векторе $\vec{A}$ и $\vec{B}$ (сл. 29) онда видимо, да вектор $\vec{B}$, надовезан на вектор $\vec{A}$, вуче вектор $\vec{A}$ у истом смеру, у коме иду казаљке на часовнику и тај се смер



Сл. 29.



Сл. 30.

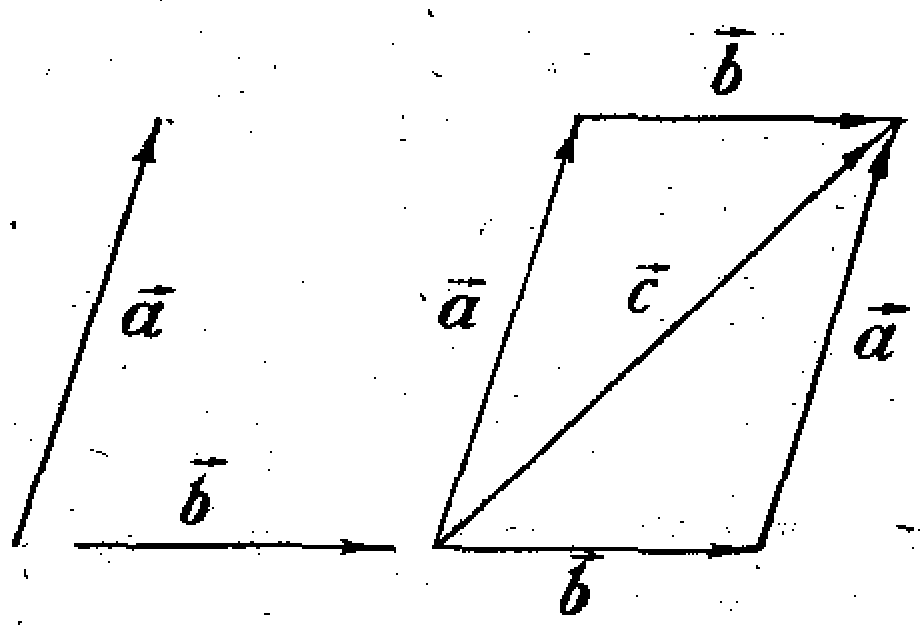
у Теорији вектора сматра као позитиван; а вектор $\vec{C}$ (сл. 30), надовезан на вектор $\vec{D}$, вуче вектор $\vec{D}$ у смеру противном казаљки на часовнику и тај се смер сматра у Теорији вектора као негативан.

II.

Векторска Алгебра.

§ 9. Сабирање вектора.

Збир два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c}$, чији се почетак поклапа са почетком првог вектора, а крај са крајем другог вектора надовезаног на први вектор (сл. 31).



Сл. 31.

Из слике видимо да је

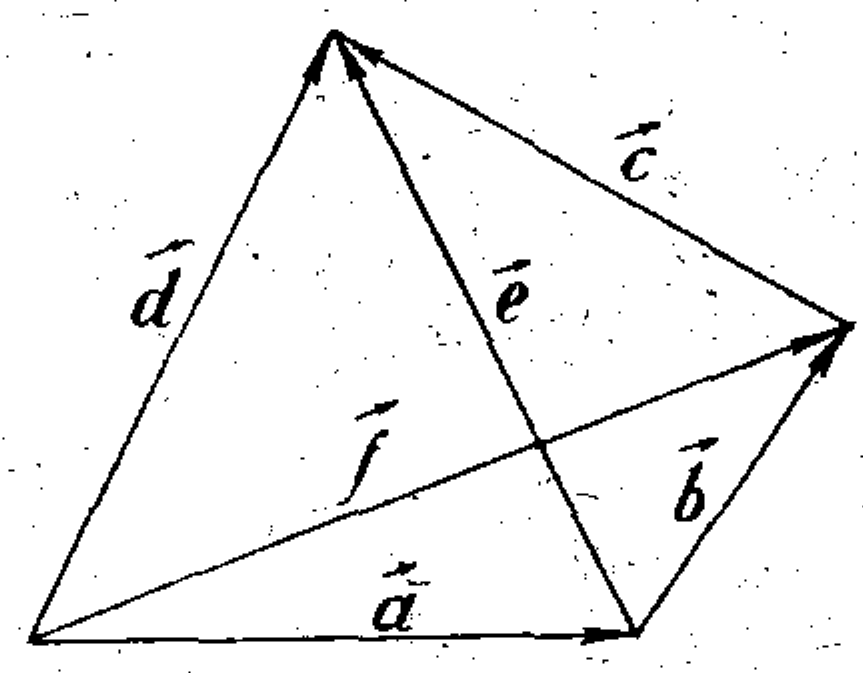
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

и

$$\vec{b} + \vec{a} = \vec{c},$$

што значи да при сабирању вектора важи закон комутације, као и код сабирања скалара.

Збир три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је вектор $\vec{d}$, чији се почетак поклапа са почетком првог вектора, а крај с крајем трећег вектора надовезаног на други вектор, који је такође надовезан на први вектор (сл. 32).



Сл. 32.

Из слике видимо да је

$$\vec{f} + \vec{c} = \vec{d},$$

и

$$\vec{a} + \vec{e} = \vec{d},$$

одакле је

$$\vec{f} + \vec{c} = \vec{a} + \vec{e},$$

или како је

$$\vec{f} = \vec{a} + \vec{b}; \ \vec{e} = \vec{b} + \vec{c},$$

то је

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}),$$

што показује, да при сабирању вектора важи и закон асоцијације.

На исти начин сабирамо четири и више вектора, па било да су они у равни или у простору.

Вектор, који добијамо као збир двају или више вектора назива се *вектор резултанта*, а вектори сабирци називају се *вектори компоненте*.

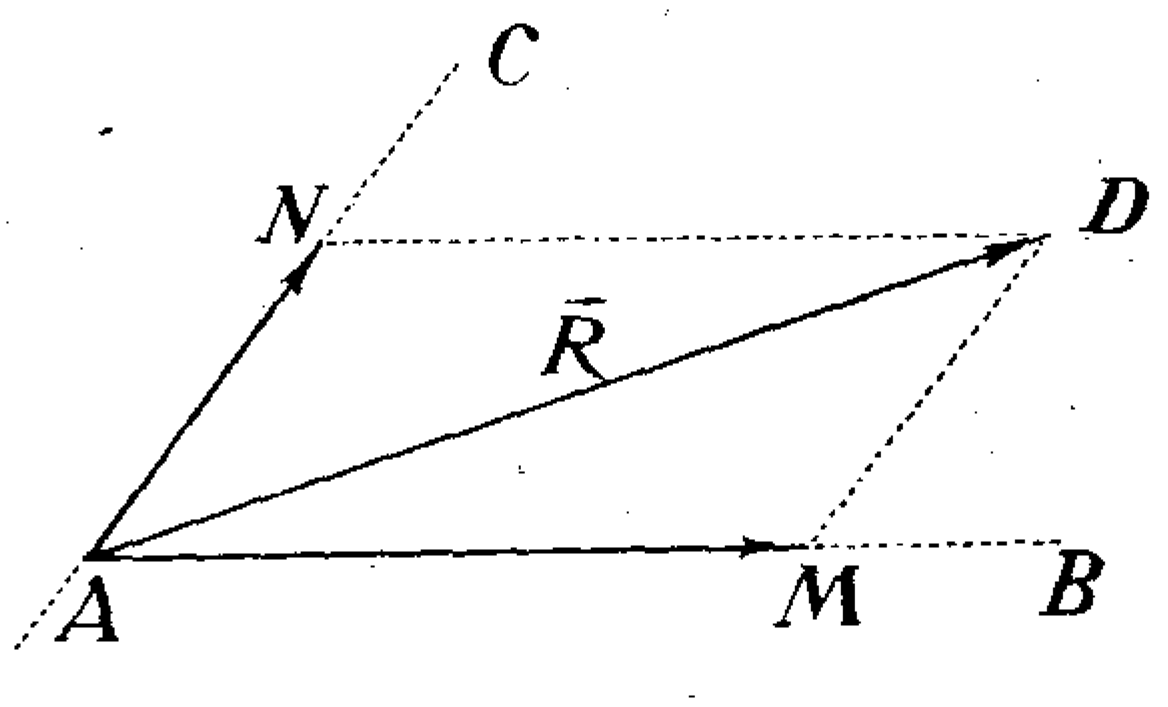
Сабирање вектора назива се још и слагање вектора у једну резултанту.

Више пута треба један задани вектор разложити у две или три компоненте под извесним условима.

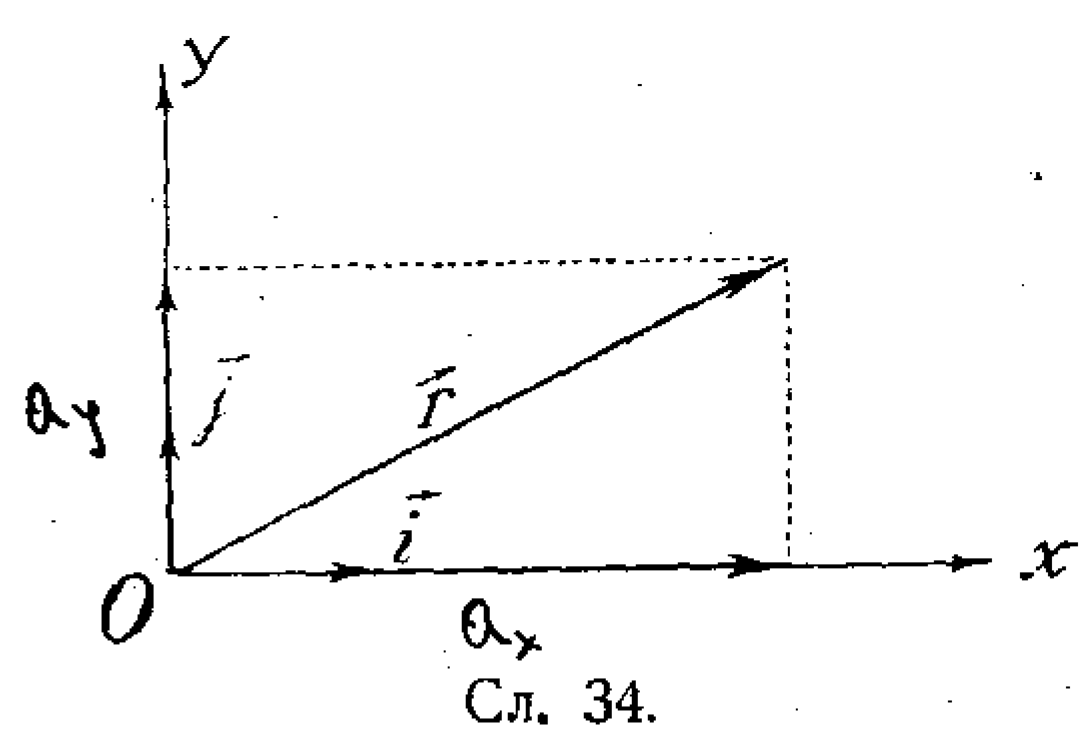
Ако вектор $\vec{R}$ (сл. 33) треба разложити на две компоненте паралелне правама AB и AC, онда из крајње тачке D вектора $\vec{R}$ повлачимо паралелне DM и DN са заданим правама и добијамо векторе компоненте $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{AN}$, јер је

$$\vec{R} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}.$$

Најчешћи је случај разлагања вектора у компоненте, које имају правце координатних оса, о чему ће бити одмах говора.



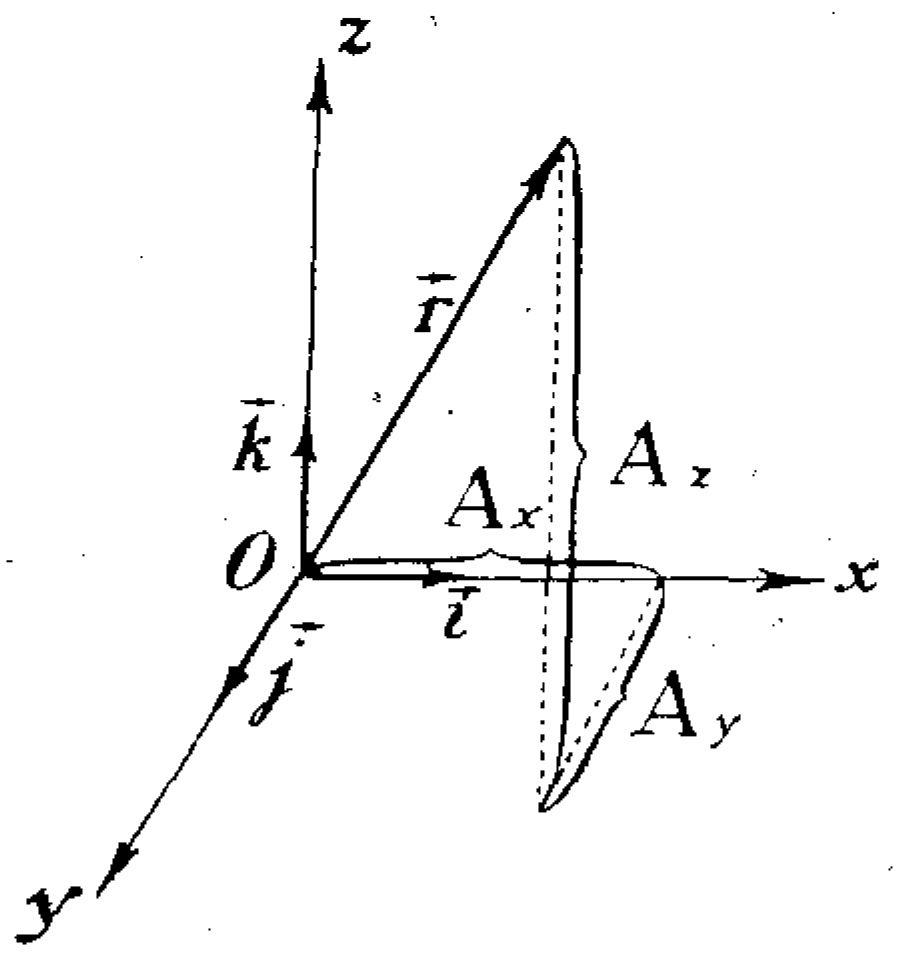
Сл. 33.



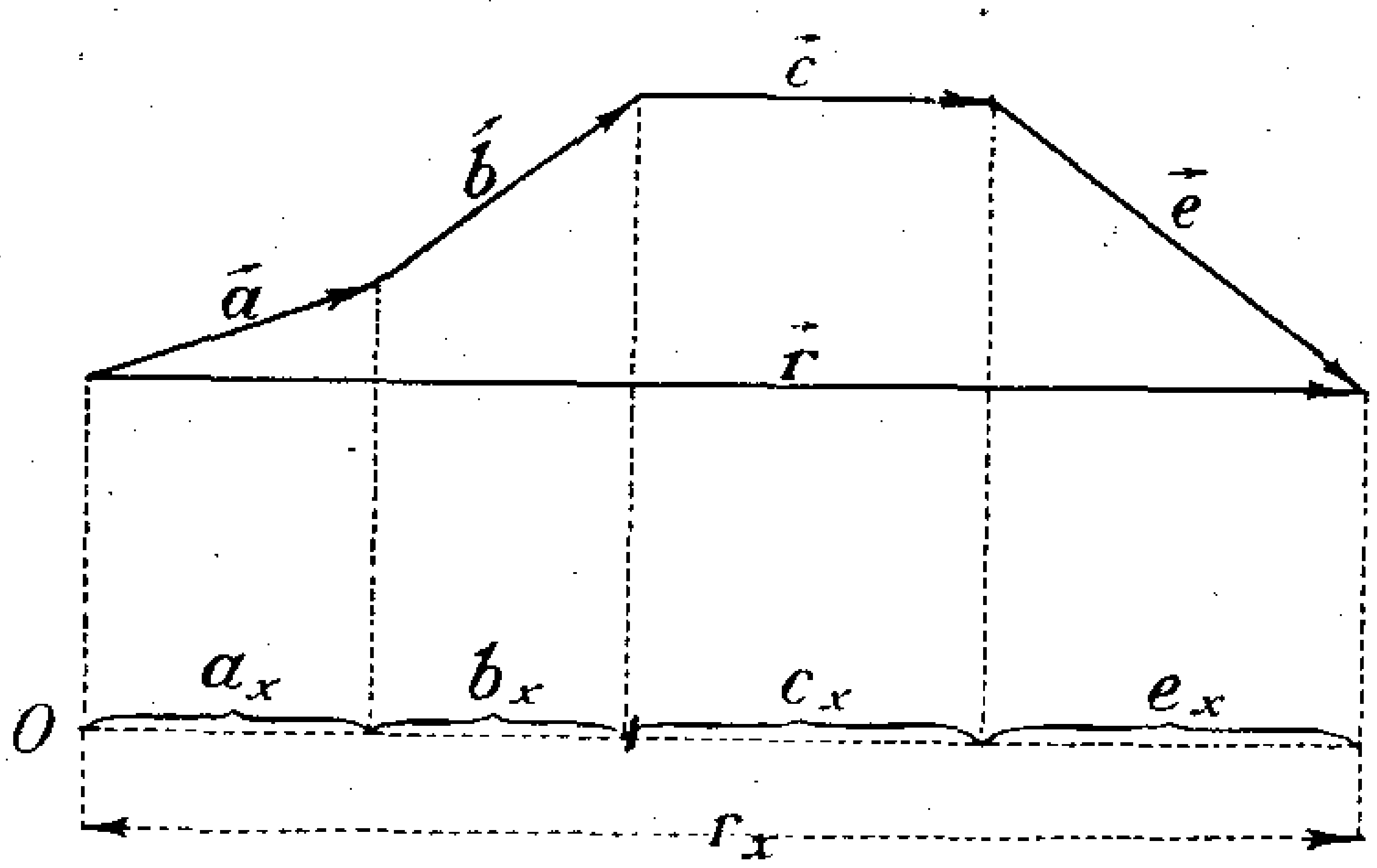
Сл. 34.

Ако узмемо један вектор $\vec{r}$ у равни (сл. 34) са нападном тачком у координатном почетку и кад из крајње тачке тога вектора спустимо нормале на координатне осе, добићемо пројекције вектора $\vec{r}$: a_x и a_y. А кад добивеним пројекцијама дамо правце координатних оса множећи их одговарајућим ортовима $\vec{i}$ и $\vec{j}$, добијамо компоненте вектора $\vec{r}$, $a_x \cdot \vec{i}$ и $a_y \cdot \vec{j}$ у правцу x и y-осе, те је тако

$$\vec{r} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}.$$



Сл. 35.



Сл. 36.

Ако је вектор $\vec{r}$ (сл. 35) у простору, онда је

$$\vec{r} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}.$$

Збир произвољних вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ је вектор $\vec{r}$ (сл. 36). Ако пројицирамо поједине векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ на осу Ox, добићемо њихове пројекције a_x, b_x, c_x, e_x; исто тако, ако пројицирамо вектор $\vec{r}$, добићемо пројекцију r_x, па како је

$$r_x = a_x + b_x + c_x + e_x,$$

добијамо став:

Пројекција вектора резултанте једнака је збиру пројекција појединих вектора компонената, или пројекција збира вектора једнака је збиру пројекција појединих вектора сабирака.

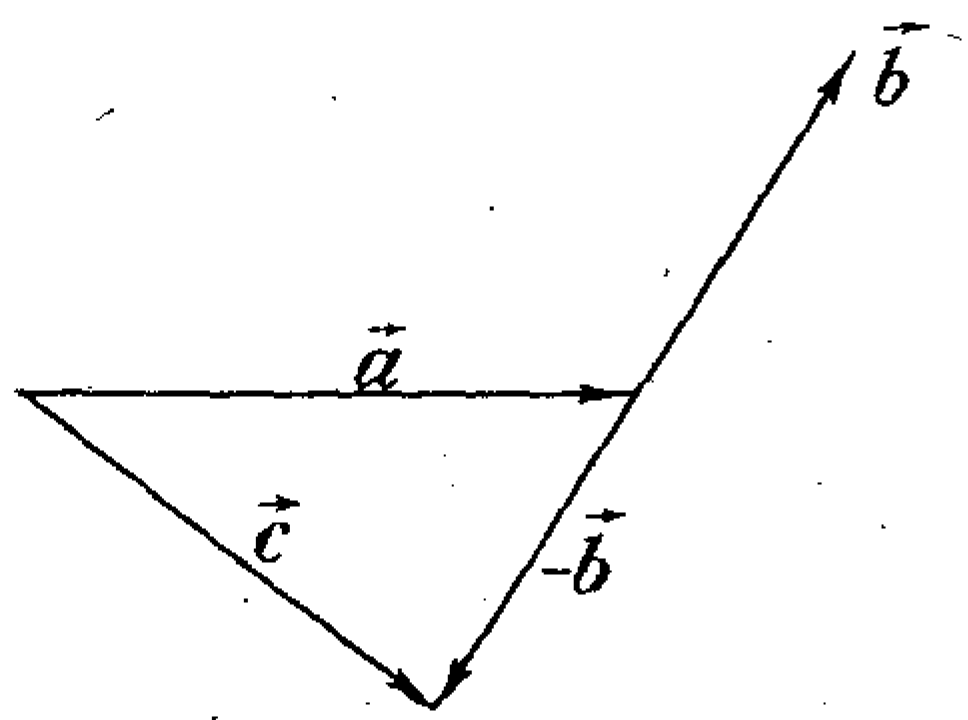
§ 10. Одузимање вектора.

Када вектор $\vec{b}$ одузмемо од вектора $\vec{a}$ (сл. 37), онда је

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}.$$

Речима исказано:

Разлика вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ је вектор $\vec{c}$, који добијамо, кад почетак вектора $\vec{a}$ спојимо са крајем вектора $-\vec{b}$ надовезаног на вектор $\vec{a}$.



Сл. 37.

§ 11. Множење вектора једним скаларом.

Производ вектора $\vec{a}$ и скалара n је вектор

$$n\vec{a}.$$

Ако би n био цео позитиван број, онда би $n\vec{a}$ био вектор истог правца и смера као и вектор $\vec{a}$, само n пута већег интензитета; ако би n био неки прав разломак, онда би интензитет вектора $n\vec{a}$ био мањи од интензитета $\vec{a}$, а смер вектора $n\vec{a}$ одређује знак, који стоји уз скаларни фактор n.

Тако сваки вектор $\vec{a}$, чији је интензитет a, има a пута већи интензитет од орта $\vec{a}_0$ истог правца и смера, тако да је

$$\vec{a} = a \cdot \vec{a}_0$$

одакле је

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{a}.$$

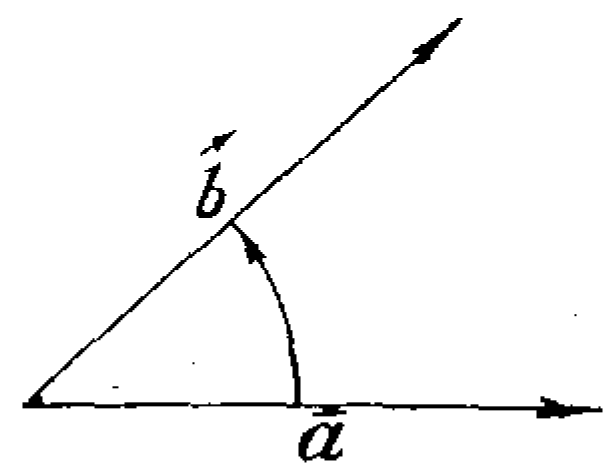
Видимо да се орт у правцу произвољног вектора може претставити као количник из самог тог вектора и његовог интензитета.

§ 12. Скаларни продукт двају вектора.

Ако угао, који заклапају вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 38) означимо са $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, онда се продукт

$$ab\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{a}\ \vec{b}\right)$$

назива *скаларни продукт* вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Сл. 38.

Операција скаларног множења двају вектора се, као што смо ставили, означује на тај начин, што се та два вектора пишу у малој загради*, само што се под тако заграђеним векторима $\vec{a}$ и $\vec{b}$ увек подразумева продукт њихових интензитета са косинусом захваћеног угла.

Како је

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \cos\left(\vec{b}, \vec{a}\right),$$

то је

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = \left(\vec{b}\ \vec{a}\right),$$

или речима исказано:

Закон комутације важи и за скаларни продукт вектора.

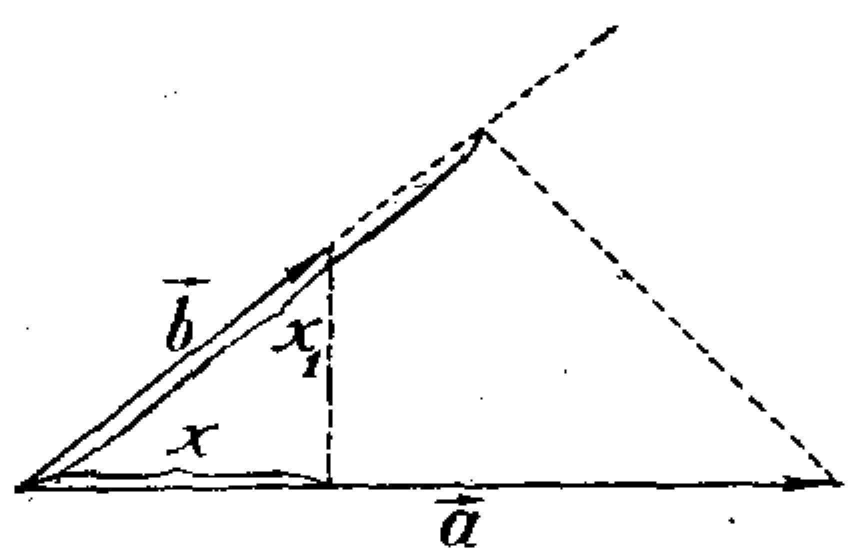
Ако помножимо вектор $\vec{a}$ скаларно са самим собом добићемо

$$\left(\vec{a}\ \vec{a}\right) = a\,.\,a\,.\cos 0 = a^2.$$

Скаларни продукт двају вектора је једнак нули,

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = 0,$$

у три случаја: 1) или кад је $\vec{a} = 0$; 2) или кад је $\vec{b} = 0$ и 3) или кад вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ стоје један на другом нормално, јер је у том случају $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.



Сл. 39.

Кад вектор $\vec{b}$ пројицирамо на вектор $\vec{a}$ (сл. 39), добићемо његову пројекцију x, а како је

---

* Неки писци изражавају скаларни продукт без заграда $\vec{a}\,\vec{b}$ или $\vec{a}\,.\,\vec{b}$.

$$\frac{x}{\left|\vec{b}\right|} = \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right),$$

или

$$x = \left|\vec{b}\right| \, . \, \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = b . \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

то је

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = ax.$$

Исто тако, пројицирајући вектор $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$, добићемо пројекцију x_1, те ће бити

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = bx_1,$$

одакле излази:

Скаларни продукт двају вектора, с геометријског гледишта једнак је продукту из интензитета једнога вектора помноженог пројекцијом другог вектора на први вектор као извесну осу.

Ако је један од вектора у скаларном продукту, рецимо $\vec{b}$, орт, дакле $\left|\vec{b}\right| = b = 1$, онда би према напред изложеном било

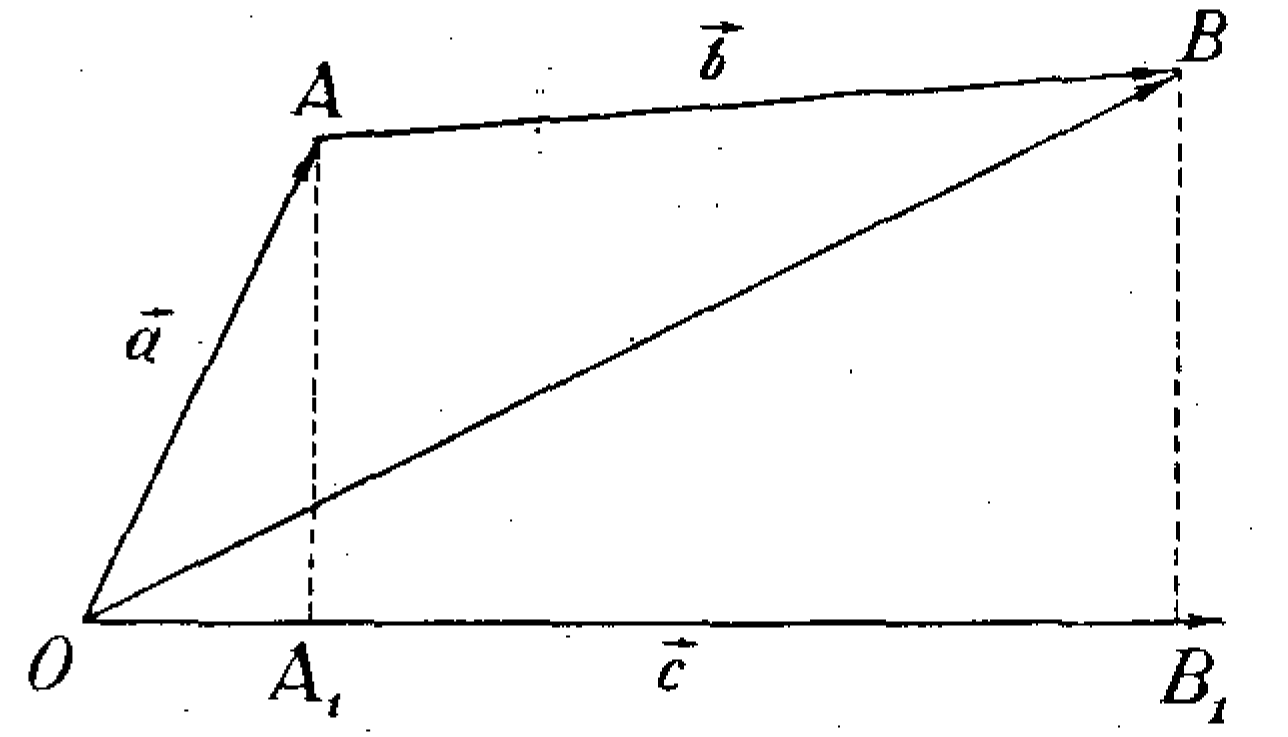
$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = x_1,$$

одакле следује:

Скаларни продукт неког вектора $\vec{a}$ и орта $\vec{b}$ једнак је самој пројекцији вектора $\vec{a}$ на осу орта $\vec{b}$.

Ако је неки од вектора у скаларном продукту сложен израз, онда се он у загради одваја запетом, а при образовању производа важи дистрибутивни закон. Тако је

$$\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}\ \vec{c}\right) + \left(\vec{b}\ \vec{c}\right).$$



Сл. 40.

Доказ. — Ако из крајњих тачака A и B (сл. 40) вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ спустимо нормале на вектор $\vec{c}$, онда из слике видимо да је

$$\overline{OB_1} = \overline{OA_1} + \overline{A_1B_1}.$$

Множећи обе стране последње једначине са c, где је

$$c = \left|\vec{c}\right|,$$

добићемо

$$c \,.\, \overline{OB_1} = c \,.\, \overline{OA_1} + c \,.\, \overline{A_1B_1} \qquad (1).$$

Дужина $\overline{OB_1}$ претставља пројекцију вектора

$$\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$

на осу вектора $\vec{c}$, па је према напред изложеном

$$c \,.\, \overline{OB_1} = (\overrightarrow{OB}, \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) \qquad (2).$$

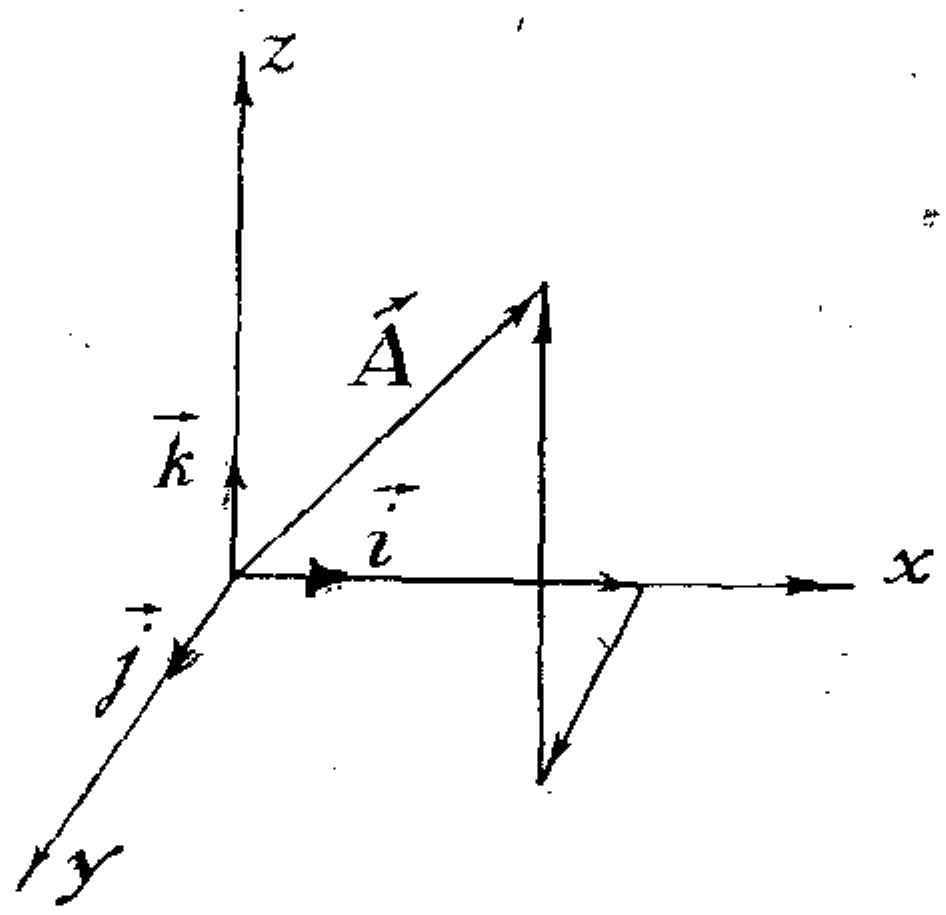
Исто тако дужине $\overline{OA_1}$ и $\overline{A_1B_1}$ претстављају нам пројекције вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, односно вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ на осу вектора $\vec{c}$, па је

$$c \,.\, \overline{OA_1} = (\vec{a}\ \vec{c})\,;\ c \,.\, \overline{A_1B_1} = (\vec{b}\ \vec{c}) \qquad (3).$$

Заменом израза (2) и (3) у (1) добијамо

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}\ \vec{c}) + (\vec{b}\ \vec{c}),$$

одакле видимо да за скаларни продукт важи закон дистрибуције.



Сл. 41.

Скаларни продукти основних ортова $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, (сл. 41) су

$$(\vec{i}\cdot\vec{i}) = 1,\ (\vec{i}\ \vec{j}) = 0,\ (\vec{i}\ \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{j}\ \vec{i}) = 0,\ (\vec{j}\ \vec{j}) = 1,\ (\vec{j}\ \vec{k}) = 0;$$

$$(\vec{k}\ \vec{i}) = 0,\ (\vec{k}\ \vec{j}) = 0,\ (\vec{k}\ \vec{k}) = 1.$$

Кад вектор $\vec{A}$ разложимо у компоненте, биће

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}.$$

Кад добивену једначину помножимо скаларно прво са $\vec{i}$, а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добићемо

$$\left(\vec{A}\ \vec{i}\right) = A_x,$$

$$\left(\vec{A}\ \vec{j}\right) = A_y,$$

$$\left(\vec{A}\ \vec{k}\right) = A_z,$$

одакле закон:

Кад један вектор разложен у компоненте помножимо скаларно основним ортовима $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, добијамо његове пројекције на координантним осама.

Ако хоћемо за скаларни продукт

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right)$$

да изведемо аналитички израз, онда је

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = \left(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\ \vec{k},\ b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}\right),$$

одакле, узимајући у обзир, да код скаларног продукта важи закон дистрибуције, добијамо

$$\left(\vec{a}\ \vec{b}\right) = a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z,$$

или речима исказано:

Скаларни продукт двају вектора једнак је збиру производа истоимених пројекција.

Кад је $\vec{a} = \vec{b}$, онда је према претходном ставу

$$\left(\vec{a}\ \vec{a}\right) = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

Ако нам је дата векторска једначина

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \tag{4}$$

онда је и

$$a_x\ \vec{i} + a_y\ \vec{j} + a_z\ \vec{k} + b_x\ \vec{i} + b_y\ \vec{j} + b_z\ \vec{k} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\ \vec{k},$$

или помноживши леву и десну страну скаларно прво са $\vec{i}$, а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$,

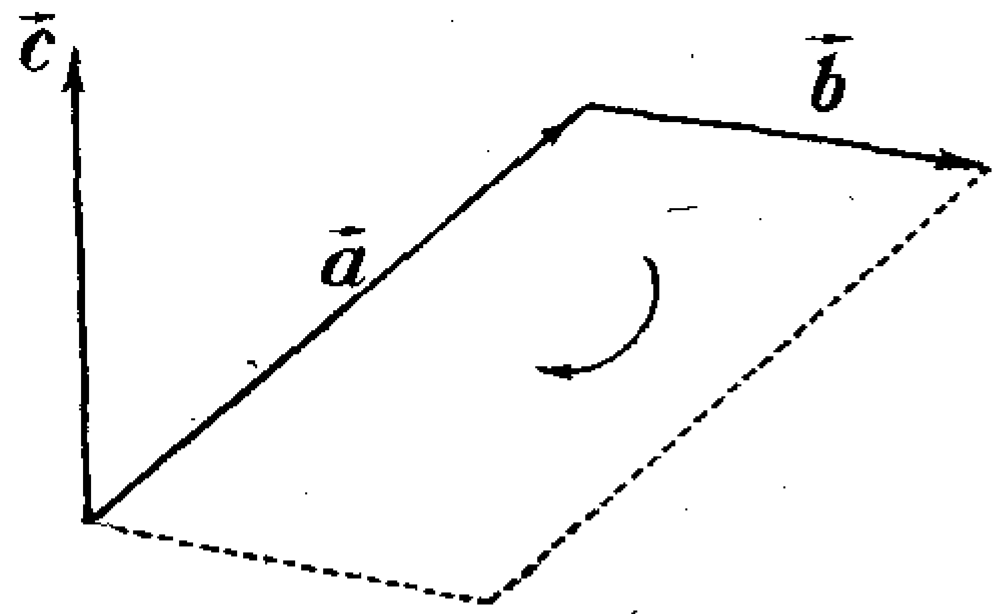
$$\left.\begin{aligned} a_x + b_x &= c_x, \\ a_y + b_y &= c_y, \\ a_z + b_z &= c_z. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Добивене три једначине (5) претстављају у скаларном облику векторску једначину (4).

Преобраћање векторских једначина у скаларне једначине назива се често *пројицирање или скаларизирање векторских једначина.*

§ 13. Векторски продукт двају вектора.

Векторски продукт двају вектора уопште је вектор, који стоји нормално на раван, коју одређују та два вектора, и чији је интензитет једнак производу из интензитета тих двају вектора помноженом синусом угла, који заклапају та два вектора, а смер управљен онамо, куд је управљен смер обртања другог вектора надовезаног на први вектор.



Сл. 42.

Кад хоћемо да означимо да се тражи векторски продукт вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (сл. 42), онда их заграђујемо средњом заградом, те је тако

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\right] = \vec{c}. \qquad (1)$$

Вектор $\vec{c}$ стоји нормално на раван, коју одређују вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и има смер управљен онамо, куд је управљен смер обртања вектора $\vec{b}$ надовезаног на вектор $\vec{a}$, и интензитет му је

$$\left|\vec{c}\right| = ab\ sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right), \qquad (2)$$

или другим речима интензитет му је једнак површини паралелограма* чије су стране вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Према дефиницији векторски продукт

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = 0 \qquad (3)$$

* То ће рећи: вектор $\vec{c}$ има толико дужинских јединица, колико паралелограм има површинских јединица.

може бити у три случаја: 1) кад је $\vec{a} = 0$; 2) кад је $\vec{b} = 0$ и 3) кад је $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$, а $\sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ је једнак нули, кад су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни или паралелни.

Како је

$$\sin \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\sin \sphericalangle\left(\vec{b}, \vec{a}\right) \tag{4}$$

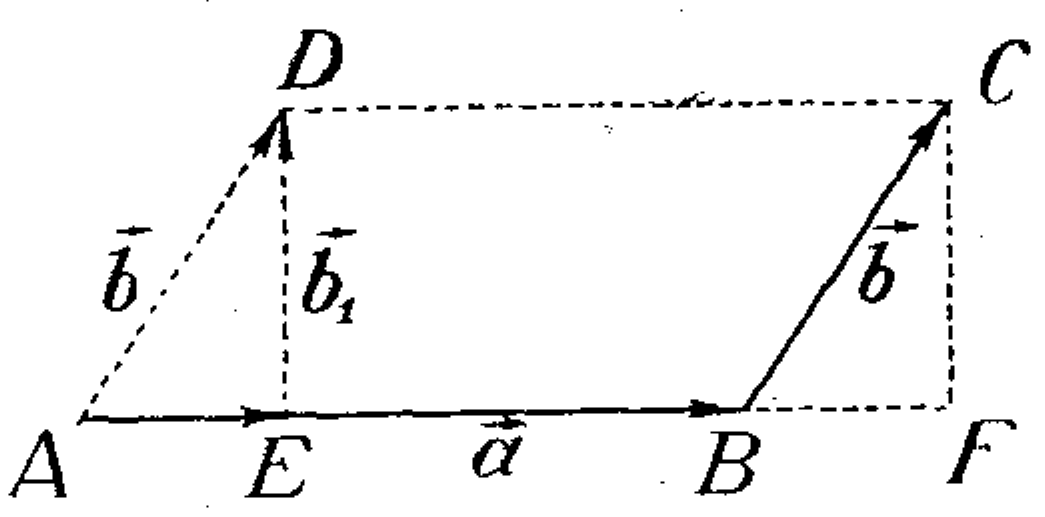
и како интензитет вектора као векторског продукта мора бити позитиван, то закон комутације код векторског продукта не може се примењивати, јер ако променимо места векторима у векторском продукту, он према изразу (4) мења знак тако да је

$$\left[\vec{b}\ \vec{a}\right] = -\left[\vec{a}\ \vec{b}\right].$$

Што се тиче дистрибутивног закона, он се може примењивати код векторског продукта исто онако као и код продукта скаларних величина, те је тако

$$\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}\ \vec{b}\right] + \left[\vec{a}\ \vec{c}\right],$$

што ћемо и доказати.



Сл. 43.

Али пре него што пређемо на сам доказ дистрибутивног закона код векторског продукта, извешћемо неке доказе, на које се ослања доказ дистрибутивног закона код векторског продукта.

1^0 Ако у посебном векторском продукту

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\right]$$

вектор $\vec{b}$ (сл. 43) сменимо његовом нормалном компонентом $\vec{b}_1$ на вектор $\vec{a}$, онда се тај векторски продукт неће променити, пошто векторски продукт $\left[\vec{a}\ \vec{b}_1\right]$ има са њим исти правац, смисао и величину, јер је површина паралелограма $ABCD$ једнака површина правоугаоника $EFCD$, јер имају исте основице и висине.

То исто важи и за векторски продукт $\left[\vec{a}\ \vec{c}\right]$ и отуда у векторском продукту

$$\left[\vec{a}, \overleftarrow{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}\,\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\,\vec{c}\right]$$

можемо векторе $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сменити њиховим нормалним компонентама $\vec{b}_1$ и $\vec{c}_1$ на вектор $\vec{a}$, па ће бити

$$\left[\vec{a}\,, \vec{b}_1 + \vec{c}_1\right] = \left[\vec{a}\,\vec{b}_1\right] + \left[\vec{a}\,\vec{c}_1\right]$$

и све што докажемо за тај продукт важи и за горњи продукт.

2^0 Кад два вектора $\vec{r}$ и $\vec{q}$ стоје један на други нормално, онда је квадрат интензитета њихове резултанте $\vec{d}$ једнак

$$\left|\vec{d}\right|^2 = \left|\vec{r}\right|^2 + \left|\vec{q}\right|^2.$$

То је сасвим јасно јер је

$$\vec{d} = \vec{r} + \vec{q}$$

одакле, помножив ову једначину скаларно истом том једначином, добијамо

$$\left(\vec{d}\,\vec{d}\right) = \left(\vec{r} + \vec{q}\,, \vec{r} + \vec{q}\right)$$

или применом дистрибутивног и комутативног закона

$$\left(\vec{d}\,\vec{d}\right) = \left(\vec{r}\,\vec{r}\right) + 2\left(\vec{r}\,\vec{q}\right) + \left(\vec{q}\,\vec{q}\right).$$

Како је према услову $\vec{r} \perp \vec{q}$ то је

$$\left(\vec{r}\,\vec{q}\right) = 0,$$

а како је

$$\left(\vec{d}\,\vec{d}\right) = \left|\vec{d}\right|^2, \quad \left(\vec{r}\,\vec{r}\right) = \left|\vec{r}\right|^2 \text{ и } \left(\vec{q}\,\vec{q}\right) = \left|\vec{q}\right|^2$$

то добијамо

$$\left|\vec{d}\right|^2 = \left|\vec{r}\right|^2 + \left|\vec{q}\right|^2.$$

Помножимо ову једначину са n^2, онда ћемо имати

$$n^2\left|\vec{d}\right|^2 = n^2\left|\vec{r}\right|^2 + n^2\left|\vec{q}\right|^2$$

а то ће рећи: кад два вектора стоје један на други нормално, па ако интензитет и једног и другог вектора помножимо неким скаларом n, онда и интензитет резултанте тако добивених вектора постаје n пута већи.

А сад ћемо прећи на сам доказ дистрибутивног закона код векторског продукта

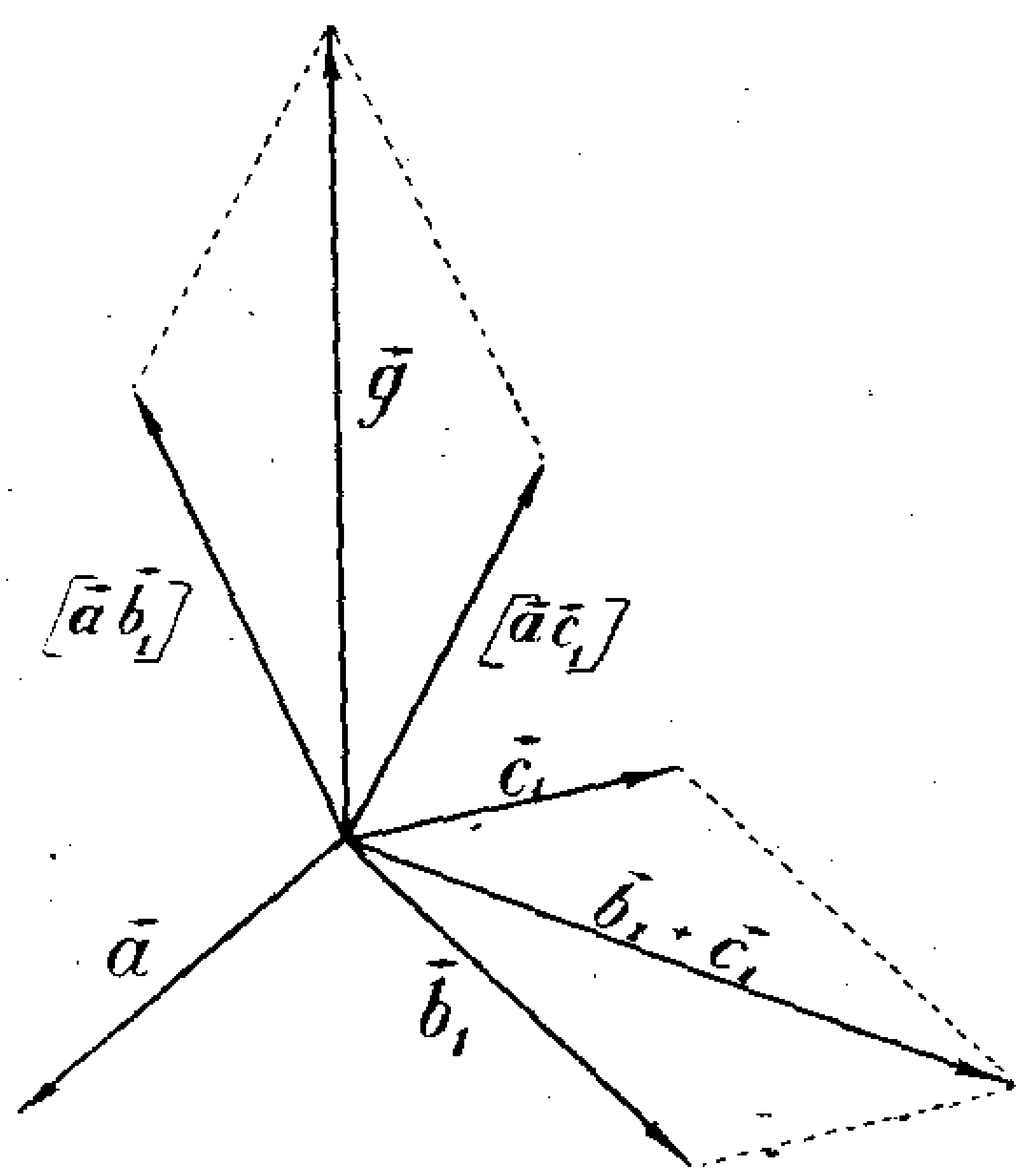
$$\left[\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{c}_1\right] = \left[\vec{a}\ \vec{b}_1\right] + \left[\vec{a}\ \vec{c}_1\right].$$

Вектор $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$ (сл. 44) стоји нормално на вектору $\vec{a}$, јер лежи у равни вектора $\vec{b}_1$ и $\vec{c}_1$, а та раван стоји нормално на вектору $\vec{a}$ те је тако

$$\left[\vec{a}, \vec{b}_1 + \vec{c}_1\right] = \vec{g},$$

$$\left|\vec{g}\right| = \left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}_1 + \vec{c}_1\right| . \sin\frac{\pi}{2} = \left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}_1 + \vec{c}_1\right|$$

или другим речима интензитет вектора $\vec{g}$ је a пута већи од интензитета вектора $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$.



Сл. 44.

Векторски продукт

$$\left[\vec{a} \times \vec{b}_1\right]$$

има интензитет

$$\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}_1\right]\right| = \left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}_1\right| . \sin\frac{\pi}{2} = \left|\vec{a}\right| . \left|\vec{b}_1\right|.$$

дакле a пута већи од интензитета вектора $\vec{b}_1$; а векторски продукт

$$\left[\vec{a}\,\vec{c}_1\right]$$

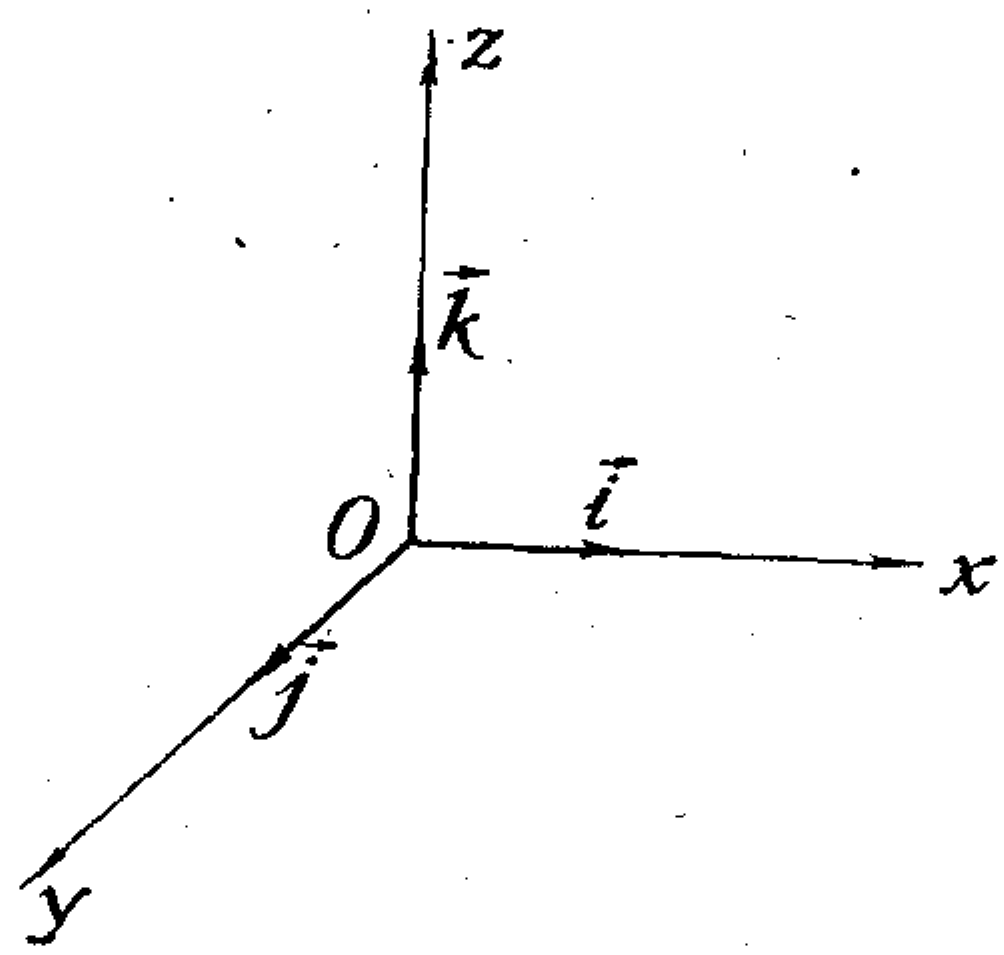
има интензитет a пута већи од интензитета вектора $\vec{c}_1$. А кад су интензитет вектора $\left[\vec{a}\,\vec{b}_1\right]$ и $\left[\vec{a}\,\vec{c}_1\right]$ a пута већи од вектора $\vec{b}_1$ односно $\vec{c}_1$, то и интензитет њихове резултанте мора бити a пута већи од интензитета резултанте вектора $\vec{b}_1$ и $\vec{c}_1$, а кад је a пута већи од интензитета резултанте $\vec{b}_1 + \vec{c}_1$, онда је она једнака $\vec{g}$, или другим речима

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}_1\right] + \left[\vec{a}\,\vec{c}_1\right] = \left[\vec{a},\ \vec{b}_1 + \vec{c}_1\right],$$

или

$$\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\,\vec{c}\right] = \left[\vec{a},\ \vec{b} + \vec{c}\right],$$

што је требало и доказати.



Сл. 45.

Векторски продукти основних ортова $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (сл. 45) су

$$\left[\vec{i}\,\vec{i}\right] = 0\ , \qquad \left[\vec{i}\,\vec{j}\right] = \vec{k}\ , \qquad \left[\vec{i}\,\vec{k}\right] = -\vec{j}\ ;$$

$$\left[\vec{j}\,\vec{i}\right] = -\vec{k}\ , \quad \left[\vec{j}\,\vec{j}\right] = 0\ , \qquad \left[\vec{j}\,\vec{k}\right] = \vec{i}\ ;$$

$$\left[\vec{k}\,\vec{i}\right] = \vec{j}\ , \qquad \left[\vec{k}\,\vec{j}\right] = -\vec{i}\ , \quad \left[\vec{k}\,\vec{k}\right] = 0\ .$$

Кад хоћемо векторски продукт

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\right] = \vec{c}$$

аналитички да изразимо, односно да га скаларним једначинама претставимо, онда прво поједине векторе разлажемо у њихове компоненте дуж координатних оса, па је

$$\left[a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},\ b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right] = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$$

или примењујући дистрибутивни закон и горње обрасце за векторске продукте основних ортова, добијамо

$$\left(a_y b_z - a_z b_y\right) \vec{i} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right) \vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right) \vec{k} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}\ , \qquad (5)$$

или множећи сад целу једначину скаларно са $\vec{i}$, а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добијамо једначине

$$\begin{aligned} c_x &= a_y\ b_z - a_z\ b_y \\ c_y &= a_z\ b_x - a_x\ b_z \\ c_z &= a_x\ b_y - a_y\ b_x \end{aligned}$$

које нам претстављају пројекције векторског продукта $\left[\vec{a}\ \vec{b}\right]$ на три Декартове осе. Индекси x, y, z добијају се један из другог цикличком пермутацијом.

Како се лева страна једначине (5) може претставити детерминантом трећег реда, у чијој су првој врсти ортови, у другој пројекције првог вектора $\vec{a}$, а у трећој пројекције вектора $\vec{b}$, то је

$$\left[\vec{a}\ \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} .$$

§ 14. Моменат везаног вектора у погледу на неку тачку.

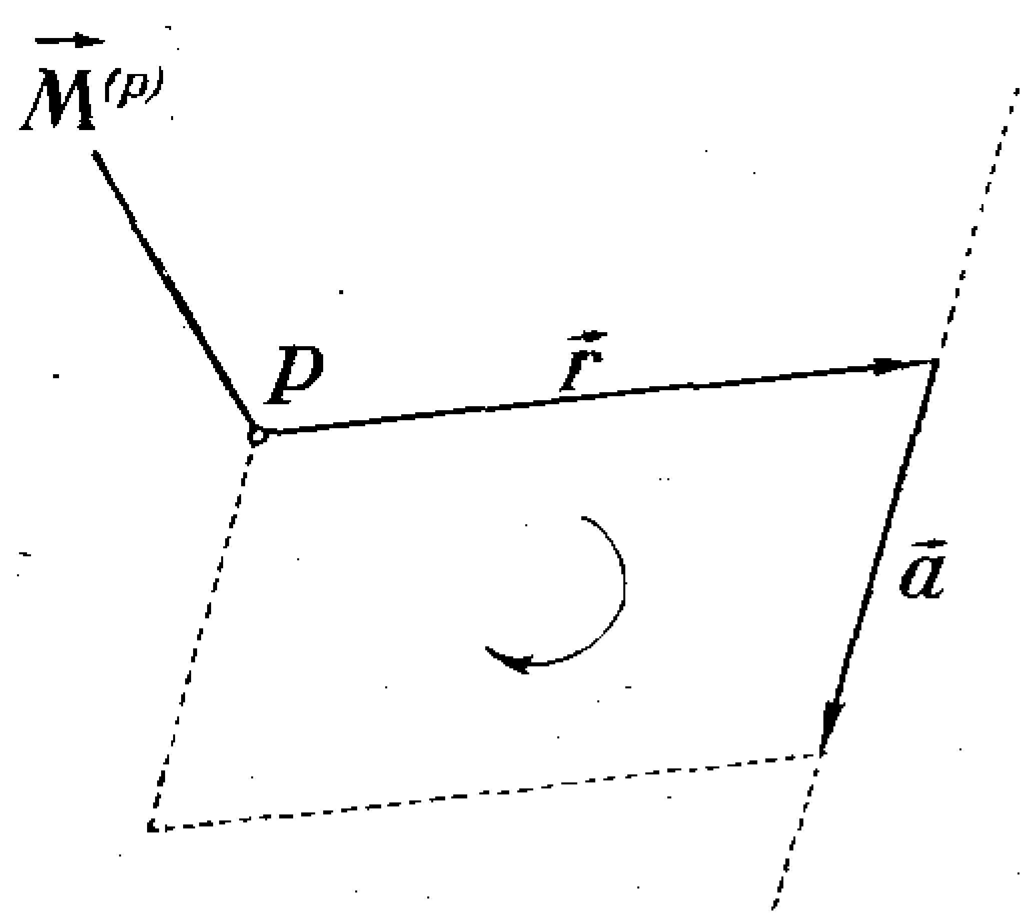
Ако се тражи моменат везаног вектора $\vec{a}$ (сл. 46.) у погледу на тачку P, која се у овом случају зове још и *пол*, онда кад из пола P повучемо вектор положаја $\vec{r}$, чији крај пада у почетак вектора $\vec{a}$, за моменат $\vec{M}^{(P)}$ вектора $\vec{a}$ сматрамо

$$\vec{M}^{(P)} = \left[\vec{r}\ \vec{a}\right],$$

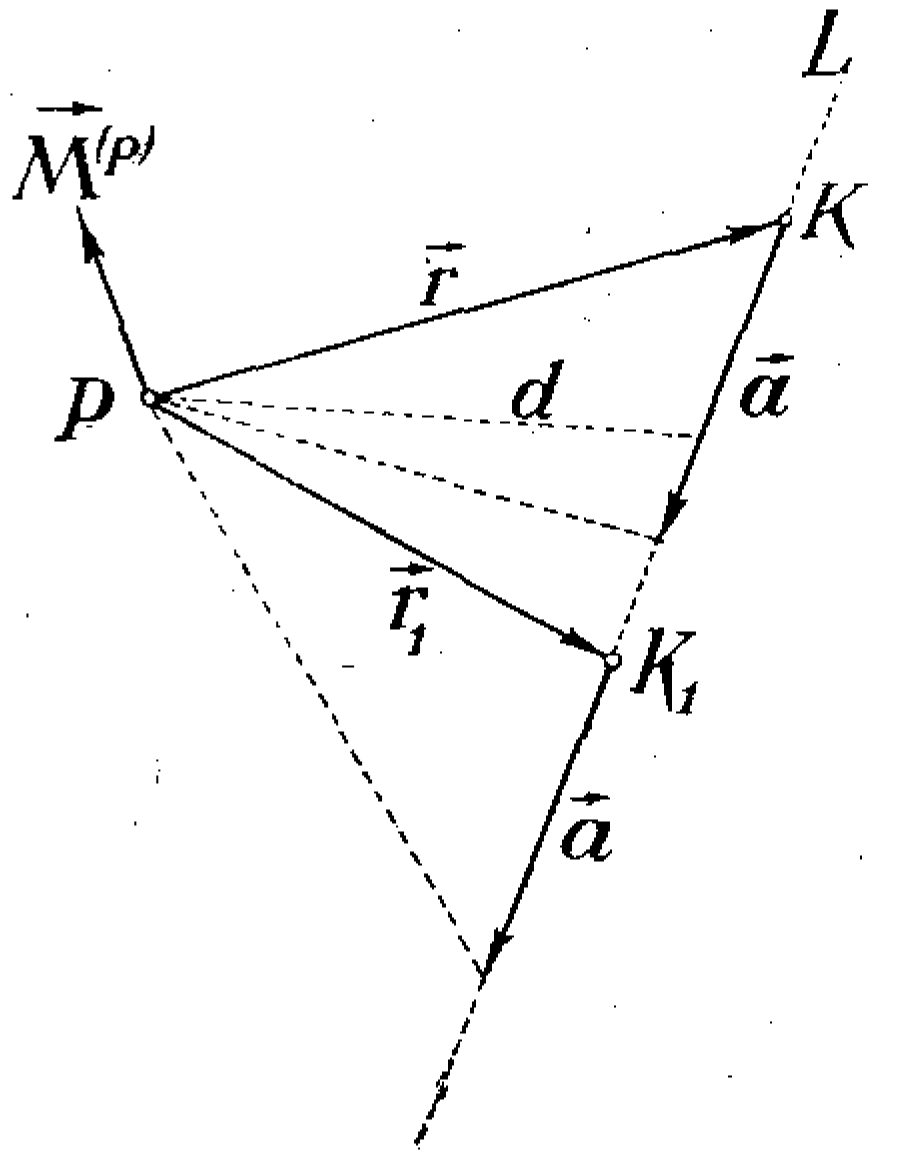
или другим речима сматрамо вектор $\vec{M}^{(P)}$, који стоји нормално на раван, коју одређују вектори $\vec{r}$ и $\vec{a}$, чији је смер управљен онамо, куд је управљен смер обртања вектора $\vec{a}$ око пола P и чија је величина

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = \left|\vec{r}\right| . \left|\vec{a}\right| . \sin\left(\vec{r}, \vec{a}\right),$$

односно чија је величина једнака површини паралелограма, чије су стране вектори $\vec{r}$ и $\vec{a}$.



Сл. 46.



Сл. 47.

Кад из пола P (сл. 47.) повучемо нормалу d на вектор $\vec{a}$, онда је

$$d = \left|\vec{r}\right| . \sin\left(\vec{r}, \vec{a}\right).$$

Нормала d назива се обично и *крак вектора*. Како је величина момента вектора $\vec{a}$ у погледу пола P

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = \left|\vec{r}\right| . \left|\vec{a}\right| . \sin\left(\vec{r}, \vec{a}\right),$$

то с обзиром на претходну једначину можемо ставити

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| = \left|\vec{a}\right| . d,$$

или речима исказано:

Величина момента неког вектора у погледу на неку тачку, једнака је производу из интензитета вектора и његовог нормалног отстојања (крака) од пола, или још: *величина момента неког вектора у погледу на неку тачку једнака је двострукој површини троугла, чија је основица вектор, а висина крак вектора.*

Ако је нападна тачка K вектора $\vec{a}$, клизећи по правој L, дошла у положај K_1, који је одређен према полу P вектором $\vec{r}_1$, онда ћемо у овом случају за моменат вектора $\vec{a}$ добити

$$\vec{M}_1^{(P)} = \left[\vec{r}_1\ \vec{a}\right].$$

Из слике видимо да је

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{KK}_1,$$

па је зато

$$\vec{M}_1^{(P)} = \left[\vec{r}_1\ \vec{a}\right] = \left[\vec{r} + \vec{KK}_1,\ \vec{a}\right] = \left[\vec{r}\ \vec{a}\right] + \left[\vec{KK}_1,\ \vec{a}\right].$$

Како су векори $\vec{KK}_1$ и $\vec{a}$ колинеарни, то је

$$\left[\vec{KK}_1,\ \vec{a}\right] = 0,$$

па је зато

$$\vec{M}_1^{(P)} = \left[\vec{r}\ \vec{a}\right] = \vec{M}^{(P)},$$

или речима исказано: *моменат везаног вектора $\vec{a}$ око неког пола P не мења своју векторску вредност ако пустимо да вектор $\vec{a}$ клизи дуж праве за коју је везан.*

Како је моменат везаног вектора око пола претстављен векторским продуктом, то ћемо пројекције овог момента на Декартове осе добити на исти онај начин, на који смо их добили код векторског продукта. Разликоваћемо два случаја.

Случај I. — Нека се пол P поклапа са координатним почетком Декартовог триедра. Онда је

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

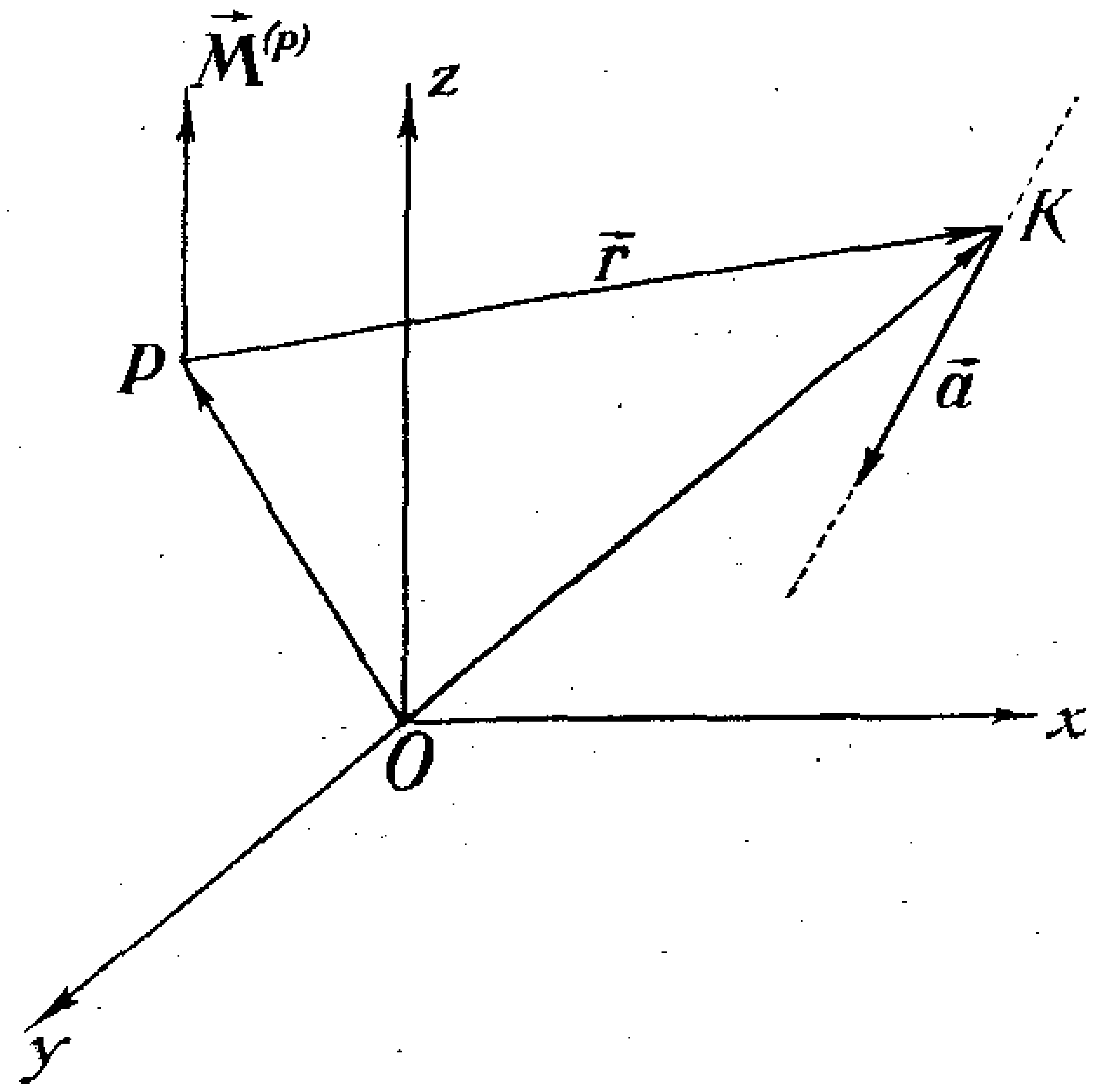
$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k};$$

па је зато,

$$\vec{M}^{(P)} = \left[\vec{r}\ \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

одакле је

$$M_x^{(P)} = yZ - zY,$$
$$M_y^{(P)} = zX - xZ,$$
$$M_z^{(P)} = xY - yX.$$



Сл. 48.

Случај II. — Претпоставимо сада да пол P не лежи у координатном почетку. Из слике (сл. 48.) видимо да је

$$\vec{OK} = \vec{OP} + \vec{r},$$

одакле је

$$\vec{r} = \vec{OK} - \vec{OP}.$$

Како је

$$\vec{OK} = x_k \,.\, \vec{i} + y_k \,.\, \vec{j} + z_k \,.\, \vec{k},$$

$$\vec{OP} = x_p \,.\, \vec{i} + y_p \,.\, \vec{j} + z_p \,.\, \vec{k};$$

то је сада

$$\vec{r} = x_k \vec{i} + y_k \vec{j} + z_k \vec{k} - \left(x_p \vec{i} + y_p \vec{j} + z_p \vec{k}\right),$$

или

$$\vec{r} = (x_k - x_p)\,\vec{i} + (y_k - y_p)\,\vec{j} + (z_k - z_p)\,\vec{k}.$$

Како је и сада

$$\vec{a} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},$$

то је

$$\vec{M}^{(P)} = \left[\vec{r}\,\vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_k - x_p & y_k - y_p & z_k - z_p \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

одакле је

$$M_x^{(P)} = (y_k - y_p)\,Z - (z_k - z_p)\,Y,$$
$$M_y^{(P)} = (z_k - z_p)\,X - (x_k - x_p)\,Z,$$
$$M_z^{(P)} = (x_k - x_p)\,Y - (y_k - y_p)\,X.$$

Моменат неког вектора у погледу на неки пол једнак је нули кад вектор пролази кроз тај пол.

§ 15. Продукт вектора и скаларног продукта друга два вектора.

Продукт вектора $\vec{a}$ и скаларног продукта вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$ је

$$\vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right) = k\,\vec{a},$$

где је

$$k = \left(\vec{b}\,\vec{c}\right) = b\,c\,\cos\left(\vec{b}, \vec{c}\right).$$

Продукт

$$k\,\vec{a}$$

је вектор, чији је интензитет k пута већи од интензитета вектора $\vec{a}$, правац исти као и вектора $\vec{a}$, а смер исти ако је k позитиван, а супротан, ако је k негативан број.

Како је

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k},$$

$$\left(\vec{b}\,\vec{c}\right) = b_x\,c_x + b_y\,c_y + b_z\,c_z,$$

то ћемо за пројекције вектора $\vec{a}\left(\vec{b}\,\vec{c}\right)$ на три Декартове осе добити изразе,

$$k\,a_x = a_x\,(\,b_x\,c_x + b_y\,c_y + b_z\,c_z\,),$$
$$k\,a_y = a_y\,(\,b_x\,c_x + b_y\,c_y + b_z\,c_z\,),$$
$$k\,a_z = a_z\,(\,b_x\,c_x + b_y\,c_y + b_z\,c_z\,).$$

§ 16. Скаларни продукт вектора и векторског продукта друга два вектора.

Израз облика

$$\left(\vec{a}\,[\vec{b}\times\vec{c}]\right)$$

претставља нам двоструки скаларни продукт вектора $\vec{a}$ и векторског продукта вектора $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Тај продукт је према дефиницији скалар, а његову вредност изражавамо помоћу ортогоналних пројекција вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Како је

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}\,,$$

$$\vec{b} = b_x\,\vec{i} + b_y\,\vec{j} + b_z\,\vec{k}\,,$$

$$\vec{c} = c_x\,\vec{i} + c_y\,\vec{j} + c_z\,\vec{k}$$

то је

$$[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\,,$$

одакле је

$$d_x = b_y\,c_z - b_z\,c_y\,,$$
$$d_y = b_z\,c_x - b_x\,c_z\,,$$
$$d_z = b_x\,c_y - b_y\,c_x\,.$$

Зато је

$$\left(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]\right) = \left(\vec{a}\,\vec{d}\right) = a_x\,d_x + a_y\,d_y + a_z\,d_z\,,$$

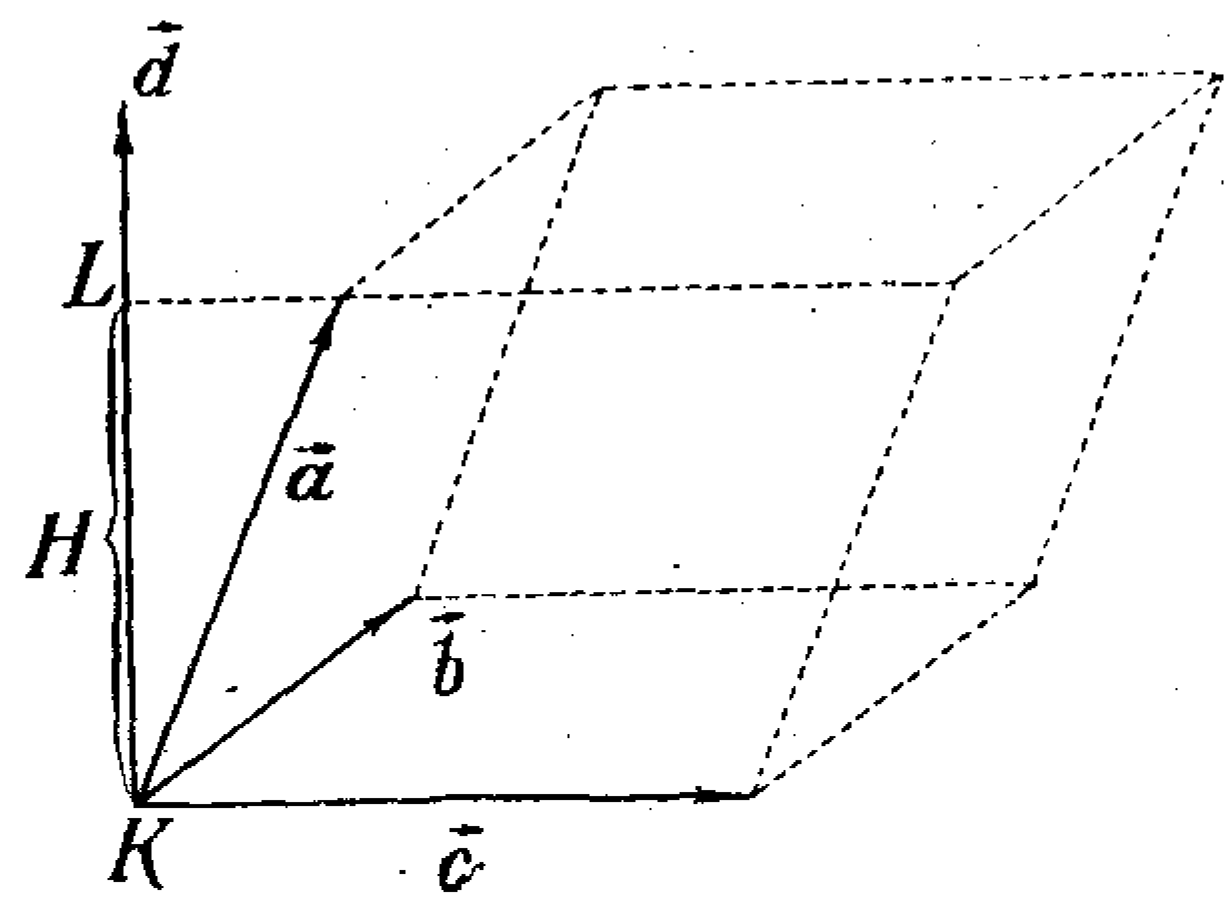
или

$$\left(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}]\right) = a_x\,(b_y\,c_z - b_z\,c_y) + a_y\,(b_z\,c_x - b_x\,c_z) + a_z\,(b_x\,c_y - b_y\,c_x)\,,$$

што можемо скраћено написати у облику детерминанте трећег реда

$$\left(\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \; *$$

Да бисмо дали геометријско тумачење скаларног продукта вектора и векторског продукта поступићемо овако: Доведимо



Сл. 49.

векторе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ на заједнички почетак K (сл. 49.) и конструишимо над њима паралелопипед. Вектор

$$\vec{d} = \left[\vec{b} \times \vec{c}\right]$$

стоји нормално на основици овог паралелопипеда, коју одређују вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$, а има интензитет једнак површини те основице.

Скаларни продукт вектора $\vec{a}$ и векторског продукта $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се може претставити овако

$$\left(\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right) = \left(\vec{a}\,\vec{d}\right) = d\,.\,a \cos\left(\vec{a},\,\vec{d}\right).$$

Али $a\,.\cos\left(\vec{a},\,\vec{d}\right)$ претставља нам пројекцију вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{d}$, а то је висина паралелопипеда, па је зато

$$a \cos\left(\vec{a},\,\vec{d}\right) = H = \overline{KL}.$$

Зато је

$$\left(\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right) = d\,.\,H,$$

* Како се вредност ове детерминанте не мења мењајући места врстама, то се у овом изразу сме вршити циклична пермутација тако да је

$$\left(\vec{a}\left[\vec{b}\,\vec{c}\right]\right) = \left(\vec{b}\left[\vec{c}\,\vec{a}\right]\right) = \left(\vec{c}\left[\vec{a}\,\vec{b}\right]\right).$$

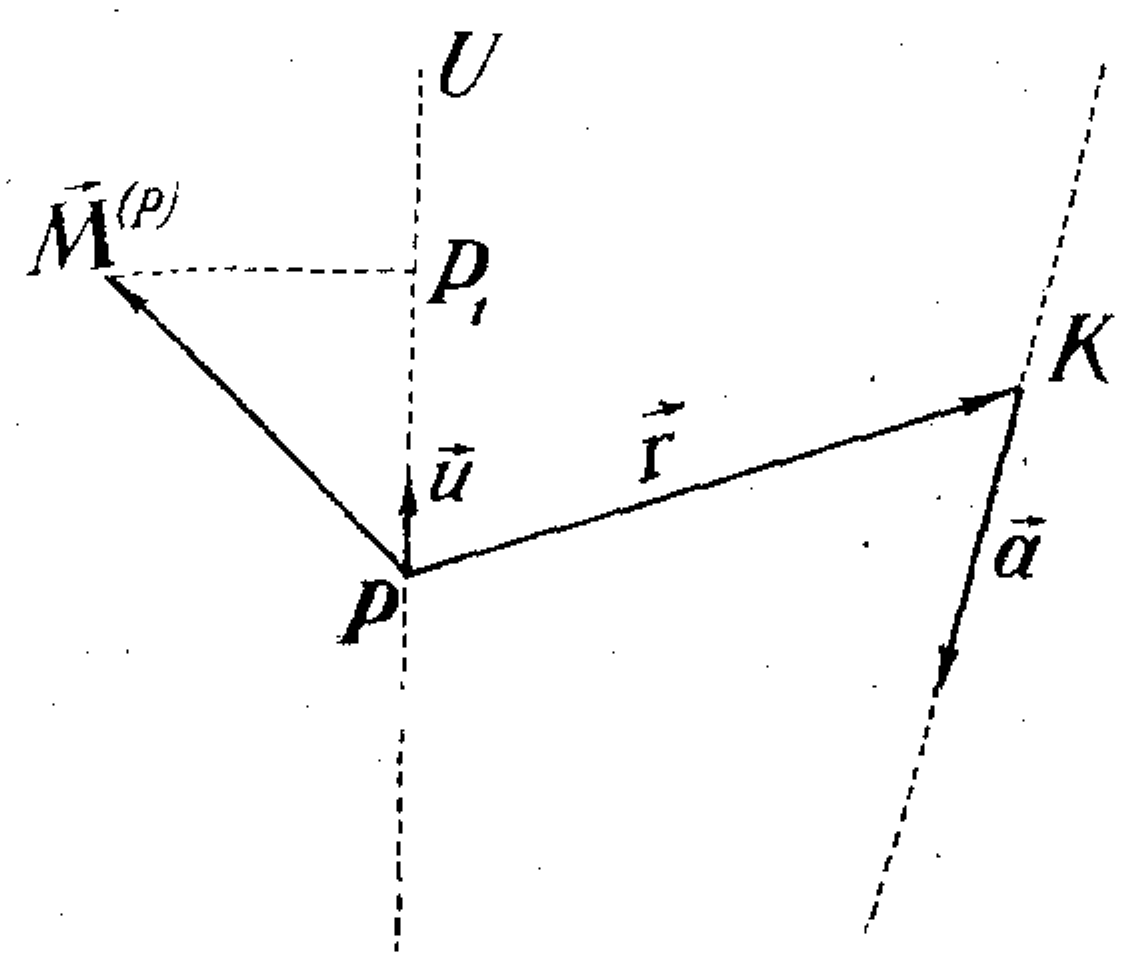
а d. H нам претставља запремину паралелопипеда. Отуда видимо да нам продукт $(\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}])$ претставља запремину паралелопипеда конструисаног над векторима $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Та ће запремина бити једнака нули кад та три вектора буду лежала у истој равни тј. кад су они компланарни. Зато израз

$$(\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]) = 0\,,$$

претставља услов компланарности трију вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, ако при том ни један од њих није једнак нули.

§ 17. Моменат везаног вектора у погледу на неку осу.

Кад се тражи моменат везаног вектора $\vec{a}$ у погледу на неку осу U, онда узимамо једну произвољну тачку P на датој оси и одредимо према § 14 моменат $\vec{M}^{(P)}$ вектора $\vec{a}$ у погледу тачке P.



Сл. 50.

Тај је моменат дат изразом

$$\vec{M}^{(P)} = [\vec{r}\,\vec{a}].$$

Пројекција $\overline{PP_1}$ (сл. 50.) момента $\vec{M}^{(P)}$ на осу U назива се моменат везаног вектора $\vec{a}$ у погледу на осу U.

Ако орт осе U означимо са $\vec{u}$, онда нам је моменат у погледу на осу U претстављен овим изразом

$$\overline{PP_1} = M^{(P)}_{\vec{u}} = \left|\vec{M}^{(P)}\right| . \cos\left(\vec{M}^{(P)}, \vec{u}\right).$$

Како је

$$\left|\vec{M}^{(P)}\right| . \cos\left(\vec{M}^{(P)}, \vec{u}\right) = 1.\left|\vec{M}^{(P)}\right| . \cos\left(\vec{u}, \vec{M}^{(P)}\right) = \left(\vec{u}\,\vec{M}^{(P)}\right) =$$

$$= \left(\vec{u}\left[\vec{r}\,\vec{a}\right]\right),$$

то за моменат $M^{(P)}_{\vec{u}} = \overline{PP_1}$ добијамо

$$\overline{PP_1} = M^{(P)}_{\vec{u}} = \left(\vec{u}\left[\vec{r}\,\vec{a}\right]\right).$$

Ако се пол P не поклапа са почетком Декартовог триедра, онда је

$$\vec{u} = u_x\,\vec{i} + u_y\,\vec{j} + u_z\,\vec{k},$$

а према § 14, случај II,

$$\vec{r} = (x_k - x_p)\,\vec{i} + (y_k - y_p)\,\vec{j} + (z_k - z_p)\,\vec{k},$$

$$\vec{a} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j} + Z\,\vec{k},$$

па се моменат везаног вектора у погледу на осу U може према § 16 претставити детерминантом

$$\overline{PP_1} = M^{(P)}_{\vec{u}} = \left(\vec{u}\left[\vec{r}\,\vec{a}\right]\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ x_k - x_p & y_k - y_p & z_k - z_p \\ X & Y & Z \end{vmatrix}.$$

§ 18. Дупли векторски продукт.

Дуплим векторским продуктом, или још векторским продуктом вектора и векторског продукта назива се израз облика

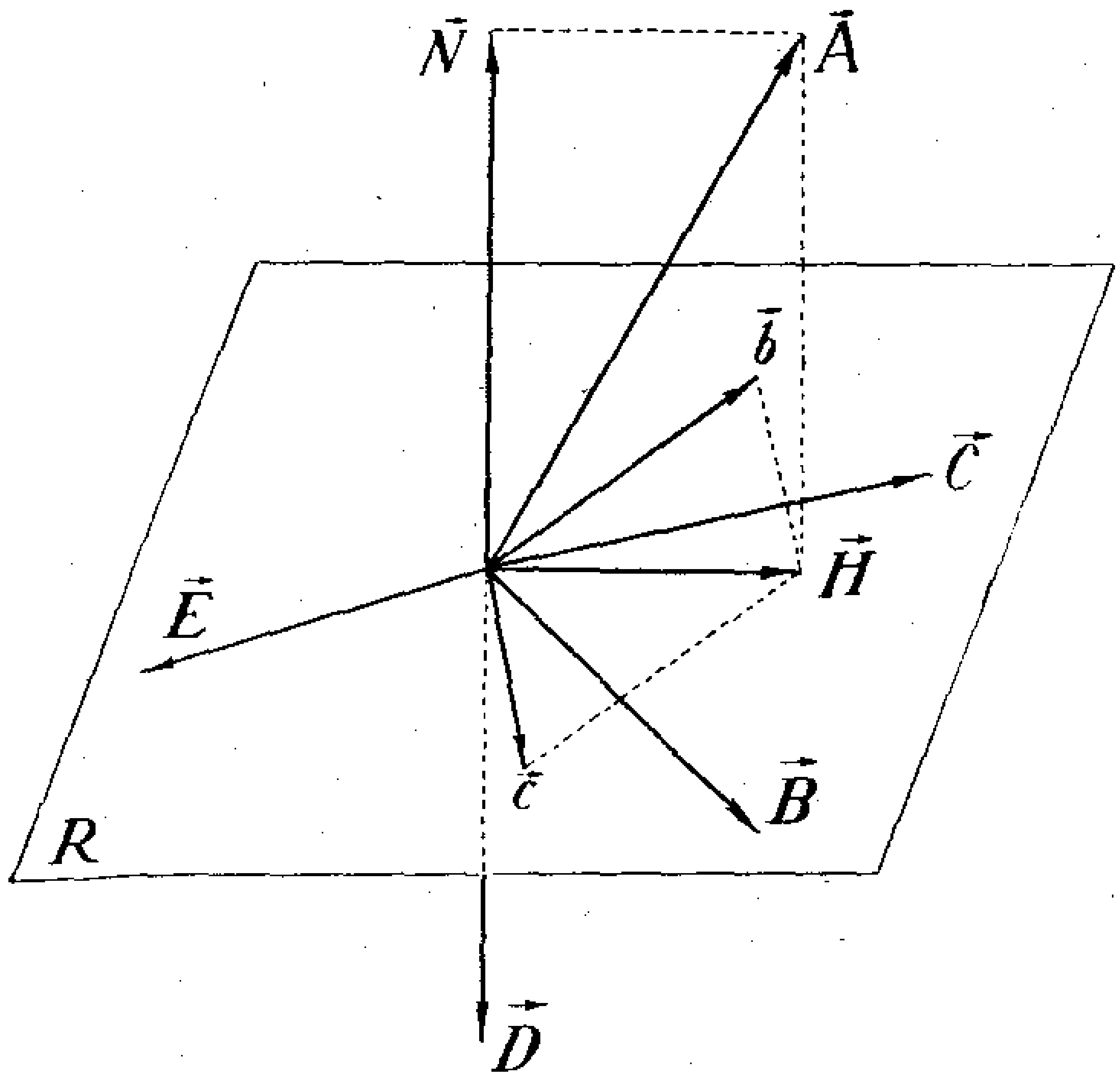
$$\vec{E} = \left[\vec{A}\times\left[\vec{B}\times\vec{C}\right]\right].$$

Вектор

$$\vec{D} = \left[\vec{B}\times\vec{C}\right] \qquad (1)$$

стоји нормално на равни R (сл. 51.), коју одређују вектори $\vec{B}$ и $\vec{C}$

па зато при векторском множењу вектора $\vec{A}$ вектором $\vec{D}$ добијамо вектор $\vec{E}$, који стоји нормално и на $\vec{A}$ и на $\vec{D}$. Зато вектор $\vec{E}$ лежи



Сл. 51.

у равни R. Ако би вектор $\vec{A}$ стајао нормално на равни R, онда би било $\vec{E} = 0$, јер је

$$\vec{E} = [\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = [\vec{A} \times \vec{D}],$$

па би вектори $\vec{A}$ и $\vec{D}$ били колинеарни, пошто и један и други стоје нормално на истој равни, а због тога мора бити њихов векторски продукт једнак нули.

Раставимо вектор $\vec{A}$ у две ортогоналне компоненте, од којих једна $\vec{H}$ лежи у равни R, а друга $\vec{N}$ стоји нормално на тој равни, дакле

$$\vec{A} = \vec{H} + \vec{N}. \qquad (2).$$

Стога је

$$\vec{E} = [\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}]] = [\vec{A} \times \vec{D}] = [\vec{H} + \vec{N} \times \vec{D}] = [\vec{H} \times \vec{D}] + [\vec{N} \times \vec{D}],$$

али како је $\vec{N} \parallel \vec{D}$, јер оба вектора стоје управно на равни R, то је

$$[\vec{N}\times\vec{D}] = 0,$$

па добијамо

$$\vec{E} = [\vec{H}\times\vec{D}] = [\vec{H}\times[\vec{B}\times\vec{C}]]. \qquad (3)$$

Раставимо вектор $\vec{H}$ у равни R у две компоненте, од којих једна $\vec{b}$ стоји нормално на вектору $\vec{B}$, а друга $\vec{c}$ нормално на вектору $\vec{C}$. Зато је

$$\vec{H} = \vec{b} + \vec{c}. \qquad (4)$$

Како векторски продукт $\vec{D} = [\vec{B}\times\vec{C}]$ стоји нормално на равни R, а вектор $\vec{b}$ је нормалан на $\vec{B}$, то векорски продукт $[\vec{b}\times\vec{D}]$ стоји нормално и на $\vec{b}$ и на $\vec{D}$ и има смер вектора $\vec{B}$. Означимо ли орт вектора $\vec{B}$ са $\vec{B}_0$, то је

$$[\vec{b}\times\vec{D}] = |\vec{b}| \,.\, |\vec{D}| \,.\, \sin\,(\vec{b},\vec{D}) \,.\, \vec{B}_0 \,.$$

Како $\vec{b}$ лежи у равни R, а $\vec{D}$ стоји нормално на тој равни, то је $\sphericalangle\,(\vec{b},\vec{D}) = \frac{\pi}{2}$, па је зато

$$[\vec{b}\;\vec{D}] = |\vec{b}| \,.\, |\vec{D}| \,.\, \vec{B}_0 \,. \qquad (5)$$

Према (1) је

$$|\vec{D}| = |\vec{B}| \,.\, |\vec{C}| \,.\, \sin(\vec{B}\,,\,\vec{C}) \,. \qquad (6)$$

Како је $\vec{b} \perp \vec{B}$, то је

$$\sphericalangle\,(\vec{B},\vec{C}) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle\,(\vec{C}\,,\,\vec{b})\,,$$

$$\sin \sphericalangle\,(\vec{B}\,,\vec{C}) = \cos \sphericalangle\,(\vec{C}\,,\vec{b})\,.$$

па израз (6) постаје

$$|\vec{D}| = |\vec{B}| \,.\, |\vec{C}| \,.\, \cos(\vec{C}\,,\,\vec{b})\,.$$

Заменом ове вредности интензитета вектора $\vec{D}$ у (5), добијамо

$$[\vec{b}\;\vec{D}] = |\vec{b}| \,.\, |\vec{B}| \,.\, |\vec{C}| \,.\, \cos\,(\vec{C}\,,\,\vec{b}) \,.\, \vec{B}_0 \,. \qquad (7)$$

Али како је

$$\vec{B} = \left|\vec{B}\right| . \vec{B}_0 ,$$

то одатле следује

$$\vec{B}_0 = \frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} .$$

Заменом $\vec{B}_0$ у (7) добијамо

$$\left[\vec{b}\ \vec{D}\right] = \left|\vec{b}\right| . \left|\vec{B}\right| . \left|\vec{C}\right| . \cos\left(\vec{C}, \vec{b}\right) . \frac{\vec{B}}{\left|\vec{B}\right|} .$$

или

$$\left[\vec{b}\ \vec{D}\right] = \left|\vec{b}\right| . \left|\vec{C}\right| . \cos\left(\vec{b}, \vec{C}\right) . \vec{B} ,$$

или како је

$$\left|\vec{b}\right| . \left|\vec{C}\right| \cos\left(\vec{b}, \vec{C}\right) = \left(\vec{b}\ \vec{C}\right) ,$$

то је

$$\left[\vec{b} \times \vec{D}\right] = \left(\vec{b} \times \vec{C}\right) \times \vec{B} . \tag{8}$$

Из (4) добијамо

$$\vec{b} = \vec{H} - \vec{c} .$$

Заменом у (8) добијамо

$$\left[\vec{b}\ \vec{D}\right] = \left(\vec{H} - \vec{c}, \vec{C}\right) . \vec{B} = \left(\vec{H}\ \vec{C}\right) . \vec{B} - \left(\vec{c}\ \vec{C}\right) . \vec{B} ,$$

али како је $\vec{c} \perp \vec{C}$, то је $\left(\vec{c}\ \vec{C}\right) = 0$, па добијамо

$$\left[\vec{b}\ \vec{D}\right] = \left(\vec{H}\ \vec{C}\right) . \vec{B}. \tag{9}$$

Из векторске једначине (2) следује

$$\vec{H} = \vec{A} - \vec{N}.$$

Кад ову вредност за вектор $\vec{H}$ сменимо у (9), добићемо

$$\left[\vec{b}\ \vec{D}\right] = \left(\vec{A} - \vec{N}, \vec{C}\right) \vec{B} = \left(\vec{A}\ \vec{C}\right) \vec{B} - \left(\vec{N}\ \vec{C}\right) \vec{B}. \tag{10}$$

Вектор $\vec{N}$ стоји нормално на равни R, у којој леже вектори $\vec{B}$ и $\vec{C}$, па је зато нормалан на оба та вектора. Зато је у нашем случају

$$(\vec{N}\ \vec{C}) = 0,$$

па израз (10) постаје

$$[\vec{b}\ \vec{D}] = (\vec{A}\ \vec{C})\ \vec{B},$$

или

$$[\vec{b}\ \vec{D}] = [\vec{b}\ [\vec{B}\ \vec{C}]] = (\vec{A}\ \vec{C})\ .\ \vec{B}. \qquad (11)$$

Векторски продукт $[\vec{c}\ \vec{D}]$ стоји нормално на $\vec{c}$ и $\vec{D}$, дакле има исти правац са вектором $\vec{C}$, али супротан смер, јер ако надовежемо на вектор $\vec{c}$ вектор $\vec{D}$ и посматрамо са краја вектора $-\vec{C}$ видећемо да $\vec{D}$ вуче $\vec{c}$ у смислу казаљке на часовнику. Ако према томе означимо орт у правцу вектора $\vec{C}$ са $\vec{C}_0$, то је

$$[\vec{c}\ \vec{D}] = -\left|[\vec{c}\ \vec{D}]\right|\ .\ \vec{C}_0 = -\left|\vec{c}\right|\ .\ \left|\vec{D}\right|\ .\ sin\ (\vec{c}, \vec{D})\ .\ \vec{C}_0\ .$$

Али како је $\vec{c}$ нормално на $\vec{D}$, јер вектор $\vec{c}$ лежи у равни, на којој $\vec{D}$ стоји нормално, то је

$$sin \sphericalangle (\vec{c}; \vec{D}) = sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

па је

$$[\vec{c}\ \vec{D}] = -\left|\vec{c}\right|\ .\ \left|\vec{D}\right|\ .\ \vec{C}_0\ ,$$

или према (6)

$$[\vec{c}\ \vec{D}] = -\left|\vec{c}\right|\ .\ \left|\vec{B}\right|\ .\ \left|\vec{C}\right|\ .\ sin\ (\vec{B}, \vec{C})\ .\ \vec{C}_0$$

Како је

$$\sphericalangle (\vec{B}, \vec{C}) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle (\vec{B}, \vec{c}),$$

а

$$\vec{C}_0 = \frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|}\ ,$$

то добијамо

$$\left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = -\left|\vec{c}\right| . \left|\vec{B}\right| . \left|\vec{C}\right| . \operatorname{Cos}\left(\vec{B}, \vec{c}\right) . \frac{\vec{C}}{\left|\vec{C}\right|},$$

или

$$\left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = -\left(\vec{c}\ \vec{B}\right) . \vec{C}, \tag{12}$$

јер је

$$\left|\vec{c}\right| . \left|\vec{B}\right| . \cos\left(\vec{B}, \vec{c}\right) = \left(\vec{c}\ \vec{B}\right).$$

Из (4) следује

$$\vec{c} = \vec{H} - \vec{b},$$

па заменом у (12) добијамо

$$\left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = -\left(\vec{H} - \vec{b}, \vec{B}\right)\vec{C} = -\left(\vec{H}\ \vec{B}\right)\vec{C} + \left(\vec{b}\ \vec{B}\right)\vec{C}.$$

Али како је вектор $\vec{b}$ нормалан на вектору $\vec{B}$, то је

$$\left(\vec{b}\ \vec{B}\right) = 0,$$

па добијамо

$$\left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = -\left(\vec{H}\ \vec{B}\right)\vec{C}. \tag{13}$$

Из једначине (2) следује

$$\vec{H} = \vec{A} - \vec{N},$$

па заменом у (13) добијамо

$$\left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = -\left(\vec{A} - \vec{N}, \vec{B}\right)\vec{C} = -\left(\vec{A}\ \vec{B}\right)\vec{C} + \left(\vec{N}\ \vec{B}\right)\vec{C}.$$

Али како је вектор $\vec{N}$ нормалан на равни R, у којој лежи вектор $\vec{B}$, то је

$$\left(\vec{N}\ \vec{B}\right) = 0,$$

па добијамо

$$\left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = \left[\vec{c}\left[\vec{B}\ \vec{C}\right]\right] = -\left(\vec{A}\ \vec{B}\right)\vec{C}. \tag{14}$$

Ако саберемо векторске једначине (11) и (14), добићемо

$$\left[\vec{b}\ \vec{D}\right] + \left[\vec{c}\ \vec{D}\right] = \left[\vec{b} + \vec{c}, \vec{D}\right] = \left(\vec{A}\ \vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\ \vec{B}\right)\vec{C} \quad (15).$$

Како је према (4)

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{H},$$

то (15) постаје

$$[\vec{H}\ \vec{D}] = [\vec{H}\ [\vec{B}\ \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\ \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\ \vec{B}), \quad (16)$$

а како је према (3)

$$[\vec{H}\ \vec{D}] = [\vec{H}\ [\vec{B}\ \vec{C}]] = \vec{E}.$$

то добијамо развијени израз дуплог векторског продукта

$$[\vec{A}\ [\vec{B}\ \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}\ \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\ \vec{B}) \quad (17).$$

Цикличком пермутацијом можемо извести одмах

$$[\vec{B}\ [\vec{C}\ \vec{A}]] = \vec{C}(\vec{B}\ \vec{A}) - \vec{A}(\vec{B}\ \vec{C}), \quad (18)$$

$$[\vec{C}\ [\vec{A}\ \vec{B}]] = \vec{A}(\vec{C}\ \vec{B}) - \vec{B}(\vec{C}\ \vec{A}). \quad (19),$$

Кад саберемо једначине (17), (18) и (19), добићемо

$$[\vec{A}\ [\vec{B}\ \vec{C}]] + [\vec{B}\ [\vec{C}\ \vec{A}]] + [\vec{C}\ [\vec{A}\ \vec{B}]] = 0.$$

§ 19. Скаларни продукт два векторска продукта.

Израз облика

$$([\vec{a}\ \vec{b}],\ [\vec{c}\ \vec{d}]),$$

претставља нам скаларни продукт два векторска продукта. Према самој дефиницији тај је продукт скалар.

Ставимо

$$[\vec{a}\ \vec{b}] = \vec{e},$$

онда горњи израз постаје

$$([\vec{a}\ \vec{b}],\ [\vec{c}\ \vec{d}]) = (\vec{e}\ [\vec{c}\ \vec{d}]).$$

Кад у последњем скаларном продукту вектора $\vec{e}$ са векторским продуктом вектора $\vec{c}$ и $\vec{d}$ извршимо према § 16 цикличку пермутацију, добићемо

$$([\vec{a}\ \vec{b}],\ [\vec{c}\ \vec{d}]) = (\vec{e}\,[\vec{c}\ \vec{d}]) = (\vec{c}\,[\vec{d}\ \vec{e}]),$$

или стављајући вредност за вектор $\vec{e}$

$$([\vec{a}\,\vec{b}],\,[\vec{c}\,\vec{d}]) = (\vec{c},\,[\vec{d}\,[\vec{a}\,\vec{b}]\,]).$$

Како је према § 18

$$[\vec{d}\,[\vec{a}\,\vec{b}]\,] = \vec{a}(\vec{d}\,\vec{b}) - \vec{b}\,(\vec{d}\,\vec{a}),$$

то добијамо

$$([\vec{a}\,\vec{b}],\,[\vec{c}\,\vec{d}]) = (\vec{c},\,\vec{a}\,(\vec{d}\,\vec{b}) - \vec{b}\,(\vec{d}\,\vec{a})),$$

или

$$([\vec{a}\,\vec{b}],\,[\vec{c}\,\vec{d}]) = (\vec{c}\,\vec{a})\,(\vec{d}\,\vec{b}) - (\vec{c}\,\vec{b})\,(\vec{d}\,\vec{a}),$$

или

$$([\vec{a}\,\vec{b}],\,[\vec{c}\,\vec{d}]) = (\vec{a}\,\vec{c})\,(\vec{b}\,\vec{d}) - (\vec{a}\,\vec{d})\,(\vec{b}\,\vec{c}).$$

Последњи израз нам даје развијени облик скаларног продукта два векторска продукта.

III.

Векторска анализа.

§ 20. Вектор функција.

Један вектор може бити функција једне или више независно променљивих количина; а те количине могу бити скаларне или векторске величине.

Кад је вектор $\vec{a}$ функција неког скалара t, онда то обележавамо изразом

$$\vec{a} = \vec{a}\,(t),$$

који читамо: вектор $\vec{a}$ функција скалара t; а кад је неки вектор $\vec{v}$ фунција вектора положаја $\vec{r}$, онда то обележавамо изразом

$$\vec{v} = \vec{v}\left(\vec{r}\right),$$

који читамо: вектор $\vec{v}$ функција вектора положаја $\vec{r}$.

Ако је вектор $\vec{b}$ функција више независно променљивих скалара $t_1, t_2, \ldots, t_n$, онда то обележавамо изразом

$$\vec{b} = \vec{b}\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right),$$

и читамо: вектор b функција скалара $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Кад је вектор $\vec{a}$ функција неког скалара t, онда су и његове пројекције на Декартовим осама xyz функције тог истог скалара t, па је

$$\begin{aligned} a_x &= a_x\,(t), \\ a_y &= a_y\,(t), \\ a_z &= a_z\,(t). \end{aligned}$$

Исто тако ако је

$$\vec{b}\,(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

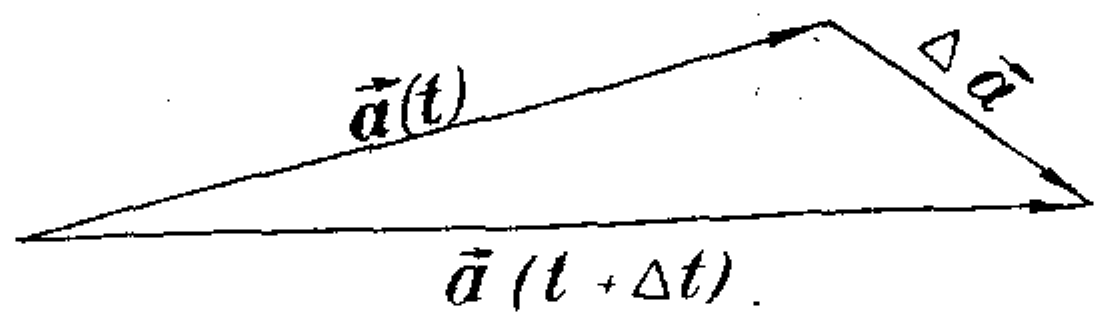
онда је

$$b_x = b_x\,(t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n)\,,$$
$$b_y = b_y\,(t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n)\,,$$
$$b_z = b_z\,(t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n)\,.$$

§ 21. Извод вектор функције.

Нека нам је дата вектор функција

$$\vec{a} = \vec{a}\,(t)\,. \qquad (1)$$



Сл. 52.

Кад се скалар t промени за $\Delta\, t$ (сл. 52), вектор функција ће се променити за $\Delta\,\vec{a}$, па ће бити

$$\vec{a} + \Delta\,\vec{a} = \vec{a}\,(t + \Delta\, t)\,. \qquad (2)$$

Кад једначину (1) одузмемо од једначине (2) и обе стране тако добивене једначине поделимо са $\Delta\, t$, биће

$$\frac{\Delta\,\vec{a}}{\Delta\, t} = \frac{\vec{a}\,(t + \Delta\, t) - \vec{a}\,(t)}{\Delta\, t}\,,$$

одакле за *lim* кад је $\Delta\, t = o$, добијамо извод вектор функције

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta\, t = o} \left[\frac{a\ (t + \Delta\, t) - a\ (t)}{\Delta\, t}\right] = \dot{a}$$

или

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{a}\,,$$

одакле је

$$d\vec{a} = \dot{a}\ dt\,.$$

Како су пројекције вектора $\vec{a}\,(t)$ на Декартовим осама xyz

$$a_x = a_x\ (t)\,,$$
$$a_y = a_y\ (t)\,,$$
$$a_z = a_z\ (t)\,;$$

а вектора $\vec{a}\ (t + \Delta\ t)$

$$a_x + \Delta\ a_x = a_x\ (t + \Delta\ t)\,,$$
$$a_y + \Delta\ a_y = a_y\ (t + \Delta\ t)\,,$$
$$a_z + \Delta\ a_z = a_z\ (t + \Delta\ t)\,;$$

то ће бити

$$\frac{\Delta\ a_x}{\Delta\ t} = \frac{a_x\ (t + \Delta\ t) - a_x\ (t)}{\Delta\ t}\,,$$

одакле за $\lim\ \Delta\ t = o$ добијамо

$$(\dot{a}\ \vec{i}) = a'_x = \frac{d\ a_x}{dt}\,.$$

На исти начин добијамо

$$(\dot{a}\ \vec{j}) = a'_y = \frac{d\ a_y}{dt}\,,$$

и

$$(\dot{a}\ \vec{k}) = a'_z = \frac{d\ a_z}{dt}\,,$$

или речима исказано:

Пројекције векторског извода на три сталне Декартове осе једнаке су изводима пројекција самог вектора на исте осе.

§ 22. Извод збира и разлике векторе функције.

Ако је

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{e} + \ldots\,, \qquad (1)$$

и ако вектори $\vec{b}, \vec{c}, \vec{e}, \ldots$ зависе од неког применљивог скалара t, онда кад се t промени за $\Delta\ t$, $\vec{a}$ ће се променити за $\Delta\ \vec{a}$, вектар $\vec{b}$ за $\Delta\ \vec{b}$, вектар $\vec{c}$ за $\Delta\ \vec{c}$, па ће бити

$$\vec{a} + \Delta\ \vec{a} = \vec{b} + \Delta\ \vec{b} + \vec{c} + \Delta\ \vec{c} - (\vec{e} + \Delta\ \vec{e}) + \ldots \qquad (2)$$

Кад једначину (1) одузмемо од једначине (2) и обе стране тако добивене једначине поделимо са $\Delta\ t$, биће

$$\frac{\Delta\ \vec{a}}{\Delta\ t} = \frac{\Delta\ \vec{b}}{\Delta\ t} + \frac{\Delta\ \vec{c}}{\Delta\ t} - \frac{\Delta\ \vec{e}}{\Delta\ t} + \ldots\,,$$

одакле за $\lim \Delta t = 0$, добијамо извод збира и разлике вектор функције

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{c}}{dt} - \frac{d\vec{e}}{dt} + \ldots,$$

или

$$\dot{a} = \dot{b} + \dot{c} - \dot{e} + \ldots$$

§ 23. Извод скаларног и векторског продукта вектора.

Ако нам је дат скаларни продукт

$$(\vec{a}\,\vec{b}) \tag{1}$$

где вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ зависе од неког променљивог скалара t, па се тражи извод датог скаларног продукта, који обележавамо изразом

$$\frac{d\,(\vec{a}\,\vec{b})}{dt},$$

онда кад пустимо да се t промени за Δt, вектор $\vec{a}$ ће се променити за $\Delta\vec{a}$, вектор $\vec{b}$ за $\Delta\vec{b}$, па ће бити

$$(\vec{a} + \Delta\vec{a},\ \vec{b} + \Delta\vec{b}). \tag{2}$$

Кад у изразу (2) извршимо скаларно множење, а затим од њега одузмемо израз (1) и тако добивени израз поделимо са Δt, биће

$$\left(\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\,\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\,\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta t}\right) + \frac{(\Delta\vec{a}\,\Delta\vec{b})}{\Delta t}, \tag{3}$$

одакле за $\lim \Delta t = 0$, добијамо извод скаларног продукта

$$\frac{d\,(\vec{a}\,\vec{b})}{dt} = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\,\vec{b}\right) + \left(\vec{a}\,\frac{d\vec{b}}{dt}\right) = (\dot{a}\,\vec{b}) + (\vec{a}\,\dot{b})$$

Трећи члан израза (3) се губи као бесконачно мала количина наспрам коначних количина.

На исти начин налазимо да је извод векторског продукта

$$\frac{d\,[\vec{a}\,\vec{b}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{a}}{dt}\,\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\,\frac{d\vec{b}}{dt}\right] = [\dot{a}\,\vec{b}] + [\vec{a}\,\dot{b}].$$

Знајући изводе скаларног и векторског продукта; налазимо и следеће изводе:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}[\vec{b}\,\vec{c}]\right) + \left(\vec{a}\left[\frac{d\vec{b}}{dt}\vec{c}\right]\right) + \left(\vec{a}\left[\vec{b}\frac{d\vec{c}}{dt}\right]\right) =$$

$$= (\dot{a}[\vec{b}\,\vec{c}]) + (\vec{a}[\dot{b}\,\vec{c}]) + (\vec{a}[\vec{b}\,\dot{c}]);$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}[\vec{b}\,\vec{c}]\right] = \left[\frac{d\vec{a}}{dt}[\vec{b}\,\vec{c}]\right] + \left[\vec{a}\left[\frac{d\vec{b}}{dt}\vec{c}\right]\right] + \left[\vec{a}\left[\vec{b}\frac{d\vec{c}}{dt}\right]\right] =$$

$$= [\dot{a}[\vec{b}\,\vec{c}]] + [\vec{a}[\dot{b}\,\vec{c}]] + [\vec{a}[\vec{b}\,\dot{c}]];$$

$$\frac{d}{dt}\left([\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{c}\,\vec{e}]\right) = \left(\left[\frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b}\right][\vec{c}\,\vec{e}]\right) + \left(\left[\vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}\right][\vec{c}\,\vec{e}]\right) +$$

$$\left([\vec{a}\,\vec{b}]\left[\frac{d\vec{c}}{dt}\vec{e}\right]\right) + \left([\vec{a}\,\vec{b}]\left[\vec{c}\frac{d\vec{e}}{dt}\right]\right) =$$

$$= ([\dot{a}\,\vec{b}]\,[\vec{c}\,\vec{e}]) + ([\vec{a}\,\dot{b}]\,[\vec{c}\,\vec{e}]) + ([\vec{a}\,\vec{b}]\,[\dot{c}\,\vec{e}]) + ([\vec{a}\,\vec{b}]\,[\vec{c}\,\dot{e}]).$$

Кад неки вектор $\vec{a}$ зависи од једног променљивог скалара t, онда кад се t мења, мењаће се такође и правац, смер и интензитет вектора $\vec{a}$; или мењаће се само правац и смер, а интензитет вектора $\vec{a}$ биће сталан. Како вектор $\vec{a}$ можемо претставити као продукт његовог интензитета a и орта $\vec{a}_0$, то у том случају при диференцијалењу вектора $\vec{a}$, узимајући да се при промени скалара t мењају и интензитет и правац и смер вектора $\vec{a}$, имаћемо

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\vec{a}_0 + a\frac{d\vec{a}_0}{dt},$$

или

$$\dot{a} = a'\vec{a} + a\,\dot{a}_0.$$

Узимајући да је интензитет вектора $\vec{a}$ сталан, а да се мења само правац и смер имаћемо

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = a\,\dot{\vec{a}}_0\,,$$

јер је $\frac{da}{dt} = 0$.

§ 24. Изводи вишег реда вектор функција.

Кад извод вектор функције $\vec{a} = \vec{a}\,(t)$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}}$$

понова диференцијалимо добићемо други извод вектор функције

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right) = \frac{d\dot{\vec{a}}}{dt} = \ddot{\vec{a}}\ .$$

Поступајући тако даље и даље, можемо имати n-ти извод вектор функције.

Пројекције другог извода на сталне осе биле би

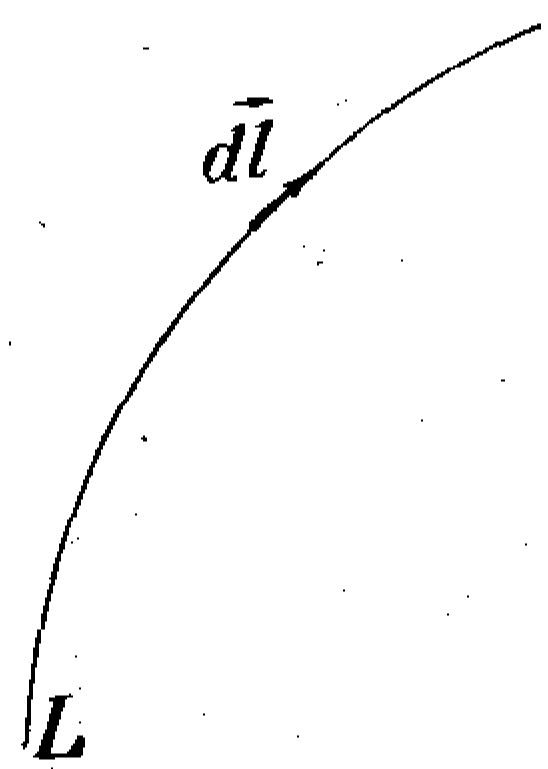
$$\ddot{\vec{a}}\left(a''_x\,,\ a''_y\,,\ a''_z\right);$$

а n-тог извода

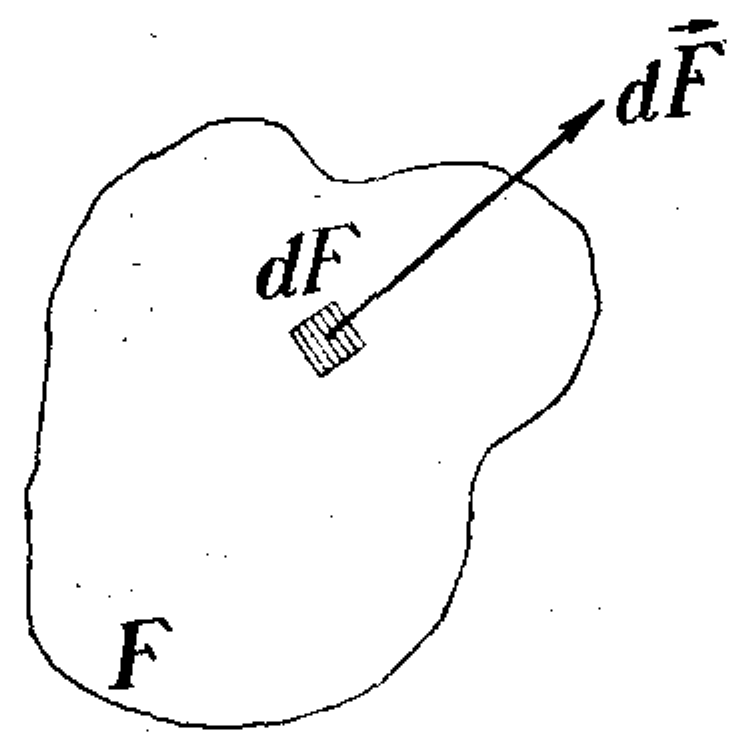
$$\overset{(n)}{\vec{a}}\left(\overset{(n)}{a_x}\,,\ \overset{(n)}{a_y}\,,\ \overset{(n)}{a_z}\right).$$

§ 25. Вектор интеграл.

Криву L (сл. 53) можемо сматрати као део обима неког полигона од бесконачно много бесконачно малих страна. Ако један бесконачно мали део линије L сматрамо, према напред реченом,



Сл. 53.



Сл. 54.

као праву, дамо јој извесан смисао и обележимо са $d\vec{l}$, онда се тај део линије назива *управљени линијски елеменат*.

Ако имамо неку криву површину F (сл. 54), па на њој уочимо један бесконачно мали део dF, онда можемо у том елементу на нормали криве површине конструисати један вектор $\vec{dF}$, чији је интензитет једнак dF. Тај бесконачно мали вектор $\vec{dF}$ зове се *управљени површински елеменат*.

Ако постоји неки скалар φ, који за разне тачке криве L и и површине F има разне вредности, онда су производи

$$\varphi \vec{dl} \text{ и } \varphi \vec{dF}$$

бесконачно мали вектори. Збир свих бесконачно малих вектора за све тачке криве L назива се интеграл дуж криве L од $\varphi \vec{dl}$ и претставља се изразом

$$\int_L \varphi \vec{dl}.$$

Исто тако збир свих бесконачно малих вектора за све тачке површине F назива се интеграл дуж површине F од $\varphi \vec{dF}$, а изражава се са

$$\int_F \varphi \vec{dF}.$$

Како су и у једном и у другом интегралу сви елементи вектори то су и сами интеграли вектори.

У оба случаја ми смо узимали да постоји неки скалар φ, који за разне тачке криве L и површине F има разне вредности; али исто тако можемо узети да увек постоји неки вектор $\vec{A}$, који за разне тачке криве L и површине F има разне вредности, па ћемо имати векторске продукте

$$\left[\vec{A}\ \vec{dl}\right] \text{ и } \left[\vec{A}\ \vec{dF}\right],$$

који нам претстављају бесконачно мале векторе. Збир свих бесконачно малих вектора за све тачке криве L, а исто тако и површине F биће

$$\int_L \left[\vec{A}\ \vec{dl}\right] \text{ и } \int_F \left[\vec{A}\ \vec{dF}\right].$$

Оба добивена интеграла су опет, као и мало пре, вектор интеграли.

Како је

$$\vec{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k},$$

то се вектор интеграл

$$\int \varphi\,\vec{dl}$$

може раставити на три скаларна интеграла, па је

$$\int \varphi\,\vec{dl} = \int \varphi\,dx\,\vec{i} + \int \varphi\,dy\,\vec{j} + \int \varphi\,dz\,\vec{k}.$$

IV.

Поља.

§ 26. Скаларна и векторска поља.

Простор чијој свакој тачки одговара извесна одређена вредност неког скалара, назива се поље тога скалара; а простор чијој свакој тачки одговара извесна одређена вредност неког вектора назива се поље тога вектора.

Ако поставимо један Декартов координатни систем у простору и посматрамо температуру ваздуха, онда поједине тачке у простору имаће различиту температуру, или другим речима температура φ биће функција координата x, y, z појединих тачака у простору, дакле

$$\varphi = \varphi\,(x, y, z)$$

а цео простор, у коме посматрамо температуру, с обзиром на температуру, биће једно *скаларно поље.*

Кад посматрамо убрзање $\vec{g}$ код слободног пада, онда за разне тачке у простору и убрзање је различито, или вектор убрзања $\vec{g}$ је функција вектора положаја

$$\vec{g} = f\,(\vec{r}),$$

а цео простор, с погледом на убрзање слободног пада, једно векторско поље.

Простор нам уопште с обзиром на разне скаларе и векторе, претставља разна скаларна и векторска поља.

Како величине функције

$$\varphi = \varphi\,(x, y, z)$$

и

$$\vec{g} = f\,(\vec{r})$$

зависе од положаја тачке у простору, то се оне врло често називају и *функције положаја.*

§ 27. Скаларно поље и градијент.

Нека нам је дата функција положаја неког скалара φ,

$$\varphi = \varphi\,(x,\ y,\ z). \tag{1}$$

Кад хоћемо да испитамо промену скалара φ у његовом пољу, онда узимамо извесну тачку M_0, за коју скалар има вредност φ_0 и ставимо

$$\varphi\,(x,\ y,\ z) = \varphi_0. \tag{2}$$

Функција (2) сад нам претставља геометриско место свих тачака у простору, за које скалар има вредност φ_0 или другим речима функција (2) нам претставља извесну површину, која се назива *еквискаларна површина.*

Ако узмемо неку другу тачку M_1 у пољу, за коју скалар има вредност φ_1, онда ћемо имати функцију

$$\varphi\,(x,\ y,\ z) = \varphi_1,$$

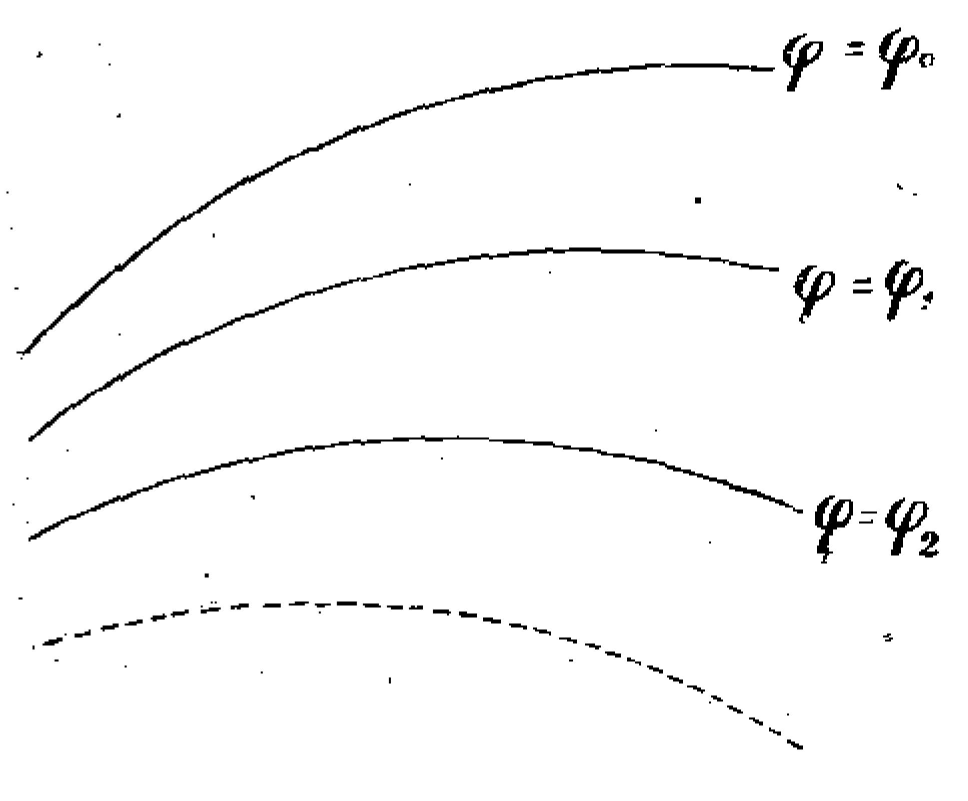
која нам такође претставља једну еквискаларну површину.

Узимајући тако низ тачака M_2, M_3, . . ., за које скалар има вредности φ_2, φ_3, . . ., добићемо низ функција

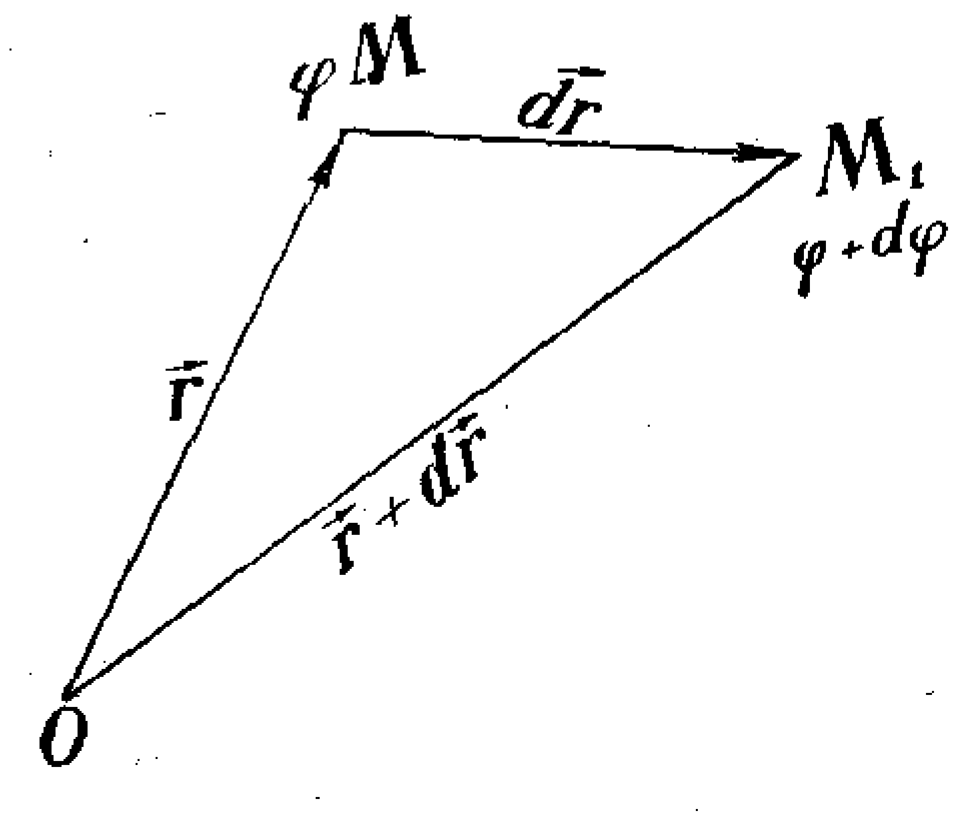
$$\varphi\,(x,\ y,\ z) = \varphi_2,\quad \varphi\,(x,\ y,\ z) = \varphi_3,\ . \ . \ . \tag{3}$$

које ће нам претстављати низ еквискаларних површина, које ће нам дати извесну слику како је скалар φ распоређен у свом пољу.

Ако замислимо једну раван, која сече све еквискаларне површине, онда ћемо на тој равни добити један низ еквискаларних линија, (сл. 55).



Сл. 55.



Сл. 56.

Ако узмемо две бесконачно блиске тачке у пољу скалара φ, тачку M, која је одређена вектором положаја $\vec{r}$ према једној сталној тачки O (сл. 56) и M_1, која је одређена вектором $\vec{r} + d\vec{r}$, а за које скалар φ има вредности φ и $\varphi + d\varphi$ онда разлажући вектор $\vec{r}$ у компоненте, добијамо

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}, \tag{4}$$

одакле је

$$d\,\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}, \tag{5}$$

с обзиром на (1) имаћемо

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\,. \tag{6}$$

Кад једначину (5) помножимо скаларно прво са $\vec{i}$, а затим са $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добићемо пројекције

$$\left(d\vec{r}, \vec{i}\right) = dx \quad , \left(d\vec{r}, \vec{j}\right) = dy \quad , \left(d\vec{r}, \vec{k}\right) = dz\,. \tag{7}$$

Ако у једначини (6) сменимо dx, dy, dz њиховим вредностима из (7), биће

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(d\vec{r}, \vec{i}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(d\vec{r}, \vec{j}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(d\vec{r}, \vec{k}\right), \tag{8}$$

или, пошто је $d\vec{r}$ заједнички чинитељ у сва три скаларна продукта то добијамо

$$d\varphi = \left(d\vec{r}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{9}$$

Вектор

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

назива се *градијенш скалара* φ, а бележи се *grad* φ, тако да је

$$grad\ \varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\,. \tag{10}$$

Зато једначина (9) постаје

$$d\varphi = \left(d\vec{r},\ grad\ \varphi\right),$$

одакле излази:

Диференцијал или бескрајно мала йромена једног скалара φ може се йрешсшавиши као скаларни йродукш из диференцијала векшора йоложаја и градијеншa шога скалара.

Пројекције *grad* φ на координатне осе су коефицијенти уз ортове, те је тако интензитет градијента

$$|\,grad\ \varphi\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$$

а косинуси углова α, β, γ, које градијент заклапа са координатним осама су

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}\ ,$$

$$\cos\beta = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}\ ,$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}}\ .$$

Како је једначина еквискаларне површине, која пролази кроз тачку M

$$\varphi\ (x,\ y,\ z) = \varphi_0\ ,$$

или кад φ_0 пребацимо на леву страну знака једнакости

$$\varphi\ (x,\ y,\ z) - \varphi_0 = \Phi\ (x,\ y,\ z) = 0,$$

то су косинуси углова α', β', γ', које заклапа нормала на еквискаларну површину у тачки M, са координатним осама, као што је познато

$$\cos\alpha' = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\beta' = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

а како је

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

то је и

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma,$$

одакле сазнајемо: *да градијент стоји нормално на еквискаларној површини, или другим речима, да градијент има правац нормале на еквискаларну површину.*

Ако ставимо

$$d\vec{r} = da\ \vec{a}_0\ ,$$

где је da интензитет вектора $d\vec{r}$, а $\vec{a}_0$ орт, онда је

$$d\varphi = (da\ .\ \vec{a}_0\ ,\ grad\varphi),$$

одакле је

$$\frac{d\varphi}{d\vec{a}} = (\vec{a}_0\ grad\ \varphi). \tag{11}$$

Извод (11) зове се *извод скалара* φ *у правцу* $\vec{a}_0$. Кад бисмо хтели да нађемо извод скалара φ у правцу нормале на еквискаларну површину имали бисмо

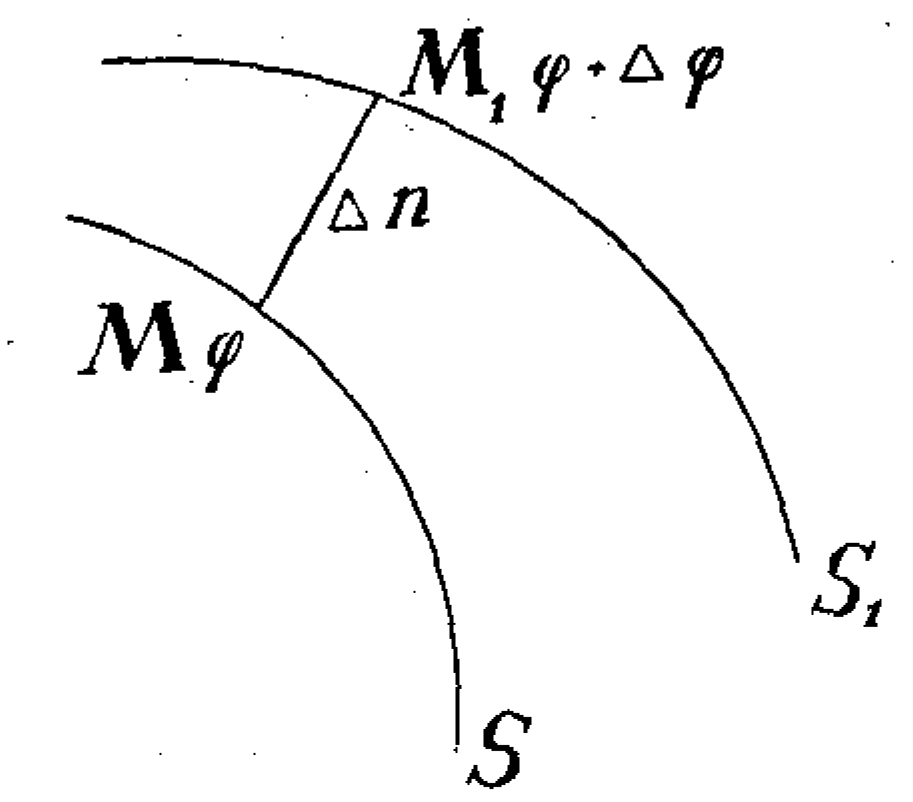
$$d\vec{r} = dn\ .\ \vec{n}_0\ ,$$

одакле је

$$\frac{d\varphi}{d\vec{n}} = \left(\vec{n}_0\ grad\,\varphi\right) = |\ grad\,\varphi\ |\ .\ \cos\left(\vec{n}_0\ ,\ grad\,\varphi\right) = |\ grad\,\varphi\ |,$$

јер орт $\vec{n}_0$ има правац градијента. Одавде видимо да је извод скалара φ у правцу нормале на еквискаларну површину једнак интензитету градијента тога скалара.

За две довољно блиске еквискаларне површине S и S_1 (сл. 57) можемо приближно ставити



Сл. 57.

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta n} = |\, grad\, \varphi \,|, \tag{12}$$

одакле се види: *да је интензитет градијента обрнуто пропорционалан отстојању Δn еквискаларних површина, па се из распореда еквискаларних линија у скаларном пољу може закључити да је интензитет градијента већи онде, где су те линије гушће, а мањи онде, где су оне ређе.*

Из једначине (12) излази да је

$$\Delta\varphi = \Delta n \,.\, |\, grad\, \varphi \,|. \tag{13}$$

§ 28. Векторско поље, векторске линије и соленоид.

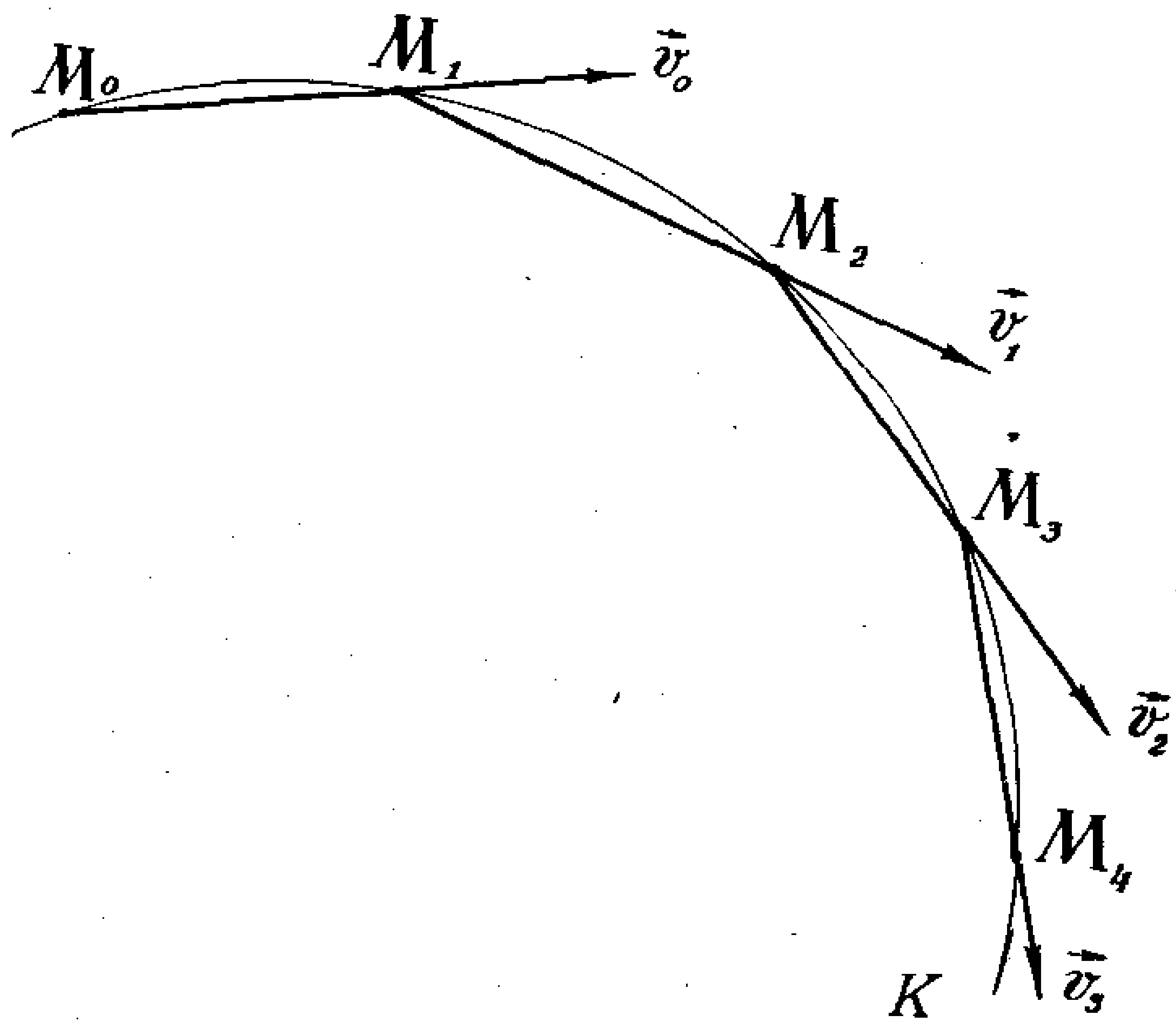
Нека је вектор $\vec{v}$ функција вектора положаја $\vec{r}$

$$\vec{v} = \vec{v}\,(\vec{r}).$$

Кад се вектор положаја $\vec{r}$ мења, мењаће се у своме пољу и вектор функција $\vec{v}$.

Нека у тачки M_0 у своме пољу вектор $\vec{v}$ има вредност $\vec{v}_0$ (сл. 58).

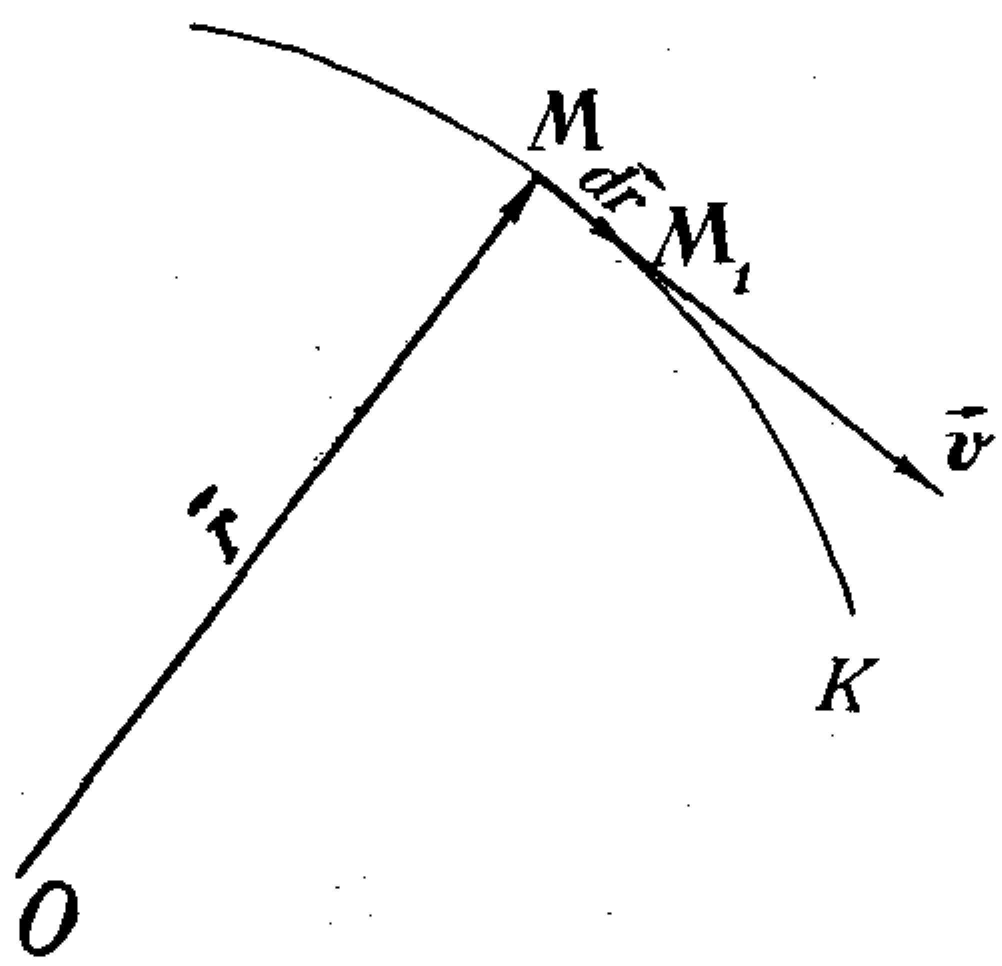
Кад на вектору $\vec{v}_0$ узмемо тачку M_1 блиску тачки M_0, за коју вектор $\vec{v}$ има вредност $\vec{v}_1$, па затим на вектору $\vec{v}_1$ узмемо тачку M_2, за коју вектор $\vec{v}$ има вредност $\vec{v}_2$ и на исти начин поступамо даље и даље, добићемо изломљену линију $M_0\,M_1\,M_2$ итд. Ако онда пустимо да дужи $M_0 M_1$, $M_1 M_2$ итд. теже нули, онда изломљена линија постаје крива K; дужи $M_0 M_1$, $M_1 M_2$ итд. поклапају се са кривом K, а вектори $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ итд. постају тангенте криве K.



Сл. 58.

Крива К, која има ту особину, да за сваку њену тачку вектор $\vec{v}$ има правац дирке, назива се векторска линија.

У једном векторском пољу можемо повући бесконачно много векторских линија и промену вектора $\vec{v}$ у векторском пољу испитивати помоћу векторских линија.



Сл. 59.

Тачки M на векторској линији K (сл. 59) одговара вектор положаја $\vec{r}$.

Кад у тачки M поставимо одговарајући вектор $\vec{v}$, он као тангента на векторску линију пролази и кроз бесконачно блиску тачку M_1. Како су линијски управљени елеменат $d\vec{r}$ и вектор $\vec{v}$ колинеарни, јер имају исти правац и како то важи за ма коју тачку векторске линије K, то можемо написати једначину

$$[\vec{v}\; d\vec{r}] = 0,$$

која нам претставља векторску диференцијалну једначину векторске линије K. Кад ставимо

$$[\vec{v}\; d\vec{r}] = 0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix},$$

биће

$$(v_y\, dz - v_z\, dy)\,\vec{i} + (v_z\, dx - v_x\, dz)\,\vec{j} + (v_x\, dy - v_y\, dx)\,\vec{k} = 0,$$

или множећи добивену једначину скаларно са $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$, добијамо

$$\begin{aligned} v_y\, dz - v_z\, dy &= 0, \\ v_z\, dx - v_x\, dz &= 0, \\ v_x\, dy - v_y\, dx &= 0; \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} v_y\, dz &= v_z\, dy, \\ v_z\, dx &= v_x\, dz, \\ v_x\, dy &= v_y\, dx, \end{aligned}$$

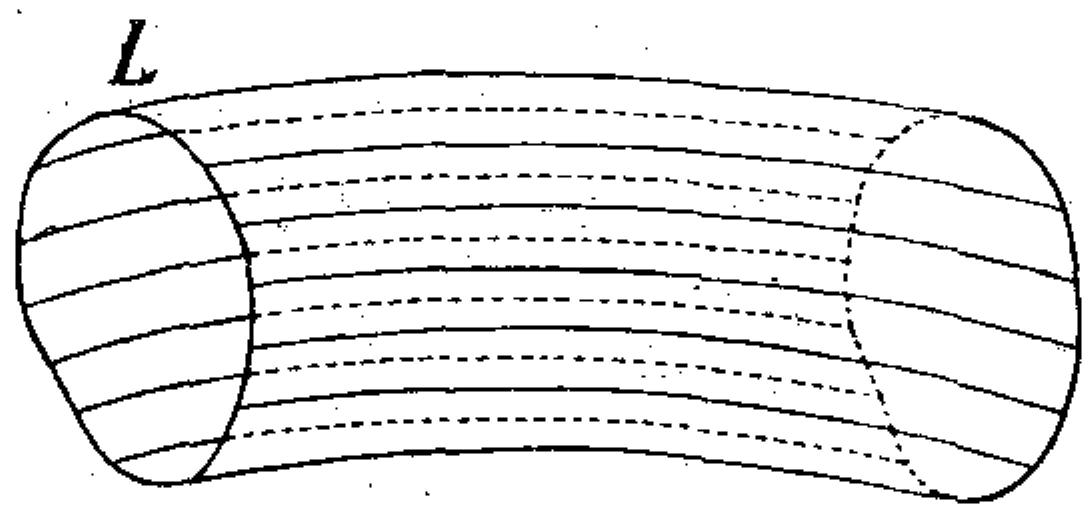
или

$$\frac{dz}{v_z} = \frac{dy}{v_y},$$
$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dz}{v_z},$$
$$\frac{dy}{v_y} = \frac{dx}{v_x},$$

одакле добијамо у скаларном облику систем симултаних једначина

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$

Кад решимо добивени систем симултаних једначина, добићемо једначину векторских линија, у којима ће се јављати две произвољне константе C_1 и C_2. Дајући константама C_1 и C_2 произвољне вредности, добићемо фамилију векторских линија, помоћу којих можемо проучавати вектор функцију $\vec{v}$ у њеном пољу.



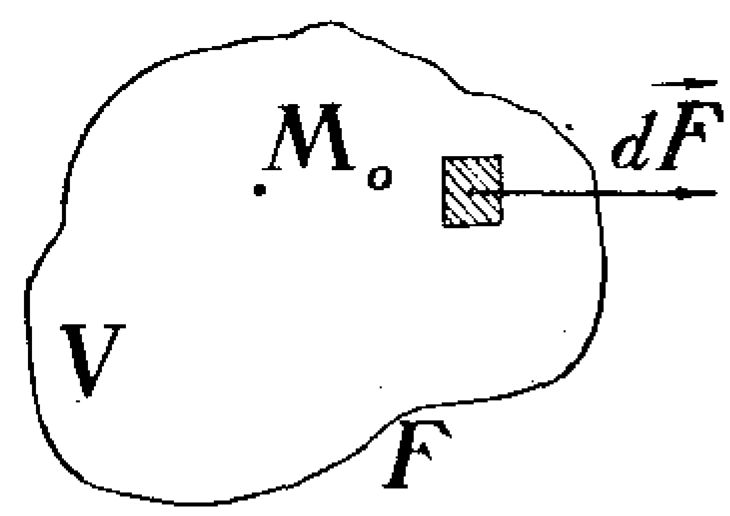
Сл. 60.

Ако у векторском пољу имамо неку затворену криву L, па кроз сваку њену тачку повучемо векторску линију, онда ће ове линије обухватити извесан део простора, који ће имати облик једне цеви, а који се зове *соленоид* (сл. 60).

§. 29. Просторни изводи.

Кад хоћемо да испитујемо неки скалар или вектор у његовом пољу и то у свима правцима, који пролазе кроз једну изабрану тачку, онда то чинимо помоћу *просторних извода.*

Ако имамо неку функцију положаја σ, било скаларну, било векторску, па у пољу функције σ узмемо једну тачку M_0 и извесну површину F, која опкољава тачку M_0 (сл. 61), и ако један управљени површински елеменат површине F обележимо са $\vec{dF}$ и ако образујемо производ



Сл. 61.

$$\sigma \times \vec{dF}$$

а затим пустимо да запремина V, коју обухвата површина F тежи нули, тако да тачка M_0 стално остаје у њој онда израз

$$\lim_{V \to 0} \frac{\int_F \sigma \times \vec{dF}}{V}$$

називамо уопште *просторним изводом функције* σ у тачки M_0. При образовању просторних извода разликоваћемо три случаја.

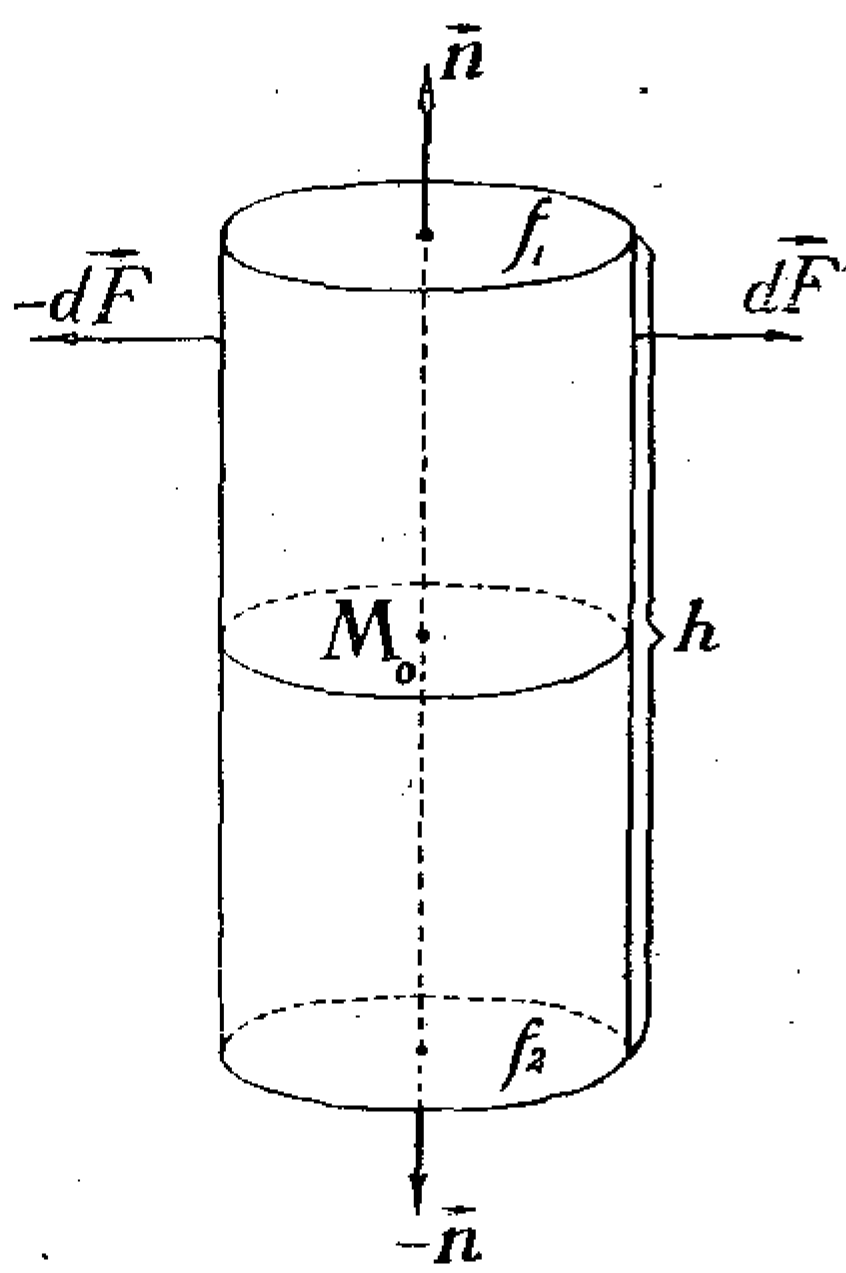
Случај I. — Кад је φ скалар и функција положаја, онда је просторни извод

$$\lim_{V \to 0} \frac{\int\limits_F \varphi\, \vec{\partial F}}{V} = \nabla \varphi.$$

Вредност просторног извода скалара φ обележавамо са $\nabla \varphi$, а читамо га: *дел-фи*, *атлед-фи* или *набла-фи*. А сад ћемо доказати да је

$$\nabla \varphi, \quad grad\ \varphi.$$

Кад у пољу скалара φ узмемо тачку M_0, за коју скалар има вредност φ, и ако око ње опишемо једну бесконачно малу цилиндричну површину (сл. 62) тако да тачка M_0 лежи на средини висине h цилиндра, и ако доњу основу цилиндра обележимо са f_2, горњу са f_1, а са $\vec{n}$ орт нормале на горњу основу, са $-\vec{n}$ орт нормале на доњу основу, и ако висина цилиндра има правац градијента φ, онда како је цилиндрична површина бесконачно мала то сваки круг на омотачу цилиндра можемо сматрати за део еквискаларне површине. И φ ће имати у том случају исту вредност за све тачке круга паралелног са основом, а наравно једнаке вредности на основама f_1 и f_2. У исто време на сваком кругу имамо два управљена елемента супротног смера и како φ има исте вредности за сваки пар ових управљених елемената, то се у интегралу



Сл. 62.

$$\int\limits_F \varphi\, d\vec{F}$$

губе као супротно означени сви елементи, који се односе на омотач овог цилиндра, па је

$$\int\limits_F \varphi\, d\vec{F} = \int\limits_{f_1} \varphi\, d\vec{F} + \int\limits_{f_2} \varphi\, d\vec{F}.$$

Како је према обрасцу (13) у § 27.,

$$\Delta \varphi = |\, grad\ \varphi \,| \,.\, \Delta n,$$

то ће φ имати вредност на основи f_1

$$\varphi + \Delta \varphi,$$

где сад φ означава вредност скалара у тачци M_0. А како је отстојање основе f_1 од еквискаларне површине што пролази кроз тачку M_0 једнако $\frac{h}{2}$, то ће на основи f_1 скалар имати вредност

$$\varphi + \Delta\varphi = \varphi + \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|,$$

а на основи f_2 скалар ће имати вредност

$$\varphi - \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|.$$

Знак минус дошао је зато јер је померање, супротно градијенту, на доле.

Кад у интегралу извршимо смену биће

$$\int_F \varphi\, d\vec{F} = \int_{f_1}\left(\varphi + \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|\right) d\vec{F} + \int_{f_2}\left(\varphi - \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|\right) d\vec{F}.$$

Сваки од ових интегранда с десне стране има сталну вредност, па је

$$\int_F \varphi\, d\vec{F} = \left(\varphi + \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|\right)\int_{f_1} d\vec{F} + \left(\varphi - \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|\right)\int_{f_2} d\vec{F}.$$

Како је

$$\int_{f_1} d\vec{F} = \vec{f_1} = f_1\vec{n};\quad \int_{f_2} d\vec{F} = \vec{f_2} = -f_2\vec{n} = -f_1\vec{n},$$

то је

$$\int_F \varphi\, d\vec{F} = \left(\varphi + \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|\right) f_1\vec{n} - \left(\varphi - \frac{h}{2}\,|grad\,\varphi|\right) f_1\vec{n},$$

или

$$\int_F \varphi\, d\vec{F} = hf_1 \cdot |grad\,\varphi|\,\vec{n}.$$

Пошто је

$$hf_1 = V,$$

а

$$|grad\,\varphi|\,\vec{n} = grad\,\varphi,$$

то добијамо

$$\int_F \varphi\, d\vec{F} = V\,grad\,\varphi,$$

одакле још прелазећи на граничну вредност кад $V \to o$ добијамо да је

$$\nabla\varphi = grad\,\varphi.$$

Случај II. — Кад је вектор $\vec{v}$ функција положаја и кад узмемо скаларни продукт

$$(\vec{v}\ d\vec{F})$$

онда је просторни извод

$$\lim_{V \to 0} \frac{\int_F (\vec{v}\ d\vec{F})}{V} = div\ \vec{v}.$$

Израз $div\ \vec{v}$ читамо: *диверген*ц *вектора* $\vec{v}$. Дивергенц је према дефиницији скалар. За дивергенц имамо непосредно из дефиниције

$$div\ (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = div\ \vec{v}_1 + div\ \vec{v}_2.$$

Ако је вектор функција $\vec{w}$ константног правца, онда га можемо претставити изразом

$$\vec{w} = w\,\vec{w}_0\ ,$$

где је $\vec{w}_0$ орт константног правца, па ћемо тада имати

$$div\ \vec{w} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F (\vec{w}\ d\vec{F})}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F (w\,\vec{w}_0\, d\vec{F})}{V} = \left(\vec{w}_0, \lim_{V \to 0} \frac{\int_F w\, d\vec{F}}{V}\right)$$

или с обзиром на случај I,

$$div\ \vec{w} = (\vec{w}_0, grad\ w). \qquad (1).$$

Помоћу израза (1) можемо одредити аналитички израз дивергенца вектор функције $\vec{v}$. Како је

$$\vec{v} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k},$$

то је

$$div\ \vec{v} = div\ v_x\,\vec{i} + div\ v_y\,\vec{j} + div\ v_z\,\vec{k},$$

па је према (1)

$$div\ \vec{v} = (\ \vec{i}\ grad\ v_x\ ) + (\ \vec{j}\ grad\ v_y\ ) + (\ \vec{k}\ grad\ v_z\ ),$$

или

$$div\ \vec{v} = \left(\vec{i}, \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\,\vec{k}\right) + \left(\vec{j}, \frac{\partial v_y}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\,\vec{k}\right)$$
$$+ \left(\vec{k}, \frac{\partial v_z}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,\vec{k}\right),$$

одакле добијамо као аналитички израз дивергенца

$$div\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (2).$$

Случај III. — Кад је вектор $\vec{v}$ функција положаја и кад узмемо векторски продукт

$$[\vec{dF}, \vec{v}],$$

онда је просторни извод

$$\lim_{V \to 0} \frac{\int_F [\vec{dF}, \vec{v}]}{V} = rot\ \vec{v}.$$

Израз $rot\ \vec{v}$ изговарамо *ротор вектора* $\vec{v}$.

Како је израз под интегралним знаком векторски продукт, то је и $rot\ \vec{v}$ вектор, а како за векторски продукт важи дистрибутивни закон то је

$$rot\ (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = rot\ \vec{v}_1 + rot\ \vec{v}_2.$$

Кад узмемо да је вектор $\vec{w}$ константног правца, онда га можемо претставити изразом

$$\vec{w} = w\,\vec{w}_0\ ,$$

где је $\vec{w}_0$ орт константног правца, па ћемо тада имати

$$rot\ \vec{w} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F [\vec{dF}, w\,\vec{w}_0]}{V} = \left[\lim_{V \to 0} \frac{\int_F w\vec{dF}}{V}, \vec{w}_0\right]$$

или према I случају

$$rot\ \vec{w} = [\ grad\ w, \vec{w}_0\ ]. \qquad (3)$$

Из израза (3) изводимо аналитички израз ротора вектора $\vec{v}$. Како је

$$\vec{v} = v_x\ .\ \vec{i} + v_y\ .\ \vec{j} + v_z\ .\ \vec{k},$$

то је

$$rot\ \vec{v} = rot\ v_x\ \vec{i} + rot\ v_y\ \vec{j} + rot\ v_z\ \vec{k},$$

или према (3)

$$rot\ \vec{v} = [grad\ v_x\ , \vec{i}] + [grad\ v_y\ , \vec{j}] + [grad\ v_z\ , \vec{k}],$$

или

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

одакле је

$$rot\ \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{j} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{k} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{k} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\vec{i} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{j},$$

или

$$rot\ \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k}. \quad (4).$$

Израз (4) нам претставља аналитички израз за ротор вектора $\vec{v}$.

САДРЖАЈ.

I.

Основни појмови.

II.

Векторска алгебра.

III.

Векторска анализа.

IV.

Поља.