Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Master rad

Funkcije generatrise i njihova primena

Mentor:
Dr Tanja Stojadinović

Student:
Nevena Miletić
1035/2018

Beograd,
2019.

Sadržaj

1 Uvod

Metod funkcija generatrise može se primenjivati u različitim oblastima matematike, a u ovom radu biće prikazana primena u kombinatorici. Među prvima ih je upotrebio de Moavr za izvođenje formula za Fibonačijeve brojeve, oko 1720. godine. Takođe, koristili su ih Bernuli i Stirling, a zatim i Ojler u svojim istraživanjima u teoriji brojeva i Laplas.

U ovom radu biće prikazane definicije obične i eksponencijalne funkcije generatrise, a zatim operacije sa njima sa naglaskom na proizvod (ili konvoluciju) i kompoziciju. Cilj je da se predstave primene funkcija generatrise, najpre u rešavanju rekurzivnih relacija. Biće rešena rekurzivna relacija za Katalanove brojeve i izračunata funkcija generatrise za ovaj niz, kao i za niz Fibonačijevih brojeva. Eksponencijalne funkcije generatrise primenićemo na računanje broja deranžmana, kao i na niz Belovih brojeva. U nastavku ćemo se baviti particijama brojeva i predstaviti čuveni Ojlerov rezultat da je broj particija nekog broja u neparne delove jednak broju particija tog broja u različite delove. Na kraju će biti predstavljen izbor zadataka sa primenama funkcija generatrise.

2 Formalni stepeni redovi i obične funkcije generatrise

Jedan od konkretnih problema kojima se bavi kombinatorika jeste odrediti koliko elemenata ima neki konačan skup. Preciznije, deo kombinatorike u kome se proučavaju metode i tehnike koje daju odgovor na ovo pitanje jeste enumerativna kombinatorika. Pored osnovnih principa i metoda prebrojavanja jedna od najkorisnijih metoda jeste metoda funkcija generatrisa. Osnovna ideja je da se nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dodeli funkcija ili stepeni red, a za rad sa funkcijama i stepenim redovima postoji veoma razvijen matematički aparat, što omogućava rešavanje problema iz kombinatorike. Dakle beskonačan niz brojeva se „zamenjuje" jednim objektom.

Metoda funkcija generatrise koristi se kao metoda prebrojavanja, ali i za rešavanje mnogih drugih problema. Kod nekih problema određivanja broja izbora elemenata važan je poredak elemenata, takođe kod nekih je potrebno obratiti pažnju na to da li je dozvoljeno ponavljanje elemenata. Podsetićemo se osnovnih pojmova kombinatorike.

Definicija 1. *Neka je X n-točlani skup, $n \in \mathbb{N}$ Permutacija skupa X je bilo koja uređena n-torka različitih elemenata iz tog skupa.*

Definicija 2. *Faktorijel se formalno definiše na sledeći način: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, za svako $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1. *Broj permutacija skupa od n elemenata je $P(n) = n!$*

Definicija 3. *Varijacija k-te klase bez ponavljanja, n-točlanog skupa X, je bilo koja uređena k-torka različitih elemenata iz tog skupa.*

Teorema 2. *Broj varijacija k-te klase skupa od n elemenata je*
$V(n,k) = n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)$.

Napomena 1. *Ako nije posebno naglašeno, podrazumeva se da su u pitanju varijacije bez ponavljanja, odnosno da svaki element iz skupa učestvuje najviše jednom u varijaciji.*

Definicija 4. *Varijacija sa ponavljanjem k-te klase n-točlanog skupa X je bilo koja uređena k-torka njegovih elemenata.*

Teorema 3. *Broj varijacija sa ponavljanjem k-te klase skupa od n elemenata je $\overline{V}(n,k) = n^k$.*

Definicija 5. *Neka je X skup, a k nenegativan ceo broj. Simbol $\binom{X}{k}$ označava skup svih k-točlanih podskupova skupa X.*

Definicija 6. *Neka su n, k nenegativni celi brojevi takvi da je $n \geq k$. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je funkcija data sa*
$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k(k-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1} = \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!}$

Napomena 2. *Posebne vrednosti binomnih koeficijenata su* $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ *i* $\binom{n}{n} = 1$. *Definicija se može proširiti i na negativne vrednosti* k *i na vrednosti* $k > n$ *dogovorom da je* $\binom{n}{k} = 0$ *za sve* $k < 0$ *i* $k > n$.

Tvrđenje 1. *(Faktorijelna reprezentacija) Za cele brojeve* n *i* k, $n \geq k \geq 0$ *važi*
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Tvrđenje 2. *(Uslov simetričnosti) Za svaki ceo broj* $n \geq 0$ *i svaki ceo broj* k *važi*
$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Teorema 4. ***(Binomna teorema)*** *Za svaki nenegativan ceo broj* n *važi*
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Definicija 7. *Kombinacija* k*-te klase bez ponavljanja* n*-točlanog skupa* X *je bilo koji njegov podskup od* k *elemenata.*

Teorema 5. *Broj kombinacija* k*-te klase skupa od* n *elemenata je*
$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-k+1)}{k!}$

Napomena 3. *Podrazumeva se da su u pitanju kombinacije bez ponavljanja, ukoliko nije naglašeno drugačije.*

Definicija 8. *Kombinacija* k*-te klase sa ponavljanjem* n*-točlanog skupa* X *je bilo koji skup sastavljen od tačno* k *ne obavezno različitih elemenata skupa* X.

Teorema 6. *Broj kombinacija sa ponavljanjem* k*-te klase skupa od* n *elemenata je*
$\overline{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

Definicija 9. *Dvostruki faktorijel formalno se definiše na sledeći način:*
$n!! = \begin{cases} 1, \text{ za } n = 0 \text{ ili } n = 1; \\ n(n-2)!! \text{ za } n \geq 2 \end{cases}$

Definicija 10. *(Uopšteni binomni koeficijent) Za svaki proizvoljan realan broj* α *i svaki nenegativan ceo broj* k *definišemo binomni koeficijent* $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ *(po definiciji je* $\binom{\alpha}{0} = 1$*).*

Sada se može dati definicija obične funkcije generatrise.

2.1 Obična funkcija generatrise

Definicija 11. *Neka je zadat niz* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *kompleksnih brojeva.* ***Obična funkcija generatrise*** *pridružena tom nizu je formalni stepeni red*

$$A(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n,$$

čiji su koeficijenti članovi niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Dve obične funkcije generatrise $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ i $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ su jednake ako su im jednaki odgovarajući koeficijenti. Odnosno, kažemo da je $A(x) = B(x)$ ako za sve $n \in \mathbb{N}_0$ važi $a_n = b_n$.

Primer 1:
Neka je m neki prirodan broj i neka je
$$a_n = \begin{cases} \binom{m}{n}, \text{ za } n \in \mathbb{N}_0, n \leq m \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$
Tada je obična funkcija generatrise za taj niz
$$A(x) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} \cdot x + \cdots + \binom{m}{m} \cdot x^m = (1+x)^m.$$
Može se primetiti da je obična funkcija generatrise za neki niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ polinom akko taj niz ima konačno mnogo članova različitih od nule.

$\diamond$

Formalni stepeni red $A(x)$ u ovom trenutku važan je samo kao algebarski objekat koji potpuno „kodira” niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, ali znanja o stepenim redovima i konvergenciji redova iz analize mogu biti od koristi.

Primer 2:
Posmatrajmo niz kome je $a_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Funkcija generatrise tog niza je
$$A(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n.$$
Podsetimo se , za $|x| < 1$ geometrijski red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ konvergira ka $\dfrac{1}{1-x}$, tj. važi
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \ldots.$$
Kako su svi koeficijenti ovog stepenog reda jednaki jedinici, može se zaključiti da je formalni stepeni red $A(x)$ jednak razvoju funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ u stepeni red, tj. važi $A(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

$\diamond$

Kao u navedenom primeru, ako je poznato da neki stepeni red $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ konvergira ka nekoj funkciji $f(x)$, onda se može reći da je funkcija $f(x)$ funkcija generatrisa za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Podsetimo se još nekih stepenih redova.

(i) Za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i za $|x| < 1$ važi $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$.

(ii) Za sve $x \in \mathbb{R}$ važi $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{x^n}{n!} = e^x$

(iii) Za $|x| < 1$ jeste $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$

Na osnovu prethodnog zaključujemo da je $(1+x)^\alpha$ obična funkcija generatrise za niz $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}_0^\infty$, zatim da je e^x obična funkcije generatrise za niz $\left\{\frac{1}{n!}\right\}_0^\infty$ i $ln(1+x)$

obična funkcije generatrise za niz $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}_1^\infty$. Konvergencija posmatranog stepenog reda omogućava da red zapišemo kao funkciju u „zatvorenoj" formi.

Ako pretpostavimo da konvergiraju, za sledeće redove brojeva važi:

(i) $\sum_{n\geq 0} a_n + \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} a_n + b_n$;

(ii) $k \cdot \sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} k \cdot a_n$;

(iii) $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} (\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i})$.

Odgovarajuće operacije sa generatrisama definišu se na sličan način.

2.2 Operacije sa generatrisama

Definicija 12. *Neka su redovi* $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ *i* $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ *obične funkcije generatrise za nizove* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*. Tada je*

$$C(x) = A(x) + B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (a_n + b_n)\, x^n$$

obična funkcija generatrise za niz $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, gde je* $c_n = a_n + b_n$*, za sve* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Dalje, ako je k *neki realan broj, tada je* $D(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} k a_n x^n$ *obična funkcija generatrise za niz* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, gde je* $d_n = k \cdot a_n$*, za sve* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Definicija 13. ***Konvolucija*** *ili* ***proizvod nizova*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je novi niz* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *definisan sa* $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$*.*

Obična funkcija generatrise za konvoluciju nizova $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *je* ***konvolucija*** *ili* ***proizvod redova*** $C(x) = A(x) \cdot B(x)$*:*

$$C(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0)\, x^n.$$

Napomena 4. *Skup svih formalnih stepenih redova u* $\mathbb{C}$ *u odnosu na sabiranje i množenje označava se sa* $\mathbb{C}[[x]]$*. Može se proveriti da je* $\mathbb{C}[[x]]$ *prsten sa jedinicom.*

Za stepeni red $A(x)$ *kažemo da ima* ***multiplikativni inverz*** *(inverz u odnosu na množenje) ako postoji* $B(x)$ *takav da je* $A(x) \cdot B(x) = 1$*. Uobičajena oznaka za red* $B(x)$ *je* $A^{-1}(x)$*.*

◇

Na primer, lako se proverava da je $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n+\dots) = 1$, pa je $1-x$ multiplikativni inverz za $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$. Iz ovog još jednom vidimo zašto je $1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots = (1-x)^{-1} = \dfrac{1}{1-x}$.

Teorema 7. *Formalni stepeni red* $A(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \dots$ *ima multiplikativni inverz u* $\mathbb{C}[[x]]$ *ako i samo ako je* $a_0 \neq 0$*.*

Dokaz: Neka je $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$ multiplikativni inverz za $A(x)$. Tada, na osnovu definicije za proizvod redova važi $a_0 b_0 = 1$, pa odatle mora da važi $a_0 \neq 0$.

Pokazaćemo da je uslov $a_0 \neq 0$ dovoljan da $A(x)$ ima multiplikativni inverz. Posmatrajmo stepeni red $B(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots + b_n \cdot x^n + \ldots$, gde su koeficijenti b_n definisani sa

$b_0 = \dfrac{1}{a_0}$, $b_1 = \dfrac{-a_1 b_0}{a_0}, \ldots, b_n = -\dfrac{a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{a_0}, \ldots$

Direktno, množenjem ovih redova može se proveriti da je $B(x)$ zaista multiplikativni inverz za $A(x)$.

Iz konstrukcije $B(x)$ može se zaključiti da je multiplikativni inverz za formalni stepeni red $A(x)$ jedinstven.

$\square$

Sledeći primer prikazuje kako uz pomoć generatrisa i operacija sa generatrisama da saznamo neku informaciju o nizovima, u ovom slučaju opšti član niza.

Primer 3:

Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ niz realnih brojeva za koje važi $a_0 = 1$, $a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0 = 1$. Odrediti opšti član tog niza.

Rešenje:

Posmatrajmo običnu funkciju generatrise za taj niz:

$A(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \ldots$

Iz definicije proizvoda generatrisa znamo da važi

$A(x) \cdot A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$,

iz čega sledi da je

$A(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^n$.

Kako je broj a_n jednak koeficijentu uz x^n, prema formuli jeste

$$a_n = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n \frac{-\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} - 1) \cdot (-\frac{1}{2} - 2) \cdot \cdots \cdot (-\frac{1}{2} - n + 1)}{n!} =$$
$$(-1)^n \frac{-\frac{1}{2} \cdot (-\frac{3}{2}) \cdot (-\frac{5}{2}) \cdot \cdots \cdot (-\frac{1}{2} - n)}{n!} = (-1)^{2n} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}.$$

Definicija 14. *Neka su dati formalni stepeni redovi $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n \cdot x^n$ i $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n x^n$.* ***Kompozicija redova*** *B i A prirodno se definiše kao red $B \circ A$ koji nastaje tako što u formulu za $B(x)$ umesto x^n uvrstimo $A(x)^n$:*

$(B \circ A)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} b_n (A(x))^n = b_0 + b_1(a_0 + a_1 x + \ldots) + \cdots + b_n(a_0 + a_1 x + \ldots)^n + \ldots$

Međutim, red $B \circ A$ nije uvek dobro definisan. Ako $B(x)$ nije polinom i ako je $a_0 \neq 0$ pri računanju koeficijenta uz x^n u $(B \circ A)(x)$ pojavi se beskonačna suma, što nije moguće izračunati u prstenu $\mathbb{C}[[x]]$.

Ako je $a_0 = 0$, tada za sve $k > n$ sabirci $b_k(a_1x + a_2x^2 + \dots)$ ne „doprinose" koeficijentu uz x^n. U tom slučaju je koeficijent uz x^n zbir konačno mnogo brojeva.

Kompozicija $(B \circ A)(x)$ je dobro definisana ako je $a_0 = A(0) = 0$ ili ako je $B(x)$ običan polinom.

Primer 4:

Ako je $B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n$ i $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n \cdot x^n$,
onda je $(B \circ A)(x) = 1 + A(x) + A^2(x) + \dots + A^n(x) + \dots = \dfrac{1}{1 - A(x)}$ ako i samo ako je $a_0 = 0$.

$\diamond$

Za formalni stepeni red $B(x)$ kaže se da je **kompozicioni inverz** reda $A(x)$ ako je

$$(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x.$$

U sledećoj teoremi videćemo kada neka funkcija generatrise ima kompozicioni inverz.

Teorema 8. *Ako za redove $A(x)$ i $B(x)$ važi $(B \circ A)(x) = (A \circ B)(x) = x$, tada je $A(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$, a $B(x) = b_1x + b_2x^2 + \dots$. Pri tome je $a_1 \neq 0$ i $b_1 \neq 0$*

Dokaz:
Posmatrajmo redove $A(x) = a_mx^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots$ i $B(x) = b_nx^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots$. Da bi kompozicije $B \circ A$ i $A \circ B$ bile definisane, mora da važi $m, n > 0$. Dalje, iz $(B \circ A)(x) = b_na_m^nx^{mn} + \dots = x$ sledi da je $m = n = 1$ i da su a_1 i b_1 različiti od nule.

$\square$

Kao i u navedenoj teoremi može se pokazati da svaka funkcija generatrise oblika $A(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots$, gde je $a_1 \neq 0$ ima jedinstven kompozicioni inverz. Uslov da je $a_0 = 0$ i $a_1 \neq 0$ je potreban i dovoljan da bi postojao kompozicioni inverz za $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_nx^n$.

2.3 Rekurzivne relacije i generatrise

Važna primena generatrisa jeste u rešavanju rekurzivnih relacija. Može se dati opšti postupak za rešavanje rekurzivne relacije pomoću generatrisa.

Neka je zadata rekurzivna relacija $a_n = F(a_{n-1}, \dots, a_{n-r})$ za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Postupak rešavanja je sledeći:

(1) nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ dodelimo običnu funkciju generatrise $A(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n + \dots$;

(2) relaciju $a_n = F(a_{n-1}, \dots, a_{n-r})$ pomnožimo sa x^n i sumiramo po svim $n \in \mathbb{N}_0$ za koje to ima smisla;

(3) obe strane dobijene relacije izrazimo preko $A(x)$;

(4) odredimo nepoznatu funkciju $A(x)$;

(5) ako želimo eksplicitnu formulu za a_n, funkciju $A(x)$ razvijemo u stepeni red i „pročitamo" koeficijent uz x^n

U narednim primerima pokazana je primena generatrisa u rešavanju rekurzivnih relacija.

Primer 5:

Neka je zadat niz $a_{n+1} = 3a_n + 4$ uz početni uslov $a_0 = -1$. Koristeći funkcije generatrise naći formulu za a_n.

Rešenje:

Zadatom nizu pridružimo običnu funkciju generatrise $A(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n$.
Relaciju $a_{n+1} = 3a_n + 4$ pomnožimo sa x^{n+1} za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Biće:
$a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = 3x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \dots) + 4x(1 + x + x^2 + \dots)$.
Kako je $a_0 = -1$ i kako je $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, to je
$A(x) + 1 = 3xA(x) + \dfrac{4x}{1-x}$, pa je $A(x) = \dfrac{5x-1}{(1-x)(1-3x)}$.
Opšti član niza $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nalazi se tako što se funkcija $A(x)$ razvije u stepeni red. Prvo što je potrebno jeste rastaviti funkciju $A(x)$:
$A(x) = \dfrac{5x-1}{(1-x)(1-3x)} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1-3x}$. Odredimo sada nepoznate koeficijente a i b.
Jednačinu $\dfrac{5x-1}{(1-x)(1-3x)} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1-3x}$ pomnožimo sa $(1-x)(1-3x)$.
Dalje je
$5x - 1 = a(1-3x) + b(1-x)$, pa je $a = -2$ i $b = 1$.

Sada je $A(x) = \dfrac{-2}{1-x} + \dfrac{1}{1-3x} = -2 \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} x^n + \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} 3^n x^n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}_0} (3^n - 2) x^n$,
odakle se može zaključiti da je $a_n = (3^n - 2)$ rešenje rekurzivne relacije s početka.

$\diamond$

2.3.1 Katalanovi brojevi

Katalanovi brojevi predstavljaju niz prirodnih brojeva u oznaci $C_n, n \geq 0$ značajnih kao rešenja mnogih problema u kombinatorici. Postoji skup zadataka koji

opisuju čak 66 različitih interpretacija Katalanovih brojeva. Prvi ih je opisao Ojler, a ime su ipak dobili po Eugenu Čarlsu Katalanu, koji je uočio vezu između problema Hanojskih kula[1] i sledećeg problema:
„ Koliko ima korektnih nizova n parova zagrada tako da je u svakom početnom delu niza broj levih zagrada veći ili jednak broju desnih zagrada?"

Ako uzmemo da je $n = 3$ onda postoji sledećih pet korektnih nizova zagrada ((())), (()()), (())(), ()(()), ()()().

Prvih nekoliko Katalanovih brojeva C_n, za $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 19, \ldots$ su 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, 35357670, 477638700, 1767263190, ...

Iz navedenog niza vidi se da odgovarajući Katalanov broj za $n = 3$ jeste $C_3 = 5$, što je broj rešenja posmatranog problema u slučaju $n = 3$.

Može se dati za početak rekurzivna definicija Katalanovih brojeva.

Definicija 15. *Katalanovi brojevi $Cn, n \geq 0$ su takvi da zadovoljavaju sledeću rekurzivnu relaciju:*

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0.$$

Možemo koristiti i metod funkcija generatrisa za rešavanje određenih zadataka u vezi sa Katalanovim brojevima.

Primer 6:

Rešiti rekurzivnu relaciju $C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$.

Rešenje:

Neka je $C(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_n x^n = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + 14x^4 + \ldots$ obična funkcija generatrise za niz $(C_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Posmatrajmo funkciju $C^2(x)$. Prema definiciji množenja i poznatoj rekurzivnoj relaciji biće

$C^2(x) = C(x) \cdot C(x) = C^2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_n x^n \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_n x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + \cdots + C_n C_0) x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} C_{n+1} x^n$, odnosno $\sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} = C_{n+1}$, a to je kao što vidimo koeficijent uz x^n. Tada znamo da će koeficijent uz x^{n-1} biti C_n, odnosno $C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$ u $C^2(x)$. Možemo primetiti da je koeficijent uz x^{n+1} iz funkcije $C(x)$ jednak koeficijentu uz x^n iz $xC^2(x)$ i da se ove funkcije razlikuju još po tome što je slobodni član prve $C_0 = 1$, a slobodni član druge jednak nuli. Prema tome, može se uspostaviti sledeća veza:

$C(x) - 1 = xC^2(x)$, što je

$xC^2(x) - C(x) + 1 = 0$, a to je kvadratna jednačina po $C(x)$. Rešenja ove jednačine su

[1] Problem kula Hanoja nastao je prema indijskoj legendi, a matematički je dat na sledeći način: Date su tri kule i na prvoj od njih nazlazi se n diskova opadajuće veličine. Pitanje jeste kako prebaciti sve diskove na treću kulu, koristeći i drugu, a da nikada nije veći disk iznad manjeg. Ovaj problem se najlakše rešava rekurzijom.

$C(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$. Znamo da je $C(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} C_n x^n$, pa je $C(0) = C_0 = 1$.

Sada izračunajmo $\lim\limits_{x\to 0} C(x)$.

U slučaju da ispred korena odaberemo znak plus, biće $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$, pa ovakvo rešenje odbacujemo.

U slučaju da ispred korena odaberemo znak minus, biće

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1-4x}}\cdot 4}{2} = 1, \text{ pa je rešenje } C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

odgovarajuće.

Kako je $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$ koristeći razvoj $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ u red doći cemo do rešenja rekurzije sa početka.

Kako je $(1+x)^\alpha = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{\alpha}{n} x^n$, onda je

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4)^n x^n =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-3)}{2^n n!}(-1)^n\cdot 4^n\cdot x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} -\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-3)\cdot 2^n\cdot(n-1)!}{n!(n-1)!}x^n =$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} -2\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-3)\cdot(2n-2)}{n!(n-1)!}x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} -2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n$$

Iz $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ je $C(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, pa je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} C_n x^n = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, a to je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} C_n x^n = \frac{1-\sum_{n\in\mathbb{N}_0} -2\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n}{2x}.$$

Dalje je $2xC(x) = 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} -2\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n$, pa je

$2xC(x) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n$, što je dalje

$2\sum_{n\in\mathbb{N}_0} C_n x^{n+1} = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2\dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n$.

Izjednačimo sada koeficijente uz x^{n+1} sa leve i desne strane jednakosti:

$$2C_n = \frac{2(2(n+1)-2)!}{(n+1)!n!}, \text{ pa je } C_n = \frac{(2(n+1)-2)!}{(n+1)!n!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Tada je $C(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}x^n$.

$\diamond$

Sada možemo dati eksplicitnu definiciju Katalanovih brojeva.

Definicija 16. *Katalanovi brojevi* $Cn, n \geq 0$ *preko binomnih koeficijenata jesu* $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k}$, *za sve* $n \geq 0$.

Može se koristiti i izraz $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$, $n \geq 0$.

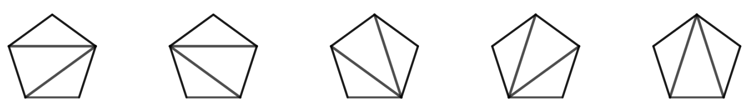
Još jedna zanimljiva interpretacija, koja se često uzima za opis ili definiciju Katalanovih brojeva, jeste broj triangulacija.

Primer 7:

Katalanovi brojevi C_n predstavljaju broj elemenata skupa S_a: **triangulacije** konveksnog (n+2)-tougla na n trouglova pomoću $n-1$ dijagonala koje nemaju zajedničkih tačaka u unutrašnjosti (n+2)-tougla.

Za početak potrebno je napomenuti šta predstavlja broj triangulacija. Neka je $P_n = A_1 A_2 \dots A_n$ konveksan n-tougao u ravni. **Triangulacija** bez dodatnih temena tog n-tougla je podela tog P_n na trouglove pomoću dijalonala tako da za svaka dva trougla u toj podeli važi: ili su disjunktni, ili imaju samo jedno zajedničko teme, ili imaju jednu zajedničku ivicu.

Na primer, na slici se mogu videti sve triangulacije jednog petougla.



Slika 1: Sve triangulacije petougla

Označimo sa T_n broj takvih triangulacija u n-touglu. Može se izbrojati da je $T_3 = 1$, $T_4 = 2$ i $T_5 = 5$. Po dogovoru je $T_1 = 0$ i $T_2 = 1$.

Može se dokazati da broj triangulacija n-tougla zadovoljava rekurzivnu relaciju

$T_{n+1} = T_2 \cdot T_n + T_3 \cdot T_{n-1} + \dots + T_n \cdot T_2$, za sve $n \geq 2$ uz početne uslove $T_1 = 0$ i $T_2 = 1$.

Postoji nekoliko načina da se odrede brojevi T_n, a jedan od njih dat je u sledećoj teoremi.

Teorema 9. *Za svaki prirodan broj* $n \geq 2$ *važi* $T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}$.

Pokažimo sada traženu relaciju.

Poznato je da je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Dalje, za n-tougao važi $T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}$. U slučaju $(n+2)$-tougla biće $T_{n+2} = \frac{1}{n+2-1}\binom{2(n+2-2)}{n+2-2} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n$. Pokazali smo da je $T_{n+2} = C_n$, što i jeste bio zadatak.

$\diamond$

U prstenu $\mathbb{C}[[x]]$ može se definisati diferenciranje kao diferenciranje stepenih redova u analizi.

Definicija 17. *Neka je* $A(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_nx^n$ *formalni stepeni red.* ***Formalni izvod*** *za taj red je*
$\frac{d}{dx}A(x) = A'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} na_nx^{n-1}$

Za računanje ovako definisanog izvoda formalnih stepenih redova važe ista pravila kao i za računanje izvoda običnih funkcija:

(a) $(\lambda A(x))' = \lambda A'(x)$

(b) $(A(x) \pm B(x))' = A'(x) \pm B'(x)$

(c) $(A(x)B(x))' = A'(x)B(x) + A(x)B'(x)$

(d) $(A(x)B^{-1}(x))' = (\frac{A(x)}{B(x)})' = \frac{A'(x)B(x)-A(x)B'(x)}{B^2(x)}$

Izvešćemo i razmotriti neka pravila koja omogućavaju brže izračunavanje nekih običnih funkcija generatrisa.

Neka je $A(x)$ funkcija generatrise za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Izračunajmo $A'(x)$ i pomnožimo sa x:
$xA'(x) = a_1 \cdot x + 2a_2 \cdot x^2 + \cdots + na_n \cdot x^n + \ldots$.
Ponovimo postupak:
$x(xA'(x))' = a_1 \cdot x + 2^2a_2 \cdot x^2 + \cdots + n^2a_n \cdot x^n + \ldots$.
Radi kraćeg zapisa umesto $x \cdot \frac{d}{dx}A$ pisaćemo $(xD)A$.

Ovim smo pokazali da važi da ako je $A(x)$ obična funkcija generatrise za niz $(a_n)_0^\infty$, onda je $(xD)A(x)$ obična funkcija generatrise za niz $(na_n)_0^\infty$ i $(xD)^2A(x)$ obična funkcija generatrise za niz $(n^2a_n)_0^\infty$.

Napomena 5. ***(Pravila za računanje običnih funkcija generatrise)***
Neka je $A(x)$ obična funkcija generatrise za niz $(a_n)_0^\infty$. Tada je:

(1) $\frac{A(x)-a_0-a_1x-\cdots-a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$ *je obična funkcija generatrise za niz*$(a_{n+h})_0^\infty$

(2) $(xD)^kA(x)$ *je obična funkcija generatrise za niz* $(n^ka_n)_0^\infty$

(3) $\frac{A(x)}{1-x}$ *je obična funkcija generatrise za niz* $\{\sum_{i=0}^n a_i\}_0^\infty$

(4) $A^m(x)$ *je obična funkcija generatrise za niz* $\left\{\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n}^n a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}\right\}_0^\infty$

Sledeći primeri pokazuju upotrebu navedenih pravila.

Primer 8:

Naći funkciju generatrise za **Fibonačijeve brojeve** F_n.

Rešenje:

Neka je $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_n x^n$ generatrisa za niz $(F_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Pomnožimo rekurzivnu relaciju $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ sa x^{n-1}, za sve $n \in \mathbb{N}$. Kako su $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, primenom pravila ***(1)*** biće

$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_{n+1}x^{n+1} \cdot x^{n-1} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_n x^n \cdot x^{n-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_{n-1}x^{n-1} \cdot x^{n-1}$, pa je

$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_{n+1}x^{2n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_n x^{2n-1} + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} F_{n-1}x^{2n-2}$, pa je

$\dfrac{F(x) - x}{x^2} = \dfrac{F(x)}{x} + F(x)$. Odatle je $F(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

◇

Primer 9:

Naći sumu reda $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{n^3 - 2n + 5}{n!}$.

Rešenje:

Kako je $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{x^n}{n!} = e^x$, znamo da je e^x obična funkcija generatrise za niz $\dfrac{1}{n!}$, pa primenom pravila ***(2)*** gde je $a_n = \dfrac{1}{n!}$, a $A(x) = e^x$ i sabiranjem odgovarajućih redova biće

$(xD)^3 e^x - 2(xD)e^x + 5e^x = x\cdot((x\cdot e^x)')' - 2x\cdot e^x + 5e^x = x\cdot(e^x + xe^x)' - 2xe^x + 5e^x = x \cdot (xe^x + x^2e^x)' - 2xe^x + 5e^x = x \cdot (e^x + xe^x + 2xe^x + x^2e^x) - 2xe^x + 5e^x = x^3e^x + 3x^2e^x + xe^x - 2xe^x + 5e^x = x^3e^x + 3x^2e^x - xe^x + 5e^x$, a to je obična funkcija generatrise za niz $\left\{\dfrac{n^3 - 2n + 5}{n!}\right\}_0^\infty$. Označimo je sa A(x). Kada u ovu funkciju generatrise $A(x) = x^3e^x + 3x^2e^x - xe^x + 5e^x$ za niz $\dfrac{n^3 - 2n + 5}{n!}$ uvrstimo $x = 1$ vidimo da je suma datog reda jednaka $A(1) = e + 3e - e + 5e = 8e$.

◇

Primer 10:

Neka je $H_n = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Naći funkciju generatrise za niz $\{H_n\}_1^\infty$ **harmonijskih** brojeva.

Rešenje:

Poznato je da je $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} = \ln(1+x)$.

Dalje je $-\ln(1-x) = -\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n\dfrac{x^n}{n} = -\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{2n-1}\dfrac{x^n}{n} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{x^n}{n}$, što je funkcija generatrise za niz $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_1^{\infty}$. Primenom pravila ***(3)*** biće $H(x) = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$ tražena funkcija generatrise.

$\diamond$

3 Eksponencijalna funkcija generatrise

Nekada koristeći samo obične funkcije generatrise ne možemo saznati nešto više o nizu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zbog toga se posmatra još jedna „vrsta" funkcija generatrise.

Definicija 18. *Neka je zadat niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kompleksnih brojeva.* ***Eksponencijalna funkcija generatrise*** *pridružena tom nizu je formalni stepeni red*

$$A(x) = a_0 + a_1\cdot x + \tfrac{a_2}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \tfrac{a_n}{n!}\cdot x^n + \cdots = \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\tfrac{a_n}{n!}x^n.$$

Dakle, $A(x)$ je eksponencijalna funkcija generatrise za niz $\{a_n\}_0^{\infty}$. Može se primetiti da je e^x eksponencijalna funkcija generatrise za niz $\{x^n\}_0^{\infty}$, a funkcija $\frac{1}{1-x}$ za niz $\{n!\}_0^{\infty}$.

Primer 11:

Rešiti rekurzivnu relaciju $a_{n+1} = (n+1)\left[(-1)^{n-1}(1-\frac{1}{n+1}) - a_n\right]$ uz uslov $a_0 = 2$.

Rešenje:

Neka je $A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ eksponencijalna funkcija generatrise za posmatrani niz. Ako datu relaciju pomnožimo sa $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ za sve $n\in\mathbb{N}_0$ biće
$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{x^{n+1}}{n!}\left[(-1)^{n-1} - \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1} - a_n\right]$, pa je
$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{n!} - \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{a_n}{n!}x^{n+1}$. Sumiramo po svim $n\in\mathbb{N}_0$:
$\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}x^{n+1} - \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1} - \sum\limits_{n\in\mathbb{N}_0}\dfrac{a_n}{n!}x^{n+1}$.

Kako je $e^x = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{x^n}{n!}$ dalje će biti
$A(x) - a_0 = -x \cdot e^{-x} - (e^{-x} - 1) - x \cdot A(x)$, pa je
$(1+x)A(x) = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + 3$. Dalje je
$A(x) = -\dfrac{(1+x)e^{-x} - 3}{1+x}$, a to je
$A(x) = \dfrac{3}{1+x} - e^{-x} = 3\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} (-1)^n x^n - \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \dfrac{(-1)^n}{n!} x^n$
Izjednačavajući koeficijente sa leve i desne strane biće:
$\dfrac{a_n}{n!} = 3 \cdot (-1)^n - \dfrac{(-1)^n}{n!}$, pa vidimo da je $a_n = (-1)^n(3n! - 1)$.

$\diamond$

Definicija 19. *Neka su dati redovi* $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{a_n}{n!} x^n$ *i* $G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{b_n}{n!} x^n$ *eksponencijalne funkcije generatrise za nizove* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Tada je*

$F(x) + G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{a_n + b_n}{n!} x^n$ *i*

$F(x)G(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}) x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} (\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}) \frac{x^n}{n!}$

Dakle, $F(x)+G(x)$ *je eksponencijalna funkcija generatrise za niz* $\{a_n + b_n\}_0^\infty$, *a* $F(x)G(x)$ *za niz* $\left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right\}_0^\infty$.

Upotreba druge od navedenih generatrisa iz prethodne definicije česta je u rešavanju problema u kombinatorici, što ćemo videti u sledećoj teoremi.

Teorema 10. *Neka je* c_n *broj načina da se na nekom* n*-točlanom skupu definiše neka struktura (nazovimo je crvenom) i neka je* b_n *broj načina da se na* n*-točlanom skupu definiše neka druga struktura (na primer bela). Sa* a_n *označimo broj načina da se skup* $[n]$ *podeli u dva disjunktna skupa* B *i* C, $B \cup C = [n]$, *a zatim da se na skupu* B *zada bela struktura, a na skupu* C *crvena struktura. Ako su* $A(x), B(x)$ *i* $C(x)$ *eksponencijalne funkcije generatrise za nizove* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *i* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *tada važi* $A(x) = B(x)C(x)$.

Dokaz:
Skup C sa k elemenata možemo iz $[n]$ odabrati na $\binom{n}{k}$ načina Na svakom odabrano k-točlanom skupu „crvenu" strukturu možemo zadati na c_k načina. „Belu" strukturu na $B = [n] \setminus C$ možemo zadati na b_{n-k} načina. Tada je broj „crveno-belih" struktura a_n na skupu $[n]$ jednak

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c_k b_{n-k}$.

Iz definicije množenja eksponencijalnih funkcija generatrise zaključujemo da je

$A(x) = B(x)C(x)$.

$\square$

U slučaju množenja više eksponencijalnih funkcija generatrise važi sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 3. *Neka su $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_k(x)$ eksponencijalne funkcije generatrise za nizove $\left(f_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\left(f_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}_0}, \dots, \left(f_n^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Ako za sve $n \in \mathbb{N}_0$ važi*

$h_n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n, n_i\in\mathbb{N}_0} \binom{n}{n_1,n_2,\dots n_k} f_{n_1}^1 f_{n_2}^2 \dots f_{n_k}^k$

i ako je $H(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} h_n x^n$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $(h_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tada je $H(x) = F_1(x) \cdot F_2(x) \dots F_k(x)$.

Primer 12:

Neka je X skup sa n elemenata. Sa a_n označimo broj načina da se prvo skup X podeli u dva disjunktna podskupa B i C, takva da je $B \cup C = X$, zatim da se odabere neki podskup iz B i da se elementi iz C linearno urede. Odrediti eksponencijalnu funkciju generatrise za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Rešenje:

Upotrebićemo oznake iz prethodne teoreme. Broj načina da se iz k-točlanog skupa odabere proizvoljan podskup je $b_k = 2^k$ dok je broj načina da se k-točlani skup linearno uredi $c_k = k!$. Tražena funkcija generatrise je sada

$$A(x) = B(x)C(x) = (\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \displaystyle\frac{2^n}{n!}x^n)(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} x^n) = \frac{e^{2x}}{1-x}.$$

Broj a_n može se odrediti i kombinatorno $a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k(n-k)!$. Znamo da prema navedenoj teoremi važi $A(x) = B(x)C(x)$, odnosno da važi $a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k c_{n-k}$, što je u ovom slučaju $b_n = \frac{2^n}{n!}$ i $c_n = n!$, pa je $a_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{2^k}{k!}n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!$

◇

3.1 Broj deranžmana

Pre nego što na primeru pokažemo primenu eksponencijalnih funkcija generatrise na izračunavanje broja deranžmana, potrebno je definisati šta predstavlja broj deranžmana. Permutacija bez fiksnih tačaka se naziva **deranžman**. Dakle, deranžman je bijekcija $f : [n] \to [n]$, takva da za sve $i \in [n]$ važi $f(i) \neq i$. Sa D_n označimo broj deranžmana u S_n[2]. Da bi se odredio broj deranžmana D_n može se koristiti formula uključenja - isključenja, a to se može uraditi na još jedan način koristeći fukcije generatrise.

Primer 13:

Odrediti broj deranžmana D_n pomoću eksponencijalnih generatrisa.

[2]Skup svih permutacija na skupu $[n]$ označava se sa S_n

Rešenje:

Neka je $D(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{D_n}{n!} x^n$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $(D_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Primetimo da je broj permutacija u S_n sa tačno k fiksnih tačaka jednak $\binom{n}{k} D_{n-k}$. Pošto je broj permutacija $n!$, biće $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$. Eksponencijalna funkcija generatrise za niz čiji je opšti član $n!$ jednaka je proizvodu generatrisa za nizove čiji su opšti članovi D_n i 1, jer iz **Definicije 16.** znamo da nastaje kao proizvod dve generatrise, u ovom slučaju možemo zamisliti jedinicu u sumi pored D_{n-k}, pa je, koristeći eksponencijalne funkcije generatrise za niz jedinica i niz $n!$
$\dfrac{1}{1-x} = e^x D(x)$, pa je $D(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.
Tako je broj deranžmana D_n jednak koeficijentu uz $\dfrac{x^n}{n!}$ u razvoju $\dfrac{e^{-x}}{1-x}$, a to je
$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$.

$\diamond$

U sledećoj napomeni data je kombinatorna interpretacija za proizvod običnih funkcija generatrise.

Napomena 6. *Neka je c_n broj načina kako se na nekom linearno uređenom skupu od n elemenata može definisati neka struktura (nazovimo crvena) i neka je b_n broj načina da se na n-točlanom linearno uređenom skupu definiše neka druga struktura (nazovimo bela).*

Sa a_n označimo broj načina da se linearno uređen skup $([n], <)$ podeli u dva disjunktna (ne nužno neprazna) podskupa B i C, $C \cup B = [n]$, tako da je svaki element iz C manji od svih elemenata iz B, a zatim se na skupu C zada crvena struktura, a na skupu B bela. Vidimo da je

$$a_n = b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \cdots + b_k c_{n-k} + \cdots + b_0 c_n$$

Ako su $A(x), B(x)$ i $C(x)$ obične funkcije generatrise za nizove $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ i $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ znamo da važi $A(x) = B(x)C(x)$.

Primer 14:

Student treba da napiše seminarski rad na tačno n stranica. Na svakoj stranici može da bude samo tekst ili samo slika. Rad može da bude podeljen u nekoliko poglavlja, ali u svakom poglavlju mora da bude i slika i tekst. Na koliko načina student može aranžirati slike i tekst u poglavlju tako da ispuni sve postavljene uslove?

Rešenje:
Neka je a_n traženi broj načina na koji student može napisati rad i neka je

$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$. Smatra se da je $a_0 = 1$ (postoji jedan način da student napiše rad sa nula stranica).

Jedno poglavlje sa m strana može se napisati na $b_m = 2^m - 2$ načina, treba odabrati neprazan podskup različit od $[m]$ za slike, ostalo bi bilo tekst. Smatra se da je $b_0 = 0$. Neka je $B(x)$ obična funkcija generatrise za niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Tada je

$$B(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}}(2^n - 2)x^n = \frac{2x}{1-2x} - \frac{2x}{1-x} = \frac{2x^2}{(1-2x)(1-x)}.$$

Na osnovu prethodno navedene napomene zaključuje se da je broj načina da se rad napiše u tačno k poglavlja jednak koeficijentu uz x^n u $B^k(x)$.

Studentu je dozvoljeno da sam odabere koliko poglavlja ima njegov rad, pa važi

$A(x) = 1 + B(x) + B^2(x) + \cdots + B^k(x) + \cdots = \dfrac{1}{1-B(x)}$, što je dobro definisano jer je $b_0 = 0$. Sada je

$$A(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{2x^2}{(1-x)(1-2x)}} = \frac{(1-x)(1-2x)}{1-3x} = \frac{2x^2 - \frac{3}{2}x - \dfrac{7}{3}x + \dfrac{7}{9} + \dfrac{2}{9}}{1-3x} =$$

$$\frac{7}{9} - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} + \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 3^n x^n.$$ Tako je za $n > 1$ traženi broj načina $a_n = 2\cdot 3^{n-2}$.

$\diamond$

I za eksponencijalne funkcije generatrisa definisani su formalni izvodi.

Ako je $A(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za $(a_n)_0^\infty$, izvod stepenog reda $A(x)$ biće

$$\tfrac{d}{dx}A(x) = A'(x) = a_1 + a_2 x + \frac{a_3}{2}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!}x^n + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{a_{n+1}}{n!}x^n.$$

Tako je $A'(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $\{a_{n+1}\}_0^\infty$, pa i $A^{(k)}(x)$ za niz $\{a_{n+k}\}_0^\infty$.

Ako je $A(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za $(a_n)_0^\infty$, slično kao i u pravilu **(2)** za računanje sa običnim funkcijama generatrisa može se pokazati da je $xA'(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $\{na_n\}_0^\infty$.

Računanje izvoda, a zatim i množenje sa x označimo sa xD. Ako bismo to primenili k puta, biće $(xD)^k A(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $\left\{n^k a_n\right\}_0^\infty$.

3.2 Belovi brojevi

Definišimo Belove brojeve. Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ Belov broj B_n definišemo kao broj svih particija[3] skupa $[n]$ u nekoliko blokova. Po definiciji je $B_0 = 1$. Broj B_n je broj različitih relacija ekvivalencije na skupu sa n elemenata.

Može se dokazati da Belovi brojevi zadovoljavaju sledeću rekurzivnu relaciju $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$.

[3]Pojam particije prirodnog broja detaljnije će biti objašnjen u narednom poglavlju.

Posmatrajmo blok u kom se nalazi broj $n+1$. Ako se u tom bloku nalazi još $n-i$ brojeva iz $[n]$, onda se oni mogu odabrati na $\binom{n}{i}$ načina. Od preostalih i brojeva iz skupa $[n]$ može se napraviti još B_i particija.

Primer 15:

Naći eksponencijalnu funkciju generatrise za Belove brojeve.

Rešenje:

Videli smo da važi $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$, uz početni uslov $B_0 = 1$. Neka je $B(x)$ eksponencijalna funkcija generatrise za niz $\{B_n\}_0^\infty$. Pomnožimo pomenutu rekurzivnu relaciju sa $\frac{x^n}{n!}$ i sumiramo po svim $n \in \mathbb{N}_0$

$B_{n+1} \cdot \dfrac{x^n}{n!} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i \dfrac{x^n}{n!}$, što je dalje

$B'(x) = e^x \cdot B(x)$, pa je $\ln B(x) = e^x$, a onda je $B(x) = ce^{e^x}$. Iz uslova $B_0 = 1$ biće $c = e^{-1}$.

Tražena eksponencijalna funkcija za Belove brojeve je $B(x) = e^{e^x - 1}$.

$\diamond$

4 Neke primene funkcija generatrisa

4.1 Particije prirodnog broja i Ojlerova teorema

Podsetimo se **particija** prirodnog broja n. Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvi da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ i $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{k-1} \geq a_k$, uređena k-torka $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ je **particija** broja n u k delova. Egzaktna formula za broj particija ne postoji, međutim za niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, gde je p_n oznaka za broj particija prirodnog broja n, nije teško naći funkciju generatrise.

Teorema 11. *Za sve $n \in \mathbb{N}_0$ neka p_n označava broj particija broja n. Obična funkcija generatrise za niz $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ je*
$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} p_n x^n$.

Dokaz:
Tvrđenje teoreme biće dokazano tako što ćemo videti da je koeficijent uz x^n u proizvodu jednak p_n.
Primetimo da je
$\prod_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k} = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^k+x^{2k}+\cdots)\cdots$
dobro definisan u prstenu formalnih stepenih redova. Da bismo za neko fiksno $n \in \mathbb{N}_0$ odredili koeficijent uz x^n dovoljno je posmatrati prvih n zagrada.

Neka je $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ proizvoljna particija broja n u kojoj se broj 1 pojavi f_1 put, broj 2 pojavi f_2 puta, ...

Particiju λ možemo zapisati sa $\lambda = (1^{f_1}, 2^{f_2}, \dots, r^{f_r})$. Brojeve koji se ne pojavljuju, odnosno one i kod kojih je $f_i = 0$, možemo izostaviti iz zapisa.

Primetimo da važi $f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 + \cdots + f_r \cdot r = n$.

Za particiju λ uočimo sabirak u razvoju $\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$ u kom:

- iz prve zagrade $(1 + x + x^2 + \cdots)$ odaberemo monom x^{f_1}
- iz druge zagrade $(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$ odaberemo monom $x^{2 \cdot f_2}$
- $\vdots$
- iz r-te zagrade $(1 + x + x^2 + \cdots)$ odaberemo monom $x^{r \cdot f_r}$

Ako pomnožimo odabrane monome biće

$x^{f_1} \cdot x^{2 \cdot f_2} \cdot \ldots \cdot x^{k \cdot f_k} = x^{f_1 \cdot 1 + f_2 \cdot 2 + \cdots + f_k \cdot k} = x^n$.

Vidimo da se za svaku particiju broja n dobije jedan x^n u razvoju $\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$. Sa druge strane, ako iz razvoja $\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$ iz prve zagrade odaberemo x^{a_1}, iz druge $x^{2 \cdot a_2}$, ... iz k-te $x^{k \cdot a_k}$ i iz konačno mnogo zagrada biramo x^m, a iz preostalih 1, primetimo da je $x^{a_1} \cdot x^{2 \cdot a_2} \cdot \ldots \cdot x^{r \cdot a_r} = x^n$ ako i samo ako je $(1^{a_1}, 2^{a_2}, \dots, r^{a_r})$ particija broja n.

Tako je koeficijent uz x^n u posmatranom stepenom redu jednak broju particija broja n, čime je dokazano da je $\prod_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{1-x^k}$ obična funkcija generatrise za niz $(p_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

$\square$

Primer 15:

Neka je d_n broj particija broja n u različite brojeve, a o_n broj particija broja n u neparne delove. Na primer za broj 7 biće:

7=7

6+1=5+1+5

5+2=3+3+1

4+3=3+1+1+1+1

4+2+1=1+1+1+1+1+1+1

particiije u različite, particije u neparne

Tako je $d_7 = o_7 = 5$, što nije slučajno.

$\diamond$

Jedna od prvih primena funkcija generatrisa u proučavanju particija je data u sledećoj teoremi.

Teorema 12. ***(L. Ojler)*** *Broj particija broja n u neparne delove je jednak broju particija broja n u različite delove.*

Dokaz:

Na isti način kao u **Teoremi 11.** možemo izračunati obične funkcije generatrise za nizove $(o_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ i $(d_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

$O(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} o_n x^n = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)\cdots$
odnosno $O(x) = \prod_{i\in\mathbb{N}_0} \dfrac{1}{1-x^{2i+1}}$.
Primetimo da je
$D(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} d_n x^n = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \prod_{i\in\mathbb{N}}(1+x^i)$.
Kako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi $1+x^n = \dfrac{1-x^{2n}}{1-x^n}$, što možemo proveriti $\dfrac{1-x^{2n}}{1-x^n} = \dfrac{1-x^n+x^n-x^{2n}}{1-x^n} = 1+\dfrac{x^n-x^{2n}}{1-x^n} = 1+\dfrac{x^n(1-x^n)}{1-x^n} = 1+x^n$, to će biti
$D(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x}\cdot\dfrac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\dfrac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\dfrac{1-x^8}{1-x^4}\cdots = O(x)$.

□

Postoji i kombinatorni dokaz ove teoreme.
Koristi se činjenica da se svaki prirodan broj može na jedinstven način predstaviti kao zbir različitih stepena broja 2. Na primer,
$2019 = 1024+512+256+128+64+32+2+1 = 2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^5+2^1+2^0$.

Neka je $\lambda = (1^{f_1}, 3^{f_3}, \ldots, r^{f_r})$ particija broja n u neparne sabirke. Ako svaki od f_i napišemo kao zbir različitih stepena broja 2, iz $n = f_1\cdot 1+f_3\cdot 3+\cdots+f_r\cdot r$, biće n napisan kao zbir različitih sabiraka.

Obrnuto, pođimo od particije broja n u različite sabirke. Neka je $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ particija broja n u različite sabirke. Grupišimo sabirke broja n tako da svi sabirci u grupi imaju isti najveći neparan delitelj. Ti delitelji su sabirci u particiji broja n u neparne delove, što ćemo videti na primeru.

Particija broja 220 u neparne delove je $\lambda = (21^5, 11^7, 5^4, 3^4, 1^6)$. Dalje je, prema opisanom postupku
$220 = (4+1)\cdot 21+(6+1)\cdot 11+4\cdot 5+4\cdot 3+(4+2)\cdot 1 = 84+66+21+20+12+11+4+2$.

Za particiju $\mu = (84, 66, 21, 20, 12, 11, 4, 2)$ broja n u različite sabirke računamo
$220 = (84+21)+(66+11)+20+12+(4+2) = 5\cdot 21+7\cdot 11+4\cdot 3+4\cdot 3+6\cdot 1$.
Ovim je još jednom pokazano da je $o_n = d_n$.

4.2 Rodžers-Ramanudžanovi identiteti

Rodžers-Ramanudžanovi identiteti su medju najpoznatijim i najzanimljivijim rezultatima o particijama brojeva.

Teorema 13. ***Prvi Rodžers-Ramanudžanov identitet***
Neka je f_n broj particija broja n u kojima se sabirci razlikuju bar za dva, a neka je g_n broj particija broja n u sabirke oblika $5k+1$ i $5k+4$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ važi $f_n = g_n$.

Teorema 14. ***Drugi Rodžers-Ramanudžanov identitet***

Neka je u_n broj particija broja n u kojima se sabirci razlikuju bar za dva i jedinica nije sabirak. Dalje, neka je v_n broj particija broja n u sabirke oblika $5k+2$ i $5k+3$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ važi $u_n = v_n$.

5 Zadaci

U ovom poglavlju biće prikazan izbor zadataka sa primenama funkcija generatrise. [4]

Zadatak 1:

Naći koeficijent uz:

a) x^5 u $(1-2x)^{-2}$

b) x^n u razvoju $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ i $a \neq b$

c) x^n u razvoju $\frac{1}{(1-x^2)^2}$

Rešenje:

a) Kako za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i za $|x| < 1$ važi $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha$, onda je $(1-2x)^{-2} = \sum_{n \geq 0} \binom{-2}{n}(-2x)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-2)(-3)\cdot\dots\cdot(-2-n+1)}{n!}(-2x)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot(n+1)}{n!}(-2x)^n$ $= \sum_{n \geq 0}(n+1)2^n x^n$. Ako označimo koeficijent uz x^n sa c_n, biće $c_5 = 6 \cdot 2^5$.

b) Najpre vidimo $\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{1}{a-b}(\frac{a}{1-ax} - \frac{b}{1-bx})$. Biće
$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)} = \frac{1}{a-b}(\frac{a}{1-ax} - \frac{b}{1-bx}) = \frac{1}{a-b}(a \sum_{n \geq 0}(ax)^n - b \sum_{n \geq 0}(bx)^n)$
$= \frac{1}{a-b} \sum_{n \geq 0}(a^{n+1} - b^{n+1})x^n$, pa je
$c_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$ traženi koeficijent.

c) Na osnovu dela pod a) je $\frac{1}{(1-x^2)^2} = (1-x^2)^{-2} = \sum_{n \geq 0} \binom{-2}{n}(-x^2)^n$
$= \sum_{n \geq 0} \binom{-2}{n}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n \geq 0}(n+1)2^n x^n$, pa je koeficijent uz x^n:

$$c_n = \begin{cases} k+1, \text{ za } n = 2k \\ 0, \text{ za } n = 2k+1 \end{cases}$$

$\diamond$

Zadatak 2:

Neka je q_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d koje sadrže neparan broj slova b. Dokazati da je $q_{n+1} = 2q_n + 4^n$, $n \geq 1$ i uz pretpostavku $q_0 = 0$, naći funkciju generatrisu $Q(x)$ i dokazati da je $q_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$.

[4] Veći izbor zadataka može se naći u zbirci [2].

Rešenje:

Označimo sa p_n broj reči dužine n sastavljenih od slova a, b, c, d koje sadrže paran broj slova b. Tada je $p_n + q_n = 4^n$ (sve reči dužine n od datih slova).

Reč dužine $n+1$ sa neparnim brojem slova b može se dobiti od reči dužine n sa neparnim brojem slova b ako joj se na kraj dopiše jedno od slova a, c, d ili od reči dužine n sa parnim brojem slova b, ako joj se na kraj dopiše slovo b. Drugim rečima, $q_{n+1} = 3 \cdot q_n + p_n$.

Rešimo sistem:
$p_n + q_n = 4^n$
$q_{n+1} = 3 \cdot q_n + p_n$.
Iz prve jednačine izrazimo $p_n = 4^n - q_n$ i uvrstimo u drugu. Biće
$q_{n+1} = 2 \cdot q_n + 4^n$.
Da je $q_0 = 0$, može se dobiti iz $q_1 = 2 \cdot q_0 + 4^0$ ($q_1 = 1$, samo b). Dalje je
$\frac{Q(x)-0}{x} = 2Q(x) + \frac{1}{1-4x}$, što je kad se sredi
$Q(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-4x)}$.
Predstavimo $Q(x)$ u pogodnijem obliku.
$Q(x) = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-4x}$. Izjednačavanjem
$\frac{x}{(1-2x)(1-4x)} = \frac{A(1-4x)+B(1-2x)}{(1-2x)(1-4x)}$ imamo da je $A+B=0$ i $-4A-2B=1$, odakle je $A = \frac{1}{2}$ i $B = -\frac{1}{2}$. Dakle,

$Q(x) = \frac{\frac{1}{2}}{1-2x} - \frac{\frac{1}{2}}{1-4x} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(4x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(2x)^n$
$= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(4^n - 2^n)x^n$.

Odatle je $a_n = \frac{1}{2}(4^n - 2^n)$.

$\diamond$

Zadatak 3:

Naći funkcije generatrise za brojeve particija broja n:

a) u kojima su svi sabirci 3 ili 4

b) u kojima je svaki sabirak stepen broja 2

Rešenje:

a) Traži se broj particija oblika $(3^{\alpha_1}, 4^{\alpha_2})$. Kako je $3\alpha_1 + 4\alpha_2 = n$, to traženi broj particija možemo videti i kao broj rešenja jednačine $i + j = n$, gde $i \in \{0, 3, 6, 9, \dots\}$ i $j \in \{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$. Broj rešenja ove jednačine jednak je koeficijentu uz x^n u proizvodu $(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\cdots)$, pa je prema **Teoremi 11.** tražena funkcija generatrise $f(x) = \frac{1}{(1-x^3)(1-x^4)}$.

b) Posmatramo jednačinu $\sum_{i\geq 0} c_i 2^i = n$. Svakoj particiji broja n čiji su sabirci stepeni dvojke, odgovara po jedno rešenje ove jednačine. Ovoj jednačini ekvivalentna je jednačina $x_0+x_1+x_2+\cdots = n$, gde je $x_i \in \left\{0, 2^i, 2 \cdot 2^i, 3 \cdot 2^i, \dots\right\}$. Kako je broj rešenja ove jednačine jednak koeficijentu uz x^n u proizvodu $(1+$

$x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots)(1+x^4+x^8+x^{12}+\dots)$, to je tražena funkcija generatrise $f(x)=\prod_{i\geq 0}\frac{1}{1-x^{2^i}}$.

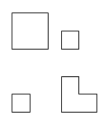
$\diamond$

Zadatak 4:

Naći funkciju generatrisu i rekurentnu relaciju za broj načina na koji se može u potpunosti prekriti pravougaonik dimenzija $n\times 2$ pomoću delova sledećeg tipa (tako da se delovi ne preklapaju). Dužine ivica delova su 1 i 2. Delovi mogu da se rotiraju za ceo umnožak pravog ugla.

a) kvadrati 2×2 i 1×1

b) kvadrat 1×1 i L-figura



Rešenje:

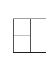
a) Sa a_n ćemo označiti broj odgovarajućih prekrivanja table $2\times n$.
Ako je u donjem levom uglu kvadratić (1×1) onda iznad njega mora biti kvadratić, pa onda ostaje tabla $2\times(n-1)$ koja se može prekriti na a_{n-1} načina.
Ako je u donjem levom uglu kvadrat (2×2), onda ostaje tabla $2\times(n-2)$ koja se može prekriti na a_{n-2} načina.
Tako smo došli do rekurentne jednačine: $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.
Početni uslovi su $a_1=1$ i $a_2=2$. Odatle je, kada pomnožimo prethodnu jednačinu sa x^n

$a_nx^n=a_{n-1}x^n+a_{n-2}x^n$, pa delujemo sumom

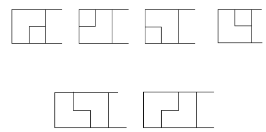
$A(x)-1-x=x(A(x)-1)+x^2A(x)$, odakle je

$A(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$.

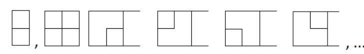
b) Ako su sa leve strane dva kvadratića jedan iznad drugog, ostaje tabla $2\times(n-1)$ koja se može prekriti na a_{n-1} načina.



Ako su sa leve strane kvadratić i L-figura, u svakom od ta četiri slučaja ostaje tabla $2\times(n-2)$ koja se može prekriti na a_{n-2} načina.
Ako su sa leve strane dve L-figure, u svakom od ta dva slučaja ostaje tabla $2\times(n-3)$ koja se može prekriti na a_{n-3} načina.
Tako smo došli do sledeće rekurentne jednačine



$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} + 2a_{n-3}$.
Početni uslovi su $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ i $a_3 = 11$.



Slično kao u delu pod a), dolazimo do $A(x) = \frac{1}{1-x-4x^2-2x^3}$.

$\diamond$

6 Zaključak

Funkcije generatrise su jedan od najkorisnijih i najvažnijih objekata u enumerativnoj kombinatorici. Funkcija generatrise pridružena nizu je formalni stepeni red čiji su koeficijenti članovi tog niza. Tako je beskonačno mnogo brojeva zamenjeno jednim objektom, koji je često i funkcija. Pošto je matematički aparat za rad sa funkcijama i stepenim redovima potpuno razvijen, može se iskoristiti za rešavanje kombinatornih problema. Prema tome se jasno vidi značaj funkcija generatrise i njihova široka primena.

U ovom radu definisane su obične i eksponencijalne funkcije generatrise, zatim operacije sa njima i neke primene, najpre u rešavanju rekurzivnih relacija, a zatim i na računanje broja deranžmana kao i broja particija prirodnog broja. Na samom kraju detaljno su rešeni različiti zadaci u kojima se primenjuju funkcije generatrise.

Literatura

[1] Duško Jojić, *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.

[2] Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika osnove kombinatorike i teorije grafova zbirka rešenih zadataka*, Društvo matematičara Srbije, Beograd 2004.

[3] Dragan Stevanović, Miroslav Ćirić, Slobodan Simić, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika osnove kombinatorike i teorije grafova*, Prirodno-matematički fakultet u Nišu 2007.