Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Procena broja realnih nula polinoma sa realnim koeficijentima

Master rad

Mentor:
prof dr. Zoran Petrović

Student:
Marija Vuković

Beograd,
2019.

Sadržaj

1 Uvod

Problem razmatranja nula polinoma je prisutan u školskoj matematici. Međutim, taj problem se u praksi svodi samo na nekoliko slučajeva. Kroz nastavno-obrazovni proces učenici razmatraju nule kvadratnih trinoma i jednačina koje se smenom svode na kvadratne. Takođe, razmatraju se i polinomi sa višim stepenom, pri čemu im je poznata neka nula.

U ovom radu ćemo se baviti problemom broja realnih nula polinoma, koristeči tri metode koje se mogu uvesti u nastavni plan i program za učenike srednjih škola.

Razmatrane su sve tri metode za procenu broja realnih nula polinoma. Rad započinjemo Dekartovim pravilom promene znaka, gde najpre navodimo teoremu sa dokazom, a zatim i konkretnu primenu ove teoreme na različite zadatke. Po istom principu obrađujemo i preostale dve teoreme, Furije-Budanovu i Šturmovu teoremu.

2 Nule polinoma

Definicija 1. *Broj a se zove nula ili koren polinoma* $f(x)$ *ako je* $f(a) = 0$.

Teorema 1. *Za svaki polinom* $f(x)$ *i svaki nenula polinom* $q(x)$ *postoje jedistveni polinomi* $s(x)$ *i* $r(x)$ *tako da je* $f(x) = q(x) \cdot s(x) + r(x)$*, pri čemu je* $\deg r(x) < \deg q(x)$ *ili je* $r(x)$ *nula polinom. Polinom r se naziva ostatkom.*

Dokaz. Neka je $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ i $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$.

Ako je $n < m$ ili $f(x) = 0$ tada je $s(x) = 0$ i $r(x) = f(x)$.

Ako je $n \geq m$ posmatrajmo polinom $f_1(x) = f(x) - \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}q(x)$.
Stepen polinoma $f_1(x)$ je manji od stepena polinoma $f(x)$. Označimo stepen polinoma $f_1(x)$ sa n_1 i najstariiji koeficijent sa a_{n_1}.

Ako je $n_1 \geq m$, posmatrajmo polinom $f_2(x) = f_1(x) - \dfrac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m}q(x)$.
Stepen polinoma $f_2(x)$ je manji od stepena polinoma $f_1(x)$. Označimo stepen polinoma $f_2(x)$ sa n_2 i njegov najstariji koeficijent sa a_{n_2}.

Nastavljajući ovaj proces dobićemo polinom

$f_k(x) = f_{k-1}(x) - \dfrac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}q(x)$.

$f_k(x)$ je nula polinom ili je njegov stepen manji od m.

Proces prekidamo i $f_k(x)$ možemo zapisati kao

$f_k(x) = f(x) - s(x)q(x)$, pri čemu je

$s(x) = \dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m} + \dfrac{a_{n_1}}{b_m}x^{n_1-m} + ... + \dfrac{a_{n_{k-1}}}{b_m}x^{n_{k-1}-m}$.

Polinomi $s(x)$ i $r(x) = f_k(x)$ zadovoljavaju jednakost $f(x) = s(x)q(x)+r(x)$, pri čemu je $r(x) = 0$ ili je $\deg r(x) < \deg q(x)$.

Da bi dokazali jedinstvenost polinoma $s(x)$ i $r(x)$, pretpostavimo da postoje polinomi $s_1(x)$ i $r_1(x)$, tako da je $f(x) = s_1(x)q(x)+r_1(x)$, pri čemu je $r_1(x) = 0$ ili je $\deg r_1(x) < \deg q(x)$.

Važiće da je $(s(x)-s_1(x))q(x) = r_1(x)-r(x)$, pri čemu je polinom na desnoj strani nula polinom ili je njegov stepen manji od stepena polinoma $q(x)$.
Međutim, ako je $s(x)-s_1(x) \neq 0$, onda je polinom na levoj strani većeg stepena od stepena polinoma $q(x)$. Jednakost $(s(x)-s_1(x))q(x) = r_1(x)-r(x)$ je moguća samo ako je $s(x) = s_1(x)$ i $r(x) = r(x)$.

□

Teorema 2. *Ako je polinom* $f(x)$ *deljiv polinomom* $g(x)$*, onda je svaka nula polinoma* $g(x)$ *ujedno i nula polinoma* $f(x)$.

Dokaz. Kako je polinom f deljiv polinomom g, polinom f mozemo zapisati kao $f(x) = g(x) \cdot r(x)$.

Neka je a nula polinoma g.

S obzirom da je $g(a) = 0$, sledi da je i $f(a) = 0$.

Dakle, a je i nula polinoma f. □

Teorema 3. *Bezuov stav: Ostatak deljenja polinoma $f(x)$ sa binomom $(x - a)$ je $f(a)$.*

Dokaz. Neka je $g(x) = x - a$.

Na osnovu teoreme 1. postoje jedinstveni polinomi $s(x)$ i $r(x)$, tako da je $f(x) = g(x) \cdot s(x) + r(x)$.

U ovom slučaju r je konstanta.

Dakle, $f(x) = (x - a) \cdot s(x) + r$.

Posmatrajmo $f(a)$.

Biće $f(a) = r$.

□

3 Dekartovo pravilo promene znaka

U ovoj sekciji ćemo se baviti obrađivanjem Dekartovog [1] pravila promene znaka koeficijenata.

Broj promena znaka koeficijenata se odnosi na broj promena znaka uzastopnih koeficijenata polinoma. Ako je neki koeficijent jednak nuli, onda se taj koeficijent preskače i gledamo znak sledećeg koeficijenta.

Teorema 4. ***Rolova teorema***
Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$ i diferencijabilna funkcija na (a, b), tako da je $f(a) = f(b)$. Tada postoji tačka c iz intervala (a, b) tako da je $f^{'}(c) = 0$.

Lema 1. *Ako polinom $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ nema pozitivne nule, onda je broj promena znaka koeficijenata paran.*

Dokaz. Posmatrajmo $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$. Pretpostavimo da je $a_0 \neq 0$.
Ako je $a_0 < 0$ onda je $f(0) = a_0 < 0$. Kako je

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

[1] René Descartes$(1596 - 1650)$, franuski matematičar

polinom $f(x)$ je pozitivan za dovoljno velike vrednosti x. Pošto je polinom $f(x)$ neprekidna funkcija on ima bar jednu pozitivnu nulu. Dakle, ako polinom nema pozitivnu nulu, onda je $a_0 > 0$. Ako je $a_0 > 0$, onda mora biti paran broj promena znaka, zato što je i poslednji koeficijent pozitivan.

□

Teorema 5. *Ako polinom $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ima k promena znaka koeficijenata i ako je $r > 0$, onda polinom $(x-r) \cdot (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$ ima $k+2s+1$ promena znaka koeficijenata, gde je $s \geq 0$.*

Dokaz. Indukcijom po n ćemo dokazati teoremu.

- Baza indukcije: Neka je $n = 1$.

  U ovom slučaju posmatraćemo polinom $f(x) = a_0 + a_1x$.
  Posmatraćemo i slučajeve kada su koeficijenti a_0 i a_1 istog znaka i kada su različitog znaka.

  1. Neka su a_0 i a_1 istog znaka. Neka su oba pozitivna, $a_0 > 0$, $a_1 > 0$.

     Kako su koeficijenti a_0 i a_1 istog znaka, ne postoji promena znaka koeficijenata polinoma $f(x)$. Dakle, $k = 0$.

     Posmatrajmo sada polinom $(x - r)f(x)$, gde je $r > 0$.

     $(x - r)f(x) = -ra_0 + x(a_0 - ra_1) + x^2a_1$

     $-ra_0 < 0$ i $a_1 > 0$.
     Kako je prvi koeficijent negativan, a treći pozitivan, broj promena znaka je 1, kakav god bio drugi koeficijent.

     Dakle, broj promena znaka koeficijenata polinoma $(x-r)f(x)$ je $k+1$.

     Ako su koeficijenti a_0 i a_1 negativni, na isti način zaključujemo da je broj promena znaka polinoma $(x - r)f(x)$ jednak $k + 1$.

  2. Neka su koeficijenti a_0 i a_1 različitog znaka.

     Neka je $a_0 > 0$ i $a_1 < 0$.

     Kako su koeficijenti a_0 i a_1 različitog znaka, postoji jedna promena znaka koeficijenata polinoma $f(x)$, tj. $k = 1$.

Posmatrajmo sada polinom $(x-r)f(x)$.

$(x-r)f(x) = -ra_0 + x(a_0 - ra_1) + x^2 a_1$

Kako je $-ra_0 < 0$, $a_0 - ra_1 > 0$ i $a_1 < 0$, postoje 2 promene znaka koeficijenata polinoma $(x-r)f(x)$.

Dakle, tvđenje je tačno i u ovom slučaju.

- Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da važi: Ako polinom $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ ima k promena znakova koeficijenata i ako je $r > 0$, onda polinom $(x-r)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n)$ ima $k+2s+1$ promena znakova koeficijenata, gde je $s \geq 0$.

- Induktivni korak: Pokažimo da tvrđenja važi za polinom stepena $n+1$.

Sa $p(x)$ označimo polinom stepena n, a sa $f(x)$ polinom stepena $n+1$.

$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$
$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$

Posmatraćemo slučajeve kada su koeficijenti a_n, a_{n+1} istog i različitog znaka.

1. Neka su koeficijenti a_n i a_{n+1} istog znaka.

   Neka je $a_n > 0$ i $a_{n+1} > 0$.

   Kako su koeficijenti a_n i a_{n+1} istog znaka, onda će polinomi $p(x)$ i $f(x)$ imati isti broj promena znaka koeficijenata. Neka je to broj k.

   $(x-r)p(x) = -ra_0 + x(a_0 - ra_1) + \cdots + x^{n+1}a_n$
   $(x-r)f(x) = -ra_0 + x(a_0 - ra_1) + \cdots + x^{n+1}(a_n - ra_{n+1}) + x^{n+1}a_{n+1}$

   Prema induktivnoj hipotezi, polinom $(x-r)p(x)$ ima $k+2s+1$ promena znaka koeficijenata, gde je $s \geq 0$.

   Ako je $a_n - ra_{n+1} > 0$, zbog koeficijenta a_{n+1}, polinom $(x-r)f(x)$ će imati isti broj promena znaka koeficijenata kao i polinom $(x-r)p(x)$, dakle $k+2s+1$, gde je $s \geq 0$.

Ako je $a_n - ra_{n+1} \leq 0$, broj promena znaka zavisi od prvog nenula koeficijenta koji se pojavljuje pre koeficijenta a_n u polinomu $(x-r)p(x)$. Zato ćemo posmatrati sledeće slučajeve.

(a) Ako je taj koeficijent negativan, a $a_n - ra_{n+1}$ isto negativan, onda je broj promena znaka koeficijenata polinoma $(x-r)f(x)$ isti kao kod polinoma $(x-r)p(x)$, dakle $k+2s+1$, $s \geq 0$.

(b) Ako je taj koeficijent negativan, a $a_n - ra_{n+1} = 0$, broj promena znaka koeficijenata polinoma $(x-r)f(x)$ je isti kao kod polinoma $(x-r)p(x)$, dakle $k+2s+1$, $s \geq 0$.

(c) Ako je taj koeficijent pozitivan, a $a_n - ra_{n+1}$ negativan, broj promene znaka koeficijenata polinoma $(x-r)f(x)$ je za 2 veći od broja promena znaka koeficijenata polinoma $(x-r)p(x)$, dakle $k+2s+3$, $s \geq 0$.

(d) Ako je taj koeficijent pozitivan, a $a_n - ra_{n+1} = 0$, broj promena znaka koeficijenata polinoma $(x-r)f(x)$ je isti kao kod polinoma $(x-r)p(x)$, dakle $k+2s+1$, $s \geq 0$.

Slično će važiti i ako su koeficijenti a_n i a_{n+1} negativni.

2. Neka su koeficijenti a_n i a_{n+1} različitog znaka.

Kako su koeficijenti a_n i a_{n+1} različitog znaka, onda će polinom $f(x)$ imati 1 promenu znaka koeficijenata više od polinoma $p(x)$.
Neka je $k-1$ broj promena znaka koeficijenata polinoma $p(x)$, a k broj promena znaka koeficijenata polinoma $f(x)$.

$(x-r)p(x) = -ra_0 + x(a_0 - ra_1) + \cdots + x^{n+1}a_n$
$(x-r)f(x) = -ra_0 + x(a_0 - ra_1) + \cdots + x^{n+1}(a_n - ra_{n+1}) + x^{n+1}a_{n+1}$

Prema indukivnoj hipotezi, polinom $(x-r)p(x)$ ima $k+2s$ promena znaka koeficijenata, gde je $s \geq 0$.

Neka je $a_n > 0$ i $a_{n+1} < 0$.
Kako je $a_n - ra_{n+1} > 0$ i $a_{n+1} < 0$, polinom $(x-r)f(x)$ ima 1 promenu znaka koeficijenata više od polinoma $(x-r)p(x)$, odakle sledi da polinom $(x-r)f(x)$ ima $k+2s+1$ promena znaka koeficijenata, gde je $s \geq 0$.

Neka je $a_n < 0$ i $a_{n+1} > 0$.
Kako je $a_n - ra_{n+1} < 0$ i $a_{n+1} > 0$, polinom $(x-r)f(x)$ ima 1 promenu znaka koeficijenata više od polinoma $(x-r)p(x)$, odakle

sledi da polinom $(x-r)f(x)$ ima $k+2s+1$ promena znaka koeficijenata, gde je $s \geq 0$.

□

Teorema 6. ***Dekartovo pravilo znaka***
Neka je $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ polinom sa realnim koeficijentima. Tada je broj pozitivnih, realnih nula polinoma $f(x)$ (sa višestrukostima) jednak broju promena znaka u nizu $a_0, a_1, ..., a_n$ ili je manji za paran broj. Broj negativnih, realnih nula polinoma $f(x)$ (sa višestrukostima) je jednak broju promena znaka koeficijenata polinoma $f(-x)$ ili je manji za paran broj.

Dokaz. Teoremu ćemo dokazati indukcijom po n.

- Baza indukcije: Neka je $n = 1$.

  U ovom slučaju posmatraćemo polinom $f(x) = a_0 + a_1x$, gde su a_0 i a_1 realni brojevi. Neka je $r > 0$ nula-tačka polinoma $f(x)$. Tada $f(x)$ možemo da predstavimo kao $f(x) = (x-r)g(x)$, gde je $g(r) \neq 0$. Kako je $f(x)$ polinom prvog stepena, $g(x)$ je konstanta.

  Prema teoremi 5 $f(x) = (x-r)g(x)$ ima za $2s+1$ promena znaka više od $g(x)$, gde je $s \geq 0$, dakle ima jednu promenu znaka, pa tvrđenje važi.

- Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da važi tvrđenje: Neka je $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ polinom sa realnim koeficijentima. Broj pozitivnih nula polinoma $f(x)$ je jednak broju promena znaka koeficijenata ili je manji za paran broj.

- Induktivni korak: Pokažimo da tvrđenje važi za polinom stepena $n+1$.

  Neka je $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + a_{n+1}x^{n+1}$ polinom sa realnim koeficijentima.

  Pretpostavimo da $f(x)$ nema pozitivne nule. Podelimo $f(x)$ sa a_{n+1}. Dobićemo polinom $h(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^{n+1}$. Prema Lemi 1 broj promena znaka koeficijenata polinoma $h(x)$ je paran, pa će i broj promena znaka koeficijenata polinoma $f(x)$ biti paran.

  Pretpostavimo sada da je $r > 0$ nula polinoma $f(x)$. Tada $f(x)$ možemo da predstavimo kao $f(x) = (x-r)g(x)$, pri čemu je $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$

i $g(r) \neq 0$.
Prema induktivnoj hipotezi, broj pozitivnih nula polinoma $g(x)$ je jednak broju promena znaka koeficijenata $b_0, b_1, \ldots, b_n$ ili je manji za paran broj. Prema teoremi 5 polinom $f(x) = (x-r)g(x)$ ima za $2s+1$ više promena znaka koeficijenata od $g(x)$, gde je $s \geq 0$. Ali tu imamo još jednu nulu više. Dakle, broj pozitivnih nula za $f(x)$ je jednak broju promena znaka u nizu $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ ili je manji za paran broj.

Kako su negativne nule polinoma $f(x)$ pozitivne nule polinoma $f(-x)$ tvrđenje će važiti i za negativne nule.

$\square$

4 Primena Dekartovog pravila na zadatke

1. Dekartovim pravilom odrediti koliko realnih nula ima polinom $x^3 - 7x^2 - 10x - 8$.

   Obeležimo $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x - 8$.

   Odredićemo prvo broj pozitivnih realnih nula, a zatim broj negativnih realnih nula polinoma.

   - Broj pozitivnih realnih nula:

     Posmatrajmo promene znaka koeficijenta polinoma $f(x)$.

     $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x - 8$

     Znak se promenio jednom.

     Dakle, polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x - 8$ ima 1 pozitivnu realnu nulu.

   - Broj negativnih realnih nula:

     Da bi odredili broj negativnih realnih nula, posmatraćemo promenu znaka koeficijenta polinoma $f(-x)$.

     $f(-x) = -x^3 - 7x^2 + 10x - 8$.

     Znak se promenio 2 puta.

     Dakle, polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x - 8$ može imati 2 ili 0 negativnih realnih nula.

Dekartovim pravilom smo pokazali da polinom $f(x) = x^3 - 7x^2 - 10x - 8$ ima 1 pozitivnu realnu nulu i može imati 2 ili nijednu negativnu, realnu nulu.

2. Dekartovim pravilom pokazati koliko najviše realnih nula, a koliko najviše nula koje nisu realne može imati polinom
$f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + 1$.

   Da bi odredili koliko najvise realnih nula ima polinom $f(x)$, odredićemo broj pozitivnih realnih nula i broj negativnih realnih nula.

   - Broj pozitivnih realnih nula:

     Posmatrajmo promenu znaka koeficijenata polinoma

     $f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6x + 1$.

     Znak se promenio 4 puta. Polinom $f(x)$ može imati 4, 2 ili nijednu pozitivnu realnu nulu. Dakle, može imati najviše 4 pozitivne realne nule.

   - Broj negativnih realnih nula:

     Posmatrajmo promenu znaka polinoma $f(-x)$.

     $f(-x) = -4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 1$

     Znak se promenio 1. Dakle, polinom $f(x)$ ima 1 negativnu realnu nulu.

   Polinom $f(x) = 4x^5+3x^4-2x^3+5x^2-6x+1$ može imati najviše 5 realnih nula (4 pozitivne i 1 negativnu).

   Takođe smo pokazali da polinom $f(x)$ može imati 1 negativnu realnu nulu i nijednu pozitivnu, odakle sledi da može imati najviše 4 nule koje nisu realne.

3. Pokazati da polinom $x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$ ima najviše 5 pozitivnih realnih nula i najviše 2 negativne realne nule i da bar 4 nule nisu realne.

   Obeležimo $f(x) = x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$.

- Broj pozitivnih realnih nula:

  Pogedajmo broj promena znaka polinoma $f(x)$.

  $f(x) = x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$

  Znak se promenio 5 puta. Dakle, polinom $f(x)$ može imati 5, 3 ili 1 pozitivnu realnu nulu.

- Broj negativnih realnih nula:

  Odredićemo broj promena znaka koeficijenata polinoma $f(-x)$.

  $f(x) = -x^{11} + x^8 + 3x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2 - x - 2$

  Znak se promenio 2 puta, pa polinom $f(x)$ može imati 2 ili nijednu negativnu realnu nulu.

Pokazali smo da polinom $f(x) = x^{11} + x^8 - 3x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 2$ može imati najviše 7 realnih nula. Dakle, bar 4 nule nisu realne.

4. Neka je polinom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $a_n a_0 \neq 0$ i $a_k = a_{k+1} = 0$ za neko k pri čemu je $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Dokazati da polinom $f(x)$ nema sve realne nule.

Polinom $f(x)$ je n-tog stepena, odakle sledi da mora imati n nula.
Posmatrajmo slučajeve kada je n paran broj i kada je n neparan broj.

Posmatraćemo slučajeve kada polinom ima najviše promena znaka koeficijenata.

(1) Neka je n paran broj.

Neka koeficijenti a_{2i+1} imaju negativan znak, za $0 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}$, a preostali pozitivan.

Posmatrajmo polinom $f(x)$ da bi odredili broj pozitivnih realnih nula.
U ovom slučaju imamo maksimalno $n-2$ promene znaka. Dakle, polinom $f(x)$ može imati maksimalno $n-2$ pozitivnih realnih nula.

Da bi odredili broj negativnih nula, posmatraćemo polinom $f(-x)$.
Negativni znaci će postati pozitini, pa nećemo imati promena znaka,

što znači da polinom $f(x)$ nema negativne realne nule.

Dakle, polinom $f(x)$ može imati maksimalno $n-2$ realne nule, odakle sledi da nisu sve nule realne.

- Na primer, neka je $n = 6$ i neka je $a_3 = a_4 = 0$.

  $f(x)$ će izgledati kao $f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

  Neka su koeficijenti a_5 i a_1 negativnog znaka, a preostali pozitivnog znaka.

  Da bi odredili broj pozitivnih nula, posmatraćemo polinom
  $f(x) = a_6x^6 + a_5x^5 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

  Znak se promenio 4 puta, odakle sledi da polinom $f(x)$ može imati 4, 2 ili nijednu realnu nulu.

  Da bi odredili broj negativnih nula, posmatrćemo promenu znaka polinoma $f(-x)$.

  $f(-x) = a_6x^6 - a_5x^5 + a_2x^2 - a_1x + a_0$

  Kako su koeficijenti a_5 i a_1 negativni, u ovom slučaju neće biti promena znaka koeficijenata, zbog minusa ispred koeficijenata a_5 i a_1. S obzirom da nema promena znaka, polinom $f(x)$ neće imati negativne realne nule.

  Polinom $f(x)$ mora imati šest nula. Pokazali smo da može imati najviše četiri realne nule, odakle sledi da polinom $f(x)$ nema sve realne nule.

(2) Neka je n neparan broj.
Neka su znaci koeficijenata a_{2i+1} negativni, za $1 \leqslant i \leqslant \frac{n-1}{2}$ i neka su preostali koeficijenti pozitivni.

Da bi odredili potencijalan broj pozitivnih realnih nula, posmatraćemo polinom $f(x)$.

U ovo slučaju imamo maksimalno $n-2$ promene znaka, što znači da polinom $f(x)$ može imati najviše $n-2$ pozitivne realne nule.

Da bi odredili broj negativnih realnih nula, posmatraćemo promenu znaka koeficijenata polinoma $f(-x)$. U ovom slučaju, negativni koeficijenti će postati pozitivni, pa neće biti promena znaka. Dakle, polinom $f(x)$ nema negativnih realnih nula.

Pokazali smo da polinom $f(x)$ ima najviše $n-2$ realne nule, odakle sledi da nisu sve realne.

- Na primer, neka je $n = 7$ i neka je $a_3 = a_4 = 0$.

  Tada će polinom $f(x)$ izgledati
  $f(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

  Neka su koeficijenti a_1, a_5, a_7 negativnog znaka, a preostali pozitivnog.

  Da bi odredili broj pozitinih realnih nula, posmatraćemo promenu znaka polinoma $f(x)$.

  $f(x) = a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

  Znak se promenio 5 puta, odakle sledi da polinom $f(x)$ može imati 5, 3 ili 1 realnu pozitivnu nulu.

  Posmatraćemo polinom $f(-x)$ da bi odredili broj negativnih relanih nula.

  $f(x) = -a_7x^7 + a_6x^6 - a_5x^5 + a_2x^2 - a_1x + a_0$

  U ovom sluǎju, negativni koeficijenti će postati pozitivni, pa nećemo imati promenu znaka, odakle sledi da plinom $f(x)$ nema negativnih relanih nula.

  Dakle, polinom $f(x)$ može imati maksimalno 5 realnih nula. Kako je polinom $f(x)$ sedmog stepena, sledi da preostale dve nule nisu realne.

5. Pokazati da polinom $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_3x^3 + x^2 + x + 1$ nema sve realne nule.

   Posmatraćemo slučajeve kada polinom $f(x)$ ima najviše promena znaka koeficijenata i kada nam je n paran i neparan broj.

   (1) Neka je n paran broj.

Pretpostavimo da su neparni koeficijenti negativni, a preostali pozitivni. U tom slučaju imamo maksimalan broj promene znakova koeficijanata.

- Odredimo broj pozitivnih realnih nula posmatrajući polinom $f(x)$.

  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_3 x^3 + x^2 + x + 1$

  Znak se promenio $n-2$ puta, odakle sledi da je maksimalan broj pozitivnih realnih nula $n-2$.

- Odredimo sada broj negativnih realnih nula.

  Posmatrajmo polinom $f(-x)$.

  $f(-x) = a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_4 x^4 - a_3 x^3 + x^2 - x + 1$

  Svi negativni koeficijenti će postati pozitivni, odakle sledi da će $f(-x) > 0$ za svako $x > 0$. Dakle, polinom $f(-x)$ nema pozitivne realne nule.

  Kako je svaka negativna nula polinoma $f(x)$ ujedno i pozitivna nula polinoma $f(-x)$, odatle sledi da polinom $f(x)$ nema negativne realne nule.

  Pokazali smo da polinom $f(x)$ može imati najviše $n-2$ realne nule, odakle sledi da preostale nule nisu realne.

(2) Neka je n neparan broj.

Pretpostavimo da su neparni koeficijenti negativni, a preostali pozitivni. U tom slučaju ćemo imati maksimalan broj promena znaka.

- Odredimo broj pozitivnih realnih nula posmatrajući polinom $f(x)$.

  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_3 x^3 + x^2 + x + 1$

  Znak se promenio $n-2$ puta, odakle sledi da je maksimalan broj pozitivnih realnih nula $n-2$.

- Odredimo sada broj negativnih realnih nula.

  Posmatrajmo polinom $f(-x)$.

$$f(-x) = -a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_4 x^4 - a_3 x^3 + x^2 - x + 1$$

Svi negativni koeficijenti će postati pozitivni, odakle sledi da će $f(-x) > 0$ za svako $x > 0$. Dakle, polinom $f(-x)$ nema pozitivne realne nule.

Kako je svaka negativna nula polinoma $f(x)$ ujedno i pozitivna nula polinoma $f(-x)$, odatle sledi da polinom $f(x)$ nema negativne realne nule.

Pokazali smo da polinom $f(x)$ može imati najviše $n-2$ realne nule, odakle sledi da preostale nule nisu realne.

6. Neka je $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$. Odrediti polinom $q(x)$ tako da je $q^{'}(x) = f(x)$, a zatim primenom Rolove teoreme odrediti intervale u kojima se nalaze nule polinoma $f(x)$.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$$

$$q^{'}(x) = f(x)$$

$$q(x) = \int (2x^3 - 3x^2 - x + 1)dx$$

$$q(x) = 2\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c, \ c \text{ je konstanta.}$$

$$q(x) = \frac{x^4}{2} - x - \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$q(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 2c)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^2 + 2x + 2c)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}(x^2(x^2 - 2x + 1) - 2x(x-1) + 2c)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}(x^2(x-1)^2 - 2x(x-1) + 2c)$$

Biramo c tako da $q(x)$ ima linearnu faktorizaciju.
Neka je $c = 0$.

$$q(x) = \frac{1}{2}x(x-1)(x(x-1) - 2)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}x(x-1)(x^2 - x - 2)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}x(x-1)(x+1)(x-2)$$

$$q(x) = \frac{1}{2}x(x-1)(x+1)(x-2)$$

Dakle, polinom $q(x)$ ima nule u tačkama -1, 0, 1 i 2.

Prema Rolovoj teoremi, sledi da polinom $f(x)$ ima realne nule u intervalima $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 2)$.

5 Furije - Budanova teorema

Sada ćemo se upoznati sa Furije-Budanovom [2] teoremom.

Teorema 7. ***Furije - Budanova teorema***
Neka je N(x) broj promena znaka u nizu $f(x), f^{'}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, gde je f polinom stepena n. Tada je broj nula polinoma $f(x)$ (brojanih sa višestrukostima) između a i b, pri čemu je $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$ i $a < b$ jednak $N(a) - N(b)$ ili je manji za paran broj.

Dokaz. Interval $a < x \leq b$ označimo sa I. Sa h_1, h_2, s, t označimo brojeve koji mogu biti pozitivni celi ili nula. Sa p ćemo označiti broj nula polinoma $f(x)$ u intervalu I.

Posmatrajmo:

$$f(x+a) = f(a) + f^{'}(a)x + \tfrac{1}{2}f^{''}(a)x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)x^n$$

$$f(x+b) = f(b) + f^{'}(b)x + \tfrac{1}{2}f^{''}(b)x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(b)x^n$$

Pozitivne nule od $f(x+a)$ su zapravo nule od $f(x)$ koje su veće od a. Pozitivne nula od $f(x+b)$ su nule od $f(x)$ koje su veće od b. Zato je p jednak razlici pozitivnih (ne-nula) korena $f(x+a)$ i pozitivnih (ne-nula) korena $f(x+b)$. Koristeći Dekartovo pravilo promene znaka, $f(x+a)$ ima $N(a) - 2h_1$ pozitivnih nula, a $f(x+b)$ ima $N(b) - 2h_2$ pozitivnih nula. Odavde sledi da je

$$p = (N(a) - 2h_1) - (N(b) - 2h_2) = N(a) - N(b) - 2k \tag{1}$$

gde je $k = h_1 - h_2$. Sada treba dokazati da je $k \geq 0$. To ćemo uraditi matematičkom indukcijom.

[2] Joseph Fourier (1768 – 1830), Francois Budan (1761 – 1840), francuski matematičari

- Baza indukcije: Neka je $n = 1$.
  Posmatraćemo $f(x) = a_0 + a_1x$, $f(x+a) = a_1x + a_0 + aa_1$, $f^{'}(x+a) = a_1$, $f(x+b) = a_1x + a_0 + ba_1$, $f^{'}(x+b) = a_1$. Broj promena znaka $N(a)$ u nizu $f(x+a)$, $f^{'}(x+a)$ može biti 1 ili 0. Broj promena znaka $N(b)$ u nizu $f(x+b), f^{'}(x+b)$ može biti 1 ili 0. Ako su $N(a)$ i $N(b)$ oba jednaka 1 ili 0, onda je $p = 0$. Ako je $N(a) = 0$, $N(b) = 1$, p će biti negativan. $f(x)$ je polinom prvog stepena pa mora imati jednu nulu, dakle p mora biti 1. U tom slučaju $N(a) = 1$, $N(b) = 0$, odakle sledi da je $k = 0$. Dakle, $k \geq 0$.

- Induktivna hipoteza: Pretpostavimo da je tvrđenje tačno za polinome stepena manjeg od n. Neka je polinom $f(x)$ stepena n, $f(x+a) = f(a) + f^{'}(a)x + \frac{1}{2}f^{''}(a)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)x^n$,
  $f(x+b) = f(b) + f^{'}(b)x + \frac{1}{2}f^{''}(b)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)x^n$. Neka je $N(a) - 2h_1$ broj nula $f(x+a)$, a $N(b) - 2h_2$ broj nula $f(x+b)$. Tada je broj nula polinoma $f(x)$ jednak $N(a) - N(b) - 2k$, gde je $k = h_1 - h_2$, $k \geq 0$.

- Induktivni korak: Označimo sa q broj nula polinoma $f^{'}(x)$ u intervalu I, a sa $N^{'}(c)$ broj promena znaka u nizu $f^{'}(x), f^{''}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, pri čemu je $x = c$, a c je realan broj.

  Prema Dekartovom pravilu znaka, $q = N^{'}(a) - N^{'}(b) - 2k^{'}$, gde je $k^{'}$ ceo broj ili nula. Na osnovu naše pretpostavke zaključujemo da je $k^{'} \geq 0$.

  Iz Rolove teoreme sledi da je $q \geq p - 1$, recimo $q = p - 1 + s$.

  Primetimo da je $N(a) = N^{'}(a)$ ili $N(a) = N^{'}(a) + 1$ i da je $N(b) = N^{'}(b)$ ili $N(b) = N^{'}(b) + 1$.

  Ispitivanjem različitih mogućnosti, zaključujemo da je
  $N(a) - N(b) \geq N'(a) - N^{'}(b) - 1$.
  Neka je najpre

  $$N(a) - N(b) > N^{'}(a) - N^{'}(b) = q + 2k^{'} = p - 1 + s + 2k^{'}. \qquad (2)$$

  Ako je $s + 2k^{'} \neq 0$ biće $N(a) - N(b) \geq p$. Iz (1) sledi da je $k \geq 0$.

  Ako je $s + 2k^{'} = 0$ biće $N(a) - N(b) \geq p - 1$. Iz (1) sledi da je $N(a) - N(b) - p$ paran broj i zato je $N(a) - N(b) \neq p - 1$. Zbog toga je $N(a) - N(b) > p - 1$. Dakle $N(a) - N(b) \geq p$. Ponovo iz (1) sledi da je $k \geq 0$.

  Razmotrićemo sada slučaj kada je $N(a) - N(b) = N^{'}(a) - N^{'}(b) - 1$. To je moguće samo ako je $N(a) = N^{'}(a)$ i $N(b) = N^{'}(b) + 1$.

Ako je $f(b) \neq 0$ i ako je $f^{'}(b) \neq 0$, onda $f(b)$ i $f^{'}(b)$ moraju biti različitog znaka. Neka je r najveća nula $f(x)$ u intervalu I. Tada se $f^{'}(x)$ mora anulirati bar jednom u intervalu $r < x \leq b$, inače bi $f(b)$ i $f^{'}(b)$ bili istog znaka. Prema Rolovoj teoremi $f^{'}(x)$ u intervalu I ima $p-1$ nulu i najmanje jednu dodatnu nulu u intervalu $r < x \leq b$. Zato je $q \geq p$.

Pokazaćemo da ako je $N(b) = N^{'}(b) + 1$, onda je $q \geq p$. Prihvatajući ovu jednakost od sada, i koristeći $q = p + t$, biće

$$N(a) - N(b) = N^{'}(a) - N^{'}(b) - 1 = q + 2k^{'} - 1 = p + t + 2k^{'} - 1. \quad (3)$$

Prvi i poslednji član od (2) su isti kao u (3). Kao i kod (3) i ovde će $k \geq 0$.

□

6 Primena Furije-Budanove teoreme na zadatke

Primeri zadataka koji se mogu rešiti primenom Furije - Budanove teoreme:

1. Pomoću Furije-Budanove teoreme dokazati da polinom $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ ima po jednu realnu nulu u intervalima $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$.

   $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$

   Da bi odredili broj realnih nula, posmatraćemo sledeće polinome:

   $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$
   $f^{'}(x) = 16x - 8$
   $f^{''}(x) = 16$

   - Posmatrajmo prvo interval $(0, \frac{1}{2})$.
     $f(0) = 1 \neq 0$, $f(\frac{1}{2}) = -1 \neq 0$.

     Posmatrajmo sada promenu znaka vrednosti polinoma u krajnjim tačkama intervala:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$
0	$+$	$-$	$+$
$\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$

$N(0) = 2$

$N(\frac{1}{2}) = 1$

Kako je $N(0) - N(\frac{1}{2}) = 1$, polinom $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ ima jednu realnu nulu u itervalu $(0, \frac{1}{2})$.

- Posmatrajmo sada interval $(\frac{1}{2}, 1)$.

  $f(\frac{1}{2}) = -1 \neq 0$, $f(1) = 1 \neq 0$.

  Posmatrajmo promene znaka vrednosti kod polinoma $f(x), f^{'}(x)\ f^{''}(x)$.

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$
$\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
1	$+$	$+$	$+$

  $N(\frac{1}{2}) = 1$

  $N(1) = 0$

  Kako je $N(\frac{1}{2}) - N(1) = 1$, polinom $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$ ima jednu realnu nulu u intervalu $(\frac{1}{2}, 1)$.

2. Furije-Budanovom teoremom pokazati da polinom $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$ ima:

   (a) 1 realnu nulu u intervalu $(-3, -\frac{5}{2})$;

   (b) 3 ili 1 realnu nulu u intervalu $(-\frac{1}{2}, 0)$.

   Posmatraćemo promene znaka vrednosti polinoma u krajnjim tačkama intervala:

   $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$

   $f^{'}(x) = 8x^3 + 15x^2 + 2x + 5$

   $f^{''}(x) = 24x^2 + 30x + 2$

   $f^{'''}(x) = 48x + 30$

   $f^{(4)}(x) = 48$

(a) $f(-3) = 23 \neq 0$, $f(-\frac{5}{2}) = -\frac{21}{4} \neq 0$.

Pogledajmo promenu znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$
-3	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-\frac{5}{2}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

$N(-3) = 4$

$N(-\frac{5}{2}) = 3$

$N(-3) - N(-\frac{-5}{2}) = 1$.
Dakle, polinom $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-3, -\frac{5}{2})$.

(b) $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{7}{4} \neq 0$, $f(0) = 2 \neq 0$.
Pogledajmo promenu znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$
$-\frac{1}{2}$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

$N(-\frac{1}{2}) = 3$

$N(0) = 0$

$N(-\frac{1}{2}) - N(0) = 3$.
Polinom $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x + 2$ ima 3 ili 1 realnu nulu u intervalu $(-\frac{1}{2}, 0)$.

3. Furije-Budanovom teoremom dokazati da polinom
$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$ ima:

(a) 1 realnu nulu u intervalu $(-2, -1)$;

(b) 1 realnu nulu u $(-1, 0)$;

(c) 3 ili 1 realnu nulu u intervalu $(0, 1)$.

Posmatraćemo polinome:

$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$

$f^{'}(x) = 5x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 1$

$f^{''}(x) = 20x^3 - 12x^2 - 6x + 8$

$f^{'''}(x) = 60x^2 - 24x - 6$

$f^{(4)}(x) = 120x - 24$

$f^{(5)}(x) = 120$

(a) $f(-2) = -23 \neq 0,\ f(-1) = 3 \neq 0.$

Posmatrajmo promene znaka vrednosti polinoma u tačkama -2 i -1:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

$N(-2) = 5$

$N(-1) = 4$

Kako je $N(-2) - N(-1) = 1$, polinom
$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-2, -1)$.

(b) $f(-1) = 3 \neq 0,\ f(0) = -1 \neq 0$

Posmatrajmo promene znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
-1	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

$N(-1) = 4$

$N(0) = 3$

Kako je $N(-1) - N(0) = 1$, polinom
$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-1, 0)$.

(c) $f(0) = -1 \neq 0,\ f(1) = 1 \neq 0$

Posmatrajmo promene znaka koeficijenata:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
0	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
1	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$

$N(0) = 3$

$N(1) = 0$

Kako je $N(0) - N(1) = 3$, polinom
$f(x) = x^5 - x^4 - x^3 + 4x^2 - x - 1$ ima 3 ili 1 realnu nulu u intervalu $(0, 1)$.

4. Dokazati da polinom $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$ ima po 1 realnu nulu u intervalima $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$.

   Posmatraćemo promene znaka vrednosti polinoma:

   $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$

   $f^{'}(x) = 5x^4 - 12x^3 - 2x - 4$

   $f^{''}(x) = 20x^3 - 36x^2 - 2$

   $f^{'''}(x) = 60x^2 - 72x$

   $f^{(4)}(x) = 120x - 72$

   $f^{(5)}(x) = 120$

   - Posmatrajmo prvo interval $(-2, -1)$:

     $f(-2) = -62 \neq 0$, $f(-1) = 13$.

     Sada ćemo uočiti promene znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
-2	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

     $N(-2) = 5$

     $N(-1) = 4$

     $N(-2) - N(-1) = 1$.
     Dakle, polinom $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-2, -1)$.

   - Pogledajmo sada interval $(1, 2)$:

     $f(1) = 7 \neq 0$, $f(2) = -14 \neq 0$.

     Uočimo promene znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
1	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
2	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

$N(1) = 2$

$N(2) = 1$

Kako je $N(1) - N(2) = 1$,
polinom $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$ ima 1 realnu nulu u inervalu $(1, 2)$.

- Pogledajmo promene znaka u intervalu $(3, 4)$:

  $f(3) = -7 \neq 0$, $f(4) = 238 \neq 0$.

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$
3	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
4	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

  $N(3) = 1$

  $N(4) = 0$

  $N(3) - N(4) = 1$,
  pa polinom $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^2 - 4x + 14$ ima 1 realnu nulu u inervalu $(3, 4)$.

5. Odrediti broj realnih nula polinoma
   $f(x) = 16x^6 + 3x^4 - 3x^3 - 142x^2 - 9x - 21$ u intervalima:

   (a) $(-2, -1)$;

   (b) $(1, 2)$.

   Da bi odredili broj realnih nula,posmatraćemo sledeće polinome:

   $f(x) = 16x^6 + 3x^4 - 3x^3 - 142x^2 - 9x - 21$

   $f^{'}(x) = 96x^5 + 12x^3 - 9x^2 - 284x - 9$

   $f^{''}(x) = 480x^4 + 36x^2 - 18x - 284$

   $f^{'''}(x) = 1920x^3 + 72x - 18$

   $f^{(4)}(x) = 5760x^2 + 72$

   $f^{(5)}(x) = 11520x$

   $f^{(6)}(x) = 11520$

(a) $f(-2) = 525 \neq 0$, $f(-1) = -132 \neq 0$

Pogledajmo promenu znaka vrednosti polinoma u tačkama -2 i -1.

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
-1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$N(-2) = 6$

$N(-1) = 5$

Kako je $N(-2) - N(-1) = 1$, polinom $f(x)$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-2, -1)$.

(b) $f(1) = -156 \neq 0$, $f(2) = 441 \neq 0$.

Pogledajmo promenu znaka vrednosti polinoma u tačkama 1 i 2.

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
1	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

$N(1) = 1$
$N(2) = 0$

Kako je $N(1) - N(2) = 1$, polinom $f(x)$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(1, 2)$.

6. Neka je $f(x) = 2x^6 - 7x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 - 5x + 1$. Pokazati:

(a) da se sve realne nule polinoma $f(x)$ nalaze između -1 i $\frac{7}{2}$;

(b) da polinom $f(x)$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(3, \frac{7}{2})$;

(c) da polinom $f(x)$ ima 3 ili 1 realnu nulu u intervalu $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$;

(d) da polinom $f(x)$ ima 2 ili 0 realnih nula u intervalu $(-1, -\frac{1}{2})$.

(a) $f(x)$ možemo zapisati i kao:
$f(x) = 2x^6 + x(x+1)(-7x^3 + 8x^2 - 7x - 5) + 1$.

Za $x < -1$, $f(x) > 0$.
Dakle, za $x < -1$ nema promena znaka vrednosti polinoma, pa realne nule polinoma nisu manje od -1.

Zapišimo sada $f(x)$ kao:

$f(x) = (2x-7)x^5 + (x^2-12)x^2 + (x^2-5)x + 1.$

Za $x > \frac{7}{2}$, $f(x) > 0$.
Dakle, za $x > \frac{7}{2}$ znak vrednosti polinoma se ne menja, pa realne nule polinoma $f(x)$ nisu veće od $\frac{7}{2}$.

Dakle, realne nule moraju biti između -1 i $\frac{7}{2}$.

Da bi odredili broj realnih nula, posmatraćemo promenu znaka vrednosti sledećih polinoma:

$f(x) = 2x^6 - 7x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 - 5x + 1$

$f^{'}(x) = 12x^5 - 35x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 24x - 5$

$f^{''}(x) = 60x^4 - 140x^3 + 12x^2 + 6x - 24$

$f^{'''}(x) = 240x^3 - 420x^2 + 24x + 6$

$f^{(4)}(x) = 720x^2 - 840x + 24$

$f^{(5)}(x) = 1440x - 840$

$f^{(6)}(x) = 1440$

(b) $f(3) = -257 \neq 0$, $f(\frac{7}{2}) = \frac{471}{16} \neq 0$.

Posmatrajmo sada promenu znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
3	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{7}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

$N(3) = 1$

$N(\frac{7}{2}) = 0$

$N(3) - N(\frac{7}{2}) = 1$.
Dakle, polinom $f(x) = 2x^6 - 7x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 - 5x + 1$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(3, \frac{7}{2})$.

(c) $f(\frac{1}{8}) = \frac{49674}{262144} \neq 0$, $f(\frac{1}{4}) = -\frac{4042}{4096} \neq 0$.

Posmatrajmo sada promenu znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
$\frac{1}{8}$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{1}{4}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

$N(\dfrac{1}{8}) = 4$

$N(\frac{1}{4}) = 1$

$N(\frac{1}{8}) - N(\frac{1}{4}) = 3.$
Dakle, polinom $f(x) = 2x^6 - 7x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 - 5x + 1$ ima 3 ili 1 realnu nulu u intervalu $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$.

(d) $f(-1) = 3 \neq 0$, $f(-\frac{1}{2}) = \frac{11}{16} \neq 0$.

Posmatrajmo sada promenu znaka:

x	$f(x)$	$f^{'}(x)$	$f^{''}(x)$	$f^{'''}(x)$	$f^{(4)}(x)$	$f^{(5)}(x)$	$f^{(6)}(x)$
-1	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$-\frac{1}{2}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

$N(-1) = 6$

$N(-\frac{1}{2}) = 4$

$N(-1) - N(-\frac{1}{2}) = 2.$
Polinom $f(x) = 2x^6 - 7x^5 + x^4 + x^3 - 12x^2 - 5x + 1$ ima 2 realne nule ili ih nema u intervalu $(-1, -\frac{1}{2})$.

7 Šturmova teorema

Još jedan način rešavanja problema određivanja broja realnih nula polinoma nam je dao matematičar Charles Sturm [3].

Da bi odredili broj realnih nula polinoma, posmatraćemo dva slučaja:

- Ako polinom ima jednostruke realne nule u datom intervalu.
- Ako polinom ima višestruke realne nule u datom intervalu.

Pokazaćemo da se drugi slučaj može svesti na prvi.

Neka polinom $F(x)$ ima međusobno različite realne nule $\alpha, \beta, \gamma \dots$ sa višestrukostima $a, b, c, \dots$, tako da je $F(x) = (x-\alpha)^a (x-\beta)^b (x-\gamma)^c \dots$.

[3] Charles Sturm (1803 – 1855), francuski matematičar

Posmatrajmo sada

$\frac{F^{'}(x)}{F(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)} + \frac{b}{(x-\beta)} + \frac{c}{(x-\gamma)} + \dots$

$\frac{F^{'}(x)}{F(x)} = \frac{a(x-\beta)(x-\gamma)\cdots+b(x-\alpha)(x-\gamma)\cdots+c(c-\alpha)(x-\beta)\dots}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots}.$

Označimo:

$p(x) = a(x-\beta)(x-\gamma)\cdots + b(x-\alpha)(x-\gamma)\cdots + c(x-\alpha)(x-\beta)\dots$

$q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots$

$G(x) = \frac{F(x)}{q(x)} = (x-\alpha)^{a-1}(x-\beta)^{b-1}(x-\gamma)^{c-1}\dots$

Tada će biti: $F(x) = G(x)q(x)$ i $F^{'}(x) = F(x)\frac{p(x)}{q(x)} = G(x)p(x)$.

S obzirom da $p(x)$ i $q(x)$ nemaju zajedničkog delioca, sledi da je $G(x)$ najveći zajednički delilac za $F(x)$ i $F^{'}(x)$. On se lako može odrediti Euklidovim agoritmom, pa se može smatrati poznatim, a onda se i $q(x)$ može smatrati poznatim.

Jednačina $F(x) = 0$ je ekvivalentna sa $q(x) = 0$ i $G(x) = 0$, od kojih prva jednačina ima jednostruka rešenja, a druga se može na isti način svesti kao i $F(x) = 0$.

Dakle, polinom sa višestrukim nulama se uvek može svesti na polinom (sa poznatim koeficijentima) sa jednostrukim nulama. Zato nije neophodno rešavati ovaj problem u drugom slučaju jer se svodi na prvi.

Neka je $f(x)$ polinom čije su nule jednostruke. Tada se polinom $f^{'}(x)$ ne anulira ni za jednu nulu polinoma $f(x)$, pa je najveći zajednički delilac za polinome $f(x)$ i $f^{'}(x)$ neka konstanta k različita od nule. Koristeći Euklidov algoritam odredićemo najveći zajednički delilac za $f(x)$ i $f^{'}(x)$. Radi jednostavnosti,sa $f_0(x)$ i $f_1(x)$ označićemo $f(x)$ i $f^{'}(x)$, označićemo količnike nastale iz deljenja sa ostatkom sa $q_0(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x), \dots$ i ostatke sa $-f_2(x)$, $-f_3(x), \dots$

Dobićemo algoritam:

$$f_0(x) = q_0(x)f_1(x) - f_2(x)$$

$$f_1(x) = q_1(x)f_2(x) - f_3(x)$$

$$f_2(x) = q_2(x)f_3(x) - f_4(x)$$

itd.

Ovaj algoritam se završava u konačnom broju koraka.

Niz polinoma $f_0(x), f_1(x), ..., f_m(x)$ se zove Šturmov niz polinoma, pri čemu je $f_m(x) \neq f_{m+1}(x)$, $f_{m+1}(x) = 0$. Pojedinačan polinom iz niza ćemo nazvati Šturmov polinom.

Osobine Šturmovog niza:

(1) Dva susedna polinoma nisu istovremeno nula u bilo kojoj tački intervala.

Prvo ćemo dokazati da polinomi $f_0(x)$ i $f_1(x)$ nemaju zajedničke nule.

Ako je d nula polinoma $f(x)$, tada možemo $f(x)$ predstaviti kao
$f(x) = (x - d)g(x)$, $g(d) \neq 0$.
$f^{'}(x) = g(x) + (x - d)g^{'}(x)$
$f^{'}(d) = g(d) + (d - d)g^{'}(d) = g(d) \neq 0$
Dakle, $f_0(x)$ i $f_1(x)$ nemaju zajedničke nule.

Uočimo da je $f_{i-1}(x) = q_{i-1}(x)f_i(x) - f_{i+1}(x)$.
Ako $f_i(x)$ i $f_{i+1}(x)$ imaju zajedničku nulu, onda će ta nula biti i nula polinoma $f_{i-1}(x)$, pa će biti zajednička nula svih polinoma. Pokazali smo da $f_0(x)$ i $f_1(x)$ nemaju zajedničku nulu, pa je to nemoguće.

(2) U nula tački Šturmovog polinoma, dva njegova susedna polinoma su različitog znaka.

Važi da je $f_{i-1}(x) = q_{i-1}(x)f_i(x) - f_{i+1}(x)$.

Neka je d nula polinoma $f_i(x)$, $0 < i < m$.
Zamenom tačke d, biće:

$f_{i-1}(d) = q_{i-1}(d)f_i(d) - f_{i+1}(d)$
$f_{i-1}(d) = -f_{i+1}(d)$

Dakle, $f_{i-1}(x)$ i $f_{i+1}(x)$ su različitog znaka.

(3) U dovoljno maloj okolini nula tačke polinoma $f_0(x)$, $f_1(x)$ je svuda veća od nule ili je svuda manja od nule.

Neka je d nula polinoma $f(x)$. Tada možemo $f(x)$ zapisati kao
$f(x) = (x - d)g(x)$, $g(x) \neq 0$. Tada je $f^{'}(x) \neq 0$. g je neprekidna i stoga ima konstantan znak (znak od $g(d)$) u maloj okolini tačke d.

Neka je x proizvoljna tačka iz intervala. Posmatraćemo znakove vrednosti $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ i dobićemo Šturmov znakovni lanac (pretpostavimo da nijedna od $m+1$ funkcija nije nula). Znakovni lanac će sadržati znakovne sekvence $++$, $--$ ili znakovne promene $+-$, $-+$.

Posmatraćemo broj znakovnih promena $S(x)$ u znakovnom lancu i promene kojima se $S(x)$ podvrgava kada x prolazi kroz interval. Promena može da se pojavi jedino ako jedna ili više Šturmovih polinoma menja znak, npr. prelazi iz negativnih (pozitivnih) vrednosti kroz nulu do pozitivnih (negativnih) vrednosti. Posmatraćemo promene na $S(x)$ koje nastaju pri prolasku polinoma $f_i(x)$ kroz nulu. $i < m$ s obzirom da je f_m konstantan ne-nula polinom.

Neka je k tačka u kojoj je $f_i(x)$ nula, j i l tačke, tako da je $j < k < l$ i tako da na intervalu $[j, l]$ važe sledeća tvrđenja:

(a) $f_i(x) \neq 0$, osim u k;

(b) f_{i+1} ne menja znak;

(c) ako je $i > 0$, f_{i-1} ne menja znak.

U slučaju da je $i > 0$, posmatraćemo trojku f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, a ako je $i = 0$, posmatraćemo par f_0, f_1.

U slučaju trojke, f_{i-1} i f_{i+1} su redom znakova $+$ i $-$, ili znakova $-$ i $+$, u sve tri tačke j, k, l. Kakav god znak da ima f_i u ovim tačkama, trojka će imati samo jednu promenu znaka za svaki od j, k, l. Prolazak polinoma f_i kroz nulu ne utiče na broj znakovnih promena u lancu.

U slučaju para, f_1 ima ili znak $+$ ili znak $-$ u sve tri tačke j, k, l. Ako $f_1(j) > 0$, f_0 je rastuća i $f(j) < f(k) = 0 < f(l)$. U drugom slučaju $f(j) > f(k) = 0 > f(l)$. U oba slučaja je izgubljena jedna znakovna promena.

Dakle, Šturmov znakovni lanac podvrgava se promeni broja znakovnih promena $S(x)$ samo pri prolasku x kroz nula-tačku za $f(x)$ i posebno, lanac tada gubi tačno jednu promenu znaka. Prema tome, ako x prolazi kroz interval (čiji krajevi nisu rešenja za $f(x)$) sa leva na desno, znakovni lanac gubi tačno onoliko znakovnih promena koliko je nula polinoma $f(x)$ u intervalu.

Teorema 8. ***Šturmova teorema*** *Neka je $f(x)$ polinom bez višestrukih nula i $f_0(x), f_1(x), ..., f_m(x)$ Šturmov niz polinoma $f(x)$. Neka je (a, b) interval tako* *da je $f_i(a) \neq 0$, $f_i(b) \neq 0$, za bilo koje i. Označimo sa $S(x)$ broj promena znaka u nizu $f_0(x), f_1(x), ..., f_m(x)$. Tada je broj realnih nula polinoma $f(x)$ na intervalu (a,b), $a < b$, jednak $S(a) - S(b)$.*

Da bi rešili određene zadatke, moramo znati sledeće:

Neka je $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.

Limes $f(x)$ kada x teži ∞ ili $-\infty$, zavisi od vodećeg koeficijenta.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & , a_n > 0 \\ -\infty & , a_n < 0 \end{cases}$$

Neka je n paran broj.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & , a_n > 0 \\ -\infty & , a_n < 0 \end{cases}$$

Neka je n neparan broj.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty & , a_n > 0 \\ \infty & , a_n < 0 \end{cases}$$

8 Primena Šturmove teoreme na zadatke

Primeri zadataka koji se mogu rešiti primenom Šturmove teoreme:

1. Šturmovom teoremom pokazati da polinom $f(x) = x^3 - x + 1$ ima jednu realnu nulu u intervalu $(-2, -1)$?

   Formiraćemo Šturmov niz na sledeći način:

   $f_0(x) = f(x)$

   $f_0(x) = x^3 - x + 1$

   $f_1(x) = f_0'(x)$

   $f_1(x) = 3x^2 - 1$

Iz formule $f_0(x) = q_0(x)f_1(x) - f_2(x)$ ćemo dobiti količnik $q_0(x)$ i ostatak $f_2(x)$.

$$\begin{array}{llll} (x^3 - x + 1): & (3x^2 - 1) & = & \frac{1}{3}x \\ -(x^3 - \frac{1}{3}x) & & & \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-- & & & \\ \quad -\frac{2}{3}x + 1 & & & \end{array}$$

Količnik je $q_0(x) = \frac{1}{3}x$.

Ostatak je $-\frac{2}{3}x + 1$.

Kako je $f_0(x) = q_0(x) \cdot f_1(x) - f_2(x)$, biće

$x^3 - x + 1 = \frac{1}{3}x(3x^2 - 1) - (\frac{2}{3}x - 1)$.

Dakle, $f_2(x) = \frac{2}{3}x - 1$.

$f_3(x)$ ćemo dobiti na sličan način.

Važi da je $f_1(x) = q_1(x)f_2(x) - f_3(x)$.

$$\begin{array}{llll} (3x^2 - 1): & (\frac{2}{3}x - 1) & = & \frac{9}{2}x + \frac{27}{4} \\ -(3x + \frac{9}{2}) & & & \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-- & & & \\ \quad \frac{9}{2}x - 1 & & & \\ \quad -(\frac{9}{2}x - \frac{27}{4}) & & & \\ \quad -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-- & & & \\ \qquad \frac{23}{4} & & & \end{array}$$

Dobili smo: $3x^2 - 1 = (\frac{9}{2}x + \frac{27}{4})(\frac{2}{3}x - 1) - (-\frac{23}{4})$.

Dakle, $q_1(x) = \frac{9}{2}x + \frac{27}{4}$

$f_3(x) = -\frac{23}{4}$

$f_3(x)$ je konstanta, pa prekidamo algoritam.

Dobili smo Šturmov niz:

$f_0(x) = x^3 - x + 1$

$f_1(x) = 3x^2 - 1$

$f_2(x) = \frac{2}{3}x - 1$

$f_3(x) = -\frac{23}{4}$

Sada ćemo pogledati znak polinoma u tačkama -2 i -1.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
-2	$-$	$+$	$-$	$-$
-1	$+$	$+$	$-$	$-$

$S(-2) = 2$

$S(-1) = 1$

Kako je $S(-2) - S(2) = 1$, polinom $f(x) = x^3 - x + 1$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-2, -1)$.

2. Šturmovom teoremom pokazati da polinom $f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 6x - 2$ ima po 1 realnu nulu u intervalima:

(a) $(-3, -2)$;
(b) $(-1, 0)$;
(c) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Da bi videli koliko polinom $f(x)$ ima realnih nula na datim inetrvalima, prvo ćemo formirati Šturmov niz.

Sa $f_0(x)$ ćemo obeležiti polinom $f(x)$.
$f_0(x) = f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 6x - 2$

$f_1(x) = f_0^{'}(x)$

$f_1(x) = 9x^2 + 10x - 6$

Da bi odredili sledeći član niza, odredićemo količnik pri deljenju polinoma $f_0(x)$ polinomom $f_1(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(3x^3 + 5x^2 - 6x - 2) : \quad (9x^2 + 10x - 6) \quad = \quad \frac{1}{3}x + \frac{5}{27} \\
-(3x^3 + \frac{10}{3}x^2 - 2x) \\
\quad - - - - - - - - \\
\qquad \frac{5}{3}x^2 - 4x - 2 \\
\qquad -(\frac{5}{3}x^2 + \frac{50}{27}x - \frac{10}{9}) \\
\qquad - - - - - - - - \\
\qquad\qquad -\frac{158}{27}x - \frac{8}{9}
\end{array}
$$

Dobili smo $3x^3+5x^2-6x-2 = (\frac{1}{3}x+\frac{5}{27})(9x^2+10x-6)-(\frac{158}{27}x+\frac{8}{9})$.
$q_0(x) = \frac{1}{3}x+\frac{5}{27}$
$f_2(x) = \frac{158}{27}x+\frac{8}{9}$

Iz formule $f_1(x) = q_1(x)\cdot f_2(x) - f_3(x)$ ćemo naći $f_3(x)$.

$$\begin{array}{llll}
(9x^2+10x-6): & (\frac{158}{27}x+\frac{8}{9}) & = & \frac{243}{158}x+\frac{9207}{6241} \\
-(9x^2+\frac{108}{79}x) & & & \\
------- & & & \\
\quad\frac{682}{79}x-6 & & & \\
\quad-(\frac{682}{79}x+\frac{8184}{6241}x) & & & \\
\quad------- & & & \\
\qquad -\frac{45630}{6241} & & &
\end{array}$$

Vidimo da je $9x^2+10x-6 = (\frac{243}{158}x+\frac{9207}{6241})\cdot(\frac{158}{27}x+\frac{8}{9})-\frac{45630}{6241}$.

Dobili smo da je $f_3(x) = \frac{45630}{6241}$.
$f_3(x)$ je konstanta, pa će to biti poslednji član niza.

Šturmov niz:

$f_0(x) = f(x) = 3x^3+5x^2-6x-2$
$f_1(x) = 9x^2+10x-6$
$f_2(x) = \frac{158}{27}x+\frac{8}{9}$
$f_3(x) = \frac{45630}{6241}$

(a) Broj realnih nula u interavalu $(-3,-2)$:

Posmatraćemo promenu znaka polinoma, članova Šturmovog niza u tačkama -3 i -2.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
-3	$-$	$+$	$-$	$+$
-2	$+$	$+$	$-$	$+$

$S(-3) = 3$
$S(-2) = 2$

Kako je $S(-3)-S(-2) = 1$, polinom $f(x) = f(x) = 3x^3+5x^2-6x-2$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-3,-2)$.

(b) Broj realnih nula u intervalu $(-1, 0)$:

Pogledajmo promenu znaka polinoma $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ i $f_3(x)$ u tačkama -1 i 0:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
-1	$+$	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$-$	$+$	$+$

$S(-1) = 2$

$S(0) = 1$

Kako je $S(-1) - S(0) = 1$, polinom $f(x) = f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 6x - 2$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(-1, 0)$.

(c) Broj realnih nula u intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$:

Pogledajmo promenu znaka polinoma $f_0(x), f_1(x), f_2(x)$ i $f_3(x)$ u tačkama $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{2}$:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$\frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\frac{3}{2}$	$+$	$+$	$+$	$+$

$S(\frac{1}{2}) = 1$

$S(\frac{3}{2}) = 0$

Kako je $S(\frac{1}{2}) - S(\frac{3}{2}) = 1$, polinom $f(x) = f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 6x - 2$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

3. Šturmovom teoremom pokazati da polinom
$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ ima po jednu realnu nulu u intervalima:

(a) $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$;

(b) $(\frac{3}{2}, 2)$.

Prvo ćemo formirati Šturmov niz.

Sa $f_0(x)$ obeležimo polinom $f(x)$, a sa $f_1(x)$ prvi izvod polinoma f po promenljivoj x.

$f_0(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$

$f_1(x) = f_0^{'}(x)$

$f_1(x) = 4x^3 - 6x + 1$

Važi da je $f_0(x) = q_0(x)f_1(x) - f_2(x)$.

$$\begin{array}{rcl} (4x^4 + 2x^2 - 1): & (16x^3 + 4x) & = \quad \frac{1}{4}x \\ -(4x^4 + 1) & & \\ -------- & & \\ 2x^2 - 2 & & \end{array}$$

Dobili smo da je $4x^4 + 2x^2 - 1 = \frac{1}{4}x(16x^3 + 4x) - (-2x^2 + 2)$.

Dakle, $q_0(x) = \frac{1}{4}x$ i $f_2(x) = -2x^2 + 2$.

Na sličan načina ćemo naći ostatak $f_3(x)$.

$$\begin{array}{rcl} (16x^3 + 4x): & (-2x^2 + 2) & = \quad -8x \\ -(16x^3 - 16x) & & \\ -------- & & \\ 20x & & \end{array}$$

$f_2(x) = q_2(x)f_1(x) - f_3(x)$ Kako je $16x^3 + 4x = -8x(-2x^2 + 2) - (-20x)$, $q_2(x) = -8x$ i $f_3(x) = -20x$.

Važi da je $f_3(x) = q_3(x)f_2(x) - f_4(x)$.

$$\begin{array}{rcl} (-2x^2 + 2): & (-20x) & = \quad \frac{1}{10}x \\ -(-2x^2) & & \\ -------- & & \\ 2 & & \end{array}$$

Dobili smo da je $-2x^2 + 2 = \frac{1}{10}x(-20x) - (-2)$,

pa je $q_2(x) = \frac{1}{10}x$ i $f_4(x) = -20$.

$f_4(x)$ je konstasnta, pa će to biti poslednji član Šturmovog niza.

Šturmov niz:

$f_0(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$

$f_1(x) = 4x^3 - 6x + 1$

$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 2$

$f_4(x) = -\frac{8303}{3844}$

(a) Broj realnih nula u intervalu $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$:

Posmatrajmo promenu znaka članova Šturmovog niza u tačkama $-\frac{5}{2}$ i $-\frac{3}{2}$:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$-\frac{5}{2}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
$-\frac{3}{2}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$

$S(-\frac{5}{2}) = 3$

$S(-\frac{3}{2}) = 2$

Kako je $S(-\frac{5}{2}) - S(-\frac{3}{2}) = 1$, polinom $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ ima 1 realnu nulu u inetarvalu $(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2})$.

(b) Broj realnih nula u interavalu $(\frac{3}{2}, 2)$:

Posmatrajmo promenu znaka članova Šturmovog niza u tačkama $\frac{3}{2}$ i 2:

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$-\frac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$

$S(\frac{3}{2}) = 2$

$S(2) = 1$

Kako je $S(\frac{3}{2}) - S(2) = 1$, polinom $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2$ ima 1 realnu nulu u intervalu $(\frac{3}{2}, 2)$.

4. Šturmovom metodom odrediti broj realnih nula polinoma $f(x) = -4x^4 - 2x^2 + 1$ u intervalu $(-\infty, \infty)$.

Najpre ćemo odrediti članove Štrumovog niza.

Obeležimo sa $f_0(x)$ polinom $f(x)$.
$f_0(x) = -4x^4 - 2x^2 + 1$

Sa $f_1(x)$ obeležimo prvi izvod polinoma $f_0(x)$ po promenljivoj x.
$f_1(x) = f_0^{'}(x)$

$f_1(x) = -16x^3 - 4x$

Da bi odredili polinom $f_2(x)$ mora važiti $f_0(x) = q_0(x)f_1(x) - f_2(x)$, pri čemu je $q_0(x)$ količnik deljenja polinoma $f_0(x)$ polinomom $f_1(x)$.

Odredimo sada količnik $q_0(x)$.

$$
\begin{array}{lcccc}
(-4x^4 - 2x^2 + 1): & (-16x^3 - 4x) & = & \frac{1}{4}x \\
-(-4x^4 - 1) & & & \\
-------- & & & \\
\quad -2x^2 + 2 & & &
\end{array}
$$

Dobili smo da je

$-4x^4 - 2x^2 + 1 = \frac{1}{4}x(-16x^3 - 4x) - (2x^2 - 2)$.

$q_0(x) = \frac{1}{4}x$

$f_2(x) = 2x^2 - 2$

Sledeći član niza ćemo naći na isti način.
Dakle, mora da važi $f_1(x) = q_1(x)f_2(x) - f_3(x)$, gde je $q_1(x)$ količnik deljenja polinoma $f_1(x)$ polinomom $f_2(x)$.

$$
\begin{array}{lcccc}
(-16x^3 - 4x): & (2x^2 - 2) & = & -8x \\
-(-16x^3 + 16x) & & & \\
-------- & & & \\
\quad -4x - 16 & & &
\end{array}
$$

Dobili smo da je

$-16x^3 - 4x = -8x(2x^2 - 2) - (4x + 16)$.

$q_1(x) = -8x$

$f_3(x) = 4x + 16$

Za sledeći član Šturmovog niza mora da važi $f_2(x) = q_2(x)f_3(x) - f_4(x)$, pri čemu je $q_2(x)$ količnik deljenja polinoma $f_2(x)$ polinomom $f_3(x)$.

$$
\begin{array}{llll}
(2x^2-2): & (4x+16) & = & \frac{1}{2}x+2 \\
-(2x^2+8x) & & & \\
--------- & & & \\
\quad 8x-2 & & & \\
\quad -(8x+32) & & & \\
\quad --------- & & & \\
\qquad -34 & & &
\end{array}
$$

Dobili smo da je

$2x^2 - 2 = (\frac{1}{2}x + 2)(4x + 16) - 34.$

$q_2(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$f_4(x) = 34$

Polinom $f_4(x)$ je konstantan, pa će to biti poslednji član Šturmovog niza.

Članovi Šturmovog niza:

$f_0(x) = -4x^4 - 2x^2 + 1$

$f_1(x) = -16x^3 - 4x$

$f_2(x) = 2x^2 - 2$

$f_4(x) = 34$

Da bi odredili znak vrednosti članova Šturmovog niza u tačkama $-\infty$ i ∞, posmatraćemo limes tih polinoma u $-\infty$ i ∞.

- Znak polinoma $f_0(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  $f_0(x) = -4x^4 - 2x^2 + 1$

  Polinom $f_0(x)$ je parnog stepena i vodeći član je negativan, pa je

$$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f_0(x) = -\infty$$

Koristićemo kraći zapis: $f_0(-\infty) = -\infty$, $f_0(\infty) = -\infty$.

Dakle, znak polinoma $f_0(x)$ u $-\infty$ i u ∞ je negativan.

- Znak polinoma $f_1(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  $f_1(x) = -16x^3 - 4x$

  Polinom $f_1(x)$ je neparnog stepena i vodeći član je negativan, pa je

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x) = -\infty$$

  Koristićemo kraći zapis: $f_1(-\infty) = \infty$, $f_1(\infty) = -\infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_1(x)$ u $-\infty$ je pozitivan, a u ∞ je negativan.

- Znak polinoma $f_2(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  Polinom $f_2(x) = 2x^2 - 2$ je parnog stepena i vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

$$\lim_{x\to-\infty} f_2(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis: $f_2(-\infty) = \infty$, $f_2(\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_2(x)$ u $-\infty$ i u ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_3(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  Polinom $f_3(x) = 4x + 16$ je neparnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan pa je

$$\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f_3(x) = \infty$$

Koristićemo kraći zapis: $f_3(-\infty) = -\infty$, $f_3(\infty) = \infty$.

Dakle, znak polinoma $f_3(x)$ u $-\infty$ je negativan, a u ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_4(x) = 34$ je svuda pozitivan.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
∞	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

$S(-\infty) = 3$

$S(\infty) = 1$

Kako je $S(-\infty) - S(\infty) = 2$, polinom $f(x) = -4x^4 - 2x^2 + 1$ ima dve realne nule.

5. Odrediti broj realnih nula polinoma $f(x) = x^5 - 3x - 1$ u intervalima:

(a) $(-\infty, 0)$;

(b) $(0, \infty)$.

Prvo ćemo odrediti polinome, članove Šturmovog niza.

Obeležimo sa $f_0(x)$ polinom $f(x)$.

$f_0(x) = x^5 - 3x - 1$

Sa $f^{'}(x)$ obeležimo prvi izvod polinoma $f_0(x)$ po promenljivoj x.

$f'(x) = f_0^{'}(x)$

$f^{'}(x) = 5x^4 - 3$

Za sledeći član niza mora da važi:

$f_0(x) = q_0(x)f_1(x) - f_2(x)$.

Dakle, prvo ćemo podeliti polinom $f_0(x)$ polinomom $f_1(x)$.

$$
\begin{array}{llll}
\quad (x^5 - 3x - 1): & (5x^4 - 3) & = & \frac{1}{5}x \\
-(x^5 - \frac{3}{5}x) & & & \\
-------- & & & \\
\quad -\frac{12}{5}x - 1 & & &
\end{array}
$$

Dobili smo da je količnik $q_0(x) = \frac{1}{5}x$.

Kako je

$x^5 - 3x - 1 = \frac{1}{5}x(5x^4 - 3) - (\frac{12}{5}x + 1)$,

polinom $f_2(x)$ će biti $f_2(x) = \frac{12}{5}x + 1$.

Polinom $f_3(x)$ ćemo naći na sledeći način:

$f_1(x) = q_1(x)f_2(x) - f_3(x)$.

Prvo ćemo podeliti polinom $f_1(x)$ polinomom $f_2(x)$.

$$
\begin{array}{l}
\quad (5x^4 - 3) : \quad (\frac{12}{5}x + 1) \qquad\qquad\qquad\qquad = \frac{25}{12}x^3 + \frac{125}{48}x^2 - \frac{625}{576}x + \frac{3125}{6912} \\
-(5x^4 - \frac{25}{4}x^3) \\
-------- \\
\qquad \frac{25}{4}x^3 - 3 \\
\qquad -(\frac{25}{4}x^3 + \frac{125}{48}x^2) \\
\qquad -------- \\
\qquad\qquad\qquad -\frac{125}{48}x^2 - 3 \\
\qquad\qquad\qquad -(-\frac{125}{48}x^2 - \frac{625}{576}) \\
\qquad\qquad\qquad -------- \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{625}{576}x - 3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -(\frac{625}{576}x + \frac{3125}{6912}) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -------- \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{23861}{6912}
\end{array}
$$

Dobili smo da je količnik $q_1(x) = \frac{25}{12}x^3 + \frac{125}{48}x^2 - \frac{625}{576}x + \frac{3125}{6912}$.

Dakle, važi da je

$5x^4 - 3 = (\frac{25}{12}x^3 + \frac{125}{48}x^2 - \frac{625}{576}x + \frac{3125}{6912})(\frac{12}{5}x + 1) - \frac{23861}{6912}$.

Odavde sledi da je $f_3(x) = \frac{23861}{6912}$.

Kako je polinom $f_3(x)$ konstantan, on će biti poslednji član našeg niza.

Članovi Šturmovog niza su:

$f_0(x) = x^5 - 3x - 1$

$f_1(x) = 5x^4 - 3$

$f_2(x) = \frac{12}{5}x + 1$

$f_3(x) = \frac{23861}{6912}$

(a) Odredićemo broj realnih nula u intervalu $(-\infty, 0)$.

Da bi odredili znak vrednosti članova Šturmovog niza u tački $-\infty$ posmatraćemo limes tih polinoma u tački $-\infty$.

- Znak polinoma $f_0(x)$ u tački $-\infty$:

  $f_0(x) = x^5 - 3x - 1$

  Polinom $f_0(x)$ je neparnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x\to-\infty} f_0(x) = -\infty$$

  Koristićemo kraći zapis $f_0(-\infty) = -\infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_0(x)$ u tački $-\infty$ je negativan.

- Znak polinom $f_1(x)$ u tački $-\infty$:

  $f_1(x) = 5x^4 - 3$

  Polinom $f_1(x)$ je parnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis $f_1(-\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_1(x)$ u tački $-\infty$ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_2(x)$ u tački $-\infty$:

  $f_2(x) = \frac{12}{5}x + 1$

  Polinom $f_2(x)$ je neparnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$$

Koristićemo kraći zapis $f_1(-\infty) = -\infty$.

Dakle, znak polinoma $f_1(x)$ u tački $-\infty$ je negativan.

- Znak polinoma $f_3(x)$ je svuda pozitivan.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
0	$-$	$-$	$+$	$+$

$S(-\infty) = 3$

$S(0) = 1$

Kako je $S(-\infty) - S(0) = 2$, polinom $f(x) = x^5 - 3x - 1$ ima dve realne nule u intervalu $(-\infty, 0)$.

(b) Posmatrajmo sada interval $(0, \infty)$.

Da bi odredili znak vrednosti članova Šturmovog niza, posmatraćemo limes polinoma u tački ∞.

- Znak polinoma $f_0(x)$ u tački ∞:

  $f_0(x) = x^5 - 3x - 1$

  Polinom $f_0(x)$ je neparnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

$$\lim_{x\to\infty} f_0(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis $f_0(\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_0(x)$ u tački ∞ je pozitivan.

- Znak polinom $f_1(x)$ u tački ∞:

  $f_1(x) = 5x^4 - 3$

  Polinom $f_1(x)$ je parnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \infty$$

Koristićemo kraći zapis $f_1(\infty) = \infty$.

Dakle, znak polinoma $f_1(x)$ u tački ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_2(x)$ u tački ∞:

  $f_2(x) = \frac{12}{5}x + 1$

  Polinom $f_2(x)$ je neparnog stepena, vodeći koeficijent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x\to\infty} f_2(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis $f_2(\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_2(x)$ u tački ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_3(x)$ je svuda pozitivan.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	$-$	$-$	$+$	$+$
∞	$+$	$+$	$+$	$+$

$S(0) = 1$

$S(\infty) = 0$

Kako je $S(0) - S(\infty) = 1$, polinom $f(x) = x^5 - 3x - 1$ ima jednu realnu nulu u intervalu $(0, \infty)$.

6. Odrediti broj realnih nula i broj nula koje nisu realne polinoma $f(x) = x^5 - ax - b$ u intervalu $(-\infty, \infty)$ gde je $a > 0, b > 0$ i $4^4a^5 > 5^5b^4$.

   Odredimo prvo vrednost polinoma

   Sada ćemo odrediti članove Šturmovog niza.

   Sa $f_0(x)$ obeležimo polinom $f(x)$, a sa $f_1(x)$ njen prvi izvod.

   $f_0(x) = x^5 - ax - b$

   $f_1(x) = 5x^4 - a$

   Za sledeći član niza mora da važi $f_0(x) = q_0(x)f_1(x) - f_2(x)$.

Dakle, podelićemo polinom $f_0(x)$ polinomom $f_1(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^5 - ax - b) : \quad (5x^4 - a) \quad = \frac{1}{5}x \\
-(x^5 + \frac{a}{5}x) \\
- - - - - - - - - \\
-\frac{4a}{5}x - b
\end{array}
$$

Dobili smo da je količnik $q_0(x) = \frac{1}{5}x$.

Kako je $x^5 - ax - b = \frac{1}{5}x(5x^4 - a) - (\frac{4a}{5}x + b)$,
polinom $f_2(x) = \frac{4a}{5}x$.

Za polinom $f_3(x)$ mora da važi $f_1(x) = q_1(x)f_2(x) - f_3(x)$.

Podelićemo polinom $f_1(x)$ polinomom $f_2(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(5x^4 - a) : \quad (\frac{4a}{5}x + b) \qquad = \frac{25}{4a}x^3 - \frac{125b}{16a^2}x^2 + \frac{625b^2}{64a^3}x - \frac{3125b^3}{256a^4} \\
-(5x^4 - \frac{25b}{4a}x^3) \\
- - - - - - - - - \\
-\frac{25b}{4a}x^3 - a \\
-(\frac{25b}{4a}x^3 + \frac{125b^2}{16a^2}x^2) \\
- - - - - - - - - \\
\frac{125b^2}{16a^2}x^2 - a \\
-(\frac{125b^2}{16a^2}x^2 + \frac{625b^3}{64a^2=3}x) \\
- - - - - - - - - \\
-\frac{625b^3}{64a^3}x - a \\
-(-\frac{625b^3}{64a^3}x + \frac{3125b^4}{256a^4}) \\
- - - - - - - - - \\
\frac{3125b^4}{256a^4} - a
\end{array}
$$

Dobili smo da je količnik $q_1(x) = \frac{25}{4a}x^3 - \frac{125b}{16a^2}x^2 + \frac{625b^2}{64a^3}x - \frac{3125b^3}{256a^4}$.

$(5x^4 - a) : (\frac{4a}{5}x + b) = \frac{25}{4a}x^3 - \frac{125b}{16a^2}x^2 + \frac{625b^2}{64a^3}x - \frac{3125b^3}{256a^4} - \frac{64a^5 - 3125b^4}{256a^4}$.

Sledi da je $f_3(x) = \frac{64a^5 - 3125b^4}{256a^4}$.

Kako je f_3 konstantan polinom, on će biti poslednji član Šturmovog niza.

Članovi Šturmovog niza:

$f_0(x) = x^5 - a - -b$

$f_1(x) = 5x^4 - a$

$f_2(x) = \frac{4a}{5}x + b$

$f_3(x) = \frac{256a^5 - 3125b^4}{64a^4}$

Da vi odredili znak vrednosti članova Šturmovog niza u tačkama $-\infty$ i ∞, posmatraćemo limes tih polinoma u tačkama $-\infty$ i ∞.

- Znak polinoma $f_0(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  $f_0(x) = x^5 - ax - b$

  Polinom $f_0(x)$ je neparnog stepena, vodeći koefiicjent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x \to -\infty} f_0(x) = -\infty$$

  $$\lim_{x \to \infty} f_0(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis: $f_0(-\infty) = -\infty$, $f_0(\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_0(x)$ u tački $-\infty$ je negativan, a u tački ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_1(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  $f_1(x) = 5x^4 - a$

  Polinom $f_1(x)$ je parnog stepena, vodeći koefiicjent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = \infty$$

  $$\lim_{x \to \infty} f_1(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis: $f_1(-\infty) = \infty$, $f_1(\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_1(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_2(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  $f_2(x) = \frac{4a}{5}x + b$

  Polinom $f_2(x)$ je neparnog stepena, vodeći koefiicjent je pozitivan, pa je

  $$\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = -\infty$$

  $$\lim_{x \to \infty} f_2(x) = \infty$$

  Koristićemo kraći zapis: $f_2(-\infty) = -\infty$, $f_2(\infty) = \infty$.

  Dakle, znak polinoma $f_2(x)$ u tački $-\infty$ je negativan, a u ∞ je pozitivan.

- Znak polinoma $f_3(x)$ u tačkama $-\infty$ i ∞:

  $f_3(x) = \frac{256a^5 - 3125b^4}{64a^4}$

  Iz uslova zadatka da je $4^4a^5 > 5^5b^4$ i $a > 0, b > 0$, sledi da je polinom $f_3(x)$ svuda pozitivan.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
∞	$+$	$+$	$-$	$+$

$S(-\infty) = 3$

$S(\infty) = 0$

Kako je $S(-\infty) - S(\infty) = 0$, polinom $f(x) = x^5 - ax - b$ ima 3 realne nule, odakle sledi da dve nisu realne.

Literatura

[1] Victor V. Prasolov, Algorithms and Computation in Mathematics, University of Moscow, Department of Mathematics, 2001.

[2] EJ. Barbeau, Polynomials, University of Toronto, Department of Mathematics, 1989.

[3] N. B. Conkwright, An Elementary Proof of the Budan-Fourier Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. 50, No. 10 (Dec. 1943), pp. 603-605.

[4] H. Dorrie, 1000 Great Problems of Elementary Mathematics - Their History and Solution, translated by D. Antin, Dover 1965.

[5] Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević, Linearna algebra, Niš, 2004.

[6] Stevan Janković, Rešivost algebarskih jednačina, Beograd, 2011.

[7] Dušan Đukić, Polinomi po jednoj promenljivoj.