Univerzitet u Beogradu

Matematički fakultet

Neki poznati algebarski identiteti i njihove primene

Master rad

Student:

Suzana Vukomanović

1124/2018

Mentor:

dr. Aleksandar T. Lipkovski

Beograd, 2019.

Sadržaj

1. Uvod

Pred Vama se nalazi rad koji za cilj ima, ne samo puko izlistavanje, već i dokazivanje, prikaz značaja i primene, kao i kategorizaciju i kratak istorijat algebarskih identiteta koji su zastupljeni u zadacima (regularnim i takmičarskim) za osnovne i srednje škole.

Na početku se nalazi kratko definisanje osnovnih pojmova koji se provlače kroz ceo rad. Naglašavam reč kratko, jer je izbegavana svaka suvišna teorija koja bi skrenula pažnju sa onoga što leži u osnovi ovog rada, a to su algebarski identiteti, jedan od osnova nastave matematike, i jedno od najkorisnijih oruđa koje učenici mogu da primene pri rešavanju zadataka.

Naročito je obraćena pažnja na identitete koji nose imena istaknutih matematičara. Takođe, gde je to bilo moguće uraditi bez preteranih komplikacija, su prikazane geometrijske interpretacije određenih identiteta.

Iskoristila bih priliku da se zahvalim svom mentoru, profesoru Aleksandru Lipkovskom , na svesrdnoj saradnji, podršci i usmeravanju pri pisanju ovog rada, kao i članovima komisije.

Ključne reči: *algebra, identiteti, izrazi, jednakosti, konačne sume, slavni matematičari*

2. Definisanje osnovnih pojmova

Kako su tema ovog rada razni algebarski identiteti, definišimo najpre njihovu osnovu, racionalni algebarski izraz.

Def. 2.1. Racionalni algebarski izraz definišemo na sledeći način:

1. Simboli realnih brojeva (3, $\sqrt{17}$, - $\frac{1}{3}$, 1.23 ...) su racionalni algebarski izrazi;
2. Simboli promenljivih (*x*, *y*, a, *b*, α, β ...) su racionalni algebarski izrazi;
3. Ako su A i B racionalni algebarski izrazi, tada su i $A + B,\ A - B,\ A \cdot B$ i $\frac{A}{B}$ racionalni algebarski izrazi.
4. Svi racionalni algebarski izrazi se dobijaju konačnom primenom pravila 1. 2. i 3.

Primer 2.1. Primeri racionalnih algebarskih izraza.

i) $\frac{1}{7} \cdot \beta + 4 + \sqrt{2}$ *ii)* $\delta - \frac{x}{y}$ *iii)* $x^2 + y^2 + z^2$

iv) $2 \cdot t - 1$ *v)* $-6x + 15$ *vi)* 5

Def 2.2. Izrazi u čijem formiranju ne učestvuje operacija deljenja izrazom koji sadrži promenljive nazivaju se celi racionalni algebarski izrazi, ili polinomi.

Polinomom po jednoj promenljivoj, u ovom slučaju *x*, nazivamo izraz oblika

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$$

Ili, drugačije zapisano

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

gde je *n* prirodan broj ili 0, a a_i realni brojevi koji čine *koeficijente* polinoma. Najveći broj *i* za koji važi $a_i \neq 0$ nazivamo *stepenom* polinoma $P(x)$. Broj a_0 nazivamo *konstantom* ili *slobodnim članom* polinoma.

Primer 2.2. Primeri polinoma.

i) $x^2 + 2x + 3$

ii) $-\frac{2}{3}x^6 + x^3 + 5x^2$

iii) $\sum_{i=1}^{100} ix^{i+1}$

iv) $\frac{1}{4}x^5 + 11x^4 + 6x^3 - 1$

U primeru pod *i)* imamo polinom drugog stepena sa slobodnim član brojem 3, dok su koeficijenti u primeru pod *iii)* prirodni brojevi od 1 do 100.

Svaki polinom se sastoji od *monoma*, koji predstavljaju osnovnu gradivnu jedinicu polinoma, i koji se sastoje od koeficijenta pomnoženim promenljivom[1]. Primer pod *ii)* se sastoji od tri monoma $-\frac{2}{3}x^6$, x^3 i $5x^2$.

Od elementarnih svojstava polinoma, nama su u ovom radu bitna sledeća dva:

- Zbir dva polinoma je polinom.
- Proizvod dva polinoma je polinom.

Primer 2.3. Dati su polinomi $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ i $Q(x) = x^3 - x^2 + 3$. Izračunati:

[1] U slučaju da je polinom po više promenljivih, sve one mogu figurisati u monomu.

$$i)\ P(x) + Q(x)$$

$$ii)\ P(x) \cdot Q(x)$$

Rešenje:

i) $P(x) + Q(x) = x^3 + 3x^2 - x^2 - 2x + 5 + 3 = x^3 + 2x^2 - 2x + 8$

ii) $P(x) \cdot Q(x) = (3x^2 - 2x + 5) \cdot (x^3 - x^2 + 3) = 3x^2 \cdot x^3 -$
$- 2x \cdot x^3 + 5 \cdot x^3 + 3x^2 \cdot (-x^2) - 2x \cdot (-x^2) + 5 \cdot (-x^2) +$
$+ 3x^2 \cdot 3 - 2x \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - - 3x^4 + 2x^3 -$
$- 5x^2 + 9x^2 - 6x + 15 = 3x^5 - 5x^4 + 7x^3 + 4x^2 - 6x + 15$

Def 2.3. Neka je $\mathbb{N}$ skup prirodnih brojeva i $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pod faktorijelom, u oznaci $F(n)$ podrazumevamo preslikavanje $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ tako da važi

$$F(0) = 1$$

i

$$F(n) = F(n-1) \cdot n, \quad n \geq 1$$

pri čemu se umesto $F(n)$ koristi oznaka $n!$. Ovu oznaku je prvi uveo nemački matematičar Kramp (Christian Kramp, 1760 – 1826.) 1808. godine. Profesor Đuro Kurepa (1907 - 1995), naš matematičar koji je u matematiku uveo operaciju levog faktorijela, je govorio da je Kramp možda uskliknuo kada je video brzinu rasta i veličinu brojeva n!

Faktorijel možemo zapisati i kao

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

ili

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Primer 2.4. Izračunati vrednosti sledećih izraza.

i) $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

ii) $\frac{n!}{(n-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-3)} = (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n^3 - 3n^2 + 2n$

Pomoću faktorijela možemo da definišemo *binomne koeficijente*, na sledeći način.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \ , n, k \in \mathbb{N}_0, k \le n$$

Teorema 2.1. Binomni koeficijenti imaju sledeća svojstva:

i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (1)

iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (2)

Dokaz:

i) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1, \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$

ii) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}$ [2]

iii) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \frac{n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n! \cdot k}{k!(n-k+1)!} =$

$= \frac{n!}{k!(n-k+1)!} \cdot (n - k + 1 + k) = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$ ♦

Svoj naziv binomni koeficijenti duguju sledećoj teoremi:

[2] Da je $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ se vidi i iz ove osobine, kada postavimo *k* = 0

Teorema 2.2. (*Binomna teorema*) Za svako $n \in \mathbb{N}_0$ i $x, y \in \mathbb{R}$, važi

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}y + \binom{n}{2} x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} xy^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

ili kraće zapisano

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Dokaz:

Ovu teoremu ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza indukcije: za $n = 1$, tvrđenje je tačno, jer

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} y = x + y$$

Indukcijska hipoteza[3]: pretpostavimo da je tvrđenje tačno za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $n > 1$.

Indukcijski korak: proverimo da li tvrđenje važi za $n+1$.

Saberimo sledeća dva identiteta:

$$x(x+y)^n = \binom{n}{0} x^{n+1} + \binom{n}{1} x^n y + \binom{n}{2} x^{n-1}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1} x^2y^{n-1} + \binom{n}{n} xy^n$$

$$y(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y + \binom{n}{1} x^{n-1}y^2 + \binom{n}{2} x^{n-2}y^3 + \dots + \binom{n}{n-1} xy^n + \binom{n}{n} y^{n+1}$$

[3] U daljem tekstu rada ćemo koristiti oznake BI, IH i IK

dobićemo:

$$(x+y)(x+y)^n$$
$$= \binom{n}{0}\, x^{n+1} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right) x^n y + \cdots + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right) xy^n$$
$$+ \binom{n}{n} y^{n+1}$$

a kako je prema (2) npr. $\binom{n}{1} + \binom{n}{0} = \binom{n+1}{1}$, dobijamo

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0}\, x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \ \dots\ + \binom{n+1}{n} xy^n + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}$$

po principu matematičke indukcije, teorema je dokazana. ♦

Primer 2.5. Svesti sledeće stepene binoma na kanonski oblik.

i) $(a+2b)^3 = \binom{3}{0}\, a^3 + \binom{3}{1}\, a^2 \cdot 2b + \binom{3}{2}\, a \cdot (2b)^2 + \binom{3}{3} \cdot (2b)^3 = a^3 +$
$+ 6a^2 b + 12ab^2 + 8b^3$

ii) $(x-3)^4 = \binom{4}{0}\, x^4 + \binom{4}{1}\, x^3 \cdot (-3) + \binom{4}{2}\, x^2 \cdot (-3)^2 + \binom{4}{3}\, x \cdot (-3)^3 +$
$+ \binom{4}{4} \cdot (-3)^4 = x^4 - 12\, x^3 + 54\, x^2 - 108x + 81$

Primer 2.6. Odrediti četvrti član razvoja binoma $(2x+3)^6$.

Kako k – ti član razvoja binoma $(x+y)^n$ iznosi $\binom{n}{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}$, četvrti član je

$$\binom{6}{3}\cdot(2x)^{6-3}\cdot 3^3 = 20\cdot 8x^3\cdot 27 = 4320x^3$$

Primer 2.7. Dokazati sledeću jednakosti.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Rešenje: Ove jednakost se dokazuje poprilično jednostavno:

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Iako postoje spisi koji datiraju iz X i XI veka sa sličnom tematikom, trougao sastavljen od binomnih koeficijenata nosi ime Paskalov trougao, po francuskom matematičaru Blezu Paskalu, čuvenom francuskom matematičaru, fizičaru i filozofu, jer ga je on detaljno proučio u svom delu „Teza o aritmetičkom trouglu”.

Primetivši da važi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

uvideo je da sve binomne koeficijente može zapisati u obliku beskonačne trougaone šeme oblika

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\ldots$$

to jest

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1$$

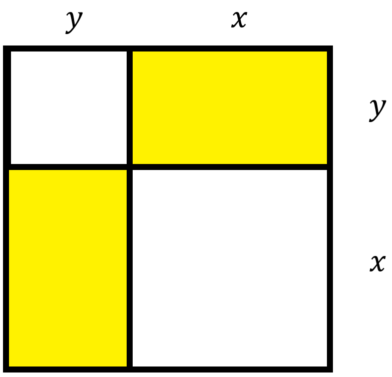
$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

$$\ldots.$$

takve da je, sem jedinice koja se nalazi u prvom redu, svaki element trougaone šeme jednak zbiru gornjeg levog i gornjeg desnog. Ukoliko gore levo, ili gore desno ne postoji element u šemi, zamenjuje se nulom.

Primer 2.8. Geometrijska interpretacija kvadrata binoma.[4]

Neka su data tri kvadrata, jedan stranice x, drugi stranice y, i treći stranice $x + y$. Ova tri kvadrata imaju površine redom x^2 , y^2 i $(x + y)^2$. Primetimo da, ako u treći kvadrat površine $(x + y)^2$ umetnemo ostala dva kvadrata, kao na slici 1, dobijamo dva pravougaonika obojena žutom bojom.



Slika 1

Nije teško primetiti da su ova dva pravougaonika površine xy, pa zaista važi:

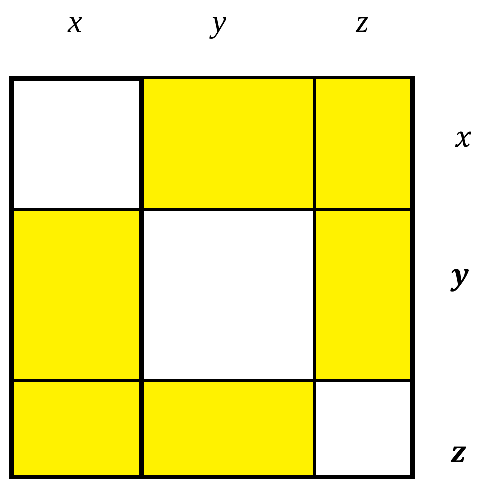
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

[4] Na sličan način se može prikazati i geometrijska interpretacija kuba binoma, to jest da je zapremina kocke $(x + y)^3$ jednaka zbiru zapremina dveju kocki x^3 i y^3 i dveju figura zapremina $3x^2y$ i $3xy^2$, što daje

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Primer 2.9. Geometrijska interpretacija kvadrata trinoma.

Neka su data četiri kvadrata, jedan stranice x, drugi stranice y, treći stranice z, i četvrti stranice $x + y + z$. Njihove površine su, redom, x^2 , y^2, z^2 i $(x+y+z)^2$. Ukoliko primenimo sličan postupak kao u primeru 2.8. i u kvadrat površine $(x+y+z)^2$ umetnemo ostala tri kvadrata, dobićemo šest pravougaonika obojena žutom bojom.



Slika 2

Na slici 2 se vidi da imamo po dva žuta pravougaonika površine xy, yz i zx, pa primećujemo da zaista važi:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$$

Primer 2.10. Množenje u Mesopotamiji.

Identitet

$$(x+y)^2 - x^2 - y^2 = 2xy$$

se nalazio u osnovi postupka izračunavanja proizvoda u drevnoj Mesopotamiji. Koristeći tablice kvadrata prirodnih brojeva, oni su množenje svodili na sabiranje i oduzimanje pomoću formule:

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2}$$

3. Stepene formule

3.1. Teorema faktorizacije i njene posledice

Pod formulama faktorizacije ćemo podrazumevati algebarske identitete koji se koriste u faktorisanju polinoma na činioce.

Teorema 3.1. (*Teorema faktorizacije*) Za svake $n \in \mathbb{N}_0$ i $x, y \in \mathbb{R}$, važi

$$x^n - y^n = (x-y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Dokaz:

Posmatrajmo sledeća dva identiteta

$$x \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n + x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1}$$

i

$$y \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^{n-1}y + \cdots + xy^{n-1} + y^n$$

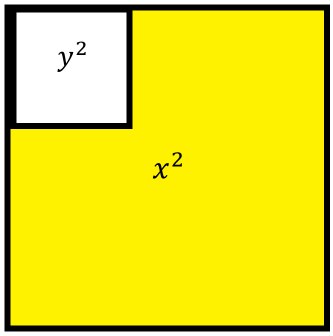
ako oduzmemo drugi identitet od prvog dobijamo tvrđenje iz teoreme.

$$(x-y) \cdot (x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n \quad \blacklozenge$$

Primer 3.1. Najpoznatiji primer teoreme faktorizacije, sa kojim se susrećemo jako rano, još u osnovnoj školi dobijamo za n = 2, i zovemo ga razlikom kvadrata.

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

Sem algebarskim zapisom, za razliku kvadrata možemo dati i geometrijsku interpretaciju. Neka su data dva kvadrata, jedan stranice x i drugi stranice y. Bez umanjenja opštosti možemo da pretpostavimo da je $x > y$. Ta dva kvadrata imaju površine redom x^2 i y^2. Umetnimo manji kvadrat površine y^2 u veći, površinex^2, kao na slici:

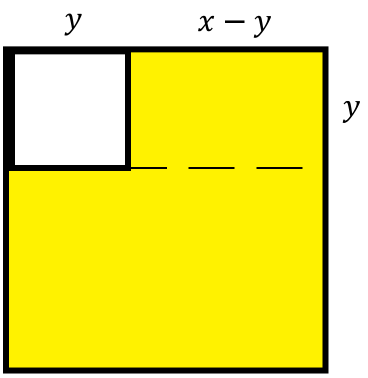


Slika 3

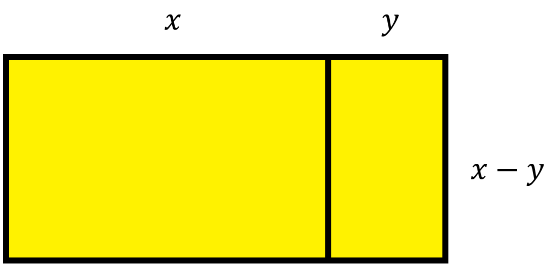
Tada će površina geometrijske figure obojene žutom bojom biti jedaka razlici površina ovih dvaju kvadrata, to jest $x^2 - y^2$.

Pokažimo geometrijski da ona iznosi upravo $(x - y)(x + y)$.

Zaista, ukoliko isečemo deo figure obojene u žuto kao na slici 4, i nalepimo ga na ostatak figure dobijamo pravougaonik sa slike 5.



Slika 4



Slika 5

Isečeni deo sa slike 3 ima dimenzije $y \cdot (x-y)$, pa pravougaonik sa slike 4 ima dimenzije $(x-y)\cdot(x+y)$, čime smo pokazali i geometrijsku interpretaciju razlike kvadrata.

Primer 3.2. Rastaviti na činioce sledeće izraze:

i) $x^{12} - y^{12}$ *ii)* $(x+y)^3 - x^3 - y^3$ *iii)* $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$

iv) $(x+y+z)^3 - (-x+y+z)^3 - (x-y+z)^3 - (x+y-z)^3$

v) $(x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4$

vi) $(x^2+y^2)^3 + (z^2-x^2)^3 - (y^2+z^2)^3$

Rešenje:

i) $x^{12} - y^{12} = (x^6)^2 - (y^6)^2 = (x^6 - y^6)(x^6 + y^6) = ((x^3)^2 - (y^3)^2)(x^6 + y^6) = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)(x^6 + y^6) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

na kraju imamo identitet

$$x^{12} - y^{12} = (x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$$

ii) $(x+y)^3 - x^3 - y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y)$

dakle

$$(x+y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x+y)$$

iii)
$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x+y+z)^3 - x^3] - [y^3 + z^3]$$
$$= (y+z)((x+y+z)^2 + x(x+y+z) + x^2) - (y+z)(y^2 - yz + z^2)$$
$$= (y+z)[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + x^2 + xy + xz + x^2 - y^2 + yz - z^2]$$
$$= (y+z)(3x^2 + 3xy + 3yz + 3zx)$$
$$= 3(y+z)[x(x+y) + z(x+y)]$$
$$= 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

odnosno

$$(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

iv) Da bismo ilustrovali primenu prethodno dokaznih identiteta, ovaj primer ćemo rešiti na dva načina.

I način, bez korišćenja prethodno dokazanih identiteta:

$$(x+y+z)^3-(-x+y+z)^3-(x-y+z)^3-(x+y-z)^3=(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3-((-x+y)^3+3(-x+y)^2z+3(-x+y)z^2+z^3)-((x-y)^3+3(x-y)^2z+3(x-y)z^2+3z^2)-(x+y)^3+3(x+y)^2(-z)+3(x+y)(-z)^2+(-z)^3$$

što je dalje jednako

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+6xyz++3y^2z+3xz^2+3yz^2+z^3 \\ -(-x^3+3x^2y-3xy^2+y^3+3x^2z-6xyz+3y^2z-3xz^2+3yz^2+z^3) \\ -(x^3-3x^2y+3xy^2-y^3+3x^2z-6xyz+3y^2z+3xz^2-3yz^2+z^3) \\ -(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2z-6xyz-3y^2z+3xz^2+3yz^2-z^3)$$

a kada se oslobodimo zagrada

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z+3xz^2+3yz^2+z^3+x^3-3x^2y \\ +3xy^2-y^3-3x^2z+6xyz-3y^2z+3xz^2-3yz^2-z^3-x^3+3x^2y \\ -3xy^2+y^3-3x^2z+6xyz-3y^2z-3xz^2+3yz^2-z^3-x^3-3x^2y \\ -3xy^2-y^3+3x^2z+6xyz+3y^2z-3xz^2-3yz^2+z^3$$

i na kraju dobijamo

$$(1+1-1-1)x^3+(1-1+1-1)3x^2y+(1+1-1-1)3xy^2+(1-1+1-1)y^3 \\ +(1+1-1-1)3x^2z+(1+1+1+1)6xyz+(1-1+1-1)3y^2z \\ +(1+1-1-1)3xz^2+(1-1+1-1)3yz^2+(1-1-1+1)z^3 \\ =24xyz$$

dakle

$$(x+y+z)^3-(-x+y+z)^3-(x-y+z)^3-(x+y-z)^3=24xyz$$

II način, uz pomoć primera dokazanog pod *iii)*:

Neka je $A = -x + y + z$, $B = x - y + z$, $C = x + y - z$. Tada je $A + B + C = x + y + z$.

Iz

$$(A + B + C)^3 - A^3 - B^3 - C^3 = 3(A + B)(B + C)(C + A)$$

dobijamo

$$(x + y + z)^3 - (-x + y + z)^3 - (x - y + z)^3 - (x + y - z)^3$$

$$= 3(-x + y + z + x - y + z)(x - y + z + x + y - z)(x + y - z - x + y + z)$$

$$= 3 \cdot 2z \cdot 2x \cdot 2y = 24xyz$$

v) I ovaj primer ćemo rešiti na dva načina.

I način, bez korišćenja prethodno dokazanih identiteta:

$(x + y + z)^4 - (x + y)^4 - (y + z)^4 - (z + x)^4 + x^4 + y^4 + z^4 = ((x + y + z)^2)^2 -$
$- (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) - (y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4) - (z^4 +$
$+ 4z^3x + 6z^2x^2 + 4zx^3 + x^4) + x^4 + y^4 + z^4$

što dalje daje

$$\begin{aligned}((x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2)^2 &- (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) - (y^4 + 4y^3z \\ &+ 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4) - (z^4 + 4z^3x + 6z^2x^2 + 4zx^3 + x^4) + x^4 + y^4 \\ &+ z^4 \\ &= (x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2)^2 - (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 \\ &+ y^4) - (y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4) - (z^4 + 4z^3x + 6z^2x^2 \\ &+ 4zx^3 + x^4) + x^4 + y^4 + z^4\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}x^4 + 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 12xy^2z + 12xyz^2 + 4xz^3 + y^4 + 4y^3z \\ + 6y^2z^2 + 4yz^3 - (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4) - (y^4 + 4y^3z \\ + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4) - (z^4 + 4z^3x + 6z^2x^2 + 4zx^3 + x^4) + x^4 + y^4 \\ + z^4.\end{aligned}$$

Kada se oslobodimo zagrada, pokratiće se jako velki deo izraza, i dobiće se

$x^4 + 4x^3y + 4x^3z + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2 + 4xz^3 + y^4 +$
$+ 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 - x^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 - y^4 - 4y^3z -$
$- 6y^2z^2 - 4yz^3 - z^4 - z^4 - 4z^3x - 6z^2x^2 - 4zx^3 - x^4 + x^4 + y^4 + z^4 =$
$(1 - 1 - 1 + 1)x^4 + (1 - 1)4x^3y + (1 - 1)4x^3z + (1 - 1)6x^2y^2 + (1 - 1)xy^3 +$

$+ 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2 + (1-1)xz^3 + (1-1-1+1)y^4 + (1-1)y^3z +$
$+ (1-1)6y^2z^2 + (1-1)4yz^3 + (1-1-1+1)z^4$

to jest

$$12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2 = 12xyz(x+y+z)$$

i na kraju dobijamo identitet

$$(x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4 = 12xyz(x+y+z).$$

II način, uz pomoć primera dokazanog pod *iv)*:

$$\begin{aligned}
&(x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4 \\
&= (x+y+z)^4 - [(x+y)^4 - z^4] - [(y+z)^4 - x^4] - [(z+x)^4 - y^4] \\
&= (x+y+z)^4 - (x+y-z)(x+y+z)((x+y)^2 + z^2) - \\
&\qquad -(y+z-x)(x+y+z)((y+z)^2 + x^2) - \\
&\qquad -(z+x-y)(x+y+z)((z+x)^2 + y^2) \\
&= (x+y+z)[(x+y+z)^3 - (x+y-z)((x+y)^2 + z^2) - \\
&\qquad\qquad -(y+z-x)((y+z)^2 + x^2) - \\
&\qquad\qquad -(z+x-y)((z+x)^2 + y^2)] \\
&= (x+y+z)[(x+y+z)^3 - (x+y-z)\big((x+y-z)^2 + 2z(x+y)\big) - \\
&\qquad\qquad -(y+z-x)\big((y+z-x)^2 + 2x(y+z)\big) - \\
&\qquad\qquad -(z+x-y)\big((z+x-y)^2 + 2y(z+x)\big)] \\
&= (x+y+z)[(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (x+y-z)2z(x+y) - \\
&\qquad\qquad -(y+z-x)^3 - (y+z-x)2x(y+z) - \\
&\qquad\qquad -(z+x-y)^3 - (z+x-y)2y(z+x)] \\
&= (x+y+z)[(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 - \\
&\qquad -(x+y-z)2z(x+y) - (y+z-x)2x(y+z) - (z+x-y).
\end{aligned}$$

Iskoristivši identitet iz primera pod *iv)*

$$(x+y+z)^3 - (x+y-z)^3 - (y+z-x)^3 - (z+x-y)^3 = 24xyz$$

a kako je

$$(x+y-z)z(x+y) + (y+z-x)x(y+z) + (z+x-y)y(z+x)$$

$$= zx^2 + zxy - z^2x + xyz + y^2z - z^2y +$$

$$+ xy^2 + xzy - x^2y + xyz + xz^2 - x^2z +$$

$$+ yz^2 + xyz - zy^2 + xyz + x^2y - y^2x$$
$$= 6xyz$$

zaključujemo da je

$$(x+y+z)^4 - (x+y)^4 - (y+z)^4 - (z+x)^4 + x^4 + y^4 + z^4$$

$$= (x+y+z)(24xyz - 2\cdot 6xyz) = 12xyz(x+y+z).$$

vi) Ako uvedemo smenu

$$A = x^2 + y^2$$

$$B = z^2 - x^2$$

dobijmo da je

$$A + B = y^2 + z^2$$

i da naš izraz postaje

$$A^3 + B^3 - (A + B)^3.$$

Prema primeru pod *ii)*, imamo da je

$$A^3 + B^3 - (A + B)^3 = -((A + B)^3 - A^3 - B^3) = -3AB(A + B).$$

Dakle,

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3 &= -3(x^2 + y^2)(z^2 - x^2)(y^2 + z^2) \\ &= -3(x^2 + y^2)(z - x)(z + x)(y^2 + z^2).\end{aligned}$$

Primer 3.3. Rastaviti na činioce sledeće izraze.

i) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Rešenje ovog problema nije baš uočljivo na prvi pogled, i svodi se na dodavanje i oduzimanje sledećih izraza:

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + x^2y - x^2y + x^2z - x^2z + y^2x - y^2x + y^2z - y^2z + z^2y \\ - z^2y + z^2x - z^2x \\ = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y - x^2y + x^2z - x^2z + y^2x - y^2x + y^2z - y^2z \\ + z^2y - z^2y + z^2x - z^2x - xyz - xyz - xyz\end{aligned}$$

Što dalje možemo grupisati kao

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy) \qquad (3)$$

ii) $(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3$

Ovaj primer ćemo rešiti na dva načina.

I način:

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Daljim sređivanjem dobijamo:

$$-3b^2c + 3bc^2 - 3c^2a + 3ca^2 - 3a^2b + 3ab^2 = 3(b-c)(ca - a^2 - cb + ab)$$

Ukoliko ovom izrazu dodamo i oduzmemo 3*abc* dolazimo do sledećeg izraza

$$-3b^2c + 3bc^2 - 3c^2a + 3ca^2 - 3a^2b + 3ab^2 + 3abc - 3abc$$

$$= 3(b-c)(ca - a^2 - cb + ab)$$

$$= 3(b-c)(c-a)(a-b)$$

II način:

Primetimo da ovaj izraz možemo znatno brže rastaviti na činioce ukoliko upotrebimo pređašnje dokazani identitet (3)

Ukoliko zamenimo *x* sa $(b-c)$, *y* sa $(c-a)$ i z sa $(a-b)$, dobijamo:

$$\begin{aligned}(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 - 3(b-c)(c-a)(a-b) \\ = (b-c+c-a+a-b)((b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2 \\ - (c-a)(a-b) - (b-c)(a-b) - (b-c)(c-a))\end{aligned}$$

To jest

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 - 3(b-c)(c-a)(a-b) = 0$$

$$(b-c)^3 + (c-a)^3 + (a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$$

3.2. Lebegov identitet

Anri Lebeg (Henri Léon Lebesgue, 1875 – 1941.), francuski matematičar najpoznatiji po svojoj teoriji integracije koja pruža generalizaciju Rimanovog integrala, prema njemu nazvanom Lebegov integral.

Neka su dati realni brojevi a, b, c i d. Pod Lebegovim identitetom podrazumevamo sledeću jednakost:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$$

Dokaz:

Raspišimo najpre levu stranu jednakosti. Dobijamo

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2)^2 + 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (c^2 + d^2)^2 =$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4 =$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2. \qquad (4)$$

Raspišimo sada desnu stranu jednakosti

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$$
$$= ((a^2 + b^2) - (c^2 + d^2))^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + (c^2 + d^2)^2 + (2ac + 2bd)^2 + (2ad - 2bc)^2$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2a^2d^2 - 2b^2c^2 - 2b^2d^2 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4$$
$$+ 4a^2c^2 + 8abcd + 4b^2d^2 + 4a^2d^2 - 8abcd + 4b^2c^2 =$$

$$= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + c^4 + 2c^2d^2 + d^4 + 2a^2c^2 + 2b^2d^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2$$

što je izraz jednak izrazu (4).

Iz jednakosti leve i desne strane sledi dokaz početnog identiteta.♦

Lebegov identitet možemo izraziti i na sledeći način

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

gde je

$$a = m^2 + n^2 - p^2 - q^2$$

$$b = 2(mp + nq)$$

$$c = 2(mq - np)$$

$$d = m^2 + n^2 + p^2 + q^2$$

to jest

$$d + a = 2m^2 + 2n^2$$

$$d - a = 2p^2 + 2q^2$$

$$d + b = (m + p)^2 + (n + q)^2$$

$$d - b = (m - p)^2 + (n - q)^2$$

$$d + c = (m + q)^2 + (n - p)^2$$

$$d - c = (m - q)^2 + (n + p)^2$$

3.3. Lagranžev identitet

Lagranžev identitet nosi ime po Žosefu Lagranžu (Joseph – Louis Lagrange, 1736 – 1813.), italijanskom matematičaru koji je najviše doprineo razvoju teorije brojeva, klasične i nebeske mehanike, a naročito varijacionog računa.

Neka su a_i, i b_i, $i = \overline{1,n}$ nizovi realnih brojeva. Tada važi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (\,a_i b_j - a_j b_i)^2$$

Dokaz:

Krenimo od leve strane jednakosti, i to od umanjenika

$$\left(\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_i}^2 {b_i}^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 {b_k}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} {a_i}^2 {b_j}^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=i+1}^{n} {a_i}^2 {b_j}^2 \quad (5)$$

dok je umanjilac jednak

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2 {b_k}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i b_j a_j b_i\ . \quad (6)$$

Raspišimo sada desnu stranu jednakosti.

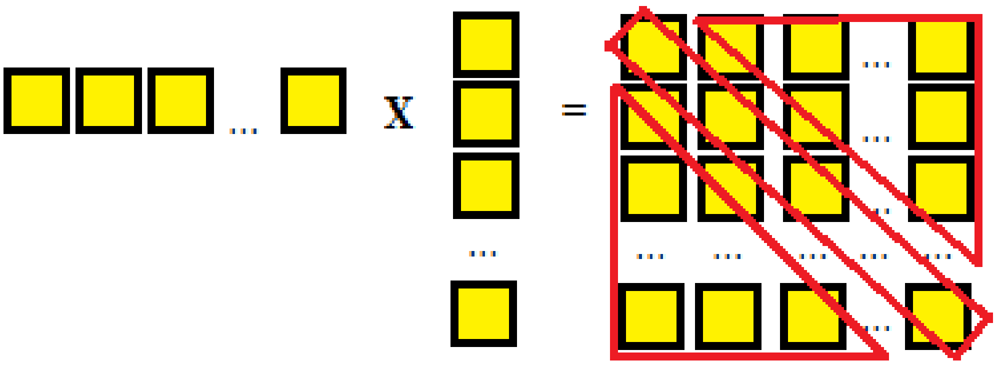
$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (\,a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} {a_i}^2 {b_j}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} {a_j}^2 {b_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} a_i b_j a_j b_i$$

kod koje ukoliko permutujemo indekse i i j u drugom sabirku, kao i činioce u trećem sabirku na desnoj strani jednakosti, dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}{a_i}^2{b_j}^2+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}{a_i}^2{b_j}^2-2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_ib_ia_jb_j \quad (7)$$

Kako je $(5)-\ (6)=(7)$, jednakost je dokazana. ♦

Primerimo da jednakost (5) možemo posmatrati kao proizvod suma kvadrata kolone a_i i vrste b_j. Taj proizvod se potom razbija na sumu sa glavne dijagonale dobijene matrice, i sume sa dve preostale gornje trougaone i donje trougaone matrice.



Slika 6

S druge stranje i jednakost (6) možemo posmatrati kao zbir elemenata sa dijagonale kvadratne matrice i dve preostale gornje trougaone i donje trougaone matrice.

Lagranžev identitet važi i u polju kompleksnih brojeva, i to u sledećem obliku:

Neka su a_i, i b_i, $i=\overline{1,n}$ nizovi kompleksnih brojeva. Tada važi

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)-|\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i|^{\,2}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}|\,a_i\bar{b}_j-a_j\bar{b}_i|^2$$

Ovu formulaciju nećemo dokazivati.

3.4. Bine – Košijev identitet

Žak Bine (Jacques Philippe Marie Binet, 1786 – 1856.) i Ogisten Koši (Augustin-Louis Cauchy, 1789 – 1857.) su bili francuski matematičari savremenici. Bine je najviše doprinosa dao izučavanju teorije brojeva, dok je Koši jedan od osnivača kompleksne analize. U svom delu *Stuck in the Middle: Cauchy's Intermediate Value Theorem*, Majkl Barani (Michael Barany) navodi: *Više koncepata i teorema nosi imena po Košiju, nego po bilo kom drugom matematičaru (samo u teoriji elastičnosti ih ima šesnaest)*.

Neka su $a_i, b_i,\ c_i$ i d_i , $i = \overline{1,n}$ nizovi realnih brojeva. Tada važi

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\, d_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\, c_j\right) + \sum_{1\le i<j\le n}^{n} (a_i\, b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i)$$

Ovaj identitet nećemo dokazivati, jer je on zapravo generalizacija Lagranževog identiteta za

$$a_i = c_i, \qquad b_j = d_j$$

3.5. Fibonačijev identitet

Leonardo Bonači (Leonardo Bonacci, oko 1175 – 1250.), poznatiji kao Fibonači, italijanski matematičar najpoznatiji po Fibonačijevom nizu kojeg je predočio srednjevekovnoj Evropi, jedan od najzaslužnijih ljudi za upotrebu arapskih cifara na zapadu.

Neka su dati realni brojevi a, b, c i d. Pod Fibonačijevim identitetom podrazumevamo jednakost:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Dokaz:

Raspišimo najpre levu stranu jednakosti

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Ukoliko njoj dodamo i oduzmemo $2abcd$, dobićemo

$$a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 2abcd - 2abcd =$$

$$= a^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 =$$

$$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \quad \blacklozenge$$

Ovaj identitet je Fibonači objavio u svojoj knjizi *Liber Quadratorum* 1225. godine, i zapravo predstavlja specijalan slučaj Lagranževog identiteta.

Primer 3.4.

$$(1^2 + 3^2)(2^2 + 5^2) = 10 \cdot 29 = 290 = 169 + 121 = 13^2 + 11^2$$

Ovaj identitet je još poznat i pod nazivima Diofant – Fibonačijev i Bramagupta – Fibonačijev identitet, iz dva razloga.

Prvi razlog je što se u spisima Diofanta Aleksandrijskog, starogrčkog matematičara iz III veka n.e. , nazivanom još i „ocem algebre“[5], navodi da je *proizvod suma po dvaju kvadrata jednak zbiru dva kvadrata*, odnosno skup svih suma dvaju kvadrata je zatvoren za množenje. Ovo je ništa drugo do interpretacija dokazanog identiteta.

[5] Karl Bojer (1991) *Uspon i pad grčke matematike*, str. 178

Drugi razlog je što je indijski matematičar i astronom Bramagupta (oko 598 – 665.), dokazao sledeću jednakost.

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+\ n(ad+bc)^2=\ (ac+nbd)^2+\ n(ad-bc)^2$$

Dokaz:

Dokazaćemo samo prvu jednakost $(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=(ac-nbd)^2+\ n(ad+bc)^2$.

Druga jednakost $(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=\ (ac+nbd)^2+\ n(ad-bc)^2$ se dokazuje analogno.

$$(a^2+nb^2)(c^2+nd^2)=\ a^2c^2+\ nb^2c^2+\ nd^2a^2+n^2b^2d^2$$

Kada dodamo i oduzmemo $2nabcd$ dobijamo:

$$a^2c^2+\ nb^2c^2+\ nd^2a^2+n^2b^2d^2+\ 2nabcd-2nabcd=\ a^2c^2+\ 2nabcd+\ n^2b^2d^2+ nd^2a^2-2nabcd+nb^2c^2=(ac-nbd)^2+\ n(ad+bc)^2 \quad \blacklozenge$$

Bramagupta je najpoznatiji po tome što je uveo koncept nule. U svome delu *Brahmasphutasiddhanta*, poglavje 18, kaže: *Suma negativnog broja i nule je negativna, pozitivnog broja i nule pozitivna, a nule i nule nula.*

Primer 3.5.

$$(2^2+\ 3\cdot 4^2)(5^2\ +\ 3\cdot 7^2)=(4\ +\ 3\cdot 16)(25+3\cdot 49)=\ 52\cdot 172=8944$$
$$=5746+3198=5746+3\cdot 1066$$

3.6. Liuvilov identitet

Žozef Liuvil (Joseph Liouville, 1809 – 1882.) je bio francuski matematičar, najznačajniji po tome što je prvi dokazao postojanje transcedentalnih brojeva u svom delu *Communication* 1844. godine.

Neka su dati realni brojevi a, b, c i d. Pod Liuvilovim identitetom podrazumevamo sledeću jednakost.

$$\begin{aligned}6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ &= (a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4 \\ &+ (a-b)^4 + (a-c)^4 + (a-d)^4 + (b-c)^4 + (b-d)^4 + (c-d)^4\end{aligned}$$

Dokaz:

Krenimo najpre od leve strane jednakosti, bez koeficijenta. Nju smo razvijali kod dokaza Lebegovog identiteta (4)

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 \\ &+ 2c^2d^2\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ &= 6(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 \\ &+ 2c^2d^2).\end{aligned}$$

Posmatrajmo sada odgovarajuće parove sa desne strane jednakosti, npr. $(a+b)^4$ i $(a-b)^4$.

Važi:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 + (a-b)^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \\ &= 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4\end{aligned}$$

Odakle je:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 + \ (a+c)^4 + \ (a+d)^4 + \ (b+c)^4 + \ (b+d)^4 + \ (c+d)^4 + (a-b)^4 \\ + \ (a-c)^4 + \ (a-d)^4 + \ (b-c)^4 + \ (b-d)^4 + \ (c-d)^4 \\ = \ 2a^4 + \ 12a^2b^2 + \ 2b^4 + \ 2a^4 + \ 12a^2c^2 + \ 2c^4 + \ 2a^4 + \ 12a^2d^2 + \ 2d^4 \\ + \ 2b^4 + \ 12b^2c^2 + \ 2c^4 + \ 2b^4 + \ 12b^2d^2 + \ 2d^4 + \ + 2c^4 + \ 12c^2d^2 \\ + \ 2d^4.\end{aligned}$$

Na kraju dobijamo:

$$\begin{aligned}6a^4 + \ 6b^4 + \ 6c^4 + \ 6d^4 + \ 12a^2b^2 + \ 12a^2c^2 + \ 12a^2d^2 + \ 12b^2c^2 + \ 12b^2d^2 \\ + \ 12c^2d^2 \\ = \ 6(a^4 + \ b^4 \ + \ c^4 + \ d^4 + \ 2a^2b^2 + \ 2a^2c^2 \ + \ 2a^2d^2 \ + \ 2b^2c^2 + \ 2b^2d^2 \\ + \ 2c^2d^2)\end{aligned}$$

Ovime je identitet dokazan. ♦

3.7. Identitet Sofi-Žermen

Sofi Žermen (Marie-Sophie Germaine, 1776 - 1831), je bila jedna od prvih žena matematičara u Francuskoj. Kakos su studije na *École Polytechnique* tada bile dostupne samo muškarcima, koristila je pseudonim Antoine-August Le Blanc, kako bi doprla do Lagranža koji je tada radio kao predavač. Nakon izvesnog vremena, i otkrivanja njenog identiteta Lagranžu, on postaje njen mentor i podrška u radu.

Neka su dati realni brojevi a i b. Pod identitetom Sofi-Žermen podrazumevamo sledeću jednakost.

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

Dokaz:

Da bismo dokazali identitet, dovoljno je samo levoj strani jednakosti da dodamo i oduzmemo $4a^2b^2$

$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2 +$
$+2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ ♦

Identitet Sofi-Žermen možemo koristiti pri faktorizaciji, kao u sledećem primeru:

Primer 3.6. Utvrditi da li je broj $4^{545} + 545^4$ prost ili složen.

Prema identitetu Sofi-Žermen, ovu sumu možemo zapisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} 4^{545} + 545^4 &= 4 \cdot 4^{544} + 545^4 \\ &= (545^2 + 2 \cdot 4^{272} + 2 \cdot 545 \cdot 4^{136})(545^2 + 2 \cdot 4^{272} - 2 \cdot 545 \cdot 4^{136}) \end{aligned}$$

Da važi $545^2 + 2 \cdot 4^{272} + 2 \cdot 545 \cdot 4^{136} > 1$ je trivijalno, dok nejednakost

$545^2 + 2 \cdot 4^{272} - 2 \cdot 545 \cdot 4^{136} > 1$ sledi iz $4^{272} > 545 \cdot 4^{136}$, odnosno $4^{136} > 545$.

Kako su oba činioca pozitivni brojevi veći od jedan sledi da je $4^{545} + 545^4$ složen broj.

3.8. Ojlerov identitet

Leonard Ojler (Leonhard Euler, 1707 – 1783.), švajcarski matematičar i fizičar, koji je matematici doprineo gotovo u svim oblastima, te više identiteta nosi njegovo ime, od kojih ćemo mi navesti Ojlerov identitet četiri kvadrata.

Neka su dati realni brojevi x, y, z, t, a, b, c i d. Tada važi sledeći identitet.

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\\ &= (xa - yb - zc - td)^2 + (xb + ya + zd - tc)^2 + (xc - yd + za + tb)^2\\ &+ (xd + yc - zb + ta)^2\end{aligned}$$

Dokaz:

Krenimo najpre od desne strane jednakosti, i oslobodimo se kvadrata na sledeći način:

$$\begin{aligned}(xa - yb - zc - td)^2 + (xb + ya + zd - tc)^2 + (xc - yd + za + tb)^2\\ &+ (xd + yc - zb + ta)^2\\ &= (xa - yb)^2 - 2(xa - yb)(zc + td) + (zc + td)^2 + (xb + ya)^2\\ &+ 2(xb + ya)(zd - tc) + (zd - tc)^2 + (xc - yd)^2\\ &+ 2(xc - yd)(za + tb) + (zc + td)^2 + (xd + yc)^2\\ &- 2(xd + yc)(zb - ta) + (zb - ta)^2\end{aligned}$$

Primetimo sada parove kvadrata binoma, na primer $(xa - yb)^2$ i $(xb + ya)^2$

Na njihov zbir možemo primeniti Fibonačijev identitet, i dobiti:

$$(xa - yb)^2 + (xb + ya)^2 = (x^2 + y^2)(a^2 + b^2)$$

Ukoliko saberemo mešovite članove iz ostatka desne strane jednakosti imamo:

$$\begin{aligned}-2(xa - yb)(zc + td) + 2(xb + ya)(zd - tc) + 2(xc - yd)(za + tb)\\ &- 2(xd + yc)(zb - ta)\\ &= -2xazc - 2xatd + 2ybzc + 2ybtd + 2xbzd - 2xbtc + 2yazd - 2yatc\\ &+ 2xcza + 2xctb - 2ydza - 2ydtb - 2xdzb + 2xdta - 2yczb + 2ycta\\ &= 0\end{aligned}$$

Pa desnu stranu jednakosti možemo zapisati kao:

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) + (x^2 + y^2)(c^2 + d^2) + (z^2 + t^2)(a^2 + b^2) + (z^2 + t^2)(c^2 + d^2) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

Ovime je identitet dokazan. ♦

3.9. Degenov identitet

Karl Ferdinand Degen (Carl Ferdinand Degen, 1766 – 1825.) je bio danski matematičar sa najviše postignuća u polju teorije brojeva. Zanimljivo je da, iako je on otkrio ovaj identitet 1818., to nije doprlo do širih matematičkih krugova, pa su ga ponovo otkrivali, svaki za sebe, Džon Tomas Grejvs (John Thomas Graves, 1806 – 1870.) u 1843. godini i Artur Kejli (Arthur Caley, 1821 – 1895.) 1845. godine.

Neka su dati realni brojevi $a, b, c, d, e, f, g, h, m, n, o, p, q, r, s$ i t. Degenov identitet, još nazvan i identitetom osam kvadrata, je sledeća jednakost:

$$
\begin{aligned}
(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)(m^2 + n^2 + o^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2) \\
= (am - bn - co - dp - eq - fr - gs - ht)^2 \\
+ (bm + an + do - cp + fq - er - hs + gt)^2 \\
+ (dm + cn - bp + ap + hq - gr + fs - et)^2 \\
+ (cm - dn + ao + bp + gq + hr - es - ft)^2 \\
+ (em - fn - go + hp + aq + br + cs + dt)^2 \\
+ (dm + en - ho + gp - bq + ar - ds + ct)^2 \\
+ (gm + hn + eo - fp - cq + dr + as - bt)^2 \\
+ (hm - gn + fo + ep - dq - cr + bs + at)^2
\end{aligned}
$$

Ovu jednakost nećemo dokazivati, ne zbog njene kompleksnosti, već zato što se njen dokaz svodi na višestruke primene Ojlerovog identiteta.

Primetimo sličnosti između Fibonačijevog, Ojlerovog i Degenovog identiteta. Svi se mogu zapisati u obliku

$$
\begin{aligned}
({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 + \dots + {x_i}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2 + \dots + {y_i}^2) \\
= {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 + \dots + {z_i}^2
\end{aligned}
$$

Pri čemu je i u Fibonačijevom identitetu jednako 2, u Ojlerovom 4, i u Degenovom 8.

3.10. Varingov problem

Da bismo ilustrovali kako su matematičari dolazili do određenih identiteta, navešćemo tvrđenje u matematici poznato pod imenom Varingov problem, tokom čijeg rešavanja je zapravo većina njih i otkrivena.

Edvard Varing (Edward Waring, 1736 – 1798.) je bio engleski matematičar koji je u svojim spisima *Meditationes Algebricae* naveo bez dokaza sledeće tvrđenje: za svaki prirodan broj k postoji $s(k) \in \mathbb{N}$ tako da je svaki prirodan broj jednak sumi od $s(k)$ k-tih stepena nekih brojeva.

Ovaj problem je generalizacija ranije dokazanih tvrđenja za fiksirano k. Na primer, jedan od najvećih francuskih matematičara 17. veka, Pjer Ferma (Pierre de Fermat, 1601 – 1665.) je dokazao da se svaki prirodan broj može zapisati kao zbir najviše četiri kvadrata. To znači da je za $k = 2$, $s(k) = 4$.

Rešavanju ovog problema su matematičari krenuli empirijski, za jedno po jedno k. Tako je, na primer, Liuvil za $k = 4$ postavio za gornju granicu $s(k) = 53$, i vremenom je polako spuštao na 47, 45, 41, 39, 38 i na kraju 37. Pri dokazivanju da je za $k = 4$, $s(k) \leq 53$ je iskoristio identitet koji je potom nazvan prema njemu, a koji smo mi opisali u poglavlju 3.6.

$$6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 +$$
$$+(c+d)^4 + (a-b)^4 + (a-c)^4 + (a-d)^4 + (b-c)^4 + (b-d)^4 + (c-d)^4$$

Međutim, ovakav pristup nije vodio nikud.

Veliki nemački matematičar Hilbert (David Hilbert, 1862 – 1943.) je prvi pristupio rešavanju ovog problem na uopšten način. Nije pokušavao da se nadoveže na rad svojih prethodnika, smanjujući $s(k)$ broj po broj, već je posmatrao širu sliku: pokazati da taj broj postoji i za veće k.

Krenuo je od Fibonačijevog identiteta,

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2.$$

Prema njemu je, na primer, $13 = 9 + 4$, $41 = 25 + 16$,

$$533 = 13 \cdot 41 = (3^2+2^2)(5^2+5^2) = (3 \cdot 5 + 2 \cdot 4)^2 + (3 \cdot 5 - 2 \cdot 4)^2 = 23^2 + 2^2.$$

Potom se nadovezao na Ojlerov identitet,

$$\begin{aligned}(x^2+\ y^2+\ z^2+\ t^2)(a^2+\ b^2+\ c^2+\ d^2)\\ &= (xa-yb-zc-td)^2+\ (xb+ya+zd-tc)^2+\ (xc-yd+za+tb)^2\\ &+\ (xd+yc-zb+ta)^2.\end{aligned}$$

Prema njemu, ukoliko se dva broja mogu zapisati kao zbir četiri kvadrata, i njihov proizvod se može zapisati kao zbir četiri kvadrata.

Lagranž je ovaj identitet koristio da bi dokazao prethodno navedenu Fermaovu teoremu: svaki celi broj $n \geq 0$ se može zapisati kao zbir četiri kvadrata, na drugačiji način. Najpre je dokazao tvrđenje ukoliko je n prost broj, dok je tvrđenje za složene brojeve direktno sledilo iz Ojlerovog identiteta.

Varingov problem je odličan primer kako su empirijskim istraživanjem mnogi matematičari, iz različitih vremenskih razdoblja, radivši na istom problemu, otkrivali nove identitete i razvijali nova tvrđenja.

3.11. Razni primeri

Primer 3.5. Dokazati ekvivalenciju $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ akko $x = y = z$.

(⇐) Trivijalno.

(⇒) Iz $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ sledi

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0,$$

odakle dobijamo $x = y = z$.

Primer 3.6. Rastaviti na činioce sledeći izraz:

$$(a + b)^3 + (a + c)^3 + (a + d)^3 + (a - b)^3 + (a - c)^3 + (a - d)^3$$

Saberimo ove kubove binoma po odgovarajućim parovima, na primer:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 + (a - b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ &= 2a^3 + 6ab^2\end{aligned}$$

odakle dobijamo identitet:

$$\begin{aligned}(a + b)^3 + (a + c)^3 + (a + d)^3 + (a - b)^3 + (a - c)^3 + (a - d)^3 \\ = 2a^3 + 6ab^2 + 2a^3 + 6ac^2 + 2a^3 + 6ad^2 \\ = 6a^3 + 6ab^2 + 6ac^2 + 6ad^2 = 6a(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\end{aligned}$$

Ovaj identitet se zove Maleov identitet, po Edmondu Maleu (Edmond Théodore Maillet, 1865 – 1938.), francuskom matematičaru koji je najviše doprinosa dao u poljima teorije brojeva i mehanike.

Primer 3.7.

i) Ako je $x + y = 12$ i $xy = 35$, čemu je jednako $x^4 + y^4$?

Da bismo izračunali vrednost ovog izraza, potrebni su nam sledeći identiteti

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$$

i

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

Pa je

$$x^4 + y^4 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$$

što kad zamenimo naše vrednosti

$$x^4 + y^4 = (12^2 - 2 \cdot 35)^2 - 2 \cdot 35^2 = (144 - 70)^2 - 2 \cdot 1225 = 5476 - 2450 = 3026$$

ii) Ako je $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 14$ i $ab + bc + ca = 11$, izračunati

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Setimo se jednakosti označene sa (3). Prema njoj važi:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)) \end{aligned}$$

Pa kad zamenimo vrednosti, dobijamo:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 6 \cdot (14 - 11) = 18$$

Primer 3.8. Rastaviti na činioce sledeći polinom:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n)^2 - x^n$$

Označimo sa

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}.$$

Otud je

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n)^2 - x^n = (P(x) + x^n)^2 - x^n$$
$$= P(x)^2 + 2P(x)x^n + x^{2n} - x^n = P(x)^2 + 2P(x)x^n + (x^n - 1)\, x^n$$

Iskoristimo sada polinomijalni identitet

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

$$x^n - 1 = (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(x - 1)$$

i zamenimo ga u naš identitet. Dobićemo

$$\begin{aligned} P(x)^2 + 2P(x)x^n + (x^n - 1)x^n &= P(x)^2 + 2P(x)x^n + (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(x-1)x^n \\ &= P(x)^2 + 2P(x)x^n + P(x)(x-1)x^n = P(x)(P(x) + 2x^n + (x-1)x^n) \\ &= P(x)(P(x) + x^n + x^{n+1}) \end{aligned}$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1})$$

Dakle, dobili smo identitet:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n)^2 - x^n$$

$$= (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1})(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + x^{n+1})$$

Primer 3.9. Neka su a, b, c i d realni brojevi takvi da važi:

$$ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2)$$

Ako je $A = a + b + c + d$, $B = a + b - c - d$, $C = a - b + c - d$ i $D = a - b - c + d$, dokazati da je:

$$AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2)$$

Ukoliko zamenimo *A*, *B*, *C* i *D* sa njihovim vrednostima u odnosu na a, b, c i d, dobićemo:

$$\begin{aligned} AB(A^2 + B^2) &= (a + b + c + d)(a + b - c - d)\big((a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2\big) \\ &= (a + b)^4 - (c + d)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CD(C^2 + D^2) &= (a - b + c - d)(a - b - c + d)\big((a - b + c - d)^2 + (a - b - c + d)^2\big) \\ &= (a - b)^4 - (c - d)^4. \end{aligned}$$

Dalje, kako je

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$$

$$(c + d)^4 - (c - d)^4 = 8cd(c^2 + d^2)$$

dobijamo niz ekvivalencija

$$ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2) \Leftrightarrow 8ab(a^2 + b^2) = 8cd(c^2 + d^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^4 - (a - b)^4 = (c + d)^4 - (c - d)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^4 - (c + d)^4 = (a - b)^4 - (c - d)^4 \Leftrightarrow AB(A^2 + B^2) = CD(C^2 + D^2).$$

Ovime je jednakost dokazana.

Primer 3.10. Ako je $a + b + c = 0$, dokazati da je:

i) $$a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2(ab + bc + ca)^2 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2} \quad (8)$$

Nije teško dokazati da je, pod ovim uslovom:

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2(ab + bc + ca)^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}.$$

Krenimo od izraza u sredini jednakosti.

$$\begin{aligned} 2(ab + bc + ca)^2 &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 4a^2bc + 4ab^2c + 4abc^2 \\ &= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4abc(a + b + c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \end{aligned}$$

Potom, primetimo da iz $(a + b + c)^2 = 0$ sledi

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 4(ab + bc + ca)^2$$

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2} = 2(ab + bc + ca)^2.$$

Označimo sa $A = a^4 + b^4 + c^4, B = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2),\ C = 2(ab + bc + ca)^2,$ i $D = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}$. Već smo pokazali $B = C = D$, ostalo je da „povežemo” još prvi izraz iz jednakosti, a to ćemo uraditi na sledeći način

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2} &= \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + 2b^2c^2 + c^4 + 2c^2a^2}{2} \\ &= \frac{a^4 + b^4 + c^4}{2} + \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2}{2} \end{aligned}$$

pa je

$$D = \frac{A}{2} + \frac{C}{2}$$

$$\frac{D}{2} = \frac{A}{2}$$

I na kraju smo dobili $D = A$, pa je $A = B = C = D$. Jednakost je dokazana.

ii) $\frac{a^5+b^5+c^5}{5} = \frac{a^3+b^3+c^3}{3} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Krenimo najpre od sledećeg izraza:

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = a^5 + b^5 + c^5 + a^3b^2 + a^3c^2 + b^3a^2 + b^3c^2 + c^3a^2 + c^3b^2 = a^5 + b^5 + c^5 + a^2b^2(a+b) + b^2c^2(b+c) + c^2a^2(c+a).$$

Kako je iz $a + b + c = 0, -c = a + b, -a = b + c$ i $-b = c + a$, kada zamenimo ove vrednosti u naš izraz dobijamo

$$a^5 + b^5 + c^5 - a^2b^2c - b^2c^2a - c^2a^2b = a^5 + b^5 + c^5 - abc(ab + bc + ca).$$

Podsetimo se sada identiteta označenog sa (3). Prema njemu je, u slučaju kada je $a + b + c = 0$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$abc = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}.$$

Dalje, kako je

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

u našem primeru će važiti jednakost

$$ab + bc + ca = -\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

što kada zamenimo u polaznu jednakost, dobijamo

$$(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = a^5 + b^5 + c^5 + \tfrac{1}{6}(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$a^5 + b^5 + c^5 = \frac{5}{6}(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)$$

čime smo dokazali identitet

$$\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

iii) $\quad a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2) = \frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}$

Krenimo od desne strane jednakosti.

$$(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4).$$

Iz identiteta (8) važi jednakost $a^4+b^4+c^4 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$, pa dobijamo

$$2(a^3+b^3+c^3)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$2(a^5b^2+ a^5c^2+b^5a^2+b^5c^2+c^5a^2+c^5b^2)$$

$$(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)=2(a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2))$$

$$\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2} = a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2).$$

Primer 3.11. Ako je $a + b + c + d = 0$, dokazati da je:

i) $(bcd + cda + dab + abc)^2 = (bc - ad)(ca - bd)(ab - cd)$

Krenimo od desne strane jednakosti:

$$\begin{aligned}(bc - ad)(ca - bd)(ab - cd)& \\ &= a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 - a^3bcd - ab^3cd - abc^3d \\ &- abcd^3 \\ &= a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 - abcd(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).\end{aligned}$$

Posmatrajmo sada izraz $(a + b + c + d)^2$, koji je u našem slučaju jednak nuli. Iz

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + b^2 + 2bc + 2bd + c^2 + 2cd + d^2$$

važiće

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = -2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

što kad zamenimo u našu jednakost daje

$$\begin{aligned}a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 + 2abcd(ab + ac + ad + bc + bd + cd)& \\ = a^2b^2c^2 + 2a^2b^2cd + a^2b^2d^2 + b^2c^2d^2 + 2abc^2d^2 + a^2c^2d^2& \\ + 2a^2bc^2d + 2a^2bcd^2 + 2ab^2c^2d + 2ab^2cd^2&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(abc + abd)^2 + (bcd + acd)^2 + 2(abc + abd)(bcd + acd)& \\ = (bcd + cda + dab + abc)^2&\end{aligned}$$

čime smo dokazali identitet.

ii) $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2(ab - cd)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2 + 4abcd$

Iz jednakosti

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = -2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

sledi

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = 4(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 = 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4a^2d^2 + 4b^2c^2 + 4b^2d^2 + 4c^2d^2 + 8a^2bc + 8a^2bd + 8a^2cd + 8ab^2c + 8ab^2d + 8b^2cd + 8abc^2 + 8ac^2d + 8abd^2 + 8acd^2 + 8bcd^2 + 24abcd$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8a^2bc + 8a^2bd + 8a^2cd + 8ab^2c + 8ab^2d + 8b^2cd + 8abc^2 + 8ac^2d + 8abd^2 + 8acd^2 + 8bcd^2 + 24abcd.$$

Primetimo da važi

$$8a^2bc + 8a^2bd + 8a^2cd + 8ab^2c + 8ab^2d + 8b^2cd + 8abc^2 + 8ac^2d + 8abd^2 + 8acd^2 + 8bcd^2 + 32abcd = 8abc(a + b + c + d) + 8abd(a + b + c + d) + 8acd(a + b + c + d) + 8bcd(a + b + c + d) = 0$$

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + 8a^2bc + 8a^2bd + 8a^2cd + 8ab^2c + 8ab^2d + 8b^2cd + 8abc^2 + 8ac^2d + 8abd^2 + 8acd^2 + 8bcd^2 + 24abcd = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 - 8abcd$$

što je izraz koji dobijamo kada izmnožimo desnu stranu jednakosti. Zaista:

$$2(ab - cd)^2 + 2(ac - bd)^2 + 2(ad - bc)^2 + 4abcd = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2c^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 - 8abcd$$

4. Konačne sume

Pod *konačnim sumama*, kao što im samo ime govori, smatramo zbir konačno mnogo članova nekog niza brojeva. U ovoj glavi ćemo izdvojiti neke poznatije algebarske identitete koji se koriste kod računanja određenih konačnih suma.

Primer 4.1. Izračunati sumu prvih n prirodnih brojeva.

Ovu sumu možemo još zapisati kao:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k$$

Prema jako poznatoj anegdoti, rešenje za ovaj problem je dao Karl Fridrih Gaus (Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855.), slavni nemački matematičar za kojeg važi da gotovo da ne postoji oblast matematike kojoj on nije dao doprinosa. Svoje najznačajnije delo *Disquisitiones Arithmeticae* ili *Aritmetička istraživanja* je napisao sa dvadeset i jednom godinom, i u njoj udario kamen temeljac teoriji brojeva kao zasebnoj matematičkoj disciplini.
Prema anegdoti, Gausov učitelj je njegovom razredu dao zadatak da izračunaju zbir prvih 100 prirodnih brojeva, nadajući se da će time dobiti dosta slobodnog vremena. Međutim, Gaus je dao rešenje nakon par trenutaka. Njegova ideja je bila da brojeve poređane u niz združuje u parove, prvi sa poslednjim, drugi sa pretposlednjim, itd. dobivši sledeći zbir:

$$(1 + 100) + (2 + 99) + \cdots (49 + 52) + (50 + 51)$$

Kako ovakvih parova čiji je zbir 101 ima ukupno 50, brzo je dobio rešenje $50 \cdot 101 = 5050$.

Prikazaćemo dva načina dobijanja rešenja koje zavisi od n. Označimo sumu $\sum_{k=1}^{n} k$ sa $S_1(n)$,

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) + n$$

$$S_1(n) = n + (n - 1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Pa je, ako saberemo ova dva izraza:

$$2S_1(n) = (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1)$$

I na kraju, dobijmo jednakost do koje je i Gaus došao:

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Da bismo dokazali ovu jednakost na drugi način, krenimo od sledeće sume:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = (0+1)^2 + (1+1)^2 + \cdots + (n-1+1)^2 + (n+1)^2$$

Primetimo sledeće, da važi:

$$(0+1)^2 = 0^2 + 2 \cdot 0 + 1$$

$$(1+1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$(2+1)^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1$$

...

$$(n-1+1)^2 = (n-1)^2 + 2 \cdot (n-1) + 1$$

$$(n+1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1$$

pa je

$$(0+1)^2 + (1+1)^2 + \cdots + (n-1+1)^2 + (n+1)^2 \\ = 0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n) + n \\ + 1.$$

Našu jednakost možemo zapisati kao:

$$(n+1)^2 = 2S_1(n) + n + 1$$

$$(n+1)(n+1-1) = 2S_1(n)$$

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Primer 4.2. Odrediti sledeće sume:

i) $S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

Iskoristićemo sličan pristup problemu kao i u primeru *4.2.* Prema jednakosti kuba binoma, važi sledeće

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

pa je

$$1^3 = (0+1)^3 = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

...

$$n^3 = (n-1+1)^3 = (n-1)^3 + 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1.$$

Odavde je

$$\begin{aligned} &1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 \\ &\qquad = 0^3 + 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 1 + 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 + \cdots + (n-1)^3 \\ &\qquad + 3 \cdot (n-1)^2 + 3 \cdot (n-1) + 1 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \end{aligned}$$

$$(n+1)^3 = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n + 1$$

$$\begin{aligned} 3S_2(n) &= (n+1)^3 - 3\frac{n(n+1)}{2} - n - 1 = (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right) \\ &= (n+1)\left(n^2 + \frac{1}{2}n\right) = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \ . \end{aligned}$$

I, na kraju

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ii) $S_3(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$

Analogno, krenimo najpre od sledeće sume

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4 = (0+1)^4 + (1+1)^4 + \cdots + (n-1+1)^4 + (n+1)^4$$

Iz jednakosti

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

dobićemo

$$(0+1)^4 = 0^4 + 4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 1$$

$$(1+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1$$

$$\ldots$$

$$(n-1+1)^4 = (n-1)^4 + 4 \cdot (n-1)^3 + 6 \cdot (n-1)^2 + 4 \cdot (n-1) + 1$$

što kad zamenimo, dobijamo

$$1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + (n+1)^4$$
$$= 1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 + 4 \cdot S_3(n) + 6 \cdot S_2(n) + 4 \cdot S_1(n) + n + 1$$

$$(n+1)^4 = 4 \cdot S_3(n) + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n + 1$$

$$4S_3(n) = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - n - 1$$

$$4S_3(n) = (n+1)((n+1)^3 - 2n^2 - 4n - 1)$$

$$4S_3(n) = (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - 3n - 1)$$

$$4S_3(n) = (n+1)(n^3 + n^2) = n^2(n+1)^2.$$

I na kraju

$$S_3(n) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = {S_1}^2(n)$$

iii) $S_i(n) = \sum_{k=1}^{n} k^i$ za proizvoljan prirodan broj i

Prema binomnoj teoremi, imamo

$$(n+1)^{i+1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} n^k.$$

Ukoliko n zamenimo redom sa $1, 2$ ... imamo:

$$1^{i+1} = (0+1)^{i+1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} 0^k$$

$$2^{i+1} = (1+1)^{i+1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} 1^k$$

...

$$n^{i+1} = (n-1+1)^{i+1} = \sum_{\mathrm{k}=0}^{i+1} \binom{i+1}{k} (n-1)^k$$

pa je, ako prihvatimo oznaku $S_0(n) = n + 1$

$$1^{i+1} + 2^{i+1} + \cdots + n^{i+1} + (n+1)^{i+1} = 1^{i+1} + 2^{i+1} + \cdots + n^{i+1} + \sum_{\mathrm{k}=0}^{i} \binom{i+1}{k+1} S_{i-k}(n)$$

$(i+1)S_i(n) = (n+1)^{i+1} - \binom{i+1}{2} S_{i-1}(n) - \cdots - \binom{i+1}{i} S_1(n) - \binom{i+1}{i+1} S_0(n).$

Na kraju dobijamo rekurzivnu formulu

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1}\left((n+1)^{i+1} - \binom{i+1}{2} S_{i-1}(n) - \cdots - \binom{i+1}{i} S_1(n) - \binom{i+1}{i+1} S_0(n)\right)$$

ili

$$S_i(n) = \frac{1}{i+1}\left((n+1)^{i+1} - \sum_{\mathrm{k}=0}^{i} \binom{i+1}{k+1} S_{i-k}(n)\right)$$

Primer 4.3. Izračunaj sledeće izraze:

i) Zbir prvih n neparnih prirodnih brojeva.

Rešenje ovog primera dobijamo relativno jednostavno, na sledeći način

$$1+3+5+\cdots+2n-1=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=\sum_{k=1}^{n}2k-\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1.$$

Kada iskoristimo prethodno dokazane identitete za $S_i(n)$, dobijamo

$$2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=2\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2+n-n=n^2$$

ii) Zbir prvih n parnih prirodnih brojeva.

Slično kao u prethodnom primeru

$$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k=2\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)$$

iii) Zbir kvadrata prvih n neparnih prirodnih brojeva.

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

Što daje

$$4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{4n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 6n}{6}$$
$$= \frac{4n(n+1)(2n+1-3) + 6n}{6} = \frac{8n(n+1)(n-1) + 6n}{6}$$
$$= \frac{8n^3 - 8n + 6n}{6} = \frac{4n^3 - n}{3} = \frac{n(4n^2-1)}{3} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$$

Dakle

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

iv) Zbir kvadrata prvih n parnih prirodnih brojeva.

$$2^2 + 4^2 + 6 + \cdots + (2n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = \sum_{k=1}^{n} 4k^2 = 4\sum_{k=1}^{n} k^2$$

A ovo je jednako

$$4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

Dakle

$$2^2 + 4^2 + 6 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Primer 4.4. Izračunaj sledeće izraze.

i) $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n-1}n$

Primetimo da ovu sumu možemo predstaviti kao:

a) Ukoliko je n paran broj $\big(1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1)\big) - (2 + 4 + 6 + \cdots + n)$

b) Ukoliko je n *ne*paran broj $(1 + 3 + 5 + \cdots + n) - (2 + 4 + 6 + \cdots + (n-1))$

Pa imamo dve mogućnosti:

a) $S = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-1) - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \frac{n}{2}\frac{n+2}{2} = \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{4} - n = -n$

b) $S = \sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(2k-1) - \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(2k) = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n-1}{2}\right) = \frac{n+1}{2}$

ii) $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$

Predstavimo ovu sumu kao

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2\sum_{k=0}^{n-1} 2^k.$$

Primetimo sledeće, da važi

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}$$

$$2^{n-1} = 2^{n-2} + 2^{n-2}$$

$$\ldots$$

$$2 = 1 + 1$$

pa imamo

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1 + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

odakle je

$$S = 2(2^n - 1)$$

iii) $\quad S = 2 + 5 + 11 + \cdots + (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$

Predstavimo ovu sumu kao

$$\sum_{k=1}^{n} (3 \cdot 2^{k-1} - 1) = 3 \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} 1 \quad = 3 \cdot (2^n - 1) - n$$

iv) $\quad S = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \cdots + (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$

U ovom primeru, a kako je suma prvih n prirodnih brojeva $\frac{n(n+1)}{2}$, S možemo zapisati kao:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 + k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k$$

što je, prema prethodno dokazanim identitetima, jednako

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{2n+1}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{2n+4}{6}$$

i, na kraju, dobijamo identitet

$$S = \frac{2n(n+1)(n+2)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Primer 4.5. Izračunati sledeće sume.

i) $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)}$

Krenimo najpre od sređivanja izraza unutar sume.

$$\frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)} = \frac{2k(k+1)+1}{k(k+1)} = \frac{2k(k+1)}{k(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)} = 2 + \frac{1}{k(k+1)}$$

pa je

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{1}{k(k+1)}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 2n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Kako je

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

imamo

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}\right) = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{n+1}.$$

I na kraju dobijamo rešenje

$$S = 2n + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 2n+1-\frac{1}{n+1} = \frac{2n^2+2n+n+1-1}{n+1} = \frac{2n^2+3n}{n+1}$$

ii) $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$

Slično kao i u prethodnom primeru, krenućemo od sređivanja izraza po kom sumiramo.

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k^2}{4k^2-1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4k^2-1+1}{4k^2-1} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4k^2-1}{4k^2-1} + \frac{1}{4k^2-1}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right).$$

Pa je

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4k^2-1}\right) = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4} \cdot n + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}.$$

Primetimo da vaći sledeće

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k)^2-1} = \frac{1}{2k-1} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

odakle sledi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$$

Na kraju dobijamo rešenje

$$S = \frac{1}{4} \cdot n + \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{4} \cdot n + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{4n^2 + 2n + 2n + 1 - 8}{8(2n+1)}$$
$$= \frac{4n^2 + 4n - 7}{8(2n+1)}$$

iii) $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{2n+1-1}{2(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Primer 4.6. Izračunati sledeće sume.

i) $S = \frac{1}{15} + \frac{1}{105} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$

Ovu sumu možemo zapisati i kao:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}.$$

Odredimo najpre koeficijente A, B i C u jednakosti:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{A}{(2n-1)} + \frac{B}{(2n+1)} + \frac{C}{(2n+3)}$$

koja, kada je pomnožimo sa $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$ daje

$$1 = A(2n+1)(2n+3) + B(2n-1)(2n+3) + C(2n-1)(2n+1)$$

$$1 = A(4n^2 + 8n + 3) + B(4n^2 + 4n - 3) + C(4n^2 - 1).$$

Ovime dobijamo sistem od tri jednačine sa tri promenljive

$$4A + 4B + 4C = 0$$

$$8A + 4B = 0$$

$$3A - 3B - C = 1$$

čije je rešenje$A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{4}$ i $C = \frac{1}{8}$, pa imamo

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{8(2n-1)} - \frac{1}{4(2n+1)} + \frac{1}{8(2n+3)}$$

odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{40} + \frac{1}{24} - \frac{1}{20} + \frac{1}{56} + \frac{1}{40} - \frac{1}{28} + \frac{1}{72} + \cdots + \frac{1}{16k-8} - \frac{1}{8k+4}$$
$$+ \frac{1}{16k+24}.$$

Primetimo da je

$$\frac{1}{8k+4} = \frac{2}{16k+8} = \frac{1}{16(k+1)-8} + \frac{1}{16(k-1)+24}$$

što će pokratiti sve razlomke u sumi za $k \in [2, n-1]$, pa će ostati samo

$$S = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16n+8} - \frac{1}{8n+4} + \frac{1}{16n+24}.$$

I, na kraju

$$S = \frac{1}{12} + \frac{1}{8(2k+1)} - \frac{1}{4(2k+1)} + \frac{1}{8(2k+3)}$$

$$= \frac{2(2n+1)(2n+3) + 3(2n+3) - 6(2n+3) + 3(2n+1)}{24(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{8n^2 + 16n + 6 + 6n + 9 - 12n - 18 + 6n + 3}{24(2n+1)(2n+3)} = \frac{8n^2 + 16n}{24(2n+1)(2n+3)}$$

$$= \frac{8n(n+2)}{24(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}.$$

Dakle

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

5. Zaključak

Kao što je naglašeno u uvodu ovog rada, matematički identiteti su od onolikog značaja koliko ih je moguće primeniti na rešavanje problemskih zadataka. To je samo jedan od razloga zašto u našem sistemu obrazovanja ne treba stremiti ka navođenju i pamćenju što većeg broja osnovnih identiteta – stepen binoma, razlika kvadrata, zbir i razlika kubova – moraju se znati napamet, ali to treba da se uradi kroz vežbanja zadataka i primera, a ne da se pamti bez razumevanja, ili ukrasiti učionice što većim brojem matematičkih formula. Ono što bi trebalo biti prioritet jeste razvoj logičkih sposobnosti kod učenika, tako da sami mogu da uvide značaj, ne samo pamćenja identiteta, već i dokazivanje samog identiteta, ukoliko postoji, njegovu geometrijsku interpretaciju, a naročito načine na koji mogu da ga primene. Sve ovo bi, naravno, trebalo prilagoditi uzrastu učenika, i njihovim matematičkim saznanjima. Naglasićemo das u polinomi, tj. Algebarski izrazi apstraktni na nivou osnovne škole, pa se teži ka geometrijskom predstavljanju, kao što sam u samom radu i pokazala.

U osnovnoj školi se koriste samo osnovni pojmovi, dok je malo šira primena u srednjoj školi, jer se tu toj temi posvećuje više vremena a i koriste se nizovi. Teži se prepoznavanju komplikovanijih algebarskih izraza i njihovom pojednostavljanjuradi rešavanja raznih zadataka, npr. jednačina (kvadratnih, a i većih stepena), izračunavanje integral,sume, nizova, itd..

Takođe, učenicima bi trebalo prikazati i što više načina za rešavanje istog problema. Time podstičemo kreativnost u rešavanju problema, njegovo sagledavanje iz više uglova, i možda ono što je najznačajnije, prikazujemo deci povezanost različitih grana matematike, i da je nemoguće postojanje određenih matematičkih disciplina jednih bez drugih.

Za bolje razumevanje razvoja matematike kroz vekove je jako bitno predočiti učenicima i istorijsku pozadinu pojedinih identiteta. Veliki broj poznatih algebarskih identiteta nosi imena slavnih matematičara, pa bi uz njihovo izučavanje valjalo naglasiti ko su ti matematičari, i koji su to njihovi doprinosi razvoju matematike. Gotovo svi oni su se, sem matematike, bavili i drugim naukama i disciplinama što je prema meni bitno napomenuti deci, jer će time uvideti jednu širu dimenziju i sveopštost matematike.

Literatura

[1] Herman J., Kučera R., Šimša J., *Equations and Inequalities: Elementary problems and Theorems in Algebra and Number Theory*, 2000, Academy of Sciences of the Czech Republic

[2] Ikodinović N., *Tablične formule,* Tangenta *33*, 2013/2014 – I, str. 13 – 16

[3] Trifunović D., *Iz istorije matematike*, 2008, str. 53 – 57

[4] Marinković B., *Planeta - magazin za nauku, istraživanja i otkrića 44*, 2011, str. 12 – 13

[5] Weisstein Eric W., *Lebesgue Identity*, preuzet sa http://mathworld.wolfram.com/LebesgueIdentity.html 15.03.2017.

[6] Weisstein Eric W., *Fibonacci Identity*, preuzet sa http://mathworld.wolfram.com/FibonacciIdentity.html 19.03.2017.

[7] Weisstein Eric W., *Liouville Identity*, preuzet sa http://mathworld.wolfram.com/LiouvilleIdentity.html 19.03.2017.

[8] Weisstein Eric W., *Euler Four-Square Identity*, preuzet sa http://mathworld.wolfram.com/EulerFour-SquareIdentity.html 20.03.2017.

[9] Weisstein Eric W., *Degens Eight-Square Identity*, preuzet sa http://mathworld.wolfram.com/DegensEight-SquareIdentity.html 23.03.2017.

[10] AOPS, *Sophie Germain Identity*, preuzet sa http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Sophie_Germain_Identity 27.03.2017.

[11] Dash S., Li M., Jain M., Hayes A., Kau A., *Algebraic identities*, preuzet sa https://brilliant.org/wiki/algebraic-identities/ 03.04.2017.

[12] Ilišević I., *Neke konačne sume*, Osiječki matematički list 11, 2011, str. 1 – 10

[13] Rademacher H., *The enjoyment of mathematics*, Princeton University press, 1957.