Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Master rad

Procene granica nula polinoma i Šturmov algoritam

Autor:
Vanja Vukadinović

Mentor:
dr Đorđe Krtinić

Beograd,
2019.

Sadržaj

1 Uvod

Polinomi i potreba za određivanjem njihovih nula sastavni su deo skoro svake oblasti matematike. Pojam polinoma formalno se uvodi u drugom ciklusu osnovnog obrazovanja i vaspitanja i to u sedmom razredu. Rad sa polinomima se tom prilikom svodi na njihovo sabiranje, oduzimanje, množenje i rastavljanje na činioce, a nekad i na određivanje znaka i stepena polinoma.

S obzirom na to da je polinom vrsta algebarskog izraza, nije teško zaključiti da se njegovim izjednačavanjem sa nulom dobija, zapravo, jednačina (ukoliko je polinom stepena bar 1). Imajući u vidu tu činjenicu, može se reći da se polinomima operiše čak i u nižim razredima kroz rešavanje linearnih jednačina. Rešiti jednačinu znači odrediti njen skup rešenja, odnosno, prevedeno na jezik polinoma to znači odrediti nule odgovarajućeg polinoma.

Tim jezikom počinje da se govori u srednjoj školi, pa se određivanje nula polinoma najčešće vrši rastavljanjem na činioce primenom formula za kvadrat binoma i razliku kvadrata, ali i primenom Bezuove teoreme. Međutim, neretko se dešava da nije moguće ili nije jednostavno odrediti nule, pa čak ni samo njihov broj. Ipak, francuski matematičar Žak Šarl Fransoa Šturm osmislio je algoritam za nalaženje broja realnih nula polinoma.

Dalje se nameće pitanje šta je sa nulama koje nisu realne. Istina, o ovome je moguće razmišljati i na nivou srednjoškolske matematike, jer se već u drugom razredu uvode kompleksni brojevi, rešavaju se kvadratne jednačine i u širem skupu od skupa realnih brojeva.

U ovom radu biće dat jedan postupak za rešavanje problema koliko nula može imati svaki polinom, koliko je njih realnih, a koliko kompleksnih.

U drugoj glavi su navedena osnovna tvrđenja u vezi sa polinomima čiji su koeficijenti realni, odnosno kompleksni brojevi.

Akcenat u trećoj glavi stavljen je na problem nalaženja granica nula polinoma, koje su, pored određivanja nula, takođe od velikog značaja. Na kraju glave nalaze se zadaci u kojima se primenjuju uvedene teoreme.

U četvrtoj glavi prikazan je glavni deo rada — algoritam za određivanje realnih nula nekog polinoma. Odgovor na pitanje koliko je ovaj algoritam koristan, otkriće se u delu sa zadacima.

2 Polinomi sa koeficijentima iz $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$

Definicija 1. *Polinom stepena n, $n \in \mathbb{N}_0$, nad poljem $\mathbb{F}$ je preslikavanje*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{F},$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elementi polja $\mathbb{F}$ i $a_n \neq 0$.

Polinom kod koga je $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ nazivamo nula polinom.

Oznakom $\mathbb{F}[x]$ obeležavamo skup svih polinoma sa koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Oznakom $\deg p$ obeležavamo prirodan broj n i nazivamo stepen polinoma p, a a_n zovemo koeficijentom najstarijeg člana polinoma $p(x)$. Za stepen nula polinoma uzimamo $-\infty$.

Iz ove definicije vidimo da su polinomi stepena ne većeg od nula konstante, to jest konstantni polinomi.

Definicija 2. *Polinom stepena n, $n \in \mathbb{N}_0$, nad poljem $\mathbb{R}$ je preslikavanje*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

gde su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ elementi iz $\mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$.

Primer polinoma sa koeficijentima iz polja realnih brojeva bio bi

$$P(x) = -\frac{2}{3}x^5 + 1,03x^2 - 12x + 0,1.$$

Definicija polinoma ima smisla i ako su koeficijenti elementi nekog prstena. Međutim, kod takvih polinoma ne moraju važiti neka tvrđenja koja važe za polinome sa koeficijentima iz polja. Jedno od takvih je tvrđenje o deljenju sa ostatkom, koje će biti bitno za nastavak rada. U ovom radu će akcenat biti na polinomima iz $\mathbb{R}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$, ali ćemo koristiti činjenicu da je $\mathbb{Z}[x]$ sadržano u $\mathbb{R}[x]$, jer postoje tvrđenja koja omogućavaju da se lakše izvrši faktorizacija nekih polinoma sa celobrojnim koeficijentima, a ta tvrđenja su ujedno i standardni deo školskog gradiva.

Definicija 3. *Neka je $p(x)$ polinom stepena $n \geqslant 1$. Broj a, takav da važi $p(a) = 0$, naziva se nulom ili korenom tog polinoma.*

Teorema 1 (***Teorema o deljenju sa ostatkom***)**.** *Za svaki polinom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ i svaki nenula polinom $q(x) \in \mathbb{R}[x]$, postoje jedinstveni polinomi $s(x)$ i $r(x)$ iz $\mathbb{R}[x]$, tako da važi $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$ i $\deg r < \deg q$. Polinom $r(x)$ naziva se ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ sa polinomom $q(x)$.*

Dokaz. Dokažimo prvo egzistenciju polinoma s i r. Dokaz izvodimo transfinitnom indukcijom po $\deg p$.
Pretpostavimo da je tvrđenje dokazano za sve polinome stepena manjeg od n. Dokažimo da tvrđenje važi za polinom p stepena n.

Neka je $\deg p < \deg q$. Tada je $p = 0 \cdot q + r$ i $\deg p < \deg q$. Dakle, $s = 0$ i $r = p$ zadovoljavaju uslove teoreme.

Neka je sada $\deg p \geqslant \deg q$, i neka je $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ i $q(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i x^i$. Neka je $u(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x)$. Tada je $\deg u = (n-m)+m = n$. Koeficijent uz najstariji član polinoma $u(x)$ je $\frac{a_n}{b_m} b_m = a_n$, pa je zato
$\deg(p-u) < n$. Prema indukcijskoj hipotezi postoje polinomi $s_1(x)$ i $r(x)$ takvi da je $p(x) - u(x) = s_1(x)q(x) + r(x)$ i $\deg r < \deg q$. Otuda je

$$\begin{aligned} p = u + (p-u) &= \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m}\right) q + s_1 q + r \\ &= \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + s_1\right) q + r \\ &= qs + r. \end{aligned}$$

Polinomi $s(x) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + s_1(x)\right)$ i $r(x)$ zadovoljavaju uslove tvrđenja.

Dokažimo sada jedinstvenost polinoma s i r. Neka je $p = sq + r = s_1 q + r_1$, i $0 \leqslant \deg r, \deg r_1 \leqslant \deg q$. Tada je $q(s - s_1) = r_1 - r$. Kako je
$\deg(r_1 - r) \leqslant \max\{\deg r, \deg r_1\} < \deg q$, to je $\deg(q(s-s_1)) < \deg q$. A kako je $\deg(q(s-s_1)) = \deg q + \deg(s - s_1) < \deg q$, to je $\deg(s-s_1) < 0$, odnosno $s - s_1 = 0$, pa je $s = s_1$. Samim tim je i $r = r_1$.

□

Analogno tvrđenje važi i za polinome sa koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$.

Neka su $p(x)$ i $q(x)$ polinomi iz $\mathbb{R}[x]$ različiti od nula polinoma. Označimo sa

$$D(p,q) = \{t \in \mathbb{R}[x] \ \mid \ t|p \wedge t|q\}.$$

Definicija 4. *Polinom $d \in \mathbb{R}[x]$ je najveći zajednički delilac polinoma p i q ako je $d \in D(p,q)$ i ako za svako $t \in D(p,q)$ važi $t|d$.*

Najveći zajednički delilac polinoma p i q obeležavamo sa $NZD(p,q)$, a kako $t|d$, onda $t|ad$, gde je a konstanta različita od nule. To govori da najveći zajednički delilac nije jedinstveno određen. Štaviše, postoji čitava klasa takvih polinoma, a kako se oni sadrže jedan u drugom, razlikuju se do na umožak konstantom. Jednoznačnosti radi, za najveći zajednički delilac se onda u tom slučaju može definisati onaj polinom iz te klase čiji je koeficijent uz najstariji član jednak jedinici.

Niz jednakosti

$$\begin{aligned}
p &= s_1 q + r_1, \quad 0 < \deg r_1 < \deg q,\\
q &= s_2 r_1 + r_2, \quad 0 < \deg r_2 < \deg r_1,\\
r_1 &= s_3 r_2 + r_3, \quad 0 < \deg r_3 < \deg r_2,\\
&\vdots\\
r_{n-2} &= s_n r_{n-1} + r_n, \quad 0 < \deg r_n < \deg r_{n-1},\\
r_{n-1} &= s_{n+1} r_n,
\end{aligned}$$

nazivamo Euklidovim algoritmom dužine n za polinome p i q.

Teorema 2. *Za svaka dva polinoma $p, q \in \mathbb{R}[x]$, $q \neq 0$, postoji jedinstven Euklidov algoritam. Tada je $NZD(p,q) = r_n$, gde je r_n poslednji ostatak u Euklidovom algoritmu koji je različit od nula polinoma.*

Primer 1. *Neka je $p(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 10$. Podeliti zadati polinom polinomom $q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$ i naći ostatak pri deljenju.*

Rešenje. Treba naći polinome $s(x)$ i $r(x)$ tako da je $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$. Imamo:

$$\begin{array}{l}
(x^5 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 10) : (x^3 - 2x^2 + 3x + 2) = x^2 + 3x + 1\\
\underline{x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 2x^2}\\
\quad 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 - x + 10\\
\quad \underline{3x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 6x}\\
\qquad x^3 - 6x^2 - 7x + 10\\
\qquad \underline{x^3 - 2x^2 + 3x + 2}\\
\qquad -4x^2 - 10x + 8
\end{array}$$

Dakle, količnik $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ je polinom $s(x) = x^2 + 3x + 1$, a ostatak je polinom $r(x) = -4x^2 - 10x + 8$.

$\triangle$

Primer 2. *Naći najveći zajednički delilac polinoma* $q(x) = x^2 - x + 1$ *i* $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$.

Rešenje. Koristeći Euklidov algoritam, naći ćemo najveći zajednički delilac datih polinome.

$$\begin{array}{l}
(3x^3 - 2x^2 + x + 2) : (x^2 - x + 1) = 3x + 1 \\
\underline{3x^3 - 3x^2 + 3x} \\
\qquad\quad x^2 - 2x + 2 \\
\qquad\quad \underline{x^2 - x + 1} \\
\qquad\qquad -x + 1
\end{array}$$

Dakle, $p(x) = (3x + 1)q(x) + (-x + 1)$. Nastavljamo postupak deljenja sve dok ne dođemo do poslednjeg ostatka koji je različit od nula polinoma.

$$\begin{array}{l}
(x^2 - x + 1) : (-x + 1) = -x \\
\underline{x^2 - x \qquad} \\
\qquad\quad 1
\end{array}$$

Druga jednakost je $q(x) = -x(-x + 1) + 1$. I poslednja jednakost je

$$-x + 1 = (-x + 1) \cdot 1 + 0,$$

odnosno, $NZD(p, q) = 1$, tj. polinomi su uzajamno prosti.

$\triangle$

Teorema 3 (***Bezuov stav***). *Ostatak pri deljenju polinoma* $p(x)$ *sa* $x - a$ *jednak je* $p(a)$.

Dokaz. Prema teoremi o deljenju sa ostatkom, svaki polinom može na jedinstven način da se predstavi kao $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, a kako je $q(x) = x - a$ polinom kojim delimo polinom $p(x)$, to je $p(x) = s(x)(x - a) + r(x)$. Važi

$$p(a) = s(a)(a - a) + r(a) = r(a).$$

Kako je $\deg r < \deg q = 1$, sledi da je $r(x)$ konstanta, pa je ostatak pri deljenju polinoma $p(x)$ sa $x - a$ jednak $r = r(x) = p(a)$.

$\square$

Posledica 1. *Neka je* $p(x)$ *polinom stepena* n. *Broj* a *je nula polinoma* $p(x)$ *ako i samo ako je* $p(x) = (x - a)q(x)$, *gde je* $q(x)$ *polinom stepena* $n - 1$.

Dokaz. Neka je broj a nula polinoma $p(x)$, tj. $p(a) = 0$. Pokažimo da je $p(x) = (x - a)q(x)$.

Ako se polinom $p(x)$ podeli polinomom $x - a$, dobija se

$$p(x) = (x - a)q(x) + r.$$

Sledi da je $0 = p(a) = (a - a)q(a) + r$, tj. $r = 0$, dakle $p(x) = (x - a)q(x)$.

Obratno pretpostavimo da je $p(x) = (x - a)s(x)$. Tada dobijamo da je $p(a) = (a - a)q(a) = 0$, tj. broj a je nula polinoma $p(x)$.

□

Dakle, ako su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ različite nule polinoma $p(x)$ stepena n, $k < n$, tada se taj polinom može predstaviti kao

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)q(x),$$

gde je $q(x)$ polinom stepena $n - k$.

Definicija 5. *Broj a je višestruka nula reda k, gde je k prirodan broj, polinoma $p(x)$ ako se on može predstaviti u obliku $p(x) = (x - a)^k q(x)$, gde je $q(x)$ polinom i a nije nula tog polinoma.*

Pojam višestrukosti nule analogno se definiše i za analitičke funkcije.

Naredna teorema nam daje kandidate za racionalne nule polinoma sa celobrojnim koeficijentima. Ova teorema je u srednjoj školi glavni alat za rastavljanje polinoma na činioce.

Teorema 4. *Neka je $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ polinom sa celobrojnim koeficijentima ($a_i \in \mathbb{Z}$). Ako je:*

(a) k celobrojna nula polinoma, tada $k | a_0$;

(b) $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, NZD$(a, b) = 1$ i $p\left(\frac{a}{b}\right) = 0$, tada $a | a_0$, $b | a_n$.

Dokaz. Neka je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

(a) Ako je k celobrojna nula polinoma $p(x)$, tada je:

$$0 = p(k) = \sum_{i=0}^{n} a_i k^i \Leftrightarrow a_0 = k(-a_1 - a_2 k^1 - \cdots - a_n k^{n-1}).$$

Iz prethodnog sledi da $k|a_0$.

(b) Kako je $\dfrac{a}{b}$ nula polinoma $p(x)$, tada važi:

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1 \frac{a}{b} + a_2 \frac{a^2}{b^2} + \cdots + a_n \frac{a^n}{b^n}.$$

Kada se prethodna jednakost pomnoži sa b^n, dobija se:

$$a_0 b^n = a(-a_1 b^{n-1} - a_2 a b^{n-2} - \cdots - a_n a^{n-1}).$$

Dakle, a deli $a_0 b^n$. A kako je $NZD(a,b) = 1$, to a deli a_0.

Sa druge strane, iz jednakosti $a_n a^n = b(-a_0 b^{n-1} - \cdots - a_{n-1} a^{n-1})$ dobijamo da b deli $a_n a^n$, a kako je opet $NZD(a,b) = 1$, to b deli a_n.

□

Primer 3. *Naći realne nule polinoma* $p(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$.

Rešenje. S obzirom na to da je $a_n = a_4 = 1$, prema teoremi 4 kandidati za racionalne nule polinoma su brojevi iz skupa

$$\{k \in \mathbb{N} \mid k|12\} = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -12, 12\}.$$

Iz $p(-1) = 0$, $p(-2) = 0$, $p(2) = 0$ i $p(3) = 0$ odmah vidimo da su nule polinoma $p(x)$ brojevi -1, -2, 2 i 3.

Kako smo dobili da polinom četvrtog stepena ima četiri nule, to je

$$p(x) = s(x)(x+1)(x+2)(x-2)(x-3)$$

i $\deg p = \deg s + \deg q$, gde je $q(x) = (x+1)(x+2)(x-2)(x-3)$. A kako je $\deg p = \deg q = 4$, odavde zaključujemo da je $\deg s(x) = 0$, tj. da je konstanta. Dakle, polinom $p(x)$ nema više racionalnih nula.

△

Primer 4. *Naći realne nule polinoma* $p(x) = 8x^2 + 2x - 3$.

Rešenje. U ovom slučaju je $a_n = a_2 = 8$, a $a_0 = 3$, pa su kandidati za racionalne nule datog polinoma

$$\frac{a}{b} \in \left\{1, -1, 3, -3, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{8}\right\}.$$

Kako je $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ i $p\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$, to su nule polinoma $x = \frac{1}{2}$ i $x = -\frac{3}{4}$. △

Teorema 5. *Polinom* $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, *gde su* $a_i \in \mathbb{R}$ *ili* $a_i \in \mathbb{C}$, *je neprekidna i beskonačno diferencijabilna funkcija.*

Dokaz. Izvod polinoma je takođe polinom, pa je $p(x)$ beskonačno diferencijabilna funkcija, a samim tim i neprekidna. □

Neka je $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$ i $a_i \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Tada važi sledeće:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left| a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n}\right)\right| \\ &\geqslant |a_n z^n| \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n||z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|a_n||z|^n}\right) \to \infty, \quad |z| \to \infty. \end{aligned}$$

To jest, za veliko $|z|$ polinom je neograničen.

Teorema 6 (***Princip maksimuma modula***)**.** *Neka je* D *oblast u* $\mathbb{C}$ *i* f *analitička funkcija u oblasti* D. *Ako* $|f|$ *ima lokalni maksimum u nekoj tački* $a \in D$, *onda je* f *konstantna funkcija.*

Dokaz. Neka funkcija $|f|$ dostiže lokalni maksimum u $a \in D$. Tada postoji disk $K = K(a, r) \subseteq D$ tako da važi $|f(z)| \leqslant |f(a)|$ za svako $z \in K$.

Ako je funkcija f konstantnog modula na celom disku K, a sama nije konstanta, onda bi slika celog diska bila sadržana u jednoj kružnici, a to nije moguće po teoremi o otvorenom preslikavanju. Zato tada postoji kružnica γ_ρ poluprečnika $0 < \rho < r$, $|z - a| = \rho$, takva da je $\gamma_\rho \subseteq D$ i za bar jednu tačku $z \in \gamma_\rho$ važi da je $|f(z)| < |f(a)|$, a kako je $|f|$ neprekidna funkcija, to onda važi i u okolini tačke z. Na osnovu Košijeve integralne formule[1] važi:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z-a}dz.$$

Smenom $z = a + re^{it}$, $z \in \gamma_\rho$ i $t \in [0, 2\pi]$, dobijamo:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{a+re^{it}-a} ire^{it}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt,$$

pa je onda

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(a)|dt < |f(a)|.$$

Nejednakost $\leqslant$ važi na celoj kružnici, a stroga nejednakost na skupu mere veće od nule. Pa poslednja nejednakost važi samo ako je funkcija f konstantna, što je i trebalo dokazati.

$\square$

Teorema 7 (***Liuvilova teorema***[2]). *Ako je f analitička i ograničena funkcija na skupu $\mathbb{C}$, tada je f konstantna funkcija na $\mathbb{C}$.*

[1] Košijeva integralna formula: Neka je f analitička funkcija u oblasti D i neprekidna na rubu oblasti D u oznaci ∂D. Tada za svaku tačku $a \in D$ važi formula

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

.

[2] Joseph Liouville (1809–1882) je bio francuski matematičar

Dokaz. Kako je f ograničena, to je $M = \sup_{a\in\mathbb{C}} |f(a)| < +\infty$. Neka je γ_ρ kružnica sa centrom a, gde je a proizvoljno, poluprečnika ρ. Na osnovu Košijeve formule za izvod analitičke funkcije[3], imamo sledeće:

$$|f'(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{|(z-a)|^2}|dz| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{|f(z)|}{\rho^2}d\rho \leqslant \frac{M}{\rho}.$$

Kako je $\rho > 0$ proizvoljno, sledi da je $|f'(a)| = 0$, tj. funkcija f je konstantna na $\mathbb{C}$.

□

Polinomi su analitičke funkcije, pa možemo primeniti prethodne dve teoreme i na polinome.

Kada se govori o nulama polinoma, nameće se pitanje koliko najviše nula može imati taj polinom. Upravo će osnovna teorema algebre dati bitnu osobinu svih polinoma iz $\mathbb{C}[x]$.

Teorema 8 (***Osnovni stav algebre***). *Svaki polinom $p \in \mathbb{C}[z]$ stepena bar 1 ima bar jednu nulu u $\mathbb{C}$.*

Dokaz. Prikazaćemo dve verzije dokaza ovog stava.
Neka je $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$. Bez umanjenja opštosti, pretpostavimo da je $a_n = 1$.

I dokaz:
Označimo sa $\mu = \inf_{z\in\mathbb{C}} |p(z)|$. Zbog

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left|z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right)\right| \\ &\geqslant |z^n|\left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z^n|}\right) \to \infty, \quad |z| \to \infty \end{aligned}$$

[3]Košijeva formula za izvod u tački a:

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^2}$$

tačke z_k za koje važi $\mu < |p(z_k)| < \mu + \dfrac{1}{k}$ (koje postoje) leže u krugu $|z| \leqslant R$ za dovoljno veliko R. Taj krug je kompaktan skup, pa postoji podniz niza (z_k) (koji ćemo isto označiti) koji konvergira nekom z_0, $|z_0| \leqslant R$. Kako je polinom $p(z)$ neprekidna funkcija, to tada i $p(z_k) \to p(z_0)$, pa i $|p(z_k)| \to |p(z_0)| = \mu$, kad $k \to \infty$. Dokazaćemo da je $\mu = 0$, tj. $p(z_0) = 0$.

Pretpostavimo suprotno, da je $\mu > 0$, i formirajmo polinom

$$b(z) = \frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}.$$

Tada je

$$|b(z)| = \left|\frac{p(z + z_0)}{p(z_0)}\right| \geqslant 1, \qquad z \in \mathbb{C} \text{ i } b(0) = 1.$$

Polinom b ima oblik

$$b(z) = 1 + b_m z^m + \cdots + b_n z^n,$$

gde je $1 \leqslant m \leqslant n$ i $b_m \neq 0$, pa je $b_m = \rho e^{i\psi}$, $\rho \neq 0$.

Izaberimo $\varphi = \dfrac{\pi - \psi}{m}$ i posmatrajmo vrednost polinoma b u tački $z = re^{i\varphi}$.

Tada je $b_m z^m = \rho e^{i\psi} r^m e^{i(\pi - \psi)} = -\rho r^m = -|b_m| r^m$, pa je

$$\begin{aligned}
|b(re^{i\varphi})| &= \left|1 - |b_m| r^m + b_{m+1} z^{m+1} + \cdots + b_n z^n\right| \\
&\leqslant |1 - |b_m| r^m| + \left|b_{m+1} z^{m+1} + \cdots + b_n z^n\right| \\
&\leqslant |1 - |b_m| r^m| + r^{m+1}(|b_{m+1}| + \cdots + |b_n| r^{n-m-1}) \\
&= 1 - r^m(|b_m| - r|b_{m+1}| - \cdots - r^{n-m}|b_n|) < 1,
\end{aligned}$$

ako je r dovoljno malo. Ovo je kontradikcija sa $|b(z)| \geqslant 1$ za $z \in \mathbb{C}$, odnosno, polinom $p(z)$ ima bar jednu nulu u $\mathbb{C}$.

II dokaz:

Pretpostavimo suprotno. Neka polinom $p(z)$ nema nulu u $\mathbb{C}$. Kako je $p(z)$ neograničena funkcija za dovoljno veliko z, onda je $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ ograničena. Tada je po Liuvilovoj teoremi $|f(z)| = 0$ na celom $\mathbb{C}$, a to je nemoguće. Dakle, polinom $p(z)$ ima bar jednu nulu u $\mathbb{C}$.

$\square$

Drugim rečima, svaki polinom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ stepena n ima n nula.

Posledica 2 (***Teorema o faktorizaciji***). *Ako je polinom $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ i $\deg p = n$, tada je $p(z) = c \cdot \prod_{i=1}^{n}(z - b_i)$, gde su $b_1, b_2, \ldots, b_n$ iz $\mathbb{C}$ nule polinoma, a c konstanta različita od nule.*
Ako nisu sve nule različite, onda je $p(z) = c \cdot \prod_{i=1}^{k}(z - b_i)^{\alpha_i}$, gde su $b_1, \ldots, b_k$ različite nule, i $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ iz $\mathbb{N}$ i $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n$.

Teorema 9. *Broj $a \in \mathbb{C}$ je nula reda k, $k \in \mathbb{N}$, polinoma $p(z)$ ako i samo ako važi $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$ i $p^{(k)}(a) \neq 0$.*

Dokaz. Neka je a nula polinoma $p(z)$ višestrukosti k. Tada polinom $p(z)$ možemo zapisati u obliku $p(z) = (z-a)^k q(z)$ i $q(a) \neq 0$. Diferencirajući poslednju jednakost primenom Lajbnicove formule[4], dobijamo:

$$\begin{aligned}
p'(z) \quad &= k(z-a)^{k-1}q(z) + (z-a)^k q'(z)\\
&\vdots\\
p^{(k-1)}(z) &= k!(z-a)q(z) + \cdots + (z-a)^k q^{(k-1)}(z)\\
p^{(k)}(z) \quad &= k!q(z) + k \cdot k!(z-a)q'(z) + \cdots + (z-a)^k q^{(k)}(z).
\end{aligned}$$

Iz prethodnog dobijamo da je $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$ i $p^{(k)}(a) = k!q(a) \neq 0$.

[4]Lajbnicova formula za izvod proizvoda: $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} f^{(i)} g^{(n-i)}$

Dokažimo obratno. Neka je $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k-1)}(a) = 0$, a $p^{(k)}(a) \neq 0$. Dokaz izvodimo indukcijom po k.
Za $k = 1$ je $p(a) = 0$, a $p'(a) \neq 0$. Pokažimo da $(z-a)|p(z)$ i $(z-a)^2 \nmid p(z)$. Iz $p(a) = 0$ na osnovu Bezuove teoreme sledi da je $p(z) = (z-a)q(z)$, gde je $q(a) \neq 0$, a odatle da je $p'(z) = q(z) + (z-a)q'(z)$. Tada je $p'(a) = q(a) \neq 0$. Dakle, $(z-a) \nmid q(z)$ i $(z-a)^2 \nmid p(z)$.

Pretpostavimo da tvrđenje koje dokazujemo važi za neki prirodan broj k. Da bismo dokazali da tvrđenje važi za $k+1$, pretpostavimo da polinom $p(z)$ i broj a zadovoljavaju uslove

$$p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k)}(a) = 0 \text{ i } p^{(k+1)}(a) \neq 0.$$

Iz $p(a) = 0$ sledi $p(z) = (z-a)q(z)$, za neki polinom $q(z)$. Diferencirajući $k+1$ puta poslednju jednakost, a zatim zamenjujući $z = a$, korišćenjem date pretpostavke dobijamo:

$$\begin{aligned}
p'(z) &= q(z) + (z-a)^k q'(z), & 0 &= q(a)\\
&\vdots & &\vdots\\
p^{(k)}(z) &= kq^{(k-1)}(z) + (z-a)q^{(k)}(z), & 0 &= q^{(k-1)}(a)\\
p^{(k+1)}(z) &= (k+1)q^{(k)}(z) + (z-a)q^{(k+1)}(z), & 0 &\neq q^{(k)}(a).
\end{aligned}$$

Na osnovu induktivne pretpostavke zaključujemo da polinom $q(z)$ možemo zapisati u obliku $q(z) = (z-a)^k r(z)$, $r(a) \neq 0$, što znači da je polinom $p(z) = (z-a)^{k+1} r(z)$, odnosno a je nula polinoma $p(z)$ višestrukosti $k+1$.
$\square$

Lema 1. *Neka je f analitička funkcija na D, D oblast u $\mathbb{C}$. Ako je $f(a) = 0$, $a \in D$ i funkcija f nije indentički jednaka nuli ni u jednoj okolini tačke a, tada postoji $n \geqslant 1$ i funkcija g koja je analitička na $K[a, r]$, za neko $r > 0$, tako da je $f(z) = (z-a)^n g(z)$, gde $z \in K[a, r]$ i $g(z) \neq 0$.*

Sledeća teorema govori o broju nula analitičke funkcije f unutar neke pozitivno orijentisane krive.

Teorema 10. *Neka je f analitička funkcija u oblasti G. Neka je γ kontura u G čija je unutrašnjost oblast D i $D \subset G$. Tada je N broj nula funkcije $f(z)$ u D, pri čemu podrazumevamo da je svaka nula uzeta u obzir onoliko puta koliki je njen red. Tada važi*

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

pri čemu je γ pozitivno orijentisana u odnosu na D i ne sadrži nule funkcije f.

Iz prethodnog smo dobili da ako je $p(x)$ polinom, onda je funkcija $\frac{p'}{p}$ analitička funkcija sem u nulama polinoma p, a u nuli tog polinoma ova funkcija ima pol prvog reda sa vrednošću reziduuma jednakom redu te nule. Odnosno, prethodna teorema daje prilično dobar alat za kontrolu kompleksnih nula polinoma.

Teorema 11. *Ako je $z = a + bi$ nula polinoma $p \in \mathbb{R}[x]$, onda je i $\bar{z}$ nula tog polinoma.*

Dokaz. Neka je $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ polinom stepena n i z nula tog polinoma. Važi da je

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0.$$

Konjugovanjem cele prethodne jednakosti, dobija se

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = \overline{0} = 0.$$

Kako su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, onda je $\overline{a_0} = a_0, \overline{a_1} = a_1, \ldots, \overline{a_n} = a_n$. Konjugovanjem zbira i primenom osobine $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, dobija se

$$a_0 + a_1 \overline{z} + a_2 \overline{z}^2 + \cdots + a_n \overline{z}^n = 0.$$

Dakle, $\overline{z}$ je takođe nula polinoma $p(x)$. □

Prethodna teorema govori da se kompleksne nule nekog polinom iz $\mathbb{R}[x]$ javljaju u paru. Direktno iz ove teoreme dobijamo sledeću posledicu.

Posledica 3. *Ako je $p(x)$ polinom sa realnim koeficijentima i ako je $z_0 \in \mathbb{C}$ nula reda k za $p(x)$, tada je i $\overline{z_0}$ nula reda k.*

Primer 5. *Ako je $1 - 2i$ nula polinoma $p(x) = x^3 + ax + b$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$, odrediti realnu nulu tog polinoma.*

Rešenje. Kako je $1 - 2i$ nula polinoma $p(x)$, to je onda i $1 + 2i$ nula tog polinoma. Pa je $p(x) = (x - (1 - 2i))(x - (1 + 2i))q(x) = (x^2 - 2x + 5)q(x)$. Deljenjem polinoma $p(x)$ sa polinomom $x^2 - 2x + 5$ dobijamo

$$p(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 5) + x(a-1) + b - 10$$

i $r(x) = x(a-1) + b - 10 = 0$, odakle direktno možemo dobiti da je $a = 1$, a $b = 10$.

Dakle, $p(x) = (x^2 - 2x + 5)(x + 2)$, odnosno realna nula je $x = -2$.

$\triangle$

Polinom trećeg stepena čiji su koeficijenti realni može da ima ili tri realne nule (tri različite, ili dve od kojih je jedna dvostruka), ili jednu realnu i dve kompleksne nule koje nisu realne. Odnosno, polinomi neparnog stepena mogu imati samo neparan broj realnih nula.

Polinom četvrtog stepena čiji su koeficijenti realni može imati ili četiri realne nule (četiri različite, ili tri od kojih je jedna dvostruka), ili dve realne i dve nule koje nisu realne, ili četiri kompleksne koje nisu realne. Analogno se može zaključiti da polinomi parnog stepena mogu imati samo paran broj realnih nula.

Dakle, dovoljno je naći koliko neki polinom ima realnih nula, da bi se odredio broj nula koje nisu realne, i obrnuto. Algoritam za nalaženje broja realnih nula naziva se Šturmov algoritam i taj algoritam će nam dati i broj kompleksnih nula, odnosnu broj nula koje nisu realne.

Ali, od velikog značaja je i granica nula nekog polinoma, odnosno ,,opseg” u kom se nalaze te nule. Međutim, postavlja se prirodno pitanje da li se granice nula polinoma odnose na realne nule ili na nule koje nisu realne, pa će odgovor na ovo pitanje dati sledeće poglavlje.

3 Granice nula polinoma

Ukoliko je teško ili nemoguće tačno odrediti nule polinoma, od koristi može biti procena skupa unutar kojih se te nula nalaze. Najčešće su procene nula po apsolutnoj vrednosti (što u slučaju traženja kompleksnih nula daje odgovarajući disk u kompleksnoj ravni unutar kojeg se nalaze nule, dok u slučaju određivanja realnih nula daje odgovarajući interval). Kako je polje realnih brojeva snabdeveno i poretkom koji se slaže sa odgovarajućim operacijama i kako je polinom neprekidna funkcija, kod takvih procena prilikom određivanja realnih nula često su od pomoći pogodne nejednakosti, kao i teorema o međuvrednosti. U ovom delu prikazaćemo neke od tehnika koje se koriste prilikom ovakvih procena.

Definicija 6. *Neka je* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

a) Broj $a \in \mathbb{R}^+$ *je gornja granica pozitivnih nula polinoma* p*, u oznaci* $GGP(a)$*, ako je* $p(x) \neq 0$ *za* $x > a$.

b) Broj $a \in \mathbb{R}^+$ *je donja granica pozitivnih nula polinoma* p*, u oznaci* $DGP(a)$*, ako je* $p(x) \neq 0$ *za* $0 < x < a$.

c) Broj $a \in \mathbb{R}^-$ *je gornja granica negativnih nula polinoma* p*, u oznaci* $GGN(a)$*, ako je* $p(x) \neq 0$ *za* $a < x < 0$.

d) Broj $a \in \mathbb{R}^-$ *je donja granica negativnih nula polinoma* p*, u oznaci* $DGN(a)$*, ako je* $p(x) \neq 0$ *za* $x < a$.

Naredna teorema nam pomaže da nalaženje svih granica svedemo na određivanje samo gornje granice pozitivnih nula polinoma.

Teorema 12. *Neka je* $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ *polinom iz* $\mathbb{R}[x]$*. Tada važe sledeća tvrđenja:*

(a) Ako je a *GGP za polinom* $q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \in \mathbb{R}[x]$*, onda je* $\dfrac{1}{a}$ *DGP za polinom* $p(x)$.

(b) Ako je a *GGP za polinom* $q(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i (-x)^i \in \mathbb{R}[x]$*, onda je* $-a$ *DGN za polinom* $p(x)$.

(c) *Ako je a GGP za polinom $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-x)^{n-i} \in \mathbb{R}[x]$, onda je $-\dfrac{1}{a}$ GGN za polinom $p(x)$.*

Dokaz. Neka je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

(a) Ako je a gornja granica pozitivnih nula za polinom $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, tada je $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \neq 0$ za $x > a$. Smenom $y = \dfrac{1}{x}$ dobijamo $q(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\dfrac{1}{y}\right)^{n-i} \neq 0$ za $\dfrac{1}{y} > a$. Kako je $y > 0$, to je $q(y) = \dfrac{1}{y^n} \sum_{i=0}^{n} a_i y^i = \dfrac{1}{y^n} p(y) \neq 0$ za $0 < y < \dfrac{1}{a}$. Iz prethodnog sledi da je $p(x) \neq 0$ za $0 < x < \dfrac{1}{a}$, to jest $\dfrac{1}{a}$ je donja granica pozitivnih nula polinoma.

(b) Kako je a gornja granica pozitivnih nula za polinom $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-x)^i$, to je $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-x)^i \neq 0$ za $x > a$. Uvođenjem smene $y = -x$ dobijamo polinom $q(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i = p(y)$ koji nije nula za $y > a$. Odnosno, $-x > a$, pa je $x < -a$, čime smo pokazali da je $-a$ donja granica negativnih nula polinoma $p(x)$.

(c) Neka je broj a je gornja granica pozitivnih nula polinoma $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-x)^{n-i}$. Tada je $q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-x)^{n-i} \neq 0$ za $x > a$. Smenom $y = -\dfrac{1}{x}$ dobijamo polinom

$$q(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{1}{y}\right)^{n-i} = \frac{1}{y^n} \sum_{i=0}^{n} a_i y^n = \frac{1}{y^n} p(y)$$

koji je različit od nule za $0 > y > -\dfrac{1}{a}$. Zbog toga je $0 < x < -\dfrac{1}{a}$, čime je pokazano da je $-\dfrac{1}{a}$ gornja granica negativnih nula polinoma $p(x)$.

$\square$

U nastavku će biti prikazane značajne teoreme i njihove posledice koje daju granice nula polinoma.

Teorema 13. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, gde su $a_i \in \mathbb{C}$. Tada $p(z)$ ima tačno n nula i sve nule po modulu nisu veće od $1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$.*

Dokaz. Označimo sa $M = \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$ i neka je $|z| > 1 + M$. Onda je $\frac{1}{|z|} < 1$ i važi:

$$
\begin{aligned}
|p(z)| = |a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0| &= \left| a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right) \right| \\
&\geqslant |a_n z^n| \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} + \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \right) \\
&\geqslant |a_n z^n| \left(1 - \left(\left| \frac{a_{n-1}}{a_n z} \right| + \left| \frac{a_{n-2}}{a_n z^2} \right| + \cdots + \left| \frac{a_0}{a_n z^n} \right| \right) \right) \\
&\geqslant |a_n z^n| \left(1 - \left(M \frac{1}{|z|} + M \frac{1}{|z|^2} + \cdots + M \frac{1}{|z|^n} \right) \right) \\
&= |a_n z^n| \left(1 - M \frac{1}{|z|} \frac{1 - \frac{1}{|z|^n}}{1 - \frac{1}{|z|}} \right) = |a_n z^n| \left(1 - M \frac{|z|^n - 1}{|z|^n (|z| - 1)} \right) \\
&\geqslant |a_n z^n| \left(1 - M \frac{|z|^n}{|z|^n (|z| - 1)} \right) = |a_n z^n| \frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1} > 0.
\end{aligned}
$$

Dakle, kada je $|z| > 1 + M$ tada polinom $p(z)$ nema nula. Odnosno, za sve nule polinoma $p(z)$ važi $|z| \leqslant 1 + M$.

$\square$

Posledica 4. *Neka je $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0$, gde su $a_i \in \mathbb{C}$. Tada polinom $p(z)$ ima tačno n nula i sve nule po modulu nisu veće od:*

1. $r + \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| \frac{a_k}{a_n r^{n-1-k}} \right|$, *gde je r proizvoljan pozitivan broj*

2. $2 \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sqrt[n-k]{\left| \frac{a_k}{a_n} \right|}$

3. $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \max\limits_{0\leqslant k<n-1} \sqrt[n-(k+1)]{\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|}$, $a_{n-1} \neq 0.$

Dokaz. Dokazaćemo ove tri posledice prethodne teoreme.

1. Posmatrajmo polinom $\frac{p(z)}{r^n} = a_n \left(\frac{z}{r}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{r}\left(\frac{z}{r}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{r^n}$. Ako je z nula polinoma p, onda prema prethodnoj teoremi važi

$$\frac{|z|}{r} \leqslant 1 + \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-k}}\right|,$$

odnosno, $|z| \leqslant r + \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-1-k}}\right|$, što je trebalo dokazati.

2. Kako je u prvoj posledici r proizvoljan pozitivan broj, možemo uzeti $r = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sqrt[n-k]{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|}$.

Tada je $\left|\frac{a_k}{a_n}\right| \leqslant r^{n-k}$, tj. $\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-k-1}}\right| \leqslant r$.

Zbog toga je $\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-k-1}}\right| \leqslant r$, pa po prethodnoj posledici važi

$$|z| \leqslant r + \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-k-1}}\right| \leqslant 2r = 2\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}\sqrt[n-k]{\left|\frac{a_k}{a_n}\right|}.$$

3. Neka je r pozitivan broj dat sa $r = \max\limits_{0\leqslant k<n-1}\sqrt[n-(k+1)]{\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|}$.

Tada je $\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right| \leqslant r^{n-(k+1)}$, tj. $|a_k| \leqslant |a_{n-1}| r^{n-(k+1)}$. Odatle je $\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-(k+1)}}\right| \leqslant \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$.

Zato važi $\max\limits_{0\leqslant k<n-1}\left|\frac{a_k}{a_n r^{n-(k+1)}}\right| \leqslant \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$.

Koristeći prvu posledicu, dobijamo da nule polinoma $p(z)$ po modulu nisu veće od

$$r + \max_{0 \leqslant k < n-1} \left| \frac{a_k}{a_n r^{n-(k+1)}} \right| \leqslant \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| + \max_{0 \leqslant k < n-1} \sqrt[n-(k+1)]{\left| \frac{a_k}{a_{n-1}} \right|}.$$

□

Teorema 14. *Neka je polinom* $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *i* $a_n > 0$*, polinom sa realnim koeficijentima. Ako je skup* $S = \{i \leqslant n \mid a_i < 0\}$ *i prirodan broj* $r = \max S$*, tada nule polinoma* $p(x)$ *ne mogu biti veće od* $1 + \sqrt[n-r]{\max_{i \in S} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|}$.

Dokaz. Neka je $A = \max\{|a_i| \mid i \in S\}$ i $M = 1 + \sqrt[n-r]{\frac{A}{|a_n|}}$.

Neka je $|x| > M$. Onda je $|x| > 1$ i važi $|a_n| > \dfrac{A}{(|x|-1)^{n-r}}$.

Ako je $g(x) = \sum_{i \in S} a_i x^i$, onda važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
|g(x)| &\leqslant \sum_{i \in S} |a_i||x|^i \leqslant \sum_{i \in S} A|x|^i \leqslant A \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} |x|^i \\
&\leqslant A \frac{|x|^{r+1} - 1}{|x| - 1} \leqslant A \frac{|x|^{r+1}}{|x| - 1} = A \frac{|x|^n}{|x|^{n-r-1}(|x| - 1)} \\
&\leqslant \frac{A|x|^n}{(|x| - 1)^{n-r}} < |a_n x^n|.
\end{aligned}$$

Neka je $T = \{i \leqslant n - 1 \mid i \geqslant 0 \wedge a_i > 0\}$. Tada je:

$$p(x) = a_n x^n + \sum_{i \in S} a_i x^i + \sum_{i \in T} a_i x^i.$$

Kako je $|x| > M$, tada je

$$\left| a_n x^n + \sum_{i \in T} a_i x^i \right| \geqslant |a_n x^n| > \left| \sum_{i \in S} a_i x^i \right|,$$

pa je za $|x| > M$ $p(x) \neq 0$, odnosno, nule polinoma $p(x)$ nisu veće od $M = 1 + \sqrt[n-r]{\max_{i \in S} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|}$.

□

Pored prethodnih teorema postoje i one koje daju bolju procenu, odnosno, daju manji interval u kome se nalaze nule polinoma. Slede neke od tih procena koje se odnose na polinome sa realnim koeficijentima. Jedna od ,,najpopularijnih" svakako je teorema o međuvrednosti koji ima poseban značaj.

Teorema 15 (***Teorema o međuvrednosti***)**.** *Neka je* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ *za koji važi da je* $p(a)p(b) < 0$*,* $a < b$*. Tada* $p(x)$ *ima nulu na intervalu* (a, b)*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $p(a) < 0$, a $p(b) > 0$. Podelimo interval (a, b) na pola tačkom $\frac{a+b}{2}$. Ako je $p\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, onda to dokazuje da polinom ima nulu na intervalu $[a, b]$. Ako to nije zadovoljeno, jedan od odsečaka $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ imaće osobinu da na njegovim krajevima polinom $p(x)$ ima suprotne znakove. Označimo taj interval sa $[a_1, b_1]$. Nastavljajući tako deljenje intervala na pola, u nekom trenutku ćemo dobiti tačku c za koju važi da je $p(c) = 0$, ili niz umetnutih odsečaka $[a_n, b_n]$ koji za presek ima neku tačku $c \in [a, b]$. Onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, a prema konstrukciji nizova (a_n) i (b_n) za svako n ispunjeno da je $p(a_n) < 0$ i $p(b_n) > 0$. Polinom $p(x)$ je neprekidna funkcija, pa odatle sledi da je $p(c) = \lim\limits_{n\to\infty} p(a_n) \leqslant 0$ i $p(c) = \lim\limits_{n\to\infty} p(b_n) \geqslant 0$, odnosno, $p(c) = 0$.

□

Teorema 16. *Ako polinom* $p(x)$*,* $\deg p = n$*, zadovoljava sledeće nejednakosti*

$$p(a) > 0, p'(a) \geqslant 0, \ldots, p^{(n)}(a) \geqslant 0,$$

onda taj polinom nema nule veće od a*, odnosno, nule polinoma se nalaze u intevalu* $(-\infty, a)$*.*

Dokaz. Prikažimo polinom $p(x)$ kao Tejlorov polinom u okolini tačke a

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Polinom $p(x) > 0$ za svako $x \geqslant a$, pa nema nule veće od a.

□

Teorema 17. *Ako za polinom $p(x)$, $\deg p = n$, i realne brojeve a i b, $a < b$, važe sledeće nejednakosti:*

$$p(a) < 0, -p'(a) \leqslant 0, p''(a) \leqslant 0, \ldots, (-1)^n p^{(n)}(a) \leqslant 0, i$$
$$p(b) > 0, p'(b) \geqslant 0, p''(b) \geqslant 0, \ldots, p^{(n)}(b) \geqslant 0,$$

tada sve nule polinoma $p(x)$ pripadaju intervalu (a, b).

Dokaz. Kao u prethodnoj teoremi, kada se polinom $p(x)$ prikaže kao Tejlorov polinom oko tačke a, onda je

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Posmatrajmo polinom $g(x) = p(a-x) = p(a) - \dfrac{p'(a)}{1!}x + \cdots + (-1)^n \dfrac{p^{(n)}(a)}{n!}x^n$. Tada važe sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
a_0 &= g(0) = p(a) < 0, \\
a_1 &= g'(0) = \frac{-p'(a)}{1!} \leqslant 0, \\
&\vdots \\
a_n &= g^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n p^{(n)}(a)}{n!} \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Kako su svi koeficijenti polinoma $g(x)$ nepozitivni, onda je $g(x) < 0$ za svako $x \geqslant 0$. Zbog toga je $p(x) < 0$ za svako $x \leqslant a$, pa polinom $p(x)$ nema realnih nula na intervalu $(-\infty, a]$.

Prema prethodnoj teoremi polinom $p(x)$ nema realnih nula na intevalu $[b, \infty)$. Dakle, ostalo je da se zaključi da polinom $p(x)$ ima realne nule na intervalu (a, b).

$\square$

Svaka od prethodnih procena je relativno gruba i za svaku se može naći primer u kojem je lociranje nule poprilično neprecizno. Zbog toga pravi rezultat daje ,,izbor prave procene" što će u sledećim primerima biti i prikazano, odnosno, testiraće se više procena i upoređivaće se dobijeni intervali, a svakako će nas zanimati najbolji rezultat tj. najmanji interval koji dobijemo ovim procenama.

3.1 Zadaci

U nastavku će biti prikazani primeri sa primenama prethodnih teorema koje se odnose na određivanje granica nula polinoma sa realnim koeficijentima.

Zadatak 1. *Koristeći ocene granica nula polinoma iz prethodnog poglavlja, odrediti neke granice sledećih polinoma:*

a) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$

b) $p(x) = x^5 + 7x^3 - 3$

c) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

Rešenje. a) $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3$

1. $|x| \leqslant 1 + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|$

$\max\limits_{k} \left|\dfrac{a_k}{a_n}\right| = \max\{|-4|, |7|, |-8|, |3|\} = 8$

Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant 9$.

2. $|x| \leqslant r + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left|\dfrac{a_k}{a_n r^{n-1-k}}\right|, \ r \in \mathbb{R}^+$

Neka je npr. $r = 2$. Tada je:

$$\max_{k} \left|\frac{a_k}{a_n r^{n-1-k}}\right| = \max\left\{\left|\frac{-4}{2^0}\right|, \left|\frac{7}{2^1}\right|, \left|\frac{-8}{2^2}\right|, \left|\frac{3}{2^3}\right|\right\} = 4$$

Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant 6$.

3. $|x| \leqslant \left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \sqrt[n-1-k]{\left|\dfrac{a_l}{a_{n-1}}\right|}$

Kako je $a_4 = 1$, a $a_3 = 4$, onda je $\left|\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\right| = 4$, i

$$\max_{k} \sqrt[n-1-k]{\left|\frac{a_k}{a_{n-1}}\right|} = \max\left\{\left|\frac{7}{-4}\right|, \sqrt[2]{\left|\frac{-8}{-4}\right|}, \sqrt[3]{\left|\frac{3}{-4}\right|}\right\} = \frac{7}{4}.$$

Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant \frac{23}{4}$.

4. $S = \{i \leqslant 4 | a_i < 0\} = \{1, 3\}$, $r = \max S = 3$

Nule polinoma $p(x)$ nisu veće od $1 + \sqrt[n-r]{\max_{i \in S} \left| \frac{a_i}{a_4} \right|} = 1 + \max\{4, 8\} = 9$. Dobili smo isti interval kao u prvoj proveri.

5. Kako je

$$\begin{aligned} p(x) &= x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 8x + 3 \\ p'(x) &= 4x^3 - 12x^2 + 14x - 8 \\ p''(x) &= 12x^2 - 24x + 14 \\ p'''(x) &= 24x - 24 \\ p^{IV}(x) &= 24 \end{aligned}$$

i $p(-x) > 0$ za svako $x > 0$, onda je donja granica pozitivnih nula polinoma, ujedno i donja granica negativnih, jednaka 0. Važi da je $p'''(x) > 0$ za svako $x > 1$, pa tražimo broj veći od 1 da bi primenili teoremu 17. Za $x = 3$ dobijamo da je $p(3) > 0, p'(3) > 0, p''(3) > 0, p'''(3) > 0, p^{IV}(3) > 0$, odnosno nule polinoma $p(x)$ se nalaze u intervalu $(0, 3)$.

b) $p(x) = x^5 + 7x^3 - 3$

1. $|x| \leqslant 1 + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$

$\max\limits_k |\frac{a_k}{a_n}| = \max\{7, 3\} = 7$

Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant 8$.

2. $|x| \leqslant r + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| \frac{a_k}{a_n r^{n-1-k}} \right|$, $r \in \mathbb{R}^+$

Neka je npr. $r = 3$. Tada je:

$$\max_k \left|\frac{a_k}{a_n r^{n-1-k}}\right| = \max\left\{\left|\frac{7}{3^1}\right|, \left|\frac{-3}{3^4}\right|\right\} = \frac{7}{3}$$

Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant \dfrac{16}{3}$.

3. Kako je

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + 7x^3 - 3 \\ p'(x) &= 5x^4 + 21x^2 \\ p''(x) &= 20x^3 + 42x \\ p'''(x) &= 60x^2 + 42 \\ p^{IV}(x) &= 120x \\ p^{V}(x) &= 120, \end{aligned}$$

i važi $p(-1) < 0, -p'(-1) < 0, p''(-1) < 0, -p'''(-1) < 0, p^{IV}(-1) < 0$ i $p(x), p'(x), p''(x), p'''(x), p^{IV}(x) > 0$ za svako $x > 1$. Dakle, na osnovu teoreme 17 dobijamo da su nule polinoma u intervalu $(-1, 1)$.

c) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$

1. $|x| \leqslant 1 + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left|\dfrac{a_k}{a_n}\right|$

   $\max\limits_k |\dfrac{a_k}{a_n}| = \max\{3, 6, 5\} = 6$
   Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant 7$.

2. $|x| \leqslant r + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left|\dfrac{a_k}{a_n r^{n-1-k}}\right|$, $r \in \mathbb{R}^+$

   Neka je npr. $r = 3$. Tada je:

$$\max_k \left|\frac{a_k}{a_n r^{n-1-k}}\right| = \max\left\{\left|\frac{-3}{3^0}\right|, \left|\frac{6}{3^1}\right|, \left|\frac{-5}{3^2}\right|\right\} = 3$$

Dakle, za nule polinoma $p(x)$ važi $|x| \leqslant 6$.
Za $r = 2$ dobijamo bolju procenu, odnosno $\max\left\{\left|\dfrac{-3}{2^0}\right|, \left|\dfrac{6}{2^1}\right|, \left|\dfrac{-5}{2^2}\right|\right\} = 3$, pa nule polinoma po modulu nisu veće od 5.

3. Kako je

$$\begin{aligned}
p(x) &= x^3 - 3x^2 + 6x - 5 \\
p'(x) &= 3x^2 - 6x + 6 \\
p''(x) &= 6x - 6 \\
p'''(x) &= 6,
\end{aligned}$$

i kako je $p(-x) = -x^3 - 3x^2 - 6x - 5 \neq 0$ za svako $x > 0$, to je onda broj 0 gornja granica pozitivnih nula polinoma $p(-x)$, ali i donja granica negativnih nula polinoma $p(x)$. Za $x = 2$, $p(2) > 0, p'(2) > 0, p''(2) > 0$, pa je po teoremi gornja granica pozitivnih nula upravo broj 2. Dakle, nule polinoma $p(x)$ se nalaze u intervalu $(0, 2)$.

$\triangle$

Zadatak 2. *Ako je $x^5 - x^3 + x - 2 = 0$, dokazati da je $3 < x^6 < 4$.*

Rešenje. Ako je $p(x) = x^5 - x^3 + x - 2$, tada je $p'(x) = 5x^4 - 3x^2 + 1$ i $p'(x) > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. To znači da je polinom $p(x)$ monotono rastući. Kako je $p(1) = -1$, a $p(2) = 24 > 0$, to polinom $p(x)$ ima nulu na intervalu $(1, 2)$.

Posmatrajmo sledeće:

$$\begin{aligned}
x^6 + 1 &= (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) = \frac{x^2 + 1}{x}(x^5 - x^3 + x) \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right)(x^5 - x^3 + x).
\end{aligned} \tag{1}$$

Jednakost $x^5 - x^3 + x - 2 = 0$ je ekvivalentna jednakosti $x^5 - x^3 + x = 2$, a kako je $x \in (1, 2)$, tj. za svako $x \in \mathbb{R}$ važi $x > 1$, pa (1) postaje

$$x^6 + 1 = (x + \frac{1}{x})(x^5 - x^3 + x) = 2(x + \frac{1}{x}) > 2(1 + 1) = 4.$$

Dakle, $x^6 > 3$. Ostalo je samo još da se pokaže druga nejednakost.

Jednakost $x^5 + x = x^3 + 2$ podelimo sa x^3. Dobija se

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{2}{x^3}.$$

Kako je $x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 2$, to je $\dfrac{2}{x^3} > 1$, pa je $x^6 < 4$.

Dakle, dokazano je da je $3 < x^6 < 4$.

$\triangle$

Zadatak 3. *Ako su svi koeficijenti polinoma nenegativni, dokazati da polinom nema pozitivne nule.*

Rešenje. Neka je $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, i $a_n, \ldots, a_0 > 0$. Tada za svako $x > 0$ je $p(x) > 0$. Dakle, polinom $p(x)$ može imati samo negativne nule.

$\triangle$

4 Šturmov algoritam

Naći broj realnih nula polinoma sa realnim koeficijentima je veoma važan algebarski problem. Na iznenađujuće jednostavan način, ovaj problem rešio je matematičar Šturm [5] 1829. godine. Rad koji sadrži poznatu Šturmovu teoremu pojavljuje se u jedanaestom tomu dela *Bulletin des sciences Ferrussac* i nosi naslov *Memoire sur la resolution des equations numeriques.*

U ovoj glavi ćemo obraditi Šturmov algoritam koji određuje broj realnih nula polinoma. U nastavku će se pomenuti algoritam primenjivati na polinome iz $\mathbb{R}[x]$.

Definicija 7. *Šturmov niz je konačan niz polinoma* $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)$ *sa sledećim osobinama:*

1. $p_0(x)$ *nema višestrukih nula u* $\mathbb{C}$*;*
2. *Ako je a realan koren polinoma* $p(x)$ *onda* $p_0(a)p_1(a)$ *menja znak iz minusa u plus pri prolasku kroz* a*;*
3. *Ako je a koren polinoma* $p_i(x)$, $0 < i < m$, *onda su* $p_{i-1}(a)$ *i* $p_{i+1}(a)$ *različiti od nule. Štaviše, znak* $p_{i-1}(a)$ *je suprotan znaku* $p_{i+1}(a)$*, to jest* $p_{i-1}(a)p_{i+1}(a) < 0$*;*
4. *Znak polinoma* $p_m(x)$ *je konstantan za svako* $x \in \mathbb{R}$*.*

Stav 1. *Neka je* $p(x)$ *polinom koji nema višestrukih nula. Tada je sledeća konstrukcija Šturmov niz:*

- $p_0(x) = p(x)$
- $p_1(x) = p'(x)$
- $p_2(x) = -\operatorname{rem}(p_0(x), p_1(x)) = p_1(x)q_0(x) - p_0(x)$, *gde je* $\operatorname{rem}(p_0(x), p_1(x))$ *ostatak pri deljenju polinoma* $p_0(x)$ *polinomom* $p_1(x)$
- $p_3(x) = p_2(x)q_1(x) - p_1(x)$, *gde je* q_1 *količnik polinoma* p_1 *i* p_2
- $p_4(x) = p_3(x)q_2(x) - p_2(x)$
- $p_k(x) = p_{k-1}(x)q_{k-2}(x) - p_{k-2}(x)$
- *Ovaj proces se ponavlja dok se ne dođe do nekog indeksa m za koje važi da je* $\operatorname{rem}(p_{m-1}(x), p_m(x)) = 0$ *i da je* $p_m(x) \neq 0$ *za svako* $x \in \mathbb{R}$*.*

[5] Jacques Charles François Sturm (1803–1855) je bio francuski matematičar

Dokaz. Po definiciji prva stavka je zadovoljena, jer $p(x)$ nema višestruke nule. Ako je a nula polinoma $p_0(x) = p(x)$, tada taj polinom u okolini tačke a menja znak, jer je $p(x) = (x - a)q(x)$. Kako je $p_0 p_1 = \frac{1}{2}(p^2)'$ i polinom $p^2(x)$ ima nulu u tački a, tada p^2 opada u nekoj levoj poluokoloni tačke a, a raste u nekoj desnoj poluokolini, što je dokaz da $p_0 p_1$ menja znak iz $-$ u $+$ pri prolasku kroz a. Treba dokazati još samo poslednje dve stavke.

Dokaz trećeg svojsta izvodimo indukcijom. Primetimo da $p_0(x)$ i $p_1(x)$ nemaju zajedničku nulu. Ako bi a bila nula polinoma $p(x)$, tada bi $p(x) = (x-a)q(x)$, gde je $q(a) \neq 0$, jer polinom $p(x)$ nema višestrukih nula. Nakon diferenciranja dobija se $p'(x) = q(x) + (x-a)q'(x)$ i $p'(a) = q(a) \neq 0$.

Induktivni korak: neka je $p_{i-1}(x) = p_i(x)q_{i-1}(x) - p_{i+1}(x)$. Ako bi $p_i(x)$ i $p_{i+1}(x)$ imali zajedničku nulu, tada bi ta nula bila i nula polinoma $p_{i-1}(x)$, pa bi polinomi $p_i(x)$ i $p_{i-1}(x)$ imali zajedničku nulu suprotno indukcijskoj pretpostavci. Dakle, ako je a nula polinoma $p_i(x)$, $0 < i < m$, onda su $p_{i+1}(a)$ i $p_{i-1}(a)$ različiti od nule. Kako bi pokazali da je $p_{i-1}(a)p_{i+1}(a) < 0$, pogledajmo konstrukciju $p_{i-1}(x) = p_i(x)q_{i-1}(x) - p_{i+1}(x)$. Ako je a nula polinoma $p_i(x)$, onda je

$$p_{i-1}(a) = p_i(a)q_{i-1}(a) - p_{i+1}(a) = 0 - p_{i+1}(a) = -p_{i+1}(a).$$

Ovim je dokazano i treće svojstvo.

Ako se pokaže da je $p_m(x)$ konstanta različita od nule, onda smo pokazali da je data konstrukcija zaista Šturmov niz. Vratimo se na prethodnu konstrukciju. Na osnovu teoreme o deljenju sa ostatkom sledi da je $\deg p_{i+1} < \deg p_i$ za svako i. U nekom trenutku proces se završava i dobija se polinom $p_m(x) \neq 0$ takav da je $p_{m-1}(x) = q_{i-1}(x)p_m(x)$.

Da li može $p_m(x)$ da ne bude konstanta? Ako polinomi $p_m(x)$ i $p_{m-1}(x)$ imaju $p_m(x)$ kao zajednički faktor, onda po definiciji i $p_{m-1}(x)$ sadrži taj faktor, što bi značilo da (rekurzivno) svaki polinom sadrži ovaj faktor.

Pogledajmo polinome $p_0(x)$ i $p_1(x)$ ponovo. Ako je $p_m(x)$ faktor polinoma $p_0(x)$, to se taj polinom može predstaviti kao $p_0(x) = p_m(x)q(x)$. Ako se poslednja jednakost diferencira, dobija se $p_1(x) = p'_m(x)q(x) + p_m(x)q'(x)$. Ako je $p_m(x)$ faktor i polinoma $p_1(x)$, onda je i $p_1(x) = p_m(x)s(x)$. Dobija se sledeće:

$$p_m(x)s(x) = p'_m(x)q(x) + p_m(x)q'(x) \Leftrightarrow p_m(x)(s(x) - q'(x)) = p'_m(x)q(x).$$

Dakle, dobija se da je $p_m(x)$ faktor polinoma $p'_m(x)q(x)$. Zna se da je $\deg p'_m < \deg p_m$, pa da bi važila poslednja jednakost, mora biti da je $\deg t > 1$, $t = NZD(p_m, q)$. Međutim, ovo je nemoguće, jer bi moralo važiti $p_0(x) = p_m(x)q(x) = t^2(x)s(x)$, a polinom $p_0(x)$ nema višestruke nule. Dakle, polinom $p_m(x)$ je konstantan polinom različit od nule.

□

Dakle, na osnovu stava možemo konstruisati Šturmov niz koristeći samo deljenje polinoma i nalaženje prvog izvoda. Pokažimo na primeru konstrukciju tog niza.

Primer 6. *Konstruisati Šturmov niz za polinom* $p(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 5$.

Rešenje. Prvi član Šturmovog niza je $p_0(x) = p(x)$, a drugi dobijamo diferenciranjem prvog, odnosno $p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 6x + 6$.
Treći član ćemo naći na sledeći način:

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & -3x^2 & +6x & -5) : (3x^2 - 6x + 6) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \\
x^3 & -2x^2 & +2x & \\
\hline
 & -x^2 & +4x & -5 \\
 & -x^2 & +2x & -2 \\
\hline
 & & 2x & -3
\end{array}$$

Dakle, $p_2(x) = -2x + 3$. Deljenjem polinoma $p_1(x)$ sa polinomom $p_2(x)$ dobijamo ostatak $\frac{15}{4}$, odnosno, četvrti član Šturmovog niza je $p_3(x) = -\frac{15}{4}$.
△

Definicija 8. *Neka je* $c \in \mathbb{R}$ *i* $(p_n)_{n \leqslant k}$ *Šturmov niz za polinom* $p(x)$. *Funkciju* $W : \mathbb{R} \to \mathbb{N}_0$ *definišemo tako da* $W(c)$ *predstavlja broj promene znaka u nizu (brojeva)* $p_0(c), p_1(c), \ldots, p_k(c)$, *odnosno*

$$W(c) = |\{i \leqslant k \mid p_{i-1}(c)p_i(c) < 0\}|.$$

Primer 7. *Neka je dat Šturmov niz* $p(x) = p_0(x) = 2x^2 + 5x + 7$, $p_1(x) = 4x + 5$ *i* $p_2(x) = -\frac{31}{8}$. *Odrediti funkciju promene znaka u tački* $x = -2$.

Rešenje. Funkcija promene znaka u tački $x = -2$ ima sledeću tablicu:

x	$p_0(-2)$	$p_1(-2)$	$p_2(-2)$	$W(-2)$
-2	$+$	$-$	$-$	1

U tabeli imamo jednu promenu znaka, odnosno $W(-2) = 1$.

$\triangle$

Sledi osnovna Šturmova teorema za broj realnih nula na nekom intervalu.

Teorema 18. *Neka je $p(x)$ polinom bez višestrukih nula i interval $[a, b]$ takav da je $p_i(a) \neq 0$ i $p_i(b) \neq 0$ za svako i. Ako je $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_m(x)$ Šturmov niz za polinom $p(x)$ i $W(c)$ broj promene znaka za neku konstantu c, tada $p(x)$ ima $W(a) - W(b)$ različitih realnih nula na intervalu $[a, b]$.*

Dokaz. Ako je a nula polinoma $p(x)$, primetimo da je u okolini tačke a polinom $p(x)$ sa jedne strane nenegativan, a sa druge negativan, jer ako se $p(x)$ faktoriše, dobija se oblik $(x-a)q(x)$, gde a nije nula polinoma $q(x)$ (jer $p(x)$ nema višestrukih nula).

Posmatrajmo vrednost funkcije W prilikom rasta promenljive x. Funkcija W ne menja znak sve dok jedan od elemenata Šturmovog niza $p_i(x)$ ne promeni znak. Kako su polinomi Šturmovog niza neprekidni, to može da se desi samo ako se pređe preko nule nekog polinoma $p_i(x)$. Treba da se pokaže da se za bilo koji koren polinoma $p_i(x)$, funkcija W smanjuje za jedan kada se pređe preko nule polinoma $p_0(x)$, a ne menja ako pređemo preko nule nekog drugog polinoma $p_i(x)$.

Pretpostavimo da $p_i(x)$ ima koren za neko $i \geqslant 1$ i označimo ga sa a. Ako je $p_i(a) = 0$, zna se da je $p_{i+1}(a)p_{i-1}(a) < 0$, a kako a nije koren ovih polinoma, to se njihov znak ne menja u okolini tačke a. U zavisnosti od znaka brojeva $p_{i-1}(a)$ i $p_{i+1}(a)$, ako polinom $p_i(x)$ menja znak iz pozitivnog u negativan, onda znak vrednosti polinoma p_{i-1}, p_i i p_{i+1} prelazi iz $-++$ u $--+$, ili iz $++-$ u $+--$. Obrnuto, ako $p_i(x)$ menja znak iz negativnog u pozitivan, onda znak vrednosti polinoma p_{i-1}, p_i i p_{i+1} prelazi iz $--+$ u $-++$, ili iz $+--$ u $++-$. U svakom od ovih slučajeva, broj promene znaka se ne menja, tj. W ostaje nepromenjeno.

Pretpostavimo da $p_0(x)$ ima koren u tački a. Ako se znak menja iz pozitivnog u negativan, onda je u okolini tačke a izvod negativan, kada polinom opada. Tada tablica znaka ide iz $+-$ u $--$ i onda funkcija W ima za 1 manju vrednost. Slično, ako se menja iz negativnog u pozitivno, onda tablica znaka ide iz $-+$ u $++$, i tada se W smanji za 1. A to je trebalo i dokazati.

Dakle, $W(a)-W(b)$ je broj realnih nula na intervalu $[a,b]$ što je i trebalo dokazati.

□

Nameće se pitanje šta se može zaključiti o polinomima koji imaju višestruke nule i da li se opisani algoritam može primeniti i dati razultate i u tim situacijama? Primetimo da niz iz stava 1 možemo konstruisati i za polinom koji ima višestruke nule, i taj niz ćemo i ovde označavati sa $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$. Naravno, postavlja se pitanje koje osobine zadržava novi niz. Naredna posledica će dati odgovor na ovo pitanje.

Posledica 5. *Neka je $p(x)$ bilo koji polinom, interval $[a,b]$ takav da je $p_i(a)\neq 0$ i $p_i(b)\neq 0$ za svako i, a $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ niz iz posledice 5. Tada $p(x)$ ima $W(a)-W(b)$ različitih nula na intervalu $[a,b]$.*

Dokaz. Neka je $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ i niz $p_0(x)=p(x)$, $p_1(x)=p'(x)$,..., $p_m(x)$, niz konstruisan u stavu 1. Neka je $d(x)$ najveći zajednički delilac polinoma $p_0(x)$ i $p_1(x)$.

Kako je $p_{k+1}(x)=p_k(x)q_{k-1}(x)-p_{k-1}(x)$ za $1\leqslant k\leqslant m-1$, i kako iz $d|p_0$ i $d|p_1$ sledi da $d|p_2$, onda $d|p_k$ za svako $0\leqslant k\leqslant m-1$, pa su i $r_i(x)=\dfrac{p_i(x)}{d(x)}$ polinomi. Ako bi za neko $0\leqslant j\leqslant m-1$ bilo $\deg NZD(r_j,r_{j+1})>0$, a kako za polinome r_i važi veza $r_{k+1}(x)=r_k(x)q_{k-1}(x)-r_{k-1}(x)$, onda bi $NZD(r_j,r_{j+1})|r_0$ i $NZD(r_j,r_{j+1})|r_1$, što je nemoguće, jer smo polinome p_0 i p_1 podelili njihovim najvećim zajedničkim deliocem, pa mora biti $\deg NZD(r_j,r_{j+1})=0$.

Primetimo da za ovako dobijen niz (r_i) važi da je $r_i(a)\neq 0$ i $r_i(b)\neq 0$ za svako i, pošto $r_i|p_i$, a p_i zadovoljava isto svojstvo. Takođe, broj različitih nula polinoma p i r na intervalu $[a,b]$ je isti, jer je $d=NZD(p,p')$, pa su nule polinoma d višestruke nule polinoma p i to je svaka višestrukosti strogo manje od višetrukosti kojom se javlja u polinomu p.

Dokažimo da je niz $(r_i)_{0\leqslant i\leqslant m}$ Šturmov niz za polinom $r_0(x)=\dfrac{p_0(x)}{d(x)}$.

Niz (r_i) zadovoljava prvu osobinu Šturmovog niza, a to je da polinom $r_0(x)$ nema višestruke nule, što je pokazano u prethodnom. Takođe je zadovoljeno da dva uzastopna polinoma nemaju zajedničku nulu. Ako bi r_k i r_{k+1} imali zajedničku nulu, onda bi zbog veze $r_{k+1}(x) = r_k(x)q_{k-1}(x) - r_{k-1}(x)$ to bila nila i polinoma r_{k-1}, odnosno, onda bi i r_0 i r_1 imali zajedničku nulu, a to nije moguće zbog konstrukcije ovih polinoma.

Zadovoljeno je i treće svojstvo, tj. ako je a koren polinoma $r_i(x)$, onda važi da je $r_{i-1}(a)r_{i+1}(a) < 0$ i ovi polinomi su različiti od nule, zbog konstrukcije polinoma $r_i(x)$ i konstrukcije polinoma $p_i(x)$ iz posledice 5.

I poslednje svojstvo je zadovoljeno. Poslednji član niza $r_m = \dfrac{p_m}{d}$ je konstanta različita od nule zato što je p_m faktor svakog prethodnog člana niza, i faktorisan je svaki član niza stepena većeg od konstante.

Konačno, ako je a nula polinoma $r_0(x)$, ostalo je još samo da se proveri da se znak prvog člana niza poklapa sa znakom izvoda prvog člana u toj tački. Dakle, prvi član niza je $r_0(x)$, a njegov izvod je:

$$r_0'(x) = \left(\frac{p_0(x)}{d(x)}\right)' = \frac{p_0'(x)d(x) - p_0(x)d'(x)}{d^2(x)}.$$

U tački a ovaj izvod je jednak:

$$r_0'(a) = \frac{p_0'(a)d(a) - p_0(a)d'(a)}{d^2(a)} = \frac{p_0'(a)d(a)}{d^2(a)} = \frac{p_0'(a)}{d(a)} = \frac{p_1(a)}{d(a)} = r_1(a),$$

jer je $p_0(a) = 0$. Drugi član niza je $r_1(x) = \dfrac{p_1(x)}{d(x)}$, odnosno zadovoljeno je da se poklapaju znakovi. Dakle, niz koji smo dobili tako što smo svaki član niza iz stava 1 podeili polinomom $d(x)$, je Šturmov niz. Sada se može primeniti prethodna teorema na polinom $r_0(x)$ i broj različitih realnih nula ovog polinoma je i broj različitih realnih nula polinoma $p(x)$. Dakle, dokazano je da je broj različitih realnih nula polinoma $p(x)$ na intervalu $[a, b]$ jednak $W(a) - W(b)$. $\square$

Dakle, Šturmov algoritam će, nezavisno od toga da li polinom ima višestruke nule ili ne, odrediti broj različitih realnih nula tog polinoma na nekom intervalu. Međutim, ovde treba naglasiti da se Šturmov niz za polinom koji nema i polinom koji ima višestuke nule ipak razlikuje. Nadalje ćemo imati tu slobodu da niz iz posledice 6 za polinom sa višestrukim nulama takođe nazivamo Šturmovim. Takođe, prethodna teorema (i posledica) je vezana za interval $[a, b]$ i niz može da ne zadovoljava sve osobine na celom skupu realnih brojeva, već je dovoljno da zadovoljava na intervalu, što omogućava nalaženje broja realnih nula na tom intervalu. Za takav Šturmov niz ćemo reći da je Šturmov na intervalu $[a, b]$.

U narednim primerima ćemo prikazati primenu ovog algoritma.

Primer 8. *Odrediti broj realnih nula polinoma $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 5$ pomoću Šturmovog algoritma.*

Rešenje. Za dati polinom, broj realnih nula određujemo na celom skupu realnih brojeva (ako nam nije dat interval na kom tražimo realne nule). Najpre konstruišemo Šturmov niz:

$$p_0(x) = p(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x + 5$$

$$p_1(x) = p'(x) = 9x^2 - 4x + 5$$

$$p_2(x) = -\frac{82}{27}x - \frac{145}{27}$$

$$p_3(x) = -\frac{270405}{6724} \approx -40.$$

Znak polinoma u tačkama $+\infty$ i $-\infty$ zavisi od najstarijeg člana i njegovog koeficijenta. Na primer, za polinom $p_0(x)$ znak je

$$\lim_{x\to\pm\infty} p_0(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 3x^3 \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2} + \frac{5}{3x^3}\right) = \pm\infty,$$

jer izraz u zagradi teži ka 1, pa znak zavisi samo od $3x^3$.

Analogno i za ostale članove Šturmovog niza odredimo znak, pa je tablica znaka sledeća:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$

Kako je $W(-\infty) - W(+\infty) = 2 - 1 = 1$, to polinom $p(x)$ ima samo jednu realnu nulu.

Uz pomoć teorema koje nam daju granice nula polinoma, možemo odrediti neki interval (a, b), u kom se nalazi ta nula. Primetimo da je

$p(0) = 5 > 0$, a $p(-1) = -5 < 0$. Dakle, nula polinoma $p(x)$ se nalazi na intervalu $(-1, 0)$.

$\triangle$

Primer 9. *Odrediti granice nula polinoma $p(x) = -2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1$, a zatim odrediti broj realnih nula na dobijenom intervalu uz pomoć Šturmove teoreme. Razdvojiti intervale u kom se nalaze realne nule polinoma.*

Rešenje. Koristeći se teoremama za određivanje granica nula polinoma, procenom koju daje teorema 13 dobijamo da je $1 + \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| = 1 + \frac{3}{2} = 2.5$. Dakle, za zadati polinom određujemo koliko ima realnih nula na intervalu $(-2.5, 2.5)$.

Šturmov niz za zadati polinom je:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= p(x) = -2x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 1 \\
p_1(x) &= p'(x) = -10x^4 + 9x^2 - 4x \\
p_2(x) &= 6x^3 + 7x^2 - 4x - 1 \\
p_3(x) &= \frac{203}{18}x^2 - \frac{19}{9}x - \frac{35}{18} \\
p_4(x) &= \frac{59544}{41209}x - \frac{2358}{5887} \\
p_5(x) &\approx 1,67.
\end{aligned}
$$

Tablica znaka na intervalu $(-2.5, 2.5)$ je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$
-2.5	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$
2.5	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

Kako je $W(-2.5) = 4$, a $W(2.5) = 1$, to polinom $p(x)$ ima tri realne nule na intervalu $(-2.5, 2.5)$.

Polinom $p(x)$ u tačkama -2, -1, 0 i 2 ima vrednosti: $p(-2) > 0$, $p(-1) < 0$, $p(0) > 0$, $p(2) < 0$. Prema teoremi o međuvrednosti imamo da su nule polinoma na intervalima $(-2, -1)$, $(-1, 0)$ i $(0, 2)$.

$\triangle$

U nastavku će biti prikazana osnovna tvrđenja za kvadratnu i kubnu jednačinu, odnosno, uslovi koji određuju koliko polinomi drugog i trećeg stepena imaju realnih nula.

Lema 2. *Polinom $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, ima dve realne nule kada je $b^2 - 4ac > 0$, jednu dvostruku realnu nulu kada je $b^2 - 4ac = 0$, i nema nijednu realnu nuli kada je $b^2 - 4ac < 0$.*

Dokaz. Dat je polinom $p(x) = ax^2 + bx + c$. Za dati polinom Šturmov niz je:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= p(x) = p(x) = ax^2 + bx + c \\ p_1(x) &= p'(x) = 2ax + b \\ p_2(x) &= \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

Kako je $p_2(x) = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$, znak ovog člana niza će zavisiti samo od znaka broja $b^2 - 4ac$ i znaka broja a, jer pozitivna konstanta ne menja znak. Dakle, množenje pozitivnom konstantom neće uticati na znak polinoma ni u jednoj tački, pa će funcija W imati istu vrednost i kada umesto $p_2(x) = \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ stavimo da je $p_2(x) = \dfrac{b^2 - 4ac}{a}$.

Tablica znaka za ovaj niz je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$
$-\infty$	$\operatorname{sgn} a$	$-\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn}(a(b^2 - 4ac))$
$+\infty$	$\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn}(a(b^2 - 4ac))$

1. Ako je $b^2 - 4ac > 0$, tada je $W(-\infty) = 2$, a $W(+\infty) = 0$, pa je $W(-\infty) - W(\infty) = 2 - 0 = 2$, tj. polinom ima dve različite realne nule.

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$
$-\infty$	sgn a	$-$sgn a	sgn a
$+\infty$	sgn a	sgn a	sgn a

2. Ako je $b^2 - 4ac < 0$, tada je $W(-\infty) = 1$, a $W(+\infty) = 1$, pa polinom nema realnih nula.

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$
$-\infty$	sgn a	$-$sgn a	$-$sgn a
$+\infty$	sgn a	sgn a	$-$sgn a

3. Ako je $b^2 - 4ac = 0$, prethodno konstruisan niz nije Šturmov niz, jer je $p_2(x) = 0$, a po konstrukciji Šturmovog niza to ne sme biti.

   Primenom posledice 6 kada polinom $p(x)$ podelimo sa najvećim zajedničkim deliocem polinoma $p(x)$ i $p'(x)$, dobijamo da je $p(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)p'(x)$, a $q(x) = NZD(p, p') = x + \dfrac{b}{2a}$, odnosno Šturmov niz za polinom $\dfrac{p}{q}$ je $p_0(x) = \dfrac{p}{q} = ax + \dfrac{b}{2}$ i $p_1(x) = \dfrac{1}{2}a$. Za ovaj niz tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$
$-\infty$	$-\operatorname{sgn} a$	sgn a
$-\infty$	sgn a	sgn a

Dakle, polinom $p(x)$ ima jednu realnu nulu koja je dvostruka.

$\square$

Primer 10. *Koliko realnih nula ima polinom $p(x) = -3x^2 - 5x + 7$?*

Rešenje. Primenjujući lemu 2, nađimo $D = b^2 - 4ac = 109 > 0$. Dakle, kako je $D > 0$, to polinom $p(x)$ ima dve različite realne nule.

$\triangle$

Lema 3. *Polinom $p(y) = y^3 + py + q$, $p \neq 0$, ima tri realne nule kada je $27q^2 + 4p^3 < 0$, dve realne nule od kojih je jedna dvostruka kada je $27q^2 + 4p^3 = 0$, i jednu realnu nulu kada je $27q^2 + 4p^3 > 0$.*

Dokaz. Za polinom $p(y)$ Šturmov niz je:

$$
\begin{aligned}
p_0(y) &= p(y) = y^3 + py + q \\
p_1(y) &= p'(y) = 3y^2 + p \\
p_2(y) &= -\frac{2py}{3} - q \\
p_3(y) &= \frac{-27q^2 - 4p^3}{4p^2}
\end{aligned}
$$

Tablica znaka za ovaj niz je:

y	$p_0(y)$	$p_1(y)$	$p_2(y)$	$p_3(y)$
$-\infty$	$-$	$+$	sgn p	$-$sgn $(27q^2 + 4p^3)$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$sgn p	$-$sgn $(27q^2 + 4p^3)$

1. Ako je $27q^2 + 4p^3 > 0$, tablica znaka je sledeća:

y	$p_0(y)$	$p_1(y)$	$p_2(y)$	$p_3(y)$
$-\infty$	$-$	$+$	sgn p	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$sgn p	$-$

   Ako je $p > 0$, onda je $W(-\infty) = 2$, a $W(+\infty) = 1$.
   Ako je $p < 0$, onda je takođe $W(-\infty) = 2$ i $W(+\infty) = 1$.
   Tada je $W(-\infty) - W(\infty) = 1 - 0 = 1$, odnosno polinom $p(y)$ ima jednu realnu nulu.

2. Ako je $27q^2 + 4p^3 < 0$, to je ekvivalentno sa $q^2 < -\dfrac{27}{4}p^3$, pa mora da važi da je $p < 0$. Tablica znaka je sledeća:

y	$p_0(y)$	$p_1(y)$	$p_2(y)$	$p_3(y)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

   Kako je $W(-\infty) = 3$, a $W(+\infty) = 0$, to polinom $p(y)$ ima tri realne i različite nule.

3. Ako je $27q^2 + 4p^3 = 0$, $q \neq 0$, niz p_0, p_1, p_2, p_3 nije Šturmov, već nalik Šturmovom, pa na prethodni niz primenjujemo posledicu 6. Tada je $NZD(p, p') = -\dfrac{9q}{2p}y + p$, a kada svaki član niza p_0, p_1, p_2 podelimo

sa najvećim zajedničkim deliocem, dobijamo Šturmov niz b_0, b_1, b_2 sa najstarijim članovima i njihovim koeficijentima $-\frac{2p}{q}y^2$, $-\frac{6p}{9q}y$ i $\frac{4p^2}{27q}$.

Kako je $27q^2 + 4p^3 = 0$, važi $q^2 = -\frac{27}{4}p^3$, pa mora da biti da je $p < 0$. Tablica znaka je sledeća:

y	$b_0(y)$	$b_1(y)$	$b_2(y)$
$-\infty$	$\operatorname{sgn} q$	$-\operatorname{sgn} q$	$\operatorname{sgn} q$
$+\infty$	$\operatorname{sgn} q$	$\operatorname{sgn} q$	$\operatorname{sgn} q$

Kako je $W(-\infty) = 2$, a $W(+\infty) = 0$, onda polinom $p(y)$ ima dve realne nule od kojih je jedna dvostruka.

$\square$

Za proizvoljan polinom stepena 3, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, takođe možemo primeniti prethodnu lemu. Naime, smenom $x = y - \frac{b}{3a}$ se polinom $p(x)$ može transformisati u polinom $p(y) = y^3 + py + q$ i nule polinoma $p(y)$ biće i nule polinoma $p(x)$.

Primer 11. *Odrediti koliko ima realnih nula polinom* $p(x) = x^3+3x^2-x+5$

Rešenje. Dati polinom se može smenom $x = y - \frac{b}{3a}$ transformisati u polinom oblika $p(y) = x^3 + px + q$. Dakle, smenom $x = y - 1$ dobijamo polinom $p(y) = y^3 - 4y + 8$.

Koristeći procenu iz leme 3, dobijamo da je $27q^2 + 4p^3 = 1472 > 0$, odnosno da polinom $p(x)$ ima jednu realnu nulu.

$\triangle$

4.1 Zadaci

U narednim zadacima biće prikazana primena Šturmovog algoritma na polinomima čiji su koeficijenti iz polja realnih brojeva (odnosno, iz prstena $\mathbb{Z}$). Takođe, od bitnog značaja su i granice nula polinoma, pa će jedan od uslova za rešavanje zadatka biti određivanje tih granica.

Biće reči i o poznatim polinomima kao što su Ermitovi i Lagerovi i primena ovog algoritma koji će kao rezultat dati broj realnih nula ovih polinoma.

Zadatak 4. *Odrediti koliko polinom* $p(x) = x^5 + 7x^3 - 3$ *ima realnih nula, i naći granice nula zadatog polinoma.*

Rešenje. Za dati polinom Šturmov niz je:

$$
\begin{aligned}
p_0(x) &= x^5 + 7x^3 - 3 \\
p_1(x) &= 5x^4 + 21x^2 \\
p_2(x) &= -\frac{14}{5}x^3 + 3 \\
p_3(x) &= -21x^2 - \frac{75}{14}x \\
p_4(x) &= -\frac{125}{686}x - 3 \\
p_5(x) &= \frac{90320769}{15625} \approx 5780.
\end{aligned}
$$

Tablica znaka zavisi od znaka koeficijenata uz najstarije članove, i izgleda:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Kako je $W(-\infty) - W(+\infty) = 3 - 2 = 1$, to polinom $p(x)$ ima samo jednu realnu nulu. Odredimo kom intervalu priprada ta nula.

Po proceni $1 + \max_k \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$, dobijamo da je $|x| \leqslant 8$, tj. $x \in [-8, 8]$. Međutim, može se odrediti i manji interval. Primetimo prvo da je $p(0) = -3 < 0$, a $p(8) > 0$. Dakle, nula se nalazi na untervalu $(0, 8)$. Štaviše, $p(1) > 0$, to je nula na intervalu $(0, 1)$.

$\triangle$

Zadatak 5. *Odrediti broj realnih nula polinoma $p(x) = x^n + px + q$ uz pomoć Šturmovog algoritma, gde je $n \geqslant 2$ i $p \neq 0$.*

Rešenje. Šturmov niz za polinom $p(x)$ je:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= x^n + px + q \\ p_1(x) &= nx^{n-1} + p \\ p_2(x) &= -px(n-1) - qn \\ p_3(x) &= -p - n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Kako je $n \geqslant 2$ i $p \neq 0$, to polinom $p(x)$ nema višestruke nule, pa je ovaj niz zaista Šturmov koji zavisi od n, pa će postojati dva slučaja. Diskutujemo broj nula u zavisnosti od broja n.

I Broj n je neparan

Kako je

$$p_3(x) = -p - n\left(\frac{-nq}{(n-1)p}\right)^{n-1} = \frac{-p^n(n-1)^{n-1} - n^n q^{n-1}}{((n-1)p)^{n-1}},$$

to znak ovog člana niza zavisi od $D = -p^n(n-1)^{n-1} - n^n q^{n-1}$, jer kada je n neparno, $n-1$ je parno, pa znak člana p_3 ne zavisi od pozitivne konstante $((n-1)p)^{n-1}$.

Tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	sgn p	sgn D
$+\infty$	$+$	$+$	$-$sgn p	sgn D

1. Ako je $D > 0$, onda je $-p^n(n-1)^{n-1} > n^n q^{n-1}$, pa je $p < 0$. Tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

Dakle, $W(-\infty) - W(+\infty) = 3 - 0 = 3$. Polinom $p(x)$ ima tri različita realna rešenja.

2. Ako je $D < 0$, onda tablica znaka zavisi od znaka broja p.

   a) Ako je $p < 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$

   Tada je $W(-\infty) - W(+\infty) = 2 - 1 = 1$.

   b) Ako je $p > 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$

   Tada je $W(-\infty) - W(+\infty) = 2 - 1 = 1$.

   Dakle, broj realnih nula polinoma $p(x)$ ne zavisi od znaka broja p. Polinom $p(x)$ ima samo jednu realnu nulu.

II Broj n je paran

Kako je

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{-p^n(n-1)^{n-1} + n^n q^{n-1}}{p^{n-1}(n-1)^{n-1}} = \frac{-p^{n+1}(n-1)^{n-1} + n^n q^{n-1} p}{p^n(n-1)^{n-1}} \\ &= \frac{-pM}{p^n(n-1)^{n-1}}, \end{aligned}$$

gde je $M = p^n(n-1)^{n-1} - n^n q^{n-1}$, onda tablica znaka zavisi od znaka izraza M, jer je $p^n(n-1)^{n-1} > 0$ zbog parnosti broja n i izgleda:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$\operatorname{sgn} p$	$-\operatorname{sgn}(pM)$
$+\infty$	$+$	$+$	$-\operatorname{sgn} p$	$-\operatorname{sgn}(pM)$

Ovde razlikujemo četiri slučaja.

1. Ako je $M > 0$, tablica je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$\text{sgn } p$	$-\text{sgn } p$
$+\infty$	$+$	$+$	$-\text{sgn } p$	$-\text{sgn } p$

a) Ako je $p > 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$

Kako je $W(-\infty) - W(+\infty) = 3 - 1 = 2$, to polinom $p(x)$ ima dve realne nule.

b) Ako je $p < 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

Kako je $W(-\infty) - W(\infty) = 2 - 0 = 2$, to polinom $p(x)$ ima dve realne nule.

Dakle, kada je $M > 0$, broj realnih nula polinoma $p(x)$ ne zavisi od znaka broja p i jednak je dva.

2. Ako je $M < 0$, tablica je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$\text{sgn } p$	$\text{sgn } p$
$+\infty$	$+$	$+$	$-\text{sgn } p$	$\text{sgn } p$

a) Ako je $p > 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$+$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$+$

Kako je $W(-\infty) - W(+\infty) = 2 - 2 = 0$, to polinom $p(x)$ nema nijednu realnu nulu.

b) Ako je $p < 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$+$	$-$	$-$	$-$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-$

Kako je $W(-\infty) - W(\infty) = 1 - 1 = 0$, to polinom $p(x)$ nema nijednu realnu nulu.

Dakle, polinom $p(x)$ nema realnih nula kada je $M < 0$.

$\triangle$

Zadatak 6. *Odrediti broj realnih nula polinoma* $p(x) = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$ *uz pomoć Šturmovog algoritma.*

Rešenje. Razmotrimo prvo slučaj kada je $a \neq 0$. Za dati polinom Šturmov niz je:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= p(x) = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b\\
p_1(x) &= p'(x) = 5x^4 - 15ax^2 + 5a^2\\
p_2(x) &= 2ax^3 - 4a^2x - 2b\\
p_3(x) &= 5ax^2 - \frac{5b}{a}x - 5a^2\\
p_4(x) &= \frac{2x}{a^3}(a^5 - b^2)\\
p_5(x) &= 5a^2
\end{aligned}$$

Neka je $D = a^5 - b^2$. Tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn} a$	$-\operatorname{sgn}(aD)$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn}(aD)$	$+$

I Ako je $D > 0$, onda je $a > 0$, pa je tablica znaka:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Kako je $W(-\infty) - W(+\infty) = 5 - 0 = 5$, to polinom $p(x) = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$ ima svih pet realnih nula.

II Ako je $D < 0$, onda znak u tablici zavisi od broja a.

a) Ako je $a > 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

Kako je $W(-\infty) - W(+\infty) = 3 - 2 = 1$, to polinom $p(x) = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$ ima samo jednu realnu nulu.

b) Ako je $a < 0$, tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$p_5(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Kako je $W(-\infty) - W(\infty) = 3 - 2 = 1$, to polinom $p(x) = x^5 - 5ax^3 + 5a^2x + 2b$ ima jednu realnu nulu.

Ako je $a = 0$, tada je polinom $p(x) = x^5 + 2b$, a Šturmov niz $p_0(x) = x^5 + 2b$, $p_1(x) = 5x^4$, $p_2(x) = -2b$, pa je tablica znaka:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-\text{sgn } b$
$+\infty$	$+$	$+$	$-\text{sgn } b$

Ako je $b > 0$, onda je $W(-\infty) - W(+\infty) = 2 - 1 = 1$, a ako je $b < 0$, onda je $W(-\infty) - W(+\infty) = 1 - 0 = 1$.

Ako je i $b = 0$, onda polinom $p(x) = x^5$ ima višestruke nule, pa primenom posledice 6 na polinom $\dfrac{p(x)}{x^4}$ dobijamo Šturmov niz $p_0(x) = x$ i $p_1(x) = 5$, pa je tablica znaka jako jednostavna. Sledi da je $W(-\infty) - W(+\infty) = 1$, odnosno, polinom ima samo jednu realnu nulu, ali ta nula je petog reda što se može lako videti.

$\triangle$

Zadatak 7. *Pomoću Šturmovog algoritma odrediti broj realnih nula Ermitovih*[6] *polinoma* $p_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje. Najpre odredimo prvi izvod izraza p_n. Važi sledeće

$$p_n'(x) = (-1)^n \frac{2x}{2} e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)} + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n+1)},$$

to jest $p_n'(x) = xp_n(x) - p_{n+1}(x)$.

Kako je $p_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)} = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-1)}$, to po Lajbnicovoj formuli za izvod proizvoda imamo:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (-x)^{(i)} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-1-i)} \\ &= (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \left(-x \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-1)} - (n-1) \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n-2)}\right), \end{aligned}$$

odnosno $p_n(x) = xp_{n-1}(x) - (n-1)p_{n-2}(x)$.

Na osnovu dobijene rekurentne veze i $p_0(x) = (-1)^0 e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = 1$, $\deg p_0 = 0$, a $p_1(x) = -e^{\frac{x^2}{2}} \left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = x$, $\deg p_1 = 1$, zaključujemo da je $p_n(x)$ zaista polinom stepena n.

Na osnovu prethodnog važi $p_{n-1}'(x) = xp_{n-1}(x) - p_n(x) = (n-1)p_{n-2}(x)$, tj. $p_n'(x) = np_{n-1}(x)$. Iz ove jednakosti i rekurentne veze zaključujemo da je niz

[6] Charles Hermite (1822–1901) je bio francuski matematičar

$$
\begin{aligned}
h_0(x) &= p_n(x)\\
h_1(x) &= p_{n-1}(x)\\
&\vdots\\
h_n(x) &= p_0(x) = 1
\end{aligned}
$$

Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Iz rekurentne formule zaključujemo da su svi koeficijenti uz najstarije članova u Šturmovom nizu polinoma $p_n(x)$ pozitivni, pa je tablica znaka:

x	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$\dots$	$h_n(x)$
$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$\dots$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$\dots$	$+$

Dakle, broj realnih nula Ermitovog polinoma $p_n(x)$ jednak je $W(-\infty) - W(+\infty) = n - 0 = n$.

$\triangle$

Zadatak 8. *Pomoću Šturmovog algoritma odrediti broj realnih nula Lagerovih*[7] *polinoma* $p_n(x) = (-1)^n e^x \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje. Odredimo prvo prvi izvod izraza $p_n(x)$. Dobijamo sledeće:

$$
\begin{aligned}
p_n'(x) &= (-1)^n e^x \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)} + (-1)^n e^x \left(n x^{n-1} e^{-x} - x^n e^{-x}\right)^{(n)}\\
&= n(-1)^n e^x \left(x^{n-1} e^{-x}\right)^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Da bismo odredili rekurentnu vezu, primenimo Lajbnicovu formulu za izvod proizvoda i primenimo prethodnu dobijenu jednakost za $p_n'(x)$:

$$
\begin{aligned}
p_n(x) &= (-1)^n e^x \left(x \cdot x^{n-1} e^{-x}\right)^{(n)} = (-1)^n e^x \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{(n-i)} (x^{n-1} e^{-x})^{(i)}\\
&= (-1)^n e^x \left(x (x^{n-1} e^{-x})^{(n)} + n (x^{n-1} e^{-x})^{(n-1)}\right) = \frac{x}{n} p_n'(x) - n p_{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

Tako dobijamo da je $x p_n'(x) = n p_n(x) + n^2 p_{n-1}(x)$.

Važi i sledeće:

[7] Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886) je bio francuski matematičar

$$
\begin{aligned}
p'_n(x) &= (-1)^n n e^x \left[\left(x^{n-1}e^{-x}\right)'\right]^{(n-1)} \\
&= (-1)^n n e^x \left(-x^{n-1}e^{-x} + (n-1)x^{n-2}e^{-x}\right)^{(n-1)} \\
&= n p_{n-1}(x) - n p'_{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

Ako poslednju jednakost pomnožimo sa x i izraze $xp'_n(x)$ i $xp'_{n-1}(x)$ zamenimo, dobijamo

$$
xp'_n(x) = xnp_{n-1}(x) - nxp'_{n-1}(x),
$$

$$
np_n(x) + n^2 p_{n-1}(x) = xnp_{n-1}(x) - n((n-1)p_{n-1}(x) + (n-1)^2 p_{n-2}(x)).
$$

Iz poslednjih jednakosti dobijamo rekurentnu formulu

$$
p_n(x) = p_{n-1}(x)(1 + x - 2n) - (n-1)^2 p_{n-2}(x).
$$

Kako je $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = -e^x(-xe^{-x} + e^{-x}) = x - 1$, $\deg p_0 = 0$, $\deg p_1 = 1$ i važi poslednja jednakost, na osnovu rekurentne formule zaključujemo da je $p_n(x)$ zaista polinomi n-tog stepena.

Pokažimo da je niz

$$
\begin{aligned}
h_0(x) &= p_n(x) \\
h_1(x) &= p_{n-1}(x) \\
&\vdots \\
h_n(x) &= p_0(x) = 1
\end{aligned}
$$

Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Iz rekurentne formule se vidi da susedni polinomi ne mogu imati zajedničku nulu, jer bi u tom slučaju to bila i nula polinoma $p_0(x) = 1$. Sve nule Lagerovog polinoma su proste (višestrukosti 1). Zaista, ako bi za neko n polinom $p_n(x)$ imao višestruku nulu, ta nula bi bila i nula polinoma $p'_n(x)$, pa bi iz jednakosti $xp'_n(x) = np_n(x) + n^2 p_{n-1}(x)$ sledilo da je to nula i polinoma $p_{n-1}(x)$, a to ne može da bude po prethodno dokazanom svojstvu Lagerovih polinoma.

Ako je $h_1(a) = 0$ za neko $a \in \mathbb{R}$, tada je $h_0(a) = -(n-1)^2 h_2(a)$, odnosno, zaključujemo da su $h_0(a)$ i $h_2(a)$ suprotnog znaka. Na osnovu rekurentne veze važi da ako je a nula polinoma h_i, $0 < i < n$, tada je $h_{i-1}(a)h_{i+1}(a) < 0$.

Pokažimo da prolaskom kroz pozitivnu nulu polinoma $h_0(x)$ izraz $\dfrac{h_1(x)}{h_0(x)}$ menja znak iz minusa u plus. Da bi ovo pokazali pođimo od jednakosti

$$\frac{h_1(x)}{h_0(x)} = \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = -\frac{1}{n} + \frac{xp_n'(x)}{n^2p_n(x)} = -\frac{1}{n} + \frac{xh_0'(x)}{n^2h_0(x)}$$

i pretpostavimo da je $x_0 > 0$ nula polinoma $h_0(x)$. Prethodni izraz je definisan na nekoj okolini tačke x_0 bez te tačke. Kako je $h_0'(x_0) = p_n'(x_0) \neq 0$, to znak izraza na levoj strani jednakosti zavisi od znaka izraza $\dfrac{xh_0'(x)}{n^2h_0(x)}$, jer ovaj izraz teži ka $+\infty$ odnosno $-\infty$ kad $x \to x_0$ zdesna, odnosno sleva.

Kako je $h_0'(x_0) \neq 0$, postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 u kojoj polinom $h_0'(x)$ ne menja znak.

Ako je $h_0'(x) > 0$ u toj okolini, tada je $h_0(x)$ rastuća funkcija i važi da je $h_0(x) < 0$ za $x < x_0$ i $x \in U_{x_0}$, a $h_0(x) > 0$ za $x > x_0$ i $x \in U_{x_0}$. Pa je zbog toga izraz $h_1(x)/h_0(x) < 0$ za $x < x_0$, a $h_1(x)/h_0(x) > 0$ za $x > x_0$.

Ako je $h_0'(x) < 0$ u okolini V_{x_0}, tada je $h_0(x)$ opadajuća funkcija, i važi da je $h_0(x) > 0$ za $x < x_0$ i $x \in V_{x_0}$, a $h_0(x) < 0$ za $x > x_0$ $x \in V_{x_0}$, pa je zbog toga izraz $h_1(x)/h_0(x) < 0$ za $x < x_0$, a $h_1(x)/h_0(x) > 0$ za $x > x_0$.

U oba slučaja $h_1(x)/h_0(x) = p_{n-1}(x)/p_n(x) < 0$ menja znak iz minusa u plus prolaskom kroz pozitivnu nulu polinoma $h_0(x) = p_n(x)$.

Ovim je pokazano da je niz $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_n(x) = 1$ Šturmov niz za Lagerov polinom $p_n(x)$ na intervalu $(0, +\infty)$.

Pokažimo indukcijom da je $p_n(0) = (-1)^n n!$.

Za $n = 0$, $1 = p_0(0) = (-1)^0 0! = 1$. Pretpostavimo da važi $p_{n-1}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, i dokažimo da je $p_n(0) = (-1)^n n!$. Kako važi veza $p_n(x) = \dfrac{x}{n}p_n'(x) - np_{n-1}(x)$, to je

$$p_n(0) = -np_{n-1}(0) = -n(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^n(n)!.$$

Na osnovu prethodnog, tablica znaka je:

x	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$\cdots$	$h_n(x)$
0	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$\cdots$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$

Dakle, broj realnih nula Lagerovog polinoma $p_n(x)$ na intervalu $(0, +\infty)$ jednak je $W(0) - W(+\infty) = n - 0 = n$.

$\triangle$

Zadatak 9. *Pomoću Šturmovog algoritma odrediti broj realnih nula polinoma* $p_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Prvo primetimo da je

$$p_n'(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = p_{n-1}(x), \text{ za } n > 1.$$

Kako je $p_n(x) > 0$ za svako $x \geqslant 0$ i svako $n \in \mathbb{N}$, i važi prethodna jednakost, onda je i $p_n'(x) > 0, \ldots, p_n^{(n-1)} > 0$, to po teoremi 16 polinom $p_n(x)$ nema nula na intervalu $[0, \infty)$. Dakle, ako polinom ima realnih nula, te nule su negativne, tj. na intervalu $(-\infty, -\varepsilon)$, gde je $\varepsilon > 0$ dovoljno mali broj.

Osim toga je $p_n(x) = p_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!}$, pa polinomi $p_n(x)$, $p_{n-1}(x)$ i $-\frac{x^n}{n!}$ obrazuju Šturmov niz na intervalu $(-\infty, -\varepsilon)$ za polinom $p_n(x)$, pa je tablica znaka:

x	$p_n(x)$	$p_{n-1}(x)$	$-\frac{x^n}{n!}$
$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$(-1)^{n+1}$
$-\varepsilon$	$+$	$+$	$(-1)^{n+1}$

Ako je n paran broj, polinom nema realnih nula, a ako je n neparan broj, polinom ima jednu realnu nulu koja je negativna.

$\triangle$

Zadatak 10. *Pomoću Šturmovog algoritma odrediti broj realnih nula polinoma* $p_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} e^{-\frac{1}{x}} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje. Posmatrajmo izraz $I_{n+1} = \left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}$. Ovaj izraz ćemo na dva načina predstaviti da bismo dobili jednakost koja će nam pomoći da nađemo rekurentnu vezu za $p_n(x)$.

Prvo imamo sledeće:

$$I_{n+1} = \left[\left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)'\right]^{(n)} = \left(2xe^{\frac{1}{x}} + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}\right) = \left(e^{\frac{1}{x}}(2x-1)\right)^{(n)}.$$

Ako primenimo Lajbnicovu formulu za izvod proizvoda na izraz $I_{n+1} = \left(x^2 e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)}$, dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (x^2)^{(i)} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1-i)} \\ &= x^2\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} + (n+1)2x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} + n(n+1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Ako opet primenimo Lajbnicovu formulu za izvod proizvoda ali sada na izraz $I_{n+1} = \left(e^{\frac{1}{x}}(2x-1)\right)^{(n)}$, dobijamo sledeće:

$$I_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (2x-1)^{(i)} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-i)} = (2x-1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} + 2n\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)}.$$

Kada izjednačimo poslednje dve jednakosti i sredimo, dobija se:

$$x^2\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}(-1-2nx) + \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)}(n-n^2). \tag{2}$$

Ako poslednju jednakost uvrstimo u izraz nakon prvog koriščenja Lajbnicove formule, dobija se:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= x^2\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n+1)} + (n+1)2x\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} + n(n+1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)} \\ &= (2x-1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} + 2n\left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Množenjem jednakosti (2) sa $(-1)^{n+1}x^{2n}\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)$, dobijamo rekurentnu vezu

$$p_n(x) = (2nx+1)p_{n-1}(x) - n(n-1)x^2 p_{n-2}(x).$$

Kako je $p_0(x) = 1$, deg p_0=0, a $p_1(x) = 2x+1$, deg p_1=1 i važi poslednja jednakost, onda je $p_n(x)$ zaista polinom n-tog stepena.

Diferenciranjem polinoma $p_{n-1}(x)$ dobija se veza između $p_{n-1}(x)$, $p'_{n-1}(x)$ i $p_n(x)$. Dakle:

$$\begin{aligned}
p_{n-1}(x) &= (-1)^n x^{2n} e^{-\frac{1}{x}} \left(e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}, \\
p'_{n-1}(x) &= \frac{2n}{x} p_{n-1}(x) + \frac{1}{x^2} p_{n-1}(x) - \frac{1}{x^2} p_n(x), \\
x^2 p'_{n-1}(x) &= (2nx+1) p_{n-1}(x) - p_n(x) \\
&\Leftrightarrow p_n(x) = (2nx+1)p_{n-1}(x) - x^2 p'_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

Iz jednakosti $p_n(x) = (2nx+1)p_{n-1}(x) - n(n-1)x^2 p_{n-2}(x)$ i $p_n(x) = (2nx+1)p_{n-1}(x) - x^2 p'_{n-1}(x)$, dobijamo da je $p'_{n-1}(x) = n(n-1)p_{n-2}(x)$, odnosno $p'_n(x) = n(n+1)p_{n-1}(x)$.

Dokazaćemo da je niz polinoma

$$\begin{aligned}
h_0(x) &= p_n(x) \\
h_1(x) &= p_{n-1}(x) \\
&\vdots \\
h_n(x) &= p_0(x) = 1
\end{aligned}$$

Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Ako bi neka dva uzastopna polinoma imala zajedničku nulu, onda bi na osnovu rekurentne veze to bila i nula prethodnog polinoma, pa nastavljajući induktivno zaključujemo da bi to nila i polinoma $p_0(x) = 1$, što je nemoguće. Ako bi polinom $p_n(x)$ imao višestruku nulu, onda bi to bila i nula polinoma $p'_n(x)$, a ujedno i nula polinoma $p_{n-1}(x)$ zbog jednakosti $p'_n(x) = n(n+1)p_{n-1}(x)$, a to ne može da bude zbog prethodno dokazanog svojstva. Dakle, sve nule polinoma $p_n(x)$ su proste.

Neka je x_0 realna nula polinoma $h_1(x)$, dokažimo da je $h_0(x_0)h_1(x_0) < 0$. U tom slučaju važi $h_0(x) = (2nx+1)h_1(x) - n(n-1)x^2 h_2(x)$, pa dobijamo $h_0(x_0) = -n(n-1)x_0^2 h_2(x_0)$. Dakle, $h_0(x_0)h_2(x_0) < 0$ za $n > 1$. Zbog rekurentne veze će važiti da ako je a nula polinoma h_i, $1 < i < n$, onda je $h_{i-1}(a)h_{i+1}(a) < 0$.

Neka je x_0 nula polinoma $h_0(x)$. Treba pokazati da $h_0(x)h_1(x)$ menja znak prolaskom kroz x_0 iz $-$ u $+$. Najpre primetimo da se jednakost

$h_0'(x) = n(n+1)h_1(x)$ može zapisati kao:

$$\frac{h_0'(x)}{h_0(x)} = n(n+1)\frac{h_1(x)}{h_0(x)},$$

gde je $h_0(x) \neq 0$ u nekoj okolini tačke x_0 bez te tačke. Kako je $h_0'(x_0) \neq 0$, to izraz na levoj strani teži ka $+\infty$ kad $x \to x_0$.

Neka je $h_0'(x_0) > 0$. Tada postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 u kojoj je $h_0'(x) > 0$. Polinom $h_0(x)$ je monotono rastući, pa je $h_0(x) < 0$ za $x < x_0$ i $x \in U_{x_0}$, a $h_0(x) > 0$ za $x > x_0$ i $x \in U_{x_0}$. Dakle, izraz $\dfrac{h_0'(x)}{h_0(x)}$ menja znak iz minusa u plus, pa zbog poslednje jednakosti isto vazi i za izraz $\dfrac{h_1(x)}{h_0(x)}$. Kada je $h_0'(x_0) < 0$ zaključak je isti. Dakle, niz polinoma $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_n(x) = 1$ je Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Da bi pokazali da je koeficijent uz najstariji član pozitivan, koristićemo indukciju.
Za $n = 0$, $p_0(x) = 1 > 0$. Pretpostavimo da je koeficijent uz najstariji član polinoma $p_{n-1}(x)$ pozitivan, i dokažimo da za polinom $p_n(x)$ isto važi.

Kako je p_{n-1} polinom, to ga možemo zapisati u obliku $p_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0$. Važi da je $a_{n-1} > 0$ i veza $p_n'(x) = n(n+1)p_{n-1}(x)$, dakle koeficijent uz najstariji član polinoma $p_n'(x)$ je pozitivan i jednak je $n(n+1)a_{n-1}$. Iz prethodnog mora važiti i da je najstariji koeficijent polinoma $p_n(x)$ pozitivan. Na osnovu prethodnog, tablica znaka je:

x	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$\cdots$	$h_n(x)$
$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$\cdots$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$

Dakle, broj realnih nula polinoma $p_n(x)$ je $W(-\infty) - W(+\infty) = n$.

$\triangle$

Zadatak 11. *Pomoću Šturmovog algoritma odrediti broj realnih nula polinoma* $p_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje. Neka je $I_n = \left((x^2+1)\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}$. Tada za svako $n \geqslant 1$ je $I_n = 0$. Ako primenimo Lajbnicovu formulu za izvod proizvoda na izraz I_n, dobijamo sledeće:

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{i=0}^{n} \tbinom{n}{i} (x^2+1)^{(i)} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n-i)} \\
&= (x^2+1)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} + 2nx\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n-1)} + n(n-1)\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n-2)}.
\end{aligned}$$

Kada poslednju jednakost pomožimo sa $\dfrac{(-1)^n}{n!}(x^2+1)^n$, dobijamo rekurentnu vezu $p_n(x) = 2xp_{n-1}(x) - (x^2+1)p_{n-2}(x)$ za $n \geqslant 2$.

Da je zaista p_n polinom stepena n, vidi se iz poslednje jednakosti i $p_0(x) = 1$, $\deg p_0 = 0$, a $p_1(x) = 2x$, $\deg p_1 = 1$.

Kako je $p_{n-1}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(x^2+1)^n \left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)^{(n-1)}$, diferenciranjem ovog polinoma dobija se:

$$\begin{aligned}
p'_{n-1}(x) = &\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} 2nx(x^2+1)^{n-1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n-1)} + \\
&+ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}(x^2+1)^n \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)},
\end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned}
p'_{n-1}(x) = &\frac{2nx}{x^2+1} p_{n-1}(x) - \frac{n}{x^2+1} p_n(x) \\
&\Leftrightarrow p_n(x) = 2xp_{n-1}(x) - \frac{x^2+1}{n} p'_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1
\end{aligned}$$

Iz poslednje jednakosti i iz rekurentne veze dobijamo da je $p'_{n-1}(x) = np_{n-2}(x)$, tj. $p'_n(x) = (n+1)p_{n-1}(x)$.

Pokažimo da je niz

$$\begin{aligned}
h_0(x) &= p_n(x)\\
h_1(x) &= p_{n-1}(x)\\
&\vdots\\
h_n(x) &= p_0(x) = 1
\end{aligned}$$

Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Ako bi neka dva uzastopna polinoma imala zajedničku nulu, to bi značilo da je ta nula i nula polinoma $p_0(x) = 1$ zbog rekurentne formule, što je nemoguće. Ako bi za neko n polinom $p_n(x)$ imao višestruku nulu, ta nula bi bila i nula polinoma $p'_n(x)$, pa bi iz jednakosti $p'_n(x) = (n+1)p_{n-1}(x)$ sledilo da je to nula i polinoma $p_{n-1}(x)$, a to ne može da bude po prethodnom dokazanom svojstvu. Dakle, sve nule polinoma $p_n(x)$ su proste.

Ako je $h_1(x_0) = 0$ za neko $x_0 \in \mathbb{R}$, tada iz dobijene rekurentne veze $h_0(x_0) = 2x_0h_1(x_0) - (x_0^2+1)h_2(x_0)$ zaključujemo da su $h_0(x_0)$ i $h_2(x_0)$ suprotnog znaka. Na osnovu rekurentne veze važi da ako je a realna nula polinoma h_i, $0 < i < n$, tada je $h_{i-1}(a)h_{i+1}(a) < 0$.

Pokažimo da prolaskom kroz realnu nulu polinoma $h_0(x)$ izraz $\dfrac{h_1(x)}{h_0(x)}$ menja znak iz minusa u plus. Na osnovu jednakosti $p'_n = (n+1)p_{n-1}$, tj. $h'_0 = (n+1)h_1$ posmatrajmo sledeće

$$\frac{h'_0(x)}{h_0(x)} = (n+1)\frac{h_1(x)}{h_0(x)}$$

i pretpostavimo da je x_0 nula polinoma $h_0(x)$ i prethodni izraz je definisan na nekoj okolini tačke x_0 bez te tečke. Tada je $h'_0(x_0) = p'_n(x_0) \neq 0$, pa znak izraza na levoj strani jednakosti zavisi od znaka izraza $\dfrac{h_1(x)}{h_0(x)}$, jer ovaj izraz teži ka $+\infty$ kad $x \to x_0$.

Kako je $h'_0(x_0) \neq 0$, postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 u kojoj polinom $h'_0(x)$ ne menja znak.

Ako je $h'_0(x) > 0$ u toj okolini, tada je $h_0(x)$ rastuća funkcija i važi da je $h_0(x) < 0$ za $x < x_0$ i $x \in U_{x_0}$, a $h_0(x) > 0$ za $x > x_0$ i $x \in U_{x_0}$. Pa je zbog toga izraz $h_1(x)/h_0(x) < 0$ za $x < x_0$, a $h_1(x)/h_0(x) > 0$ za $x > x_0$.

Ako je $h_0'(x) < 0$ u okolini V_{x_0}, tada je $h_0(x)$ opadajuća funkcija, i važi da je $h_0(x) > 0$ za $x < x_0$ i $x \in V_{x_0}$, a $h_0(x) < 0$ za $x > x_0$ $x \in V_{x_0}$, pa je zbog toga izraz $h_1(x)/h_0(x) < 0$ za $x < x_0$, a $h_1(x)/h_0(x) > 0$ za $x > x_0$.

U oba slučaja $h_1(x)/h_0(x)$ menja znak iz minusa u plus prolaskom kroz nulu polinoma $h_0(x)$.

Ovim je pokazano da je niz $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_n(x) = 1$ Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Pokažimo indukcijom da su koeficijenti uz najstarije članove pozitivni. Za $n = 0$ je $p_1(x) = 1 > 0$. Pretpostavimo da je najstariji koeficijent polinoma p_{n-1} pozitivan i pokažimo da to važi i za polinom p_n. Kako je p_{n-1} polinom, onda ga možemo zapisati kao $p_{n-1}(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Važi veza $p_n'(x) = (n+1)p_{n-1}(x)$, pa odavde zaključujemo da i polinom p_n' ima pozitivan koeficijent uz najstariji član. Dakle, mora važiti i da je koeficijent uz najstariji član polinoma p_n takođe pozitivan.

Tablica znaka je:

x	$h_0(x)$	$h_1(x)$	$\cdots$	$h_n(x)$
$-\infty$	$(-1)^n$	$(-1)^{n-1}$	$\cdots$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$\cdots$	$+$

Broj realnih nula polinoma $p_n(x)$ je $W(-\infty) - W(+\infty) = n$.

$\triangle$

Zadatak 12. *Pomoću Šturmovog algoritma odrediti broj realnih nula polinoma* $p_n(x) = (-1)^n (x^2+1)^{n+\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Rešenje. Pođimo od izraza

$$I_n = \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{(n)} = \left[\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)'\right]^{(n-1)} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^{(n-1)}.$$

Primenimo Lajbnicovu formulu prvo za levu strana izraza I_n. Dobijamo sledeće:

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x^2+1)^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n-i)}.$$

Nakon sređivanja dobija se:

$$I_n = (x^2+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n)} + 2nx \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n-1)} + n(n-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n-2)}.$$

Primenimo opet Lajbnicovu formulu ali sada za desnu stranu izraza I_n. Dobija se:

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (x)^{(i)} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n-1-i)} \\ &= x \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n-1)} + (n-1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)^{(n-2)}. \end{aligned}$$

Kada izjednačimo levu i desnu strana izraza I_n nakon primene Lajbnicove formule, i pomnožimo sa $(-1)^n (x^2+1)^{n-\frac{1}{2}}$, dobija se rekurentna veza:

$$p_n(x) = x(2n-1)p_{n-1}(x) - (n-1)^2(x^2+1)p_{n-2}(x).$$

Kako je $p_0(x) = 1$ i $\deg p_0 = 1$, a $p_1(x) = x$ i $\deg p_1 = 1$, to iz rekurentne veze možemo zaključiti da je p_n zaista polinom stepena n.

Diferenciranjem polinoma p_{n-1} dobija se

$$p'_{n-1}(x) = -\frac{1}{x^2+1} p_n(x) + \frac{x(2n-1)}{x^2+1} p_{n-1}(x),$$

odnosno $p_n(x) = x(2n-1)p_{n-1}(x) - (x^2+1)p'_{n-1}(x)$.

Iz poslednje jednakosti i rekurentne veze dobijamo da je $p'_{n-1}(x) = (n-1)^2 p_{n-2}(x)$, tj. $p'_n(x) = n^2 p_{n-1}(x)$.

Pokažimo da je niz polinoma

$$\begin{aligned} h_0(x) &= p_n(x) \\ h_1(x) &= p_{n-1}(x) \\ &\vdots \\ h_n(x) &= p_0(x) = 1 \end{aligned}$$

Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Ako bi neka dva uzastopna polinoma imala zajedničku nulu, to bi značilo da je ta nula i nula polinoma $p_0(x) = 1$ što je nemoguće. Ako bi za neko n polinom $p_n(x)$ imao višestruku nulu, ta nula bi bila i nula polinoma $p_n'(x)$, pa bi iz jednakosti $p_n'(x) = n^2 p_{n-1}(x)$ sledilo da je to nula i polinoma $p_{n-1}(x)$, a to ne može da bude po prethodnom dokazanom svojstvu. Dakle, sve nule polinoma $p_n(x)$ su proste.

Pokažimo da ako h_1 ima nulu u nekoj tački a, da je tada $h_0(a)h_2(a) < 0$. Neka je a realna nula polinoma $h_1(x)$. Na osnovu veze između h_0 i h_1 dobijamo $h_0(a) = -(n-1)^2(a^2+1)h_2(a)$, odnosno, $h_0(a)h_2(a) < 0$. Zbog rekurentne veze će važiti da ako je a realna nula polinoma h_i, $0 < i < n$ onda je $h_{i-1}(a)h_{i+1}(a) < 0$.

Pokažimo da prolaskom kroz realnu nulu polinoma $h_0(x)$ izraz $\dfrac{h_1(x)}{h_0(x)}$ menja znak iz minusa u plus. Kako važi veza $p_n' = n^2 p_{n-1}$, tj. važi da je $h_0' = n^2 h_1$, posmatrajmo

$$\frac{h_0'(x)}{h_0(x)} = n^2 \frac{h_1(x)}{h_0(x)}$$

i pretpostavimo da je x_0 nula polinoma $h_0(x)$ i prethodni izraz je definisan na nekoj okolini tačke x_0 bez te tačke. Tada je $h_0'(x_0) = p_n'(x_0) \neq 0$, pa znak izraza na levoj strani jednakosti zavisi od znaka izraza $\dfrac{h_1(x)}{h_0(x)}$, jer ovaj izraz teži ka $+\infty$ kad $x \to x_0$.

Kako je $h_0'(x_0) \neq 0$, postoji okolina U_{x_0} tačke x_0 u kojoj polinom $h_0'(x)$ ne menja znak.

Ako je $h_0'(x) > 0$ u toj okolini, tada je $h_0(x)$ rastuća funkcija i važi da je $h_0(x) < 0$ za $x < x_0$ i $x \in U_{x_0}$, a $h_0(x) > 0$ za $x > x_0$ i $x \in U_{x_0}$. Pa je zbog toga izraz $h_1(x)/h_0(x) < 0$ za $x < x_0$, a $h_1(x)/h_0(x) > 0$ za $x > x_0$. Slično se pokažuje i kada je $h_0'(x) < 0$ da izraz $h_1(x)/h_0(x) < 0$ menja znak iz minusa u plus. Dakle, $h_1(x)/h_0(x)$ menja znak iz minusa u plus prolaskom kroz nulu polinoma $h_0(x)$.

Ovim je pokazano da je niz $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_n(x) = 1$ Šturmov niz za polinom $p_n(x)$.

Analogno kao i u prethodnim zadacima pokažemo indukcijom da svi članovi Šturmovog niza imaju pozitivne koeficijente uz najstarije članove, pa odatle zaključujemo da polinom $p_n(x)$ ima n realnih nula.

$\triangle$

Zadatak 13. *Neka je $p(x)$ polinom trećeg stepena koji nema višestruke nule. Dokazati da polinom $P(x) = 2p(x)p''(x) - [p'(x)]^2$ ima tačno dve realne nule.*

Rešenje. Neka je $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$. Niz polinoma $P(x)$, $P'(x)$ i $(p'(x))^2$ nije Šturmov niz za polinom $P(x)$, jer $(p'(x))^2$ može imati realne nule. Posmatrajmo polinom
$Q(x) = P(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ malo, i pokažimo da je broj realnih nula polinoma $Q(x)$ jednak broju realnih nula polinoma $P(x)$.

Za polinom $Q(x)$ pokažimo da je niz

$$p_0(x) = P(x) - \varepsilon$$

$$p_1(x) = (P(x) - \varepsilon)' = 2p(x)p'''(x)$$

$$p_2(x) = (p'(x))^2 + \varepsilon$$

Šturmov za dovoljno malo $\varepsilon > 0$.

Polinom p nema višestruke nule, pa ni polinom p_0 neće imati višestruke nule za dovoljno malo $\varepsilon > 0$. Kako je $p_1 = 2pp'''$, p''' konstanta, i ako bi p_1 i p_0 imali zajedničku nulu a, to bi onda bila i nula polinoma p i važilo bi da je $p_0(a) = -\varepsilon$. Takođe, ni p_1 i p_2 nemaju zajedničku nulu, jer p_2 nema realnih nula. Dakle, ne mogu dva uzastopna člana niza imati istu nulu.

Po konstrukciji važi i $p_0' = p_1$ i p_2 je različito od nule i nema realnih rešenja.

Ako je a nula polinoma p_1, pokažimo da je $p_0(a)p_2(a) < 0$. Zbog jednakosti $p_1 = 2pp'''$ dobijamo da je a nula polinoma p, a kako je

$$p_0(a) = 2p(a)p''(a) - (p'(a))^2 - \varepsilon = 0 - p_2(a),$$

onda je $p_0(a)p_2(a) < 0$. Ovim smo pokazali da je niz $p_0,\ p_1,\ p_2$ Šturmov niz za polinom $Q(x)$.

Koeficijenti uz najstarije članove polinoma $p,\ p',\ p''$ su respektivno $a_3,\ 3a_3,\ 3a_3$, pa su koeficijenti uz najstarije članove niza $3a_3^2$, $12a_3^2$ i $9a_3^2$, a stepeni ovih polinom su 4, 3, 4. Tada je $W(-\infty) - W(+\infty) = 2$, pa $Q(x)$ ima dve realne nule. Zbog neprekidnosti polinoma i uslova da P nema višestruke nule, za dovoljno malo ε, polinom $Q(x) = P(x) - \varepsilon$ teži ka polinomu $P(x)$, odnosno i polinom $P(x)$ ima dve realne nule.

$\triangle$

Osim određivanja broja realnih nula i intervala u kome se one nalaze, nekad je od značaja i naći približne vrednosti tih nula (ako nule nisu iz skupa racionalnih brojeva). Da bi odredili te približne vrednosti, potreban nam je alat numeričke matematike. Koristićemo Njutnovu metodu polovljenja intervala.

Zadatak 14. *Za polinom $p(x) = x^3 - 3x - 1$ odrediti priližne vrednosti realnih nula sa greškom $\varepsilon = \pm\dfrac{1}{10}$.*

Rešenje. Prvi korak je određivanje broja realnih nula, a zatim naći intervale u kom se nalazi svaka nula zadatog polioma. Šturmov niz za polinom $p(x)$ je:

$$\begin{aligned}
&p_0(x) = p(x) = x^3 - 3x - 1\\
&p_1(x) = p'(x) = 3x^2 - 3\\
&p_2(x) = 2x + 1\\
&p_3(x) = 2,25.
\end{aligned}$$

Tablica znaka je:

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$	$+$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$+$

Broj realnih nula polinoma $p(x)$ jednaka je $W(-\infty) - W(+\infty) = 3$. Nađimo u kojim intervalima se nalaze nule ovih polinoma.

Primetimo da je $p(0) = -3 < 0$, a $p(-1) = 1 > 0$, dakle jedna nula polinom se nalazi na intervalu $(-1, 0)$. A kako je $p(2) = 1 > 0$, onda se druga nula nalazi na intervalu $(0, 2)$, a $p(-2) = -3$ i $p(-1) = 1 > 0$, pa treća nula pripada intervalu $(-2, -1)$.

Metodom polovljenja intervala ćemo naći ove realne nula na ovim intervalima.

Nađimo prvu nulu na intervalu $(0,2)$.

(a,b)	$x=\dfrac{a+b}{2}$	$p(x)$
$(0,2)$	$x=1$	$p(x)=-3$
$(1,2)$	$x=1,5$	$p(x)=-2,125$
$(1,5;2)$	$x=1,75$	$p(x)\approx-0,891$
$(1,75;2)$	$x=1,875$	$p(x)\approx-0,033$
$(1,875;2)$	$x=1,9375$	$p(x)\approx0,461$
$(1,875;1,9375)$	$x\approx1,906$	$p(x)\approx0,208$
$(1,875;1,906)$	$x\approx1,891$	$p(x)\approx0,086$
$(1,875;1,891)$	$x\approx1,883$	$p(x)\approx0,028$
$(1,875;1,883)$	$x\approx1,879$	$p(x)\approx-0.003$

Jedna nula polinoma ima približnu vrednost $x\approx1,879$.

Tražimo približne vrednosti druge dve nule polinoma na intervalima $(-2,-1)$ i $(-1,0)$.

(a,b)	$x=\dfrac{a+b}{2}$	$p(x)$
$(-2,-1)$	$x=-1,5$	$p(x)=5,75$
$(-2;-1,5)$	$x=-1,75$	$p(x)\approx-1,109$
$(-1,5;-1,75)$	$x=-1,625$	$p(x)\approx-0,416$
$(-1,5;-1,625)$	$x=-1,5625$	$p(x)\approx-0,127$
$(-1,5;-1,5625)$	$x\approx-1,531$	$p(x)\approx0,004$

Druga približna nula je $x\approx-1,531$.

(a,b)	$x=\dfrac{a+b}{2}$	$p(x)$
$(-1,0)$	$x=-0,5$	$p(x)=0,375$
$(-0,5;0)$	$x=-0,25$	$p(x)\approx -2,656$
$(-0,5;-0,25)$	$x=-0,375$	$p(x)\approx 0,072$
$(-0,375;-0,25)$	$x=-0,3125$	$p(x)\approx -0,093$
$(-0,375;-0,3125)$	$x\approx -0,3437$	$p(x)\approx -0,009$

Treća približna nula je $x\approx -0,3437$. $\triangle$

5 Zaključak

U ovom radu je prikazan algoritam za nalaženje broja realnih nula polinoma sa realnim koeficijentima, kao i postupak nalaženje granica tih nula.

Šturmov algoritam zajedno sa granicama nula polinoma, određuje broj realnih nula na nekom intervalu, ali i ukupan broj realnih nula (odnosno na intervalu $(-\infty, +\infty)$). Algoritam omogućava za polinome velikog stepena brži i manje složen postupak nalaženja broja realnih nula nego što bi neki drugi algebarski alat dao. Međutim, ovaj algoritam za neke polinome velikog stepena može biti iteracijski naporan, a za polinome manjeg stepena može dati „brze” rezultate. Ovaj algoritam ne zahteva previše teorijske potpore koja mnogo izlazi iz okvira srednjoškolskog gradiva, pa se može prikazati i đacima srednjih škola. Na fakultetitima nalaženje nula polinoma je zastupljeno i na kursevima analize i na kursevima algebre, pa se ovim algoritmom rešenja nekih problema mogu prikazati na jednostavniji način, a jedan primer toga su poznati polinomi Ermitovi i Lagerovi.

„*Ovim ogromnim otkrićem, Šturm je jednim potezom pojednostavio i usavršio elemente algebre, povezujući ih sa novim rezultatima.*” [8]

[8] Liuvil

Literatura

[1] Childs L. N. *A concrete introduction to higher algebra, Springer-Velrag, New York 1979.*

[2] Prasolov V. *Polynomials, MCCME 2001.*

[3] Kadelburg Z., Adnađević D. *Matematička analiza I, Matematički fakultet u Beogradu, Beograd 2003.*

[4] Dimitrijević R. *Euklidov algoritam, Prirodno-matematički fakultet u Nišu, Niš 2008.*

[5] Dimitrijević R. *Zbirka zadataka iz teorije polinoma, Materijali za mlade matematičare, Sveska 51, Društvo matematičara Srbije, Beograd 2011.*

[6] Jevtić B. *Princip maksimuma modula i primene, Master rad, Matematički fakultet u Beogradu, Beograd 2016.*

[7] Raghavan K. N. *Sturm's method for the number of the real roots of a real polynomial, The Institute of Matemathical Sciences, Chennai* https://www.imsc.res.in/˜knr/past/sturm/formal˙notes.pdf