УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Мастер рад

Векторски ауторегресиони модели покретних просека са применама у климатологији

Ментор:

др Јелена Јоцковић

Студент:

Милица Танасић, 1043/2019

Београд

Септембар 2019. године

САДРЖАЈ

1. УВОД

Једнодимензионе временске серије не представљају најбољи модел за описивање већине феномена који се данас јављају у пракси. Зато се јавља потреба за посматрањем више променљивих током времена. У данашње време, утицај једне појаве на другу може да буде веома корисна информација. На пример, економска глобализација и појава интернета довела је до уско повезаних делатности у склопу финансијског тржишта. Осцилације у ценама на једном тржишту врло брзо утичу на осцилације у другом. Да би се донели закључци о побољшању пословања и побољшању квалитета живота свакодневно се анализирају подаци који су прикупљани чак и годинама уназад.

Вишедимензиона временска серија представља вектор више једнодимензионих времеснких серија, тј. укључује више променљивих које зависе од времена. Променљива не зависи само од своје прошлости, већ и од осталих променљивих. Ова зависност је касније корисна за прогнозу. Размотримо једноставан пример вишедимензионе временске серије. Нека скуп података садржи вредности: брзина ветра, висина падавина, притисак ваздуха, температура и релативна влажност ваздуха (Слика 1.)[1]. У овој табели се налазе подаци који се односе на немачки град Потсдам, преузети из литературе [8] и импортовани у RStudio. У овом случају, на пример, за предикцију температуре су нам на располагању и вредности осталих климатских фактора.

datum	brzinaVetra	visinaPadavina	pritisakVazduha	temperaturaVazduha	relativnaVlaga
2009-01-01	2.5	0.0	1013.1	-3.4	99
2009-01-02	2.0	1.4	1015.1	-3.1	97
2009-01-03	5.6	0.7	1010.5	-5.4	89
2009-01-04	3.8	8.6	1000.2	0.2	99
2009-01-05	2.9	0.0	1007.7	-5.7	91
2009-01-06	2.4	0.0	1013.4	-12.5	85
2009-01-07	5.0	0.1	1006.1	-10.4	91

Слика 1.

Циљ овог рада је анализа управо тих вишедимензионалних серија на примеру климатологије као науке која по самој својој дефиницији проучава феномене променљивог карактера. Посматрајући више серија истовремено, уочавамо и више могућности за везу између компонената. Самим тим, на подацима можемо испробати више модела који укључују и више параметара, а затим упоређивати прогнозу и ефикасност за исте.

[1] У слици/табели се налазе подаци који се односе на немачки град Потсдам, преузети из литературе [8] и импортовани у RStudio

У почетку рада ћемо увести основне појмове из теорије вишедимензионих временских серија. Већина тих појмова представља генерализацију појмова који се помињу у теорији једнодимензионих временских серија, с тим да се у векторском случају сусрећемо са комплекснијим рачуном који укључује матрице.

Иза тог поглавља описују се прво векторски ауторегресиони модели (VAR) и изводе се њихове особине које су корисне приликом посматрања серија конкретних података. VAR модели се у новијој литератури временских серија чешће помињу него остали векторски модели. Нису комплексни као VARMA модели и у пракси су се показали као добро решење за неколицину проблема. Даље се описују VMA модели и њихове особине, затим VARMA модели као модели који садрже претходно поменуте VMA и VAR компоненте. На крају рада описана је примена теорије на конкретне климатолошке податке. Приказани су кораци анализе података у програму као и могућности које нам пружају софтверски алати који се сваким даном све више развијају у корист теорије временских серија.

2. ОСНОВНИ ПОЈМОВИ

Једнодимензиона временска серија је, најједноставније речено, уређен низ забележених опсервација током времена. Другим речима, временска серија се односи на податке добијене мерењем у одређеном временском интервалу, при чему су, најчешће ти временски интервали једнаки. Временски интервали који се углавном користе у пракси су година, пола године, квартал, месец, недеља, дан. На пример, годишње пратимо миграције становништва и стопу наталитета у демографији, месечно кретање цена и производње у одређеним сегментима тржишта, а што се тиче климатских података, они се најчешће мере дневно у територијално распоређеним станицама. Региструју се температура, брзина ветра, притисак ваздуха, висина падавина и још компонената које су битне за анализу климатских прилика, као и анализу утицаја загађења на климатске промене и околину.

У временском тренутку t , опсервацију временске серије означаваћемо са $\boldsymbol{r_t}$.

Даље ћемо навести формалне дефиниције.

Дефиниција: Нека је $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathrm{P})$ простор вероватноћа и $(S, \boldsymbol{\mathcal{B}})$ мерљив простор. Функција $X : \Omega \to S$, која је мерљива у односу на сигма алгебре $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{B}}$**,** у смислу да за сваки скуп $B \in \boldsymbol{\mathcal{B}}$ важи $X^{-1}(B) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, зове се случајни елемент у простору S. [5]

Дефиниција: Фамилија случајних елемената $\{X_{t,} t \in T\}$ дефинисаних на неком простору вероватноћа $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathrm{P})$ где је T бесконачан скуп, зове се случајна функција.

Скуп T из претходне дефиниције зове се параметарски скуп. Ако је $T = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$,

$T = [0, +\infty)$ или $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ онда се параметар $t \in T$ интерпретира као време, а случајна функција $\{X_{t,} t \in T\}$ зове се случајан процес са непрекидним временом. Ако је $T \subset \mathbb{Z}$, где је $\mathbb{Z}$ скуп целих бројева, случајна функција се зове случајан процес са дискретним временом. [5]

Дефиниција: Једнодимензиона временска серија је реализација једнодимензионог случајног процеса.

Климатски подаци, као што је већ поменуто, најчешће мерени дневно, могу се посматрати као временске серије и могу се анализирати сходно потребама. Посматран интегрисани систем више променљивих током времена захтева увођење основних појмова и дефиниција у вишедимензионом случају.

Дефиниција: Векторски случајан процес $\{X_{t,} t \in T\}$ је одређен фамилијом случајних вектора $X_t = (X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tm}): \Omega \to \mathbb{R}^m,\ t \in T, m \geq 2$ који су дефинисани на истом простору вероватноћа, $(\Omega, \boldsymbol{\mathcal{A}}, \mathrm{P})$ при чему претпостављамо да је T бесконачан скуп.

У зависности од тога шта је скуп T (најчешће се помињу случајеви $T \subset \mathbb{Z},\ T \subset \mathbb{R}$) уводимо класификацију процеса са дискретним и непрекидним временом, као и у једнодимензионом случају. [5]

Дефиниција: Векторска временска серија је реализација векторског случајног процеса.

Посматрајући неке од особина серија, можемо направити и одређене класификације временских серија.

У зависности од тога како се региструју вредности серије можемо их поделити на:

- Непрекидне временске серије

  Непрекидна временска серија се састоји од опсервација које су измерене у неком временском интервалу

- Дискретне временске серије

  Дискретна временска серија је она серија која се састоји од опсервација измерених у дискретним временским тренуцима

У зависности од тога да ли се статистичка својства мењају током времена делимо их на:

-Стационарне временске серије

Дефиниција (строга стационарност): За случајан процес $\{X_{t,} t \in T\}$ кажемо да је *строго стационаран*, ако су његове коначно-димензионе расподеле инваријантне у односу на транслацију времена, тј. ако важи

$$F_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), \text{ за свако } h, t_1, t_2, \dots, t_n \in T.$$

***Дефиниција (слаба стационарност*):** За случајан процес $\{X_{t,} t \in T\}$ кажемо да је *слабо стационаран процес* ако важе следеће особине

1)$E\left(X_{t,}\right) = c = const \;\; \forall t \; \in T$

2)$E\left({X_t}^2\right) < \infty, \forall t \; \in T$

3) $Cov(X_t\,, X_{t+h}\,)$ зависи од h, не од t

-Нестационарне временске серије

су серије које нису слабо стационарне.

У теорији временских серија заступљен је процес који се назива белим шумом. Као и у једнодмензионом случају, он фигурише у дефиницијима модела, с тим да је за вишедимензионе серије потребно дефинисати вишедимензиони процес белог шума.

Дефиниција: За k-димензиони случајни процес $\boldsymbol{a}_t = (a_{1t}, \dots . a_{kt}\,)'$ кажемо да је *вишедимензиони процес белог шума* ако задовољава следеће услове:

1)$E[{a_{it}}^2] < \infty, i = 1, 2, \dots, k\,, \forall t$

2) $E\boldsymbol{a}_t = 0, \forall t$

3) $E\boldsymbol{a}_t\boldsymbol{a}_{t-l}' = \begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}\,, & l = 0 \\ 0\,, & l \neq 0 \end{cases}$ тј. $\forall t, \forall l$ јесте функција од l и не зависи од t

где је матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ позитивно дефинитна.

(*) Дефиниција имплицира да су и компоненте $a_{it}, i = 1, 2, \dots, k$ вишедимензионог белог шума у ствари једнодимензиони процеси белог шума

Важну улогу у теорији једнодимензионих, као и вишедимензионих временских серија има Волдова теорема.

Волдова теорема (вишедимензиони случај): Свака слабо стационарна k -димензиону векторска серија $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots . r_{kt}\,)'$ има репрезентацију облика:

$$\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{1}}\boldsymbol{a}_{t-1} + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{2}}\boldsymbol{a}_{t-2} + \cdots = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{i}}\, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{t-i}}$$

где је $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, $\boldsymbol{a_t}$ је k- димензиони векторски процес белог шума, а $\boldsymbol{\psi_i}$ су матрице коефицијената $k \times k$**.**

3. СЛАБА СТАЦИОНАРНОСТ, КРОС-КОРЕЛАЦИОНЕ МАТРИЦЕ И КРОС-КОВАРИЈАЦИОНЕ МАТРИЦЕ

Једна од особина временских серија која се посматра приликом одабира модела је слаба стационарност. Да би се у анализи података користили VAR, VMA и VARMA модели, серија мора да задовољава услов слабе стационарности. У раду ће се даље под стационарношћу подразумевати слаба стационарност.[1]

3.1. Слаба стационарност

Размотримо k-димензиону серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots . r_{kt})'$.

Дефиниција: Вектор очекивања за серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots . r_{kt})'$ је k-димензиони вектор

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t)$$

који се састоји од очекивања компонената вектора $\boldsymbol{r}_t$, тј. може се представити као $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots . \mu_k)'$ где је $\mu_i = E(r_{it})$.

Дефиниција: Матрица коваријације за серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots . r_{kt})'$ се дефинише као $k \times k$ матрица

$$\boldsymbol{\Gamma}_0 = E[(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu})']$$

при чему елементи на дијагонали представљају $Var(r_{it})$, док је (i, j) елемент $Cov(r_{it}, r_{jt})$. Пишемо $\boldsymbol{\Gamma}_0 = [\Gamma_{ij}(0)]$.

Дефиниција: Серија $\boldsymbol{r}_t$ је слабо стационарна ако су први и други моменат инваријантни у односу на време, тј. вектор очекивања и матрица коваријације су константни током времена.

Нека је $\boldsymbol{D}$ дијагонална матрица $k \times k$ која се састоји од стандардних девијација $\sigma(r_{it})$ за $i = 1, \dots, k$. Другачије написано $\boldsymbol{D} = diag\{\sqrt{\Gamma_{11}(0)}, \dots, \sqrt{\Gamma_{kk}(0)}\}$.

Дефиниција: Крос-корелациона матрица за серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots . r_{kt})'$ се дефинише као $k \times k$ матрица

$$\boldsymbol{\rho}_0 \equiv [\rho_{ij}(0)] = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0\boldsymbol{D}^{-1}$$

где (i, j) елемент представља

$$\rho_{ij}(0) = \frac{\Gamma_{ij}(0)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(r_{it}, r_{jt})}{\sigma(r_{it})\sigma(r_{jt})}$$

тј. коефицијент корелације између елемената r_{it} и r_{jt} .

Из дефиниције и особина коваријације закључујемо да важи $\rho_{ij}(0) = \rho_{ji}(0)$ и $-1 \leq \rho_{ij}(0) \leq 1$ и да је $\rho_{ii}(0) = 1$ за $1 \leq i, j \leq k$. Тако је $\boldsymbol{\rho_0}$ симетрична матрица са јединицама на дијагонали.

Крос-коваријационе матрице се користе као мера јачине линеарне зависности између серија.

Дефиниција: *Крос-коваријациона матрица са кашњењем l* за серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \ldots . r_{kt})'$ се дефинише као $k \times k$ матрица

$$\boldsymbol{\Gamma}_l \equiv \left[\Gamma_{ij}(l)\right] = E[(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r_{t-l}} - \boldsymbol{\mu})']$$

где је $\boldsymbol{\mu}$ вектор очекивања серије $\boldsymbol{r}_t$. Даље , елемент (i, j) матрице $\boldsymbol{\Gamma}_l$ је коваријација између елемената r_{it} и $r_{j,t-l}$ у ознаци $Cov(r_{it}, r_{j,t-l})$.

За слабо стационарне серије , крос-коваријациона матрица $\boldsymbol{\Gamma}_l$ је функција од l, не од t.

Дефиниција: *Крос-корелациона матрица са кашњењем l* за серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \ldots . r_{kt})'$ се дефинише као $k \times k$ матрица

$$\boldsymbol{\rho}_l \equiv \left[\boldsymbol{\rho}_{ij}(l)\right] = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_l\boldsymbol{D}^{-1}$$

где је (i, j) елемент представља

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\Gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\Gamma_{ii}(0)\Gamma_{jj}(0)}} = \frac{Cov(r_{it}, r_{j,t-l})}{\sigma(r_{it})\, \sigma(r_{jt})}$$

што је коефицијент корелације између r_{it} и $r_{j,t-l}$, а већ поменуто $\boldsymbol{D}$, дијагонална матрица $k \times k$ која се састоји од стандардних девијација $\sigma(r_{it})$ за $i = 1, \ldots, k$.

Ако је $l > 0$, овај корелациони коефицијент мери линеарну зависност између r_{it} и $r_{j,t-l}$, која се десила до тренутка t. Ако важи да је $\rho_{ij}(l) \neq 0$ и $l > 0$, кажемо да серија r_{jt} прати серију r_{it} за l. Слично, $\rho_{ji}(l)$ мери линеарну зависност између r_{jt} и $r_{i,t-l}$ и кажемо да серија r_{jt} прати серију $r_{i,t-l}$ за l ако је $\rho_{ji} \neq 0$ и $l > 0$. Такође једначина показује да елемент на дијагонали $\rho_{ii}(l)$ аутокорелациони коефицијент са кашњењем l за r_{it} .

Из претходних дефиниција и напомена закључујемо неколико битних особина крос-корелације када је $l > 0$. Уопштено $\rho_{ij}(l) \neq \rho_{ji}(l)$ за $i \neq j$ зато што корелација мери различите линеарне везе између $\{r_{it}\}$ и $\{r_{jt}\}$. Даље, за $\boldsymbol{\Gamma}_l$ и $\boldsymbol{\rho}_l$ уопштено не важи да су симетричне. Користећи својство $Cov(x, y)$= $Cov(y, x)$ и претпоставку о слабој стационарности (матрица коваријације инваријантна у односу на време), изводимо:

$$Cov(r_{it}, r_{j,t-l}) = Cov(r_{j,t-l}, r_{it}) = Cov(r_{jt}, r_{i,t+l}) = Cov(r_{jt}, r_{i,t-(-l)})$$

тако да важи и $\Gamma_{ij}(l) = \Gamma_{ji}(-l)$. Како је $\Gamma_{ji}(-l)$ елемент на месту (j, i) матрице $\boldsymbol{\Gamma}_{-l}$ и како претходна једнакост важи за $1 \leq i, j \leq k$, закључујемо да је $\boldsymbol{\Gamma}_l = \boldsymbol{\Gamma}_{-l}'$ и затим $\boldsymbol{\rho}_l = \boldsymbol{\rho}_{-l}'$. Такође, последично, важи да $\boldsymbol{\rho}_l \neq \boldsymbol{\rho}_{-l}$ за векторску временску серију када је $l > 0$. Како је $\boldsymbol{\rho}_l = \boldsymbol{\rho}_{-l}'$, у пракси довољно је размотрити крос-корелациону матрицу $\boldsymbol{\rho}_l$ за $l \geq 0$.

3.2. Особине крос-корелационе матрице

Ако се осврнемо на претходне дефиниције, крос-корелационе матрице $\{\boldsymbol{\rho}_l | l = 0, 1, \dots\}$ слабо стационарне векторске временске серије пружају следеће информације:

1. Елементи на дијагонали $\{\rho_{ii} | l = 0, 1, \dots\}$ су аутокорелационе функције за r_{it}

2. Елемент који није на дијагонали $\rho_{ij}(0)$ мери линеарну везу између r_{it} и r_{jt}

3. За $l > 0$, елемент ван дијагонале $\rho_{ij}(l)$ мери линеарну зависност између $r_{j,t-l}$ и r_{it}

4. Даље, ако важи да је $\rho_{ij}(l) = 0$ за свако $l > 0$, онда серија r_{it} не зависи линеарно ни од једне вредности $r_{j,t-l}$ серије r_{jt}.

5. Не постоји линеарна зависност између r_{it} и r_{jt} ако је $\rho_{ij}(l) = \rho_{ji}(l) = 0$, за свако $l \geq 0$

6. r_{it} и r_{jt} су упоредно корелисане ако је $\rho_{ij}(l) \neq 0$

7. r_{it} и r_{jt} немају водећу лаг везу ако је $\rho_{ij}(l) = 0$ и $\rho_{ji}(l) = 0$ за свако $l > 0$

8. Постоји једносмерна веза од r_{it} до r_{jt} ако је $\rho_{ij}(l) = 0$ за свако $l > 0$, али $\rho_{ji}(v) \neq 0$ за неко $v > 0$. У овом случају, r_{it} не зависи ни од једне вредности r_{jt} из прошлости, али r_{jt} зависи од неких вредности r_{it} из прошлости.

9. Постоји двосмерна веза између r_{it} и r_{jt} ако
$\rho_{ij}(l) \neq 0$ за неко $l > 0$ и $\rho_{ij}(v) \neq 0$ за неко $v > 0$

3.3. Оцена корелације

За дате податке $\{\boldsymbol{r}_t \mid t = 1, 2, \ldots T\}$ *коваријациона матрица* се може оценити следећом статистиком

$$\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l = \frac{1}{T}\sum_{t=l+1}^{T}(\boldsymbol{r}_t - \bar{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{r}_{t-l} - \bar{\boldsymbol{r}}), \, l \geq 0$$

где је $\bar{\boldsymbol{r}} = \frac{(\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{r}_t)}{T}$ вектор узорачких средина.

Крос-корелациона матрица је оцењена као

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_l = \widehat{\boldsymbol{D}}^{-1}\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l\widehat{\boldsymbol{D}}^{-1} \quad , l \geq 0$$

где је $\widehat{\boldsymbol{D}}$ $k \times k$ дијагонална матрица узорачких стандардних девијација компонената серије.

Пасус о слабој стационарности и крос-корелационим матрицама се може наћи и у литератури [1].

4. PORTMANTEAU ТЕСТ

У теорији једнодимензионих временских серија се за тестирање нулте хипотезе о аутокорелационим коефицијентима

$$H_o: \rho_1 = \cdots \rho_m = 0$$

користи Љунг-Боксова статистика. Генерализација у вишедимензионом случају се односи на тестирање нулте хипотезе $H_o: \boldsymbol{\rho}_1 = \cdots \boldsymbol{\rho}_m = 0$ и алтернативне хипотезе $H_a: \boldsymbol{\rho}_i \neq 0$ за неко $i \in \{1, \dots m\}$. Тако се статистика користи за тестирање да не постоје крос-корелације и аутокорелације у векторској серији $\boldsymbol{r}_t$.

Тест статистика је

$$Q_k(m) = T^2 \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{T-l} tr(\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l{}' \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_0{}^{-1} \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_l \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{\mathbf{0}}{}^{-1})$$

где је T величина узорка, k димензија серије $\boldsymbol{r}_t$, а траг матрице у ознаци $tr(M)$ представља суму елемената на дијагонали . Под нултом хипотезом и још неким регуларним условима, $Q_k(m)$ асимптотски има хи-квадрат расподелу са $k^2 m$ степени слободе. [1]

5. *VAR(p)* МОДЕЛИ

Уопштење AR(p) модела у вишедимензионом случају нас води до дефинисања векторског AR(p) модела који ћемо у даљем тексту означавати са VAR(p). У том случају посматрамо регресиону везу променљиве у тренутку *t* са преосталим променљивим и са самом собом у тренуцима који претходе *t*.

Дефиниција: Слабо стационарна вишедимензиона временска серија $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots . r_{kt})'$ *прати ауторегресиони модел реда p* ако задовољава следећу једначину

$$\boldsymbol{r_t} = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{r_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{r_{t-p}} + \boldsymbol{a_t}\ , p > 0$$

где је $\boldsymbol{\phi}_0$ k-димензиони вектор, $\boldsymbol{\Phi_j}$ су $k \times k$ матрице и $\boldsymbol{a_t} = (a_{1t}, \dots . a_{kt})'$ векторски процес белог шума при чему се захтева да је матрица коваријације белог шума $\boldsymbol{\Sigma}$ позитивно дефинитна, у супротном димензија $\boldsymbol{r}_t$ може бити редукована.

Користећи оператор доцње B, VAR(p) модел се може записати као

$$\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi_1} B - \cdots - \boldsymbol{\Phi_p} B^p\right) \boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t$$

где је $\mathbf{I}$ $k \times k$ јединична матрица. Ова репрезентација се може записати у краћем запису

$$\boldsymbol{\Phi}(B) \boldsymbol{r_t} = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t$$

где је $\boldsymbol{\Phi}(B) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi_1} B - \cdots - \boldsymbol{\Phi_p} B^p$ претходно записан матрични полином.

Ако се модел распише рекурзивно, тада ће са десне стране једнакости фигурисати шумови $\boldsymbol{a_{t-k}}, k > 0$. Даље, множећи једначине модела $\boldsymbol{r_t}$ и $\boldsymbol{r_{t-l}}, l > 0$ са $\boldsymbol{a}_t{}'$, изводе се следеће вредности коваријације редом:

$Cov(\boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$

$Cov(\boldsymbol{r_{t-l}}, \boldsymbol{a}_t) = 0, l > 0.$

Очекивање VAR(p) модела

Ако је серија $\boldsymbol{r}_t$ слабо стационарна, онда је очекивање инваријантно у односу на време. Нека је $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t)$.

Када применимо очекивање кроз једначину овог модела

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-p}} + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{t}}\,, p > 0$$

добијамо следећу једнакост

$$E(\boldsymbol{r}_t) = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 E(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-1}}) + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p E(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-p}}) + 0$$

тј.
$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1\, \boldsymbol{\mu} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p\, \boldsymbol{\mu}$$

што нас даље води да је

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t}}) = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p\right)^{-1} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{0}} = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1} \boldsymbol{\phi}_{\boldsymbol{0}}$$

уз то да инверз постоји, где је $\mathbf{I}$ $k \times k$ јединична матрица.

Крос-корелационе и крос-коваријационе матрице VAR(p) модела

Особине крос-корелационих и крос-коваријационих матрица су битни показатељи приликом одабира модела. У следећем пасусу ће бити приказано извођење рекурзивне везе између ових матрица. Како је претходно показано, очекивање се може записати као $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t) = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1} \boldsymbol{\phi}_0$. Ако је познато очекивање, модел се може представити као

$$\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-1}} - \boldsymbol{\mu}) + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-p}} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{t}}\,.$$

Множећи једначину са $(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-h}} - \boldsymbol{\mu})'$ добија се једнакост

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-h}} - \boldsymbol{\mu})'$$
$$= \boldsymbol{\Phi}_1 E(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-1}} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p E(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-p}} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' + E\boldsymbol{a}_{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{t-h}} - \boldsymbol{\mu})'$$

односно добија се рекурзивна веза између крос-коваријационих матрица

$$\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{h-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{h-}\boldsymbol{p}}, \quad h > 0$$

Ако се претходне једначине помноже са $\boldsymbol{D}^{-1}$ лево и десно, лако се изводи рекурзивна веза између крос-корелационих матрица, јер су корелационе матрице претходно дефинисане као $\boldsymbol{\rho}_h \equiv \left[\rho_{ij}(h)\right] = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_h\boldsymbol{D}^{-1}$ где је $\boldsymbol{D}$ дијагонална матрица $k \times k$.

$\boldsymbol{\rho}_h = \gamma_1\boldsymbol{\rho}_{h-1} + \cdots + \gamma_p\boldsymbol{\rho}_{h-p},\ h > 0$ где су $\gamma_i = \boldsymbol{D}^{-1/2}\boldsymbol{\Phi}_i\boldsymbol{D}^{1/2}$.

<u>Репрезентација VAR модела као VMA модел</u>

Тврђење: VAR(p) модел се може представити као VMA(∞) модел $\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{a}_{t-i}$.

Доказ: Посматрајмо следећи запис модела:

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t.$$

Како бисмо могли да извучемо серију $\boldsymbol{r}_t$ из једначине, дефинисаћемо инверз полинома оператора доцње $\boldsymbol{\Phi}(B)$ као $\boldsymbol{\psi}(B) = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i B^i$, тј. тако да важи да је $\boldsymbol{\psi}(B)\ \boldsymbol{\Phi}(B) = \mathbf{I}$.

Тада множећи једначину са $\boldsymbol{\psi}(B)$ добијамо

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\psi}(B)\ \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\psi}(B)\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\psi}(B)\ \boldsymbol{\phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{a}_{t-i}.$$

Како оператор доцње не утиче на константу и како је претходно наведена форма очекивања $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t) = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1}\boldsymbol{\phi}_0$, једнакост постаје

$$\boldsymbol{r}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\boldsymbol{\phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{a}_{t-i} = \boldsymbol{\psi}(1)\ \boldsymbol{\phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{a}_{t-i} = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{a}_{t-i}$$
$$= \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{a}_{t-i}$$

$\boldsymbol{\psi}_i$ коефицијенти се израчунавају из следеће релације када посматрамо коефицијенте уз сваки степен оператора B :

$$[\boldsymbol{\Phi}(B)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi}_j B^j$$

$$\left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p\right)(\boldsymbol{\psi}_0 + \boldsymbol{\psi}_1 B + \boldsymbol{\psi}_2 B^2 + \cdots) = \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\psi}_0 + (\boldsymbol{\psi}_1 - \boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{\Phi}_1)B + (\boldsymbol{\psi}_2 - \boldsymbol{\psi}_0\boldsymbol{\Phi}_2 - \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\psi}_1)B^2 + \cdots = \mathbf{I}$$

$B\colon \boldsymbol{\psi}_0 = \mathbf{I}$

B^2: $\boldsymbol{\psi_1} = \boldsymbol{\Phi}_1$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\psi_2} = \boldsymbol{\Phi_2} + \boldsymbol{\Phi_1}\boldsymbol{\psi_1}$

B^3: $\boldsymbol{\psi_3} - \boldsymbol{\Phi}_3 - \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{\psi_2} - \boldsymbol{\Phi}_2\boldsymbol{\psi_1} = 0$ $\qquad\qquad$ $\boldsymbol{\psi_3} = \boldsymbol{\Phi_3} + \boldsymbol{\Phi_1}\boldsymbol{\psi_2} + \boldsymbol{\Phi_2}\boldsymbol{\psi_1}$

Даље изводећи рекурзивно долазимо до израза за $\boldsymbol{\psi_i} = \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{\psi_{i-j}}\boldsymbol{\Phi_j}$.

6. *VMA(q)* МОДЕЛИ

VMA(q) модели реда q односно векторски модели покретног просеса су коначни вишедимензиони модели временских серија који у обзир узимају везу између серије $\boldsymbol{r}_t$ и њених шокова у различитим временским интервалима.

Дефиниција: VMA(q) модели су модели облика

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\theta_0} + \boldsymbol{\Theta_1}\boldsymbol{a}_{t-1} + \cdots + \boldsymbol{\Theta_q}\boldsymbol{a}_{t-q} + \boldsymbol{a}_t$$

односно краће записано $\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\theta_0} + \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a}_t$

где је $\boldsymbol{\theta_0}$ k-димензиони вектор, $\boldsymbol{\Theta_i}$ су $k \times k$ матрице и $\boldsymbol{\Theta}(B) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 B + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q B^q$ је матрични полином оператора доцње. Слично као и у једнодимензионом случају, ови модели су увек слабо стационарни под претпоставком да постоји коваријациона матрица белог шума у ознаци $\boldsymbol{\Sigma}$. Узимајући очекивање задате форме модела добијамо да је очекивање $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}t) = \boldsymbol{\theta_0}$.

<u>Крос-коваријациона матрица VMA модела</u>

Крос-коваријациона матрица векторских модела покретног просеса, као и у једнодимензионом случају, садржи нуле које нам помажу приликом анализе графика података у пракси. Како бисмо извели облик ове матрице, кренимо од једначине модела $\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\theta_0} + \boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{a_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q\boldsymbol{a_{t-q}} + \boldsymbol{a}_t$ и применимо очекивање:

$$E(\boldsymbol{r_t} - \boldsymbol{\theta_0})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\theta_0})' =$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_h = E(\boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{a_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q\boldsymbol{a_{t-q}} + \boldsymbol{a}_t)\left(\boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{a_{t-h-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q\boldsymbol{a_{t-h-q}} + \boldsymbol{a_{t-h}}\right)'$$

Користећи особине белог шума да је $E(\boldsymbol{a_t}\boldsymbol{a_{t-h}})' = 0, h > 0$ и $E(\boldsymbol{a}_t\boldsymbol{a}_t)' = \boldsymbol{\Sigma}$ једнакост постаје

$$\boldsymbol{\Gamma_h} = \boldsymbol{\Theta_h}E(\boldsymbol{a}_{t-h}\boldsymbol{a}_{t-h}') + \boldsymbol{\Theta}_{h+1}E(\boldsymbol{a_{t-h-1}}\boldsymbol{a_{t-h-1}}')\,\boldsymbol{\Theta_1}' + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q E(\boldsymbol{a}_{t-q}\boldsymbol{a}_{t-q}')\,\boldsymbol{\Theta_{q-1}}'$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_h = \begin{cases} \sum_{i=0}^{q-h} \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i+h}} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{i}}' & h = 0,1, \dots q \\ 0 & h > q \end{cases}$$

Како је очекивање овог модела $\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{rt}) = \boldsymbol{\theta_0}$ инваријантно у односу на време и матрица коваријације зависи од корака h, а не од времена, закључујемо да су ови модели увек стационарни.

Дефиниција: За модел VMA кажемо да је инвертибилан уколико се може представити као VAR модел тј. ако задовољава услов $det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta_1} z + \dots + \boldsymbol{\Theta_q} z^q) \neq 0$ *за* $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$.

<u>Репрезентација VMA модела као VAR модел</u>

***Тврђење*:** Инвертибилан VMA(q) модел се може записати као VAR(∞) модел.

Доказ: Кренимо од записа модела: $\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a}_t$ и означимо са $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{B}) = [\boldsymbol{\Theta}(B)]^{-1} = \mathbf{I} - \sum_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_j B^j$ инверз полинома $\boldsymbol{\Theta}(B)$, тј. $\boldsymbol{\Pi}(B)\, \boldsymbol{\Theta}(B) = \mathbf{I}$. При чему морамо да испратимо услов да инверз постоји тј. ако важи да је $det(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 z + \dots + \boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{q}} z^q) \neq 0$ за $z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1$.

Онда једначину модела можемо да запишемо као $\boldsymbol{\Pi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{a}_t$. Када распишемо полиноме, везу између коефицијената добијамо посматрајући коефицијенте који стоје уз B:

$$(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Pi}_1 B - \boldsymbol{\Pi}_2 B^2 - \cdots)(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 B + \cdots + \boldsymbol{\Theta_q} B^q) = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I} + (\boldsymbol{\Theta_1} - \boldsymbol{\Pi_1})B + (\boldsymbol{\Theta_2} - \boldsymbol{\Pi_2} - \boldsymbol{\Theta_1}\boldsymbol{\Pi_1})B^2 + \cdots = \mathbf{I}$$

B: $\boldsymbol{\Theta_1} - \boldsymbol{\Pi_1} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\Pi}_1 = \boldsymbol{\Theta_1}$

B^2: $\boldsymbol{\Theta_2} - \boldsymbol{\Pi_2} - \boldsymbol{\Theta_1}\boldsymbol{\Pi_1} = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\Pi_2} = \boldsymbol{\Theta_2} - \boldsymbol{\Theta_1}\boldsymbol{\Pi}_1$

B^3: $\boldsymbol{\Theta}_3 - \boldsymbol{\Pi}_3 - \boldsymbol{\Theta}_1\boldsymbol{\Pi}_2 - \boldsymbol{\Theta}_2\boldsymbol{\Pi}_1 = \mathbf{0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\Pi_3} = \boldsymbol{\Theta_2} - \boldsymbol{\Theta_1}\boldsymbol{\Pi}_2 - \boldsymbol{\Theta}_2\boldsymbol{\Pi}_1$

Изводећи рекурзивно долазимо до израза за

$\boldsymbol{\Pi_j} = \boldsymbol{\Theta_j} - \boldsymbol{\Theta_1}\boldsymbol{\Pi_{j-1}} - \cdots - \boldsymbol{\Theta_{j-1}}\boldsymbol{\Pi_1}$ где је $\boldsymbol{\Pi_j} = \mathbf{0},\ j > q$.

7. *VARMA* МОДЕЛИ

Једнодимензиони ауторегресиони модели покретног просека (ARMA) модели се могу генерализовати за векторске временске серије и такви генерализовани модели се називају векторски ARMA модели у најчешћој означи VARMA. У запису ових модела разликујемо VAR и VMA део што значи да посматрамо регресиону везу вектора и шокове серије истовремено.

Дефиниција: VARMA модели су облика

$$\boldsymbol{r_t} - \boldsymbol{\Phi_1 r_{t-1}} - \cdots - \boldsymbol{\Phi_p r_{t-p}} = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{a_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q \boldsymbol{a_{t-q}} + \boldsymbol{a}_t$$

где је $\boldsymbol{\phi_0}$ k-димензиони вектор, $\boldsymbol{\Phi_j}$ су $k \times k$ матрице, $\boldsymbol{\Theta_i}$ су $k \times k$ матрице и $\boldsymbol{a_t} = (a_{1t}, \dots . a_{kt})'$ векторски процес белог шума.

Како је очекивање белог шума 0, очекивање можемо да посматрамо у следећој форми, која је већ представљена у делу о VAR моделима:

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t) = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p\right)^{-1} \boldsymbol{\phi}_0 = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1} \boldsymbol{\phi}_0.$$

VARMA(p,q) модел може да се запише скраћено преко оператора доцње као

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a_t} \text{ где су}$$

$\boldsymbol{\Phi}(B) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi_1} B - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p$ и $\boldsymbol{\Theta}(B) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta_1} B + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q B^q$ два $k \times k$ матрична полинома. Претпоставља се да ова два матрична полинома немају заједничких чинилаца, у супротном би модел могао да се поједностави.

За $v > 0$, елемент (i, j) матрица $\boldsymbol{\Phi}_v$ и $\boldsymbol{\Theta}_v$ мери редом линеарну зависност r_{it} и $r_{j,t-v}$, а елемент (i, j) матрице $\boldsymbol{\Theta}_v$ линеарну зависност између r_{it} и $a_{j,t-v}$. Ако је елемент (i, j) нула за све матричне коефицијенте AR и MA, онда r_{it} не зависи ни од једне вредности $r_{j,t-l}$, где је $l > 0$. У супротном не важи,тј. коефицијенти различити од 0 на местима (i, j) матричних коефицијената за AR и MA могу да постоје иако r_{it} не зависи ни од једне вредности $r_{j,t-l}$.

Размотримо ову пропозицију у примеру дводимензионог VARMA(1,1) модела.

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}(\mathrm{B}) & \Phi_{12}(\mathrm{B})\\ \Phi_{21}(\mathrm{B}) & \Phi_{22}(\mathrm{B})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{1t}\\ r_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Theta_{11}(\mathrm{B}) & \Theta_{12}(\mathrm{B})\\ \Theta_{21}(\mathrm{B}) & \Theta_{22}(\mathrm{B})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1t}\\ a_{2t}\end{bmatrix},$$

Неопходан и довољан услов за постојање везе од r_{1t} до r_{2t} су

$$\Phi_{22}(\mathrm{B})\Theta_{12}(\mathrm{B}) - \Phi_{12}(\mathrm{B})\Theta_{22}(\mathrm{B}) = 0$$

$$\Phi_{11}(\mathrm{B})\Theta_{21}(\mathrm{B}) - \Phi_{21}(\mathrm{B})\Theta_{11}(\mathrm{B}) \neq 0.$$

Означимо детерминанту матрице $\Omega(B) = |\boldsymbol{\Phi}(B)| = \Phi_{11}(B)\Phi_{22}(B) - \Phi_{12}(B)\Phi_{21}(B)$. Ако променимо коефицијенте матрице у

$$\begin{bmatrix}\Phi_{22}(B) & -\Phi_{12}(B)\\ -\Phi_{21}(B) & \Phi_{11}(B)\end{bmatrix}$$

модел можемо да запишемо као

$$\Omega(B)\begin{bmatrix}r_{1t}\\ r_{2t}\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{22}(B)\Theta_{11}(B) - \Phi_{12}(B)\Theta_{21}(B) & \Phi_{22}(B)\Theta_{12}(B) - \Phi_{12}(B)\Theta_{22}(B)\\ \Phi_{11}(B)\Theta_{21}(B) - 1(B)\Theta_{11}(B) & \Phi_{11}(B)\Theta_{22}(B) - \Phi_{21}(B)\Theta_{12}(B)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1t}\\ a_{2t}\end{bmatrix}$$

Први услов имплицира да r_{1t} не зависи ни од прошлости r_{2t} и a_{2t}. Из једначине за r_{2t}, други услов имплицира да r_{2t} зависи од прошлости a_{1t}. Услов $\Theta_{12}(B) = \Phi_{12}(B) = 0$, је довољан, али није неопходан за индиректну везу од r_{1t} до r_{2t}.

<u>Идентификација модела</u>

Иако је уопштење до VARMA модела погодно за решавање ширег спектра задатака у пракси, ови модели доносе нове проблеме који се не срећу приликом употребе VAR или VMA модела. Један од проблема је јединственост модела који ће бити приказан у следећим примерима који су описани у литеаратури [1]. За разлику од ARMA модела, VARMA модели отварају питање идентификације модела. Дати су VMA(1) модел:

$$\begin{bmatrix}r_{1t}\\ r_{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1t}\\ a_{2t}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1,t-1}\\ a_{2,t-1}\end{bmatrix}$$

и VAR(1) модел

$$\begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}.$$

Посматрајући расписане компоненте VMA(1) модела:

$$r_{1t} = a_{1t} - 2a_{2,t-1}, r_{2t} = a_{2t}$$

и расписане компоненте VAR(1) модела:

$$r_{1t} + 2r_{2,t-1} = a_{1t}, r_{2t} = a_{2t}$$

може се уочити еквиваленција ова два модела. Заиста, како је $r_{2t} = a_{2t}$, онда је и $r_{2,t-1} = a_{2t-1}$, па посматрајући обе једначине може се закључити да су модели идентични. У овом случају идентичност модела је безопасна у пракси и може се користити било који модел.

Размотримо два VARMA(1,1) модела.

Нека је први VARMA(1,1) модел написан као:

$$\begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 & -2+\eta \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & \eta \\ 0 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

и други VARMA(1,1) модел:

$$\begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,t-1} \\ a_{2,t-1} \end{bmatrix}$$

где су η и ω који су различити од 0.

Када средимо матричну једнакост добијамо да је $r_{2t} = a_{2t}$, а да константе η и ω не утичу на систем.

8. РЕПРЕЗЕНТАЦИЈА VARMA МОДЕЛА КАО VAR МОДЕЛ И VMA МОДЕЛ

Репрезентација VARMA модела као VMA модел

Нека је дат стационаран и инвертибилан k димензиони VARMA(p,q) процес у следећем запису:

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a_t}$$

где је

$\boldsymbol{\Phi}(B) = \mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi_1}B - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}B^p$ и $\boldsymbol{\Theta}(B) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 B + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_{\mathrm{q}}B^{\mathrm{q}}$

Када се једначина помножи са леве стране полиномом $[\Phi(\mathrm{B})]^{-1}$ добија се

$$\boldsymbol{r_t} = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\phi}_0 + [\boldsymbol{\Phi}(B)]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty}\boldsymbol{\Pi_i}\,\boldsymbol{a_{t-i}}$$

Ако се једнакост опет помножи с лева полиномом $\boldsymbol{\Phi}(B)$, знајући да полином не утиче на μ, добија се следећи резултат

$\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}(B)\ \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty}\boldsymbol{\Pi_i}\,\boldsymbol{a_{t-i}}$, даље

$$\boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a_t} = \boldsymbol{\Phi}(B)\ \sum_{\boldsymbol{i=0}}^{\infty}\boldsymbol{\Pi_i}\,\boldsymbol{a_{t-i}}$$

$$\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 B + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q B^q = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}_i B^i\right)$$

што се може записати као

$$\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 B + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q B^q = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^{\infty}(\boldsymbol{\Phi}_i - \sum_{j=1}^{i}\boldsymbol{\Phi}_j\boldsymbol{\Pi}_{i-j})\,B^i$$

где је $\boldsymbol{\Pi}_0 := \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\Phi}_j := 0,\ j > p$ и $\boldsymbol{\Theta}_i := 0,\ i > q$

Као и у претходним извођењима у раду, изједначавањем коефицијената који стоје уз сваки степен оператора B, могу се изразити коефицијенти $\boldsymbol{\Pi_i}$.

Добија се веза $\boldsymbol{\Theta}_i = \boldsymbol{\Pi}_i - \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{\Pi}_{i-j}$, $i = 1, 2, \ldots$, односно $\boldsymbol{\Pi}_i = \boldsymbol{\Theta}_i + \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{\Phi}_j \boldsymbol{\Pi}_{i-j}$.

<u>Репрезентација VARMA модела као VAR модел</u>

Нека је дат стационаран и инвертибилан k димензиони VARMA(p,q) процес у следећем запису:

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Theta}(B)\boldsymbol{a_t}$$

Помножимо једнакост са леве стране полиномом $[\boldsymbol{\Theta}(B)]^{-1}$

$[\boldsymbol{\Theta}(B)]^{-1}\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = [\boldsymbol{\Theta}(1)]^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a_t}$.

Даље, множећи једнакост с леве стране полиномом $[\boldsymbol{\Theta}(B)]$ следи једнакост

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\Theta}_1 B + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_q B^q)(\mathbf{I} - \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i B^i) = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p\right)$$

која ако дефинишемо следеће $\boldsymbol{\Theta_0} := \mathbf{I}$, $\boldsymbol{\Theta_i} := \mathbf{0}$, $\mathrm{i} > p$ и $\boldsymbol{\Theta_i} := 0$, $\mathrm{i} > q$ $\boldsymbol{\Phi}_i := 0$,

$\mathrm{i} > p$

добијамо следећи израз

$$\mathbf{I} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\infty}(\boldsymbol{\Theta_i} - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{i}} \boldsymbol{\Theta_{i-j}}\boldsymbol{\Pi_j})\, B^i = \left(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}} B^{\mathrm{p}}\right)$$

Изједначавањем коефицијената који стоје уз сваки степен оператора B, могу се изразити коефицијенти $\boldsymbol{\Phi_i}$ преко $\boldsymbol{\Pi_i}$ и $\boldsymbol{\Theta_i}$

$$-\boldsymbol{\Phi_i} = \boldsymbol{\Theta_i} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i}} \boldsymbol{\Theta_{i-j}}\boldsymbol{\Pi_j} - \boldsymbol{\Pi_i} \quad , \qquad i = 1, 2, \ldots$$

што се даље преформулише као

$\boldsymbol{\Pi_i} = \boldsymbol{\Phi_i} + \boldsymbol{\Theta_i} - \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{i}} \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{i-j}}\boldsymbol{\Pi_j}$.

Крос-коваријациона матрица и крос-корелациона матрица VARMA модела

Посматрајмо следеће VMA репрезентације модела:

$\boldsymbol{r_t} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i\, \boldsymbol{a_{t-i}}$ и $\boldsymbol{r_{t-h}} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i\, \boldsymbol{a_{t-i-h}}$.

Ако помножимо једнакост са $(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})'$ и пустимо очекивање, изводимо облик крос-коваријационе матрице:

$$E(\boldsymbol{r_t} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i\, \boldsymbol{a_{t-i}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i\, \boldsymbol{a_{t-i-h}}\right)' = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i\, \boldsymbol{a_{t-i}}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{a_{t-i-h}}'\, \boldsymbol{\Pi}_i'\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_{i+h} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Pi}_i'$$

Ако се извођење крос-коваријације започне посматрањем другачијег записа модела:

$$\boldsymbol{r_t} - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi_1}(\boldsymbol{r_{t-1}} - \boldsymbol{\mu}) + \cdots + \boldsymbol{\Phi_p}(\boldsymbol{r_{t-p}} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Theta_1} \boldsymbol{a_{t-1}} + \cdots + \boldsymbol{\Theta_q} \boldsymbol{a_{t-q}} + \boldsymbol{a_t}$$

Резултат ће бити рекурзивна веза крос-коваријационих матрица.

Истим поступком множења једначине и применом очекивања изводимо следеће:

$$E(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' = \boldsymbol{\Phi}_1 E(\boldsymbol{r_{t-1}} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_p E(\boldsymbol{r_{t-p}} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$+E(\boldsymbol{\Theta}_1 \boldsymbol{a}_{t-1})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' + \cdots + E(\boldsymbol{\Theta}_q \boldsymbol{a}_{t-q})(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})' + E(\boldsymbol{a}_t)(\boldsymbol{r_{t-h}} - \boldsymbol{\mu})'$$

$$\boldsymbol{\Gamma_h} = \boldsymbol{\Phi_1} \boldsymbol{\Gamma_{h-1}} + \boldsymbol{\Phi_2} \boldsymbol{\Gamma_{h-2}} + \cdots + \boldsymbol{\Phi_p} \boldsymbol{\Gamma_{h-p}}, h > q$$

Ако је $p > q$ и имамо $\boldsymbol{\Gamma_0}, \ldots \boldsymbol{\Gamma_{p-1}}$, из ове релације се може израчунати $\boldsymbol{\Gamma_h}$ за $h = p, p+1, \ldots$

Услов стационарности и инвертибилности VARMA модела

Услов инвертибилности за VARMA модел је исти као и за VMA модел који фигурише у VARMA моделу, а услов стационарности за VARMA модел је исти као и за VAR модел који фигурише у VARMA моделу.

Специјално, посматрајмо $\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu}$ VAR(p) модел .

Приликом извођења неких закључака за вишедимензиони случај, можемо посматрати

VAR(p) модел који је представљен као kp-димензиони VAR(1) модел тј.

$\mathbf{VAR(p)}_k \equiv \mathbf{VAR(1)}_{kp}$.

$\boldsymbol{x}_t = \mathbf{F}\boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{b}_t$ где су

$$\boldsymbol{x}_t = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{r}}_t \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_{t-1} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_{t-p+1} \end{bmatrix} (kp \times 1), \qquad \boldsymbol{x}_{t-1} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{t-1} \\ \tilde{r}_{t-2} \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{r}_{t-p} \end{bmatrix} (kp \times 1),\ F = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{\Phi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} \boldsymbol{\Phi}_p \\ \mathbf{I} \ \ 0 & \cdots & 0 \ \ 0 \\ 0 \ \ \mathbf{I} & \cdots & 0 \ \ 0 \\ \vdots \ \ \vdots & & \vdots \ \ \vdots \\ 0 \ \ 0 & \cdots & \mathbf{I} \ \ 0 \end{bmatrix} (kp \times kp),$$

$\boldsymbol{b}_t = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_t \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} (kp \times 1)$ где су 0 и $\mathbf{I}$ $k \times k$ нула матрица и $k \times k$ јединична матрица редом.

Даље, посматрајући ову еквиваленцију, можемо извести услов стационарности за $\mathrm{VAR(p)}_k$ модел помоћу услова стационарности за VAR(1) модел.

<u>Услов стационарности за $VAR(\mathbf{1})$ модел</u>

Распишимо VAR(1) модел рекурзивно као

$\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{\Phi}\, \tilde{\boldsymbol{r}}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\Phi}\, (\boldsymbol{\Phi}\, \tilde{\boldsymbol{r}}_{t-2} + \boldsymbol{a}_{t-1}) + \boldsymbol{a}_t = \cdots = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{\Phi}\, \boldsymbol{a}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2 \boldsymbol{a}_{t-2} \ldots.$

За услов стационарности посматрамо очекивање $E\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\Phi}^i E\boldsymbol{a}_{t-i}$ и закључујемо да $\boldsymbol{\Phi}^i$ мора да ковергира у нулу када $i \to \infty$. То значи да својствене вредности матрице $\boldsymbol{\Phi}$ по модулу морају да буду мање од 1, тј. за $\boldsymbol{\Phi}^i = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D} = Diag(\lambda_i)$ да $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \ldots k$.

За $\mathrm{VAR(p)}_k$ модел је , аналогно, услов стационарности је да су вредности $|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \ldots kp$ за матрицу $\mathbf{F}$.

9. МАРГИНАЛНИ МОДЕЛИ

Посматрајмо k -димензиону серију $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \dots. r_{kt})'$. Дефинисаним векторским моделом серије $\boldsymbol{r}_t$ уједно су дефинисани и једнодимензиони модели компонената r_{it} које називамо маргиналним моделима. За k –димензиони VARMA(p, q) моде, маргинални модели су ARMA$[kp, (k-1)p+q]$ при чему је $[kp, (k-1)p+q]$ максимални ред модела који може да се појави. Детаљније објашњење овог пасуса може се наћи у литераури [1].

- Прво ћемо извести да је маргинални модел који одговара VMA (q) моделу MA (q) модел. Кренимо од VMA (q) модела за $\boldsymbol{r}_t$. Како смо показали да су крос-корелационе матрице $\boldsymbol{\rho}_l = 0$ за $l > q$, онда ће аутокорелациони коефицијенти за компоненте r_{it} такође 0 за кораке иза q. Из те особине и формулације VMA (q) модела закључујемо да су једнодимензиони модели компонената облика

$$r_{it} = \theta_{i,0} + \sum_{j=1}^{q} \theta_{i,j} b_{i,t-j}$$

где је $\{b_{i,t}\}$ низ некорелисаних случајних величина са очекивањем 0 и дисперзијом ${\sigma_{ib}}^2$. Параметри $\theta_{i,j}$ и σ_{ib} су функције разматраног модела VMA (q) за $\boldsymbol{r}_t$.

- Други корак извођења захтева посматрање VAR(p) модела. Посматраћемо дводимензиони VAR(1) модел

$$\begin{bmatrix} 1-\Phi_{11}B & -\Phi_{12}B \\ -\Phi_{21}B & 1-\Phi_{22}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}.$$

Помножимо једначину инверзом матрице AR дела

$$\begin{bmatrix} 1-\Phi_{22}B & \Phi_{12}B \\ -\Phi_{21}B & 1-\Phi_{11}B \end{bmatrix} / [(1-\Phi_{11}B)(1-\Phi_{22}B) - \Phi_{12}\Phi_{22}B^2].$$

Даље добијамо облик:

$$[(1\text{-}\Phi_{11}B)(1\text{-}\Phi_{22}B)\text{-}\ \Phi_{12}\Phi_{22}B^2] \begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\Phi_{22}B & \Phi_{12}B \\ -\Phi_{21}B & 1-\Phi_{11}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{1t} \\ \boldsymbol{a}_{2t} \end{bmatrix}$$

из кога видимо ауторегресионе компоненте. Леви део једначине имплицира да су једнодимензионе компоненте AR модела за $\boldsymbol{r}_{it}$ реда 2. На десној страни једначине је форма која одговара моделу VMA(1). Користећи резултате које су изведени у првом кораку, може се закључити да једнодимензиона компонента узима облик ARMA(2,1).Уопштење поступка на k –димензиони VAR(1) модел доводи нас до тога да је маргинални модел компонената облика ARMA$[k, k-1]$. Даље, уопштењем за VAR(p) модел, закључујемо да су одговарајући модели облика

ARMA$[kp, (k-1)p]$.

Коначно из првог и другог корака, директно следи да одговарајући маргинални модели за VARMA облика ARMA$[kp, (k-1)p+q]$, при чему ред модела може бити и мањи.

10. ПРОГНОЗИРАЊЕ

Веома је корисно када смо у могућности да прогнозирамо будуће вредности неке промењиве, при чему је та прогноза базирана на информацијама о садашњости и прошлости промењиве. Прогноза уз помоћ временских серија је широко распрострањена у економији, финансијама, географији, климатологији. Ово поље математике има велику вредност у пракси и омогућава нам да доносимо важне одлуке у плановима за будућност.

У случају модела које смо посматрали, циљ је да одредимо такву вредност прогнозе у ознаци $\hat{\boldsymbol{r}}_t = f(\boldsymbol{r}_s, s \in S)$ за коју је $E(\boldsymbol{r_t} - f(\boldsymbol{r_s}, s \in S))^2$ минимално. Најбоља оцена добијена методом најмањих квадрата је

$\hat{\boldsymbol{r}}_t = E(\boldsymbol{r_t} | \mathcal{F}_s)$, тј.

$\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h) = E(\boldsymbol{r_{t+h}} | \boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{r}_{t-1}, \dots)$ где са $\hat{\boldsymbol{r}}_t(h)$ означавамо прогнозу за h корака унапред.

Посматрајмо следећи облик VARMA(p,q) модела

$\boldsymbol{r_t} = c_t + \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{\Phi_i}\, \boldsymbol{r_{t-i}} + \boldsymbol{a}_t + \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{\Theta}_i\, \boldsymbol{a_{t-i}}$, где је $c_t = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \boldsymbol{\Phi}_2 - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_\mathrm{p})\, \boldsymbol{\mu}$.

При томе претпостављамо да је $\boldsymbol{a}_t$ бели шум. Применимо условно очекивање на претходно поменуту репрезентацију модела. Знајући да је бели шум

$\boldsymbol{a_{t+h}}$, $h > 0$ независтан у односу на садашњост и прошлост $\boldsymbol{r_t}, \boldsymbol{r_{t-1}}$, ..., условно очекивање

$E(\boldsymbol{a_{t+h}} | \boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{r_{t-1}}, \dots)$ постаје $E(\boldsymbol{a_{t+h}})$, што из дефиниције белог шума јесте 0.

Даље је $\hat{\boldsymbol{r}}_t(h) = E(\boldsymbol{r_{t+h}} | \boldsymbol{r_t}, \boldsymbol{r_{t-1}}, \dots) = c_t + \boldsymbol{\Phi}_1 \hat{\boldsymbol{r}}_t(h-1) + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_\mathrm{p}\, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h-p) + \boldsymbol{\Theta}_1 E(\boldsymbol{a_{t+h-1}}) + \cdots + \boldsymbol{\Theta}_\mathrm{q} E(\boldsymbol{a_{t+h-q}})$.

Ако је $h \leq 0$, тада једнакост постаје очигледно $\hat{\boldsymbol{r}}_t(h) = \boldsymbol{r_{t+h}}$, а за $h > q$ једнакост постаје

$\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h) = c_t + \boldsymbol{\Phi}_1 \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h-1) + \cdots + \boldsymbol{\Phi}_\mathrm{p}\, \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h-p)$.

Прогноза h корака унапред може да се изведе ако посматрамо бесконачну VAR репрезентацију као $\hat{\boldsymbol{r}}_t(h) = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_i\, \hat{\boldsymbol{r}}_t(h-i)$.

Такође, посмтрајући бесконачну VMA репрезентацију добијамо $\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h)$. У таквом формату, вредност будуће вредности за $t+h$ је $\boldsymbol{r_{t+h}} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\psi_i}\, \boldsymbol{a_{t+h-i}}$. Како је $E(\boldsymbol{a_{t+h}} | \boldsymbol{r_t}, \boldsymbol{r_{t-1}}, \dots) = E(\boldsymbol{a_{t+h}}) = 0$, $h > 0$ оцена добијена методом најмањих квадрата је $\hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h) = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\infty} \boldsymbol{\psi_i}\, \boldsymbol{a_{t+h-i}}$.

Вектор грешке прогнозе је $\boldsymbol{r_{t+h}} - \hat{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{t}}(h)$ са очекивањем нула и коваријационом матрицом

$$\sum_{i=0}^{h-1} \boldsymbol{\psi}_i\, \boldsymbol{\Sigma}_a\, \boldsymbol{\psi}_i'$$

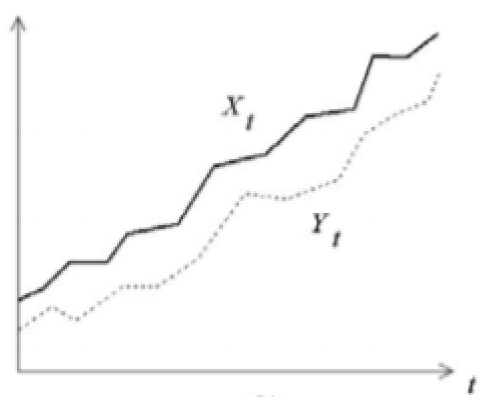
Секвенца белог шума $\boldsymbol{a_{t+h-i}}$ $i = 1, 2, \dots q$ модела треба да буде генерисана рекурзивно коришћењем вредности из прошлости $\boldsymbol{r_t}, \boldsymbol{r_{t-1}}$ из једначине

$\boldsymbol{a_s = r_t - \sum_{i=1}^{p} \psi_i\, \Phi_i r_{s-i} - \sum_{i=1}^{q} \psi_i\, \Phi_i r_{s-i}\, \Theta_i\, a_{s-i}}.$

Изводимо користећи одговарајуће почетне вредности $\boldsymbol{r_0, \dots, r_{1-p}, a_0, \dots, a_{1-q}}$.

11. КОИНТЕГРАЦИЈА

Уколико током анализе наиђемо на нестационарне временске серије које су истог реда интеграције d (серије које треба да диференцирамо d пута како би постале стационарне у ознаци *I(d)*), можемо да их диференцирамо и потом пробамо да их уклопимо у неки VAR(p) модел на пример. Ако наиђемо на серије које нису истог реда интеграције, онда можемо да проверимо да ли су оне коинтегрисане и да даље решавамо проблем у другом смеру. Коинтеграција је појава да је линеарна комбинација нестационарних временских серија једна стационарна времеснка серија. На слици испод, преузетој из литературе [4], приказан је пример две нестационарне коинтегрисане серије.



***Дефиниција (две серије** I(1)):* Нека су X_t и Y_t две временске серије са особином *I(1).*Тада су серије X_t и Y_t коинтегрисане ако постоји вектор $\boldsymbol{\beta}$=(β_1, β_2) $'$са не-нула компонентама такав да важи следеће

$$\beta_1 X_t - \beta_2 Y_t \sim I(0)$$

Дефиниција (општи случај): Нека су X_i , $i = 1, 2, \dots n$ временске серије са особином *I(1).* Тада су серије X_i , $i = 1, 2, \dots n$ коинтегрисане ако је линеарна комбинација $\sum_{i=1}^{n} \beta_i\, X_i$, $\beta_i \neq 0$ за$= 1, 2, \dots n$, временска серија са особином $I(0)$.

***Дефиниција (две серије** I(d), **општи случај)**:* Нека су X_t и Y_t две временске серије са особином *I(d).* Тада су серије X_t и Y_t коинтегрисане реда ако постоји нетривијална линеарна комбинација чији је ред интегрисаности *d-b*.

Ова карактеристика је корисна особина која се користи у анализи нестационарних података. Када се подаци посматрају појединачно, могу да буду веома отпорни на разне методе, међутим, посматрање понашања ове комбинације нам пружа другачији правац у решавању проблема. Ако закључимо да су серије X_t и Y_t коинтегрисане онда примењујемо модел за коинтегрисане временске серије.

Модел за коинтегрисане серије реда *(1,1)*

$$\Delta Y_t = \gamma_0(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1}) + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{1,j}\, \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{2,j}\, \Delta Y_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (*)$$

где је γ_0 коефицијент прилагођавања, а k је одређено корелационом структуром серија.

Модел за коинтегрисане серије реда *(d, b)*

$$\Delta^d Y_t = \gamma_0(\Delta^{d-b} Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 \Delta^{d-b} X_{t-1}) + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{1,j}\, \Delta^d X_{t-j} + \sum_{j=1}^{k} \gamma_{2,j}\, \Delta^d Y_{t-j} + \varepsilon_t$$

Теорема: Серије X_t и Y_t су коинтегрисане и веза између њих дата је са (*) ако је серија резидуала стационарна.

Користећи ову теорему, можемо тестирати претпоставку о стационарности резидуала користећи Dickey-Fuller тест.

.

12. *Пример временске серије из области климатологије*

Како бисмо испитали претходно наведене теоријске појмове вишедимензионих серија, учитаћемо податке у окружење RStudio. Користићемо климатолошке податке из литературе [9]. У литератури [9] се помиње пакет "rdwd" који је користан за испитивања у вези са климом. Уз помоћ пакета омогућен је приступ подацима које прикупљају станице у Немачкој.

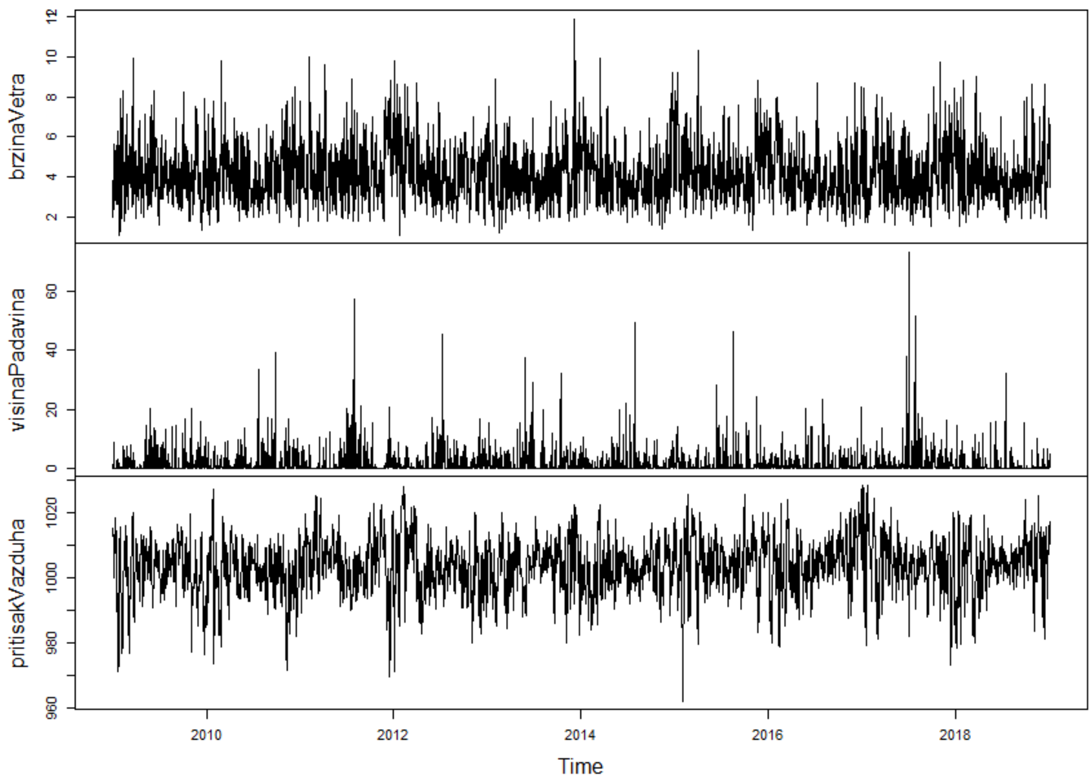
Подаци

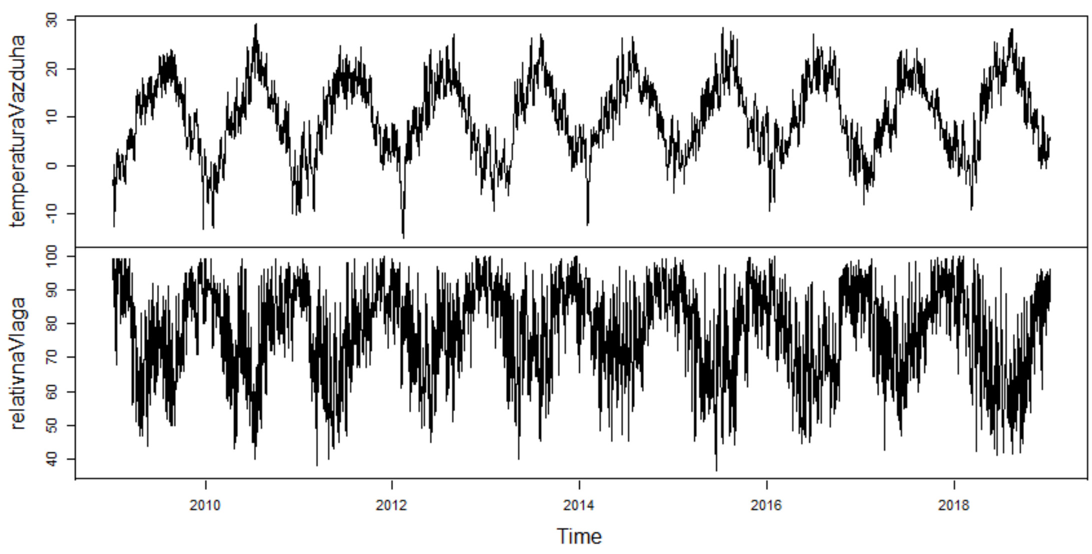
Учитана временска серија је петодимензиона и садржи климатске карактеристике града Потсдам у Немачкој мерене дневно са почетком од 1. јануара 2009. до 31. децембра 2018. године. Како векторски ауторегресиони модели покретног просека комплексни и садрже велики број параметара, у овом примеру фокус ће бити на дводимензионој серији чије су компоненте једнодимензионе серије temperaturaVazduha и brzinaVetra.

Променљиве које су смештене у временску серију су илустроване на слици:

datum	brzinaVetra	visinaPadavina	pritisakVazduha	temperaturaVazduha	relativnaVlaga
2009-01-01	2.5	0.0	1013.1	-3.4	99
2009-01-02	2.0	1.4	1015.1	-3.1	97
2009-01-03	5.6	0.7	1010.5	-5.4	89
2009-01-04	3.8	8.6	1000.2	0.2	99
2009-01-05	2.9	0.0	1007.7	-5.7	91
2009-01-06	2.4	0.0	1013.4	-12.5	85

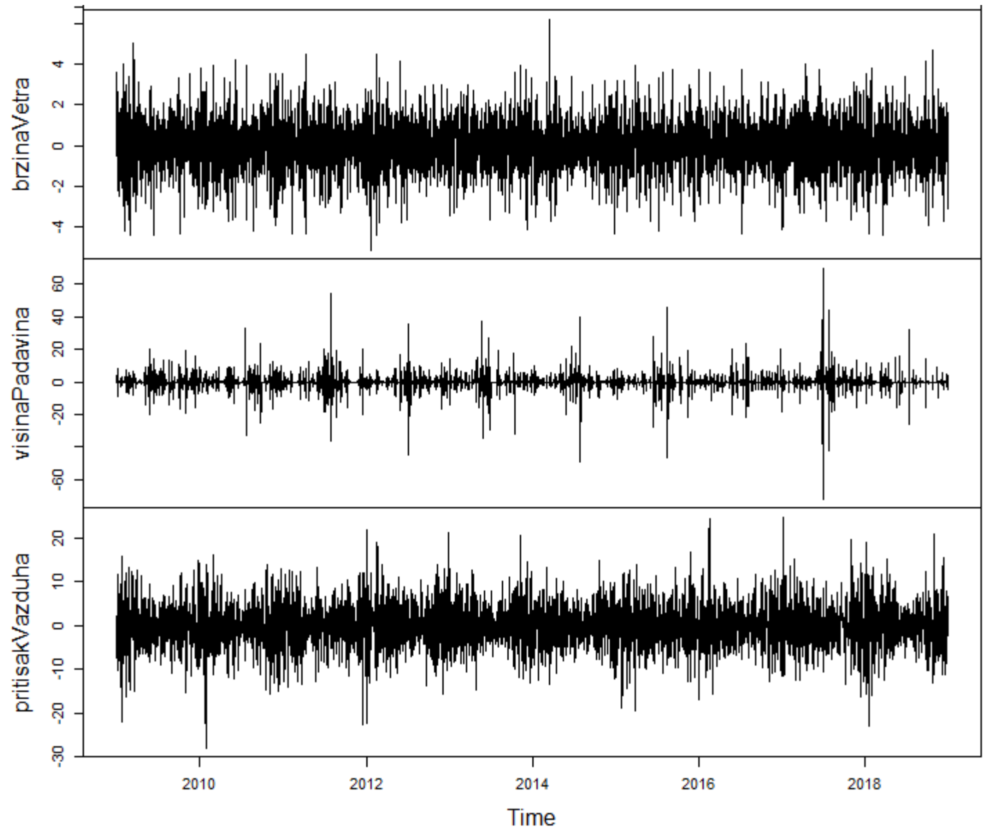
Важна особина која се посматра приликом одабира модела је стационарност серије. Неки од закључака се могу одмах извести посматрајући графике компоненте серија на сликама испод.

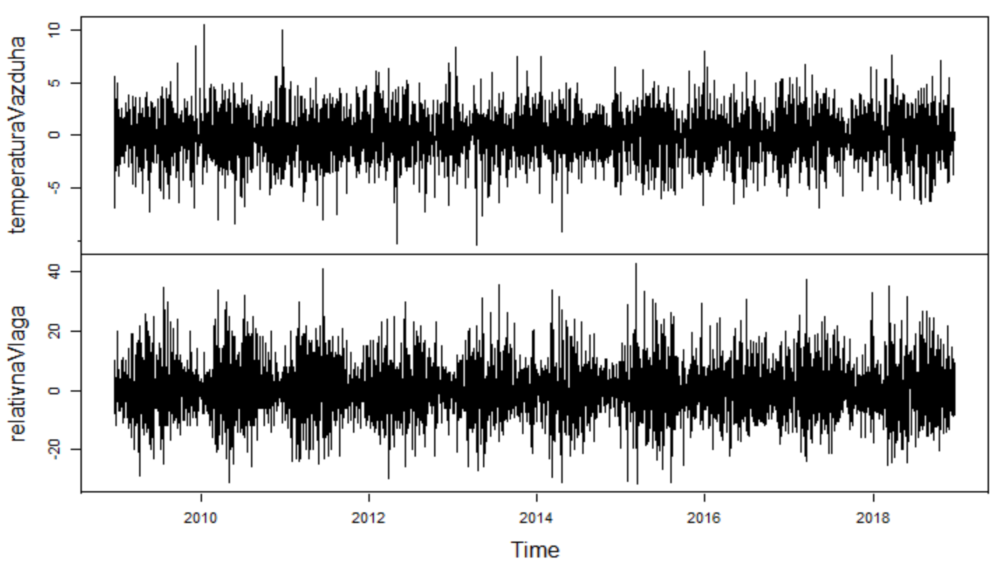




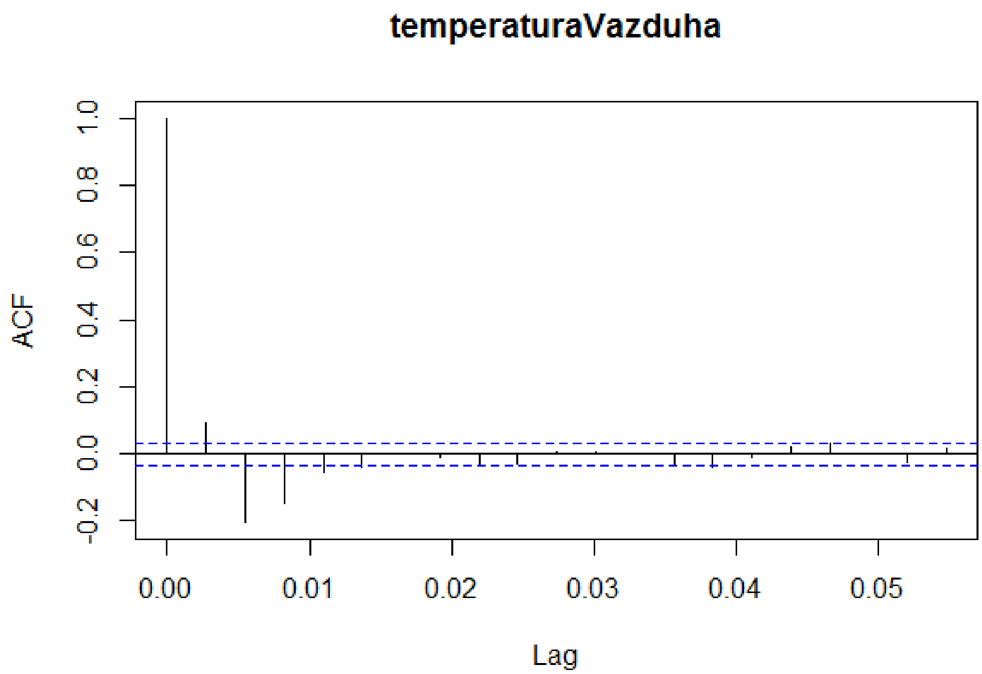
Са графика се може закључити да неки подаци имају специфично годишње кретање, што је могло и да се претпостави с обзиром на то да се посматрају подаци из области континенталне климе. Модели који су дефинисани у раду се примењују на стационарне векторске серије, али са графика се одмах примећује да то није испуњено у овом случају јер ни компоненте немају особину стационарности. Да би подаци могли да се уклопе у неки модел, морају прво да се трансформишу до стационарне временске серије.

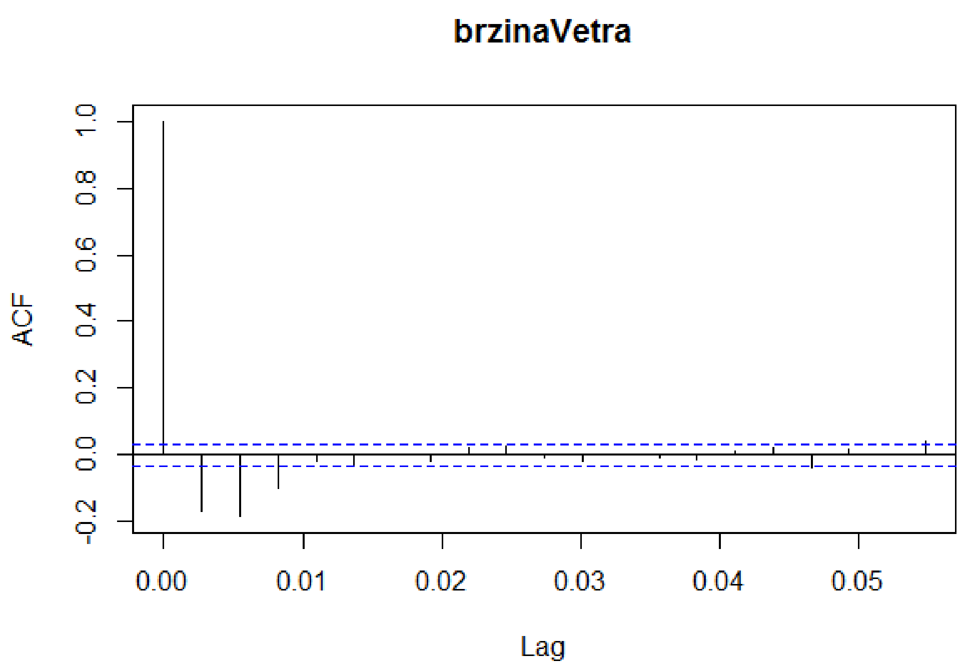
Трансформисани подаци компонената серије су добијени позивом фунције "diffM" из пакета "MTS" и имају следеће графике:



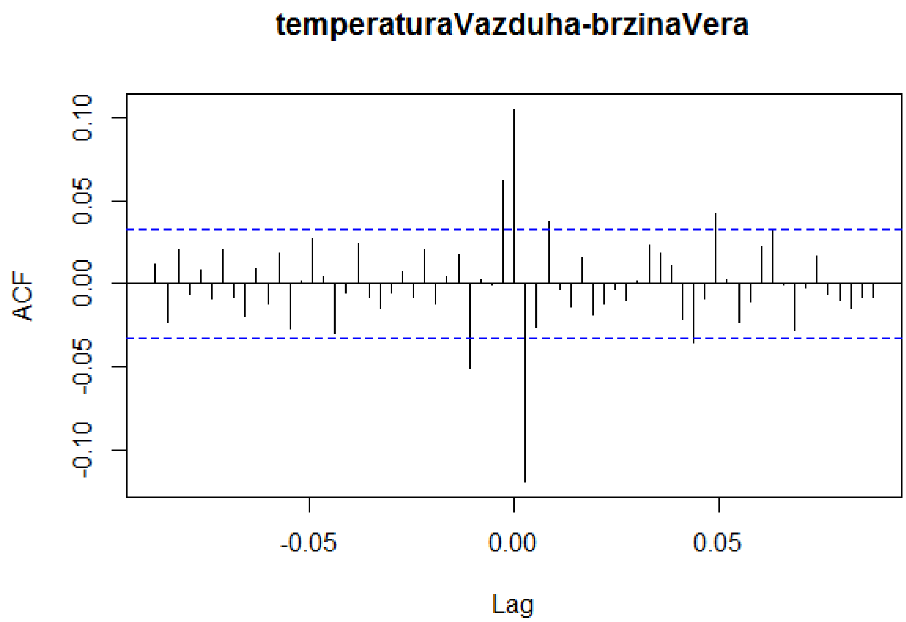


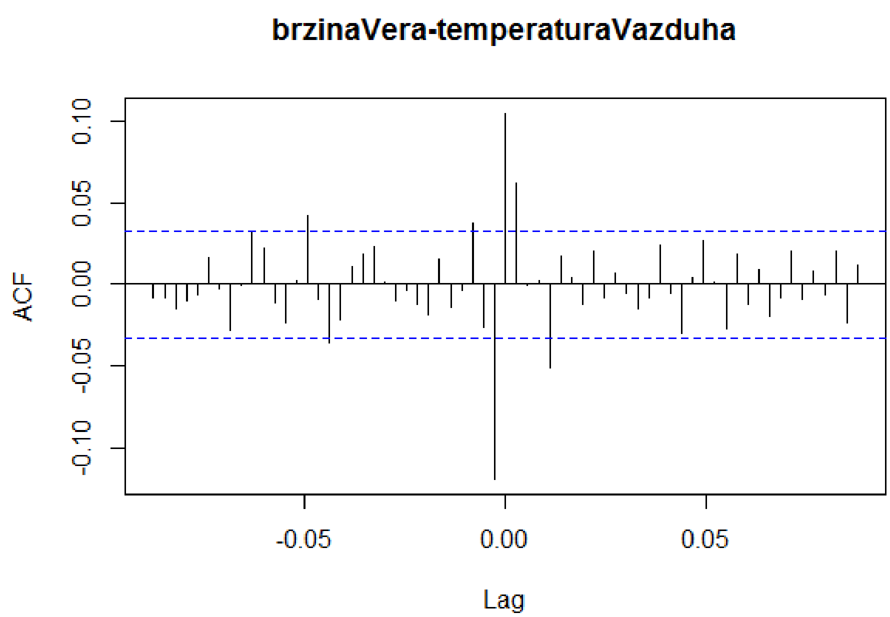
Графици аутокорелационих функција





Графици крос-корелационе функције





За проверу стационарности једнодимензионих серија, у овом случају компонената вишедимоензионе серије, може да се користи Dickey-Fuller тест. На сликама је приказан тест који је примењен на температуру ваздуха и брзину ветра.

```
> adf.temp<-ur.df(temp, type = "trend", selectlags = "AIC")
> summary(adf.temp)

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression trend


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-10.0946  -1.3480   0.0349   1.3919   9.6411

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  2.140e-02  7.309e-02   0.293    0.770
z.lag.1     -1.102e+00  2.180e-02 -50.535   <2e-16 ***
tt          -9.981e-06  3.468e-05  -0.288    0.774
z.diff.lag   2.139e-01  1.618e-02  13.220   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 2.206 on 3644 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.4788,    Adjusted R-squared:  0.4783
F-statistic:  1116 on 3 and 3644 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic is: -50.5348 851.2551 1276.882

Critical values for test statistics:
      1pct  5pct 10pct
tau3 -3.96 -3.41 -3.12
phi2  6.09  4.68  4.03
phi3  8.27  6.25  5.34
```

```
> adf.vetar<-ur.df(vetar, type = "trend", selectlags = "AIC")
> summary(adf.vetar)

###############################################
# Augmented Dickey-Fuller Test Unit Root Test #
###############################################

Test regression trend


Call:
lm(formula = z.diff ~ z.lag.1 + 1 + tt + z.diff.lag)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-4.7738 -0.8501 -0.0151  0.8481  6.2925 

Coefficients:
              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) -6.522e-04  4.346e-02  -0.015    0.988    
z.lag.1     -1.423e+00  2.469e-02 -57.635   <2e-16 ***
tt           2.653e-07  2.062e-05   0.013    0.990    
z.diff.lag   2.187e-01  1.616e-02  13.533   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 1.312 on 3644 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.604,	Adjusted R-squared:  0.6037 
F-statistic:  1853 on 3 and 3644 DF,  p-value: < 2.2e-16


Value of test-statistic is: -57.6353 1107.277 1660.913 

Critical values for test statistics: 
      1pct  5pct 10pct
tau3 -3.96 -3.41 -3.12
phi2  6.09  4.68  4.03
phi3  8.27  6.25  5.34
```

У оба случаја је вредност p мања од 0.05 па се може одбацити нулта хипотеза да је свака једнодимензиона серија нестационарна.

Пробаћемо да применимо VARMA(2,1) модел на дводимензиону серију чије су компоненте температура ваздуха и брзина ветра. Позивом функције у програму добијају се информације које су приказане на слици.

```
> model21<-VARMA(cbind(temp,vetar),p=2,q=1,include.mean=T,fixed=NULL,beta=NULL,sebeta=NULL,prelim=F,details=F,thres=2)
Number of parameters:  14
initial estimates:  5e-04 7e-04 0.7251 -0.1341 -0.2749 0.1355 0.0312 0.5275 -0.0183 -0.0879 -0.6521 -0.0926 0.0049 -0.8843
Par. lower-bounds:  -0.0704 -0.0402 0.6146 -0.2652 -0.3091 0.074 -0.0324 0.4521 -0.038 -0.1233 -0.7675 -0.236 -0.0615 -0.9668
Par. upper-bounds:  0.0715 0.0415 0.8356 -0.0031 -0.2407 0.197 0.0948 0.6029 0.0014 -0.0525 -0.5367 0.0508 0.0713 -0.8018
Final   Estimates:  0.001232459 3.627758e-05 0.8260362 -0.1296437 -0.2655638 0.161051 0.05164983 0.5574274 -0.01243311 -0.08421453 -0.7675
162 -0.1201315 -0.02749148 -0.9667981

Coefficient(s):
        Estimate  Std. Error  t value Pr(>|t|)
temp   1.232e-03   8.480e-03    0.145 0.884448
vetar  3.628e-05   1.149e-03    0.032 0.974811
temp   8.260e-01   5.531e-02   14.935  < 2e-16 ***
vetar -1.296e-01   4.045e-02   -3.205 0.001349 **
temp  -2.656e-01   1.884e-02  -14.099  < 2e-16 ***
vetar  1.611e-01   2.999e-02    5.370 7.88e-08 ***
temp   5.165e-02   1.309e-02    3.947 7.91e-05 ***
vetar  5.574e-01   1.767e-02   31.554  < 2e-16 ***
temp  -1.243e-02   1.015e-02   -1.225 0.220562
vetar -8.421e-02   1.688e-02   -4.988 6.10e-07 ***
      -7.675e-01   6.086e-02  -12.612  < 2e-16 ***
      -1.201e-01   3.651e-02   -3.291 0.000999 ***
      -2.749e-02   9.606e-03   -2.862 0.004210 **
      -9.668e-01   6.532e-03 -148.009  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
---
Estimates in matrix form:
Constant term:
Estimates:  0.001232459 3.627758e-05
AR coefficient matrix
AR( 1 )-matrix
       [,1]   [,2]
[1,] 0.8260 -0.130
[2,] 0.0516  0.557
AR( 2 )-matrix
        [,1]    [,2]
[1,] -0.2656  0.1611
[2,] -0.0124 -0.0842
MA coefficient matrix
MA( 1 )-matrix
       [,1]  [,2]
[1,] 0.7675 0.120
[2,] 0.0275 0.967

Residuals cov-matrix:
         [,1]     [,2]
[1,] 4.588885 0.160135
[2,] 0.160135 1.430035
----
aic=  1.885092
bic=  1.908882
```

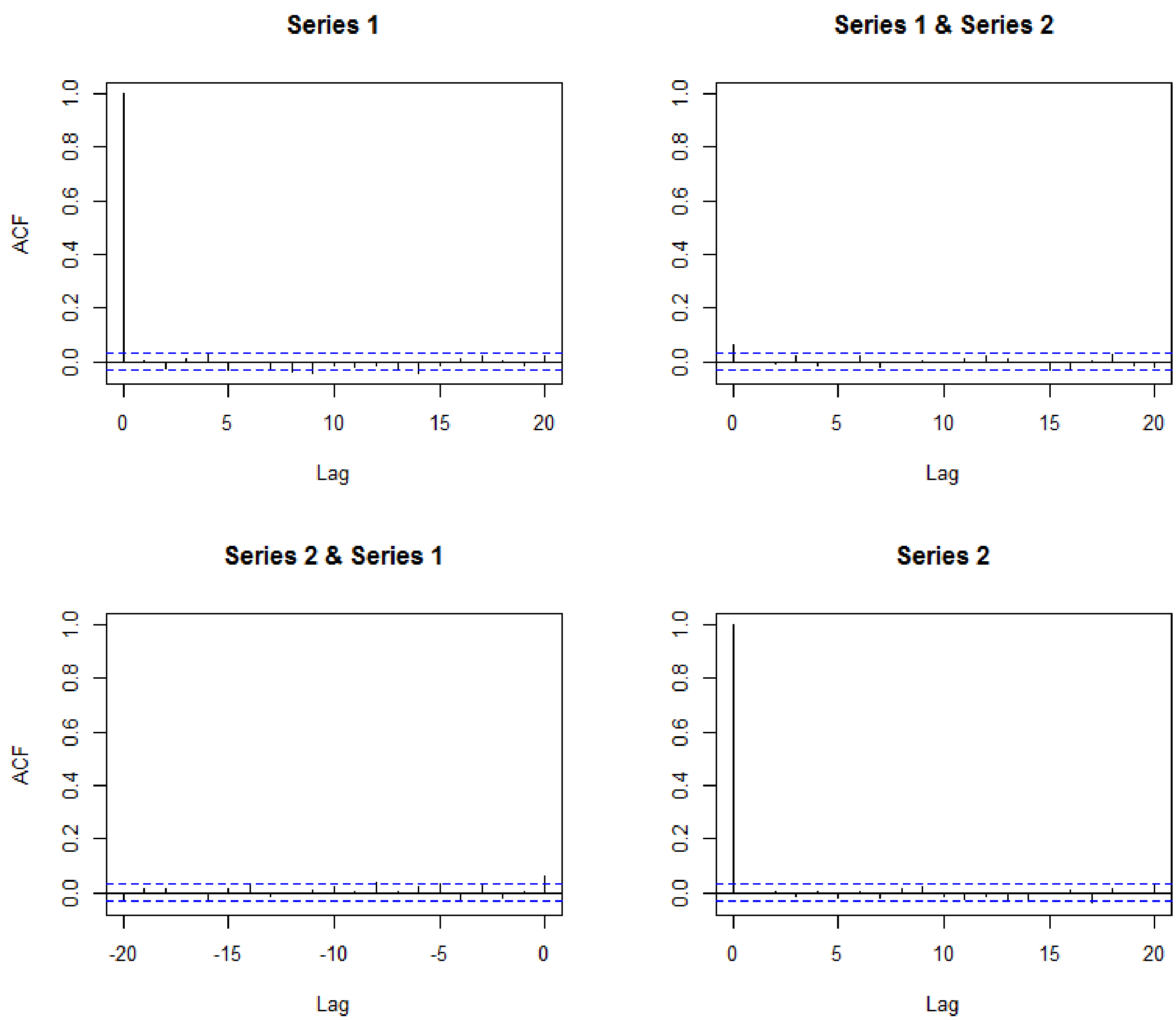
Да ли су резидуали аутокорелисани и међусобно корелисани током времена?

Након излазног резултата карактеристика модела, потребно је испитати вектор резидуала. Резидуали модела се дефинишу као разлика $\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{r}_t - \hat{\boldsymbol{r}}_t$. Приликом одабира модела у пракси, неопходно је проверити, између осталог, да ли су резидуали модела некорелисани међусобно током времена. Ако резидуали показују присуство међусобне корелације, сугерише нам се да пробамо да податке уклопимо у други модел и наставимо анализу тј. добар модел неће показати значајно присуство аутокорелације и крос-корелације међу резидуалима.

Један метод провере корелације на скупу података је посматрање графика аутокорела-ционе функције (који показује корелацију променљиве у односу на њене прошле вредности) и графика крос-корелационе функције (који приказује корелацију променљиве у односу на прошле вредности других променљивих). Приликом практичног испитивања графика, можемо се осврнути на чињеницу да оцена коефицијената корелације белог шума асимптотски има нормалну расподелу $\mathcal{N}(0,\frac{1}{T})$ где је T величина узорка. Ако све израчунате оцене коефицијената корелације не улазе у интервал $(-2/\sqrt{T}, 2/\sqrt{T})$, онда можемо одбацити нулту хипотезу да не постоји корелација у серији резидуала. ([2] и [1])

Други метод је коришћење Portmanteau теста који је претходно поменут у раду.

Графици аутокорелације и крос-корелације резидуала. Прва серија је температура, а друга ветар.

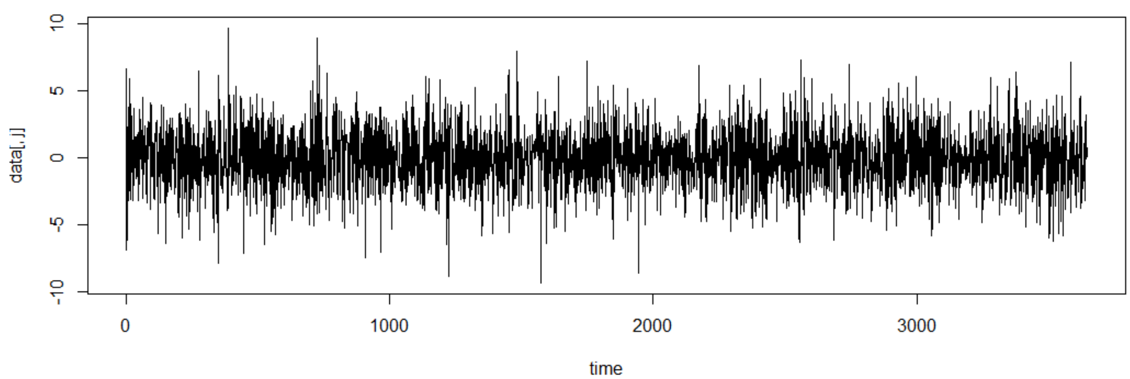


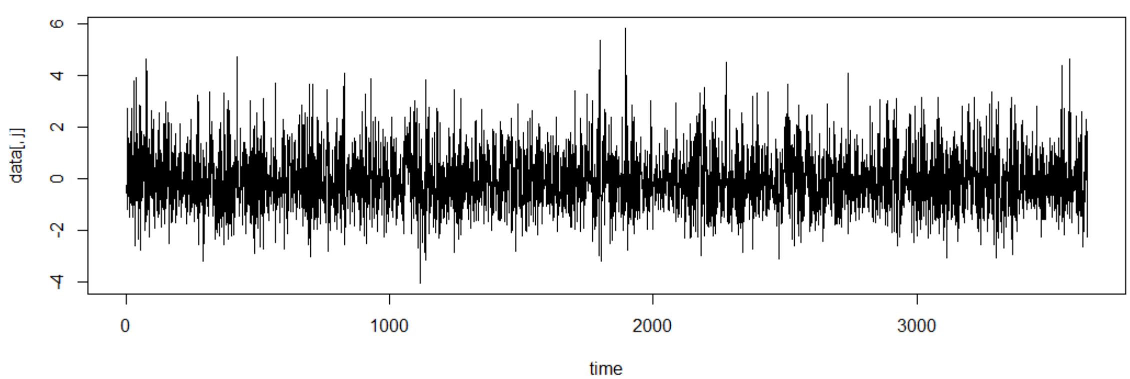
Примена Portmanteau теста на резидуале показује вредности тест статистике која је поменута на почетку као и p вредности. У овом случају су p вредности веће од 0.05, па се прихвата нулта хипотеза да су резидуали у случају ове дводимензионе серије некорелисани.

```
> mq(model21$residuals, lag = 2, adj = 0)
Ljung-Box Statistics:
        m       Q(m)     df    p-value
[1,] 1.000      0.311   4.000     0.99
[2,] 2.000      3.078   8.000     0.93
```

Да ли је дисперзија компонената вектора резидуала константна током времена?

Ова ставка се најлакше може закључити из посматрања графика резидуала. Са слика видимо да је дисперзија константна и да је очекивање у нули.





Да ли је вектор резидуала нормално расподељен?

У пакетима програма који се користе за VARMA моделе постоји и функција којом се може проверити да ли се подаци уклапају у вишедимензиону нормалну расподелу. На сликама се виде добијени резултати позивом mvn функције за два теста: Mardia и Henze-Zirkler тест чије је коришћење објашњено у литератури [9]. Резултат је да се вектор резидуала не уклапа у нормалну расподелу. Тако је коначни заључак да би требало да пробамо да податке уклопимо у други модел.

```
> mvn(model21$residuals,subset=NULL,mvnTest="mardia")
$multivariateNormality
             Test        Statistic              p value Result
1 Mardia Skewness 212.132063362199 9.24186094427024e-45     NO
2 Mardia Kurtosis  12.431863918849                    0     NO
3             MVN             <NA>                 <NA>     NO

$univariateNormality
          Test  Variable Statistic   p value Normality
1 Shapiro-Wilk  Column1     0.9968  <0.001      NO
2 Shapiro-Wilk  Column2     0.9888  <0.001      NO

$Descriptives
     n        Mean  Std.Dev       Median       Min      Max       25th      75th        Skew  Kurtosis
1 3648 0.003204714 2.142460  0.006742913 -9.364523 9.729784 -1.3477487 1.3620048 -0.01027285 0.6500763
2 3648 0.006165342 1.195989 -0.078755436 -4.033970 5.859404 -0.8045844 0.7442123  0.45436634 0.5210653
```

```
> mvn(model21$residuals,mvnTest="hz")
$multivariateNormality
           Test       HZ p value MVN
1 Henze-Zirkler 5.480473       0  NO

$univariateNormality
          Test  Variable Statistic   p value Normality
1 Shapiro-Wilk  Column1     0.9968  <0.001      NO
2 Shapiro-Wilk  Column2     0.9888  <0.001      NO

$Descriptives
     n        Mean  Std.Dev       Median       Min      Max       25th      75th        Skew  Kurtosis
1 3648 0.003204714 2.142460  0.006742913 -9.364523 9.729784 -1.3477487 1.3620048 -0.01027285 0.6500763
2 3648 0.006165342 1.195989 -0.078755436 -4.033970 5.859404 -0.8045844 0.7442123  0.45436634 0.5210653
```

Илустрација генерисања података VAR модела

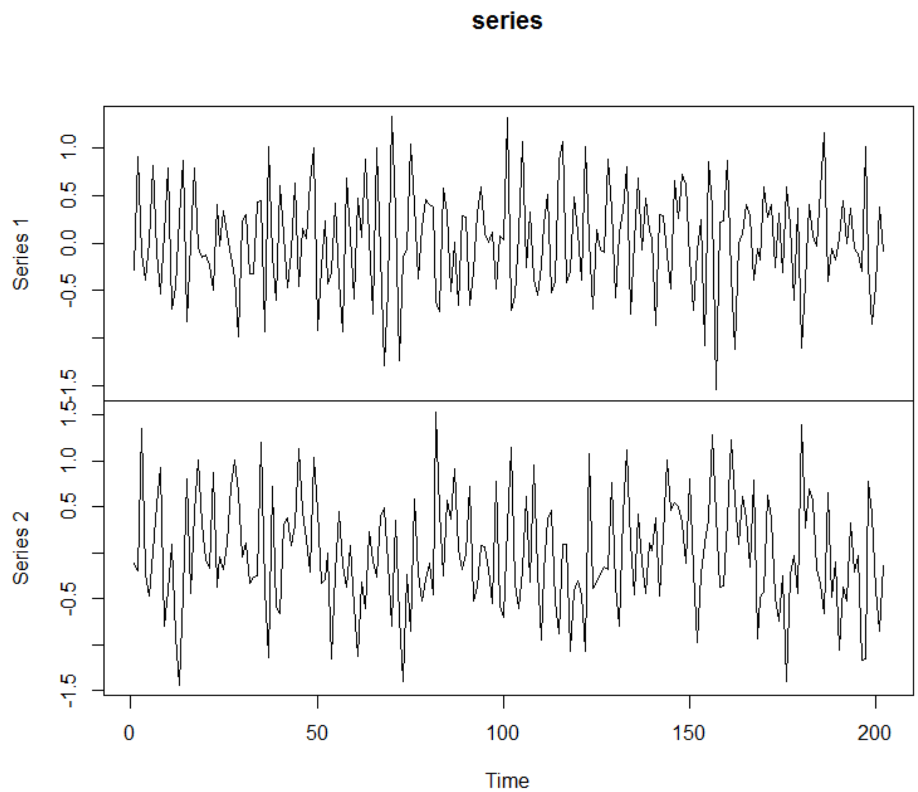
У наставку ће бити описано генерисање података који се уклапају у векторски ауторегресиони модел као и кораци анализе података који су потребни да би се утврдило да ли је модел добар. Детаљнији поступак о овом делу се може наћи у литератури [10] и [12].

Генерисаћемо податке VAR(2) модела

$$\begin{bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3 & -0.4 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-1} \\ r_{2,t-1} \end{bmatrix} + - \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ -0.2 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,t-2} \\ r_{2,t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{bmatrix}$$

Су компоненте белог шума из $\mathcal{N}(0,0.05)$ расподеле.

Код се може наћи у литератури [12]. Ова дводимензиона серија је генерисана са кораком 1 и има 200 опсервација што се види на графику испод.



Пакет који је погодан за испитивање ових модела је пакет "vars" и даље ће бити приказани позиви функција из овог пакета. За одабир реда модела приказан је резултат из програма .

```
> modelVar2 <- VARselect(series, lag.max = 12, type = "const")
> modelVar2$selection
AIC(n)  HQ(n)  SC(n) FPE(n)
     2      2      2      2
```

По свим критеријумима изабран је модел реда 2, па ћемо њега и изабрати за податке.

```
> Var2 <- VAR(series, p = 2, type = "const", season = NULL,
+                 exog = NULL)
>
> summary(Var2)

VAR Estimation Results:
=========================
Endogenous variables: Series.1, Series.2
Deterministic variables: const
Sample size: 200
Log Likelihood: -265.465
Roots of the characteristic polynomial:
0.6629 0.6629 0.4465 0.04395
Call:
VAR(y = series, p = 2, type = "const", exogen = NULL)
```

Настављамо са испитивањем резидуала и позивамо Portmanteau тест како бисмо проверили нулту хипотезу .

```
> PTest <- serial.test(Var2, lags.pt = 12, type = "PT.asymptotic")
> PTest

        Portmanteau Test (asymptotic)

data:  Residuals of VAR object Var2
Chi-squared = 39.628, df = 40, p-value = 0.4869
```

У овом случају је p вредност већа од 0.05, па се прихвата нулта хипотеза да су резидуали у случају ове дводимензионе серије некорелисани.

Даље, позивамо тест којим се може испитати хетероскедастичност резиудала. У овом случају је, како видимо на слици испод, p вредност већа од 0.05 па потврђујемо одсутност хетероскедастичности.

```
> Var2arch <- arch.test(Var2, lags.multi = 12, multivariate.only = TRUE)
> Var2arch

        ARCH (multivariate)

data:  Residuals of VAR object Var2
Chi-squared = 109.35, df = 108, p-value = 0.4455
```

Како бисмо проверили да ли је вектор резидуала овог VAR модела из нормалне расподеле, покрећемо следећи код и одмах добијамо резултат:

```
> RezNorm <- normality.test(Var2, multivariate.only = TRUE)
> RezNorm
$`JB`

        JB-Test (multivariate)

data:  Residuals of VAR object Var2
Chi-squared = 4.602, df = 4, p-value = 0.3306


$Skewness

        Skewness only (multivariate)

data:  Residuals of VAR object Var2
Chi-squared = 4.3139, df = 2, p-value = 0.1157


$Kurtosis

        Kurtosis only (multivariate)

data:  Residuals of VAR object Var2
Chi-squared = 0.28813, df = 2, p-value = 0.8658
```

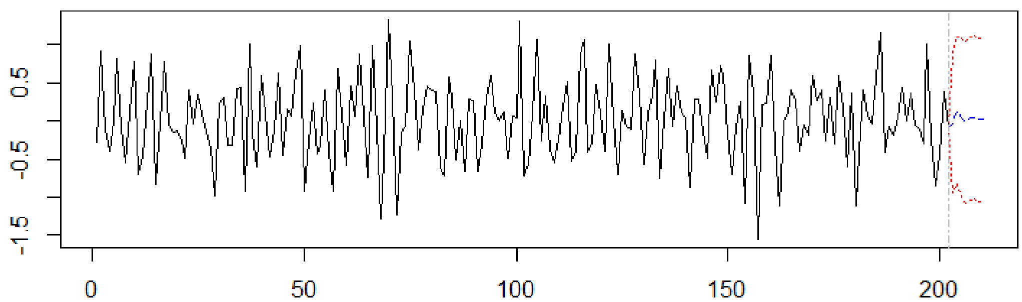
Закључујемо да је испуњен услов за нормалну расподелу.

Циљ који желимо да достигнемо испитивањем података у пракси јесте прогноза. Како је претходном анализом утврђено да је модел добар, можемо да позовемо функцију за предикцију података за неколико корака унапред.

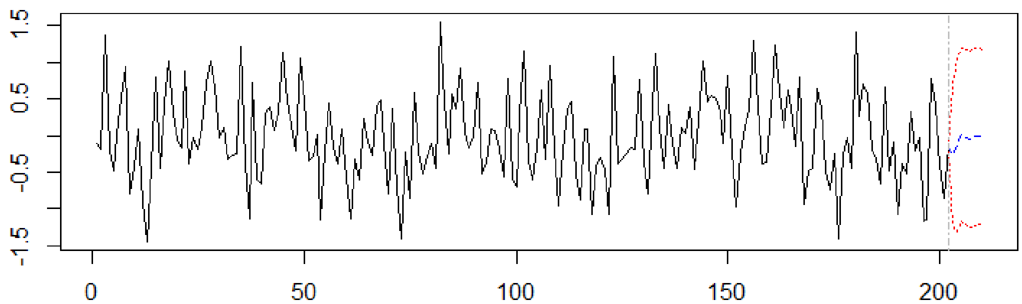
```
> predictions <- predict(Var2, n.ahead = 8, ci = 0.95)
> plot(predictions)
>
```

Овим позивом се посматра пеогноза за 8 корака у напред и резултати су следећи графици:

Forecast of series Series.1



Forecast of series Series.2



13.ЗАКЉУЧАК

Како је поменуто у уводу, потреба за вишедимензионим моделима је данас све већа. У свакој делатности циљ јесте прогноза која ће побољшати квалитет живота и пословања. Конкретно у климатологији, данас је акценат на истраживањима која се односе на утицај загађења на климатске промене . Свакако је употреба ових модела неопходна за доношење корисних закључака из ове области.

Да је ова област запажена у науци, говори у прилог то да је развој софтверских пакета који се односе на временске серије свакодневно у експанзији. Пакети које је аутор нашао приликом писања рада односе се на програме Python и R. За ове програме се свакодневно развијају алати за обраду података, а и свакодневно ажурирају информације о њиховом коришћењу.

Такође, омогућена је и доступност података преко интернета. Постоји много база које се скупљају из метеоролошких станица и које су динамичне тако да пружају нове податке из претходног дана. За дневно мерене податке за сврху климатологије се, осим коришћене серије у раду за град Потсдам, може користити литература [13].

14. ЛИТЕРАТУРА И ИЗВОРИ ПОДАТАКА

[1] Ruey S. Tsay, *Analysis of Financial Time Series*, Second edition, Wiley, United States of America, 2005.

[2] Suhayl Muhammed Vayej, *Multivariate Time Series Modelling,* University of KwaZulu-Natal, 2012. (https://researchspace.ukzn.ac.za/bitstream/handle/10413/10352/Vayej_Suhayl_Muhammed_2012.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

[3] Helmut Lütkepohl, *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

[4] Златко Ј. Ковачић, *Анализа временских серија*, Економски факултет, Универзитет у Београду, Београд, 1995.

[5] Павле Младеновић, *Вероватноћа и статистика*, Математички факултет, Универзитет у Београду, Београд, 2008

[6] https://cran.r-project.org/web/packages/rdwd/rdwd.pdf

[7] https://cran.r-project.org/web/packages/MTS/MTS.pdf

[8] http://avs.ekof.bg.ac.rs/master-medjunarodna%20ekonomija/eko4-10.pdf

[9] https://www.youtube.com/watch?v=-2D2bcpNJpg

[10] https://www.r-econometrics.com/timeseries/varintro/

[11] http://www.matf.bg.ac.rs/p/anica-kostic/pocetna/

[12] https://kevinkotze.github.io/ts-7-tut/

[13] https://www.canada.ca/en/services/environment/weather/climatechange.html