Matematički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Različiti pristupi uvođenju elementarnih funkcija

Master rad

Mentor: prof. dr Miodrag Mateljević
Student: Dragana Stevančević

Beograd,
2019.

Sadržaj

1 Uvod

Pojam funkcije je jedan od najvažnijih pojmova matematike. Korišćenje funkcija obezbeđuje bolje razumevanje i efikasnije rešavanje nekih matematičkih problema. Značajnu klasu funkcija predstavljaju i elementarne funkcije, koje se izučavaju i tokom srednje škole. Otuda je od posebnog interesa izučavati različite načine definisanja elementarnih funkcija. Na primer, trigonometrijske funkcije se mogu definisati na različite načine, pomoću trigonometrijske kružnice, stepenih redova, funkcionalnih jednačina. Slično važi i za eksponencijalnu i stepenu funkciju. Takođe, posebno je interesantna veza eksponencijalne i trigonometrijskih funkcija. Iako deluju jednostavno, elementarne funkcije imaju veoma široku primenu. Učenicima obično nije jasna svrha njihovog uvođenja i primenljivosti na probleme iz realnog života. Podstaknuti tom činjenicom, u ovom radu nastojimo kako razmotriti različite načine uvođenja elementarnih funkcija, tako i sugerisati na njihov veliki značaj kroz brojne primene u sferama ljudskog života.

2 Osnovni pojmovi

Definicija 1. *Neka su X i Y dva neprazna skupa.* ***Funkcija f*** *iz skupa X u skup Y je pridruživanje koje svakom elementu x iz skupa X dodeljuje tačno jedan element y iz skupa Y.*

U tom slučaju, pišemo: $f : X \to Y$, odnosno $y = f(x)$.
Skup X naziva se domen i označava se sa $D(f)$, a skup Y naziva se kodomen funkcije f i označava se sa $C_D(f)$.

Definicija 2. *Neka su A i B podskupovi realnih brojeva $\mathbb{R}$. Preslikavanje $f : A \to B$ se naziva realna funkcija jedne realne promenljive.*

Skup G tačaka u Dekartovom koordinatnom sistemu sa koordinatama $(x, f(x))$, $x \in D(f)$, gde je f funkcija iz prethodne definicije, naziva se grafik funkcije f, tj. $G = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}$.

Definicija 3. *Konstantne, stepene, eksponencijalne, logaritamske, trigonometrijske i inverzne trigonometrijske funkcije su osnovne elementarne funkcije.*

Definicija 4.

- *Osnovne elementarne funkcije su elementarne funkcije.*
- *Ako su f i g elementarne funkcije, onda su i $f+g$, $f-g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ i $g \circ f$ elementarne funkcije.*
- *Sve elementarne funkcije se dobijaju primenom prethodna dva pravila konačan broj puta.*

Definicija 5. *Neka $f : A \to \mathbb{R}$, gde skup $A \subset \mathbb{R}$ ima osobinu da ako $x \in A$, onda $-x \in A$. Funkcija f je parna na A ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = f(x)$, a neparna na A ako za svako $x \in A$ važi $f(-x) = -f(x)$.*

Parne i neparne funkcije imaju sledeća svojstva:

- Grafik parne funkcije simetričan je u odnosu na $y-$osu, a grafik neparne funkcije simetričan je u odnosu na koordinatni početak.
- Ako su f i g parne funkcije, onda su i funkcije $f \pm g$, $f \cdot g$ i $\dfrac{f}{g}$ parne funkcije.
- Ako su f i g neparne funkcije, onda su funkcije $f \pm g$ neparne funkcije, a $f \cdot g$ i $\dfrac{f}{g}$ su parne funkcije.
- Ako je f parna funkcija i g neparna funkcija, onda $f \cdot g$ je neparna funkcija.

Definicija 6. *Za funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, kažemo da je:*

1. *strogo rastuća, ako važi:*
   $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$
2. *rastuća, ako važi:*
   $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$
3. *strogo opadajuća, ako važi:*
   $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$
4. *opadajuća, ako važi:*
   $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$

3 Elementarne funkcije kao realne funkcije realne promenljive

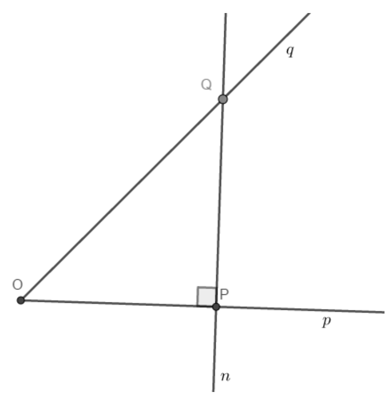
3.1 Trigonometrijske funkcije

Trigonometrija je matematička disciplina koja se bavi izučavanjem elemenata trougla. Sam pojam je grčkog porekla, nastao spajanjem reči trougao (*trigonos*) i mera (*metron*), što nam govori šta je bila prvobitna svrha trigonometrije. Datira još iz Egipta i Mesopotamije. Prvi zapisi pronađeni su na vavilonskim kamenim pločama (1900-1600. p.n.e.). Trigonometrija je pronašla široku primenu, pa je njen prvobitni cilj određivanja elemenata trougla, danas prevaziđen i trigonometrija predstavlja značajnu oblast matematike i geometrije.

Trigonometrijske funkcije su funkcije ugla: *sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans* i *kosekans*. Za tangens ćemo koristiti uobičajenu anglosaksonsku oznaku *tan*, mada se kod nas češće koristi oznaka *tg*; za kotangens, čija je anglosaksonska oznaka *cot*, mi koristimo *ctg*; *kosekans*, koji inače nije često u upotrebi, pored anglosaksonske *csc*, pišemo i *cosec*. Ostale trigonometrijske funkcije imaju iste skraćenice kod nas i u većem delu sveta.

3.1.1 Trigonometrijske funkcije oštrog ugla

Neka je $\alpha = \angle pOq$ proizvoljan oštar ugao. Na kraku Oq odaberemo proizvoljnu tačku Q. Iz tačke Q konstruišemo normalu na krak Op. Podnožje te normale obeležimo sa P.



Definicija 7. *Sinus ugla α je količnik naspramne katete PQ i hipotenuze OQ. Pišemo:*

$$\sin\alpha = \frac{PQ}{OQ}.$$

Definicija 8. *Kosinus ugla α je količnik nalegle katete OP i hipotenuze OQ. Pišemo:*

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OQ}.$$

Između sinusa i kosinusa postoji očigledna veza:
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, što je posledica Pitagorine teoreme.

Definicija 9. *Tangens ugla α je količnik naspramne katete PQ i nalegle katete OP. Pišemo:*

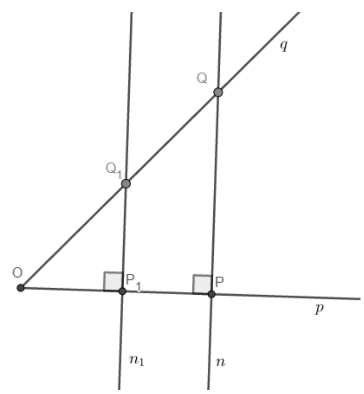
$$\tan\alpha = \frac{PQ}{OP}.$$

Takođe, primetimo da tangens ugla možemo definisati i kao odnos sinusa i kosinusa: $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{PQ}{OQ}}{\frac{OP}{OQ}} = \dfrac{PQ \cdot OQ}{OP \cdot OQ} = \dfrac{PQ}{OP}$.

Preostala tri od šest odnosa stranica pravouglog trougla su: odnos hipotenuze i naspramne katete, odnos hipotenuze i nalegle katete i odnos nalegle i naspramne katete.
Odnos hipotenuze i naspramne katete nazivamo kosekans i skraćeno zapisujemo csc, tj. važi: $\csc\alpha = \dfrac{OQ}{PQ}$.
Odnos hipotenuze i nalegle katete nazivamo sekans i skraćeno zapisujemo sec, tj. važi: $\sec\alpha = \dfrac{OQ}{OP}$.
Odnos nalegle i naspramne katete se naziva kotangens i skraćeno zapisujemo cot, tj. važi $\cot\alpha = \dfrac{OP}{PQ}$.
Primetimo, da su ove funkcije, csc, sec, cot jednake recipročnoj vrednosti redom funkcija sin, cos, tan.

Stav 1. *Vrednost trigonometrijskih funkcija oštrog ugla ne zavisi od izbora tačke Q.*

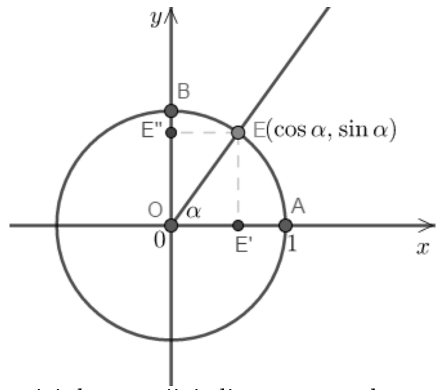
Dokaz. Neka je $\alpha = \angle pOq$ proizvoljan oštar ugao. Na kraku Oq odaberemo proizvoljne dve tačke Q i Q_1. Iz tačaka Q i Q_1 konstruišemo normale na krak Op. Podnožja tih normala obeležimo sa P i P_1. Kako je sinus ugla α količnik naspramne katete i hipotenuze, onda je $\sin\alpha = \dfrac{PQ}{OQ}$ i $\sin\alpha = \dfrac{P_1Q_1}{OQ_1}$. Na osnovu Talesove teoreme važi: $\dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{P_1Q_1}{OQ_1}$. □



3.1.2 Trigonometrijske funkcije proizvoljnog ugla

Neka je u ravni izabran pravougli koordinatni sistem, čiji je koordinatni početak O, apscisna osa Ox i ordinatna osa Oy. Takođe, neka je k kružnica jediničnog poluprečnika, čiji je centar tačka O, koju ćemo u daljem tekstu zvati trigonometrijska kružnica. Neka su A i B presečne tačke kružnice k sa pozitivnim delovima koordinatnih osa Ox i Oy.

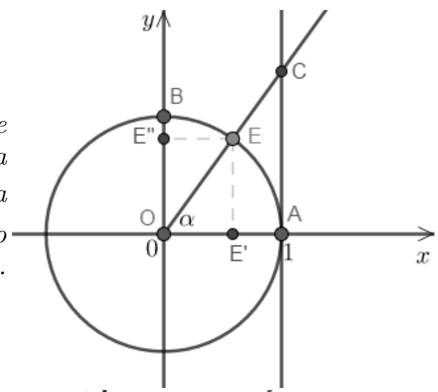
Definicija 10. *Uočimo tačku E na trigonometrijskoj kružnici. Poluprave OA i OE određuju ugao $\alpha = \angle AOE$ (videti sliku). Prvu koordinatu tačke $E(\alpha)$ zvaćemo* ***kosinus ugla*** *α i označavati sa* $\cos\alpha$. *Drugu koordinatu tačke $E(\alpha)$ zvaćemo* ***sinus ugla*** *α i označavati sa* $\sin\alpha$.



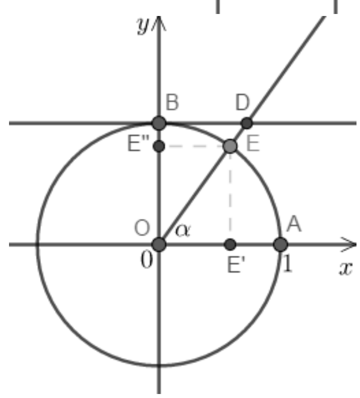
Primetimo da za ma koji ugao α na kružnici k postoji jedinstvena tačka $E = E(\alpha)$ takva da je $\alpha = \angle AOE$. Primetimo, apscisa i ordinata (horizontalna i vertikalna osa) su kosinusna, odnosno sinusna osa. Prvu koordinatu tačke $E(\alpha)$ zvaćemo kosinus, a drugu koordinatu tačke $E(\alpha)$ zvaćemo sinus ugla α.

Tangensna i kotangensna osa se definišu kao tangente na trigonometrijsku kružnicu u tačkama A, odnosno B.

Definicija 11. *Neka je C presečna tačka tangente na trigonometrijsku kružnicu u tački A i prave koja sadrži drugi krak ugla $\alpha = \angle AOE$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. Drugu koordinatu tačke $C(\alpha)$ zvaćemo* ***tangens ugla*** *α i označavati sa* $\tan\alpha$ *(videti sliku).*



Definicija 12. *Neka je D presečna tačka tangente na trigonometrijsku kružnicu u tački B i prave koja sadrži drugi krak OE ugla $\alpha = \angle AOE$, $\alpha \neq k\pi$, za sve $k \in \mathbb{Z}$. Prvu koordinatu tačke $D(\alpha)$ zvaćemo* ***kotangens ugla*** *α i označavati sa* $\cot\alpha$ *(videti sliku).*



Već je definisano da tangens ugla predstavlja odnos sinusa i kosinusa zadatog ugla. Posmatrajmo trouglove: $\triangle OAC$ i $\triangle OE'E$. Očigledno važi: $\triangle OAC \sim \triangle OE'E$, jer je $\angle AOC = \angle E'OE = \alpha$ i $\angle CAO = \angle EE'O = 90°$. Iz sličnosti trouglova zaključujemo da važi odnos: $OA : OE' = AC : E'E$, to jest

$$AC = \frac{E'E}{OE'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Slično se pokazuje da je kotangens ugla α zaista jednak odnosu kosinusa i sinusa.

Mera ugla Uobičajeno je u praksi da uglove merimo u stepenima ili radijanima. Retko se sreće ugao izmeren u gradima. Stepen je devedeseti deo pravog ugla. Ugao od jednog stepena se označava sa 1°. Dakle, opružen ugao je 180°, a pun 360°.

Definicija 13. *Radijan, skraćeno označavamo* rad*, je centralni ugao nad lukom trigonometrijske kružnice, čija je dužina jednaka poluprečniku.*

Kako pun ugao odgovara dužini cele kružnice tj. obimu $2\pi r$, jedan radijan jednak je $\dfrac{360^\circ}{2\pi}$ odnosno približno $57^\circ 17' 44''$.

Zanimljivosti: Zašto je broj 360 uzet kao mera punog ugla, a ne neki drugi broj kao na primer 100 ili 1000? Prvo, broj 360 ima dosta delilaca (2,3,4,5,6,8,...), to znači da se krug može deliti na delove koji se lako mogu meriti celim brojevima. Drugo, broj 360 je približno jednak broju dana u jednoj astronomskoj godini (365).

Gradijan je stoti deo pravog ugla, piše se 1grad. Jedan gradijan se deli na sto delova koji se nazivaju metričke minute ($1'$) i čiji se stoti deo naziva metrička sekunda ($1''$). Gradijan kao jedinica mere bio je uveden zajedno sa metarskim sistemom mera krajem 18. veka. Međutim, gradijan nije postigao široku primenu u praksi.

3.1.3 Trigonometrijske funkcije realnog broja

Najpre ćemo definisati osnovne trigonometrijske funkcije za brojeve koji pripadaju intervalu $[0, 2\pi)$.

Definicija 14. *Neka je broj $s \in [0, 2\pi)$. Sinus broja s je sinus ugla s* rad*.*
Slično, kosinus broja s je kosinus ugla s rad*.*

Primetimo da svaki realan broj s možemo zapisati kao $s = k \cdot 2\pi + \alpha$, gde su $k \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in [0, 2\pi)$. Broj k je najveći ceo broj, koji nije veći od $\dfrac{s}{2\pi}$, to jest $k = \left\lfloor \dfrac{s}{2\pi} \right\rfloor$.

Definicija 15. *Neka je s realan broj i α ugao čija radijanska mera pripada intervalu $[0, 2\pi)$ takav da važi: $\alpha = s - k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Tada, sinus i kosinus broja s definišemo na sledeći način:*

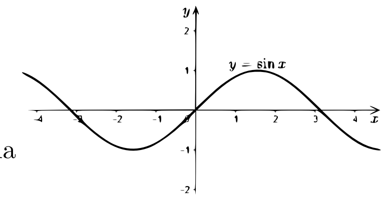
$$\sin s = \sin\alpha$$

$$\cos s = \cos\alpha$$

3.1.4 Osnovna svojstva trigonometrijskih funkcija

Sinusna funkcija

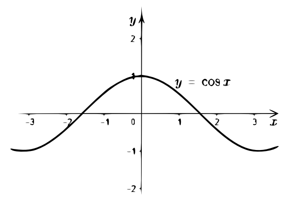
- Domen funkcije sinus je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.



- Kodomen funkcije sinus je interval $[-1, 1]$.
- Funkcija sinus je periodična sa periodom 2π.
- $\sin(-x) = -\sin x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tj. sinus je neparna funkcija.
- Funkcija sinus ima nule u tačkama $x = 0$ i $x = \pi$, za $x \in [0, 2\pi)$, odnosno $x = k\pi$, za $x \in \mathbb{R}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Funkcija sinus je pozitivna za $0 < x < \pi$, a negativna za $\pi < x < 2\pi$, za $x \in [0, 2\pi)$.
- Funkcija sinus raste u intervalima $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$,
  a opada u intervalima $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Sinusna funkcija dostiže:
  maksimalnu vrednost na intervalu $[0, 2\pi]$ za $x = \frac{\pi}{2}$ i ona iznosi $\sin \frac{\pi}{2} = 1$,
  a minimalnu vrednost na intervalu $[0, 2\pi]$ za $x = \frac{3\pi}{2}$ i ona iznosi
  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$.

Kosinusna funkcija

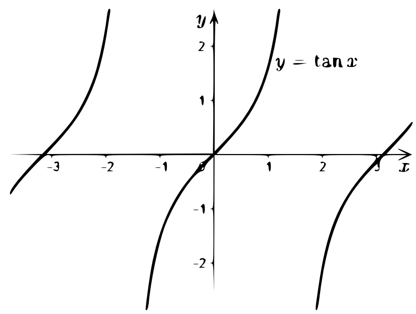
- Domen funkcije kosinus je skup realnih brojeva $\mathbb{R}$.



- Kodomen funkcije kosinus je interval $[-1, 1]$.
- Funkcija kosinus je periodična sa periodom 2π.
- $\cos(-x) = \cos x$ za svako $x \in \mathbb{R}$, tj. kosinus je parna funkcija.
- Funkcija kosinus ima nule u tačkama $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{3\pi}{2}$, za $x \in [0, 2\pi)$, odnosno $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, za $x \in \mathbb{R}$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Funkcija kosinus je pozitivna za $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ i $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, a negativna za $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, za $x \in [0, 2\pi)$.
- Funkcija kosinus raste u intervalima $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$,
  a opada u intervalima $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

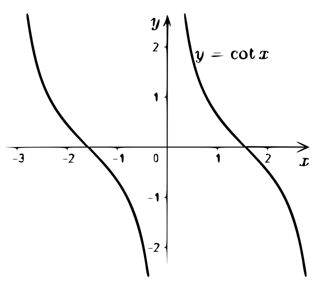
- Funkcija kosinus dostiže:
maksimalnu vrednost na intervalu $[0, 2\pi]$ za $x = 0$ i ona iznosi $\cos 0 = 1$,
a minimalnu vrednost na intervalu $[0, 2\pi]$ za $x = \pi$ i ona iznosi $\cos \pi = -1$.

Tangensna funkcija



- Funkcija tangens je definisana je za svako $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, tj. domen je $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \right\}$.
- Kodomen funkcije tangens je skup realnih brojeva.
- Funkcija tangens je periodična sa periodom π.
- $\tan(-x) = -\tan x$, tj. tangens je neparna funkcija.
- Tangensna funkcija ima vertikalne asimptote $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Nule funkcije tangens su $x = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Funkcija tangens je pozitivna za $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a negativna za $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Tangensna funkcija raste na intervalu $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Ne postoje maksimum i minimum funkcije tangens.

Kotangensna funkcija



- Funkcija kotangens je definisana je za svako $x \neq k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, tj. domen je $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
- Kodomen funkcije kotangens je skup realnih brojeva.
- Funkcija kotangens je periodična sa periodom π.
- $\cot(-x) = -\cot x$, tj. kotangens je neparna funkcija.
- Kotangensna funkcija ima vertikalne asimptote $x = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Nule funkcije kotangens su $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Funkcija kotangens je pozitivna za $x \in \left(k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, a negativna za $x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+2)\frac{\pi}{2}\right)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Kotangensna funkcija opada na intervalu $x \in (0 + k\pi, k\pi)$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
- Ne postoje maksimum i minimum funkcije kotangens.

3.1.5 Osnovni trigonometrijski identiteti

Sinusna i kosinusna teorema

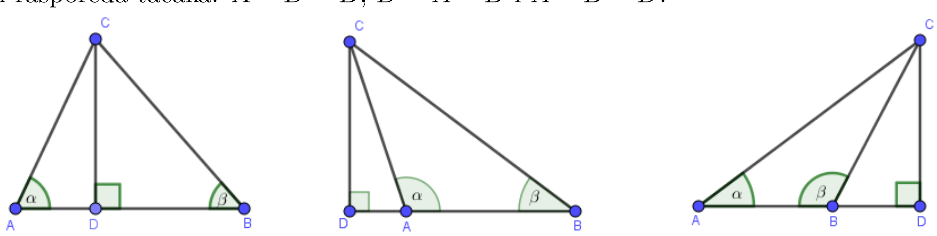
Teorema 1 (Sinusna i kosinusna)**.** *Neka je ABC proizvoljan trougao. Označimo sa a, b, c dužine njegovih stranica, a sa α, β, γ njima odgovarajuće uglove trougla. Tada važi:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} (\textit{sinusna teorema})$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 = &\quad b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = &\quad a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = &\quad a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}\right\} (\textit{kosinusna teorema})$$

$$\left.\begin{aligned} a = &\quad b\cos\gamma + c\cos\beta \\ b = &\quad a\cos\gamma + c\cos\alpha \\ c = &\quad a\cos\beta + b\cos\alpha \end{aligned}\right\} (\textit{teorema o projekcijama})$$

Dokaz. Označimo sa D normalnu projekciju tačke C na pravu AB. Moguća su tri rasporeda tačaka: $A - D - B$, $D - A - B$ i $A - B - D$.



Iz pravouglog trougla ACD i BCD imamo u prvom slučaju:

$$\frac{CD}{AC} = \sin\alpha, \quad \frac{AD}{AC} = \cos\alpha, \quad \frac{CD}{BC} = \sin\beta, \quad \frac{BD}{BC} = \cos\beta$$

pa je $CD = b\sin\alpha$ i $CD = a\sin\beta$, $AB = AD + DB$ odakle sledi da je:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}, \tag{1}$$

a takođe i

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta. \tag{2}$$

U drugom slučaju je:

$$\frac{CD}{AC} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \frac{AD}{AC} = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\frac{CD}{BC} = \sin\beta, \quad \frac{BD}{BC} = \cos\beta, \quad AB = BD - AD$$

odakle ponovo slede formule (1) i (2). Na sličan način se pokazuje i treći slučaj. Na ovaj način dokazani su delovi sinusne teoreme i teoreme o projekciji. Ostali delovi se dokazuju na sličan način.
Kosinusna teoreme je posledica teoreme o projekcijama.
$a = b\cos\gamma + c\cos\beta \quad / \cdot a$
$b = a\cos\gamma + c\cos\alpha \quad / \cdot (-b)$
$c = a\cos\beta + b\cos\alpha \quad / \cdot (-c)$

$a^2 - b^2 - c^2 = a(b\cos\gamma + c\cos\beta) - b(a\cos\gamma + c\cos\alpha) - c(a\cos\beta + b\cos\alpha) = -2bc\cos\alpha$

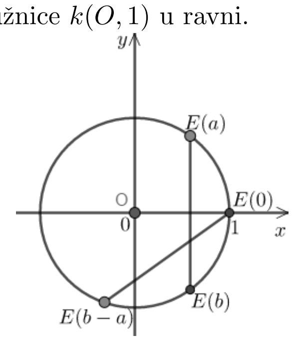
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
Analogno se dokazuju i ostale jednakosti. □

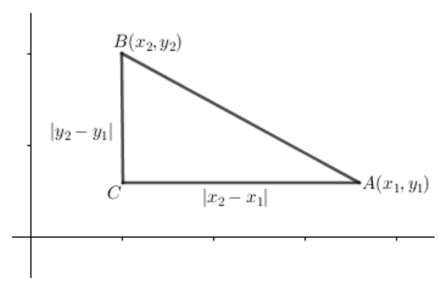
Adicione formule

Teorema 2 (Adiciona formula za kosinus)**.** *Za proizvoljne realne brojeve s i t, važi:*

$$\cos(s + t) = \cos s \cos t - \sin s \sin t.$$

Dokaz. Neka su a i b dva broja, takva da je: $0 \leq a \leq b < 2\pi$ i $E(t) = (\cos t, \sin t)$ realnom broju t pridružena odgovarajuća tačka trigonometrijske kružnice $k(O, 1)$ u ravni.





Tetive trigonometrijske kružnice $E(0)E(b-a)$ i $E(a)E(b)$ odgovaraju jednakim lukovima dužine $b - a$. Rastojanje tačaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ se izračunava po formuli:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

pa je stoga

$$(E(0)E(b - a))^2 = (\cos(b - a) - 1)^2 + (\sin(b - a) - 0)^2$$

i

$$(E(a)E(b))^2 = (\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2.$$

Izjednačavanjem i sređivanjem ovih izraza, dobijamo:

$$\cos(b - a) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \tag{3}$$

Zbog parnosti kosinusne funkcije, formula (3) važi i ako je $a > b$.
Neka su s i t proizvoljni realni brojevi, tako da je:
$s = 2k\pi + a, \quad t = 2l\pi + b, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in [0, 2\pi)$.
Tada je

$$\cos(t-s) = \cos(2(l-k)\pi+b-a) = \cos(b-a) = \cos a \cos b+\sin a \sin b = \cos s \cos t+\sin s \sin t.$$

Pošto je kosinusna funkcija parna, a sinusna neparna, onda važi:

$$\cos(s + t) = \cos(t - (-s)) = \cos t \cos(-s) + \sin t \sin(-s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s$$

čime je dokazana adiciona formula za kosinus. □

Teorema 3 (Adiciona formula za sinus). *Za proizvoljne realne brojeve s i t, važi:*

$$\sin(s + t) = \sin s \cos t + \cos s \sin t.$$

Dokaz. Koristeći teoremu 2, dobijamo:

$$\begin{aligned}
\sin(s + t) &= \cos\left(s + t - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\left(s - \frac{\pi}{2}\right) + t\right] \\
&= \cos\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \cos t - \sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \sin t \\
&= \sin s \cos t + \cos\left[(s - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}\right] \sin t \\
&= \sin s \cos t + \cos s \sin t.
\end{aligned}$$

□

Trigonometrijske funkcije dvostrukog argumenta

Teorema 4. *Za svaki realan broj t, važi:*

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t,$$

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Dokaz. Formule se izvode direktno iz adicionih formula. □

Trigonometrijske funkcije polovine argumenta

Teorema 5. *Za svaki realan broj t, važi:*

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{2},$$

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1 + \cos t}{2}.$$

Dokaz. $\dfrac{1 - \cos t}{2} = \dfrac{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} - (\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2})}{2} = \sin^2 \dfrac{t}{2}$

$\dfrac{1 + \cos t}{2} = \dfrac{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2} + (\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2})}{2} = \cos^2 \dfrac{t}{2}$ □

Transformacije proizvoda

Teorema 6. *Za proizvoljne realne brojeve x i y važi:*

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right];$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right];$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right].$$

Dokaz. Očigledno, primenom adicionih formula. □

Transformacije u proizvod

Teorema 7. *Za proizvoljne realne brojeve x i y važi:*

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Dokaz. Neka je $x = a + b$, $y = a - b$, to jest $a = \dfrac{x+y}{2}$ i $b = \dfrac{x-y}{2}$. Tada je $\cos x + \cos y = \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$. Slično se dokazuju i ostala tvrđenja. □

3.1.6 Inverzne trigonometrijske funkcije

Ako je $f : A \longrightarrow B$ proizvoljna funkcija, poznato je da ona neće uvek imati inverznu funkciju, tj. ne postoji uvek funkcija $g : B \longrightarrow A$, takva da za svako $x \in A$ važi $g(f(x)) = x$ i za svako $y \in B$ važi $f(g(y)) = y$. Da bi postojala inverzna funkcija, potrebno je da zadata funkcija f bude bijekcija. Trigonometrijske funkcije, posmatrane na svom prirodnom domenu, skupu realnih brojeva, nisu bijekcije, pa ni nemaju svoje inverzne funkcije. Da bismo dobili funkcije koje jesu bijekcije, te stoga imaju inverzne, moramo na pogodan način izabrati njihove domene i kodomene.

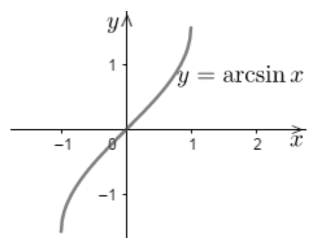
Funkcija arkus sinus

Funkcija sinus nema inverznu funkciju (nije bijekcija), jer na primer, svi brojevi oblika $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, preslikavaju se ovom funkcijom u broj 1.

Definicija 16. *Posmatrajmo restrikciju funkcije sinus na* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$*, tj. funkciju* $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$*,* $f_1(x) = \sin x$*. Funkcija* $f_1(x)$ *je bijekcija, pa postoji njena inverzna funkcija* $f_1^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *koja se naziva **arkus sinus** i označava se sa* $F(x) = \arcsin x$*.*

Osnovna svojstva funkcije arkus sinus, $x \in [-1,1]$ su:

- Domen funkcije arkus sinus je interval $[-1,1]$.
- Kodomen funkcije arkus sinus je interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- Nula funkcije arkus sinus je $x = 0$.
- Važi: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$, za sve $x \in [-1,1]$, dakle, funkcija arkus sinus je neparna.



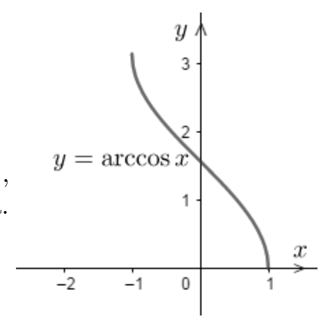
- Funkcija arkus sinus je pozitivna za $x \in (0,1]$ i negativna za $x \in [-1,0)$.
- Arkus sinus je monotono rastuća funkcija.

Funkcija arkus kosinus

Definicija 17. *Funkcija* $g_1 : [0,\pi] \to [-1;1]$*,* $g_1(x) = \cos x$*, za* $x \in [0,\pi]$ *je bijekcija, pa postoji njena inverzna funkcija* $G : [-1,1] \to [0,\pi]$*,* $G(x) = \arccos x$*, za svako* $x \in [-1,1]$ *koja se naziva **arkus kosinus**.*

Osnovna svojstva funkcije arkus kosinus, $x \in [-1,1]$ su:

- Domen funkcije arkus kosinus je interval $[-1,1]$.
- Kodomen funkcije arkus kosinus je interval $[0,\pi]$.
- Nula funkcije arkus kosinus je $x = 1$.
- Važi: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$, za sve $x \in [-1,1]$, dakle, funkcija arkus kosinus nije ni parna ni neparna.
- Funkcija arkus kosinus je pozitivna za $x \in [-1,1)$.
- Arkus kosinus je monotono opadajuća funkcija.

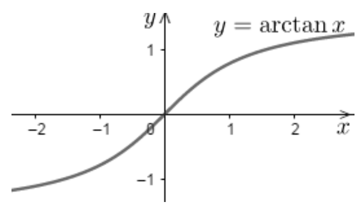


Funkcija arkus tangens

Definicija 18. *Funkcija* $h_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $h_1(x) = \tan x$, *za sve* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *je bijekcija, pa postoji njena inverzna funckija* $H : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *važi* $H(x) = \arctan x$, *za sve* $x \in \mathbb{R}$, *koja se naziva* ***arkus tangens***.

Osnovna svojstva funkcije arkus tangens, $x \in \mathbb{R}$ su:

- Domen funkcije arkus tangens je skup realnih brojeva.
- Kodomen funkcije arkus tangens je interval $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- Nula funkcije arkus tangens je $x = 0$.



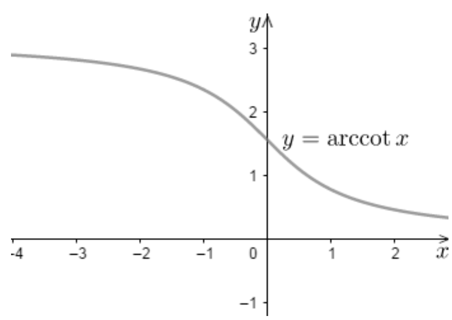
- Važi: $\arctan(-x) = -\arctan x$, za sve $x \in \mathbb{R}$, dakle, funkcija arkus tangens je neparna.
- Funkcija arkus tangens je pozitivna za $x > 0$, a negativna za $x < 0$.
- Arkus tangens je monotono rastuća funkcija.

Funkcija arkus kotangens

Definicija 19. *Funkcija* $k_1 : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $k_1(x) = \cot x$, *za svako* $x \in (0, \pi)$, *ima svoju inverznu funkciju* $K(x) = \text{arccot } x$, $K : \mathbb{R} \to [0, \pi]$, *koja se naziva* ***arkus kotangens***.

Osnovna svojstva funkcije arkus kotangens, $x \in \mathbb{R}$ su:

- Domen funkcije arkus kotangens je skup realnih brojeva.
- Kodomen funkcije arkus kotangens je interval $(0, \pi)$.
- Nula funkcije arkus kotangens ne postoji.



- Važi: $\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot } x$, za sve $x \in \mathbb{R}$, dakle, funkcija arkus kotangens nije ni parna ni neparna.
- Funkcija arkus kotangens je pozitivna za svako x.
- Arkus kotangens je monotono opadajuća funkcija.

3.2 Stepena, eksponencijalna i logaritamska funkcija

3.2.1 Stepena funkcija

Stepenu funkciju ćemo razmotriti zavisno iz kog skupa je izložilac. Stoga, razlikujemo tri slučaja:

1. $n \in \mathbb{N}$;
2. $n \in \mathbb{Z}$;
3. $n \in \mathbb{Q}$.

Stepen čiji je izložilac prirodan broj

Definicija 20. *Neka je a realan broj. Tada je:*

1° $a^1 = a$;

2° *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *je* $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

Teorema 8. *Neka su a i b realni, a m i n prirodni brojevi. Tada je:*

1° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2° $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, *za* $m > n$, $a \neq 0$;

3° $(a^m)^n = a^{mn}$;

4° $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$;

5° $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$, $b \neq 0$;

6° $1^m = 1$, $0^m = 0$.

Dokaz. Dokazaćemo svojsta 1° i 2°, a ostala se jednostavno izvode.

1° $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m \text{ puta}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ puta}} = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{m+n \text{ puta}} = a^{m+n}$;

2° Kako je $m > n$, neka je onda $m = n + k$, za $k \in \mathbb{N}$, tada važi:
$\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^{n+k}}{a^n} = \dfrac{a^n \cdot a^k}{a^n} = a^k = a^{m-n}$.

□

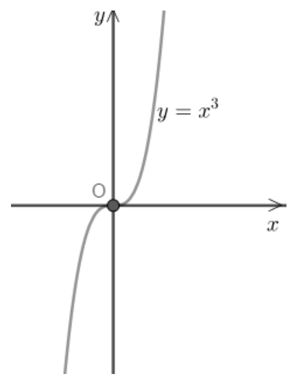
Definicija 21. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, gde je n prirodan broj, naziva se stepena funkcija sa eksponentom n.*

Funkcija $y = x$ je neprekidna, pa je onda i funkcija $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ neprekidna kao proizvod neprekidnih funkcija.

Da bismo preciznije odredili osobine stepene funkcije sa prirodnim izložiocem, posebno ćemo razmatrati funkciju $f(x) = x^{2n-1}$ i funkciju $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

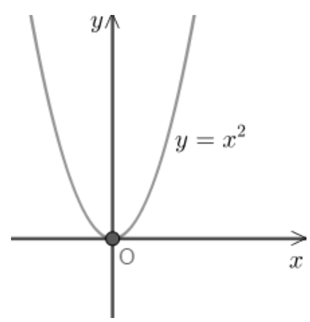
Najpre posmatramo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Domen funkcije f je skup realnih brojeva, to jest funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x.
- Za $x > 0$, $f(x) \in \mathbb{R}^+$. Ako je $x < 0$, $f(x) \in \mathbb{R}^-$.
- Funkcija f je neparna;
  $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$.
- Funkcija $f(x) = 0$ ako i samo ako $x = 0$.
- Funkcija f je strogo rastuća.



Sada, posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- Funkcija f je definisana za sve realne vrednosti x, odnosno, domen funkcije f je skup realnih brojeva.
- Kodomen funkcije f je skup $[0, +\infty)$.
- Funkcija f je parna;
  $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$.
- $f(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$.
- Funkcija f je rastuća na $(0, +\infty)$ i opadajua na $(-\infty, 0)$.



Upoređivanjem navedenih svojstava uočava se da se ona razlikuju samo u zavisnosti da li je $n \in \mathbb{N}$ parno ili neparno. Objedinjavanjem tih svojstava možemo utvrditi svojstva funkcije $y = x^n$ i osobine njenog grafika za ma koji prirodni broj n.

- Funkcija $f(x) = x^n$ je definisana za sve realne vrednosti x, odnosno, domen funkcije f je skup realnih brojeva.
- Skup vrednosti funkcije $f(x) = x^n$ za neparno n jeste skup realnih brojeva, a skup vrednosti funkcije f za parno n jeste skup nenegativnih realnih brojeva.
- Ako je $x \neq 0$ i n neparan broj, onda $f(x) = x^n$ za pozitivno x ima pozitivne vrednosti, a za negativno x ima negativne vrednosti. Zato grafik funkcije $f(x) = x^n$ za neparno n pripada prvom i trećem kvadrantu. Ako je $x \neq 0$

i n paran broj, onda je $f(x) = x^n > 0$. Zato grafik funkcije $f(x) = x^n$ za parno n pripada prvom i drugom kvadrantu.

- Važi $x^n = 0$ ako i samo ako je $x = 0$. Zato grafiku funkcije $f(x) = x^n$ pripada koordinatni početak; odnosno broj 0 je nula funkcije.

- Ako je n neparan prirodan broj, funkcija $f(x) = x^n$ je neparna. Prema tome, grafik funkcije $f(x) = x^n$ za neparno n ima centar simetrije, i to koordinatni početak.
  Ako je n paran prirodan broj, funkcija $f(x) = x^n$ je parna. Prema tome, grafik funkcije $f(x) = x^n$ za parno n ima osu simetrije, i to y-osu.

- Za neparno $n \in \mathbb{N}$ funkcija $f(x) = x^n$ je rastuća.
  Za parno n funkcija $f(x) = x^n$ opada na skupu negativnih brojeva $\mathbb{R}^-$ i raste na skupu pozitivnih brojeva $\mathbb{R}^+$.

Stepen čiji je izložilac ceo broj

Ako pogledamo drugu osobinu teoreme 8, nemamo nikakvih problema da izračunamo stepen broja a, jer je $m - n > 0$. U slučajevima kada je $m \leq n$, dolazimo do toga da izložilac nije pozitivan broj. Razmotrimo najpre slučaj kada je $m = n$. Tada je:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{4}$$

a zbog $\frac{a^m}{a^m} = 1$, znači da mora da bude

$$a^0 = 1, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ako zamenimo $m = 0$ u jednačini 4, za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dobijamo:

$$\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}.$$

Definicija 22. *Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a^0 = 1$.*

Definicija 23. *Za $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ uvodi se $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.*

Teorema 9. *Za svako $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i svako $m, n \in \mathbb{Z}$ važi:*

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,

2. $(a^n)^m = a^{mn}$,

3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$.

Dokaz. Razlikujemo slučajeve:

- $m, n > 0$

- $m, n < 0$
- $m > 0$ i $n = 0$
- $m < 0$ i $n = 0$
- $m = n = 0$
- $m = 0$ i $n > 0$
- $m = 0$ i $n < 0$
- $m < 0$ i $n > 0$
- $m > 0$ i $n < 0$

Prvi slučaj je sadržan u teoremi 8. Dokažimo slučaj $m > 0$, $n < 0$.
Kako je $m > 0$ i $m \in \mathbb{Z}$, to je $m \in \mathbb{N}$. Pošto je $n < 0$ i $n \in \mathbb{Z}$, onda je $n \in \mathbb{Z}^-$, pa se n može predstaviti kao $n = -k$, $k \in \mathbb{N}$.
Određenosti radi, pretpostavimo da je $m > k$.
$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-k} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^k} = \dfrac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}$
$(a^n)^m = (a^{-k})^m = \left(\dfrac{1}{a^k}\right)^m = \dfrac{1}{(a^k)^m} = \dfrac{1}{a^{km}} = a^{-km} = a^{(-k)m} = a^{mn}$
$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{-k} = \dfrac{1}{(a \cdot b)^k} = \dfrac{1}{a^k} \cdot \dfrac{1}{b^k} = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^n \cdot b^n$.
Dokažimo prvu osobinu za slučaj $k > m$.
$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-k} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^k} = \dfrac{a^m}{a^k} = \dfrac{a^m}{a^m \cdot a^{k-m}} = \dfrac{1}{a^{k-m}} = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}$
Ostali slučajevi se jednostavno dokazuju primenom definicije i teoreme 8. □

Pojam $n-$tog korena

Definicija 24. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Nenegativno rešenje (koren) jednačine $x^n = a$ naziva se $n-$ti koren iz a.*

Kaže se da je $n-$ti koren iz nenegativnog broja a takav nenegativan broj x čiji je $n-$ti stepen jednak broju a.

Teorema 10. *Za dati pozitivan broj a i prirodan broj n, postoji jedinstven pozitivan broj x, takav da je $x^n = a$. Dakle,*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a > 0)(\exists! x > 0) x^n = a.$$

Dokaz. Označimo sa A skup $\{z \geqslant 0 \mid z^n \leqslant a\}$. Ovaj skup je neprazan i ograničen odozgo, pa na osnovu teoreme o supremumu postoji $x = \sup A$. Očigledno je $x > 0$. Potrebno je dokazati da je x traženi broj, to jest da je $x^n = a$.

Pretpostavimo da je $x^n < a$. Označimo $\epsilon = a - x^n > 0$. Za svako h, $0 < h \leqslant 1$, važi:

$$\begin{aligned}(x+h)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k = x^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^{k-1} \\ &\leqslant x^n + h \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = x^n + h[(1+x)^n - x^n]\end{aligned}$$

Izaberimo h takvo da je $h < \dfrac{\epsilon}{(1+x)^n - x^n}$. Tada je prema prethodnom,

$$(x+h)^n \leqslant x^n + \epsilon = a,$$

što znači da postoji element $x + h \in A$, koji je veći od x, što je u kontradikciji sa $x = \sup A$. Dakle, nije moguće $x^n < a$.

Slično se može pokazati da $x^n > a$ nije moguće, pa preostaje samo $x^n = a$, čime je dokazana egzistencionalnost. Lako se pokazuje i jedinstvenost broja x. Pretpostavimo da postoje dva broja x_1 i x_2, takvi da važi $x_1^n = a$ i $x_2^n = a$ i, na primer, bez gubljenja opštosti, pretpostavimo $x_1 < x_2$. Tada bi bilo $a = x_1^n < x_2^n = a$, što je nemoguće. □

Broj x iz prethodne teoreme nazivamo $n-$**ti koren** broja a. Očigledno, operacija korenovanja predstavlja stepenovanje racionalnim izložiocem.

Stepen čiji je izložilac racionalan broj

Definicija 25. *Neka je a pozitivan realan broj i $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, tako da je $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Stepen broja a čiji je izložilac racionalan broj $\dfrac{m}{n}$ definiše se kao $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.*

Ako je $a = 0$, a $\dfrac{m}{n} > 0$, onda je $a^{\frac{m}{n}} = 0$; ako je $m = 1$ onda je $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Teorema 11. *Za svako $a, b \in \mathbb{R}^+$ i svako $p, r \in \mathbb{Q}$ važi:*

- $a^p \cdot a^r = a^{p+r}$;
- $(a^p)^r = a^{pr}$;
- $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$.

Dokaz. Neka je $p = \dfrac{m}{n}$ i $r = \dfrac{k}{l}$, pri čemu su $m, k \in \mathbb{Z}$ i $n, l \in \mathbb{N}$.

- Uvedimo oznake: $x = a^p = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ i $y = a^r = a^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{a^k}$. Očigledno, $x^n = a^m$ i $y^l = a^k$. Stepenovanjem prve jednakosti sa l, a druge sa n, dobijamo $x^{nl} = a^{ml}$ i $y^{nl} = a^{nk}$. Množenjem dobijenih jednakosti, dobija se $x^{nl} \cdot y^{nl} = a^{ml} \cdot a^{nk}$. Pošto su i izložioci celi brojevi, to primenom teoreme 9 važi: $(x \cdot y)^{nl} = a^{ml+nk}$, odnosno

$$a^p \cdot a^r = x \cdot y = \sqrt[nl]{a^{ml+nk}} = a^{\frac{ml+nk}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} = a^{p+r}.$$

- $(a^p)^r = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{k}{l}} = \sqrt[l]{(\sqrt[n]{a^m})^k}$. Stepenujmo ovu jednakost sa ln.

  $$[(a^p)^r]^{ln} = \left[\sqrt[l]{(\sqrt[n]{a^m})^k}\right]^{ln} = \left[(\sqrt[l]{(\sqrt[n]{a^m})^k})^l\right]^n = \left[(\sqrt[n]{a^m})^k\right]^n = \left(\sqrt[n]{a^{mk}}\right)^n = a^{mk}.$$

  Takođe, $a^{pr} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}} = \sqrt[ln]{a^{mk}}$, odakle sledi da je $(a^{pr})^{ln} = a^{mk}$. Jasno, sledi tražena jednakost: $(a^p)^r = a^{pr}$.

- $(a\cdot b)^p = (a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(a\cdot b)^m} = \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} = \sqrt[n]{a^m}\cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}} = a^p \cdot b^p$

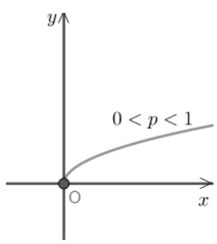
$\square$

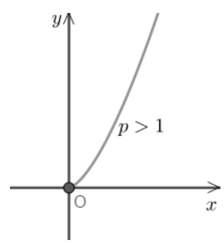
Posmatrajmo funkciju $f(x) = x^p$, gde je $p = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $(m, n) = 1$.

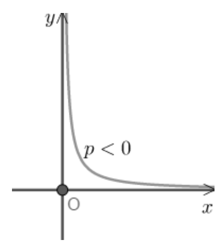
1° Neka je n paran broj. Oblast definisanosti funkcije $y = \sqrt[n]{x^m}$ je:

1.1° $[0, \infty)$, ako je $m > 0$;
1.2° $(0, \infty)$, ako je $m < 0$.

Funkcija nije ni parna ni neparna.



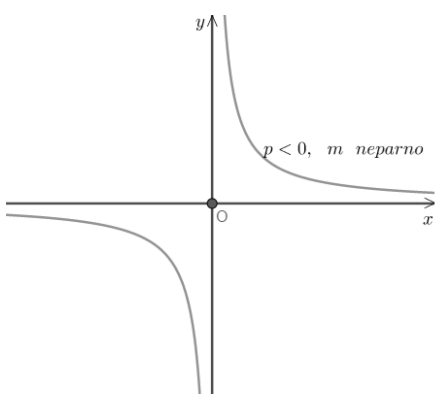


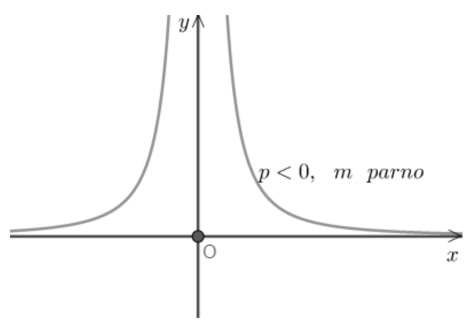


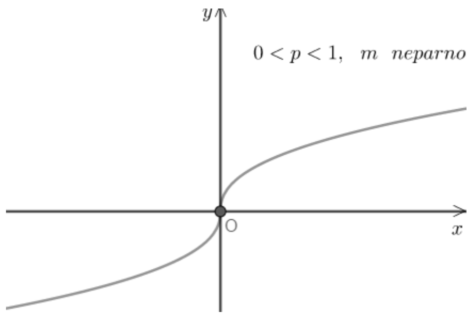
2° Neka je n neparan broj. Oblast definisanosti funkcije $y = \sqrt[n]{x^m}$ je:

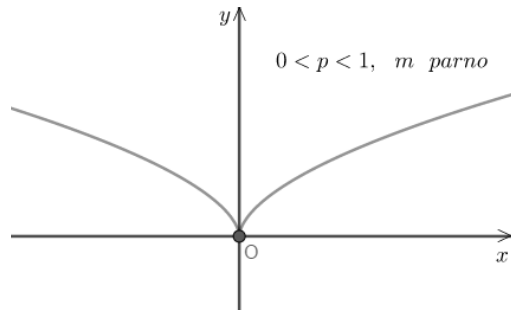
2.1° $\mathbb{R}$, ako je m pozitivan broj;
2.2° $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ako je $m < 0$

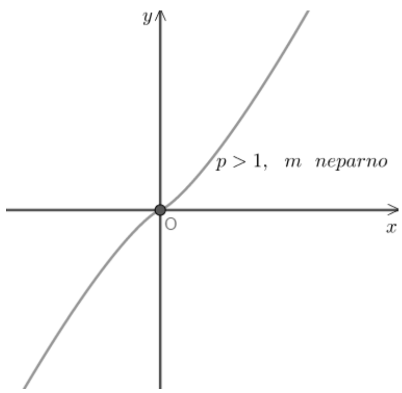
Funkcija je parna ako je m parno i neparna ako je m neparno. U zavisnosti od toga da li je $p > 1$, $0 < p < 1$, $p < 0$, kao i od toga da li je m paran ili neparan broj, postoji šest raznih tipova grafika.

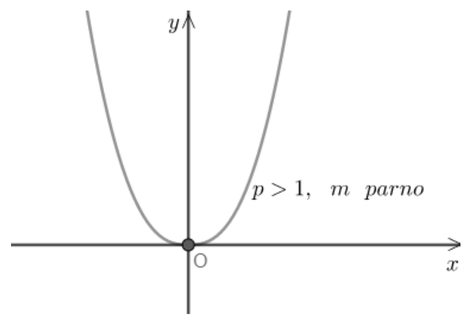












Stepen čiji je izložilac realan broj

Nameće se pitanje da li je moguće definisati funkciju $f(x) = x^a$, za $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Kasnije ćemo definisati šta podrazumevamo pod x^a, ako je x proizvoljan realan broj, pri čemu funkcija a^x mora da zadrži osnovna svojstva stepenovanja. Najpre, razmotrimo eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.

3.2.2 Eksponencijalna funkcija

Teorema 12. *Za $a > 1$, funkcija $f(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$ je monotono rastuća.*

Dokaz. Neka su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Pretpostavimo, bez gubljenja opštosti, da je $r_1 < r_2$. Potrebno je dokazati da je $a^{r_1} < a^{r_2}$.
Neka je: $r_1 = \dfrac{m}{n} = \dfrac{m \cdot l}{n \cdot l}, \qquad r_2 = \dfrac{k}{l} = \dfrac{k \cdot n}{l \cdot n}, \qquad m, k \in \mathbb{Z}, \quad n, l \in \mathbb{N}.$
Iz pretpostavke $r_1 < r_2$, možemo zaključiti da je $m \cdot l < k \cdot n$. Pošto su $m \cdot l$, $k \cdot n \in \mathbb{Z}$ i funkcija a^k, $k \in \mathbb{Z}$ monotono rastuća za $a > 1$, možemo zaključiti da je $a^{m \cdot l} < a^{k \cdot n}$, to jest $\sqrt[nl]{a^{m \cdot l}} < \sqrt[nl]{a^{k \cdot n}}$ ako i samo ako $a^{r_1} < a^{r_2}$. $\square$

Stav 2. *Ako je $a > 1$, onda za svako $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za svako $r \in \mathbb{Q}$ takvo da je $-\delta < r < \delta$ važi $1 - \epsilon < a^r < 1 + \epsilon$.*

Dokaz. Kako je $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ i $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$, za svako $\epsilon > 0$, postoji n, $n \in \mathbb{N}$, takav da je: $1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon$ i $1 - \epsilon < a^{-\frac{1}{n}} < 1$, za $a > 1$. Odavde sledi,

$1-\epsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} < 1+\epsilon$. Neka je r proizvoljan racionalan broj takav da je: $-\dfrac{1}{n} < r < \dfrac{1}{n}$. Kako je funkcija a^r, $r \in \mathbb{Q}$ monotono rastuća za $a > 1$, onda je $a^{-\frac{1}{n}} < a^r < a^{\frac{1}{n}}$. Dakle, za sve $\epsilon > 0$, postoji $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$, tako da za svako $r \in \mathbb{Q}$, takvo da je $-\delta < r < \delta$, važi nejednakost:

$$1-\epsilon < a^{-\frac{1}{n}} < a^r < a^{\frac{1}{n}} < 1+\epsilon,$$

to jest, $1-\epsilon < a^r < 1+\epsilon$. □

Stav 3. *Ako niz $\{r_n\}$ racionalnih brojeva konvergira, onda niz $\{a^{r_n}\}$, za $a > 1$ takođe konvergira.*

Dokaz. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r$, $r \in \mathbb{Q}$.
Za dato $\epsilon > 0$ izaberimo δ tako da je:$-\delta < s < \delta$ onda je $1 - \dfrac{\epsilon}{a^r} < a^s < 1 + \dfrac{\epsilon}{a^r}$. Postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je $|r_n - r| < \delta$ i još važi $1 - \dfrac{\epsilon}{a^r} < a^{r_n - r} < 1 + \dfrac{\epsilon}{a^r}$, odnosno $a^r\left(1 - \dfrac{\epsilon}{a^r}\right) < a^{r_n} < a^r\left(1 + \dfrac{\epsilon}{a^r}\right)$, to jest

$$a^r - \epsilon < a^{r_n} < a^r + \epsilon.$$

□

Dalje, neka je x proizvoljan realan broj i $a > 1$. Posmatrajmo skupove $A = \{a^r | \mathbb{Q} \ni r < x\}$ i $B = \{a^r | \mathbb{Q} \ni r > x\}$. Na osnovu teoreme 12 lako zaključujemo da je skup A ograničen odozgo, a skup B ograničen odozdo. Zato postoje konačni $s = \sup A$ i $i = \inf B$ i očigledno je $s \leqslant i$. Potrebno je dokazati da je zapravo $s = i$.
Za $r_1 < x < r_2$ je $a^{r_1} < a^x < a^{r_2}$, odakle sledi

$$0 \leqslant i - s \leqslant a^{r_2} - a^{r_1} = a^{r_1}(a^{r_2 - r_1} - 1) \leqslant s(a^{r_2 - r_1} - 1).$$

Na osnovu stava 3, za proizvoljno $\epsilon > 0$ može se naći $\delta > 0$ tako da je $0 < r_2 - r_1 < \delta$ onda je $a^{r_2 - r_1} - 1 < \dfrac{\epsilon}{s}$. Za takve $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ važi $0 \leqslant i - s < \epsilon$. Pošto je $\epsilon > 0$ proizvoljno, odatle sledi da je $s = i$.

Definicija 26. *Za $x \in \mathbb{R}$ i $a > 0$ definiše se: $a^x = s = i$.*

Definicija 27. *Za $x \in \mathbb{R}$ i $a > 0$ i $a \neq 1$, funkcija $f : x \mapsto a^x$ zove se* ***eksponencijalna funkcija*** *sa osnovom a.*

Stav 4. *Za $a > 1$ i realan pozitivan broj y postoji prirodan broj n , takav da je $a^{-n} < y < a^n$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da ne postoji $n \in \mathbb{N}$, $y < a^n$. To znači da je $a^n \leqslant y$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je skup $A = \{a^n, n \in \mathbb{N}\}$ ograničen odozgo i postoji $\sup A = c$. Kako je $a > 1$, to je $c : a < c$, što pokazuje da broj $c : a$ ne može biti majoranta skupa A. Dakle, postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je $a^{n_0} > c : a$. Onda je $a^{n_0 + 1} > c$, što je kontradikcija sa $c = \sup A$. Dakle, mora postojati broj $n \in \mathbb{N}$ za koji je $y < a^n$. Očigledno je da on zadovoljava $a^{-n} < y < a^n$. □

Osnovna svojstva eksponencijalne funkcije

Stav 5. *Neka je* $a > 1$. *Tada:*

1^o *ako je* $x \in \mathbb{R}$ *onda je* $\lim\limits_{\mathbb{Q} \ni r \to x} a^x = a^r$;

2^o *funkcija* a^x *je strogo rastuća, tj.* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *i* $x_1 < x_2$ *onda je* $a^{x_1} < a^{x_2}$;

3^o *Eksponencijalna funkcija zadržava osnovna svojstva stepenovanja: ako je* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *onda je:*

- $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$,
- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$,
- $a^{x_1} \cdot b^{x_1} = (a \cdot b)^{x_1}$;

4^o $\lim\limits_{\mathbb{R} \ni x \to x_0} a^x = a^{x_0}$ *za* $x_0 \in \mathbb{R}$;

5^o *Domen funkcije* a^x *je ceo skup realnih brojeva, a kodomen je skup* $\mathbb{R}^+$, *to jest* $x \mapsto a^x$ *je funkcija koja slika* $\mathbb{R}$ *na* $(0, +\infty)$.

Dokaz. 1° Na osnovu pokazanog, za dato $\epsilon > 0$ mogu se naći $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, takvi da je $r_1 < x < r_2$ i

$$s - \epsilon < a^{r_1} < a^{r_1} \leqslant s = a^x = i \leqslant a^{r_2} < i + \epsilon.$$

Kako $r_1 < r < r_2$ povlači $a^{r_1} < a^r < a^{r_2}$ zbog teoreme 12, za sve brojeve $r \in \mathbb{Q}$, onda je

$$a^x - \epsilon < a^r < a^x + \epsilon \quad \text{za sve} \quad r \in (r_1, r_2)$$

2° Neka su r_1 i r_2 racionalni brojevi, takvi da važi: $x_1 < r_1 < r_2 < x_2$. Tada zbog teoreme 12 sledi $a^{x_1} \leqslant a^{r_1} < a^{r_2} \leqslant a^{x_2}$.

3° Neka su $\{r_n\}$ i $\{p_n\}$ dva niza racionalnih brojeva koji konvergiraju ka x_1, odnosno x_2. Na osnovu stava 3 je $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = a^{x_1}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a^{p_n} = a^{x_2}$, odakle sledi da je:

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} a^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot a^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+p_n} = a^{x_1+x_2}$$

jer $\mathbb{Q} \ni r_n + p_n \mapsto x_1 + x_2 (n \to \infty)$;
Slično je i

$$(a^{x_1})^{x_2} = \lim_{n\to\infty} (\lim_{n\to\infty} a^{r_n})^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_1 p_n} = a^{x_1 x_2};$$

$$a^{x_1} \cdot b^{x_1} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (a \cdot b)^{r_n} = (a \cdot b)^{x_1}.$$

4° Neka je $x \longrightarrow x_0$, $x \in \mathbb{R}$.
Za dato $\epsilon > 0$ izaberimo δ tako da je:

$$-\delta < s < \delta \Longrightarrow 1 - \frac{\epsilon}{a^{x_0}} < a^s < 1 + \frac{\epsilon}{a^{x_0}}.$$

Tada za $|x - x_0| < \delta$ još važi $1 - \dfrac{\epsilon}{a^{x_0}} < a^{x-x_0} < 1 + \dfrac{\epsilon}{a^{x_0}}$, odnosno $a^{x_0}(1 - \dfrac{\epsilon}{a^{x_0}}) < a^x < a^{x_0}(1 + \dfrac{\epsilon}{a^{x_0}})$ zbog osobine 2°, to jest

$$a^{x_0} - \epsilon < a^x < a^{x_0} + \epsilon.$$

5° Očigledno je $a^x > 0$ za svaki realan broj x. Neka je y proizvoljan pozitivan realan broj. Potrebno je dokazati da postoji realan broj x, takav da je on rešenje jednačine $a^x = y$.
Na osnovu stava 4 poznato je da postoji prirodan broj n takav da je:

$$a^{-n} < y < a^n.$$

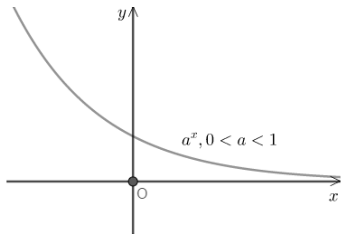
Uočimo skupove $A = \{x \in \mathbb{R} | a^x < y\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} | a^x > y\}$, koji su, očigledno, neprazni. Na osnovu osobine 2°, sledi da je $x_1 < x_2$ za sve $x_1 \in A$ i $x_2 \in B$. Na osnovu aksioma neprekidnosti realnih brojeva, postoji $x \in \mathbb{R}$, tako da je $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Želimo da dokažemo da je $a^x = y$. Pretpostavimo suprotno: $a^x \neq y$. Neka je, bez gubljenja opštosti, $a^x < y$. Na osnovu svojstva 4° je $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x+\frac{1}{n}} = a^x$, pa je za dovoljno veliko n, $a^{x+\frac{1}{n}} < y$, to jest $x + \dfrac{1}{n} \in A$, što je kontradikcija sa izborom broja x.
Slično se pokazuje da $a^x > y$ nije moguće.
Dakle, $a^x = y$.

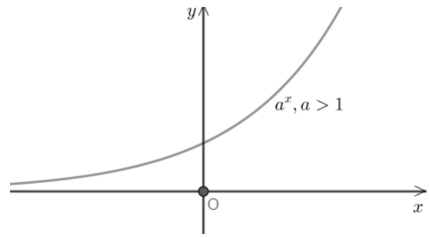
$\square$

Ako je $0 < a < 1$, važe slična svojstva kao iz prethodnog stava, uz očigledne izmene. Svojstvo 2° se zamenjuje ako su x_1,$x_2 \in \mathbb{R}$ i $x_1 < x_2$ onda je $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Dakle, da sumiramo:

- Domen eksponencijalne funkcije je ceo skup realnih brojeva $\mathbb{R}$;
- Kodomen funkcije je skup svih pozitivnih realnih brojeva, tj. $\mathbb{R}^+$;
- Stepen a^x nije nula ni za jedno x, tj. jednačina $a^x = 0$ nema rešenja, što znači da eksponencijalna funkcija nema nula;
- Monotonost eksponencijalne funkcije:
  - Za $a > 1$, funkcija je strogo rastuća;
  - Za $0 < a < 1$, funkcija je strogo opadajuća.





Prirodna eksponencijalna funkcija Eksponencijalna funkcija čija je osnova $a = e$[1], tj. $f(x) = e^x$, zove se prirodna eksponencijalna funkcija. Približna vrednost broja e je $e \approx 2.718281828...$ Ova funkcija se naziva prirodnom jer se rast u prirodi često ravna sa eksponencijalnom funkcijom koja ima bazu e.

3.2.3 Logaritamska funkcija

Definicija 28. *Inverzna funkcija $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ funkcije $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ zadate sa $f(x) = a^x$, pri čemu je $a > 0$ i $a \neq 1$, naziva se* ***logaritamska funkcija*** *sa osnovom a.*

$$x = \log_a y \text{ ako i samo ako je } y = a^x$$

Neposredno iz definicije sledi da je $\log_a a^x = x$ za sve realne brojeve x i $a^{\log_a y} = y$ za sve pozitivne brojeve y.

Stav 6. *Neka je $a, b, c > 0$, $a, b, c \neq 1$, y_0, y_1, $y_2 > 0$. Tada:*

1^o $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$;

2^o
- $\log_a(y_1 y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$
- $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n} \log_a b$
- $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

3^o *za $a > 1$ važi: $y_1 < y_2$ ako i samo ako $\log_a y_1 < \log_a y_2$;*
za $0 < a < 1$ važi: $y_1 < y_2$ ako i samo ako $\log_a y_1 > \log_a y_2$;

4^o *funkcija $f(x) = \log_a x$ slika $(0, +\infty)$ na $\mathbb{R}$;*

5^o $\lim\limits_{y \to y_0} \log_a y = \log_a y_0$.

[1]Broj e je poznat kao Ojlerov broj ili Neperova konstanta.

Dokaz. Osobine 1°, 2°, 3° i 4° slede neposredno iz definicije, jer je logaritamska funkcija inverzna funkcija eksponencijalne funkcije.

5° Na osnovu osobine 2° je $\log_a y - \log_a y_0 = \log_a \dfrac{y}{y_0}$. Zato su nejednakosti $-\epsilon < \log_a y - \log_a y_0 < \epsilon$ ekvivalentne sa $\log_a a^{-\epsilon} < \log_a \dfrac{y}{y_0} < \log_a a^{\epsilon}$, odnosno

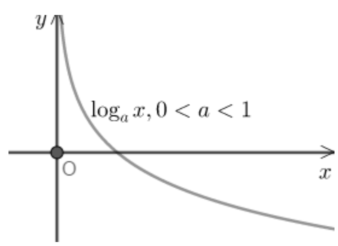
$$\begin{gathered} y_0 a^{-\epsilon} < y < y_0 a^{\epsilon} \text{ za } a > 1 \\ y_0 a^{\epsilon} < y < y_0 a^{-\epsilon} \text{ za } 0 < a < 1. \end{gathered}$$

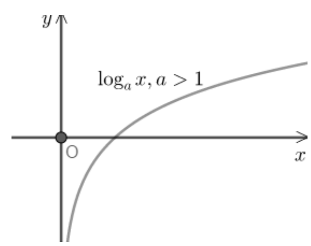
U oba slučaja, dobija se $\lim\limits_{y \to y_0} \log_a y = \log_a y_0$.

□

Da sumiramo, osnovna svojstva logaritamske funkcije su:

- Domen funkcije je skup svih pozitivnih realnih brojeva, tj. $\mathbb{R}^+$.
- Kodomen funkcije je skup svih realnih brojeva.
- Logaritamska funkcija ima nulu samo u tački $x = 1$.
- Za $0 < a < 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (0, 1)$ i negativna za $x \in (1, +\infty)$. Za $a > 1$ funkcija je pozitivna za $x \in (1, +\infty)$ i negativna za $x \in (0, 1)$.
- Za $0 < a < 1$, f je strogo opadajuća funkcija. Za $a > 1$, f je strogo rastuća funkcija.





Logaritme sa bazom $a = 10$ nazivamo dekadni logaritam, a umesto $\log_{10} x$ pišemo $\log x$. Ako je baza $a = e$, takav logaritam nazivamo prirodni ili Neperov[2] logaritam, a umesto $\log_e x$ pišemo $\ln x$.

Izraz a^x je sada definisan za sve $a > 0$ i $x \in \mathbb{R}$. Ako sada fiksiramo eksponent, a pustimo da se osnova menja, dolazimo do definicije stepene funkcije čiji je izložilac realan broj.

Definicija 29. *Neka je $a \in \mathbb{R}$ i $x \in (0, +\infty)$. Tada je $x^a = e^{a \ln x}$.*

Dakle, stepena funkcija sa realnim izložiocem može se definisati pomoću eksponencijalne i logaritamske funkcije.

[2] Neper je bio škotski matematičar koji je ostao upamćen po pronalasku logaritama.

3.3 Uvođenje elementarnih funkcija pomoću stepenih redova

Definicija 30. *Neka je a_1, a_2, ..., a_n, ... niz realnih brojeva. Izraz*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{5}$$

naziva se beskonačnim realnim redom sa opštim članom a_n, ili kraće realnim redom. Zbirovi

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1 + a_2,$$
$$.......$$
$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$
$$......................$$

nazivaju se parcijalnim zbirovima ili parcijalnim sumama reda (5).

Definicija 31. *Ako postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ niza $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ parcijalnih suma reda (5), onda se kaže da taj red konvergira i da je njegov zbir s. Piše se: $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*
Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$, kaže se da taj red divergira.

Dalje ćemo razmatrati redove oblika $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, koji se nazivaju stepeni redovi. Pretpostavljaćemo da su koeficijenti a_n, broj x_0, kao i promenljiva x, realni brojevi.

Suma beskonačnog stepenog reda, u intervalu konvergencije, je neka funkcija $f(x)$, ili drugim rečima on u intervalu konvergencije definiše neku funkciju $f(x)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)^1+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+... \tag{6}$$

Nameće se obrnut problem: mogu li se i kako pojedine elementarne funkcije (e^x, $\sin x$, $\ln x$,...) prikazati u obliku stepenog reda ili, drugim rečima, razviti u stepeni red oko neke tačke x_0. Dakle, kako za neku elementarnu funkciju $f(x)$ odrediti koeficijente a_n. Očigledno je $a_0 = f(x_0)$.
Ako diferenciramo obe strane (6), onda dobijamo:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + ... + na_n(x - x_0)^{n-1} + ...$$

Koeficijent a_1 dobijamo kao: $f'(x_0) = a_1$.
Koeficijent a_2 određujemo iz drugog izvoda:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + ... + n(n - 1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ...$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Sledeći koeficijent ćemo dobiti iz trećeg izvoda:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + ... + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3} + ...$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3} = \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Uopšte, koeficijent a_n dobijamo iz n-tog izvoda:

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_n + (n+1)n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + ...$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Tako se neka neprekidna funkcija $f(x)$, koja ima sve (neprekidne) izvode u tački x_0 može razviti u red,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

Definicija 32. *Neka funkcija f ima u tački $x = x_0$ konačan n-ti izvod $f^n(x)$ sa svaki prirodan broj n. Beskonačan red*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \tag{7}$$

zove se Tejlorov[3] *red koji odgovara funkciji f u tački x_0.*

U specijalnom slučaju razvoja oko tačke 0, red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} x^n \tag{8}$$

se naziva Maklorenov[4] red.

Taj red ne mora konvergirati za sve vrednosti promenljive x za koje je funkcija f definisana, a čak i kada konvergira, njegova suma ne mora biti jednaka vrednosti funkcije f.

Za funkciju f koja se može razviti u Tejlorov red u okolini tačke x_0, kaže se da je analitička u okolini tačke x_0. Da bi se za neku funkciju f reklo da je analitička, mora biti beskonačno diferencijabilna i $\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$, gde je $R_n(x)$ ostatak Tejlorovog reda. Ostatak reda je razlika njegovog zbira i parcijalnog zbira s_n prvih $(n+1)$ članova reda.

[3]Brook Taylor (1685-1731), engleski matematičar
[4]Colin Maclaurin (1698-1746), engleski matematičar

Lema 1. *Ako je realna funkcija f beskonačno diferencijabilna na segmentu $[x_0 - h, x_0 + h]$ i postoji konstanta M, takva da za svaki prirodan broj n i svako $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ važi $|f^{(n)}(x)| \leq M$, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za sve $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$.*

Dokaz. Lagranžev[5] oblik ostatka glasi:

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),$$

gde je $0 < \theta < 1$.
Koristeći Lagranžev oblik ostatka, dobijamo da je za svako $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ i neko θ, $0 < \theta < 1$ ispunjeno
$|R_n(x)| = \left| \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) \right| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$
ako $n \to \infty$. □

3.3.1 Razvoj sinusne funkcije

Posmatramo funkciju $f(x) = \sin x$. Najpre, odredimo nekoliko prvih izvoda te funkcije.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f''''(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Uopšteno, za n-ti izvod sinusne funkcije dobijamo:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(x) = \sin(x + \pi) = \sin(x + \pi + 2k\pi), & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(x) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi + 2k\pi), & n = 4k+4 \end{cases}$$

[5] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), italijanski matematičar

dalje je

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(x + (4k+1)\frac{\pi}{2}\right), & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(x) = \sin\left(x + \pi + 2k\pi\right) = \sin\left(x + (4k+2)\frac{\pi}{2}\right), & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(x) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \sin\left(x + (4k+3)\frac{\pi}{2}\right), & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(x) = \sin\left(x + 2\pi + 2k\pi\right) = \sin\left(x + (4k+4)\frac{\pi}{2}\right), & n = 4k+4 \end{cases}$$

Očigledno je:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Iz čega sledi:

$$|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1,$$

pa je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za sve realne brojeve x.
Da bismo funkciju $f(x) = \sin x$ razvili u Maklorenov red, potrebno je odrediti vrednost izvoda u tački $x = 0$.

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & 1, & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(0) = \sin(\pi) & = & 0, & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(0) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) & = & -1, & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(0) = \sin(2\pi) & = & 0, & n = 4k+4 \end{cases}$$

Dakle, Maklorenov red za funkciju $f(x) = \sin x$ glasi:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3.3.2 Razvoj kosinusne funkcije

Posmatramo funkciju $f(x) = \cos x$. Najpre, odredimo nekoliko prvih izvoda te funkcije.

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos(x + \pi)$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f''''(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Uopšteno, za n-ti izvod kosinusne funkcije dobijamo:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(x) = \cos(x+\pi) = \cos(x+\pi+2k\pi), & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(x) = \cos(x+2\pi) = \cos(x+2\pi+2k\pi), & n = 4k+4 \end{cases}$$

dalje je

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos\left(x + (4k+1)\dfrac{\pi}{2}\right), & n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(x) = \cos(x+\pi+2k\pi) = \cos\left(x + (4k+2)\dfrac{\pi}{2}\right), & n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) = \cos\left(x + (4k+3)\dfrac{\pi}{2}\right), & n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(x) = \cos(x+2\pi+2k\pi) = \cos\left(x + (4k+4)\dfrac{\pi}{2}\right), & n = 4k+4 \end{cases}$$

Očigledno je:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Iz čega sledi:

$$|f^{(n)}(x)| = \left|\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq 1,$$

pa je $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ za sve realne brojeve x.
Da bismo funkciju $f(x) = \cos x$ razvili u Maklorenov red, potrebno je odrediti vrednost izvoda u tački $x = 0$.

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} f^{(4k+1)}(0) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) & = \quad 0, \quad n = 4k+1 \\ f^{(4k+2)}(0) = \cos(\pi) & = \ -1, \quad n = 4k+2 \\ f^{(4k+3)}(0) = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) & = \quad 0, \quad n = 4k+3 \\ f^{(4k+4)}(0) = \cos(2\pi) & = \quad 1, \quad n = 4k+4 \end{cases}$$

Dakle, Maklorenov red za funkciju $f(x) = \cos x$ glasi:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3.3.3 Razvoj funkcije e^x

Za funkciju $f(x) = e^x$ važi: $f^{(n)}(x) = e^x$ za svaki prirodan broj n.
Takođe, za svaki realan broj h važi i da je $|f^{(n)}(x)| = |e^x| < e^{|h|}$, za $x \in [-h, h]$.

$f^{(n)}(0) = 1$ za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pa je Maklorenov red za funkciju $f(x) = e^x$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

3.3.4 Razvoj funkcije $f(x) = (1+x)^a$

Posmatrajmo ovu funkciju za $a \in \mathbb{R}$ i odredimo njene izvode. Dobijamo:

$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \quad \text{sledi} \quad f'(0) = a$$

$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \quad \text{sledi} \quad f''(0) = a(a-1)$$

$$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \quad \text{sledi} \quad f'''(0) = a(a-1)(a-2)$$

$$f''''(x) = a(a-1)(a-2)(a-3)(1+x)^{a-4} \quad \text{sledi} \quad f''''(0) = a(a-1)(a-2)(a-3)$$

Izraz $a_n = \dfrac{a(a-1)(a-2)(a-3)\cdot \ldots \cdot (a-n+1)}{n!}$ je binomni koeficijent. Usvojeno je da se i u slučaju kada $a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$, piše formula $\binom{a}{n}$. Dakle, Maklorenov red funkcije $f(x) = (1+x)^a$ za $|x| < 1$ je:

$$(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n.$$

3.3.5 Razvoj funkcije $f(x) = \ln(1+x)$

Data funkcija je definisana za $x > -1$. Odredimo izvode ove funkcije u tački $x = 0$.
$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, iz ěga sledi da je $f'(x)(1+x) = 1$, a prema Lajbnicovoj formuli za $n \geq 1$ je $f^{(n+1)}(x)(1+x) = -nf^{(n)}(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{sledi} \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} \quad \text{sledi} \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad \text{sledi} \quad f'''(0) = 2 = 2!$$

$$f''''(x) = \frac{-3\cdot 2}{(1+x)^4} \quad \text{sledi} \quad f''''(0) = -3\cdot 2 = -3!$$

....

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad \text{sledi} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Očigledno je koeficijent $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Sada, dobijemo da je Maklorenov red funkcije $f(x) = \ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

3.4 Uvođenje trigonometrijskih funkcija preko funkcionalnih jednačina

Teorema 13. *Postoji jedinstveni par funkcija S, $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje važi:*

1. $S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$
   $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$
2. $S^2(x) + C^2(y) = 1$
3. $S(0) = 0$
   $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
   $C(0) = 1$
   $C\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
4. *za* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *važi* $0 < S(x) < x$.

Dokaz. Potrebno je dokazati:

a) S i C su neprekidne funkcije;

b) S i C su jednoznačno određene na svakom skupu tačaka koji je gust u $\mathbb{R}$.

Pošto za $0 < x < \frac{\pi}{2}$ važi $0 < S(x) < x$, onda je $\lim\limits_{x \to +0} S(x) = 0$.
Neka je $y = -x$. Tada zamenom u $S(x+y) = S(x)C(y) + S(y)C(x)$, sledi:

$$0 = S(0) = S(x)C(-x) + S(-x)C(x) / \cdot S(x)$$
$$0 = S^2(x)C(-x) + S(x)S(-x)C(x).$$

Takođe, zamenom u $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$, dobija se:

$$1 = C(0) = C(x)C(-x) - S(x)S(-x) / \cdot C(x)$$

$$C(x) = C^2(x)C(-x) - S(x)S(-x)C(x).$$

Može se zaključiti:
$0+C(x)=S^2(x)C(-x)+S(x)S(-x)C(x)+C^2(x)C(-x)-S(x)S(-x)C(x)$, tj.

$$C(x)=C(-x)(S^2(x)+C^2(x)),\ \text{odnosno } C(x)=C(-x).$$

Dakle, funkcija C je parna. Slično se pokazuje da je funkcija S neparna, pa sledi $\lim\limits_{x\to -0} S(x)=0$, to jest funkcija S je neprekidna u 0.
Označimo $y=\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}$ i $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$. Zamenom u *1*, dobija se:
$S(y)=S\left(\frac{x+y}{2}+\frac{y-x}{2}\right)=S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{y-x}{2}\right)+C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{y-x}{2}\right)$
i
$S(x)=S\left(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\right)=S\left(\frac{x+y}{2}\right)C\left(\frac{x-y}{2}\right)+C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{x-y}{2}\right)$.
$S(y)-S(x)=2C\left(\frac{x+y}{2}\right)S\left(\frac{y-x}{2}\right)$
Neka $x_n\to x$, $n\to\infty$ i $y=x_n$.
Tada $S(x_n)-S(x)=2C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)S\left(\frac{x_n-x}{2}\right)\to 0$, za $n\to\infty$, jer $C\left(\frac{x+x_n}{2}\right)$ je ograničeno zbog svojstva *2*, a $\frac{x_n-x}{2}\to 0$ za $n\to\infty$.
Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n)=S(x)$, što znači da je funkcija S neprekidna.
Slično se pokazuje i za funkciju C.
$S(\pi)=S\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right)+S\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot 0+1\cdot 0=0$
$C(\pi)=C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=C\left(\frac{\pi}{2}\right)C\left(\frac{\pi}{2}\right)-S\left(\frac{\pi}{2}\right)S\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\cdot 0-1\cdot 1=-1$

$S(2\pi)=S(\pi+\pi)=S(\pi)C(\pi)+S(\pi)C(\pi)=0\cdot(-1)+0\cdot(-1)=0$

$C(2\pi)=C(\pi)C(\pi)-S(\pi)S(\pi)=(-1)\cdot(-1)+0\cdot 0=1$

$S(x+2\pi)=S(x)C(2\pi)+S(2\pi)C(x)=S(x)\cdot 1+C(x)\cdot 0=S(x)$

$C(x+2\pi)=C(x)C(2\pi)-S(x)S(2\pi)=C(x)\cdot 1-S(x)\cdot 0=C(x)$

Dakle, funkcije C i S su 2π periodične.
Kako za $0<x<\frac{\pi}{2}$ važi $0<S(x)<x$, onda je $S(x)>0$, za sve takve x. Pošto je funkcija S neparna, onda je $S(x)<0$ za $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$.
Neka je $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Označimo $x=\frac{\pi}{2}+y$, za $0<y<\frac{\pi}{2}$. Onda je $S(x)=S\left(\frac{\pi}{2}+y\right)=C(y)>0$. Slično se pokazuje za $C(x)$.
Zaključujemo: $S^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1-C(x)}{2}$ i $C^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1+C(x)}{2}$.
Dakle, funkcije S i C su jednoznačno određene u tačkama oblika $\frac{k\cdot\pi}{2^n}$, pri čemu

su k i n prirodni brojevi. Tačke $\frac{k \cdot \pi}{2^n}$ čine gust skup u intervalu $[0, 2\pi)$, a zbog periodičnosti funkcija S i C, sledi da su jednoznačno određene na $\mathbb{R}$. $\square$

Definicija 33. *Funkcije S i C iz prethodne teoreme se zovu sinus i kosinus i označavaju se* $\sin x$ *i* $\cos x$*.*

4 Elementarne funkcije kao kompleksne funkcije kompleksne promenljive

Definicija 34. *Imaginarna jedinica je broj čiji je kvadrat* -1 *i označava se sa* i*.*

Skup svih kompleksnih brojeva označen je sa $\mathbb{C}$, odnosno:

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\},$$

pri čemu je i imaginarna jedinica, odnosno $i^2 = -1$. Ako je $z = x + iy \in \mathbb{C}$, onda je $x = Re\ z$, realni deo kompleksnog broja z, a $y = Im\ z$ je imaginarni deo broja z.

Definicija 35. *Ako je* $z = x + iy$*,* $w = u + iv$*, pri čemu je* $x, y, u, v \in \mathbb{R}$*, onda su operacije sabiranja i množenja u skupu* $\mathbb{C}$ *definisane na sledeći način:*

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

$$z \cdot w = (x + iy) \cdot (u + iv) = (xuyv) + i(xv + yu).$$

Svaki kompleksan broj $z = x + iy$ je jedinstveno određen svojim realnim i imaginarnim delom. Prema tome, kompleksan broj z jeste uređen par, odnosno $z = (x, y)$. Skup $\mathbb{C}$ prikazan je kao ravan sa Dekartovim (pravouglim) koordinatnim sistemom, pri čemu horizontalna osa ($x-$osa) jeste realna osa, a vertikalna osa ($y-$osa) jeste imaginarna osa. Kompleksna ravan se naziva i Gausova ravan.

Svaka tačka z identifikovana je sa geometrijskim vektorom čiji se početak poklapa sa koordinatnim početkom, a kraj je tačka z. Ovaj vektor se naziva radijus vektor kompleksnog broja z. Sabiranje kompleksnih brojeva ekvivalentno je sabiranju odgovarajućih radijus vektora u ravni. Predstavljanje skupa kompleksnih brojeva jednom ravni ekvivalentno je predstavljanju skupa $\mathbb{R}^2$ istom ravni. Ono što suštinski odvaja polje $\mathbb{C}$ od vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ jeste množenje kompleksnih brojeva, koje po svojoj formi ne odgovara ni skalarnom ni vektorskom proizvodu vektora u ravni.

U prethodnom odeljku smo uveli prirodnu eksponencijalnu funkciju. Nameće se pitanje da li postoji prirodna eksponencijalna funkcija čiji je domen skup kompleksnih brojeva, to jest šta je e^z, kada je $z = x + iy$, za $x, y \in \mathbb{R}$.
Prema pravilima eksponencijalne funkcije, $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$.

Takođe smo u prethodnom odeljku uveli razvoj elementarnih funkcija preko radova. Kako važi: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ za $x \in \mathbb{R}$, pitamo se šta je razvoj prirodne eksponencijalne funkcije čiji je domen skup $\mathbb{C}$. Važi:
$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} = \cos y + i \cdot \sin y$

Definicija 36. *Za $z \in \mathbb{C}$, funkcija $f(z) = e^z$ postoji i važi:*
$e^z = e^x(\cos y + i \cdot \sin y)$*, za* $z = x + i \cdot y$.

Važi $e^x > 0$ za svako x. Osim toga, ni za jedno $y \in \mathbb{R}$ ne može istovremeno biti $\cos y = 0$ i $\sin y = 0$. Prema tome, $e^z \neq 0$ za svako $z \in \mathbb{C}$. Na osnovu neprekidnosti funkcija $f(x) = e^x, g(y) = \sin y, h(y) = \cos y$ za svako $x, y \in \mathbb{R}$, sledi neprekidnost funkcije $f(z) = e^z$ za svako $z \in \mathbb{C}$.

Stav 7. *Neka je $z = x + iy$ i $w = u + iv$, $z, w \in \mathbb{C}$, tada važi:*

1° $e^z e^w = e^{z+w}$

2° $(e^z)^{-1} = e^{-z}$

3° $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$

Dokaz. Neka je $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ i $e^w = e^u(\cos v + i \sin v)$.

1° $e^z \cdot e^w = e^{x+iy} \cdot e^{u+iv} = e^x \cdot e^{iy} \cdot e^u \cdot e^{iv} = e^{x+u}(\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v) = e^{x+u}(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\cos y \sin v + \sin y \cos v)) = e^{x+u}(\cos(y+v) + i \sin(y+v)) = e^{x+u} e^{i(y+u)} = e^{z+w}$

2° $(e^z)^{-1} = (e^x)^{-1} \frac{1}{\cos y + i \sin y} = (e^x)^{-1}(\cos y - i \sin y) = e^{-x}(\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^{-x} e^{-iy} = e^{-x-iy} = e^{-(x+iy)} = e^{-z}$

3° $\frac{e^z}{e^w} = e^z e^{-w} = e^{z-w}$

□

Ako je $y = 0$, odnosno $z = x \in \mathbb{R}$, onda se, očigledno, kompleksna eksponencijalna funkcija svodi na realnu eksponencijalnu funkciju.

Za $z = y$, odnosno $x = 0$ važi:

$$e^{iy} = \cos y + i \cdot \sin y;$$

$$|e^{iy}| = \sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1,$$

odakle sledi da je e^{iy} tačka kružnice čiji je centar koordinatni početak, a poluprečnik 1. Obrnuto, ako je w tačka jedinične kružnice čiji je centar koordinatni početak i $y = \arg w$, tada je $e^{iy} = w$. Važe jednakosti:

$$e^{it} = \cos t + i \cdot \sin t, t \in \mathbb{R},$$
$$e^{-it} = \cos t - i \cdot \sin t, t \in \mathbb{R}.$$

Očigledno, sabiranjem (oduzimanjem), prethodne dve jednakosti, dobija se:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2},$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Definicija 37. *Funkcija* $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$ *se zove kosinus.*

Definicija 38. *Funkcija* $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$ *se zove sinus.*

Stav 8. *Neka je* $z \in \mathbb{C}$, *tada važi:* $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = 1$

Dokaz. $(\sin z)^2 + (\cos z)^2 = \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \dfrac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \dfrac{-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ □

Stav 9. *Za proizvoljne* $z, w \in \mathbb{C}$, *važe adicione formule:*
$\sin(z \pm w) = \sin z \cos w \pm \cos z \sin w$,
$\cos(z \pm w) = \cos z \cos w \mp \sin z \sin w$.

Dokaz. Najpre ćemo dokazati $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$.
$\sin z \cos w + \cos z \sin w = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \dfrac{2e^{i(z+w)} - 2e^{-i(z+w)}}{4i} = \dfrac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z + w)$.
Ostali slučajevi se slično dokazuju. □

Ako je $z \in \mathbb{C}$ proizvoljan kompleksan broj različit od nule, tada je $\dfrac{z}{|z|}$ tačka jedinične kružnice sa istim argumentom kao z. Prema prethodno rečenom, ako je $\phi = \arg z$, onda je $z = |z|e^{i\phi}$ i ovaj zapis je eksponencijalni (Ojlerov) oblik kompleksnog broja z. Kompleksan broj $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nema jedinstven argument. Preciznije, ako je poznat jedan argument ϕ broja z, onda se svi ostali argumenti broja z razlikuju od broja ϕ za celobrojni umnožak broja 2π. Za svako $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ postoji jedinstvena reprezentacija $z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}$.

Definicija 39. *Prirodni logaritam broja* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *definiše se na sledeći način:* $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, *gde je* $\ln |z|$ *logaritam pozitivnog realnog broja* $|z|$.

5 Primene elementarnih funkcija

5.1 Trigonometrijske funkcije

Astronomija ima najveću primenu trigonometrije. Trigonometrija je nastala pre nove ere kao dopuna astronomiji. Nastale su trigonometrijske tablice kao i sferna trigonometrija, vrsta trigonometrije koja objašnjava pozicije na sferi.

Engleski astronom Džejms Bredli je 1729. našao način da odredi brzinu kretanja Zemlje oko Sunca, primetivši da je, da bi mogao da teleskopom posmatra zvezdu koja se nalazila iznad njega, potrebno da postavi teleskop pod uglom od $20,49''$. Zaključio je da se brzina kretanja Zemlje u $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ može dobiti formulom $v = c \cdot \tan 20,49''$, gde je c brzina svetlosti.

Pomoću trigonometrijske funkcije $f(x) = a \sin(bx + c)$, matematički možemo opisati talase treperenja zvuka. Zvuk koji nastaje treperenjem čestica neke elastične materije ili tela (drveta, stakla, treperenjem žica na muzičkom instrumentu, pri žuboru vode ili morskih talasa) putuje do našeg uha pomoću zvučnih talasa koji nastaju zgušnjavanjem i razređivanjem vazduha. Ako treptaji elastične materije slede jedan za drugim u istom vremenskom periodu, tada kažemo da su ti treptaji pravilni, pa ih nazivamo tonovima. Ton je okarakterisan jačinom (a-veličina amplitude treperenja), visinom (b-broj treptaja čestica u sekundi) i mestom izvora zvuka (c-početna faza treperenja).

Francuski matematičar Žan Batist Furije je dokazao da svaki signal koji se ispušta posle određenog vremenskog perioda se može izraziti kao zbir beskonažnog skupa sinusnih krivih.

Trigonometrija je posebno važna u arhitekturi jer omogućava arhitekti da izračuna rastojanja i sile koje se odnose na dijagonalne elemente. Na primer, na mostovima i visokim objektima, dijagonala mora da bude jaka i precizna da zadrži strukturu. Uglovi utiču na to kako će konstrukcija da stoji, da li će se odupreti vremenskim neprilikama.

5.2 Primene eksponencijalne funkcije

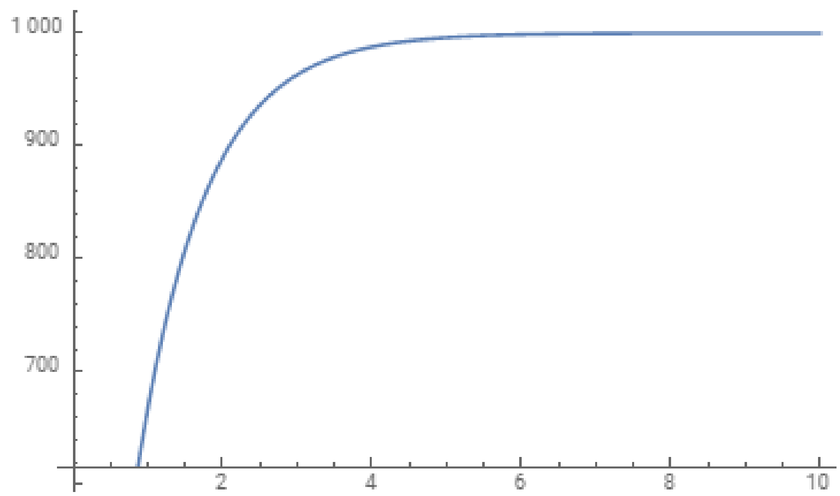
Šah je jedna od najstarijih igara i njegove varijante se igraju već hiljadama godina. O njegovom nastanku postoje mnoga predanja i legende. Evo jedne. Kada je car Šeram naučio da igra šah, bio je impresioniran lepotom te igre. Cilj igre bilo je hvatanje neprijateljskog kralja, pa se igra na persijskom zvala šahmat (smrt kralju). Saznavši da je tu igru izmislio jedan od njegovih podanika, vezir imenom Sesa, naredio je da ga dovedu kako bi ga nagradio. Vezir je došao pred cara. Pošto je želeo da ga dostojno nagraditi, car mu obeća ispuniti bilo koju želju. Sesa je rekao: Želim da mi za prvo polje na tabli date 1 zrno pšenice, za drugo polje 2 zrna, za treće 4, za četvrto 8, i tako za svako sledeće dva puta više zrna nego za prethodno polje. Broj svih zrna pšenice jednak je $S = 2^0 + 2^1 + ... + 2^{63}$. Niz brojeva poput ovih opisuje eksponencijalni rast.

U biologiji je poznato da mnoge populacije u početku svog razvoja pokazuju svojstva eksponencijalnog rasta. Rast neke populacije se može predstaviti formulom: $N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$, gde je $N(t)$ broj jedinki populacije nakon vremena t, N_0 početni broj jedinki, t vreme, a r stopa eksponencijalnog rasta.

Primer 1. *U populaciji bubašvaba stopa eksponencijalnog rasta je približno* $1,5$ *bubašvaba po mesecu. Ako je početni broj jedinki 2, nakon 4 meseca, populacija će brojiti* $N(4) = 2 \cdot e^{1.5 \cdot 4}$, *odnosno* 807 *jedinki.*

Eksponencijalna funkcija nalazi primenu i u trgovini i marketingu. Prodaja nekog novog proizvoda u početku brzo raste, a zatim se tržište polako zasićuje.

Primer 2. *Prodaja novog tipa otvarača za konzerve je opisana funkcijom* $P(x) = 1000(1 - 3^{-x})$ *pri čemu* x *označava broj godina proteklih od pojave otvarača na tržištu.*



Normalno zarastanje rana moguće je modelirati eksponencijalnom funkcijom. Naglasimo da je ovo gruba aproksimacija, budući da postoje brojni precizniji modeli. Ako sa A_0 označimo inicijalnu površinu rane, tada se površina rane nakon t dana $A(t)$ može opisati funkcijom: $A(t) = A_0 \cdot e^{-0.3t}$.

Primer 3. *Tabelom je prikazano zarastanje rane površine 10.*

Broj dana od nastanka rane	0	1	2	5	10	15	20
Površina rane zavisno od broja dana proteklih od nastanka	10	7.41	5.49	2.23	0.50	0.11	0.02

Atmosferski pritisak se sa visinom smanjuje i pri tome sledi eksponencijalna zavisnost pritiska od visine. Pritisak na nekoj visini h je određen formulom: $p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} \cdot h}$, gde je h nadmorska visina, p_0 pritisak na referentnom nivou $h = 0$, g ubrzanje sile Zemljine teže ($g \approx 9.81 \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), ρ_0 gustina vazduha na referentnom nivou $h = 0$.

Primer 4. *Atmosferski pritisak na nivou mora iznosi* $p_0 \approx 101325\mathrm{Pa}$*, a gustina vazduha pri temperaturi od* $20°\mathrm{C}$ *je* $\rho_0 \approx 1.2 \dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$*. Pri zadatim uslovima, atmosferski pritisak na nadmorskoj visini od* $1000\mathrm{m}$ *je*
$p(1000) = 101325 \cdot e^{-\frac{1.2 \cdot 9.81}{101325} \cdot 1000} = 90211\ \mathrm{Pa} = 902\ \mathrm{mbar}$.

Njutnov[6] zakon hlađenja glasi: $T(t) = T_{okoline} + (T_{pocetno} - T_{okoline}) \cdot e^{-kt}$. Ovaj zakon, koji počiva na eksponencijalnoj funkciji, nalazi svoju primenu u forenzici, prilikom određivanja vremena smrti.

Funkcija koja opisuje ukupan broj učenjem zapamćenih činjenica u zavisnosti od vremena proteklog od prestanka učenja data je formulom: $N(t) = y_0 \frac{1}{1+3^{t+1}}$. Ovde je sa t označen broj meseci proteklih od prestanka učenja, a sa y_0 broj činjenica poznatih učeniku u trenutku prestanka učenja. Grafik te funkcije prikazuje tzv. krivu zaboravljanja.

Primer 5. *Ako je u trenutku prestanka učenja učeniku poznato 100 činjenica, nakon nedelju dana, seća se svega* $N\left(\dfrac{1}{4}\right) = 100 \dfrac{1}{1 + 3^{\frac{1}{4}+1}} = 20$ *činjenica.*

Izotop ugljenika C^{14} je zastupljen u određenoj količini u svim živim bićima. Nakon smrti organizma, radioaktivni C^{14} se više ne obnavlja i zatečena količina počinje da se raspada. Količina preostala nakon t godina je zadata formulom: $C(t) = C_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$. Ovde je C_0 količina izotopa C^{14} u živom biću.

Eksponencijalna funkcija nalazi svoju primenu i u finansijskoj matematici (složeno ukamaćivanje). U današnje vreme, kada nam banke i njihove kamate u velikoj mjeri određuju svakodnevni život, dobro je biti upoznat s elementima finansijske matematike. Neko uloži sopstveni kapital C na štednju uz $k\%$ godišnje kamate. Iznos kojim raspolaže nakon n godina, dat je formulom $C(n) = C_n = C \cdot \left(1 + \dfrac{k}{100}\right)^n$.

Primer 6. *Za uloženih 10000 evra uz kamatnu stopu od* 3% *godišnje, nakon 10 godina ostvaren je kapital* $C(10) = C_{10} = 10000 \cdot \left(1 + \dfrac{3}{100}\right)^{10} = 13439.16.$

5.3 Primene logaritamske funkcije

Psihofizika je grana psihologije koja kvantitativno proučava veze izmeu fizičkih stimulansa i njihove percepcije. Začetnici psihofizike su bili Ernest Veber[7] i Gustav Fehner[8]. Neke od zakona psihofizike definisali su pomoću logaritamske

[6]Isaac Newton (1643-1726) engleski fizičar, matematičar, astronom, alhemičar i filozof prirode
[7]Ernst Heinrich Weber (1795-1878) nemački fizičar
[8]Gustav Fechner (1801-1887.) nemački filozof, fizičar i eksperimentalni psiholog

funkcije. Veber-Fehnerov zakon: ,,Intenzitet osećaja, proporcionalan je logaritmu intenziteta nadražaja."

Još u 2. veku pre nove ere, Hiparh[9] je primetio da se zvezde razlikuju po sjaju, pa ih je podelio u šest kategorija, prema intenzitetu sjaja. Grci su za opis sjaja zvezda uveli sistem zvezdanih veličina-magnituda (m) koje predstavljaju prividnu jačinu sjaja zvezda. Kako se zvezde nalaze na različitim udaljenostima od Zemlje, prividna zvezdana veličina nam nije od koristi pri poređenju ukupnog intenziteta sjaja neke dve zvezde ukoliko se nalaze na različitim udaljenostima, što jeste najčešći slučaj. Zbog toga se uvodi apsolutna zvezdana veličina (M). Veza između apsolutne i prividne zvezdane veličine data je formulom: $M = m + 5 - 5\log r$, gde je r udaljenost tela od Zemlje izražena u parsecima, a log logaritam sa osnovom 10.

Radioaktivni raspad je proces u kome se atomsko jezgro menja bez spoljnog uticaja. Zakon radioaktovnog raspada glasi: $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, gde su N_0 početni broj radioaktivnih jezgara, $N(t)$ njihov broj nakon vremena t i λ konstanta raspada. Češće nego konstantom raspada λ, raspad se opisuje vremenom poluraspada (T). Vreme poluraspada je vreme za koje se broj radioaktivnih jezgara u nekom uzorku prepolovi. Postoji veza izmeu vremena poluraspada i konstante raspada, određena logaritamskom funkcijom: $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

Rihterova[10] lestvica služi za izražavanje i uporedivanje jačine zemljotresa i prikazuje količinu energije primljene na udaljenosti 100 kilometara od epicentra. Potresu jačine I pridružuje se na Rihterovoj lestvici broj $j = \log \dfrac{I}{I_0}$, gde je I_0 fiksna jačina vrlo slabog zemljotresa kog još registruju instrumenti.

Logaritamska funkcija nalazi primenu i prilikom određivanja jačine zvuka. Razlikuju se objektivna i subjektivna jačina zvuka. Objektivna se definiše kao energija koja se pomoću zvučnog talasa prenosi u jediničnom vremenskom intervalu kroz jedinicu površine. Jačina zvuka koja se opaža čulom sluha je subjektivna jačina. Odnos između subjektivne i objektivne jačine zvuka je dat formulom: $L = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$, gde je I objektivna jačina zvuka, I_0 prag čujnosti. Merna jedinica za subjektivnu jačinu je decibel (dB).

Hemija je još jedna u nizu nauka, koja se oslanja na matematičke proračune. Ne primer, pH vrednost je mera aktivnosti vodonikovih jona (H^+) u rastvoru i na taj način određuje da li je dati rastvor kiselog ili baznog karaktera. Za određivanje pH vrednosti rastvora koristi se logaritamska funkcija na sledeći način: $pH = -\log_{10}(H^+)$, gde je H^+ koncentracija vodonikovih jona u jedinjenju.

Primer 7. *Koncentracija vodonikovih jona u vodi je* $10^{-7}\mathrm{mol/l}$. *pH vrednost vode je* $pH = -\log_{10}(H^+) = 7$. *Dakle, voda je pH neutralna.*

Primer 8. *Koncentracija vodonikovih jona u limunu je približno* $0.004\mathrm{mol/l}$ *pH vrednost limuna je* $pH = -\log_{10}(0.004) \approx 2.4$.

[9]Hiparh (oko 190. pne. oko 120. pne.) grčki astronom, geograf i matemati'v car

[10]Charles Francis Richter (1900 1985), američki seizmolog i fizičar

Broj bakterija u nekoj kulturi opada po formuli $B(t) = 250000e^{0.4t}$, gde je t vreme izraženo u satima.

Primer 9. *Nakon koliko sati će u kulturi ostati još samo 25000 bakterija? Problem se svodi na rešavanje jednačine* $250000e^{0.4t} = 25000$. *Logaritmovanjem dobijamo* $0.4t = \ln \frac{1}{10}$ *, odakle sledi* $t = 5.76$ *sati.*

Literatura

[1] Prof. dr Miodrag Mateljević, Kompleksne funkcije 1&2, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

[2] Arif Zolić, Zoran Kadelburg, Srđan Ognjanović, Analiza sa algebrom 1, Krug, Beograd, Deveto, dopunjeno izdanje 2019.

[3] Dušan Adnadjević, Zoran Kadelburg, Matematička analiza 1, Matematički fakultet, Beograd, Osmo izdanje 2002.

[4] Đorđe Dugošija, Živorad Ivanović, Trigonometrija, Krug, Beograd, Drugo, izmenjeno izdanje 2006.

[5] Nada Roguljić, Arijana Burazin Mišura, Ivo Baras, Eksponencijalna funkcija i njezine primene u realnom životu, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol.14 No.53 Ožujak 2013.