УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Маја Ристић

ЕЛИПТИЧКИ ГРАНИЧНИ ПРОБЛЕМ СА ИНТЕРФЕЈСОМ И ЊЕГОВА АПРОКСИМАЦИЈА МЕТОДОМ КОНАЧНИХ ЕЛЕМЕНАТА

мастер рад

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Maja Ristić

ELIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH AN INTERFACE AND ITS APROXIMATION WITH FINITE ELEMENT METHOD

master thesis

Belgrade , 2019

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор:

др Александра Делић
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Александра Делић
доцент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милан Дражић
ванредни професор,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Марија Ивановић
асистент,
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Захвалност

Желим да се захвалим својој менторки Александри Делић на огромној помоћи при савладавању градива обрађеног у овом раду, издвојеном времену, стрпљењу и пруженом разумевању који су ми значили и више него што се може претпоставити.

Такође се захваљујем члановима комисије професору др Милану Дражићу и Марији Ивановић на корисним сугестијама које су помогле да овај рад буде квалитетнији.

Велику захвалност дугујем својим колегиницама Милици Јовановић и Јелени Тасић на пруженој помоћи и несебично пренесеном знању током мастер студија.

И на крају, највећу захвалност дугујем својој породици и пријатељима на огромној подршци коју су ми пружили, и даље пружају, не само у току писања рада већ све време мог школовања.

Београд, 2019.
Маја Ристић

Садржај

1 Увод

Теоријска истраживања граничних проблема за парцијалне диференцијалне једначине у великој мери се ослањају на функционалну анализу. Решења ових проблема обично се представљају као елементи појединих функционалних простора. На почетку се дефинишу основни појмови и простори који ће бити коришћени у даљем раду. Више детаља о наведеним резултатима се може наћи у [5], [6], [8], [9], [12].

1.1 Функционални простори

Отворен и повезан скуп $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ назива се област. Границом области Ω се назива скуп $\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Omega}\backslash\Omega$ где је $\overline{\Omega}$ затворење скупа Ω. Свака n-торка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ назива се мултииндексом где је са $\mathbb{N}_0$ означен скуп ненегативних целих бројева. Дужина мултииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ је ненегативан цео број $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

У овом раду ће бити коришћене функције облика $f : \Omega \to \mathbb{R}$. У случају да је f функција више промењљивих, парцијални изводи се означавају са:

$$\partial^\alpha f = \left(\frac{\partial}{\partial x_{_1}}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{_2}}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{_n}}\right)^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{_1}^{\alpha_1} \partial x_{_2}^{\alpha_2} \ldots \partial x_{_n}^{\alpha_n}}.$$

1.1.1 Простори непрекидних и интеграбилних функција

Нека је Ω отворен скуп у $\mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{N}$. Скуп $C^k(\Omega)$ је скуп свих непрекидних функција f, дефинисаних на Ω, које имају непрекидне изводе реда $|\alpha| \leqslant k$ на Ω, за сваки мултииндекс α. Специјално, са $C(\Omega)$ се означава простор непрекидних функција на Ω, а са $C^\infty(\Omega)$ простор бесконачно диференцијабилних функција на Ω.

Ако је Ω ограничен отворен скуп, може се дефинисати и $C^k(\overline{\Omega})$ - њему припадају све функције $f \in C^k(\Omega)$ за које се $\partial^\alpha f$ може непрекидно продужити са Ω на $\overline{\Omega}$ за сваки мултииндекс $|\alpha| \leqslant k$. Како је $C^k(\overline{\Omega})$ Банахов простор, он је снабдевен нормом:

$$||f||_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\alpha f(x)|.$$

Нека је $k \in \mathbb{N}$ и $0 < \lambda \leq 1$. Са $C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})$ се означава скуп свих функција $f \in C^k(\overline{\Omega})$ за које

$$|f|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|=k} \sup_{x,y\in\Omega, x\neq y} \frac{|\partial^\alpha f(x) - \partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda}, \qquad \text{где је } |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

има коначну вредност.

Простор $C^{k,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$ је Банахов простор са уведеном нормом:

$$||f||_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} := ||f||_{C^k(\overline{\Omega})} + |f|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})}.$$

Функције $f \in C^{0,\lambda}\left(\overline{\Omega}\right)$, $0 < \lambda < 1$ се називају Хелдер непрекидним са модулом непрекидности λ, а ако је $\lambda = 1$ каже се да је функција f Липшиц непрекидна на $\overline{\Omega}$.

Простор $L^p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$ састоји се из функција дефинисаних на Ω, чији је p-ти степен апсолутно интеграбилна функција у Лебеговом смислу, тј. $\int\limits_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Простор $L^p(\Omega)$ је Банахов простор са нормом:

$$||f||_{L^p(\Omega)} := \left(\int\limits_\Omega |f|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

За $p = 2$ простор $L^2(\Omega)$ је Хилбертов са скаларним производом:

$$(f,g) = \int\limits_\Omega f(x)g(x)dx$$

и нормом

$$||f||_{L^2(\Omega)} := \left(\int |f|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Специјално, простор $L^\infty(\Omega)$ се састоји из функција f дефинисаних на Ω таквих да $|f|$ има коначан есенцијални супремум. Есенцијални супремум је најмањи број M такав да је $|f(x)| \leqslant M$ за скоро свако $x \in \Omega$ и означава се са: $M = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$. У простору $L^\infty(\Omega)$ норма је дефинисана са:

$$||f||_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Простор локално интеграбилних функција $L^p_{loc}(\Omega)$ је простор свих функција које су интеграбилне на свакој ограниченој подобласти од Ω, тј. важи $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ ако је $f \in L^p(\Omega')$ за сваку ограничену подобласт Ω' такву да је $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

1.1.2 Простор дистрибуција

Носач функције f је скуп $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$. То је најмањи затворен подскуп скупа Ω такав да је $f = 0$ у скупу $\Omega \setminus \operatorname{supp} f$. Са $C_0^k(\Omega)$ означавамо скуп свих функција $f \in C^k(\Omega)$ које имају компактан носач у Ω. Посебно је интересантан скуп

$$C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geqslant 0} C_0^k(\Omega),$$

скуп бесконачно диференцијалбилних функција са компактним носачем.

Дефиниција 1.1. *За низ функција $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ каже се да конвергира ка функцији $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ако:*

1. *постоји компактан скуп $K \subset \mathbb{R}^n$ такав да $\operatorname{supp} \varphi_j \subset K$ за свако j,*
2. *за сваки мултииндекс α, низ $\partial^\alpha \varphi_j$ униформно конвергира ка $\partial^\alpha \varphi$, на K када $j \to \infty$.*

Простор $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ са овако уведеном ковергенцијом се назива простором основних (тест) фунцкија и означава са $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Вредност функционала $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ на тест функцији φ се означава са $\langle f, \varphi \rangle$. Функционал $\langle f, \varphi \rangle$ може имати следеће особине:

1. линеарност: $\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle + \mu \langle f, \psi \rangle,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C},\ \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}$
2. непрекидност: Ако из конвергенције $\varphi_j \to \varphi,\ j \to \infty$ у $\mathcal{D}$ следи конвергенција $\langle f, \varphi_j \rangle \to \langle f, \varphi \rangle,\ j \to \infty$ у $\mathbb{C}$.

Дефиниција 1.2. *Линеарни непрекидни функционали $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ називају се дистрибуцијама или генералисаним функцијама. Скуп дистрибуција означава се са $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Дефиниција 1.3. *За низ дистрибуција $f_j \in \mathcal{D}'$ каже се да конвергира ка f и то се записује са $f_j \to f$, $j \to \infty$ ако:*

$$\langle f_j, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle, \;\; j \to \infty \text{ за свако } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Може се показати да је простор дистрибуција $\mathcal{D}'$ са овако уведеном конвергенцијом комплетан [5].

Став 1.1. *Свака локално интеграбилна функција $f \in L^1_{loc}(R^n)$ индукује једну дистрибуцију (која се такође обележава са f). Односно за $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ важи формула:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi \rangle. \tag{1.1}$$

Дефиниција 1.4. *Дистрибуција индукована неком локално интеграбилном функцијом, одређена формулом 1.1 назива се регуларном дистрибуцијом.*

Дефиниција 1.5. *Дистрибуција се назива сингуларном ако није регуларна, односно ако није индукована неком локално интеграбилном функцијом.*

На тај начин је скуп локално интеграбилних функција потопљен у скуп дистрибуција.

Пример сингуларне дистрибуције је Диракова дистрибуција δ дефинисана на следећи начин:

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Доказ се може извести индиректно, под претпоставком да постоји функција $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ таква да је:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Како функција e^x припада простору $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ лако се може показати да је $e^x\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Наиме, како је φ тест функција на $\mathbb{R}^n$ она има компактан носач у $\mathbb{R}^n$: $K = \operatorname{supp}\varphi = \{\overline{x \in \mathbb{R}^n \;\mid\; \varphi(x) \neq 0}\}$. С друге стране, како $e^x \neq 0$ за свако $x \in \mathbb{R}^n$ носач функције $e^x\varphi$ је

$$\operatorname{supp} e^x\varphi = \left\{\overline{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; e^x\varphi(x) \neq 0}\right\} = \left\{\overline{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \varphi(x) \neq 0}\right\} = \operatorname{supp}\varphi = K,$$

тј. и он је компактан.

И још важи $e^x\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (јер $e^x, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$), па све укупно следи да $e^x\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Одатле даље следи:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^x\varphi(x)dx = e^0\varphi(0) = \varphi(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

што имплицира да важи једнакост $f(x)e^x = f(x)$ скоро свуда на $\mathbb{R}^n$ односно $f(x) = 0$ скоро свуда на $\mathbb{R}^n$.

Међутим, одатле се добија да је $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = 0$ што имплицира да је $\varphi(0) = 0$ за свако φ, а ово је контрадикција јер $\varphi(0) \neq 0$ у општем случају.

Дакле, δ је сингуларна дистрибуција.

Диракова дистрибуција δ је од велике важности у овом раду па ће на местима где се разматрају неке даље операције са дистрибуцијама посебна пажња бити усмерена на њу.

Може се приметити да је $\delta(x) = 0$ у свакој подобласти која не садржи координатни почетак. Дакле, њен носач је $\operatorname{supp}\delta = \{0\}$. Даље се са:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x - x_0)\varphi dx = \varphi(x_0) \tag{1.2}$$

означава Диракова дистрибуција концентрисана у x_0.

Занимљиво је уочити да ако f има компактан носач могу се ослабити услови за тест функције захтевајући само њихову бесконачну дифренецијабилност $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и занемарити услов њиховог компактног носача. На пример, ако у (1.2) узмемо $\varphi(x) \equiv 1$ добијамо услов нормализације делта функције:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \delta(x)dx = 1. \tag{1.3}$$

Иако је сингуларна, Диракова дистрибуција се може представити као гранична вредност низа бесконачно глатких функција. Штавише, ово важи за све дистрибуције. Следи неколико примера.

Пример 1.2. *$\omega_\varepsilon(x) \to \delta(x)$, $\varepsilon \to 0$ где је*

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| < \varepsilon \\ 0, & |x| \geqslant \varepsilon \end{cases}.$$

Константа C_ε се бира тако да је $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) = 1$, $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}$. Нека је $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ произвољна тест функција, тада за свако $\eta > 0$ постоји $\varepsilon_0 > 0$ такво да ако је $|x| < \varepsilon_0$ онда је $|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta$. Неке је сада $\varepsilon < \varepsilon_0$. Тада важи

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0) \right| = \left| \int\limits_{K_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x) \left[\varphi(x) - \varphi(0)\right] dx \right| \leqslant \eta \int\limits_{K_\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)dx = \eta,$$

односно $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$.

Пример 1.3 (Гаусова језгра). [3] *Низ Гаусових језгара $\gamma_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{\frac{-x^2}{2\varepsilon}}$ са параметром $\varepsilon > 0$ конвергира ка Дираковој дистрибуцији δ.*

Прост површински слој је генерализација δ функције. Нека је S равна глатка површ и $\mu(x)$ непрекидна функција дефинисана на S. Може се дефинисати генералисана функција $\mu\delta_S$ по правилу:

$$\langle \mu\delta_S, \varphi \rangle = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)dS, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Очигледно је $\mu\delta_S \in \mathcal{D}'$; $\mu\delta_S(x) = 0$ за $x \notin S$ па је $\operatorname{supp} \mu\delta_S \subset S$. Генералисана функција $\mu\delta_S$ се назива једноставним слојем изнад површи S са густином μ.

Познато је да се расподела многих физичких величина може представити дистрибуцијама. Диракова дистрибуција описује расподелу тзв. концентрисаних величина (материјална тачка, тачкасти извор енергије, итд.).

Нека је сада $f(x)$ локално интеграбилна функција на $\mathbb{R}^n$, $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконачно глатка функција и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тада важи да је $a(x)f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ и $a(x)\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и важи следећа формула:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} [a(x)f(x)]\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)[a(x)\varphi(x)]dx.$$

Како свака локално интеграбилна функција индукује дистрибуцију на основу ове формуле може се дефинисати производ бесконачно глатке функције и дистрибуције.

Дефиниција 1.6. *Нека* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *и* $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Са* af *означавамо функционал на* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *дефинисан на следећи начин:*

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle, \text{ за свако } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Може се показати да је овако дефинисан функционал линеаран и непрекидан, тј. $af \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Специјално, производ глатке функције и Диракове дистрибуције би био:

$$\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta(x), \varphi(x) \rangle,$$

тј. $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ за сваку $a \in C^\infty(\Omega)$.

Ова формула чак има смисла и ако је функција $a(x)$ непрекидна у околини нуле, па се одатле може закључити да у неким случајевима производ af има смисла и ако $a \notin C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Занимљиво је да се може дефинисати и производ:

$$\delta(x-b)\delta(x-c) = 0 \text{ ако је } b \neq c,$$

док се у општем случају не може дефинисати производ две дистрибуције који би опет био дистрибуција [12].

1.1.3 Диференцирање дистрибуција

Нека је $f(x) \in C^m(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(x)$ онсновна функција из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тада за сваки мултииндекс α, $|\alpha| \leqslant m$ важи следећа формула парцијалне интеграције:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha \varphi(x)dx.$$

На основу ове формуле може се дефинисати диференцирање дистрибуција на следећи начин:

Дефиниција 1.7. *Нека је* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *и* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. *Са* $\partial^\alpha f$ *се означава функци-*

онал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ дефинисан на следећи начин:

$$\langle \partial^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

који се назива изводом у смислу дистрибуција.

Може се показати да је овако дефинисан функционал линеаран и непрекидан, тј. $\partial^\alpha f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Нека је сада $\{\partial^\alpha f(x)\}$ класичан извод функције $f(x)$, где он постоји. Ако функција $f(x) \in C^m(\Omega)$ тада је $\partial^\alpha f(x) = \{\partial^\alpha f(x)\}$, $x \in \Omega$, $|\alpha| \leqslant m$.

Ако је функционал $f(x)$ реална функција једне променљиве која је непрекидно диференцијабилна на $\mathbb{R}$ осим у тачкама ξ_j, $j = 1, 2, \dots$ у којима има изоловане прекиде прве врсте тада је:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_{j=1}^{\infty} [f]_{\xi_j} \delta(x - \xi_j)$$

где је $[f]_{\xi_j} = f(\xi_j + 0) - f(\xi_j + 0)$ скок у тачки ξ_j.

У овом раду ће бити важан следећи специјални случај.

Нека је f део по део глатка функција тј. таква да $f \in C^1(x \leqslant \xi)$ и $f \in C^1(x \geqslant \xi)$. Тада на основу горе изложеног важи:

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_\xi \, \delta(x - \xi) \tag{1.4}$$

где је $[f]_\xi = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$.

Ако је φ произвољна тест функција онда је

$$\begin{aligned}
\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int f(x) \varphi'(x) dx \\
&= [f(\xi + 0) - f(\xi - 0)] \, \varphi(\xi) + \int \{f'(x)\} \, \varphi(x) dx \\
&= [f]_\xi \delta(x - \xi) + \langle \{f'(x)\}, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Пример 1.4. *Извод Дираковe дистрибуције:*

$$\langle \partial^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Пример 1.5. *Извод Хевисајдове дистрибуције:*

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

је Диракова дистрибуција: $\theta'(x) = \delta(x)$.

Наиме, како је θ *локално интеграбилна, користећи правило за диференцирање дистрибуција лако се добија:*

$$\langle \theta', \varphi \rangle = -\langle \theta, \varphi' \rangle = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta \varphi'(x) dx = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x) dx = -\varphi(+\infty) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

за сваку произвољну тест функцију φ.

1.1.4 Операције са дистрибуцијама

1) Транслација: Нека је a фиксирани елемент из $\mathbb{R}^n$ и $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Тада се транслација $\tau_a f$ од f дефинише са:

$$(\tau_a f)(x) := f(x-a), \text{ за свако } x \in \mathbb{R}^n.$$

Може се показати да је $\tau_a f$ такође локално-интеграбилна на $\mathbb{R}^n$ па индукује регуларну дистрибуцију:

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-a)\varphi(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x+a) dx = \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle \text{ за свако } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

На основу овог идентитета може се сада дефинисати транслација дистрибуције $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ са:

$$\langle \tau_a f, \varphi \rangle := \langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Транслација $\tau_a f$ је линеаран и непрекидан функционал на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ па важи $\tau_a f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Специјално, транслација Диракове дистрибуције δ_a се дефинише са:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

и назива се Диракова дистрибуција концентрисана у a што је и уведено у овом раду раније. Применом дефиниције транслације τ_a, може се записати:

$$\delta_a = \tau_a \delta_0 = \tau_a \delta.$$

2) Рефлексија: Рефлексија f_- локално интеграбилне функције $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ се дефинише са: $f_-(x) = f(-x)$ за свако $x \in \mathbb{R}^n$.

Слично као код транслације, како се локално интеграбилна функција може идентификовати са својом придруженом регуларном дистрибуцијом добија се:

$$\langle f_-, \varphi \rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(-x)\varphi(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(-x)dx = \langle f, \varphi_- \rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

На основу овог идентитета се дефинише рефлексија f_- дистрибуције $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ са:

$$\langle f_-, \varphi \rangle := \langle f, \varphi_- \rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Диракова дистрибуција концентрисана у 0 је једнака својој рефлексији: $\delta_- = \delta$.

Општије, $(\delta_a)_- = \delta_{-a}$ за свако $a \in \mathbb{R}^n$.

3) Тензорски производ: Нека су Ω_1 и Ω_2 отворени скупови у $\mathbb{R}^{n_1}$ и $\mathbb{R}^{n_2}$, респективно, и нека су $f \in L^1_{loc}(\Omega_1)$ и $g \in L^n_{loc}(\Omega_2)$. Тензорски производ функција f и g се дефинише са:

$$(f \times g)(x, y) := f(x)g(y) \quad (= g(y)f(x)),$$

где су x и y аргументи функција f и g, респективно.

Тензорски производ $f \times g$ је локално интеграбилна функција на $\Omega_1 \times \Omega_2$, па важи:

$$\langle f \times g, \varphi \rangle = \langle g \times f, \varphi \rangle \text{ за све } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Општије, ако су f и g дистрибуције, тј. $f \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ и $g \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ може се дефинисати и тензорски производ 2 дистрибуције са:

$$\langle f \times g, \varphi \rangle := \langle f, \langle g, \varphi \rangle \rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \tag{1.5}$$

$$\langle g \times f, \varphi \rangle := \langle g, \langle f, \varphi \rangle \rangle, \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2) \tag{1.6}$$

Може се приметити да је $\times$ комутативна операција.

Тензорски производ m дистрибуција $f_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, где су Ω_i отворени подскупови од $\mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$ се дефинише рекурзивно почевши од случаја $m = 2$.

Нека је сада $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $\delta_a \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $\delta_{a_j} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, \dots, n$ Диракове дистрибуције у тачкама a и a_j, $j = 1, \dots, n$.

Тада је: $\delta_a = \delta_{a_1} \times \cdots \times \delta_{a_n}$.

4) Конволуција: Нека су $f(x), g(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Њихова конволуција $f*g$ се дефинише са:

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Може се дефинисати и конволуција две дистрибуције (види, литература). Специјално, конволуција произвољне дистрибуције $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ и Диракове дистрибуције δ је:

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

1.1.5 Простори Собољева

У овом одељку се дефинишу простори који су од изузетне важности за проблем који ће бити размотрен у овом раду.

Дефиниција 1.8. *Нека је Ω отворен подскуп скупа $\mathbb{R}^n$ и k ненегативан цео број. Тада је за $1 \leqslant p \leqslant \infty$*

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \ |\alpha| \leqslant k\}$$

простор Собољева реда k са нормом:

$$||u||_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{j=0}^{k} |u|^p_{W_p^j(\Omega)} \right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

односно

$$||u||_{W_\infty^k(\Omega)} := \sum_{j=0}^{k} |u|_{W_\infty^j(\Omega)}, \quad p = \infty,$$

где су полунорме $|u|_{W_p^j(\Omega)}$ и $|u|_{W_\infty^j(\Omega)}$ дефинисане са:

$$|u|_{W_p^j(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=j} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

односно

$$|u|_{W_\infty^j(\Omega)} := \max_{|\alpha|=j} ||\partial^\alpha u||_{L_\infty(\Omega)}.$$

Изводи у овој дефиницији су изводи у смислу дистрибуција.

Простор $W_p^s(\Omega)$, $s > 0$ је Банахов.

Посебно су битни простори за $p = 2$, $W_2^s(\Omega) = H^s(\Omega)$ јер су то Хилбертови простори. У њима се скаларни производ дефинише са

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_\Omega \partial^\alpha u(x) \partial^\alpha v(x) dx, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Следећа теорема је од изузетне важности:

Теорема 1.6. *Простор $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ је густ у $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ за $1 \leqslant p < \infty$. Али, ако је Ω прави отворени подскуп од $\mathbb{R}^n$ тада $\mathcal{D}(\Omega)$ није густ у $W_p^k(\Omega)$.*

Дефиниција 1.9. *Затворење простора $D(\Omega)$ у норми простора $W_p^k(\Omega)$ се означава са $\mathring{W}_p^k(\Omega)$. У случају $p = 2$ се осим ознаке $\mathring{H}^k(\Omega)$ користи ознака $H_0^k(\Omega)$. Акценат ће бити на простору $H_0^1(\Omega)$ - који представља затворење простора $C_0^\infty(\Omega)$ у норми $||\cdot||_{H^1}$.*

$H_0^1(\Omega)$ је скуп свих $u \in H^1(\Omega)$ таквих да постоји низ $\{u_m\}_{m=1}^\infty \in C_0^\infty(\Omega)$ који конвергира у смислу трага функције ка u у $H^1(\Omega)$.

Дефиниција 1.10. [6] *Нека је Ω ограничен отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. Граница $\partial\Omega$ области Ω је Липшиц непрекидна ако за свако $x \in \partial\Omega$ постоји отворен скуп $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{O}$, локално ортогонални координатни систем са координатама $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = (\zeta', \zeta_n)$ и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, тако да важи*

$$\mathcal{O} = \{\zeta : -a_j < \zeta_j < a_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

и постоји Липшиц непрекидна функција φ дефинисана на скупу

$$\mathcal{O}' = \left\{\zeta' \in \mathbb{R}^{n-1} : -a_j < \zeta_j < a_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n-1\right\},$$

са особином

$$|\varphi(\zeta')| \leqslant \frac{a_n}{2}, \text{ за } \zeta' \in \mathcal{O}',$$

$$\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \zeta_n < \varphi(\zeta'), \ \zeta' \in \mathcal{O}'\} \text{ и } \partial\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \zeta_n = \varphi(\zeta'), \ \zeta' \in \mathcal{O}'\}.$$

Ограничен отворен скуп са Липшиц непрекидном границом назива се Липшицовом облашћу.

Ако је $\partial\Omega$ Липшиц непрекидна тада је:

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) \ \middle|\ u = 0 \text{ на } \partial\Omega \text{ у смислу трага функције}\right\}.$$

Простор $H_0^1(\Omega)$ је такође Хилбертов простор, са истом нормом и скаларним производом као и $H^1(\Omega)$.

У раду ће бити коришћен појам "глатке границе". Следећа дефиниција даје прецизно значење речи "глатка".

Дефиниција 1.11. [6] *Нека је Ω ограничен отворен скуп у $\mathbb{R}^n$. Граница $\partial\Omega$ области Ω је класе C^m, $m \geq 1$, ако за свако $x \in \partial\Omega$ постоји отворен скуп $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathcal{O}$, локално ортогонални координатни систем са координатама*

$\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) =: (\zeta', \zeta_n)$ *и* $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *тако да важи*

$$\mathcal{O} = \{\zeta : -a_j < \zeta_j < a_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n\},$$

и постоји m *пута непрекидно диференцијабилна функција* φ *дефинисана на*

$$\mathcal{O}' = \left\{\zeta' \in \mathbb{R}^{n-1} : \ -a_j < \zeta_j < a_j, \ 1 \leqslant j \leqslant n-1\right\}$$

са особином

$$|\varphi(\zeta')| \leqslant \frac{a_n}{2} \text{ за } \zeta' \in \mathcal{O}',$$

$$\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \ \zeta_n < \varphi(\zeta'), \ \zeta' \in \mathcal{O}'\} \text{ и } \partial\Omega \cap \mathcal{O} = \{\zeta : \ \zeta_n = \varphi(\zeta'), \ \zeta' \in \mathcal{O}'\}.$$

Ограничен отворен скуп са границом класе C^m*,* $m \geq 1$ *се назива облашћу класе* C^m*.*

Следеће леме и теореме ће бити коришћене у даљем раду.

Лема 1.7 (ε-неједнакост)**.** *Нека су* $a, b \in \mathbb{R}$*. За произвољно* $\varepsilon > 0$ *важи:*

$$ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2.$$

Лема 1.8 (Коши-Шварцова неједнакост)**.** *Нека су функције* f *и* g *из простора* $L^2(\Omega)$*. Тада* $fg \in L^1(\Omega)$ *и важи неједнакост:*

$$|(f, g)| \leqslant ||f||_{L^2(\Omega)} ||g||_{L^2(\Omega)}.$$

Лема 1.9 (Поенкаре-Фридрихсова неједнакост)**.** *Нека је* Ω *отворен и ограничен скуп у* $\mathbb{R}^n$ *са Липшиц непрекидном границом и нека је* $u \in H_0^1(\Omega)$*. Тада постоји константа* C *која не зависи од* u *таква да важи:*

$$||u||^2_{L^2(\Omega)} \leqslant C |u|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Теорема 1.10 (Теорема потапања)**.** [4] *Нека је* Ω *Липшицова област у* $\mathbb{R}^n$*,* $s > 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$*. Тада важе следећа потапања:*

1. $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, за* $p \leqslant q \leqslant \frac{np}{n-sp}$*, ако је* $s - \frac{n}{p} < 0$*,*
2. $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, за* $p \leqslant q < \infty$*, ако је* $s - \frac{n}{p} = 0$*,*
3. $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$*, ако је* $s - \frac{n}{p} > 0$*.*

Теорема 1.11 (Теорема о трагу). *Нека је* $u \in W_p^s(\Omega)$*,* $s > \frac{1}{p}$*,* $s - \frac{1}{p} \notin \mathbb{Z}$ *и нека је граница области* Ω *довољно глатка* ($\Gamma \in C^{\lfloor s \rceil + 1}$)*. Тада постоји траг* Tu *функције* u *на граници* Γ*, који припада простору* $W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)$*, где је* $T : W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma) \to L^p(\Gamma)$ *ограничен линеаран оператор такав да је* $Tu = u|_\Gamma$ *и важи следећа оцена:*

$$||u||_{W_p^{s-\frac{1}{p}}(\Gamma)} \leqslant C||u||_{W_p^s(\Omega)}.$$

1.1.6 Дуални простори Собољева

Нека је $s > 0$ и $1 < p < \infty$. Са $W_q^{-s}(\Omega)$ се означава скуп линеарних функционала дефинисаних на простору $\mathring{W}_p^s(\Omega)$, при чему важи $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. За $u \in W_q^{-s}(\Omega)$ норма се дефинише на следећи начин:

$$||u||_{W_q^{-s}(\Omega)} := \sup_{v \in \mathring{W}_p^s(\Omega)} \frac{|\langle u, v \rangle|}{||v||_{W_p^s(\Omega)}}.$$

Нека је $u \in \mathring{H}^s(\Omega)$ за $s > n/2$. Користећи теорему потапања може се показати да за Диракову δ функцију важи следеће:

$$|\langle \delta, u \rangle| = |u(0)| \leqslant ||u||_{C(\Omega)} \leqslant C||u||_{H^s(\Omega)},$$

односно $\delta \in H^{-s}(\Omega)$, за $s > \frac{n}{2}$, [9].

2 Елиптички гранични проблем – општи облик

2.1 Слабо решење

Нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^n$. Као моделни проблем приказан је хомогени Дирихлеов гранични проблем:

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \;\; x \in \Omega, \\ u(x) = 0, \;\; x \in \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Могу се наметнути и следећи додатни услови:

1) $a_{ij} = a_{ji}$ (услов симетричности),
2) $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c_0 \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $c_0 > 0$ (услов строге елиптичности),
3) $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ - дакле, ови коефицијенти су заправо функције које имају есенцијални супремум,
4) $f \in L^2(\Omega)$.

Скуп $\mathcal{D}(\Omega)$ је густ у $H_0^1(\Omega)$ па је за свако $v \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int\limits_{\Omega} cuv dx = \int\limits_{\Omega} fv dx.$$

Ако се даље изврши парцијална интеграција првог интеграла и искористи услов $v = 0$ на граници Γ, добија се:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int\limits_{\Omega} cuv dx = \int\limits_{\Omega} fv dx,$$

где је:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int\limits_{\Omega} cuv dx,$$

$$l(v) = \int\limits_{\Omega} fv dx.$$

Дефиниција 2.1. *Функција $u \in H_0^1(\Omega)$, која је решење једначине*

$$a(u, v) = l(v), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.2}$$

назива се слабим решењем елиптичког граничног проблема (2.1). Све парцијалне изводе који се појављују треба схватити као изводе у смислу дистрибуција.

Егзистенцију и јединственост слабог решења даје следећа важна теорема.

Теорема 2.1 (Лакс-Милграм)**.** [6] *Нека је V реалан Хилбертов простор са нормом $||\cdot||_V$ и нека је $a(\cdot,\cdot)$ билинеарни функционал на $V \times V$ такав да је:*

1) *ограничен: $\exists C_1 > 0$ таква да $|a(u, v)| \leqslant C_1||u||_V||v||_V$, $\forall u, v \in V$,*

2) *V-коерциван: $\exists C_2 = const > 0$ таква да је $a(u, u) \geqslant C_2||u||_V^2$, $\forall u \in V$,*

3) *$l(\cdot)$ је ограничен функционал: $|l(v)| \leqslant C_3||v||_V$, $\forall v \in V$.*

Тада постоји јединствен елемент $u \in V$ такав да је: $a(u, v) = l(v)$, $\forall v \in V$.

2.2 Апроксимација елиптичког проблема методом коначних елемената

Да би се применио метод коначних елемената, V се замењује коначно-димензионим потпростором $V_h \subset V$, па се посматра проблем:

$$\text{наћи } u_h \in V_h \text{ такво да је } a(u_h, v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V_h.$$

Поставља се питање како дефинисати простор V_h? Бирају се функције $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ са малим носачем, линеарно независне, непрекидне на $\overline{\Omega}$ и део по део полиномијалне функције. Оне чине базу простора у коме се проблем посматра. Омотач се означава са $V_h = \mathcal{L}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{N(h)}\}$ где h представља растојање између 2 базне функције. Тада је:

$$u_h = \sum_{i=1}^{N(h)} u_i \varphi_i.$$

где су коефицијенти u_i непознати, а самим тим и вектор U,

$$U = (u_1, u_2, \ldots, u_{N(h)})^T.$$

Дакле, треба решити систем:

$$\mathrm{A}U = F,$$

где је:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= [a_{ij}]_{N(h)\times N(h)}, & a_{ij} &= a(\varphi_i, \varphi_j), \\ F &= (F_1, F_2, \ldots, F_{N(h)})^T, & F_j &= l(\varphi_j). \end{aligned}$$

Матрица А ће бити ретка јер функције φ_i имају мали носач. Проблем који се решава се сада може записати са:

$$\sum_{i=1}^{N(h)} u_i a(\varphi_i, \varphi_j) = l(\varphi_j), \quad j = 1, \ldots, N(h).$$

3 Елиптички гранични проблем са интерфејсом – једнодимензионални случај

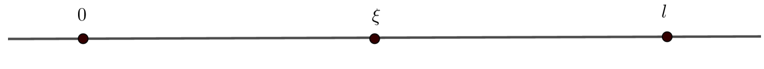
Проблеми са интерфејсом се јављају у многим применама у науци и инжењерству. На пример, проблем провођења топлоте у присуству концентрисаног капацитета, осцилације са концентрисаном масом, Пупинове индукцијске завојнице итд. Такви проблеми се математички моделирају парцијалним диференцијалним једначинама чији коефицијенти или улазни параметри имају прекиде на интерфејсу, тј. у тачки, дуж одређене криве или површи. Последица тога је слабија регуларност решења због чега је потребно користити теорију дистрибуција.

Осим тога, нумеричке методе које су конструисане за проблеме са глатким решењима не раде ефикасно и за проблеме са интерфејсом. Надаље ће у раду бити анализиран елиптички гранични проблем са коефицијентом који садржи сингуларну дистрибуцију, како са теоријског тако и са нумеричког аспекта.

Гранични проблем ће бити апроксимиран стандардном методом коначних елемената, биће изведене основне априорне оцене као и одговарајуће оцене брзине конвергенције.

3.1 Формулација елиптичког граничног проблема са интерфејсом

Нека је $\Omega = [0, l]$ и $\Gamma = \partial\Omega = \{0, l\}$ и нека је ξ тачка која дели Ω на два дисјунктна дела Ω_1 и Ω_2.



Елиптички гранични проблем са коефицијентом који садржи сингуларну дистрибуцију у једнодимензионалном случају гласи:

$$-(a(x)u'(x))' + [c(x) + k\delta(x-\xi)]u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$u(0) = u(l) = 0,$$

где је $c(x) \geqslant c_0 > 0$ и $k \geqslant k_0 > 0$ и $\delta(x-\xi)$ је Диракова дистрибуција концентрисана у ξ. Једнакост (3.1) важи у смислу теорије дистрибуција, односно за свако $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(0,l)$ важи:

$$\langle -(a(x)u'(x))' + [c(x) + k\delta(x-\xi)]u(x), \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \; x \in \Omega.$$

Извод сабирка $-(a(x)u'(x))$ се може израчунати као извод у смислу дистрибуција на следећи начин. За свако $\varphi \in C_0^\infty(0,l)$:

$$\begin{aligned}
\langle -(a(x)u'(x))', \varphi\rangle &= -\langle -a(x)u'(x), \varphi'\rangle \\
&= -\left(\int_0^\xi (-a(x)u'(x)\varphi'(x))dx + \int_\xi^l (-a(x)u'(x)\varphi'(x)dx)\right) \\
&= \int_0^\xi a(x)u'(x)\varphi'(x)dx + \int_\xi^l a(x)u'(x)\varphi'(x)dx.
\end{aligned}$$

Оба интеграла се могу израчунати применом парцијалне интеграције. Нека је

$$U = a(x)u'(x), \qquad dV = \varphi'(x)dx,$$
$$dU = (a(x)u'(x))'dx, \qquad V = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x),$$

тада је

$$\begin{aligned}
\langle -(a(x)u'(x))', \varphi(x)\rangle &= a(x)u'(x)\varphi(x)\Big|_0^\xi - \int_0^\xi (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\
&\quad + a(x)u'(x)\varphi(x)\Big|_\xi^l - \int_\xi^l (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\
&= a(\xi+0)u'(\xi+0)\varphi(\xi) - \int_0^\xi (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\
&\quad - a(\xi-0)u'(\xi-0)\varphi(\xi) - \int_\xi^l (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\
&= \varphi(\xi)\left(a(\xi+0)u'(\xi+0) - a(\xi-0)u'(\xi-0)\right) \\
&\quad - \int_0^\xi (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx - \int_\xi^l (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\
&= \varphi(\xi)[a(x)u'(x)]_\xi - \int_0^\xi (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\
&\quad - \int_\xi^l (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Дакле, добија се да је

$$\begin{aligned}\langle -(a(x)u'(x))', \varphi(x)\rangle =&\varphi(\xi)[a(x)u'(x)]_\xi - \int_0^\xi (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx \\ &- \int_\xi^l (a(x)u'(x))'\varphi(x)dx\end{aligned} \tag{3.2}$$

С друге стране је на основу (1.2), односно дефиниције Диракове дистрибуције у тачки

$$\langle k\delta(x-\xi)u(x), \varphi\rangle = ku(\xi)\varphi(\xi). \tag{3.3}$$

Како је $\delta(x-\xi) = 0$ за $x \neq \xi$ тада из (3.1) следи да је

$$\begin{aligned} -(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x), \qquad & x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ u(x) = 0, \qquad & x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{3.4}$$

док се за $x = \xi$ из (3.2) и (3.3) може закључити да су испуњени следећи услови конјугације

$$[u]_\xi = u(\xi+0) - u(\xi-0) = u(\xi) - u(\xi) = 0 \tag{3.5}$$

и

$$[a(x)u'(x)]_\xi = ku(\xi). \tag{3.6}$$

Нека даље коефицијенти $a(x)$ и $c(x)$ задовољавају следеће услове:

$$a \in L^\infty(\Omega), \;\; c \in L^\infty(\Omega) \quad \text{и} \quad a(x) \geqslant a_0 = const > 0.$$

То су услови регуларности и елиптичности.

3.2 Слаба форма проблема

Нека је простор $\tilde{L}^2(\Omega)$ затворење простора $C_0^\infty(\Omega)$ у норми

$$||u||_{\tilde{L}^2(\Omega)} = (u,u)^{1/2}_{\tilde{L}^2(\Omega)},$$

где је

$$(u,v)_{\tilde{L}^2(\Omega)} = \int\limits_0^l u(x)v(x)dx + u(\xi)v(\xi).$$

Нека је даље простор $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ затворење простора $C_0^\infty(\Omega)$ у норми

$$||u||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{\tilde{H}_0^1(\Omega)},$$

где је скаларни производ дат са:

$$(u,v)_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} = \int\limits_0^l u(x)v(x)dx + \int\limits_0^l u'(x)v'(x)dx + u(\xi)v(\xi).$$

Из (3.2) и (3.3) и на основу претходних дефиниција добија се слаба форма проблема (3.1) која гласи:

Одредити функцију $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ такву да важи:

$$a(u,v) = l(v), \quad \forall v \in \tilde{H}_0^1(\Omega), \tag{3.7}$$

где је:

$$a(u,v) = \int\limits_0^l \left(a(x)u'(x)v'(x) + cuv\right)dx + ku(\xi)v(\xi)$$

и

$$l(v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}.$$

Лако се може проверити да је (3.7) такође и слаба форма алтернативног проблема (3.4) са посебним условом на интерфејсу. У том смислу, проблеми (3.1) и (3.4) су еквивалентни.

3.3 Егзистенција и јединственост слабог решења

Егзистенција и јединственост слабог решења се могу показати уз помоћ теореме (2.1). Ограниченост функционала l лако следи из следећег:

$$|l(v)| = \left|(f,v)_{L^2(\Omega)}\right| = \left|\int\limits_\Omega fvdx\right| \leqslant \int\limits_\Omega |fv|dx \leqslant ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} \leqslant C_3||v||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)},$$

за свако $v \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$.

У доказу је поред Основне неједнакости коришћена Коши-Шварцова неједнакост и чињеница да $f \in L^2(\Omega)$.

Ограниченост билинеарне форме ће следити из следећег низа неједнакости.

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_0^l (a(x)u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x))dx + ku(\xi)v(\xi) \right| \\
&= \left| \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx + \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx + ku(\xi)v(\xi) \right| \\
&\leq \left| \int_0^l a(x)u'(x)v'(x)dx \right| + \left| \int_0^l c(x)u(x)v(x)dx \right| + |ku(\xi)v(\xi)| \\
&\leqslant \int_0^l |a(x)u'(x)v'(x)|dx + \int_0^l |c(x)u(x)v(x)|dx + k|u(\xi)||v(\xi)| \\
&\leqslant ||a||_{\tilde{L}^\infty(\Omega)} \int_0^l |u'(x)v'(x)|dx + ||c||_{\tilde{L}^\infty(\Omega)} \int_0^l |u(x)v(x)|dx + k|u(\xi)||v(\xi)|.
\end{aligned}$$

Нека је

$$C = \max\{||a||_{\tilde{L}^\infty(\Omega)}, ||c||_{\tilde{L}^\infty(\Omega)}, k\}.$$

Тада је

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leqslant C \left(\int_0^l |u'(x)v'(x)|dx + \int_0^l |u(x)v(x)|dx + |u(\xi)||v(\xi)| \right) \\
&\leqslant C \Bigg(\left(\int_0^l |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |v'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_0^l |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + |u(\xi)||v(\xi)| \Bigg) \\
&\leqslant C \left(\left(\int_0^l |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + |u(\xi)| \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left(\left(\int_0^l |v'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^l |v(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} + |v(\xi)|\right)\\
&\leqslant C\sqrt{3}\left\{\int_0^l |u'(x)|^2dx + \int_0^l |u(x)|^2dx + u^2(\xi)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\cdot\sqrt{3}\left\{\int_0^l |v'(x)|^2dx + \int_0^l |v(x)|^2dx + v^2(\xi)\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Нека је

$$C_1 = 3C$$

тада из претходног извођења следи да је

$$|a(u,v)| \leqslant C_1||u||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)}||v||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)}.$$

Даље треба доказати да је a коерцивна форма:

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_0^l a(x)(u'(x))^2dx + \int_0^l c(x)(u(x))^2dx + ku^2(\xi)\\
&\geqslant a_0\int_0^l (u'(x))^2dx + c_0\int_0^l (u(x))^2dx + k_0u^2(\xi)\\
&\geqslant C_2\left(\int_0^l (u'(x))^2dx + \int_0^l (u(x))^2dx + u^2(\xi)\right)\\
&= C_2||u||^2_{\tilde{H}_0^1(\Omega)},
\end{aligned}
$$

где је $C_2 = \min\{a_0, c_0, k_0\}$.

3.4 Априорне оцене

Априорна оцена

$$||u||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant C||f||_{L^2(\Omega)} \tag{3.8}$$

ће следити директно из Лакс-Милграмове теорме, тачније из коерцивности билинеарне форме a и ограничености функционала f, тј:

$$C_1||u||^2_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} \leqslant a(u,u) \leqslant ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^2(\Omega)}||u||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)},$$

одакле се добија:

$$C_2||u||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} \leqslant ||f||_{L^2(\Omega)},$$

односно

$$||u||_{\tilde{H}^1_0} \leqslant C||f||_{L^2(\Omega)} \tag{3.9}$$

где је $C = \frac{1}{C_2}$.

Како је

$$||u||^2_{\tilde{H}^1_0} = ||u||^2_{\tilde{L}^2(\Omega)} + |u|^2_{H^1(\Omega)},$$

онда се лако види да је

$$||u||_{\tilde{L}^2(\Omega)} \leqslant ||u||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)},$$

па се из (3.8) добија оцена:

$$||u||_{\tilde{L}^2(\Omega)} \leqslant C||f||_{L^2(\Omega)} \tag{3.10}$$

као директна последица.

На крају се може доказати да важи оцена:

$$||u||_{\tilde{H}^2_0(\Omega)} \leqslant C^*||f||_{L^2(\Omega)} \tag{3.11}$$

Нека важи додатна претпоставка да је $a \in W^1_\infty(\Omega)$. Из (3.4) важи:

$$-\left(a(x)u'(x)\right)' + c(x)u(x) = f(x),\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

односно

$$-\left(a(x)u'(x)\right)' = f(x) - c(x)u(x).$$

Како је $f \in L^2(\Omega),\ a \in L^\infty(\Omega),\ c \in L^\infty(\Omega)$ и $u \in \tilde{H}^1_0(\Omega)$, може се закључити да важи:

$$
\begin{aligned}
||\left(a(x)u'(x)\right)'||_{L^2(\Omega_i)} &= ||f(x) - c(x)u(x)||_{L^2(\Omega_i)}, \; i = 1, 2 \\
&\leqslant ||f||_{L^2(\Omega_i)} + ||c||_{L^\infty(\Omega_i)} ||u(x)||_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leqslant ||f||_{L^2(\Omega)} + ||c||_{L^\infty(\Omega)} ||u||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant ||f||_{L^2(\Omega)} + ||c||_{L^\infty(\Omega)} ||u||_{\tilde{L}^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Када се искористи оцена (3.10), добија се:

$$
\begin{aligned}
||\left(a(x)u'(x)\right)'||_{L^2(\Omega_i)} &\leqslant ||f||_{L^2(\Omega)} + ||c||_{L^\infty(\Omega)} C ||f||_{L^2(\Omega)} \\
&\leqslant \left(1 + ||c||_{L^\infty(\Omega)} C\right) ||f||_{L^2(\Omega)} \\
&= C_1 ||f||_{L^2}(\Omega), \quad i = 1, 2
\end{aligned}
$$

односно:

$$
||(a(x)u'(x))'||_{L^2(\Omega_1)} + ||(a(x)u'(x))'||_{L^2(\Omega)} \leqslant 2C_1 ||f||_{L^2(\Omega)}. \tag{3.12}
$$

С друге стране је:

$$
\begin{aligned}
||(a(x)u'(x))'||_{L^2(\Omega_i)} &= ||a(x)u''(x) + a'(x)u'(x)||_{L^2(\Omega_i)} \\
&\geqslant ||a(x)u''(x)||_{L^2(\Omega_i)} - ||a'(x)u'(x)||_{L^2(\Omega_i)}, \;\; i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

Заменом ове оцене у неједнакост 3.12, добија се

$$
||a(x)u''(x)||_{L^2(\Omega_i)} - ||a'(x)u'(x)||_{L^2(\Omega_i)} \leqslant C||f||_{L^2(\Omega)}, \;\; i = 1, 2,
$$

тј.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a_0} \sum_{i=1}^{2} ||u''(x)||_{L^2(\Omega_i)} &\leqslant C||f||_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{2} ||a'(x)u'(x)||_{L^2(\Omega_i)} \\
&\leqslant C||f||_{L^2(\Omega)} + ||a||_{W^1_\infty(\Omega)} ||u'(x)||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Одавде следи:

$$
||u''||_{L^2(\Omega_1)} + ||u''||_{L^2(\Omega_2)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a_0}} \left(C||f||_{L^2(\Omega)} + ||a||_{W^1_\infty(\Omega)} ||u'(x)||_{L^2(\Omega)}\right). \tag{3.13}
$$

Како је $||u||^2_{\tilde{H}^2_0(\Omega)} = ||u||^2_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} + ||u''||^2_{L^2(\Omega_1)} + ||u''||_{L^2(\Omega_2)}$, односно

$$
\begin{aligned}
||u||_{\tilde{H}^2_0(\Omega)} &= \left(||u||^2_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} + ||u''||^2_{L^2(\Omega_1)} + ||u''||_{L^2(\Omega_2)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(C^2||f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{a_0}\left(C||f||_{L^2(\Omega)} + ||a||_{W^1_\infty(\Omega)}||u'||_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(C^2||f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{a_0}\left(C||f||_{L^2(\Omega)} + ||a||_{W^1_\infty(\Omega)}C_1||f||_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(C^2||f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{a_0}\left(||f||_{L^2(\Omega)}\left(C + C_1||a||_{W^1_\infty(\Omega)}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Нека је $\tilde{C} = C + C_1||a||_{W^1_\infty(\Omega)}$. Тада је

$$
\begin{aligned}
||u||_{\tilde{H}^2_0(\Omega)} &\leqslant \left(C^2||f||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{a_0}||f||_{L^2(\Omega)}\tilde{C}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\left(C^2 + \frac{2}{a_0}\tilde{C}^2\right)||f||^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C^*||f||_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

што је и требало доказати.

4 Апроксимација методом коначних елемената

Нека коефицијенти једначине 3.1 задовољавају претходне претпоставке, посебно нека је $a \in W^1_\infty(\Omega)$ и $c \in L_\infty(\Omega)$. Потребно је дефинисати простор коначних елемената V_h. За сваки позитиван број $N \geqslant 2$ нека је $\{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = l\}$ партиција (подела) домена $\Omega = [0, l]$ на подинтервале $I_i = (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, N$ са дужином $h_i = x_i - x_{i-1}$. Нека је $h = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} h_i$. Најједноставнији простор коначних елемената који се дефинише на горњој партицији је:

$$V_h = \{v_h \in C^0[0,l] : v_h\big|_{I_i} \in P_1(I_i), \;\; i = 1, 2, \ldots, N, \;\; v_h(0) = 0, v_h(l) = 0\}$$

где је $P_1(I_i)$ линеарна функција.

На сваком подинтервалу I_i, v_h је полином облика $a_i + b_i x$ где су a_i и b_i непознате. Дакле, укупно $2N$ непознатих тј. степена слободе. Али, услов непрекидности у унутрашњим чворним тачкама или тачкама мреже $(x_1, \ldots, x_{N-1})$ би наметнуо $N-1$ додатних услова и још 2 гранична услова из саме поставке проблема па је тако укупни степен слободе или димензије од $V_h = N - 1$. Даље треба дефинисати базне функције од V_h. Спецификација вредности у чворним тачкама јединствено одређује елементе од V_h.

Базне функције $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1}$ се дефинишу као полиноми који задовољавају

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant N - 1$$

где је δ_{ij} Кронекеров делта симбол:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Овде су

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x - x_i}{h}, & x_i < x \leqslant x_{i+1} \\ 1 - \frac{x_i - x}{h}, & x_{i-1} < x \leqslant x_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Овако дефинисане функције $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N-1}$ чине базу простора V_h (оне су линеарно независне и непрекидне).

Мрежа је равномерна:

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,$$

$$h = \frac{1}{N}$$

и тачка ξ припада мрежи.

Претпоставимо да свака од ових функција има носач на $I_i \cup I_{i+1}$.

Сваки елемент $v_h \in V_h$ се сада може записати у облику

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_h(x_i)\varphi_i(x).$$

Апроксимација коначним елементима проблема (3.1) се сада дефинише на стандардан начин користећи Риц-Галеркинову методу:

Наћи $u_h \in V_h$ такво да

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle,\ \forall v_h \in V_h. \tag{4.2}$$

4.1 Оцена грешке у $\tilde{H}_0^1(\Omega)$

Нека је V_h коначно димензиони потпростор од $\tilde{H}_0^1(\Omega)$ који се састоји од непрекидних, део по део линеарних функција дефинисаних на подели домена $\Omega = [0, l]$.

Даље, нека је u решење проблема (3.7), а u_h решење проблема (4.2). Како једнакост (3.7) важи за сваки елемент $v \in V$ и како је $V_h \subset V$ онда важи

$$a(u, v_h) = l(v_h),\ \forall v_h \in V_h. \tag{4.3}$$

Одузимајући једнакост (4.2) од једнакости (4.3) добија се

$$a(u - u_h, v_h) = 0,\ \forall v_h \in V_h. \tag{4.4}$$

Особина (4.4) се назива Галеркинова ортогоналност и има веома важну улогу у оцени грешке. [7]

Нека је сада $v = u - u_h \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$, из коерцивности и ограничености билинеарне форме, а имајући у виду Галеркинову ортогоналност, добија се следећи низ неједнакости:

$$
\begin{aligned}
c_2||u-u_h||^2_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} &\leqslant a(u-u_h,u-u_h)\\
&= a(u-u_h,u-u_h+v_h-v_h)\\
&= a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h)-a(u-u_h,u_h)\\
&= a(u-u_h,u-v_h)\\
&\leqslant c_1||u-u_h||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)}||u-v_h||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)},
\end{aligned}
$$

одакле директно следи неједнакост

$$
||u-u_h||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} \leqslant \frac{c_1}{c_2}||u-v_h||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)},\ \forall v_h\in V_h. \tag{4.5}
$$

Овим је показана следећа лема за специјални случај $V=\tilde{H}^1_0(\Omega)$.

Лема 4.1 (Лема Цеа)**.** *Функција $u_h\in V_h$ је елемент скоро најбоље апроксимације функције $u\in V$, која је слабо решење проблема (3.7), у односу на норму $||\cdot||_V$, тј. важи*

$$
||u-u_h||_V \leqslant \frac{c_1}{c_2}\min_{v_h\in V_h}||u-v_h||_V. \tag{4.6}
$$

Нека је

$$
\tilde{a}(u,v)=\int\limits_0^l (u'(x)v'(x)+u(x)v(x))dx+u(\xi)v(\xi).
$$

Овако дефинисан функционал $\tilde{a}$ је билинеаран, симетричан и коерциван (све особине се могу лако проверити). Тада је са

$$
\langle v,w\rangle_{\tilde{a}}=\tilde{a}(v,w),\ \forall v,w\in\tilde{H}^1_0(\Omega)
$$

коректно дефинисан нови скаларни производ (лако се може проверити да $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\tilde{a}}$ задовољава аксиоме скаларног производа). Њему придружена енергетска норма се дефинише са

$$
||v||_{\tilde{a}}=\langle v,v\rangle^{\frac{1}{2}}_{\tilde{a}},\ \forall v\in\tilde{H}^1_0(\Omega).
$$

Из дефиниције билинеарног функционала $\tilde{a}$ лако се закључује следеће:

$$
||u||_{\tilde{a}}=||u||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)},\ \forall u\in\tilde{H}^1_0(\Omega). \tag{4.7}
$$

Као малопре, $V_h \subset \tilde{H}_0^1(\Omega)$, па се за $v = v_h$ добија:

$$\tilde{a}(u, v_h) = l(v_h), \ \forall v_h \in V_h, \tag{4.8}$$

$$\tilde{a}(u_h, v_h) = l(v_h), \ \forall v_h \in V_h. \tag{4.9}$$

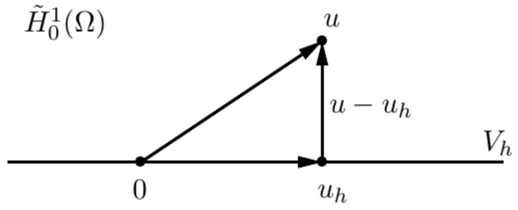
Одузимајући (4.9) од (4.8) добија се:

$$\tilde{a}(u - u_h, v_h) = 0, \ \forall v_h \in V_h,$$

односно,

$$\langle u - u_h, v_h \rangle_{\tilde{a}} = 0$$

што значи да је грешка $u - u_h$ ортогонална на V_h у односу на $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{a}}$ скаларни производ.



Даље, важи следећи низ неједнакости и једнакости за свако $u_h, v_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} ||u - u_h||_{\tilde{a}}^2 = \langle u - u_h, u - u_h \rangle_{\tilde{a}} &= \langle u - u_h, u \rangle_{\tilde{a}} - \langle u - u_h, u_h \rangle_{\tilde{a}} \\ &= \langle u - u_h, u \rangle_{\tilde{a}} - \langle u - u_h, v_h \rangle_{\tilde{a}} \\ &= \langle u - u_h, u - v_h \rangle_{\tilde{a}} \\ &\leqslant ||u - u_h||_{\tilde{a}} ||u - v_h||_{\tilde{a}}. \end{aligned}$$

Дакле,

$$||u - u_h||_{\tilde{a}} \leqslant ||u - v_h||_{\tilde{a}}, \ \forall v_h \in V_h.$$

Како је $u_h \in V_h$, то ће важити

$$||u - u_h||_{\tilde{a}} = \min_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{\tilde{a}}.$$

Овим је показана следећа лема.

Лема 4.2. *Апроксимација коначним елементима $u_h \in V_h$ функције $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ је елемент најбоље апроксимације функције u у простору V_h у енергет-*

ској норми простора V_h, тј.

$$||u - u_h||_{\tilde{a}} = \min_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{\tilde{a}}.$$

На основу ове леме сада се може закључити да важи:

$$||u - u_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} = ||u - u_h||_{\tilde{a}} = \min_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{\tilde{a}} = \min_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)}. \tag{4.10}$$

Нека је даље u решење проблема (3.7), са $I_h u(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u(x_i)\varphi_i(x) \in V_h$ се означава интерполант функције u.

Интерполант је непрекидна, део по део линеарна функција на подели домена $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ која има исту вредност као функција u у тачкама мреже $x_i,\ i = \overline{0, N}$.

Ако се изабере $v_h = I_h u$ у (4.10) добија се:

$$||u - u_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant ||u - I_h u||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)}. \tag{4.11}$$

Дакле, у намери да се оцени грешка $u - u_h$ у $\tilde{H}_0^1(\Omega)$, оцењиваће се грешка интерполације $u - I_h u$.

Овим је доказана следећа лема.

Лема 4.3. *Ако је $u \in \tilde{H}_0^1(\Omega)$ решење проблема (3.7) тада важи*

$$||u - u_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant ||u - I_h u||_{\tilde{H}_0^1(\Omega).}$$

Нешто општија лема је:

Лема 4.4. [11] *Ако решење u проблема (3.7) припада простору $\tilde{H}_0^1(\Omega)$, тада је:*

$$||u - u_h||_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c \inf_{v_h \in V_h} ||u - v_h||_{H_0^1(\Omega)} \leqslant c||u - I_h u||_{H_0^1(\Omega)}.$$

Доказ би био аналоган претходном, уз коришћење елиптичности и ограничености билинеарне форме, као и оптималног услова који задовољава приближно решење u_h:

$$a(u - u_h, u - u_h) \leqslant a(u - v_h, u - v_h),\ \forall v_h \in V_h. \tag{4.12}$$

Нека је $\tilde{a}$ билинеарни функционал уведен у одељку (4.1).

Лема 4.5. *Нека је* $u \in \tilde{H}_0^2(\Omega)$. *Тада важи:*

$$||u - I_h u||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant Ch||u||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}. \tag{4.13}$$

Доказ:

$$||u - I_h u||^2_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} = ||u - I_h u||^2_{\tilde{a}} = \int_0^l |(u - I_h u)'|^2 dx + \int_0^l |u - I_h u|^2 dx + (u - I_h u)(\xi).$$

Прво се може приметити да је сабирак $(u - I_h u)(\xi)$ једнак нули јер је ξ тачка мреже.

Затим се на други сабирак може применити Поенкаре-Фридрихсова неједнакост:

$$\int_0^l |u - I_h u|^2 dx \leqslant C_{pf} \int_0^l |(u - I_h u)'|^2 dx,$$

па је даље:

$$||u - I_h u||^2_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant (1 + C_{pf}) \int_0^l |(u - I_h u)'|^2 dx = C \int_0^l |(u - I_h u)'|^2 dx,$$

где је $C = 1 + C_{pf}$.

$$\begin{aligned}
||u - I_h u||^2_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} &\leqslant C \int_0^l |(u - I_h u)'|^2 dx \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|(u - I_h u)'\right|^2 dx \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \left(u - \sum_{j=1}^{N-1} u(x_j)\varphi_j(x) \right)' \right|^2 dx \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \left(u - \sum_{j=1}^{N-1} u_j\varphi_j(x) \right)' \right|^2 dx \\
&= C \Bigg(\int_{x_0}^{x_1} \left|(u - u_1\varphi_1(x))'\right|^2 dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left|(u - u_i\varphi_i(x) - u_{i+1}\varphi_{i+1}(x))'\right|^2 dx \\
&\quad + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left|(u - u_{N-1}\varphi_{N-1}(x))'\right|^2 dx \Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= C\Bigg(\int_{x_0}^{x_1} \left| u'(x) - u_1 \frac{1}{h} \right|^2 dx \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| u'(x) - u_i \left(-\frac{1}{h} \right) - u_{i+1} \frac{1}{h} \right|^2 dx \\
&\qquad + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left| u'(x) - u_{N-1} \left(-\frac{1}{h} \right) \right|^2 dx \Bigg) \\
&= C\Bigg(\int_{x_0}^{x_1} \left| u'(x) - \frac{1}{h}(u_1 - u_0) \right|^2 dx \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| u'(x) - \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) \right|^2 dx \\
&\qquad + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \left| u'(x) - \frac{1}{h}(u_N - u_{N-1}) \right|^2 dx \Bigg) \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| u'(x) - \frac{1}{h}(u_{i+1} - u_i) \right|^2 dx \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[u'(x) - \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(t) dt \right]^2 dx \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u'(x) - u'(t)) dt \right]^2 dx \\
&= C \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_t^x u''(s) ds dt \right]^2 dx \\
&\leqslant C \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(s) ds dt \right]^2 dx \\
&\leqslant Ch \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |u''(s)|^2 ds \ h \\
&\leqslant Ch^2 \left(\int_0^{\xi} |u''(s)|^2 ds + \int_{\xi}^{l} |u''(s)|^2 ds \right) \\
&= Ch^2 \left(|u|^2_{H^2(0,\xi)} + |u|^2_{H^2(\xi,l)} \right) \\
&\leqslant Ch^2 ||u||^2_{\tilde{H}^2_0(\Omega).}
\end{aligned}
$$

Одавде се добија тражена оцена:

$$
||u - I_h u||_{\tilde{H}^1_0(\Omega)} \leqslant Ch||u||_{\tilde{H}^2_0(\Omega)}. \ \square
$$

Из леме (4.3) и леме (4.5) директно се може закључити да важи следећа теорема:

Теорема 4.6. *Ако решење u проблема (3.7) припада простору $\tilde{H}_0^2(\Omega)$ тада метод коначних елемената конвергира и важи следећа оцена брзине конвергенције*

$$||u - u_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant Ch||u||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}.$$

4.2 Оцена грешке у $\tilde{L}^2(\Omega)$

Ако решење u проблема (3.7) припада простору $\tilde{H}_0^2$ може се лако закључити да важи и следећа оцена брзине конвергенције у $\tilde{L}^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
||u - u_h||^2_{\tilde{L}^2(\Omega)} &= ||u - u_h||^2_{L^2(\Omega)} + (u - u_h)^2(\xi) \\
&\leqslant C_1|u - u_h|^2_{H^1(\Omega)} + (u - u_h)^2(\xi) \\
&\leqslant C_1||u - u_h||^2_{H_0^1(\Omega)} + (u - u_h)^2(\xi) \\
&\leqslant C_2\left(||u - u_h||^2_{H_0^1(\Omega)} + (u - u_h)^2(\xi)\right) \\
&= C_2||u - u_h||^2_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \\
&\leqslant C_2C^*h^2||u||^2_{\tilde{H}_0^2(\Omega)} \\
&= Ch^2||u||^2_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Дакле, важи

$$||u - u_h||_{\tilde{L}^2(\Omega)} \leqslant Ch||u||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}. \tag{4.14}$$

Међутим, ова оцена се може још поправити тако да се добије оцена $\mathcal{O}(h^2)$.

Да би се доказала боља оцена грешке у простору $\tilde{L}^2(\Omega)$ користи се Аубин–Ничеов аргумент дуалности [10]. Ради једноставнијег записа, може се увести апстрактни модел проблема, као у раду [11].

Нека је H реалан сепарабилан Хилбертов простор снабдевен скаларним производом $(\cdot,\cdot)$ и нормом $||\cdot||$. Нека је A неограничен, самоадјунговани, позитивно дефинитан, линеаран оператор на H са доменом $D(A)$ који је густ на H. Производ $\langle u, v\rangle_A = \langle Au, v\rangle$ за $u, v \in D(A)$ задовољава све аксиоме скаларног производа.

Уводећи норму у простор $D(A)$: $||u||_A = \langle u, v\rangle_A^{1/2}$ добијамо енергетски простор $H_A \subset H$.

Скаларни производ $\langle u, v\rangle$ се непрекидно проширује на $H_A^* \times H_A$ где је $H_A^* = H_{A^{-1}}$ адјунговани простор простора H_A (тј. њему придружени простор). Простори H_A, H и $H_{A^{-1}}$ формирају тзв. Гељфандову тројку $H_A \subset H \subset H_{A^{-1}}$, са непрекидним и густим потапањима [13]. Оператор A се проширује на пресликавање A: $H_A \rightarrow H_{A^{-1}}$.

Нека је B још један неограничен, самоадјунговани, позитивно дефинитан линеарни оператор који делује на H, такав да је $D(A) \subset D(B) \subset H$. У принципу, A и B су некомутативни.

Линеарна једначина прве врсте у H

$$(A+B)u = f \tag{4.15}$$

може да се посматра као апстрактни модел за гранични проблем (3.1). Њено решење задовољава следеће априорне оцене:

$$||u||_B \leq ||f||_{A^{-1}BA^{-1}}, \tag{4.16}$$

$$||u||_A \leq ||f||_{A^{-1}}, \tag{4.17}$$

$$||u||_{AB^{-1}A} \leq ||f||_{B^{-1}}. \tag{4.18}$$

Одговарајућа слаба форма једначине (4.15) је

$$a(u,v) = \langle u,v\rangle_A + \langle u,v\rangle_B = \langle f,v\rangle, \;\; \forall v \in H_A \tag{4.19}$$

Билинеарна форма $a(u,v)$ је: H_A-симетрична:

$$a(u,v) = a(v,u), \;\; \forall u,v \in H_A.$$

H_A-елиптична: $a(u,u) \geq ||u||_A^2$, $\forall u \in H_A$.
и H_A-ограничена: $a(u,v) \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^2}\right) ||u||_A ||v||_A$, $\forall u,v \in H_A$.

Нека је сада специјално $H = L^2(\Omega)$. Тада се гранични проблем (3.1) своди на апстрактну форму (4.15) где је:

$$Au = -\left(u''(x)a(x) + u'(x)a'(x)\right)$$
$$Bu = \left[c(x) + k(x)\delta_S(x)\right] u(x)$$

За $U \in D(A) = H_0^2(\Omega) \cap \tilde{H}_0^1(\Omega)$ уз помоћ парцијалне интеграције добија се:

$$||u||_A^2 = \langle u, u \rangle_A = \langle Au, u \rangle = \int\limits_{\Omega} Au(x)u(x)dx = \int\limits_0^l Au(x)u(x)dx$$

Приметимо да је $Au = -(u''(x)a(x) + u'(x)a'(x)) = -(u'(x)a(x))'$.
Тада је:

$$\begin{aligned}
||u||_A^2 &= \int\limits_0^l -(u'(x)a(x))'u(x)dx = \begin{Bmatrix} U = u(x) & dV = -(u'(x)a(x))'dx \\ dU = u'(x)dx & V = -u'(x)a(x) \end{Bmatrix} \\
&= -u(x)u'(x)a(x)\Big|_0^l + \int\limits_0^l (u'(x))^2 a(x)dx \\
&= -u(l)u'(l)a(l) + u(0)u'(0)a(0) + \int\limits_0^l (u'(x))^2 a(x)dx \\
&= \int\limits_0^l (u'(x))^2 a(x)dx,
\end{aligned}$$

користећи чињеницу да је $u(0) = u(l) = 0$. Дакле, $||u||_A^2 = \int\limits_0^l (u'(x))^2 a(x)dx$.

За $a \in L^\infty(\Omega)$ под претпоставком строге елиптичности добија се да важи:

$$||u||_A \approx ||u||_{H_0^1(\Omega)},$$

тј.

$$C_1 \cdot ||u||_{H_0^1(\Omega)} \leq ||u||_A \leq C_2 \cdot ||u||_{H_0^1(\Omega)}.$$

На сличан начин је

$$H_A = \tilde{H}_0^1(\Omega).$$

Стога имамо да важи и:

$$H_{A^{-1}} = H_A^* = \left(\tilde{H}_0^1(\Omega)\right)^*$$

као и

$$||u||_{A^{-1}} \approx ||u||_{H_0^1(\Omega)} = \sup_{v \in \tilde{H}_0^1} \frac{|\langle u, v \rangle|}{||v||_{H_0^1(\Omega)}}.$$

Ако је $c \in L^{\infty}(\Omega),\ c(x) \geq c_0 > 0$ и $k > 0$ тада имамо:

$$||u||_B^2 = \int\limits_{\Omega} c(x) \cdot u^2(x)dx + ku^2(\xi) \approx ||u||^2_{L^2(\Omega)} + ku^2(\xi) \equiv ||u||_{\widetilde{L}^2(\Omega)},$$

одакле следи да је

$$H_B = \widetilde{L}^2(\Omega), \quad H_{B^{-1}} = \left(\widetilde{L}^2(\Omega)\right)^*$$

и

$$||u||_{B^{-1}} \approx \sup_{v \in \widetilde{L}^2(\Omega)} \frac{\left|{}_{\widetilde{L}^{2*}}\langle u, v\rangle_{\widetilde{L}^2}\right|}{||v||_{\widetilde{L}^2(\Omega)}}.$$

Овде ${}_{\widetilde{L}^{2*}}\langle u, v\rangle_{\widetilde{L}^2}$ означава дуално спаривање простора у $\left(\widetilde{L}^2(\Omega)\right)^* \times \widetilde{L}^2(\Omega)$.

Нека је сада V_h потпростор простора H_A. Тада одговарајућа апстрактна апроксимација проблема (4.19) гласи: наћи $u_h \in V_h$ тако да:

$$a(u_h, v_h) \equiv (u_h, v_h)_A + (u_h, v_h)_B = (f, v_h),\ \forall v_h \in V_h \tag{4.20}$$

Из (4.19) и (4.20) се добија

$$a(u - u_h, v_h) = 0,\ \forall v_h \in V_h. \tag{4.21}$$

На основу Коши–Шварцове неједнакости је:

$$(u - u_h, Bg) = (u - u_h, g)_B \leqslant ||u - u_h||_B ||g||_B,\ \forall g \in H_B,$$

тј.

$$||u - u_h||_B = \sup_{g \in H_B} \frac{|(g, u - u_h)_B|}{||g||_B} = \sup_{g \in H_B} \frac{|(Bg, u - u_h)|}{||g||_B}. \tag{4.22}$$

Нека је сада w решење једначине

$$(A + B)w = Bg.$$

Како је $g \in H_B$ онда је $Bg \in H_{B^{-1}}$ и $w \in H_{AB^{-1}A}$. Тада се добија:

$$a(v,w) = a(w,v) = (Bg, v), \ \forall v \in H_A,$$

где ако се стави $v = u - u_h$ добија се:

$$a(u - u_h, w) = (Bg, u - u_h). \tag{4.23}$$

Из (4.21) и (4.23) је

$$a(u - u_h, w - v_h) = (Bg, u - u_h). \tag{4.24}$$

Из (4.24) користећи ограниченост билинеарне форме $a(u,v)$ добија се:

$$|(Bg, u - u_h)| = |a(u - u_h, w - v_h)| \leqslant C||u - u_h||_A ||w - v_h||_A,$$

и како лева страна не зависи од v_h:

$$|(Bg, u - u_h)| \leqslant C||u - u_h||_A \inf_{v_h \in V_h} ||w - v_h||_A. \tag{4.25}$$

Сада се из теореме (4.6) добија:

$$||u - u_h||_A \leqslant C||u - u_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \leqslant Ch||u||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}, \tag{4.26}$$

док из леме (4.5) следи

$$\begin{aligned} \inf_{v_h \in V_h} ||w - v_h||_A &\leqslant C \inf_{v_h \in V_h} ||w - v_h||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \\ &\leqslant C||w - I_h w||_{\tilde{H}_0^1(\Omega)} \\ &\leqslant Ch||w||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Штавише, из (4.18) следи:

$$||w||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)} \leqslant C||w||_{AB^{-1}A} \leqslant C||Bg||_{B^{-1}} = C||g||_B. \tag{4.28}$$

На крају, из (4.22) и (4.25)-(4.28) коначно се добија оцена грешке у норми простора $\tilde{L}^2(\Omega)$:

$$||u - u_h||_{\tilde{L}^2(\Omega)} \leqslant Ch^2||u||_{\tilde{H}_0^2(\Omega)}. \tag{4.29}$$

На овај начин је доказана следећа теорема:

Теорема 4.7. *Ако решење u проблема (3.7) припада простору* $\tilde{H}_0^2(\Omega)$ *онда метод коначних елемената конвергира у норми* $\tilde{L}^2(\Omega)$ *и задовољена је оцена (4.29) брзине конвергенције.*

5 Нумерички експеримент

У овом поглављу ће претходна теорија бити илустрована на примеру. Проблем који се посматра је проблем

$$-(a(x)u'(x))' + c(x)u(x) = f(x),\ x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

$$u(x) = 0,\ x \in \Gamma,$$

специјално за $a(x) = c(x) = 1$, док су за $x = \xi$ испуњени услови конјугације

$$[u]_\xi = 0 \quad \text{и} \quad [a(x)u'(x)]_\xi = ku(\xi).$$

Овде је $\xi = \frac{1}{2}$.

Нека је

$$f(x) = |\sin 2\pi x|(1 + 4\pi^2) + \sin \pi x(1 + \pi^2)$$

и $k = 4\pi$. Тачно решење посматраног проблема и за задату функцију f је

$$u(x) = \sin \pi x + |\sin 2\pi x|.$$

Даље се формира еквидистантна мрежа

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,$$

где је $N = 2^m + 1$ за $m \geqslant 2$ и $h = \frac{1}{2^m}$.

Нека је $V_h = \mathcal{L}\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{N-1}\}$ за

$$\varphi_i(x) = \left(1 - \frac{|x - x_i|}{h}\right)_+, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Нумерички ред конвергенције је добијен по формули:

$$R = \log_2 \frac{||u - u_h||_{\tilde{L}^2(0,1)}}{||u - u_{\frac{h}{2}}||_{\tilde{L}^2(0,1)}}$$

за случај испитивања и рачунања грешке у $\tilde{L}^2(0,1)$, односно

$$R = \log_2 \frac{||u - u_h||_{\tilde{H}_0^1(0,1)}}{||u - u_{\frac{h}{2}}||_{\tilde{H}_0^1(0,1)}},$$

за посматрани случај у $\tilde{H}_0^1(0,1)$.

$\tilde{L}^2$ норма грешке се рачуна по формули

$$||u-u_h||_{\tilde{L}^2(0,1)} = \left(\int_0^1 |u(x)-u_h(x)|^2 dx + (u-u_h)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$\tilde{H}_0^1$ норма грешке се рачуна по формули

$$||u-u_h||_{\tilde{H}_0^1(0,1)} = \left(\int_0^1 |u(x)-u_h(x)|^2 dx + \int_0^1 |u(x)-u_h(x)|' dx + (u-u_h)^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

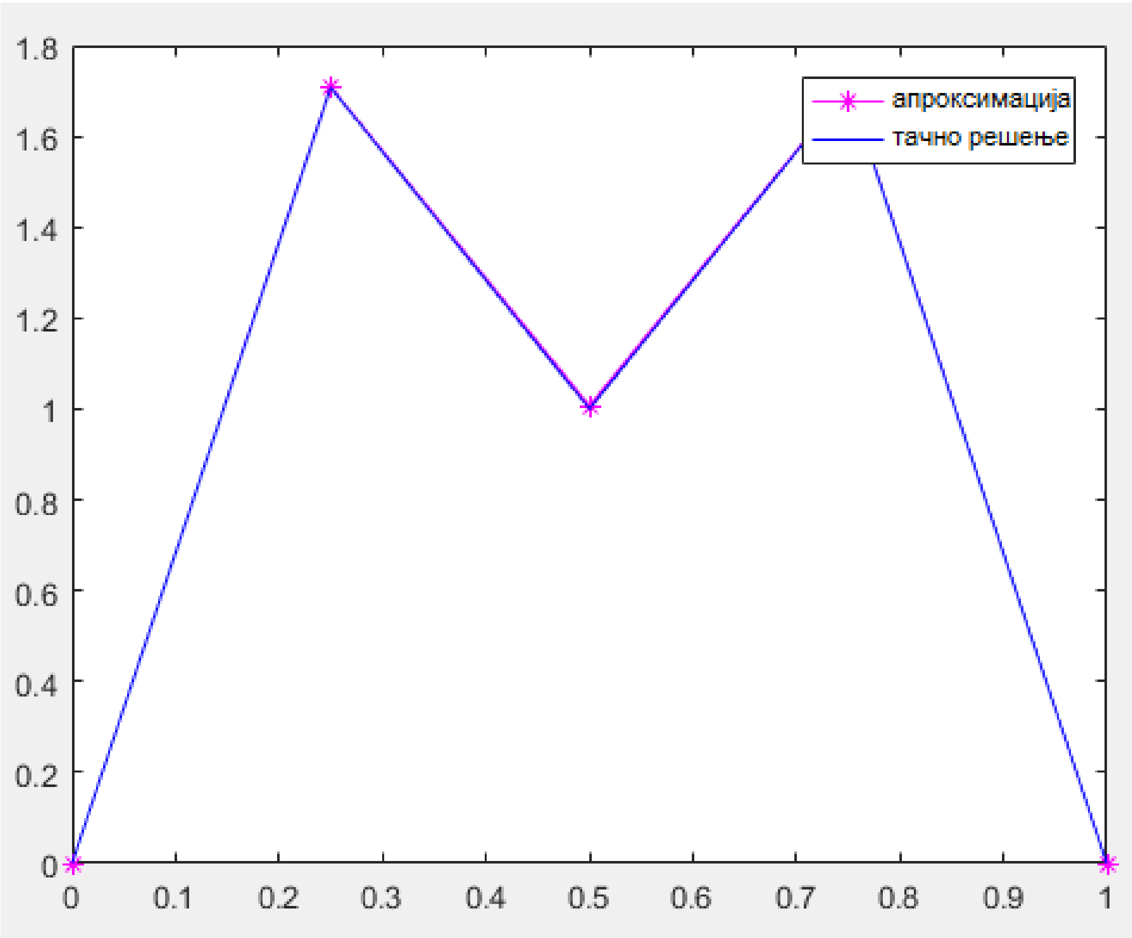
Вредности ових норми су рачунате у Matlabu помоћу уграђене функције integral.
Табела 1. $\tilde{L}^2(0,1)$ норма грешке, нумерички ред конвергенције за f и $h = \frac{1}{2^m}$.

N	Норма грешке	Ред конвергенције
5	1.6320e-01	
		1.9526
9	4.2164e-02	
		1.9873
17	1.0634e-02	
		1.9968
33	2.6646e-03	
		1.9992
65	6.6651e-04	
		1.9998
129	1.6665e-04	
		1.9999
257	4.1664e-05	
		2.000
513	1.0416e-05	

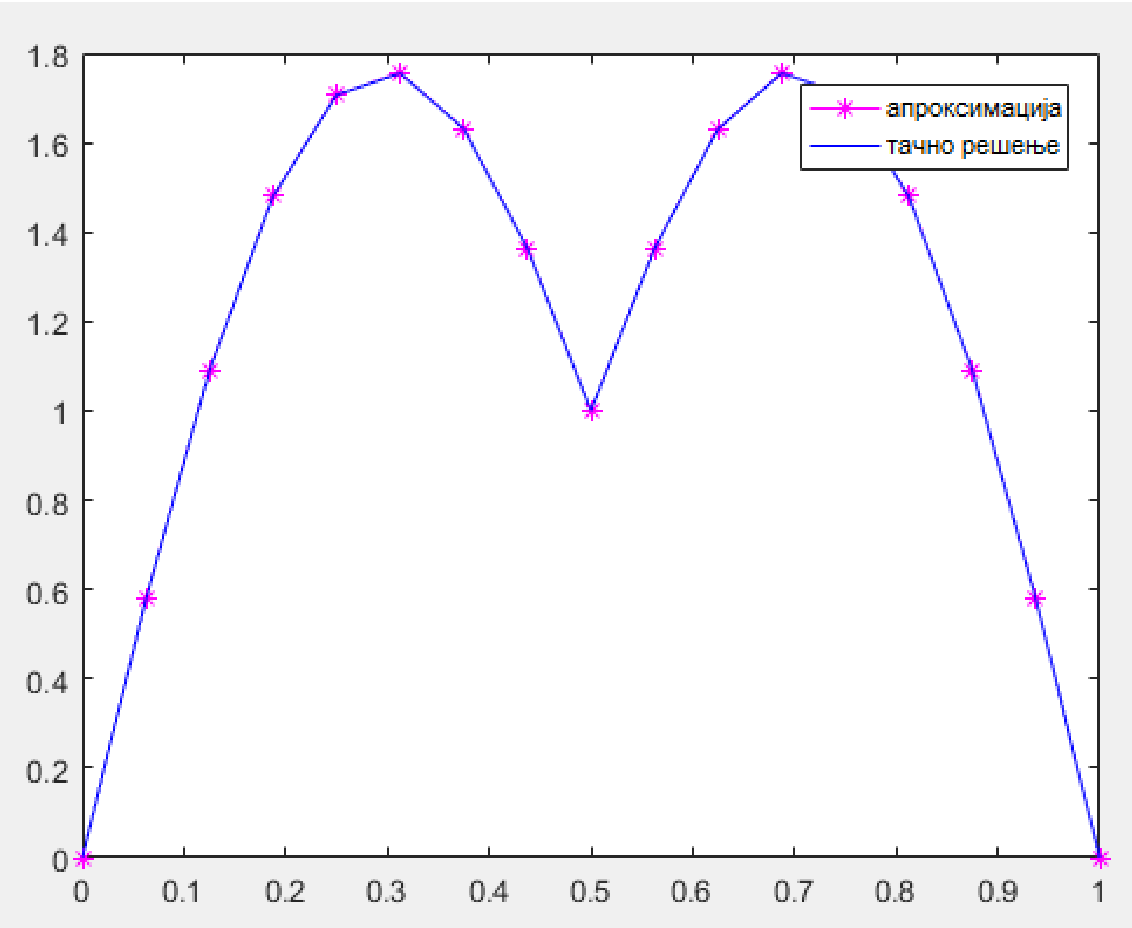
Табела 2. $\tilde{H}_0^1(0,1)$ норма грешке, нумерички ред конвергенције за f и $h = \frac{1}{2^m}$.

N	Норма грешке	Ред конвергенције
5	2.4212e+00	
9	1.2235e+00	0.9847
17	6.1354e-01	0.9958
33	3.0700e-01	0.9989
65	1.5353e-01	0.9997
129	7.6768e-02	0.9999
257	3.8384e-02	1.0000
513	1.9192e-02	1.0000

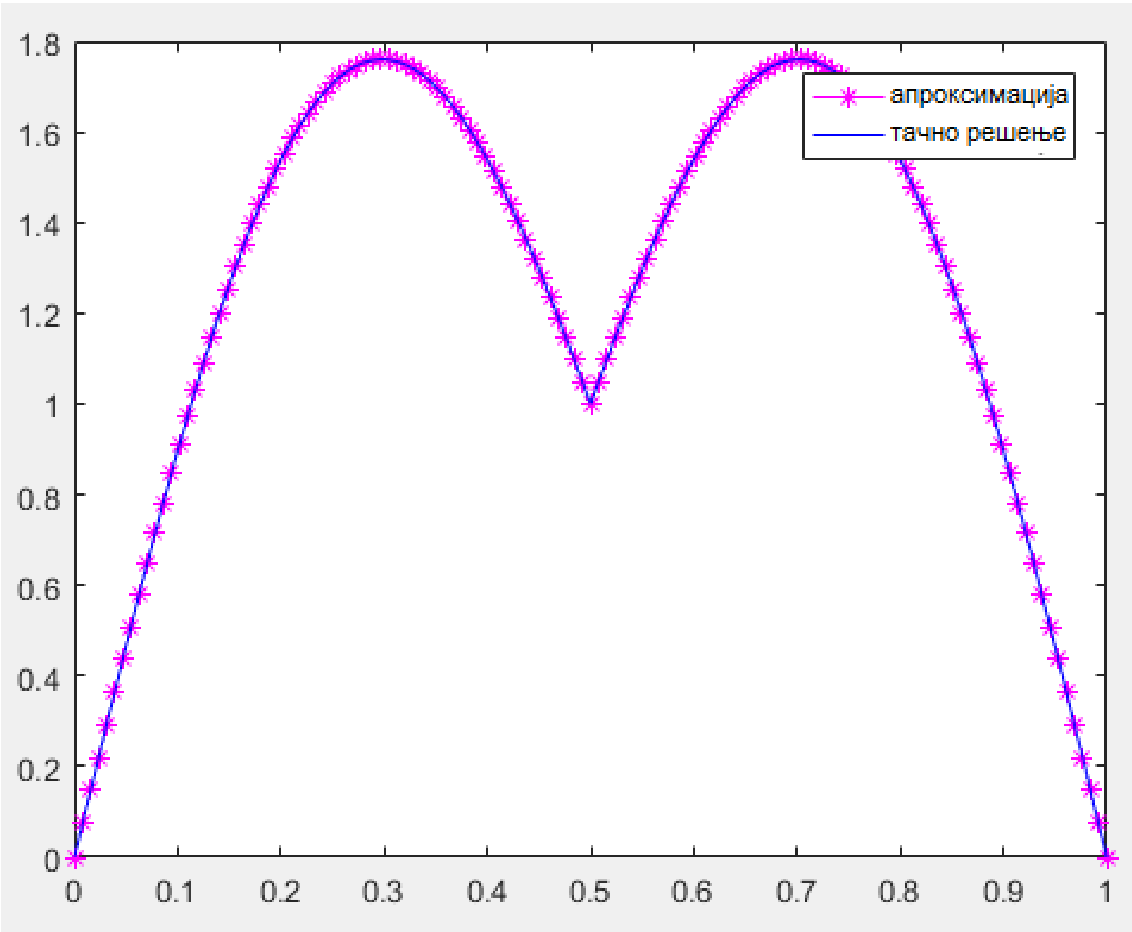
Дакле, на основу вредности из табела се може закључити да је нумерички експеримент потврдио теоријске резултате добијене у раду, тј. добијени су очекивани редови конвергенције, у $\tilde{H}_0^1$ норми то је 1, у $\tilde{L}^2$ норми је 2.



Слика 1: Решење за $n = 5$



Слика 2: Решење за $n = 17$



Слика 3: Слика Решење за $n = 129$

Литература

[1] A. Delić, *Difuziono-talasna jednačina razlomljenog reda sa koncentrisanim kapacitetom i njena aproksimacija metodom konačnih elemenata*, doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, 2016.

[2] A. Ern, J.-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[3] A. I. Saichev, W. A. Woyczynski, *Distributions in the Physical and Engineering Sciences*, Birkhauser Basel, 2013.

[4] B. S. Jovanović, *The Finite Difference Method for Boundary Value Problems with Weak Solutions*, Matematički institut, Beograd, 1993.

[5] B. S. Jovanović, *Parcijalne jednačine*, Matematički fakultet, Beograd, 1999.

[6] B. S. Jovanović, E. Suli, *Analysis of Finite Difference Schemes: For Linear Partial Differential Equations with Generalized Solutions*, Springer-Verlag, London, 2014.

[7] E. Suli, *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations*, Mathematical Institute, University of Oxford, 2000.

[8] M. Dostanić, D. Jocić, M. Arsenović, *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012.

[9] R. R. C. Renardy, Michael, *An Introduction to Partial Differential Equations*, New York, 2004.

[10] S. Brenner, R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer Berlin Heidelberg, 2008.

[11] B. S. Jovanović, L. G. Vulkov, *Finite Element Approximation of an Elliptic Boundary Value Problem with Interface*, (Eds):NAA 2008,LNCS 5434, pp56-67,2009, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[12] V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Marcel Dekker, Inc., 1971.

[13] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolov Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.