МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ

МАСТЕР РАД

ЈАКЕ АКСИОМЕ БЕСКОНАЧНОСТИ

КАНДИДАТ
ЖИВАН КОСТАДИНОВИЋ

МЕНТОРИ
ПРОФ. ДР АЛЕКСАНДАР ЈОВАНОВИЋ
ДОЦ. ДР АЛЕКСАНДАР ПЕРОВИЋ

БЕОГРАД 2013.

Предговор

Оригинална мотивација за овај рад била је моја жеља да пишем о недостиживим кардиналима. С тога је овај рад конципиран као излагање основних резултата кардиналне аритметике уз навођење неких сложенијих резултата без доказа и као такав може послужити као увод у модерне теорије које се баве кардиналном аритметиком.

У поглављу 1 дајемо преглед ознака, дефиниција и теорема које ћемо користити кроз рад. Од читаоца се очекује познавање Цермело – Френкелове аксиоматике (ZF), аксиоме избора и њених еквивалената и основних чињеница у ординалним и кардиналним бројевима.

У поглављу 2 дефинисаћемо уз помоћ појма кофиналности степеновање кардинала. У поглављу 3 презентоваћемо две врло значајне теореме: Буковски – Хехлерову и Јехову, и бавићемо се питањем какве резултате можемо добити ако аксиомама ZFC придодамо још неке претпоставке генерализоване хипотезе континуума.

У поглављу 4 о мерљивим кардиналима имамо значајна својства разноврсног порекла која се концентришу на ове објекте. Такође, у увом поглављу о реално – великим кардиналима приказана је Соловејева теорема којом је доказана еквиконсистентност теорија ZFC + „постоји тотално σ - адитивно проширење Лебегове мере“ и ZFC + „постоји мерљив кардинал“, као и уопштења и примене њихових резултата.

На крају, желим да се захвалим менторима проф. др Александру Јовановићу и доц. др Александру Перовићу, као и проф. др Жарку Мијајловићу на великој помоћи при избору теме и на стрпљењу за време израде овог рада.

Садржај

0

Увод

„Бесконачност! Ниједно питање није тако дубоко узнемирило човечији дух (...).“ Тако пише Хилберт о бесконачности.

Теологија, филозофија и, наравно, математика се баве бесконачношћу, која је јако проблематични појам у свим тим областима. У току историје велики мислиоци су пробали разјаснити шта је бесконачност.

Већ је Аристотел разликовао две врсте бесконачности: потенцијалну и актуелну. Потенцијална бесконачност је била позната и у математици. На пример низ природних бројева је у таквом смислу бесконачан: један процес који се може бескрајно наставити. А говоримо о актуелној бесконачности ако на пример мислимо на целину (скуп) свих природних бројева, која је једна завршена ствар. Очигледно да постоји разлика између те две бесконачности. Актуелна бесконачност је изузетно тешко призната од стране математичара фундаменталиста. Георг Кантор је урадио велику иновацију у математици, с тим да је увео актуелну бесконачност и израдио основе теорије скупова. У тадашњем времену многи су били скептични што се тиче Канторове идеје, али његови следбеници су показали да су ове мисли оправдане и тачне.

У овом раду бавимо се бесконачним кардиналима, посебно недостиживим и видећемо да се они могу сматрати за уопштење природних бројева и као такви, они су бесконачни бројеви у теорији скупова, тако што се и на њима уводе операције аналогне операцијама на бројевима. Тако настаје трансфинитна аритметика. Радимо у Цермело – Френкеловом систему аксиома (ознака: ZF систем) са аксиомом избора (ознака: ZFC систем). Аксиому избора скраћено означавамо са AC.

<u>Аксиоме ZFC</u>

Аксиома 1 (Аксиома екстензионалности)

$\forall x_0 \forall x_1 \big(x_1 = x_1 \Leftrightarrow \forall x_2 (x_2 \in x_0 \Leftrightarrow x_2 \in x_1)\big).$

Аксиома 2 (Аксиома празног скупа)

$\exists x_0 \forall x_1 \neg (x_1 \in x_0).$

Аксиома 3 (Аксиома пара)

$\forall x_0 \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 (x_3 \in x_2 \Leftrightarrow x_3 = x_0 \vee x_3 = x_1).$

Аксиома 4 (Аксиома уније)

$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \big(x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_3 (x_3 \in x_0 \wedge x_2 \in x_3)\big).$

Аксиома 5 (Аксиома партитивног скупа)

$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 \big(x_2 \in x_1 \Leftrightarrow \forall x_3 (x_3 \in x_2 \Rightarrow x_3 \in x_0)\big).$

Аксиома 6 (Аксиома бесконачности)

$\exists x_0 \big(0 \in x_0 \wedge (\forall x_1 \in x_0)(x_1 \cup \{x_1\} \in x_0)\big).$

Схема 1 (Схема сепарације) Нека је φ формула ZFC теорије скупова у којој се променљива x_2 јавља слободно и у којој променљива x_1 нема слободних јављања. Тада је универзално затворење формуле

$$\forall x_0 \exists x_1 \forall x_2 (x_2 \in x_1 \Leftrightarrow x_2 \in x_0 \wedge \varphi)$$

инстанца схеме сепарације.

Схема 2 (Схема замене) Нека је φ формула ZFC теорије скупова у којој се променљиве x_2 и x_3 јављају слободно и у којој променљива x_1 нема слободних јављања. Тада је универзално затворење формуле

$$\forall x_0 \Big(\forall x_2 (x_2 \in x_0 \Rightarrow \exists_1 x_3 \varphi) \Rightarrow \exists x_1 \forall x_3 \big(x_3 \in x_1 \Leftrightarrow \exists x_2 (x_2 \in x_0 \wedge \varphi)\big)\Big)$$

инстанца схеме замене.

Аксиома 7 (Аксиома избора)

$\forall x_0 (\exists f : P(x_0) \longrightarrow x_0)\big(\forall x_1 \in P(x_0)\big)(x_1 \neq 0 \Rightarrow f(x_1) \in x_1).$

Теорема 1 *Следећи искази су еквивалентни:*

1) **Аксиома избора** *Сваки скуп има функцију избора;*
2) **Цермелова теорема** *Сваки скуп се може добро уредити;*
3) **Цорнова лема** *Ако у неком уређењу сваки ланац има мајоранту, онда то уређење има максималан елемент;*
4) **Хаусдорфов став максималности** *Сваки ланац у произвољном парцијалном уређењу се може продужити до максималног ланца.*

1

Уводне ознаке и теореме

Даћемо кратак преглед у којем ћемо се подсетити на неке резултате и увести ознаке које ћемо користити у даљем излагању. Нећемо у детаље наводити све дефиниције и теореме, него само оне на које ћемо се директно позивати у каснијим поглављима. Ако је читалац заинтересован за доказ неких од тврђења може га наћи у [2] или [3].

Систем у којем радимо је аксиоматски **ZFC**, јер велики број резултата у кардиналној аритметици зависи од аксиоме избора. Ради једноставнијег излагања разматраћемо неке објекте за које нам се чини да не спадају у **ZFC**, с тога ћемо их раздвојити по класама ординалних и кардиналних бројева. Да је то изводљиво у **ZFC** читалац се може уверити у литератури [2].

1.1 Релације и функције

Декартов производ скупова A и B, у ознаци $A \times B$, дефинишемо као скуп свих уређених парова чија прва координата припада скупу A а друга скупу B.

Дефиниција 1.1. Релација је било који подскуп Декартовог производа произвољних непразних скупова A и B. Ако је $\rho \subset (A \times B)$ и $(x, y) \in \rho$, онда кажемо да је x у релацији са y.

У овом делу даћемо дефиницију функције као специјалне врсте релације.

Дефиниција 1.2. Нека је $\rho \subseteq A \times B$ бинарна релација. Дефинишемо:

$$dom\rho = \{x | x \in A \land (\exists y \in B)(x\rho y)\} \text{ (домен релације)},$$

$$rng\rho = \{y | y \in B \land (\exists x \in A)(x\rho y)\} \text{ (слика релације)}.$$

Дефиниција 1.3. Релацију $f \subseteq A \times B$ за коју важи

$$(domf = A) \land (\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall y' \in B)\big((x, y) \in f \land (x, y') \in f \to y = y'\big)$$

кажемо да је функција са A у B. Пишемо $f: A \to B$.

Нека је $x \in A$. Тада $y \in B$ такав да је $(x, y) \in f$, означавамо $f(x)$. Скуп свих функција са A у B означавамо са ${}^{B}A$ тј.:

$$^{B}A = \{f | f: A \to B\}$$

Напомена 1.4. Уобичајено је да слику функције f обележавамо са $\mathrm{Im}f$, овде ћемо слику функције f обележавати са $\mathrm{rng}f$. Нема потребе за увођењем нове ознаке јер се слика функције f дефинише као слика релације f.

Ако је $\mathrm{dom}f$ прави подскуп скупа A, за функцију f кажемо да је *парцијална*. У случају да је $\mathrm{dom}f = A$, за функцију f кажемо да је *тотална*.

Дефиниција 1.5. Нека је $f: A \to B$, нека је $X \subseteq A$. Слика скупа X по функцији f је

$$f[X] = \{y | (\exists x \in X)(y = f(x))\}.$$

За означавање слике скупа користимо угласте заграде како бисмо избегли конфузију око тога мислимо ли на вредност функције или слику скупа.

Дефиниција 1.6. Пар $(A, \leq_A)$ је *парцијално уређен скуп* (парцијално уређење) ако је $\leq_A$ релација поретка на скупу A. Пар $(A, <_A)$ је *строго парцијално уређење* ако је $<_A$ релација строгог поретка на скупу A.

Дефиниција 1.7. Парцијално уређење $(A, \leq_A)$ је *линеарно* ако су свака два елемента упоредива, тј. ако за произвољне $a, b \in A$ је $a \leq_A b$, или је $b \leq_A a$.

За парцијално уређен скуп $(A, \leq_A)$ кажемо да је *добро уређен* ако сваки непразан подскуп скупа A има минимум.

Свако добро уређење уједно је и линеарно.

Дефиниција 1.8. Нека су $(A, \leq_A)$ и $(B, \leq_B)$ произвољна уређења. Бијекција $f: A \to B$ је *изоморфизам* ако за произвољне $a_1, a_2 \in A$ важи

$$a_1 \leq_A a_2 \Leftrightarrow f(a_1) \leq_B f(a_2).$$

Са $(A, \leq_A) \cong (B, \leq_B)$ ћемо означавати чињеницу да су наведена уређења међусобно изоморфна.

1.2 Ординални бројеви

Дефиниција 1.9. За скуп A кажемо да је *транзитиван* ако је сваки његов елемент уједно и његов подскуп, тј. задовољава услов

$$(\forall x)(x \in A \Rightarrow x \subseteq A).$$

Дефиниција 1.10. Скуп α називамо *ординал* или *ординални број* ако је транзитиван и строго линеарно уређен у односу на релацију $\in$. Ординале ћемо означавати малим грчким словима α, β, γ ... уз коришћење индекса, а са **Ord** или **On** ћемо означавати класу свих ординала (односно својство „бити ординал“: On(x) акко x је ординал).

На основу аксиоме регуларности, свако линеарно уређење облика $(A, \in)$ мора бити добро ($\in$-минимални елемент сваког непразног подскупа од A је јединствен). Дакле, за ординал $\alpha > 0$ структура $(\alpha, \in)$ је строго добро уређење. Истакнимо услов антирефлексивности:

$$\alpha \notin \alpha.$$

Дефиниција 1.11. Нека је α ординал. Ординал $\alpha + 1 \overset{\text{def}}{=} \alpha \cup \{\alpha\}$ називамо следбеник од α. Ако постоји ординал чији је α следбеник, онда за α кажемо да је *ординал следбеник*. Ако ординал $\alpha \neq 0$ није следбеник, онда га зовемо *гранични ординал*. Класу граничних ординала означавамо са **Lim**.

Дефиниција 1.12. Кажемо да је ординал α мањи од ординала $\beta(\alpha < \beta)$, ако је $\alpha \in \beta$. (Релација $\in$ је тотално уређење на класи **Ord)**.

За ординалне бројеве α и β, $\alpha < \beta$ дефинишемо интервал ординалних бројева

$$(\alpha, \beta)_{\mathbf{On}} \overset{\text{def}}{=} \{\gamma | \gamma \in \mathbf{On} \land \alpha < \gamma < \beta\}.$$

Аналогно дефинишемо $(\alpha, \beta]_{\mathbf{On}}$, $[\alpha, \beta)_{\mathbf{On}}$ и $[\alpha, \beta]_{\mathbf{On}}$.

Теорема 1.13. ***(Трансфинитна индукција)***
Нека је $F(x)$ формула језика теорије ZF. Претпоставимо **да $\boldsymbol{F(x)}$** има следеће својство:

$$ZF \vdash (\forall \alpha)\big((\forall \beta < \alpha) F(\beta) \Rightarrow F(\alpha)\big).$$

(Са α и β су означени ординални бројеви).
Тада за сваки ординал α важи $ZF \vdash F(\alpha)$.

<u>Доказ.</u> Претпоставимо супротно тј. да постоји ординални број α тако да $F(\alpha)$ није тачно. Нека је $A = \{\beta \leq \alpha | \text{није тачно } F(\beta)\}$. Пошто је A непразан скуп ординалних бројева, тада он има најмањи елемент. Нека је γ најмањи елемент скупа A. Али, за све $\beta < \gamma$ важи $F(\beta)$, па из претпоставке теореме следи да важи и $F(\gamma)$. То је у контрадикцији са чињеницом да је $\gamma \in A$. ■

Сада ћемо навести **теорему рекурзије** која ће нам омогућити да сабирање, множење и степеновање можемо дефинисати за све ординалне бројеве. Теорема рекурзије није само важна за дефиниције операција на ординалним бројевима, већ и за дефиницију **кумулативне хијерархије**, тј. за дефиницију функције

$$\alpha \mapsto V_a = \{\mathcal{P}(V_\beta) | \beta < \alpha\}.$$

У теореми говоримо о функцијама које су дефинисане за сваки ординални број, тј. за све $\alpha \in Ord$.

Нагласимо да је следећа теорема тзв шема теорема теорије ZF.

Теорема 1.14. ***(Теорема рекурзије)***
Нека је A гранични ординални број или класа Ord свих ординалних бројева. Нека је S нека произвољна класа. Нека је, затим, $s_0 \in S$ и $G: S \to S$ произвољна функција. Нека је

$$\Phi = \{f | \text{постоји гранични ординални број } \beta \in A \text{ такав да је } f: \beta \to S\}.$$

Нека је $F: \Phi \to S$ произвољна функција.
Тада постоји јединствена функција $\varphi: A \to S$ тако да за сваки $\beta \in A$ важи

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} s_0, & \text{ако је } \beta = 0, \\ G(\varphi(\gamma)), & \text{ако је } \beta = \gamma + 1, \\ F(\varphi|\beta), & \text{ако је } \beta \text{ гранични ординал.} \end{cases}$$

Доказ. Прво дефинишемо неке појмове, па доказујемо лему и општу теорему рекурзије.

Нека је A нека класа и $<$ парцијално уређење на A. Кажемо да је $<$ добро уређење на A ако сваки непразан *подскуп* (ПАЗИ! Не подкласа!) B од A има најмањи елемент.

Лема 1.15. Нека је A нека класа и $<$ добро уређење на A. Ако $a \in A$ није највећи елемент тада за a постоји непосредни следбеник.

Доказ. Пошто a није највећи елемент тада је $B = \{y \in A | a < y\}$ непразан подскуп од A. Тада је најмањи елемент од B непосредни следбеник од a. ■

Дефинишимо функцију $H: \Phi \to S$ на следећи начин тако да је за свако $f \in \Phi$

$$H(f) = \begin{cases} s_0, & \text{ако је } f = \emptyset, \\ G(f(\beta)), & \text{ако је } Dom(f) = \beta + 1, \\ F(f), & \text{ако је } Dom(f) \text{ гранични ординал.} \end{cases}$$

Постоји јединствена функција $\varphi: \Phi \to S$ тако да за сваки $\beta \in A$ важи $\varphi(\beta) = H(\varphi|\beta)$.

Проверимо да функција φ задовољава услове из исказа теореме.
Очигледно је $\varphi(0) = H(\varphi|0) = H(\emptyset) = s_0$.
Ако је $\beta = \gamma + 1$ тада имамо: $\varphi(\beta) = H(\varphi|\gamma + 1) = (\text{из деф. функције } H) = G(\varphi(\gamma))$.
Ако је β гранични ординални број тада имамо: $\varphi(\beta) = H(\varphi|\beta) = (\text{из деф. функције } H) = F(\varphi|\beta)$.
Лако је видети да је функција φ јединствена. ■

Теорема 1.16. ***(Теорема енумерације)***
За сваки добро уређен скуп $(A, <)$ постоји јединствени ординални број α који је сличан са A.

Дефиниција кумулативне хијерархије (примена теореме рекурзије)
Са Ord означимо класу свих ординалних бројева, а са V означимо класу свих скупова.
Нека је $s_0 = \emptyset$, функција $G: V \to V$ нека је дефинисана са $G(x) = \mathcal{P}(x)$ (са $\mathcal{P}(x)$ је означен партитивни скуп од x). Као и у теореми рекурзије

$$\Phi = \{f | \text{постоји гранични ординални број } \beta \text{ такав да } f: \beta \to V\}.$$

Затим, нека је функција $F: \Phi \to V$ функција дефинисана овако: ако је $f \in \Phi$, чији је домен гранични ординални број β, тада је $F(f) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(y)$.

Из теореме рекурзије следи да постоји јединствена функција $\varphi: Ord \to V$ која има тражена својства. За $\alpha \in Ord$ означимо $V_\alpha = \varphi(\alpha)$. Тада имамо:

$$V_0 = \varphi(0) = \emptyset,$$

$$V_{\alpha+1} = \varphi(\alpha + 1) = G(\varphi(\alpha)) = \mathcal{P}(V_\alpha),$$

$$V_\alpha = \varphi(\alpha) = F(\varphi|\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta) = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta.$$

Добили смо дефиницију кумулативне хијерархије.

Сабирање ординалних бројева

Нека је α произвољан ординални број. Из теореме рекурзије следи да постоји јединствена функција $\varphi_\alpha: Ord \to Ord$ тако да важи:

$$\varphi_\alpha(0) = \alpha,$$

$$\varphi_\alpha(\beta + 1) = \varphi_\alpha(\beta) + 1,$$

$$\varphi_\alpha(\beta) = \sup\{\varphi_\alpha(\gamma) | \gamma < \beta\}, \text{ако је } \beta \text{ гранични ординални број.}$$

Дефинишимо функцију $+ : Ord \times On \to Ord$ са $\alpha + \beta = \varphi_\alpha(\beta)$. Односно, кратко можемо рећи да применом теореме рекурзије следи да постоји јединствена функција $+ : Ord \times Ord \to Ord$ која има следећа својства:

$$\alpha + 0 = \alpha,$$

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$

$\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma | \gamma < \beta\}$, ако је β гранични ординални број.

Управо дефинисану функцију називамо **сабирање ординалних бројева**.

Став 1.17. (Својства сабирања ординалних бројева)
Нека су α, β и γ произвољни ординални бројеви. Тада важи:

а) $0 + \alpha = \alpha$,

б) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$,

в) Ако је $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ тада је $\beta = \gamma$.

Доказ. Доказаћемо тврђење б). Доказ изводимо трансфинитном индукцијом по γ. Претпоставимо да је γ ординални број који има својство да за све $\delta < \gamma$, и све ординалне бројеве α и β важи $(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$. Размотримо прво случај када је ординални број γ прве врсте, тј. постоји ординални број δ тако да важи $\gamma = \delta + 1$. Тада имамо:

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \gamma) &= \alpha + \big(\beta + (\delta + 1)\big) = \\
&= (\text{деф. сабирања}) = \alpha + \big((\beta + \delta) + 1\big) \\
&= (\text{деф. сабирања}) = \big(\alpha + (\beta + \delta)\big) + 1 \\
&= (\text{индукција}) = \big((\alpha + \beta) + \delta\big) + 1 \\
&= (\text{деф. сабирања}) = (\alpha + \beta) + (\delta + 1) \\
&= (\alpha + \beta) + \gamma.
\end{aligned}$$

Нека је сада γ гранични ординални број такав да за све ординалне бројеве $x < \gamma$, и све ординалне бројеве α и β важи тврђење. Тада редом имамо:

$$\begin{aligned}
\alpha + (\beta + \gamma) &= \alpha + (\beta + \sup\{x | x < \gamma\}) \\
&= (\text{деф. сабирања}) = \alpha + \sup\{\beta + x | x < \gamma\} \\
&= (\text{деф. сабирања}) = \sup\{\alpha + (\beta + x) | x < \gamma\}
\end{aligned}$$

$= (\text{индукција}) = \sup\{(\alpha + \beta) + x | x < \gamma\}$

$= (\text{деф. сабирања}) = (\alpha + \beta) + \sup\{x | x < \gamma\}$

$= (\alpha + \beta) + \gamma.$ ■

Напомена 1.18. У општем случају сабирање ординалних бројева **није комутативно**, јер, на пример, $1 + \omega = \omega$, $\omega + 1 \neq \omega$, тј. $1 + \omega = \sup\{1 + n | n \in \omega\} = \omega$, али $\omega + 1 \neq \omega$ јер знамо да важи $\omega < \omega + 1$.
Уопште, из $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$ **не мора да следи** $\beta = \gamma$ (нпр. $1 + \omega = 2 + \omega$).

Одузимање ординалних бројева

Став 1.19. За сваки ординални број α ординални број $\alpha + 1$ је непосредни следбеник од α. Ако су α и β ординални бројеви за које важи $\alpha < \beta$ тада је $\alpha + 1 \leq \beta$.

Доказ. Докажимо да је $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ непосредни следбеник од α. Очигледно је $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$, тј. $\alpha < \alpha + 1$. Претпоставимо да постоји ординални број β тако да важи $\alpha < \beta < \alpha + 1$. Тада из дефиниције уређења следи $\alpha \in \beta$ и $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Из овог последњег следи да је $\beta \in \alpha$ или $\beta \in \{\alpha\}$. Ако би важило $\beta \in \alpha$ тада из $\alpha \in \beta$ следи $\alpha \in \alpha$, што је немогуће због аксиоме добре заснованости. То значи да мора да важи $\beta \in \{\alpha\}$, тј. $\beta = \alpha$. Али, ово последње $\alpha \in \beta$ доводи до $\alpha \in \alpha$.

Докажимо сада друго тврђење. Ако је $\alpha < \beta$, онда је $\alpha \in \beta$ (по деф. 1.12.). Ако претпоставимо да је $\beta < \alpha + 1$ тада је $\beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Из овог последњег следи да су могућа следећа два случаја: $\beta \in \alpha$ или $\alpha = \beta$. Оба случаја указују да је $\beta \in \beta$, тј. у контрадикцији са аксиомом добре утемељености. Мора бити $\beta + 1 \leq \alpha$. ■

Лема 1.20. Нека је $A \subseteq ORD$. Тада $\bigcup A \in ORD$ и $\sup A = \bigcup A$.

Доказ. Прво покажимо да је $\bigcup A$ транзитиван скуп. Нека $x \in \bigcup A$. Тада постоји $\alpha \in A$ тако да $x \in \alpha$. Како је α ординал, α је транзитиван скуп, па имамо да је $x \subseteq \alpha$. Коначно, из $\alpha \in A$ следи да је $\alpha \subseteq \bigcup A$, одакле по транзитивности инклузије добијамо да је $x \subseteq \bigcup A$.

Докажимо да је $\in$ строго добро уређење на $\bigcup A$, тј. да на $\bigcup A$ релација припадања задовољава услове антирефлексивности, транзитивности и линеарности.

Антирефлексивност: Нека $x \in \bigcup A$. Тада постоји $\alpha \in A$ тако да $x \in \alpha$. Како је α ординал, релација припадање је антирефлексивна на α, па мора бити $x \notin x$.

Транзитивност: Нека $x, y, z \in \bigcup A$ и нека $x \in y$ и $y \in z$. Тада постоје ординали $\alpha, \beta, \gamma \in A$ такви да $x \in \alpha$, $y \in \beta$ и $z \in \gamma$. Даље, за свака два ординала α_1 и α_2 важи тачно један од следећа три исказа: $\alpha_1 = \alpha_2$; $\alpha_1 \in \alpha_2$; $\alpha_2 \in \alpha_1$. С обзиром да су ординали транзитивни скупови, добијамо следећу трихотомију: $\alpha_1 = \alpha_2$; $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$; $\alpha_2 \subseteq \alpha_1$. Посебно, $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ је један од ординала α, β, γ. Дакле, уочени скупови x, y, z припадају истом ординалу $\alpha_0 = \alpha \cup \beta \cup \gamma = \max(\alpha, \beta, \gamma)$. На сваком ординалу је релација припадања транзитивна, па из $x \in y$ и $y \in z$ добијамо да $x \in z$.

Линеарност: Нека $x, y \in \bigcup A$ и нека је $x \neq y$. Тада постоје ординали $\alpha, \beta \in A$ такви да $x \in \alpha$ и $y \in \beta$. Слично као и у случају транзитивности, $x, y \in \gamma = \max(\alpha, \beta)$. Како је релација припадања линеарна на γ, мора бити $x \in y$ или $y \in x$ (по претпоставци је $x \neq y$).

Коначно, остаје да проверимо да је $\bigcup A = \sup A$. Нека је β произвољна мајоранта скупа A у ORD. Како је β транзитиван скуп, мора бити $\bigcup A \subseteq \beta$. Даље, $\bigcup A \in ORD$, одакле следи да $\bigcup A \in \beta$ или $\bigcup A = \beta$. Како је очигледно $\bigcup A$ мајоранта скупа A, на основу претходног следи да је $\bigcup A$ најмања мајоранта скупа A, односно да је $\bigcup A = \sup A$.

Теорема 1.21. Нека су α и β ординални бројеви такви да је $\beta \leq \alpha$. Тада постоји јединствени ординални број γ такав да важи $\alpha = \beta + \gamma$.

<u>Доказ.</u> Нека је $A = \{x | \beta + x \leq \alpha\}$ и $\gamma = \sup A$. Тада је $\beta + \gamma \leq \alpha$. Претпоставимо да је $\beta + \gamma < \alpha$. Тада је на основу става 1.19. $(\beta + \gamma) + 1 \leq \alpha$, па имамо да је $\alpha \leq (\beta + \gamma) + 1 = \beta + (\gamma + 1)$, а одавде следи да је $\gamma + 1 \in A$. Али, то је немогуће (јер би тада имали $\gamma + 1 \leq \sup A = \gamma$). ■

<u>Множење ординалних бројева</u>

Дефиниција 1.22. Применом теореме рекурзије следи да је с једнакостима које следе дефинисана јединствена функција $\cdot : Ord \times Ord \rightarrow Ord$:

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$

$\alpha \cdot \beta = sup\{\alpha \cdot \gamma | \gamma < \beta\}$, ако је β гранични ординални број.

Став 1.23. (Својства множења ординалних бројева)
Нека су α, β и γ ординални бројеви. Тада важи:

а) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$,

б) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,

в) $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$,

г) Ако $\alpha \leq \beta$ тада $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

Напомена 1.24. У општем случају множење ординалних бројева **није комутативно**. Нпр. $2 \cdot \omega = (\text{из деф.}) = \sup\{2 \cdot n | n \in \omega\}$, а са друге стране $\omega \cdot 2 = (\text{из деф.}) = \omega \cdot (1 + 1) =$

$\omega + \omega \neq \omega$, јер је очигледно (!) $\omega + \omega > \omega + 1 > \omega$.
Уопште, **не важи дистрибутивност**, тј. не мора да важи $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$. Нпр.
$\omega = 2 \cdot \omega = (1 + 1) \cdot \omega \neq \omega + \omega$.

Теорема 1.25. ***(Теорема о дељењу са остатком)***
Нека су α и β ординални бројеви, нека је $\beta > 0$. Тада постоје јединствени ординални бројеви δ и ρ такви да је $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$, и $\rho < \beta$.

Доказ. Ако је $\alpha < \beta$ тада можемо узети $\delta = 0$ и $\rho = \alpha$. Ако је $\alpha = \beta$ тада можемо узети да је $\delta = 1$ и $\rho = 0$. Претпоставимо сада да је $\alpha > \beta$. Нека је $\delta = \sup\{x | \beta \cdot x \leq \alpha\}$. Тада је $\beta \cdot \delta \leq \alpha$. Из теореме о одузимању, тј. теореме 1.21. следи да постоји ординални број ρ такав да је $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$.

Претпоставимо да важи $\beta \leq \rho$. Тада из теореме о одузимању, тј. теореме 1.21. следи да постоји ординални број γ такав да је $\rho = \beta + \gamma$. Сада из тога следи $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho = \beta \cdot \delta + (\beta + \gamma) = \beta \cdot (\delta + 1) + \gamma$, па δ није супремум скупа $\{x | \beta \cdot x \leq \alpha\}$, што је супротно претпоставци. То значи да мора важити $\rho < \beta$.

Докажимо јединственост. Нека је $\alpha = \beta \cdot \delta + \rho$, где је $\rho < \beta$. Претпоставимо да δ није супремум скупа $\{x | \beta \cdot x \leq \alpha\}$. Тада је очигледно $\alpha > \beta \cdot \delta$, а онда је $\alpha \geq \beta \cdot (\delta + 1)$. Сада имамо:

$$\alpha \geq \beta \cdot (\delta + 1) = \beta \cdot \delta + \beta > \beta \cdot \delta + \rho = \alpha,$$

што је немогуће. Тиме је доказана јединственост ординалног броја δ. Јединственост ординалног броја ρ следи из става 1.17. ■

Степеновање ординалних бројева

Дефиниција 1.26. Применом теореме рекурзије следи да је једнакостима које следе дефинисана јединствена функција на $On \times On$:

$\alpha^0 = 1$,

$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$,

$\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma | \gamma < \beta\}$, ако је β гранични ординални број.

У следећем ставу истичемо основна својства степеновања ординалних бројева. Докази се спроводе трансфинитном индукцијом по „крајњем десном“ ординалном броју.

Став 1.27. (Својства степеновања ординалних бројева)
Нека су α, β и γ произвољни ординални бројеви. Тада важи:

а) $\alpha^{\beta} \cdot \alpha^{\gamma} = \alpha^{\beta+\gamma}$,

б) $\left(\alpha^{\beta}\right)^{\gamma} = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$,

в) Ако је $\alpha > 1$ и $\beta < \gamma$ тада је $\alpha^{\beta} < \alpha^{\gamma}$.

Напомена 1.28. У општем случају не важи $\alpha^{\beta} \cdot \gamma^{\beta} = (\alpha \cdot \gamma)^{\beta}$. То илуструјемо следећим примером:

$$\begin{aligned}(\omega \cdot 2)^{\omega} &= \sup\{(\omega \cdot 2)^{n} | n \in \omega\} \\ &= \sup\{(\omega \cdot 2) \cdot \ldots \cdot (\omega \cdot 2) | n \in \omega\} \\ &= \sup\{\omega \cdot (2 \cdot \omega) \cdot \ldots \cdot (2 \cdot \omega) \cdot 2 | n \in \omega\} \\ &= \sup\{\omega^{n} \cdot 2 | n \in \omega\} = \omega^{\omega}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^{\omega} \cdot 2^{\omega} &= \sup\{\omega^{\omega} \cdot 2^{n} | n \in \omega\} \\ &= \omega^{\omega} \cdot \omega = \omega^{\omega+1}.\end{aligned}$$

Теорема 1.29. ***(Логаритамски алгоритам)***
Нека су $\alpha \neq 0$ и $\beta > 1$ ординални бројеви. Тада постоје јединствени ординални бројеви γ, δ и ρ такви да је $0 < \delta < \beta$ и $\rho < \beta^{\gamma}$, па важи

$$\alpha = \beta^{\gamma}\delta + \rho.$$

Доказ. Нека је $\gamma = \sup\{x | \beta^{x} \leq \alpha\}$. Применом теореме о дељењу са остатком, тј. теореме 1.25. следи да постоје јединствени ординални бројеви δ и ρ, такви да је $\rho < \beta^{\gamma}$ и $\alpha = \beta^{\gamma}\delta + \rho$.
Докажимо да важи $0 < \delta < \beta$. Ако би важило $\delta = 0$ тада бисмо имали $\rho = \alpha \geq \beta^{\gamma} > \rho$, што је контрадикција.
Претпоставимо да је $\delta \geq \beta$. Тада имамо:

$$\alpha < \beta^{\gamma+1} = \beta^{\gamma}\beta \leq \beta^{\gamma}\delta \leq \beta^{\gamma}\delta + \rho = \alpha,$$

што је контрадикција.
Докажимо сада јединственост. Нека важи $\alpha = \beta^{\gamma}\delta + \rho$, и претпоставимо да γ није супремум скупа $\{x | \beta^{x} \leq \alpha\}$. Тада имамо:

$$\alpha \geq \beta^{\gamma+1} = \beta^{\gamma}\beta \geq \beta^{\gamma}(\delta + 1) = \beta^{\gamma}\delta + \beta^{\gamma} > \beta^{\gamma}\delta + \rho = \alpha,$$

што је контрадикција. Сада јединственост ординалних бројева δ и ρ следи из теореме 1.25. ■

Теорема 1.30. ***(Теорема о нормалној форми ординалних бројева)***
Нека су α и β ординални бројеви и $\beta > 1$. Тада постоји јединствен природан број n и коначни низови ординалних бројева $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ и $\delta_0, \dots, \delta_n$ тако да важи:

$$\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots > \gamma_n,$$

$$0 < \delta_i < \beta, \text{за све } i \geq n,$$

$$\alpha = \beta^{\gamma_0}\delta_0 + \beta^{\gamma_1}\delta_1 + \cdots + \beta^{\gamma_n}\delta_n.$$

Доказ. Применом теореме о логаритамском алгоритму следи да постоје јединствени ординални бројеви γ_0, δ_0 и ρ_0 тако да важи $0 < \delta_0 < \beta$, $\rho < \beta^{\gamma}$ и $\alpha = \beta^{\gamma_0}\delta_0 + \rho_0$. Ако је $\rho = 0$ тада је теорема доказана. Ако је $\rho > 0$ тада на њега применимо теорему о логаритамском алгоритму.

Важно је приметити да тај поступак мора имати коначно много корака. Иначе би постојао бесконачан низ ординалних бројева (γ_k) тако да за сваки k важи $\gamma_k > \gamma_{k+1}$. То значи да тај низ не би имао најмањи елемент. Али, то је немогуће због аксиоме добре засновaности. Јединственост следи из теореме о логаритамском алгоритму. ■

Напомена 1.31. Тачан назив претходне теореме је теорема о нормалној форми по бази β. Ако је $\beta = 2$ тада говоримо о диадској нормалној форми, а ако је $\beta = \omega$ тада говоримо о Канторовој нормалној форми.

Дакле, за сваки ординални број α постоји јединствен природан број n и коначни низови ординалних бројева $\gamma_0 > \gamma_1 > \cdots \gamma_n$ и $m_0, \dots, m_n$, где су сви m_i коначни ординални бројеви, па важи

$$\alpha = \omega^{\gamma_0}m_0 + \omega^{\gamma_1}m_1 + \cdots + \omega^{\gamma_n}m_n.$$

Наведимо које ординалне бројеве сада знамо када применимо уведене операције:

$$0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega = \omega \cdot 2, \dots,$$

$$\omega \cdot 2 + 1, \dots, \omega \cdot 3, \dots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \dots, \omega^3, \dots, \omega^\omega,$$

$$\omega^\omega + 1, \dots, \omega^\omega \cdot 2, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots$$

Није тешко видети да је сваки од наведених ординалних бројева пребројив скуп (нпр. $\omega^\omega = sup\{\omega^n | n \in \omega\} = \bigcup_{n\in\omega} \omega^n$, а сваки ординални број ω^n је пребројив).

Најмањи ординални број α за који важи $\omega^{\alpha} = \alpha$ означава се са ϵ_0. Најмањи ординални број који је непребројив скуп означава се са ω_1.

1.3 Кардинални бројеви

Дефиниција 1.32. За два произвољна скупа A и B кажемо да су *еквипотентни* ако постоји бијекција $f: A \to B$. У том случају пишемо $A \sim B$.

„Релација“ еквипотентности $\sim$ је рефлексивна, симетрична и транзитивна, тј. на први поглед $\sim$ је релација еквиваленције. Знамо да свака релација еквиваленције врши партицију (разбијање) одговарајућег скупа на класе. Дакле, и $\sim$ разбија колекцију свих скупова на класе. Најчешће се тако дефинише појам кардиналног броја неког скупа A (у ознаци $|A|$), као класа свих скупова еквипотентних скупу A, тј.

$$|A| = \{X | X \sim A\}.$$

Другим речима, заједничка особина свих скупова који су из исте класе зове се кардиналност (или кардинал).

Али ова дефиниција није баш сасвим коректна. Знамо да не постоји скуп свих скупова, односно, другачије речено, колекција свих скупова није *скуп*. На основу ове чињенице можемо одмах приметити да није коректно ако кажемо „релација еквипотентности“ зато што релације дефинишемо на скуповима.

Претходна дефиниција кардиналног броја за неки скуп није коректна ни у аксиоматској теорији скупова ZFC, јер на овај начин се уводи један нови основни појам. Међутим, циљ у аксиоматској теорији скупова је то да сви објекти са којима радимо, па дакле и кардинални бројеви, буду *скупови*.

Овај проблем ће бити решен, ако се докаже да постоји такав оператор који еквипотентним скуповима додељује исте „ствари“, док нееквипотентним скуповима додељује различите „ствари“. Због тога уводимо следећу дефиницију.

Дефиниција 1.33. Ако су A и B еквипотентни скупови, тада кажемо још да имају исту *кардиналност*, па пишемо $k(A) = k(B)$.

Кардиналност је заправо синоним за еквипотентност. То значи да у овом тренутку још нисмо дефинисали појам кардиналног броја.

За парцијално уређен скуп $(A, \leq_A)$ кажемо да је *добро уређен* ако сваки непразан подскуп скупа A има минимум.

Аксиома избора обезбеђује да се сваки скуп може добро уредити.
Посебно, кажемо да је скуп x добро уређен ординалом α ако постоји бијекција $f: \alpha \to x$.

Дефиниција 1.34. Нека је x произвољан скуп. *Кардинални број* скупа x, у ознаци $|x|$, је најмањи ординал којим се скуп x може добро уредити. Посебно, ординал α је *кардинал* ако је $\alpha = |\alpha|$.

Пример 1.35. Сви елементи скупа ω су кардинали. Приметимо да је ω такође кардинал, али $\omega + 1$ није, јер је $|\omega + 1| = \omega$. Једна од могућих бијекција између ова два ординала је дефинисана са

- $f(\omega) = 0$;
- $f(n) = n + 1, n \in \omega$.

Сличном аргументацијом се показује да за било који бесконачан ординал α важи $|\alpha + 1| = |\alpha|$.

Теорема 1.36. ***(Кантор)*** За сваки скуп x је $|x| < |P(x)|$.

Доказ. Нека је x произвољан скуп. С једне стране, функција

$$f: X \to P(x)$$

Дефинисана са

$$f(x) = \{x\}$$

је $1\!-\!1$, па је $|x| \leq |P(x)|$.

Остаје да покажемо да је $|x| \neq |P(x)|$. У супротном, постојала би бијекција $g: x \to P(x)$. Тада по Схеми сепарације постоји скуп

$$a = \{y \in x | y \notin g(y)\}.$$

Пошто је g „на“, постоји $y \in x$ тако да је $a = g(y)$. Сада добијамо контрадикцију $y \in a \Leftrightarrow y \notin a$. ∎

Кардинал α је *коначан* уколико је $\alpha < \omega$, а у супротном је *бесконачан.* Бесконачне кардинале ћемо обележавати малим грчким словима κ, λ, μ, уз коришћење индекса, а класу свих кардинала ћемо означавати са **Card** или **Cn**. Непосредна последица претходне теореме је чињеница да је Card права класа. Канторова теорема, заједно са добром уређеношћу ординала нам обезбеђује следеће:

За сваки кардинал κ *постоји најмањи кардинал већи од њега, у ознаци* κ^+.

Дефиниција 1.37. За кардинал κ кажемо да је *следбеник* ако постоји кардинал λ тако да је $\kappa = \lambda^+$. У супротном, за κ кажемо да је *гранични* кардинал. Све бесконачне кардинале ређамо по величини у трансфинитни низ *алефа* на следећи начин:

- $\aleph_0 = \omega_0 = \omega$;
- $\aleph_{\alpha+1} = \omega_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$;
- $\aleph_\alpha = \omega_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \aleph_\beta$, у случају граничног ординала β.

Двоструке ознаке за исте скупове ($\aleph_\alpha$ и ω_α) смо увели због разлике у ординалној и кардиналној аритметици.

Дефиниција 1.38. (Операције на кардиналним бројевима)
Нека су κ и λ кардинални бројеви. Дефинишемо:

$$\kappa + \lambda := \mathrm{card}(\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}) \quad \text{(кардинално сабирање)},$$

$$\kappa \cdot \lambda := \mathrm{card}(\kappa \times \lambda) \quad \text{(кардинално множење)},$$

$$\kappa^\lambda := \mathrm{card}\left({}^\lambda\kappa\right) \quad \text{(кардинално степеновање)}.$$

Напомена 1.39. Ако желимо да истакнемо да неки бесконачни кардинал посматрамо као ординал, онда ћемо уместо $\aleph_\alpha$ писати ω_α. Тако ће нам нпр. $\aleph_\alpha + \aleph_\beta$ означавати сабирање кардинала, док ће нам $\omega_\alpha + \omega_\beta$ означавати ординално сабирање.

Последица 1.40. Нека су κ и λ кардинални бројеви различити од *0*, од којих је барем један бесконачан. Тада је

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

<u>Доказ.</u> Нека је $\lambda \le \kappa$. Пошто је κ бесконачан кардинал, важи

$$\kappa \le \kappa + \lambda \le \kappa + \kappa \le \kappa \cdot \kappa = \kappa,$$

одакле следи тврђење. ■

Дефиниција 1.41. Нека је α скуп и λ кардинал. Са

$$[\alpha]^\lambda := \{x \subseteq \alpha | \mathrm{card} x = \lambda\}$$

означавамо скуп свих подскупова од α кардиналитета λ.

Очигледно у случају $\lambda > \mathrm{card}\alpha$ важи $[\alpha]^\lambda = \emptyset$. Такође је тривијалан и случај $\mathrm{card}\alpha < \aleph_0$. Погледајмо сада шта се догађа у случају када је $\kappa = \mathrm{card}\alpha \ge \aleph_0$ и $\lambda \le \kappa$. Очигледно је $[\alpha]^\lambda \sim \kappa^\lambda$. Нека је $x \subseteq \kappa$ за који је $\mathrm{card} x = \lambda$. Са $\bar{x}$ означимо скуп свих бијекција са λ на x.

Нека је X неки изборни скуп фамилије $\{\bar{x} | x \subseteq \kappa \text{ и } \mathrm{card} x = \lambda\}$. Са f_x означимо бијекцију са λ на x која се налази у X. Уочимо да је са $x \mapsto f_x$ дефинисана инјекција са $[\kappa]^\lambda$ у ${}^\lambda\kappa$, па имамо $\mathrm{card}[\kappa]^\lambda \leq \kappa^\lambda$.

С друге стране, за сваки $f \in {}^\lambda\kappa$ важи $f \subseteq \lambda \times \kappa$ и $\mathrm{card} f = \lambda$, из чега видимо да је $\kappa^\lambda \leq \mathrm{card}[\lambda \times \kappa]^\lambda$. Како је $\kappa \geq \lambda$ имамо $\mathrm{card}(\lambda \times \kappa) = \kappa$, па видимо да је $[\lambda \times \kappa]^\lambda \sim \kappa^\lambda$. Овим смо доказали да важи и $\kappa^\lambda \leq \mathrm{card}[\kappa]^\lambda$.

Према томе, ако је α бесконачан скуп и $\lambda \leq \mathrm{card}\alpha$, онда важи $\mathrm{card}[\alpha]^\lambda = (\mathrm{card}\alpha)^\lambda$.

1.4 Хипотеза континуума

Пре него што кренемо на озбиљно проучавање кардиналне аритметике осврнимо се још на чувену хипотезу континуума и њену генерализацију о којој ће бити говора касније.

Кантор је поставио хипотезу да не постоји бесконачан скуп $S \subseteq \mathbb{R}$ који није еквипотентан са $\mathbb{N}$ нити са $\mathbb{R}$. Ово тврђење је познато као **хипотеза континуума**, а у терминима алеф функције може се изразити са

(CH) $$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Генерализација овог тврђења, позната као **генералисана хипотеза континуума** гласи

(GCH) $$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

Гедел је доказао да консистентност теорије ZF повлачи консистентност теорије ZFC + GCH, одакле добијамо да негација CH није теорема теорије ZFC. С друге стране, Коен је доказао да консистентност теорије ZFC повлачи консистентност теорије ZFC + $2^{\aleph_0} = \aleph_2$, одакле следи да CH није теорема теорије ZFC. Дакле, (CH) је независна од аксиома ZFC.

2

Кофиналност и степеновање кардинала

У овом поглављу бавићемо се првенствено степеновањем кардинала. Да бисмо то могли учинити на задовољавајући начин биће нам потребан појам кофиналности. Зато ћемо разликовати сингуларне и регуларне кардинале.

2.1 Кофиналност

Појам кофиналности игра важну улогу у описивању својстава кардиналног степеновања. Зато ћемо га дефинисати.

Дефиниција 2.1. (Кофиналност) Нека је $\langle x, \leq_x \rangle$ парцијално уређен скуп. Кажемо да је скуп $\alpha \subseteq x$ *кофиналан* или *неограничен* у $\langle x, \leq_x \rangle$ ако за сваки елемент y скупа x постоји елемент b скупа α такав да

$$y \leq_x b.$$

Под *кофиналношћу* парцијалног уређења $\langle x, \leq_x \rangle$, у ознаци

$$\mathrm{cf}\langle x, \leq_x \rangle,$$

подразумевамо најмањи кардинал међу кардиналима кофиналних скупова у x.

У случају бесконачних кардинала уместо $\mathrm{cf}\langle \kappa, \leq \rangle$ писаћемо само $\mathrm{cf}\,\kappa$. Из дефиниције непосредно следи да за сваки бесконачни кардинал κ важи:

- $\mathrm{cf}\,\mathrm{cf}\,\kappa = \mathrm{cf}\,\kappa$;
- $\omega \leq \mathrm{cf}\,\kappa \leq \kappa$.

Пример 2.2.

- Нека је $id_A = \{(a, a) | a \in A\}$. Тада је $\mathrm{cf}(A, id_A) = \mathrm{card}A$.
- $\mathrm{cf}(\mathbb{R}, \leq) = \aleph_0$.

Дефинисали смо $\mathrm{cf}\langle x, \leq_x \rangle$ као најмањи кардинални број подскупа од x који је кофиналан у x у односу на $\leq_x$. Како је $\mathrm{dom}(\leq_x) = x$, тада је скуп x кофиналан у x, што значи да је скуп чији се минимум у дефиницији тражи непразан. Такође, како се ради о скупу кардиналних бројева, закључујемо да тај скуп има минимум. Дакле, тражени минимум увек постоји, односно појам кофиналности је добро дефинисан.

Дефиниција 2.3. Нека је α ординал. *Кофиналност* од α, у ознаци $\mathrm{cf}(\alpha)$, дефинишемо као најмањи ординал μ са својством да постоји функција $f: \mu \to \alpha$ таква да је $\mathrm{ran}(f)$ кофиналан у α у односу на релацију $\leq$ на ординалима.

Очигледно је $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$. Даље је $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\alpha, \leq)$, јер за кофинални подскуп C од α, за који је $\mathrm{cf}(\alpha, \leq) = \mathrm{card}C$, постоји бијекција са C на $\mathrm{card}C$.

Последица 2.4. За сваки ординал α, $\mathrm{cf}(\alpha)$ је кардинал.

Доказ. Претпоставимо да $\mathrm{cf}(\alpha)$ није кардинал. Тада је $\mathrm{cardcf}(\alpha) < \mathrm{cf}(\alpha)$. Нека је $f: \mathrm{cf}(\alpha)$ таква да је $\mathrm{ran}(f)$ кофиналан у α, и нека је $g: \mathrm{cardcf}(\alpha) \to \mathrm{cf}(\alpha)$ бијекција. Очигледно је $\mathrm{ran}(f \circ g) = \mathrm{ran}(f)$, па је и слика функције $f \circ g: \mathrm{cardcf}(\alpha) \to \alpha$ кофинална у α. Тиме смо добили функцију са ординала мањег од $\mathrm{cf}(\alpha)$ чија је слика кофинална у α, што је у супротности са дефиницијом кофиналности. ■

Дефиниција 2.5. Кажемо да је гранични ординал α *регуларан* ако важи $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$. У супротном кажемо да је α *сингуларан*.

Како знамо да је $\mathrm{cf}(\alpha)$ кардинал, видимо да је сваки регуларни ординал кардинал. За класу регуларних кардиналних бројева уводимо ознаку **Reg**, па интервал регуларних кардинала, тј. $\langle \kappa, \mu \rangle_{\mathbf{Cn}} \cap \mathbf{Reg}$, означавамо са $\langle \kappa, \mu \rangle_{\mathbf{Reg}}$.

2.2 Степеновање кардинала

☺ Проблеми са степеновањем

У претходном излагању смо видели да збир и производ два бесконачна кардинала увек можемо одредити. У овој глави се бавимо степеновањем кардинала, тј. испитујемо како можемо добити вредност израза λ^κ. Видећемо да ово доводи до тежих проблема. До сада само знамо, на основу Канторове теореме, да $2^\kappa > \kappa$. Из овог резултата можемо закључити да 2^κ не може да буде једнако κ. Зато се одмах поставља питање: „да ли је тачна једнакост $2^\kappa = \kappa^\oplus$?“

Математичари су посебно испитивали особине кардинала $2^{\aleph_0}$. Знамо да је кардиналност скупа реалних бројева $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Поставља се питање чему је једнако $2^{\aleph_0}$, а то је у ствари *проблем континуума* који смо раније навели. Тврђење да је $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ је *континуум хипотеза* (CH). Слично, за сваки ординал α, дакле, имамо да је

$$2^{\aleph_\alpha} > \aleph_\alpha.$$

Ако ово уопштимо добијамо да је $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, тј. *уопштену континуум хипотезу* (GCH).

Ове проблеме је поставио већ Кантор на крају XIX века. Како дуго времена нико није успео да нађе решење ових проблема, стекли су убеђење да се та питања не могу решити из познатих претпоставки (наивне) теорије скупова. Нерешивост ових основних проблема је имала највећи утицај на развијање аксиоматске теорије скупова.

К. Гедел је 1939. Године показао да се GCH не може оповргнути из аксиоме теорије скупова ZF (односно ZFC). Прецизније, то значи да ако из осталих аксиома не долазимо до контрадикције, онда не добијамо контрадикцију ни ако GCH додамо осталим аксиомама. Дакле, важи следећа теорема.

Теорема 2.6. ***(Гедел)*** GCH је сагласна са теоријом ZF , тј. ако је ZF непротивречна, онда је и $\mathrm{ZF} + \mathrm{GCH}$ непротивречна. ■

Тек је 1963. Године П. Коен показао да се тврђење $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ не може ни доказати из аксиоме теорије скупова, тј. важи следећа теорема.

Теорема 2.7. ***(Коен)*** Ако је ZF непротивречна, онда је и $\mathrm{ZF} + \neg\mathrm{CH}$ непротивречна. Према томе, CH је независна од ZF теорије скупова. ■

2.3 Кенигова теорема

Теорема 2.8. ***(Кениг)*** Нека су $\{\lambda_\xi : \xi < \alpha\}$ и $\{\kappa_\xi : \xi < \alpha\}$ две колекције кардинала тако да $\lambda_\xi < \kappa_\xi$ за сваки $\xi < \alpha$. Тада важи

$$\sum_{\xi<\alpha} \lambda_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

<u>Доказ.</u> Означимо суму са λ, а производ са κ. Бирајмо у паровима дисјунктне скупове L_ξ тако да

$$\bigcup_{\xi<\alpha} L_\xi = \lambda$$

и

$$|L_\xi| = \lambda_\xi.$$

Уведимо и следећу ознаку

$$K = \mathbb{II}_{\xi<\alpha}\kappa_\xi.$$

Тада важи $|K| = \kappa$. Треба доказати да $\kappa \nleq \lambda$.
Претпоставимо супротно, тј. да $\kappa \leq \lambda$. То значи да постоји такав скуп $L \subseteq \lambda$ и таква функција f да важи $L \sim_f K$. Тада бијекција f сваком елементу $x \in L$ додељује једну функцију $f(x)$ из K. Слику функције $f(x)$ у тачки ξ означићемо са $f(x)(\xi)$.
Дефинишимо сада скуп K_ξ за произвољно $\xi < \alpha$ на следећи начин:

$$K_\xi = \{f(x)(\xi) : x \in L_\xi \cap L\}.$$

Како је

$$|L_\xi \cap L| \leq |L_\xi| = \lambda_\xi < \kappa_\xi,$$

тада следи

$$|K_\xi| < \kappa_\xi,$$

па можемо закључити

$$\kappa_\xi \backslash K_\xi \neq \emptyset,$$

за свако $\xi < \alpha$.
Посматрајмо једну функцију избора φ такву да важи $\varphi(\xi) \in \kappa_\xi \backslash K_\xi$, ако је $\xi < \alpha$. Тада ова функција φ припада скупу K.
Тврдимо да

$$\varphi \neq f(x)$$

за произвољно $x \in L$. Заиста, ако $x \in L$ онда, с једне стране, $x \in L_\xi \cap L$ за неко $\xi < \alpha$ и зато је

$$f(x)(\xi) \in K_\xi,$$

а с друге стране, $\varphi(\xi) \notin \kappa_\xi$ и зато је

$$f(x)(\xi) \neq K_\xi.$$

Тада следи $f(x) \neq \varphi$. Добили смо контрадикцију, јер функција f пресликава L на K. Дакле, претпоставка је нетачна, и тада $\lambda < \kappa$. ■

Напомена 2.9. Није тешко проверити да је Канторова теорема специјалан случај Кенигове теореме, односно да је теорема једна генерализација Канторове. Наиме, ако ставимо да $\lambda_\xi = 1$ и $\kappa_\xi = 2$ онда добијамо $\sum_{\xi<\alpha} 1 = |\alpha|$ и $\prod_{\xi<\alpha} 2 = \left|\{f | f : \alpha \to \cup_{\xi<\alpha}\{0,1\},\ \forall \xi < \alpha\ \ f(\xi) \in \{0,1\}\}\right| = |{}^{\alpha}\{0,1\}| = 2^{|\alpha|}$, па добијамо познату Канторову неједначину $|\alpha| < 2^{|\alpha|}$.

Последица 2.10. Ако је $\{\kappa_\xi : \xi < \alpha\}$ строго растући низ кардинала, где је α гранични ординал и $\kappa_0 > 0$, тада важи

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

Доказ.

$$\sum_{\xi<\alpha} \kappa_\xi < \prod_{\xi<\alpha} \kappa_{\xi+1} \leq \prod_{\xi<\alpha} \kappa_\xi.$$

Прва неједнакост следи из Кенигове теореме и чињеница да $\kappa_\xi < \kappa_{\xi+1}$, где је $\xi < \alpha$. Друга неједнакост следи:

ако су $\xi, \eta < \alpha$ и $\xi \neq \eta$ онда је $\xi + 1 \neq \eta + 1$ и $\xi + 1 < \alpha$. ■

Последица 2.11. Ако је κ произвољан бесконачан кардинал, онда важи

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa.$$

Ако је κ регуларан, онда

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^\kappa \geq 2^\kappa > \kappa.$$

Нека је κ сингуларан. Тада је κ гранични ординал, и зато постоји строго растући низ кардинала $\{\kappa_\xi : \xi < cf(\kappa)\}$ да

$$\kappa = \sum_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi.$$

Можемо претпоставити да $\kappa_0 > 0$. Тада по последици 2.10. следи

$$\kappa < \prod_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi \leq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}. \quad ■$$

Последица 2.12. Нека су κ и λ кардинали, за које важи да $\kappa \geq \omega$ и $\lambda \geq 2$. Тада је

$$\mathrm{cf}(\lambda^\kappa) > \kappa.$$

Доказ. По претпоставци, λ^κ је бесконачан кардинал. Тада из претходне последице следи

$$(\lambda^\kappa)^{\mathrm{cf}(\lambda^\kappa)} > \lambda^\kappa.$$

Знамо, ако је $\mu \leq \kappa$, онда

$$(\lambda^{\kappa})^{\mu} = \lambda^{\kappa \otimes \mu} = \lambda^{\kappa}.$$

Тада је

$$\lambda^{\kappa \otimes \mathrm{cf}(\lambda^{\kappa})} = (\lambda^{\kappa})^{\mathrm{cf}(\lambda^{\kappa})} > \lambda^{\kappa},$$

што имплицира

$$\mathrm{cf}(\lambda^{\kappa}) \nleq \kappa. \quad \blacksquare$$

Специјалан случај овог резултата је да

$$\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) \neq \aleph_0,$$

што имплицира нпр. следећи важан закључак:

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega},$$

јер је $\mathrm{cf}(\aleph_{\omega}) = \aleph_0$.

Дакле, ако за произвољан кардинал κ важи да $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$, онда можемо закључити да

$$\kappa \neq 2^{\aleph_0} (= c),$$

како смо то већ поменули на почетку поглавља.

На основу АС, односно њеног еквивалента, тј. да се сваки скуп може добро уредити, вредност кардинала c је $\aleph_{\alpha}$ за неки ординал α, али се не зна за који α. Из Канторове теореме следи да није $\alpha = 0$. Како смо видели, питање да ли је $\alpha = 1$ (тј. CH) је недоказиво (теореме Гедела и Коена). У систему аксиома то тврђење се не може ни доказати ни оповргнути.

Најважнија последица теореме Кенинга, што се тиче проблема континуума, је да сигурно знамо о неким кардиналима да нису једнаки са c. Наравно, с тим резултатом тај проблем није решен, само неке могућности су искључене.Теорема не даје никакву инструкцију за одређивање вредности континуума c. Систем аксиома ZFC је неодлучив.

После Коеновог рада Соловеј је показао да c може да буде било који кардинал чија је кофиналност већа од $\aleph_0$.

3

Јако гранични кардинали, недостиживи кардинали и хипотеза сингуларних кардинала

3.1 Јако гранични кардинали

У овом поглављу ближе ћемо описати вредности степеновања бесконачних кардинала преко вредности степена за мање базе или експоненте. Зато ће нам требати још неки појмови које уводимо следећим дефиницијама.

Дефиниција 3.1. (Јако гранични кардинали)
За кардинал κ кажемо да је *јако гранични* (стронг лимит) ако за свако $\lambda < \kappa$ важи $2^{\lambda} < \kappa$.

Видели смо да се прво слово хебрејског алфабета $\aleph$ користи за означавање бесконачних кардинала. А друго слово хебрејског алфабета $\beth$ (читамо: бет) је резервисано за означавање бесконачних кардинала, које ћемо дати у следећој дефиницији.

Дефиниција 3.2. Бет се рекурзивно дефинише на следећи начин:

- $\beth_0 = \aleph_0$;
- $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ (у смислу кардиналног степеновања);
- $\beth_\alpha = \bigcup_{\beta\in\alpha} \beth_\beta$ у случају граничног ординала α.

На овај начин смо добили низ бесконачних кардинала

$$\beth_0, \beth_1, \beth_2, \ldots$$

који су, респективно, кардинали скупова

$$\omega, P(\omega), P\big(P(\omega)\big), \ldots$$

За сваки гранични ординал α кардинал $\beth_\alpha$ је јако гранични. Из дефиниције непосредно следи да је

$$\beth_\alpha = |V_{\omega+\alpha}|.$$

Посебно, кардинал

$$\mathfrak{c} \overset{\text{def}}{=} \beth_1 = |P(\omega)|$$

зовемо и *континуумом*.

Континуум хипотеза (CH):

$$\beth_1 = \aleph_1.$$

Генералисана континуум хипотеза (GCH):

$$\forall \alpha (\beth_\alpha = \aleph_\alpha).$$

Докажимо још нека својства јаких граничних кардинала.

Последица 3.3. Јаки гранични кардинали чине праву класу.

<u>Доказ.</u> Нека је μ бесконачни кардинални број. Дефинишимо строго растући низ кардинала $(\kappa_n : n < \omega)$ са

$$\kappa_0 = \mu,$$

$$\kappa_{n+1} = 2^{\kappa_n},$$

и означимо $\kappa := \sup\{\kappa_n | n < \omega\}$. Ако су $\rho, \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}$, онда постоји $n \in \omega$ таква да је $max\{\rho, \nu\} \leq \kappa_n$, па имамо

$$\rho^\nu \leq {\kappa_n}^{\kappa_n} = 2^{\kappa_n} = \kappa_{n+1} < \kappa,$$

Одакле видимо да је κ јако гранични кардинал, док је из конструкције очигледно $\kappa > \mu$. ■

Уочимо да је кардинал κ према претходном доказу сингуларан.

Лема 3.4. Супремум скупа јако граничних кардинала је јако гранични кардинал.

<u>Доказ.</u> Нека је $\{\kappa_i | i \in I\}$ скуп јако граничних кардинала и $\kappa := \sup\{\kappa_i | i \in I\}$. Ако је $\kappa \in \{\kappa_i | i \in I\}$ нема шта да доказујемо. У супротном, нека су $\rho, \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}$. Због $\kappa \notin \{\kappa_i | i \in I\}$ постоји $i \in I$ такав да су $\rho, \nu \in \kappa_i$, па је $\rho^\nu < \kappa_i < \kappa$. ■

Лема 3.5. Нека је κ јако гранични кардинал. Тада важи $2^{<\kappa} = \kappa$ и $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

<u>Доказ.</u> Уочимо:

$$\kappa \leq 2^{<\kappa} = \sup\{2^\nu | \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\} \leq \kappa.$$

Последња једнакост важи због тога што је κ јако гранични кардинал. Овим смо доказали прву једнакост. Друга једнакост је

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}. \quad ■$$

Доказано је раније да за $\aleph_\alpha \leq \aleph_\beta$ важи ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$. Погледајмо шта можемо рећи у случају $\aleph_\alpha > \aleph_\beta$.

Лема 3.6. Нека су α, β и γ ординали за које важи $\beta < \alpha$ и $\aleph_\alpha \leq {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}$. Тада је ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}$.

Доказ.

$$ {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} \leq {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \leq \left({\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}\right)^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}. \quad \blacksquare $$

Лема 3.7. Нека су α и β ординали такви да је $\beta < \alpha$ и ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} > 2^{\aleph_\beta}$, и нека $\aleph_\alpha$ није $\aleph_\beta$-јак. Нека је γ најмањи ординал за који важи ${\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$. Тада је $\aleph_\gamma \aleph_\beta$-јак сингуларан кардинал за који важи

$$ {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)} \quad \text{и} \quad \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta < \aleph_\gamma. $$

Доказ. Нека је γ најмањи ординал за који је ${\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\alpha$. Уочимо да је $\gamma < \alpha$, јер $\aleph_\alpha$ није $\aleph_\beta$-јак. По леми 3.6. имамо ${\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta}$.

Докажимо сада да је $\aleph_\gamma$ $\aleph_\beta$-јак. За почетак уочимо да је $\beta < \gamma$. У супротном би било ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$, што је контрадикција са претпоставком леме. Даље, претпоставимо да за неко $\sigma < \gamma$ важи ${\aleph_\sigma}^{\aleph_\beta} \geq \aleph_\gamma$. Тада из леме 3.6. следи ${\aleph_\sigma}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}$, док по избору ординала γ (минималност) имамо ${\aleph_\sigma}^{\aleph_\beta} < \aleph_\alpha \leq {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta}$, што је контрадикција. Овим смо доказали да је $\aleph_\gamma$ $\aleph_\beta$-јак.

Ако је $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) > \aleph_\beta$, онда следи ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_\gamma < \aleph_\alpha$, што је контрадикција. Дакле, мора бити $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta < \aleph_\gamma$, одакле видимо да је $\aleph_\gamma$ сингуларан, па добијамо

$$ {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}. \quad \blacksquare $$

За степеновање бесконачних кардинала важи:

$$ {\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \begin{cases} 2^{\aleph_\beta} & \text{или} \\ \aleph_\alpha & \text{или} \\ {\aleph_\gamma}^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)} & \text{за неко } \gamma \leq \alpha \text{ тако да је } \mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta < \aleph_\gamma. \end{cases} $$

3.2 Недостиживи кардинали

Нека је кардинал κ непребројив. Тада за кардинал κ кажемо да је:

- *слабо недостижив*, ако је регуларан и гранични;
- *јако недостижив*, ако је регуларан и јако гранични.

Из дефиниције непосредно следи да је сваки јако недостижив кардинал уједно и слабо недостижив.

Пример 3.8. Из GCH непосредно следи да је сваки слабо недостижив кардинал уједно и јако недостижан. Заиста, ако је κ слабо недостижив кардинал, онда за произвољан кардинал $\lambda < \kappa$ мора бити и

$$2^{\lambda} \overset{\text{GCH}}{=} \lambda^{+} < \kappa,$$

тј. κ је и јако гранични кардинал.

Теорема 3.9. Претпоставимо да је кардинал κ слабо недостижив. Тада је

$$\kappa = \aleph_{\kappa}.$$

<u>Доказ.</u> Довољно је показати да за сваки ординал $\alpha < \kappa$ важи $\aleph_{\alpha} < \kappa$. Наиме, у том случају је

$$\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} \aleph_{\alpha} = \aleph_{\kappa.}$$

Стога индукцијом по κ показујемо да је $\aleph_{\alpha} < \kappa$.

1. $\aleph_0 < \kappa$ јер је κ слабо недостижив кардинал;
2. Нека је $\aleph_{\alpha} < \kappa$. Како је κ гранични кардинал, тада је и $\aleph_{\alpha+1} < \kappa$;
3. Нека је $\alpha < \kappa$ гранични ординал и нека је $\aleph_{\beta} < \kappa$ за сваки ординал $\beta < \alpha$. С обзиром да је κ регуларан кардинал, мора бити и

$$\aleph_{\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_{\beta} < \kappa. \quad \blacksquare$$

Пример 3.10. Ако је кардинал κ јако гранични, онда је $2^{<\kappa} = \kappa$, а тиме и

$$2^{\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}\kappa} = \kappa^{\mathrm{cf}\kappa}.$$

Ако је κ јако недостижив кардинал, онда на основу теореме (рекурзивно израчунавање) за свако $\lambda < \kappa$ важи $\kappa^{\lambda} = \kappa$, одакле следи да је $\kappa^{<\kappa} = \kappa = 2^{<\kappa}$.

Најзад, ако је кардинал κ слабо недостижив кардинал и није недостижив, онда постоји кардинал $\lambda < \kappa$ такав да је $2^{\lambda} \geq \kappa$. Сада је

$$\kappa^{<\kappa} \leq \left(2^{\lambda}\right)^{<\kappa} = 2^{<\kappa},$$

одакле, пошто обратна неједнакост тривијално важи, следи да је

$$\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}.$$

3.3 Хипотеза сингуларних кардинала

Сада ћемо видети шта можемо рећи о степеновању бесконачних кардинала када аксиоме ZFC појачамо са још неким претпоставкама, односно генерализованом хипотезом континуума или нешто слабијим захтевом – *хипотезом сингуларних кардинала* која гласи

(SCH) $$(\forall \kappa \in \mathbf{Cn})\left(2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa \rightarrow \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{+}\right).$$

Лема 3.11. Нека важи (GCH). Тада за кардинале $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq \aleph_0$ важи

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} \kappa & \text{ако } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa), \\ \kappa^{+} & \text{ако } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa, \\ \lambda^{+} & \text{ако } \kappa \leq \lambda. \end{cases}$$

Доказ. Ако је $\kappa \leq \lambda$, онда је $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda} \overset{(\mathrm{GCH})}{=} \lambda^{+}$.
Ако је $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$ имамо

$$\kappa \leq \kappa^{\lambda} = \kappa \cdot \sup\left\{\nu^{\lambda} \middle| \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\right\}.$$

Нека је ν кардинал мањи од κ. Тада за $\nu \leq \lambda$ важи $\nu^{\lambda} = 2^{\lambda} = \lambda^{+}$, а за $\nu > \lambda$ је $\nu^{\lambda} \leq \nu^{\nu} = 2^{\nu} = \nu^{+}$. Дакле,

$$\sup\left\{\nu^{\lambda} \middle| \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\right\} \leq \max\{\nu^{+}, \lambda^{+}\} \leq \kappa,$$

па је

$$\kappa \cdot \sup\left\{\nu^{\lambda} \middle| \nu \in \kappa \cap \mathbf{Cn}\right\} = \kappa,$$

одакле следи $\kappa^{\lambda} = \kappa$. ■

Преостао нам је још случај $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$. Тада је

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{\kappa} \leq \kappa^{\kappa} = \kappa^{\kappa} = \kappa^{+}. \quad ■$$

За даљи рад биће нам потребни још неки појмови које уводимо у следећој дефиницији.

Дефиниција 3.12. Функцију $\left(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} : \kappa \in \mathbf{Cn}\right)$ називамо *гимел функција*, па уместо $(\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ пишемо и $\gimel(\kappa)$. За $\kappa \in \mathbf{Cn} \cup \{2\}$ функцију $(\kappa^{\nu} : \nu \in \mathbf{Cn})$ називамо *функција континуума за* κ. (Као што је и уобичајено функцију континуума за 2 и даље ћемо кратко звати функција континуума). Кажемо да функција континуума за κ *постаје константна испод* λ, ако постоји кардинал $\rho < \lambda$ такав да за свако $\rho' \in [\rho,\lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}$ важи $\kappa^{\rho'} = \kappa^{\rho}$. Ако је кардинал $\rho_0 < \lambda$ такав да за свако $\rho \in [\rho_0,\lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}$ важи $\kappa^{\rho} = \kappa^{\rho_0}$, онда кажемо да *функција континуума за κ постаје константна испод λ након* ρ_0.

Већ смо споменули да је хипотеза сингуларних кардинала слабија од генерализоване хипотезе континуума. Уверимо се да то заиста важи.

Последица 3.13. Ако важи генерализована хипотеза континуума, онда важи и хипотеза сингуларних кардинала, тј. ZFC $\vdash$ (GCH) $\rightarrow$ (SCH), односно ZFC $+$ (GCH) $\vdash$ (SCH).

<u>Доказ.</u> Нека је $\kappa \in \mathbf{Cn}$. Тада је

$$\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq \kappa^{\kappa} = 2^{\kappa} \overset{(\mathrm{GCH})}{=} \kappa^{+}.$$

Дакле, за све бесконачне кардинале важи $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{+}$, па специјално важи и (SCH). ■

Напомена 3.14. (о хипотези сингуларних кардинала). Из последице 3.13. следи да је (SCH) конзистентна са ZFC, јер је последица генерализоване хипотезе континуума која је конзистентна са ZFC. Може се доказати да је негација хипотезе сингуларних кардинала такође конзистентна са ZFC, односно да је (SCH) независна са аксиомама ZFC.

Еквивалентна формулација хипотезе сингуларних кардинала гласи:

Ако је κ сингуларан јако гранични кардинал, онда је $2^{\kappa} = \kappa^{+}$.

Из овог облика је јасан назив „хипотеза сингуларних кардинала“. Још једна занимљивост је да ако (SCH) важи за све сингуларне кардинале кофиналности $\aleph_0$, онда важи за све сингуларне кардинале. Другим речима, ако у неком моделу за ZFC не важи (SCH), онда у том моделу постоји сингуларни кардинал κ контрапример за (SCH) за који је $\mathrm{cf}(\kappa) = \aleph_0$.

Лема 3.15. Нека су $\kappa \geq 2$ и $\lambda \geq \aleph_0$ кардинали. Ако важи (GCH), онда је

$$\kappa^{<\lambda} = \begin{cases} \kappa & \text{ако } \lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa), \\ \kappa^{+} & \text{ако } \mathrm{cf}(\kappa) < \lambda \leq \kappa^{+}, \\ \lambda & \text{ако } \kappa^{+} < \lambda. \end{cases}$$

<u>Доказ.</u> Ако је κ коначан, онда је $\kappa < \lambda$ (и $\kappa^{+} < \lambda$), па имамо

$$
\begin{aligned}
\kappa^{<\lambda} &= \sup\{\kappa^{\rho} | \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \\
&= \sup\{2^{\rho} | \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = (\mathrm{GCH}) \\
&= \sup\{\rho^{+} | \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

Нека је $\kappa \geq \aleph_0$. Сада можемо искористити лему 3.11. Ако $\lambda \leq \mathrm{cf}(\kappa)$, онда

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\rho} | \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \sup\{\kappa\} = \kappa.$$

Ако је $\mathrm{cf}(\kappa) < \lambda \leq \kappa^{+}$, онда

$$\kappa^{<\lambda} = \sup\{\kappa^{\rho} | \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \sup\{\kappa^{+}\} = \kappa^{+}.$$

Ако је $\kappa^{+} < \lambda$, онда

$$
\begin{aligned}
\kappa^{<\lambda} &= \sup\{\kappa^{\rho} | \rho \in \lambda \cap \mathbf{Cn}\} = \\
&= \sup\{\kappa^{\rho} | \rho \in [\kappa^{+}, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}\} = \\
&= \sup\{\rho^{+} | \rho \in [\kappa^{+}, \lambda\rangle_{\mathbf{Cn}}\} = \\
&= \lambda. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Теорема 3.16. ***(Буковски, Хехлер)*** Нека је λ сингуларан кардинал. Ако функција континуума за κ постаје константна испод λ након ρ_0, онда важи $\kappa^{\lambda} = \kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0}$.

<u>Доказ.</u> Нека је $\rho_1 = \max\{\mathrm{cf}(\lambda), \rho_0\}$. Тада је $\kappa^{<\lambda} = \kappa^{\rho_0} = \kappa^{\rho_1}$, и имамо

$$\kappa^{\lambda} = \left(\kappa^{<\lambda}\right)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = (\kappa^{\rho_1})^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \kappa^{\rho_1} = \kappa^{\rho_0}. \quad \blacksquare$$

Буковски – Хехлерова теорема нам говори да, за разлику од регуларних, функција континуума у сингуларним аргументима може зависити од вредности у мањим аргументима.

Следеће две теореме говоре нам како изгледа степеновање кардинала у аксиоматском саставу $\mathrm{ZFC} + (\mathrm{SCH})$.

Теорема 3.17. Нека је κ сингуларан кардинал и нека важи (SCH). Тада је

$$2^{\kappa} = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \text{ако функција континуума постаје константна испод } \kappa, \\ (2^{<\kappa})^{+} & \text{иначе.} \end{cases}$$

<u>Доказ.</u> Ако функција континуума постаје константна испод κ, онда по Буковски – Хехлеровој теореми важи $2^{\kappa} = 2^{<\kappa}$.

Нека функција континуума не постаје константна испод κ. Тада је $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$, па по претпоставци да функција континуума не постаје константна испод κ имамо $2^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} = 2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < 2^{<\kappa}$. Добијамо

$$2^{\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})} \overset{(\mathrm{SCH})}{=} (2^{<\kappa})^{+}. \quad \blacksquare$$

Теорема 3.18. ***(Jex)*** Нека су α и β ординали. Ако ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \notin \{2^{\aleph_\beta}, \aleph_\alpha\}$, онда постоји ординал $\gamma \leq \alpha$ такав да је $\aleph_\gamma \aleph_\beta$-јак, па важи $\mathrm{cf}(\aleph_\gamma) \leq \aleph_\beta < \aleph_\gamma$ и ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\gamma}^{\mathrm{cf}(\aleph_\gamma)}$.

Доказ. Нека је ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} \neq 2^{\aleph_\beta}$. Тада је $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$. Ако је $\aleph_\alpha \aleph_\beta$-јак, онда у случају $\mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta$ имамо ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = {\aleph_\alpha}^{\mathrm{cf}(\aleph_\alpha)}$, док у супротном важи ${\aleph_\alpha}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$. Остатак доказа обухваћен је лемом 3.7. $\blacksquare$

4

Хијерархија недостиживих кардинала

4.1 Итерација недостиживих кардинала

До слабо и јако недостиживих кардинала долази се непосредно разрадом својстава уведених ординалних и кардиналних операција.

Даљим њиховим набрајањем (свака подкласа Ord и Card је добро уређена релацијом $\in$ (тј. $<$)), имамо други, трећи, ... α-ти, ... елемент ових класа кардинала (слабо недостиживих - **Winac** и јако недостиживих – **Sinac**). Допунском акумулацијом својстава ове хијерархије се даље обогаћују. Тако, κ је хипернедостижив, ако је недостижив и ако је κ-ти по реду недостижив: $\mathrm{Card}\{\alpha | \alpha < \kappa\} \in$ **Inac** – недостиживи кардинали (аналогно за обе хијерархије); слично дефинишемо следеће хипернедостиживе кардинале. Овим поступком акумулације својстава добијају се обогаћења класа Winac и Sinac. Једно од најјачих својстава добијених овим итерацијама је *аксиома о нормалним функцијама:*

(NF) Ако је $F : Ord \to Ord$ растућа и непрекидна, онда F има регуларну и фиксну тачку: $F(\alpha) = \alpha$ (α - регуларан).

F је растућа ако $\alpha < \beta$ повлачи $F(\alpha) < F(\beta)$;

F је непрекидна ако за $limit\ \alpha$ важи $F(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} F(\xi)$.

Иако су недостиживи кардинали дефинисани једноставним, уобичајеним поступцима, пре више од 100 година, питање њихове егзистенције остало је нејасно и неразрешено више деценија, да би се показало да се у теорији ZFC + „постоји јако недостижив кардинал κ" доказује консистентност теорије ZFC. Наиме, тада је V_κ модел за ZFC.

Из друге Геделове теореме онда непосредно следи:

- или је постојање јако недостиживог кардинала противречно са осталим аксиомама ZFC,
- или теорија ZFC + „постоји јако недостижив кардинал κ" је sk јача од ZFC по јачини консистентске снаге.

С тога, преостало је да се ова својства груписана под називом Јаке аксиоме бесконачности допунски испитују, посебно по питању релативне непротивречности.

Аналогно претходном открићу доказује се да теорија ZFC + „постоје два јако недостижива кардинала“ доказује непротивречност теорије ZFC + „постоји један јако недостижив кардинал“ и сличан однос проширује се на целу хијерархију Sinac.

Из GCH којом се упарују ове две хијерерхије (Winac и Sinac), непосредно се добија аналогни резултат за слабо недостиживе кардинале.

Након наведених сазнања недостиживи кардинали постали су предмет помног проучавања, али ниједан непосредни или посредни резултат не указује на њихову противречност.

4.2 Мерљиви кардинали

С друге стране, у различитим деловима математике, унутар математичких истраживања без интеракције са теоријом скупова појавили су се проблеми који су дуго били отворени, проблем мере и проблем унитризације тополошких простора.

Дуготрајним и мукотрпним истраживањима, показало се да су решења неких од ових проблема повезана са егзистенцијом одређених карактеристичних кардинала са веома снажним својствима недостиживости. Посебно важан случај представља егзистенција мерљивих кардинала.

Дефиниција 4.1. $F \subseteq P(x)$ је филтер над скупом x ако важи

1. $x \in F$
2. $y, z \in F$ повлачи $y \cap z \in F$
3. $y \in F$ и $y \subseteq z$ повлачи $z \in F$.

За филтер F над x кажемо да је ултрафилтер акко за сваки $y \subseteq x$ важи $y \in F$ или $x \backslash y \in F$. Питање егзистенције ултрафилтера решава се Цорновом лемом – еквивалентом AC.

Теорема 4.2. ***(Теорема о ултрафилтеру - Цорнова лема)***
За сваки филтер $F \subseteq P(x)$ постоји ултрафилтер U тако да је $F \subseteq U \subseteq P(x)$.

Дефиниција 4.3. F је главни филтер акко $\cap F \in F$.

Дефиниција 4.4. Филтер F је κ – комплетан (κ је кардинал) акко за сваки $D \subseteq F$, из $|D| < \kappa$ следи $\cap D \in F$.

Очигледно сваки главни филтер је κ – комплетан за све κ. Такође, $[y, \ \cdot) = \{z \subseteq x | y \subseteq z\}$ је главни филтер над x.

Дефиниција 4.5. Адитивност мере $\mu, add(\mu) = min|x|$ (x је унија скупова μ мере 0; $\mu(x) > 0$).

Дефиниција 4.6. Кардинал κ је мерљив акко постоји κ - комплетан неглавни ултрафилтер над κ.

Теорема 4.7. κ је мерљив акко постоји бинарна κ адитивна мера над κ, за меру μ, (тј. $\mu : P(\kappa) \to [0,1], rng(\mu) = \{0,1\}$ и $add(\mu) = \kappa$).

Након Виталијевог открића Лебег – мерљивог скупа уз помоћ AC, у вези са Лебеговом мером остала су разна питања отворена, између осталог питање постојања проширења Лебегове мере на цео $P(R)$. Тридесетих година Банах је конструисао једно такво тотално проширење. Та мера није била σ - адитивна. Из тог времена потичу и следећи Улам (Улам – Банах) резултати.

Теорема 4.8. ***(Улам - Банах)*** Нека је κ кардинал на коме постоји κ – адитивна (тотална) мера μ. $\mu : P(\kappa) \to [0,1]$. Тада важи једно од следећег:

1. мера μ је реално вредносна ($rng(\mu) = [0,1]$) и κ је слабо недостижив;
2. мера μ је бинарна, (тј. $rng(\mu) = \{0,1\}$) и κ је јако недостижив.

Теорема 4.9. ***(Улам)*** Нека је κ кардинал на коме постоји реално вредносна k – адитивна мера (тј. $rng(\mu) = [0,1]$). Тада $\kappa \leq c = 2^{\aleph_0}$.

Дефиниција 4.10. κ је реално мерљив акко постоји κ – адитивна, реално вредносна мера на κ.

Из претходног произилази да су реално мерљиви кардинали $\leq c$.

Протекло је четири деценије у сагледавању својстава мерљивих кардинала, посебно у њиховом одређивању у класи недостижних кардинала. Уочено је да се на њима концентришу многа својства недостижних кардинала. Тако нпр. ако је μ – бинарна, κ адитивна мера (ултрафилтер) над κ онда следећи скупови имају μ - меру 1 (тј. припадају том ултрафилтеру):

$$\mu(\{\alpha \in \kappa | \alpha \in \text{Sinac}\}) = 1 \quad (i|\{\alpha \in \kappa | \alpha \in \text{Sinac}\}| = \kappa);$$

$$\mu(\{\alpha < \kappa | \alpha \text{ има Курепино својство гранања}\}) = 1.$$

Са мерљивим кардиналима почињу тзв. велики недостижни кардинали, при чему за консистентску јачину ових и из њих изведених кардинала, јако компактних, супер компактних итд. Важи слично што и за почетак хијерархије недостижних кардинала, постојање јачих недостижних кардинала доказује консистентност теорија добијених из ZFC додавањем аксиома о постојању слабијих недостижних кардинала. Овде је посебно значајна следећа Соловејева теорема, као прва која повезује хијерархију недостиживих кардинала са математиком.

Теорема 4.11. ***(Соловеј)*** Следеће теорије су еквиконсистентне:

1. ZFC + „постоји тотална σ - адитивна мера која шири Лебегову меру (на све скупове реалних бројева)";
2. ZFC + „постоји мерљив кардинал";
3. ZFC + „постоји реално мерљив кардинал".

За овом теоремом уследио је низ резултата сличне природе. Ови резултати омогућили су ни мало очекивани увид у односе консистентске јачине разноврсних математичких својстава. Тиме је проучавање јаких аксиома бесконачности одређених хијерархијом недостиживих кардинала добило изузетно значајан смисао у класификацији низа претходно нерешених математичких проблема, издвајањем њихових карактеристичних својстава и позиционирањем ових својстава у линеарној скали недостиживих кардинала.

ЈАКЕ АКСИОМЕ БЕСКОНАЧНОСТИ – СКРАЋЕНА МАПА

позиција на Ord	**конзистентска моћ**
	“$\mathbf{0 = 1}$”
	$\vdots$
	n-огроман
	$\downarrow$
	огроман
	$\downarrow$
1. екстрендибилан $\lambda > \lambda$ суперкомпактних	екстендибилан
	$\downarrow$
1. суперкомпактан $\lambda > \lambda$ мерљивих	суперкомпактан
	$\downarrow$
1. компактан (може да буде једнак 1. мерљивом или 1. суперкомпактном)	компактан
	$\downarrow$
1. мерљив $\lambda > \lambda$ слабо компактних	мерљив, RV-мерљив, $0^{\#}$
$0^{\#}$	
1. тотално неописив	$\downarrow$
1. слабо компактан јако недостижив - $\prod_1^1 -$неописив	слабо компактан јако недостижив
	$\downarrow$
1. јако хипер Mahlo $\lambda > \lambda$ јако Mahlo	јако хипер Mahlo
	$\downarrow$
1. јако Mahlo $\lambda > \lambda$ јако хипер недостижних	јако Mahlo
	$\downarrow$
1. јако хипер недостижив $\lambda > \lambda$ јако недостижних	јако хипер недостижив
	$\downarrow$
1. јако недостижив	јако недостижив
RV-мерљиви ($\leq 2^{\aleph_0}$), реално велики	
1. слабо хипер Mahlo $\lambda > \lambda$ слабо Mahlo	
1. слабо Mahlo $\lambda > \lambda$ слабо хипер недостижних	
1. слабо хипер недостижив $\lambda > \lambda$ слабо недостижних	
1. слабо недостижив	
ω	

Закључак

По завршетку излагања у овом раду поставља се питање – докле смо у ствари стигли? Показали смо колико важну улогу има кофиналност приликом одређивања вредности степеновања кардинала, доказали смо Јехову теорему која нам описује могуће вредности приликом степеновања кардинала. Навели смо која тачно ограничења ZFC поставља на функцију континуума у регуларним аргументима, доказали смо Буковски – Хехлерову теорему из које видимо да на функцију континуума у сингуларним кардиналима ипак постоје још нека ограничења. Такође смо показали важност хипотезе сингуларних кардинала уз коју се могу добити прилично јаки резултати без потребе да се претпоставља јаче тврђење генерализоване хипотезе континуума.

Надам се да овај рад може послужити као добар увод у кардиналну аритметику и мотивација за даље разматрање модернијих подручја као што је теорија великих кардинала.

Циљ кофиналности је описивање степеновања сингуларних кардинала. Један од најпознатијих резултата кофиналности је чињеница да је број пребројивих подскупова од $\aleph_\omega$ потребних да се прекрију сви пребројиви подскупови од $\aleph_\omega$ ограничен.

Предмет проучавања теорије великих кардинала су у првом реду недостиживи кардинали. Један од проблема који се поставља је питање постоји ли кардинал на којем се може дефинисати нетривијална мера. Показује се да ако такав кардинал постоји он мора бити недостижив.

Више информација о кофиналности може се наћи у [3], док се додтана литература и информације везане за теорију великух кардинала могу наћи у [4] и [6].

Литература

[1] Keith J. Devlin: *Fundamentals of Contemporary Set Theory*, Springer, New York 1979.

[2] F.R. Drake, D. Singh: *Intermediate Set Theory*, John Wiley & Sons, Chichester 1996.

[3] M. Holz, K. Steffens, E. Weitz: *Introduction to Cardinal Arithmetic*, Birkhäuser, Basel 1999.

[4] Karel Hrbacek, Thomas Jech: *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker, New York 1999.

[5] Menachem Kojman: *PCF Theory*, Topology Atlas Invited Contributions vol. 6 issue 1 (2001.) str.74-77

[6] Aleksandar Perović, Aleksandar Jovanović, Boban Veličković: *Teorija skupova*, Matematički fakultet, Beograd 2007.