MATEMATIČKI FAKULTET
Univerziteta u Beogradu

MASTER RAD

MARKOVLJEVI PROCESI I FINANSIJSKI DERIVATI

Student:
Valentina Lekić 1158/2010

Mentor:
Dr Vladimir Božin

Beograd, oktobar 2013.

Sadržaj:

1. Osnovni pojmovi iz finansijske matematike

Ekonomsko tržište nameće potrebu za donošenjem blagovremenih odluka od kojih zavise rezultati poslovanja. Najznačajnije odluke donose se na osnovu urađenih analiza rezultata i njihove realizacije. Kada se ciljevi ekonomskih problema mogu numerički izraziti onda se vrlo često koriste ekonomsko-matematički modeli.

Prvo će biti objašnjeni neki osnovni pojmovi iz finansijske matematike da bi rad bio razumljiviji. Finansijske institucije su se tokom 1970-ih našle u rizičnom okruženju koje je 1980-ih i 1990-ih godina postajalo sve različitije. Kamatne stope su se učestalije menjale, dok su tržišta akcija obveznica povremeno bila veoma nestabilna. Zbog toga su finansijske institucije počele više da vode računa o smanjenju rizika sa kojim su se suočavale. Zainteresovanost za smanjenje rizika dovela je do pojave finansijskih inovacija tj. pojave novih finansijskih instrumenata koji finansijskim institucijama pomažu da bolje upravljaju rizicima. Ti instrumenti nazivaju se finansijskim derivatima.

1.1. Berza

Aktiva (*assets*) je osnovno finansijsko sredstvo kojim se trguje na berzi. Pod aktivom podrazumevamo sve objekte koji imaju neku vrednost, odnosno sve objekte kojima možemo da trgujemo na berzi. Aktivu čine sledeći finansijski proizvodi:

- Roba (*commodity*): nafta, struja, zlato,...
- Valute (*currencies*): euro, funta, dolar,...
- Obveznice i državne hartije od vrednosti (*bonds*) su vrednosni papiri odnosno sertifikati koje izdaje vlada ili kompanija koja garantuje da će pozajmljeni novac sa fiksiranom kamatnom stopom biti vraćen u dogovorenom roku.
- Akcija (*stock*) neke kompanije predstavljaju dokument koji se za određenu sumu novca izdaje vlasniku akcije i na osnovu kojeg vlasnik akcije stiče određena prava. Vlasnik akcije može imati pravo učešća u organima uprave kompanije kao i u raspodeli njene dobiti. Vlasnici akcija nazivaju se deoničari koji na osnovu svojih akcija dobijaju prihod u vidu dividende.
- Berzanski indeks (indices) je lista od n akcija trenutno najbolje kotiranih kompanija date države i predstavlja njihovu aritmetičku sredinu. Indeksima se meri kretanje aktiva na tržištu. Najpoznatiji srpski indeks je indeks beogradske berze *BELEXKS15*, a najčešće citirani je američki koji sadrži cene akcija 30 kompanija : *Dow Jones Industrial Average*, zatim nemački *DAXX*, japanski *NIKKEI Dow*, itd.

Kao kod svake trgovine postoje dve strane: prodavac i kupac. Za osobu koja prodaje (*writer*) kaže se da je u kratkoj poziciji (*short position*) dok je osoba koja kupuje u dugoj poziciji (*long position*).

- Kratka pozicija (*short position*) je pozicija u kojoj se investitor nalazi nakon prodaje aktive koju trenutno ne poseduje. Kratka pozicija može da se ostvari raznim transakcijama na tržištu, kao što su kratka prodaja te aktive, kupovina prodajne opcije (*put option*), kao i raznim drugim metodama.
- Duga pozicija (*long position*) podrazumeva poziciju u kojoj se investitor nalazi nakon kupovine, odnosno nakon sklapanja ugovora o kupovini određene finansijske aktive i to sa namerom da je zadrži određeni vremenski period u iščekivanju porasta njene vrednosti, samim tim i trenutne zarade.

Na primer, za vlasnika kompanije *Microsoft* se kaže da „ima dugu poziciju sa *Microsoftom*“, što znači da on poseduje tu aktivu i ima nameru da je zadrži jer je malo verovatno da će opadati vrednost akcija velikih kompanija.

- Portfolio (*Portfolio*) je skup vrednosnih papira koje poseduje investitor ili kompanija gde vrednosni papiri ne moraju biti istog tipa. Može da se sastoji od opcija, akcija, valuta,...
- Finansijski derivati (*Financial derivatives*) su izvedene hartije od vrednosti. Predstavljaju složene finansijske instrumente izvedene iz osnovne finansijske aktive i njihova vrednost određena je cenom osnovne finansijske aktive. U finansijske derivate spadaju opcije.

1.2. Opcije

Definicija: Opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da kupi ili proda neki vrednosni papir pod određenim uslovima.

Uslovi prisutni u tom ugovoru (opciji) su sledeći:

- Ugovorena cena vrednosnog papira po kojoj se može kupiti odnosno prodati vrednosni papir koju ćemo označavati sa K (*strike price*) i
- Ugovoreno vreme do isteka opicije koje ćemo označavati sa T (*strike time*)
- Početna cena vrednosnog papira – S_o i
- Cena u trenutku t – $S_{t.}$

U zavisnosti od kupovine ili prodaje vrednosni papir, imamo dve vrste opcija:

- Call opcija – daje pravo ali ne i obavezu kupovine vrednosnog papira po unapred dogovorenoj ceni K

- Put opcija – daje pravo ali ne i obavezu prodaje vrednosnog papira po unapred ugovorenoj ceni K.

Što se tiče vremena izvršenja opcija osnovne su dve vrste opcija:

1) Evropske – mogu da se aktiviraju u ugovoreno vreme T
2) Američke – dopuštaju aktiviranje u bilo kom trenutku vremena koji je manji ili jednak ugovorenom vremenu T.

Ovi nazivi evropska i američka opcija odnose se samo na vreme izvršavanja opcije bez obzira na državu gde je opcija izdata.

Oznaka za evropske *call* opcije je *c*, američke C, a oznaka cene evropske put opcije *p*, a američke P.

Vrednosni papir na koji se odnosi opcija je najčešće akcija, ali to može biti i bilo šta što se može prodati na tržištu: *forward* ugovori, fjučursi, berzanski indeksi, strane valute, nekretnine itd.

Opcije koje nisu klasične *put* i *call* nazivaju se egzotične opcije, a svaka opcija koja nije egzotična zove se vanila opcija (*vanilla option*).

Ideja trgovinom opcijama datira još od doba Feničana. Poznato je da su oni koristili kao i Rimljani ugovore pri trgovini. Tales se proslavio kada je jedne godine predvideo dobar rod maslina. Pre nego što je krenula sezona on je napravio ugovor koji mu je omogućio da po nižoj ceni iznajmi veliki broj presa za masline u toku sezone i kada se obistinila njegova pretpostavka o izuzetnom rodu, on je te iste prese iznajmljivao po daleko većoj ceni.

1.2.1. Opcije i njihove osobine

Faktori koji utiču na vrednost opcija:

1) početna cena akcije δ_o
2) ugovorena cena K
3) vreme do isteka opcije T
4) volatilnost akcije σ
5) kamatna stopa r – koja se neprekidno obračunava
6) očekivane dividende tokom trajanja opcije

Vreme do isteka opcije

Kod američkih *put* i *call* opcija cena opcije raste sa porastom vremena. Kod evropskih to nije uvek slučaj.

primer: Pretpostavimo da posedujemo dve evropske *call* opcije, jednoj je vreme isteka 1 mesec, drugoj 2 meseca. Međutim za 6 nedelja se očekuje isplata velike dividende. Tada je prirodno da cena opcije sa kraćim vremenom do isteka bude veća jer će se njenim aktiviranjem kroz mesec dana moći kupiti akcija za koju će kroz 6 nedelja dobiti velika dividenda.

Volatilnost akcije

Volatilnost je važan parametar i predstavlja meru neodređenosti u budućem kretanju cena akcija. Sa porastom volatilnosti raste mogućnost da se cena akcije znatno promeni. Vlasnik *call* opcije je na dobiti ako akcija poraste, dok mu je rizik u slučaju pada cene akcije ograničen.

Slično, vlasnik *put* akcije zarađuje pri velikom padu cene akcija i ima ograničen rizik u slučaju njihovog rasta. Zbog toga vrednosti *put* i *call* opcije rastu sa porastom volatilnosti.

Kamatna stopa

Uticaj kamatnih stopa na cenu opcija nije uvek isti. Kada kamatne stope na tržištu rastu očekivani prinos investitora od akcija raste.

Međutim, sadašnja vrednost bilo kog budućeg toka novca koji će vlasnik opcije dobiti oada. Kombinovani uticaj ova dva efekta smanjuje vrednost *call* opcije. Ovde se pretpostavlja rast kamatnih stopa, što je u realnosti nemoguće.

Dividende

Dividende koje se dobijaju tokom trajanja opcije utiču na cenu akcije, pa samim tim i na cenu opcije. Dividende utiču na smanjenje cene akcija dan posle isplaćenih dividendi. Pa cena *call* opcija odmah gube na svojoj vrednosti, a cena *put* opcija rastu.

2. Slučajni procesi

2.1. Slučajni procesi

Definicija. Slučajni proces se formalno definiše kao kolekcija slučajnih veličina koje su definisane na istom prostoru verovatnoća (Ω, π, P) gde su slučajne veličine indeksirane pomoću skupa T. Slučajne veličine o kojima je reč $\{X_t, t \in T\}$.

Posebno, ako je $T = \{1, 2, \dots, n\}$ onda takav proces nazivamo slučajni vektor. T predstavljamo kao vreme ukoliko nije opšiji oblik slučajnog procesa.

Slučajni proces $\{X_{(t)}, t \in T\}$ je kraći zapis za $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ gde je X dvodimenzionalna funkcija koja zavisi i od t i od ω.

Za fiksirano $\omega : \omega = \omega_o$ onda je $X(t, \omega_o) = \tau(T),\ t \in T, X$ je funcija jedne promenljive koja se naziva trajektorija.

Za fiksirano $t : t = t_o$ onda je $X(t_o, \omega)$ funkcija jedne promenljive koja se zove slučajna veličina.

2.2. $\sigma -$ prsten

$\mathcal{B}[0,1]$ je familija Borelovih skupova koji su podskupovi intervala $[0,1]$. Borelov $\sigma -$ prsten je minimalni $\sigma -$ prsten koji sadrži sve intervale $(-\infty, \alpha], \alpha \in R$.

$\sigma -$ prsten ima sledeća svojstva:

1) ako je $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup A_n \in \mathcal{B}$
2) ako je $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{B}$

$\sigma -$ algebra ima sledeća svojstva:

1) ako je $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow \cup A_k \in \mathcal{B}$
2) ako $A \in \mathcal{B} \Rightarrow C(A) \in \mathcal{B}$

<u>U osnovne pojmove slučajnog procesa spadaju</u>:

- Pojam filtracije i filtriranog prostora u neprekidnom i diskretnom vremenu
- Merljivost procesa
- Vreme zaustavljanja.

2.3. Filtracija

- Pojam filtracije i filtriranog prostora u neprekidnom i diskretnom vremenu.

Definicija. Filtracija opisuje kako se informacija otkriva s vremenom. Neka je vreme u kome se posmatra neka pojava diskretno. Tada filtracijom nazivamo rastući niz $\sigma -$ polja koji je oblika: $F = \{\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots\}$.

Filtracija u diskretnom i neprekidnom vremenu može da se koristi kao model za protok informacije, jer kako vreme prolazi, posmatrač dobija sve detaljniji uvid u moguće ishode eksperimenta, odakle zaključujemo da se skup informacija s vremenom povećava. Osobina filtracije odgovara činjenici da se informacija pamti u vremenu.

$\sigma -$ polja opisuju trenutni stepen informisanosti o mogućim ishodima eksperimenta.

2.4. Merljivost procesa

Definicija. Neka je $\{X_t, t \in [0,1]\}$ slučajan proces definisan na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa vrednostima u prostoru $(R, \mathcal{B})$. Slučajan proces je merljiv ako za svako $B \in \mathcal{B}$ važi: $\{(\omega, t)\colon\ X(\omega, t) \in B\} \in \mathcal{F} \times \mathcal{B}([0,T])$ gde je $\mathcal{B}([0,T])$ Borelovo $\sigma -$ polje formirano na intervalu $[0,T]$, dok je $\mathcal{F}x\mathcal{B}([0,T])$ najmanje $\sigma -$ polje formirano nad skupovima Dekartovog proizvoda.

Teorema. (Fubinijeva teorema)

Neka je $\{X_t, t \in [0,T]\}$ merljiv slučajni proces. Tada važe sledeće osobine:

1. Skoro sve trajektorije procesa su merljive funkcije.
2. Ako postoji matematičko očekivanje $E(X_t)$ za svako t, tada je funkcija $E(X_t)$ merljiva po promenljivoj t.
3. Ako je $S \subset T$ merljiv podskup i ako važi $\int_S \ E|X_t|dt < +\infty$, tada su skoro sve trajektorije procesa X_t integrabilne i sa verovatnoćom jedan važi:

$$E\int_S \ X_t dt = \int_S \ E(X_t)dt < +\infty.$$

- Vreme zaustavljanja (*stopping time*)

Definicija. Neka je $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}, t \in T$ filtracija na skupu Ω. Slučajnu promenljivu τ koja uzima vrednosti iz skupa $T \cup \{+\infty\}$ nazivamo vreme zaustavljanja u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$ ako važi događaj $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ za svako $t \in T$.

2.5. Neke klase slučajnih procesa

1.Proces $\{X(t), t \in T\}$ je sa nezavisnim priraštajima ako su slučajne veličine $X(t_o), X(t_1) - X(t_o), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ nezavisne kad god je $t_o < t_1 < \dots < t_n$ gde je $(t_o, t_1, \dots, t_n) \in T$.

2. **Proces $\{X(t), t \in T\}$ je sa konačnim momentima drugog reda** ili $L^2 -$ proces ako je $E|X(t)|^2 < +\infty$

Ova definicija važi i za kompleksne slučajne veličine, tj. za $X(t) = \zeta(t) + i \cdot \eta(t)$.

Za ovakve procese definiše se korelaciona funkcija:

$$K(S,t) = E((X(s) - m_x(s)) \cdot \left(\overline{X(t) - m_x(t)}\right)$$

$$K(S,t) = EX(s) \cdot \overline{X(t)} - m_x(s) \cdot \overline{m_x(t)}.$$

3. Proces sa ortogonalnim priraštajima.

Ovo su procesi koji su kompleksni i za koje je ispunjeno:

$$E|X(s) - X(t)|^2 < +\infty \qquad s, t \in T$$

i $E\left[\left(X(t_4) - X(t_3)\right) \cdot \left(\overline{X(t_2) - X(t_1)}\right)\right] = 0,$ kad je $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ $(t_i \in T)$

U posebnom slučaju kad su slučajne veličine realne koristi se termin proces sa nekorelilanim priraštajima.

4. Proces $\{X_t, t \geq t_o\}$ je Gausov slučajni proces ako su sve konačno-dimenzionalne raspodele normalne. Višedimenzionalna Gausova raspodela je određena svojom kovarijansom i vektorom matematičkog očekivanja, sledi da je Gausov proces takođe određen svojom funkcijom očekivanja i kovarijacionom funkcijom, koje su date izrazima:

$$\mu(t) = E[X_t]; Cov(X_s, X_t) = E\left(X_s - \mu(x)\right) \cdot \left(X_t - \mu(t)\right)$$

5. Markovski procesi

Slučajni proces $\{X_t, t \in T\}$ je Markovski ili Markovljev proces ako za svako $n \in N$ i za svaku n-torku vremenskih trenutaka iz intervala $[0,T]$ $s_1, s_2 < \dots < s_n < t$ kao i za svaki Borelov skup $\mathcal{B}$ važi sledeći uslov:

$$P\left(X_t \in \mathcal{B} \middle| X_{s_1}, X_{s_2}, \dots, X_{s_n}\right) = P(X_t \in \mathcal{B} | X_{s_n})$$

Ova definicija može da se interpretira da budućnost procesa zavisi od prošlosti isključivo preko sadašnjeg trenutka t. Stohastički proces koji je vremenski neprekidan sa diskretnim prostorom stanja koji predstavljaju vremenski neprekidne lance je važan za ovaj deo rada. Od posebnog značaja su lanci koji poseduju svojstvo Markova i koji se prema ruskom matematičaru

A.A.Markovu (1856-1922) koji ih je prvi izučavao nazivaju još i lanci Markova ili Markovljevi lanci.

Svojstvo Markova se može opisati na više različitih načina , a njegova suština se sastoji u sledećem:

Neka se posmatrani sistem, koji je opisan Markovljevim lancima, nalazi u nekom stanju koje ćemo nazvati sadašnje stanje, onda ako verovatnoća da će sistem iz sadašnjeg stanja preći u određeno buduće stanje zavisi samo od ova dva stanja (sadašnjeg i budućeg), a ne zavisi od toga kako je sistem dospeo u sadašnje stanje, tada se kaže da takav sistem ima svojstvo Markova. Dakle, to su sistemi čija je čitava predistorija sadržana u sadašnjem stanju, a o ponašanju sistema u prethodnim stanjima informacije ne postoje. Takvi sistemi nazivaju se sistemi bez posledica ili sistemi bez memorije.

6. Martingali

Definicija. Neka je M_t proizvoljan slučajni proces adaptiran datoj filtraciji $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, gde vremenska promenljiva može da bude neprekidna $0 \leq t \leq T$ ili diskretna $0, 1, \dots, T$. Proces M_t nazivamo martingalom ako važe oba uslova:

i) Ako je za svako t proces integrabilan, odnosno očekivanje procesa M_t je konačno $E|X(t)| < \infty$

ii) Ako je ya svako t i s, $0 \leq s, t < T$ ispunjen martingalan identitet: $E[M_t \mid \mathcal{F}_s] = M_s$.

Za procese sa diskretnim vremenom martingalni identitet je sledećeg oblika:

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n, \forall n.$$

2.6. Braunovo kretanje

Braunovo kretanje je jedno od najvažnijih slučajnih procesa. Kao praktičan alat ima veliki uticaj na skoro svaku granu fizičke nauke, isto kao i nekoliko grana društvenih nauka.

Prve važne primene Braunovog kretanja su napravljene od strane *L.Bachelier* i *A.Einstein*. *Bachelier* je priznat kao otac kvantitativnih metoda, i njegov cilj je bio da napravi model za finansijsko tržište, a *Einstein* je želeo da modeluje kretanje čestice zadržane u čestici. *Bachelier* se nadao da će Braunovo kretanje dovesti do modela za cene hartija od vrednosti što bi dalo sigurnu osnovu za određivanje cene opcija.

Nada je opravdana posle nekih modifikacija. *Einstein*-ov cilj je bio da napravi sredstvo za merenje Avogadrovog broja, broj molekula u molu gasa i eksperiment koj je Ajnštajn predložio dokazao je da je u skladu sa njegovim pretpostavkama.

Teorija i praksa su bile veoma zadovoljene kada je *Winer* 1923. godine usmerio pažnju na matematiku Braunovog kretanja. *Winer* je prvi dokazao da Braunovo kretanje postoji kao striktno definisan matematički objekat. Jedan način na koji se priznaje *Winer*-ov doprinos danas je to što je u mnogim delovima naučnog sveta Braunovo kretanje je jednako verovatno da se zove *Winer*-ov proces.

Definicija. Slučajni proces neprekidnog vremena $\{B_t: 0 \leq t < T\}$ se zove standardno Braunovo kretanje na $[0, T)$ ako ima sledeće četiri osobine:

(i) $B_o = 0$ (Početna vrednost procesa je nula)

(ii) Priraštaju od B_t su nezavisni tj. za svaki konačni skup vremena $0 \leq t_1 < \cdots < t_n < T$ slučajne veličine $B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ su nezavisni.

(iii) Za bilo koje $0 \leq s \leq t < T$ priraštaj $B_t - B_s$ ima Tausovu raspodelu sa očekivanjem 0 i varijansom $t - s$, tj. za bilo koji vremenski trenutak i za svako $a < b$ važi:

$$P\{a \leq B_t - B_s \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b e^{-X^2/2(t-s)} dX$$

(iv) Za svako ω u skupu verovatnoće 1 $B_t(\omega)$ je neprekidna funkcija od t.

U opštem slučaju, umesto uslova (ii) može da stoji:

$$\text{za } 0 \leq s < t, \qquad B_t - B_s \sim \mathcal{N}\big(\mu(t-s), \sigma^2(t-s)\big),$$

i tada se proces $\{B_t\}$ naziva Braunovo kretanje sa parametrom drifta μ i disperzijom σ^2.

Ako je (X_t) Braunovo kretanje sa parametrom drifta μ i disperzijom σ^2, a (B_t) standardno Braunovo kretanje, tada je

$$X_t = \mu \cdot t + \sigma \cdot B_t.$$

Uslov (i) predstavlja normalizaciju i on je tu po konvenciji. Naime, ako bi proces $(B_t)_{t \geq 0}$ zadovoljavao samo poslednja tri uslova, a ne i uslov (i), onda bi proces $\{B_t - B_o, t \geq 0\}$ bio standardan Vinerov proces.

Konstrukcija Braunovog kretanja, odnosno dokaz da matematički objekat sa svojstvima (i) – (iv) zaista postoji, veoma je netrivijalna. Mi ćemo pomenuti samo neka svojstva Braunovog kretanja koja slede iz definicije.

2.6.1. Kovarijacija Braunovog kretanja

Tvrđenje. Neka je $(B_t)_{t \geq 0}$ Braunovo kretanje sa parametrom drifta μ i disperzijom σ^2, tj. $B_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$. Tada je kovarijacija

$$cov(B_t, B_s) = \sigma^2 \min\{s, t\}.$$

Dokaz. a) Neka je $0 \leq s < t$. Tada je:

$$cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s) - E(B_t)E(B_s)$$

$$= E\big(B_s(B_t - B_s + B_s)\big) - E(B_t)E(B_s)$$
$$= E(B_s^2) + E\big(B_s(B_t - B_s)\big) - E(B_t)E(B_s)$$
$$= E(B_s^2) + E(B_s)E(B_t - B_s) - E(B_t)E(B_s)$$
$$= E(B_s^2) - \big(E(B_s)\big)^2 = \sigma^2 s,$$

gde je korišćena nezavisnost priraštaja:

$$E\big(B_s(B_t - B_s)\big) = E(B_s)E(B_t - B_s)$$

b) ako bi bilo $0 \le t < s$ dobija se analogno:

$$cov(B_t, B_s) = \sigma^2 t,$$

pa oba slučaja možemo da zapišemo kao:

$$cov(B_t, B_s) = \sigma^2 \min\{s, t\}.$$

2.6.2. Diferencijabilnost trajektorije Braunovog kretanja

Iako su neprekidne, trajektorije Braunovog kretanja imaju razne neočekivane i interesantne osobine i, u stvari, loše se ponašaju. Tako, na primer, važi

Teorema. Skoro sve trajektorije Braunovog kretanja su negde diferencijabilne, tj.

$$P\left((\forall t > 0) : \lim_{n \to 0} \sup \left|\frac{W_{t+h} - W_t}{h}\right| = +\infty\right) = 1.$$

Iz ove teoreme sledi jedno važno svojstvo trajektorije Braunovog kretanja, a to je da trajektorije Braunovog kretanja nemaju ograničenu varijaciju, odnosno važi da je varijacija Vinerovog procesa $W(t)$ na intervalu $[0, t]$ jednaka

$$V(t) = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |W(t_i) - W(t_{i-1})|\right\} = +\infty$$

gde je supremum uzet po svim podelama $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_n = t$ i $n \in N$.

Ovo svojstvo sledi iz činjenice da je funkcija ograničene varijacije skoro svuda diferencijabilna (jer se može predstaviti kao zbir jedne rastuće i jedne opadajuće funkcije). Pošto za Braunovo kretanje važi da su sa verovatnoćom jedan njegove trajektorije negde diferencijabilne, odatle se zaključuje da su te trajektorije neograničene varijacije.

Da proces $W(t)$ ima ograničenu varijaciju, onda bi mogao da se definiše stohastički integral:

$$\int_0^t Y(u)dW(u),$$

za proizvoljan slučajan proces $Y(t)$, kao Lebeg-Stiltjesov integral, pod uslovom da je $Y(t)$: integrabilan u odnosu na $W(t)$. Međutim zbog neograničenosti varijacije procesa $W(t)$, taj integral ne može da se definiše kao Lebeg-Stiltjesov integral.

2.7. Model kretanja cena vrednosnih papira kao geometrijskog Braunovog kretanja (Bašelje-ov model)

Bešelje je modelirao proces kretanja cena vrednosnih papira na berzi pomoću Braunovog kretanja, sa parametrom drifta μ i disperzijom σ^2 tako što je pretpostavljao da, za sve negativne vrednosti y i t, kolekcija cena $S(y), 0 \leq y < +\infty$, zadovoljava uslov da slučajna promenljiva $S(y+t) - S(y)$ ne zavisi od toga kakve su bile cene vrednosnih papira do trenutka vremena y, kao i uslov da $S(t+y) - S(y)$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Ovaj model ima tu manu što pretpostavka da cena vrednosnog papira ima normalnu raspodelu dopušta mogućnost da cena bude negativna. Druga mana se sastoji u tome što pretpostavka o tome da razlika, odnosno promena, u ceni vrednosnog papira na intervalu iste dužine ima istu raspodelu, bez obzira na to kolika je ta cena bila na početku intervala, nije opravdana.

Na primer, po Bašelje-ovom modelu, važi:

Verovatnoća da cena akcije, koja vredi 20$ padne tokom jednog meseca na 15$ (pad od 25%), ista je kao i verovatnoća da akcija, čija je cena 10$ padne tokom meseca na 5$ (pad od 50%).

Sada ćemo preći na model koji nema te dve pomenute mane. Posmatraćemo cenu nekog vrednosnog papira, na primer akcije, koja se menja tokom vremena. Sadašnje vreme je nula, a $S(y)$ je cena akcije posle intervala vremena dužine y.

Definicija. Kolekcija cena $S(y), 0 \leq y < +\infty$, predstavlja proces geometrijskog Braunovog kretanja sa parametrom drifta μ i parametrom volatilnosti σ ako za svako $y, t \geq 0$ važi:

1. slučajna promenljiva $\dfrac{S(t+y)}{S(y)}$ ne zavisi od cena koje su bile do trenutka y.
2. $\ln\left(\dfrac{S(t+y)}{S(y)}\right)$ je slučajna promenljiva koja ima raspodelu $\mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Drugim rečima, razlika logaritama buduće cene i sadašnje cene je proces Braunovog kretanja. Ovaj model nema pomenutih mana koje postoje u Bašelje-ovom modelu, gde se pretpostavljalo da je razlika cena, a ne razlika logaritama cena, predstavljala proces Braunovog kretanja. Cene nikad nisu negativne i u ovom modelu posmatra se količnik cena, a ne njihova razlika.

Ako se zna početna cena $S(0)$ i parametri drifta μ i volatilnosti σ (koji se u praksi dobijaju statističkim metodama), možemo naći matematičko očekivanje i disperziju za cene vrednosnih papira u nekom budućem trenutku t. Da bismo to našli podsetimo se definicije log-normalne raspodele.

Definicija. Slučajna promenljiva Y ima log-normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ^2 ako je $Y = e^X$, gde X ima $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodelu. Ova raspodela ima sledeće matematičko očekivanje i disperziju:

$$E(Y) = E(e^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^X e^{\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX$$

smenom: $\frac{X-\sigma}{\sigma} = y$

$$X = \sigma y + \mu$$

$$dX = \sigma dy$$

dobijamo:

$$E(Y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \cdot e^{\sigma y + \mu} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{e^{\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y^2 - 2\sigma y + \sigma^2 - \sigma^2)} dy$$

$$= \frac{e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sigma)^2} dy.$$

Dakle, smenom $z = y - \sigma$, dobijamo da je vrednost integrala podeljenog sa 2π jednaka 1, odakle sledi da je $E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$.

Na sličan način dobijamo:

$$E(Y^2) = e^{2(\mu + \sigma^2)}$$

odakle sledi da je

$$D(Y) = e^{2(\mu + \sigma^2)} - \left(e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\right)^2$$

$$= e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

Alternativa prethodnoj definiciji geometrijskog Braunovog kretanja je:

Definicija. Ako je slučajni proces $(W_t)_{t\geq 0}$ Braunovo kretanje, tada se proces $(Y_t)_{t\geq 0}$ definisan kao $Y_t = e^{W_t}$ naziva geometrijsko Braunovo kretanje.

Pretpostavimo sada da proces promene cena vrednosnog papira tokom vremena $S(t), t \geq 0$, predstavlja proces geometrijskog Braunovog kretanja μ i σ^2. Znajući $S(0)$ - cenu vrednosnog papira u trenutku $t = 0$, možemo na osnovu prethodnih rezultata naći matematičko očekivanje i disperziju cene u proizvoljnom trenutku t:

$$\begin{aligned}
E\big(S(t)\big) &= E\left(\frac{S(t)}{S(0)} \cdot S(0)\right) = S(0)E\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \\
&= S(0)E\left(e^{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}\right) \\
&= S(0)e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \\
&= S(0)e^{t\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}
\end{aligned}$$

gde $e^{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}$ ima log-normalnu raspodelu sa parametrima μt i $\sigma^2 t$.

$$\begin{aligned}
D\big(S(t)\big) &= D\left(\frac{S(t)}{S(0)} \cdot S(0)\right) \\
&= S^2(0)D\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \\
&= S^2(0)D\left(e^{\ln\frac{S(t)}{S(0)}}\right) \\
&= S^2(0)e^{2\mu t + \sigma^2 t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right) \\
&= S^2(0)e^{t(2\mu + \sigma^2)}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right).
\end{aligned}$$

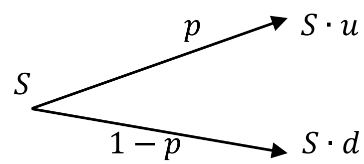
2.8. Binomni model za promene cena akcija tokom vremena

Kod binomnog modela sa jednim korakom (slika 1.1) pre svega se fiksira dužina osnovnog perioda (na primer jedna nedelja). Pretpostavlja se da ako je cena akcije poznata na početku ovog perioda, na početku sledećeg perioda, cena može da uzme samo dve vrednosti: cena akcije može da poraste za faktor $u > 1$ (u - oznaka od engleske reči up) i da iznosi $u \cdot S$, ili da opada do dS za faktor $d < 1$ (d - oznaka od engleske reči down).

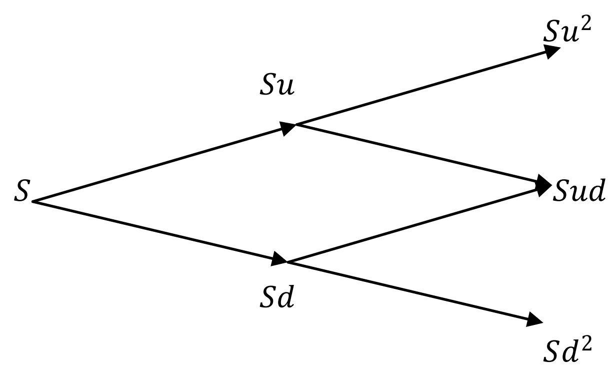
Pretpostavimo da su verovatnoće koje odgovaraju tim dvema mogućnostima p i $1-p$. Dakle, cena akcija na početku drugog perioda je slučajna promenljiva S_1 sa sledećom raspodelom:

$$S_1 : \begin{pmatrix} uS & dS \\ p & 1-p \end{pmatrix}.$$

Može se pretpostaviti da ovakav model važi za više koraka. Sa porastom broja koraka dobijamo sve složeniju mrežu.



Slika 1.1. Binomni model sa jednim korakom



Slika 1.2. Binomni model sa dva koraka

Verovatnoća kretanja naviše po rešetki je p, a naniže je $1-p$. Binomni model sa dva perioda može da se vidi na slici 1.2.

Binomni model na prvi pogled izgleda jednostavan, zato što dopušta samo dve vrednosti cene akcije za naredni period. Međutim, ako su dužine perioda male, posle kratkog vremena pojavi se dosta mogućih vrednosti: posle n perioda postoji $n+1$ moguća vrednost koju cena akcije može da uzme. Pošto je model multiplikativan, cena nikad neće postati negativna.

Model je određen ako poznata jedinica vremena u kojoj se promene cene dešavaju, kao i faktori u, d i verovatnoća p. Ako sa Δ označimo priraštaj vremena na čijem kraju dolazi do promene cene akcija, za pogodno odabrane u, d i p, sa smanjivanjem Δ, odnosno povećanjem broja koraka, binomni model promene cene akcija konvergira ka modelu geometrijskog Braunovog kretanja, što znači da geometrijsko Braunovo kretanje možemo aproksimorati prostijim procesom. Važi:

Teorema. Za pogodno odabrane u, d i p, binomni model cena konvergira ka geometrijskom Braunovom kretanju, kada $\Delta \rightarrow 0$.

3. Itoov integral i stohastičke diferencijalne jednačine

3.1. Itoov integralni račun

Itoov integral nosi ideju da martingale transformiše iz diskretnog u neprekidno vreme. Konstrukcija nam daje sistematičnu metodu za izgradnju novih martingala i vodi ka novim izračunavanjima slučajnih procesa. Itoov račun je sada dobro definisan i kao jedan od najkorišćenijih alata u teoriji verovatnoće.

Zbog primene slučajnih procesa u raznim oblastima pojavila se potreba za integracijom po trajektorijama slučajnih procesa, kao što postoji integracija po funkcijama ograničene varijacije.

Integral slučajnog procesa se naziva stohastički integral. Prilikom integracije slučajnih procesa treba odrediti koje osobine trebaju da imaju procesi po kojima se vrši integracija, a koje procesi koji se integrale.

Prilikom stohastičke integracije procesi po kojima se vrši integracija je proizvoljan martingalni proces.

$$\int f(\omega, s)\, dX(s)$$

Podintegralna funkcja može da bude funkcija konačne varijacije, tj. oblika $f(\omega, t) = f(t)$, tako može da bude i slučajni proces, tj. funkcija oblika $f(\omega, t) = X(t)$.

Stohastički integral za integrator koristi Braunovo kretanje koji je oblika

$$\int f(\omega, s)\, dB(s) \tag{1}$$

Ovaj integral nazivamo Itoov integral, a odgovarajući račun Itoov integralni račun.

Jedan od najvažnijih rezultata u teoriji stohastičke integracije je pravilo za smenu promenljivih poznatije kao Itoova formula, nazvana po matematičaru Kjošu Itu koji ju je dokazao za specijalan slučaj integrala u odnosu na Braunovo kretanje. Bez nje izračunavanje stohastičkih integrala bio bi nemoguć posao. Itoova formula ima istu ulogu kao Njutn-Lajbnicova formula u teoriji klasične integracije.

Teorema. (Jednodimenzionalna Itoova formula) Neka je $M = \{M_t, t \geq 0\}$ neprekidan martingal i $V = \{V_t, t \leq 0\}$ neprekidan proces konačne varijacije. Neka je f neprekidna, realna funkcija definisana na R^2, takva da parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ postoje i neprekidni su za sve $(x,y) \in R^+$. Tada, skoro sigurno, za svako $t \geq 0$ imamo:

$$f(M_t, V_t) - F(M_o, V_o) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s, V_s) dM_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(M_s, V_s) dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s, V_s) d[M]_s$$

gde je s vremenski parametar. Dobar način da se napiše Itoova formula je diferencijalni oblik prethodne jednačine, tj.

$$df(M_t, V_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_t, V_t) dM_t + \frac{\partial f}{\partial y}(M_t, V_t) dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_t, V_t) d[M_t].$$

3.2. Stohastičke diferencijalne jednačine

Skoro svi stohastički procesi u primenjenim naukama zadovoljavaju jednačinu oblika:

$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ pri uslovu $X_o = x_o$, gde je $\{B_t, t \geq 0\}$ proces standardnog Braunovog kretanja a dX_t i dB_t stohastički diferencijali.

Stohastičke diferencijalne jednačine su pogodne za konstrukciju i analizu verovatnosnih modela, jer se funkcije μ i σ mogu interpretirati kao aproksimacije kratkoročnog rasta i varijabilnosti posmatrane pojave, pa korisnik ima na svom raspolaganju jednostavnu šemu za konstrukciju modela procesa koji proučava.

Da bismo mogli da rešimo stohastičku diferencijalnu jednačinu, integrali koji se u njoj pojavljuju moraju da budu dobro definisani. To će biti ispunjeno ako su $\mu(\bullet,\bullet)$ i $\sigma(\bullet,\bullet)$ merljive funkcije i ako važi:

$$P\left\{\int_0^\infty |\mu(t, X_t)| dt < \infty\right\} = 1 \qquad \text{i} \qquad P\left\{\int_0^\infty |\sigma(t, X_t)^2| dt < \infty\right\} = 1$$

Jedna od najvačnijih stohastičkih diferencijalnih jednačina data je sa

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, X_o = x_o ,$$

gde su μ i σ konstantne veličine. Proces predstavljen ovom jednačinom odlikuje se promenama rasta i varijabilnosti koje su u svakom trenutku proporcionalne njegovoj trenutnoj vrednosti. Takav tip promena vrednosti očekuje se od finansijskih derivata, pa se ova jednačina često koristi kao model u finansijskoj matematici.

Kako da rešimo ovu stohastičku diferencijalnu jednačinu:

$$dX_t = \left\{f_t^{'}(t, B_t)X_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{''}(t, B_t)\right\}dt + f_x^{'} dB_t$$

Dakle, da bi se koeficijenti μ i σ poklapali treba da važi:

(1) $\mu\, f(t,x) = f_t^{'}(t,x) + \frac{1}{2} f_{xx}^{''}(t,x)$ i

(2) $\sigma\, f(t,x) = f_x^{'}(t,x)$

Iz $(2) \Rightarrow\ \sigma = \dfrac{f_x^{'}}{f}$ i pretpostavimo da je t konstantno $\Rightarrow$ $\boxed{f(t,x) = e^{\sigma x + g(t)}}$ (3)

Zamenimo u (3)u (1): $g^{'}(t) = \mu - \dfrac{1}{2}\sigma^2 \ \Rightarrow\ \ X_t = x_o \cdot e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\cdot t + \sigma B_t}$

Proces koji je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine je proces geometrijskog Braunovog kretanja.

Definicija. Slučajni proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazivamo standardnim ili Itoovim procesom ako zadovoljava neku stohastičku diferencijalnu jednačinu, tj. ako je $dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$ pri čemu su funkcije $\mu(\bullet,\bullet)$ i $\sigma(\bullet,\bullet)$ merljive.

Ako standardni proces zadovoljava jednačinu oblika $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$ proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazivamo Itoovom difuzijom i standardni proces.

Teorema. (Pravilo proizvoda za stohastički račun)

Neka su $\{X_t, t \geq 0\}$ i $\{Y_t, t \geq 0\}$ dva standardna procesa data sa:

$$dX_t = \mu(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \quad \text{i}$$

$$dY_t = \alpha(t, Y_t)dt + \beta(t, Y_t)dB_t.$$

tada je: $dX_tY_t = Y_t dX_t + X_t dY_t + \sigma(t, X_t)\beta(t, Y_t)dt.$

Itoova formula za standardne procese i pravilo proizvoda predstavljaju metode izjednačavanja koeficijenata za rešavanje jednostavnih stohastičkih diferencijalnih jednačina. Metod izjednačavanja koeficijenata može da se koristi za rešavanje skoro svih stohastičkih diferencijalnih jednačina čija je funkcija $\mu(t, X_t)$ linearna po X_t, a funkcija volatilnosti $\sigma(t, X_t)$ zavisi samo od t.

Važna primena stohastičkih diferencijalnih jednačina je u savremenim matematičkim modelima kao što je *Blek-Šols*[1] model finansijskog principa.

Definicija. (prva dva koraka) Da bi integral $I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t)dB_t$ imao smisla integrand mora da zadovolji neke osnovne zahteve koji se tiču merljivosti i integrabilnosti. Prvo ćemo razmotriti merljivost. Za početak, pustićemo da $\mathcal{B}$ označava podskup Borelovih skupova na intervalu $[0, T]$. Zatim ćemo uzeti $\{\mathcal{F}_t\}$ da bude standardna Braunova filtracija i za svako $t \geq 0$ uzećemo $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}$ da bude najmanja σ - algebra koja sadrži sve elemente skupova $A \times B$, gde je $A \in \mathcal{F}_t$ i $B \in \mathcal{B}$. Konačno, kažemo da je $f(\bullet,\bullet)$ merljiva ako je $f(\bullet,\bullet) \in \mathcal{F}_T \times \mathcal{B}$ i reći ćemo da je $f(\bullet,\bullet)$ adaptirana pod uslovom da je $f(\bullet, t) \in \mathcal{F}_t$ za svako $t \in [0, T]$.

[1] *Fischer Black (1938-1995)*
Mzron Sholes (1941-)

U prvoj fazi razvoja Itoovog integrala fokusiraćemo se na integrande iz klase $\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2[0,T]$ koja se sastoji iz svih merljivih adaptiranih funkcija f koje zadovoljavaju ograničenje integrabilnosti:

$$E\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right] < \infty. \tag{3.1}$$

Trebalo bi primetiti da očekivanje (3.1) predstavlja dvostruki integral i da je $\mathcal{H}^2$ zatvoreni linearni potprostor od $L^2(dP \times dt)$.

Da bismo predvideli definiciju Itoovog integrala, prvo moramo da razmotrimo šta bismo očekivali od integrala u najjednostavnijim slučajevima. Na primer ako uzmemo $f(\omega,t)$ da je indikator intervala $(a,b] \subset [0,T]$, onda da bi integral bio Itoov, moramo da insistiramo da važi

$$I(f)(\omega) = \int_a^b dB_t = B_b - B_a. \tag{3.2}$$

Sada, pošto u potpunosti očekujemo da Itoov integral bude linearan, naše insistiranje na identitetu (3.2) već nam govori kako moramo da definišemo I za relativno veliku klasu integranda. Da bismo definisali ovu klasu, $\mathcal{H}_o^2$ treba da označava podskup od $\mathcal{H}^2$ koji se sastoji od svih funkcija oblika

$$f(\omega,t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega) 1\,(t_i < t \le t_{i+1}), \tag{3.3}$$

gde je $a_i \in \mathcal{F}_t, E(a_i^2) < \infty$ i $0 = t_o < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = T$.

Linearnost i jednačina (3.2) ne ostavljaju nam nikakav izbor u vezi sa definicijom od I na ${\mathcal{H}_o}^2$.

Za funkciju oblika (3.3) moramo definisati I na $\mathcal{H}_o^2$ pomoću

$$I(f)(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(\omega)\left\{B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right\}. \tag{3.4}$$

Sada bismo želeli da prikažemo da možemo da proširimo domen od I iz $\mathcal{H}_o^2$ na sve od $\mathcal{H}^2$, i da bismo upotrebili proširenje treba da znamo da je $I\colon \mathcal{H}_o^2 \to L^2(dP)$ neprekidno preslikavanje.

Ovo je zaista takav slučaj, i ključna stvar koja prati fundamentalnu lemu

Lema 1.1. (Itoova izometrija na $\mathcal{H}_o^2$)

Za $f \in \mathcal{H}_o^2$ imamo

$$||I(f)||_{L^2(dP)} = ||f||_{L^2(dP\times dt)} \tag{3.5}$$

Dokaz. Treba da izračunamo ove norme. Da bismo izračunali $||f||_{L^2(dP\times dt)}$, primetićemo da za f oblika (3.3) imamo

$$f(\omega,t)=\sum_{i=0}^{n-1} a_i^2(\omega)\cdot 1\,(t_i<t\le t_{i+1}),$$

tako da je

$$E\left[\int_0^T f^2(\omega,t)dt\right]=\sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2)\,(t_{i+1}-t_i).$$

Da bismo izračunali $||I(f)||_{L^2(dP)}$, prvo ćemo pomnožiti uslove u definiciji (3.4) od $I(f)$ i da primetimo da je a_i nezavisno od $B_{t_{i+1}}-B_{t_i}$. Unakrsni uslovi imaju očekivanje nula, tako da konačno imamo:

$$\begin{aligned}E[I(f)^2]&=\sum_{i=0}^{n-1} E\left(a_i^2\left(B_{t_{i+1}}-B_{t_i}\right)^2\right)\\&=\sum_{i=0}^{n-1} E(a_i^2)\,(t_{i+1}-t_i).\end{aligned}$$

Ova izračunavanja nam govore da su dve strane jednačine (3.5) zaista jednake, tako da je dokaz leme završen.

Pomoću Itove izometrije se utvrđuje bitna činjenica da I preslikava $\mathcal{H}_o^2$ neprekidno u $L^2(dP)$, ali se došlo do neočekivane preciznosti, zato što I čuva rastojanje kada preslikava metrički prostor $\mathcal{H}_o^2$ u $L^2(dP)$;

Drugi korak:

Za bilo koje $f\in\mathcal{H}^2$, niz $\{f_n\}\subset\mathcal{H}_o^2$ je takav da f_n konvergira ka f u $L^2(dP\times dt)$. Takođe za svakog, integrali $I(f_n)$ su dobro definisani elementi od $L^2(dP)$ koji s eksplictno dati formulom (3.4).

Prirodni plan je da se nakon toga definiše integral $I(f)$ kao granica niza $I(f_n)$ u $L^2(dP)$. To jest, uzimamo

$$I(f)=\lim_{n\to\infty} I(f_n), \tag{3.6}$$

gde je detaljno interpretirana jednačina (3.6) tako da slučajna promenljiva $I(f)$ predstavlja element od $L^2(dP)$ tako da

$$||I(f_n)-I(f)||_{L^2(dP)}\to 0\quad kada\, n\to\infty.$$

Teorema 1. (Itoova izometrija na $\mathcal{H}^2[0,T]$). Za $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, imamo

$$||L(f)||_{L^2(dP)} = ||f||_{L^2(dP\times dt)}.$$

Dokaz. Sve što treba da uradimo je da poređamo primenu leme 1.1. Prvo treba da izaberemo $f_n \in \mathcal{H}^2$ tako da $||f_n - f||_{L^2(dP\times dt)} \to 0$ kad $n \to 0$. Nejednakost trougla za $L^2(dP \times dt)$ normu nam onda govori da je $||f_n||_{L^2(dP\times dt)} \to ||f||_{L^2(dP\times dt)}$.

Slično tome, pošto $I(f_n)$ konvergira u $I(f)$ iz $L^2(dP)$, onda nejednakost trougla nam govori da $||I(f_n)||_{L^2(dP)} \to ||I(f)||_{L^2(dP)}$. Ali prema lemi (1.1) imamo

$$||I(f_n)||_{L^2(dP)} = ||f_n||_{L^2(dP\times dt)}$$

pa uzimanjem granične vrednosti ovog identiteta kada $n \to \infty$ kompletira dokaz ove teoreme. □

Druga varijanta Itoove izometrije koja je često korisna je data sledećom teoremom.

Teorema 2. Za bilo koje $b \in \mathcal{H}^2$ i bilo koje $0 \leq S \leq t$, imamo

$$E\left[\left(\int_S^t b(\omega,u)dB_u\right)^2 |\mathcal{F}_S\right] = E\left(\int_S^t b^2(\omega,u)du\,|\mathcal{F}_S\right) \qquad (3.7)$$

Dokaz. Možemo skoro i da tvrdimo da je ovaj identitet očigledan iz neuslovljene verzije, ali možemo da se pitamo da li je ovo zaista očigledno ili nije. U svakom slučaju čist dokaz je dovoljno brz ako samo primetimo da je jednačina (3.7) ekvivalentna tvrdnji da je za svako $A \in \mathcal{F}_S$ imamo

$$E\left[1_A\left(\int_S^t b(\omega,u)dB_u\right)^2\right] = E\left(1_A\int_S^t b^2(\omega,u)du\right). \qquad (3.8)$$

Sada nema razloga da sumnjamo u očiglednost ove jednačine, koja neposredno sledi iz neuslovljene Itoove izometrije primenjene na modifikovani integrand:

$$\overline{b}(\omega,u) = \begin{cases} 0, & u \in [0,S] \\ 1_A b(\omega,u), & u \in [S,t] \end{cases}. \qquad \square$$

Jedan od razloga zbog čega je poslednja teorema korisna je to što ona implicira za bilo koje $b \in \mathcal{H}^2$ proces je definisan

$$M_t = \left(\int_0^t b(\omega,u)dB_u\right)^2 - \int_0^t b^2(\omega,u)du.$$

Ovo nam daje veliku i korisnu klasu martingala koje uopštava $B_t^2 - t$.

Treći korak: Itoov integral kao proces konstrukcije preslikavanja $I:\mathcal{H}^2 \to L^2(dP)$ pomera nas daleko napred, ali da bismo dobili teoriju koja nam može pomoći da predstavimo stohastičke procese potrebno nam je preslikavanje koje vodi neki proces do procesa, a ne do slučajne promenljive. Do ovoga je lako doći i videćemo da nam Itoov integral čak pruža i neprekidan martingal. Samo treba da pronađemo odgovarajući način da posmatramo ceo *continum* Itoovih integrala.

Prirodna ideja je da tražimo sistematičan način za uvođenje vremenske promenljive. Za ovu svrhu koristićemo restrikciju funkcije $m_t \in \mathcal{H}^2[0,T]$ definisanu formulom

$$m_t(\omega, s) = \begin{cases} 1, \text{ako je } s \in [0,t] \\ 0, \text{inače.} \end{cases}$$

Sada, za $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, ishod $m_t f$ je takođe u $\mathcal{H}^2[0,T]$ za svako $t \in [0,T]$, pa $I(m_t, f)$ je dobro definisani element iz $L^2(dP)$. Iz ovoga bismo mogli sa razlogom zaključiti da dobar kandidat za verziju procesa Itoovog integrala može biti dat formulom $X_t'(\omega) = I(m_t f)(\omega)$.

Ovo je skoro tačno, ali ako bolje pogledamo takođe možemo videti ida je skoro besmisleno.

Gde je problem?

Problem je da za svako $0 \leq t \leq T$ integral $I(m_t f)$ se samo definiše kao element od $L^2(dP)$, tako da vrednost integrala $I(m_t f)$ može biti određen proizvoljno za svaki skup $A_t \in \mathcal{F}_t$, sa $P(A_t) = 0$. Drugim rečima definicija integrala $I(m_t f)$ je dvosmislena na nula skupu A.

Šta je rešenje?

Činjenica je da možemo da konstruišemo neprekidni martingal X_t takav da za svako $t \in [0,T]$ imamo $P\big(X_t = I(m_t f)\big) = 1$.

Proces $\{X_t : t \in [0,T]\}$ daje nam tačno ono što želimo iz verzije procesa Itoovog integrala. Stoga, nakon što je sve urađeno, ideja koja stoji iza “procesa” $X_t' = I(m_t f)(\omega)$ nije tako besmislena; samo traži drugačiji pristup.

Teorema 3. (Itoovi integrali kao Martingali) Za bilo koje $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, postoji proces $\{X_t : t \in [0,T]\}$ koji je neprekidan martingal s obzirom na standardnu Poraunovu filtraciju $\mathcal{F}_t$ tako da događaj $\{\omega : X_t(\omega) = I(m_t f)(\omega)\}$ ima verovatnoću jedan za bilo koje $t \in [0,T]$.

Znak integrala:

Ako je $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$ i ako je $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ neprekidan martingal sa verovatnoćom $P\big(X_t = I(m_t f)\big) = 1$ za svako $0 \leq t \leq T$, tada možemo da napišemo

$$X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega, s)\, dB_s \quad \text{za svako } 0 \leq t \leq T \tag{3.9}$$

Potrudili smo se da definišemo levu stranu jednakosti (3.9), a simbol sa desne strane je ništa drugo nego skraćeno napisan proces definisan sa desne strane. Ipak, u načinu pisanja ima razlike, kao što se može videti u osnovnoj tvrdnji Itoove izometrije:

$$f \in \mathcal{H}^2 \Rightarrow E\left[\left(\int_0^t f(\omega,s)dB_s\right)^2\right] = \left[\int_0^t f^2(\omega,s)ds\right] \quad \text{za svako} \quad t \in [0,T].$$

3.3. Eksplicitno izračunavanje

Možda najprirodniji način da se potvrdi nečije razumevanje konstrukcije Itoovog integrala u $\mathcal{H}^2$ je da se uradi konkretan primer. Najlakši netrivijalni primer je dat uzimanjem $f(\omega,s) = B_s$ i mi ćemo naći apstraktnu definiciju od $I(m_t f)$ koju proizvodi ovaj integral i koji zahteva formulu

$$X_t = \int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t. \tag{3.10}$$

Ova formula se razlikuje od one koje očekujemo iz uobičajenog računa zbog prisustva dodatnog uslova $-\frac{t}{2}$. Nalazimo da su takvi uslovi karakteristični u Itoovom integralu i isključuju važnu interpretaciju verovatnoće.

Pre konstrukcije integrala, treba da izgradimo neku intuiciju izračunavanjem srednje vrednosti i varijanse obe strane jednakosti (3.10). Martingalska osobina Itoovog integrala nam kaže da je $E(X_t) = 0$ i pošto je $E(B_t^2) = t$, desna strana takođe ima očekivanje nula – za sada je to u redu. Sledeće ćemo razmatrati varijansu. Itoovom izometrijom imamo

$$Var(X_t) = E\left[\int_0^t B_s^2 ds\right] = \frac{1}{2}t^2,$$

gde smo procenili poslednji integral zamenom integrala i očekivanja i uzimanjem $E(B_s^2) = s$. Konačno, kada smo proširili desnu stranu jednakosti (3.10) i uzeli $E(B_t^4) = 3t^2$, ponovo smo našli varijansu od $\frac{t^2}{2}$; tako da što se tiče srednje vrednosti i varijanse, oni su usaglašeni, formula (3.10) je izvodljiva.

3.4. Lokalizacija i Itoov integral

Ako je $f : R \to R$ neprekidna funkcija, onda za bilo koju pogodnu teoriju stohastičkih integrala ne bi trebalo da bude problema pri definiciji integrala

$$\int_0^T f(B_t)dB_t. \tag{3.11}$$

Itoov integral će na kraju zadovoljiti ovaj tekst, ali do sada definisan samo za integrale koji zadovoljavaju ograničenje integrabilnosti:

$$E\left[\int_0^T f^2(B_t)dt\right] < \infty. \tag{3.12}$$

Nažalost, ova nejednakost može i da ne uspe čak i za neprekidne funkcije kao što je $f(X) = e^{X^4}$. Poenta je da ako želimo da stohastička integracija uspe na najprirodniji način, moramo da pronađemo način da zaobiđemo ograničenje integrabilnosti.

Na sreću, postoji način da izbegnemo zamku. Metod lokalizacije nam često pomaže u tome. Ovde ćemo videti da će nam odgovarajuća upotreba lokalizacije dozvoliti da proširimo Itoov integral na klasu integranada koja lako može da sadrži sve neprekidne funkcije Braunovog kretanja; Pa kao što smo se nadali Itoov interal (3.11) može biti definisan bez nametanja eksplicitnih uslova integrabilnosti.

Nakon završetka poslednjeg koraka u definisanju Itoovog integrala ispitaćemo dva posebna slučaja. U prvom, možemo da vidimo da Itoov integral neprekidne funkcije Braunovog kretanja može da se napiše kao limes Rimanovih suma. U drugom slučaju, vidimo da je Itoov integral determinističke funkcije je uvek Gausov proces. Poslednja činjenica nam dopušta da napravimo primer koji pokazuje zašto $\mathcal{Z}_{LOC}^2$ predstavlja prirodno stanište za Itoovu integraciju, a takođe nam pruža ili daje veliku klasu martingala koji mogu da se posmatraju kao Braunovo kretanje sa vremenskom skalom koja ubrzava ili usporava.

3.5. Itoova formula

Kada izračunavamo poznate integrale Njutna i Lajbnica, skoro uvek se pozivamo na osnovnu teoremu računa. Samo nekoliko integrala može da se uradi bez napora direktnim pozivanjem na definiciju. Situacija sa Itoovom integralom je paralelna i Itoov račun bi se prekinuo kada ne bismo uspeli da pronađemo analogiju za tradicionalnu osnovnu teoremu računa.

Jedna od osobina Itoove integracije je to što potrebna analogija dolazi sa neočekivanim obrtom – i nekoliko interpretacija verovatnoća.

Teorema 4. (Itoova formula – najjednostavniji slučaj) Ako je $f : R \to R$ ima neprekidan drugi izvod, onda važi:

$$f(B_t) = f(0) + \int_0^t f^{'}(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(B_s)ds. \qquad (3.13)$$

Prvi integral jednačine (3.13) ima srednju vrednost nula, tako da je drugi integral primoran da obuhvati sve informacije o driftu (prelazu) iz $f(B_t)$. Kasnije ćemo videti da prvi integral obuhvata suštinske informacije o lokalnoj varijabilnosti od $f(B_t)$. Stoga, Itoova formula ima drugu interpretaciju kao rastavljanje $f(B_t)$ na komponente koje predstavljaju šum i signal.

Kao osnovna stvar, primećuje se da oba integrala koja su na desnoj strani imaju smisla samo zbog kontinuiteta od $f^{'}$ i $f^{''}$. Formula (3.13) zove se Itoova formula ili Itoova lema.

4.Veza između cena opcija i funkcije raspodele

U opštem slučaju akcije rastu zbog tržišne kamatne stope. Međutim zbog jednostavnijeg računa, pretpostavićemo da je kamatna stopa r jednaka nuli.

Uvešćemo sledeće oznake: neka je $C(K, S_o, T)$ cena evropske call opcije gde je K-ugovorena cena (strike), S_o-početna cena akcije i T-vreme dospeća opcije.

Pretpostavimo da je $\varphi_{S_o}(S, T)$ funkcija gustine slučajne veličine S_t.

Ukoliko se radi o Black-Sholes modelu funkcija raspodele je

$$\varphi(X, T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\log\frac{X}{S_o} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2 T}} \cdot \frac{1}{X\sigma\sqrt{T}}.$$

$(S-K)^+$ je profit u trenutku T, pa je zato cena opcije jednaka očekivanoj vrednosti profita:

$$C(K) = E((S-K)^+) = \int_0^\infty (x-K)^+ \varphi(x) dx$$

$$= \int_K^\infty (x-K)\varphi(x) dx$$

$$= \int_K^\infty x\varphi(x) dx - K\int_K^\infty \varphi(x) dx \text{, jer je}$$

$$(x-K)^+ = \begin{cases} x-K, x > K \\ 0, x < K \end{cases}.$$

Specijalno, može da se dobije Black-Sholes formula da je raspodela tako podešena da je S_t martingal i da ima log-normalnu raspodelu pri uslovima:

1. raspodela će biti centrirana ako je početna vrednost S_o, biće:

$$E(S_t) = S_o$$

2. $\log(S_t)$ ima normalnu raspodelu sa parametrima μ i $\sigma\sqrt{T}$, odabrano tako da je očekivanje $E(S_t) = S_o$

Ispitajmo kada se dobija uslov $E(S_t) = S_o$.

Neka promena logaritma ima normalnu raspodelu od trenutka 0 do trenutka T, $\log S_T - \log S_o$ ima normalnu raspodelu sa parametrima $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ i $\sigma^2 T$.

$$\log \frac{S_T}{S_o} \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right)$$

$$\log S_T - \log S_o \sim \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} T\right), \sigma^2 T\right)$$

$$\log S_T \sim \mathcal{N}\left(\underbrace{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \log S_o}_{\mu_1}, \underbrace{\sigma^2 T}_{\sigma_1^2}\right)$$

$$ES_T = e^{\mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{2}} = e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \cdot S_o \cdot e^{\frac{\sigma^2 T}{2}} = S_o$$

odakle sledi da je:

$$e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \frac{\sigma^2 T}{2}} = 1 = e^0$$

$$T \cdot \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right) = 0$$

odakle sledi da je

$$\mu = 0.$$

Zbog toga

$$\log \frac{S_T}{S_o} \sim \mathcal{N}\left(-\frac{\sigma^2}{2} T, \sigma^2 T\right).$$

S obzirom na to da želimo da odredimo funkciju gustine diferenciraćemo cenu akcije po K:

$$C(K) = \int_K^\infty x\varphi(x)dx - K \int_K^\infty \varphi(x)dx$$

$$\frac{\partial}{\partial K} C(K) = \frac{\partial}{\partial K} \int_K^\infty x\varphi(x)dx - \frac{\partial}{\partial K}\left(K \int_K^\infty \varphi(x)dx\right)$$

$$= -\varphi(K)K - \int_K^\infty \varphi(x)dx + K\varphi(K)$$

$$= -\int_K^\infty \varphi(x)dx. \qquad (4.1)$$

Ukoliko ponovimo postupak – još jedanput diferenciramo po K, dobijamo sledeće:

$$\frac{\partial^2}{\partial K^2} C(K) = \frac{\partial}{\partial K}\left(-\int_K^{\infty} \varphi(x)dx\right) = \varphi(K) \tag{4.2}$$

Na ovaj način vidimo kako možemo na osnovu vrednosti cena opcija dobiti funkciju raspodele cena akcija u datom trenutku.

5. Konvolucija i Furijeova transformacija

5.1. Furijeova transformacija

5.1.1. Furijeov red

Definicija. Furijeovim redom možemo predstaviti neku funkciju kao beskonačnu sumu sinusnih i kosinusnih funkcija.

Neka je $f(x) = f(x + 2k\pi)$, $x \in R, k \in Z$ i neka je $f(x)$ definisana na intervalu $[-\pi, \pi]$. Funkciju $f(x)$ možemo zapisati na sledeći način:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx .$$

Treba odrediti konstante $a_o, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ Integraljenjem na intervalu $[-\pi, \pi]$ dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_o}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = a_o \cdot \pi$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo sa $\cos kx$ dobijamo:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{a_o}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx = a_k \cdot \pi$$

Ako pomnožimo jednačinu sa $\sin kx$ i integralimo od $-\pi$ do π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = b_k \cdot \pi.$$

Pri tom izračunavanju koristi se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \pi \delta_{kn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx = \pi \delta_{kn},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = 0 \text{ , gde je } \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

Kronekerov simbol.

Definicija.

Neka je $f(x)$ funkcija sa periodom 2π koja na intervalu $[-\pi, \pi]$ ima konačan broj tačaka prekida prve vrste. Furijeov red funkcije $f(x)$ dat je sa:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \, , \qquad n \in N.$$

Definicija. Furijeov red funkcije koja je $2m$ periodična:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{m} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{m}$$

$$a_o = \frac{1}{m} \int_{-m}^{m} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{m} \int_{-m}^{m} f(x) \cos \frac{n\pi x}{m} dx$$

$$b_n = \frac{1}{m} \int_{-m}^{m} f(x) \sin \frac{n\pi x}{m} dx.$$

Pojam Furijeovih redova možemo proširiti i na kompleksne koeficijente:

Ako je $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}$, računamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{inx}\, e^{-imx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos[(n-m)x] + i\sin[(n-m)x])dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n 2\pi\delta_{mn} =$$

$$= A_m 2\pi$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

5.1.2. Furijeova transformacija

Furijeova transformacija predstavlja granični slučaj Furijeovih redova, a inverzna Furijeova transformacija uopštenje Furijeovih koeficijenata.

Neka je $f: R \to C$. Furijeova transformacija je data sa:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx.$$

Nesvojstveni integral, ako postoji predstavlja Furijeovu transformaciju funkcije f.

Inverznu Furijeovu transformaciju definišemo na sledeći način:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega x}\,dk.$$

Furijeova transformacija predstavlja inverznu i obrnuto.

Teorema. Neka su f i $g \in G(R)$, gde je $G(R)$ familija apsolutno integrabilnih funkcija $f: R \to C$ koje su i deo po deo neprekidne. Neka su njihove Furijeove transformacije označene sa $\hat{f}$ i $\hat{g}$. Tada važi:

1. $\hat{f}[af(x) + bg(x)](k) = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$ (linearnost)
2. $\hat{f}[f * g] = \hat{f}[f]\,\hat{f}[g]$
3. $\hat{f}[fg] = \hat{f}[f] * \hat{f}[g]$

4. $\hat{f}^{-1}\left[\hat{f}[f]\,\hat{f}[g]\right] = f * g$

5. $\hat{f}^{-1}\left[\hat{f}[f] * \hat{f}[g]\right] = fg.$

Furijeova transformacija funkcije $f(x)$ ima osobinu pomeranja:

$$\hat{f}[f(x-x_o)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_o)e^{\omega ix}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x_o)e^{\omega i(x-x_o)}e^{\omega i x_o}d(x-x_o) =$$

$$= e^{\omega i x_o}\hat{f}(k).$$

5.1.3. Konvolucija

Definicija. Konvolucija je matematički operator koji od dve funkcije f i g proizvodi treću koja predstavlja količinu preklapanja između funkcije f i okrenute i prevedene verzije funkcije g. Možemo je predstaviti sledećim izrazom:

$$K(t) = \int f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$

ili kraće:

$$K(t) = f(t) * g(t).$$

Opseg integracije zavisi od domena na kome su definisane funkcije. Gore navedeni simbol t ne mora da predstavlja vreme.

U slučaju konačnog integracionog opsega za funkcije f i g se često smatra da se šire periodično u oba smera tako da $g(t-\tau)$ ne narušava opseg integracije.

Ova upotreba periodičnih domena naziva se ciklična ili periodična konvolucija. Moguće je i proširenje nulama. Korišćenje domena proširenih nulom ili beskonačnih naziva se linearna konvolucija.

Za diskretne funkcije koristi se sledeća verzija diskretne konvolucije:

$$(f * g)(m) = \sum_n f(n)\cdot g(m-n)$$

Osobine konvolucionih operatora

1) komutativnost: $f * g = g * f$

2) asocijativnost: $f * (g * h) = (f * g) * h$

3) distributivnost sa skalarnim množenjem: $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$

Pravilo diferenciranja: $D(f * g) = D_f * g = f * D_g$ gde je D_f izvod od f, ili u diskretnom slučaju operator razlike: $Df(n) = f(n+1) - f(n)$.

Teorema. (Teorema konvolucije) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ gde $\mathcal{F}(f)$ označava Furijeovu transformaciju od f.

6. Testiranje Markovljevog svojstva na konkretnim podacima korišćenjem funkcije transformacije i analiza konvolucionog ponašanja distribucije verovatnoće

6.1. Primena Furijeovih transformacija u računanju cena opcija

Sistem cena može biti predstavljen skupom digitalnih opcija u svakom trenutku t i cena te digitalne opcije ustvari diskontovana vrednost funkcije raspodele verovatnoća. Svakoj funkciji raspodele odgovara tačno jedna karakteristkična funkcija, u Furijeovoj analizi sistem cena je jedinstveno određen karakterističnim funkcijama.

Da li je cena akcije stacionaran Markovljev proces koji ima "svojstvo logaritamske translacije", gde to svojstvo predstavlja verovatnoću da se za dato vreme t akcija uveća određeni broj puta?

Pretpostavićemo da je proces stacionaran, tj. da ne zavisi od t. Ako imamo raspodelu verovatnoća za cenu akcija, onda važi da je:

$$p(l_1 \leq \log(t+\Delta t) \leq l_o \,|\, \log S(t) = l_o) = d_2 l f(\Delta t, l_1 - l_o),$$

gde je $l_1 - l_o$ logaritamski skok cene akcije, a Δt je period.

Imamo funkciju l gustine verovatnoće gde je Δt parametar:

$f(\Delta t, l) = f_{\Delta t}(l)$ (za svako Δt imamo raspodelu u zavisnosti od l).

Ovo je funkcija dve promenljive koja ima svojstva:

$f_{\Delta t_1 + \Delta t_2} = f_{\Delta t_1} * f_{\Delta t_2}$ (svojstvo konvolucije zbog Markovljevog procesa).

Kako se to koristi?

Označimo $\log S(t) = l(t)$. Uslov verovatnoće da je

$$p(l_2 \leq l(t+\Delta t_1+\Delta t_2) \leq l_2 + dl | l(t) = l_o)$$

je ustvari verovatnoća prelaska iz jednog u drugo stanje i ona je jednaka

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(l_2 \leq l(t+\Delta t_1+\Delta t_2) \leq l_2 + dl | l(t+\Delta t_1) = l_1) \cdot p(l_1 \leq l(t+\Delta t_1) \leq l_1 + dl_1 | l(t) = l_o)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta t_2, l_2 - l_1)dl \cdot f(\Delta t_1, l_1 - l_o)dl_1 = f(\Delta t_1 + \Delta t_2, l_2 - l_o)dl.$$

Kada skratimo dl dobijamo:

$$f_{\Delta t_1 + \Delta t_2}(l_2 - l_o) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\Delta t_1}(l_2 - l_1) f_{\Delta t_2}(l_1 - l_o) dl_1,$$

i ako uvedemo smenu $x = l_1 - l_o$, onda je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\Delta t_1}(l_2 - l_o - x) f_{\Delta t_2}(x) dx = f_{\Delta t_1} * f_{\Delta t_2} \text{ (konvolucija)}$$

Kada se uradi Furijeova transformacija:

$$\hat{f}_{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \widehat{f_{\Delta t_1} * f}_{\Delta t_2}, \text{ tj.}$$

$$\hat{f}_{\Delta t_1 + \Delta t_2} = f_{\Delta t_1} \cdot f_{\Delta t_2}$$

Ako je $f_1(l)$ predstavlja gustinu raspodele za 1 dan onda će za n dana biti

$$\hat{f}_n = \hat{f}_1^n$$

i ako imamo

$$\hat{f}_m = \hat{f}_1^n,$$

onda je

$$\hat{f}_n = \hat{f}_m^{\overline{\frac{m}{n}}} \qquad (6.1)$$

i to treba da se proveri.

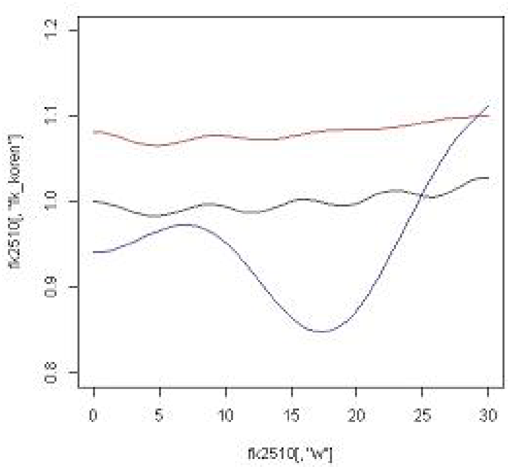
Očekujemo da će bar važiti apsolutna vrednost

$$\left|\hat{f}_n\right| = \left|\hat{f}_m\right|^{\overline{\frac{m}{n}}} \qquad (6.2)$$

6.2. Testiranje Markovljevog svojstva na konkretnim podacima

Cilj ovog rada je bio da prvo nađemo f_{n1}, f_{n2}, f_{n3} i proverimo da li važi ova stepena veza (6.2). Zanima nas funkcija raspodele implicirana sa F_{n1}, F_{n2}, F_{n3}. Do tih funkcija raspodele dolazimo na osnovu četvrtog poglavlja preko numeričkih diferenciranja cene opcija gde je F dobijena procenom na osnovu podataka korišćenjem formule (4.1).

Podaci koji su korišćeni u ovom testiranju su preuzeti sa sajta http://www.google.com/finance/option_chain?q=NASDAQ%3AGOOG&ei=yXJBUrirI-3DwAOyDw , od 5.oktobra 2013.godine. Posmatrane su vrednosti strike cena (ugovorenih cena) i ask cena (cena koju je kupac spreman da plati). Funkcija koja je procenjena Furijeovim koeficijentima dobijena je na sledeći način: vrednosti fukcije koje se čitaju na y-osi su dobijene kao razlike dve uzastopne strike cene, a tačke na x-osi su dobijene kao logaritam od srednje vrednosti dva uzastopna strike-a. Na taj način smo dobili funkciju koja je definisana u određenim tačkama i njen grafik je procenjen Furijeovim koeficijentima i normom na osnovu numeričke integracije. Izračunati su integrali korišćenjem implicirane funkcije raspodele metodom parcijalne integracije , a numerički integral je izračunat metodom trapeza. Program i slika koji su prikazani predstavljaju normu Furijeovih koeficijenata koji odovaraju $\left|f(w)\right|\sqrt{2\pi}$ za tri datuma dospeća: 25.10.2013, 16.11.2013 i 21.12.2013. Program je napisan u programskom jeziku R. Listing programa se nalazi u dodatku.



Slika predtavlja funkciju norme Furijeovih koeficijenata, preciznije $\left|f(w)\right|\sqrt{2\pi}$ za $0 < w < 30$. Maksimalna vrednost 30 je određena tako da se u svako periodu odgovarajuće trigonometrijske funkcije nalazi bar 10 tačaka pri numeričkoj integraciji.

Plavi grafik označava procenjenu funkciju norme za datum dospeća 25.10.2013.godine, crveni grafik označava procenjenu funkciju norme za datum dospeća 16.11.2013.godine i crni grafik označava procenjenu funkciju norme za datum dospeća 21.12.2013.godine.

Talasasti oblik funkcije norme je moguće da je posledica primene jednostavne trapezne formule prilikom integracije.

Iz ovih grafika se vidi da funkcije nisu u skladu sa stacionarnim Markovljevim procesom, tj. da na ovom uzorku ne može da se vidi stepena veza (6.2) između ove tri funkcije. Da se opcije računaju po Black-Sholes formuli to svojstvo bi važilo, međutim mnogo realističniji modeli poput Hestonovog koji imaju promenljivi parametar volatilnosti nisu u skladu sa stacionarnim Markovljevim procesom.

Literatura:

[1] J.Michael Steele, 2001. *Stochastic Calculus and Financial Applications, United States of America.*

[2] Steven Shreve, 2004. *Stohastic Calculus in Finance II, Continous-Time Models, Springer, London*

[3] Pavle Mladenović, 2002. *Verovatnoća i statistika, Matematički fakultet, Beograd.*

[4] Ioannis Karatzas, Steven Shreve, 1988. *Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, New York.*

[5] Martin Schweizer, 2012. *Lecture notes, Brownian Motion and Stochastic Calculus, ETH Zurich.*

[6] Martin Schweizer, 2012. *Lecture notes, Mathematical Foundations for finance, ETH Zurich.*

[7] J.Cvitanić, F.Zaatero, 2004. *Economics and Mathematics of Financial Markets, MIT Press.*

[8] P.E.Protter, 2005. *Stochastic Integration and Differential Equations, second edition, Version 2.1, Springer.*

[9] L.C.G. Rogers and D.Wiliams, 2000. *Diffusions, Markov Processes and Martingales: Foundations, second edition, Cambridge University Press*

[10] N.H.Bingham, R.Kiesel, 2004: *Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives, second edition, Springer*

[11] Jovan Mališić, 1989. *Slučajni procesi, Građevinska knjiga, Beograd.*

[12] Miloš Arsenović, Danko Jocić, Ratko Dostanić, 1998. *Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora, Matematički fakultet, Beograd.*

[13] Robert S. Strichartz, 2003. *A guide to distribution theory and Fourier transforms, World scientific* publishing.

[14] Peter Carr, Dilip B. Madan, 1999. *Option valuation using the fast Fourier transform, The Journal of Comutational Finance, 2(4):61-73, 1999.*

[15] Umberto Cherubini, Giovanni Della Lunga, Sabrina Mulinacci, Pietro Rossi, 2010. *Fourier transform methods in finance, John Wiley and sons.*

[16] Wilmott P., Howison S., Dewynne J,1995. *The Mathematics of Financial Derivatives – A Student Introduction, Cambridge University Press.*

[17] Steven Shreve,2004. *Stochastic Calculus for Finance, Springer*.

[18] M. Merkle,2010. *Verovatnoća i Statistika za inženjere i studente, treće izdanje. Akademska misao.*

[19] F. Black, M. Scholes, 1973. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities. The Journal of Political Economy.*

[20]Marko Backović, Jovo Vuleta, Zoran Popovic, 2011. *Ekonomsko-Matematički metodi i Modeli,deveto izdanje,Beogad.*

Dodatak (listing programa za računanje integrala)

```
wmax=20
tab2510<-read.table("dd2510.txt", header=T)
x<-log((tab2510$Strike[-1]+tab2510$Strike[-50])*0.5)
v<-(tab2510$Ask[-50]-tab2510$Ask[-1])/(tab2510$Strike[-1]-tab2510$Strike[-
50])
poprav1<-function(v)
{for(i in 2 : (length(v)-1))
if(v[i]>1) v[i]=1;
return(v)
}
tacke<-cbind(x,v)
koef.an<-function(v1,v2,x1,x2,w)
{int<-v2*cos(w*x2)-v1*cos(w*x1)+w*(x2-x1)*0.5*(v2*sin(w*x2)-v1*sin(w*x1));
return(int)
}
koef.bn<-function(v1,v2,x1,x2,w)
{int<-v2*sin(w*x2)-v1*sin(w*x1)-w*(x2-x1)*0.5*(v2*cos(w*x2)-v1*cos(w*x1));
return(int)
}
w<-seq(0,wmax,wmax/50)
fur.koef<-function(w,x,v)
{lw<-length(w);
lv<-length(v);
mat=mat.or.vec(lw,2);
for(i in 1 : lw)
{mat[i,1]<-sum(koef.an(v[-lv],v[-1],x[-lv],x[-1],w[i]));
mat[i,2]<-sum(koef.bn(v[-lv],v[-1],x[-lv],x[-1],w[i]));
}
colnames(mat)<-c("an","bn");
return(mat)
}
fk<-fur.koef(w,x,v)
fk<-cbind(w,fk)
fk_koren<-fk[,"an"]^2+fk[,"bn"]^2
fk2510<-cbind(fk,fk_koren)
#plot(fk[,"w"],fk[,"fk_koren"])

tab1611<-read.table("dd1611.txt", header=T)
x<-log((tab1611$Strike[-1]+tab1611$Strike[-148])*0.5)
v<-(tab1611$Ask[-148]-tab1611$Ask[-1])/(tab1611$Strike[-1]-tab1611$Strike[-
148])
poprav1<-function(v)
{for(i in 2 : (length(v)-1))
if(v[i]>1) v[i]=1;
return(v)
}
tacke<-cbind(x,v)
koef.an<-function(v1,v2,x1,x2,w)
{int<-v2*cos(w*x2)-v1*cos(w*x1)+w*(x2-x1)*0.5*(v2*sin(w*x2)-v1*sin(w*x1));
return(int)
}
koef.bn<-function(v1,v2,x1,x2,w)
{int<-v2*sin(w*x2)-v1*sin(w*x1)-w*(x2-x1)*0.5*(v2*cos(w*x2)-v1*cos(w*x1));
return(int)
```

```
}
w<-seq(0,wmax,wmax/50)
fur.koef<-function(w,x,v)
{lw<-length(w);
lv<-length(v);
mat=mat.or.vec(lw,2);
for(i in 1 : lw)
{mat[i,1]<-sum(koef.an(v[-lv],v[-1],x[-lv],x[-1],w[i]));
mat[i,2]<-sum(koef.bn(v[-lv],v[-1],x[-lv],x[-1],w[i]));
}
colnames(mat)<-c("an","bn");
return(mat)
}
fk<-fur.koef(w,x,v)
fk<-cbind(w,fk)
fk_koren<-fk[,"an"]^2+fk[,"bn"]^2
fk1611<-cbind(fk,fk_koren)
#plot(fk[,"w"],fk[,"fk_koren"])
tab2112<-read.table("dd2112.txt", header=T)
x<-log((tab2112$Strike[-1]+tab2112$Strike[-156])*0.5)
v<-(tab2112$Ask[-156]-tab2112$Ask[-1])/(tab2112$Strike[-1]-tab2112$Strike[-
156])
poprav1<-function(v)
{for(i in 2 : (length(v)-1))
if(v[i]>1) v[i]=1;
return(v)
}
tacke<-cbind(x,v)
koef.an<-function(v1,v2,x1,x2,w)
{int<-v2*cos(w*x2)-v1*cos(w*x1)+w*(x2-x1)*0.5*(v2*sin(w*x2)-v1*sin(w*x1));
return(int)
}
koef.bn<-function(v1,v2,x1,x2,w)
{int<-v2*sin(w*x2)-v1*sin(w*x1)-w*(x2-x1)*0.5*(v2*cos(w*x2)-v1*cos(w*x1));
return(int)
}
w<-seq(0,wmax,wmax/50)
fur.koef<-function(w,x,v)
{lw<-length(w);
lv<-length(v);
mat=mat.or.vec(lw,2);
for(i in 1 : lw)
{mat[i,1]<-sum(koef.an(v[-lv],v[-1],x[-lv],x[-1],w[i]));
mat[i,2]<-sum(koef.bn(v[-lv],v[-1],x[-lv],x[-1],w[i]));
}
colnames(mat)<-c("an","bn");
return(mat)
}
fk<-fur.koef(w,x,v)
fk<-cbind(w,fk)
fk_koren<-fk[,"an"]^2+fk[,"bn"]^2
fk2112<-cbind(fk,fk_koren)
#plot(fk[,"w"],fk[,"fk_koren"])
plot(fk2510[,"w"],fk2510[,"fk_koren"],type="l",col="blue",ylim=c(0.8,1.2))
lines(fk1611[,"w"],fk1611[,"fk_koren"],type="l",col="red")
lines(fk2112[,"w"],fk2112[,"fk_koren"],type="l",col="black")
```