МАСТЕР РАД

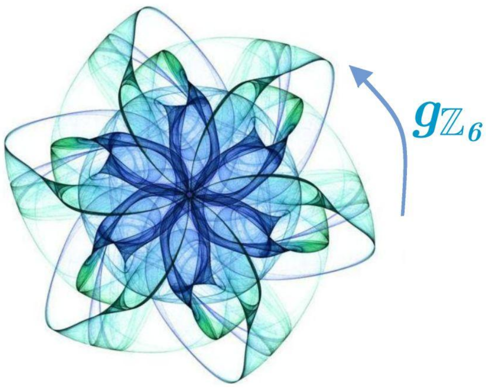
Еквиваријантна теорија индекса

студент: Марија Јелић
ментор: др Синиша Врећица

Математички факултет
Универзитет у Београду
Београд, 2013.

Садржај

Предговор



Еквиваријантна топологија се бави просторима на којима постоји довољно лепо дејство неке групе и пресликавањима међу таквим просторима. На развој еквиваријантне топологије много је утицала њена широка примена у решавању разних тополошких, комбинаторних, геометријских и многих других проблема. Наиме, испоставља се да се често некакав математички проблем може свести на питање постојања баш еквиваријантних пресликавања, тј. пресликавања која поштују дејства групе на домену и кодомену.

Један од начина на утврдимо да ли може постојати неко такво пресликавање, јесте да сваком простору са дејством групе придружимо неки објекат (индекс простора) који ће садржати довољно информација о дејству на том простору. Однос између индекса два простора требало би да на неки начин указује на то да ли може постојати еквиваријантно пресликавање међу њима или не.

Наравно, такав објекат није јединствен, па су се појавили многи индекси, различито дефинисани, коришћени за примене у конкретним проблемима. У овом раду биће описана два најпознатија. Први је нумерички индекс, изузетно леп и комбинаторан појам, а други је кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс који је знатно моћнији, али чије је разумевање много теже.

На самом почетку рада су изложени основни појмови са којима радимо и идеја тест пресликавања. Такође, ту су уведене и стандардне ознаке. У **другој глави** је дефинисан нумерички индекс и показана су нека његова својства. **Трећа глава** посвећена је применама нумеричког индекса у разним интересантним комбинаторним проблемима. Сасвим информативно, у **четвртој глави** је илустрован појам коиндекса, који је природан пар индексу.

У **петој глави** се прелази на кохомолошки индекс и његове основне особине. Већина њих није доказана, али је наведена ради комплетније слике о овом појму. **Шеста глава** приказује Кнастеров проблем, чијим су се решавањем бавили многи математичари и решили само неке специјалне случајеве.

Показано је како се поједини од тих случајева могу решити помоћу кохомолошког индекса. Након тога, у **седмој и осмој** глави, појављују се два лепа проблема, од оних које може да разуме сасвим мало дете, а ретко ко може да их реши. То су проблеми уписивања и описивања коцке око конвексног тела, који ће бити доказани (под одређеним условима) применом Кнастеровог проблема. И на крају, у **деветој глави** је наведено неколико проблема који су, вероватно сасвим неочекивано, повезани са Кнастеровим проблемом.

Желим да истакнем да сам приликом писања овог рада више значаја придавала идејама а мање техничким детаљима. Један од разлога је што неке технике далеко превазилазе моје знање. Други, много личнији, је то што ме је у математици увек највише привлачила хармонична лепота идеја, складна као дело савршеног Уметника. Идеја по идеја свакога од нас води да упознаје даље, чак и онда када баш не зна да одговори на питање „зашто тако?”. За тај пут кроз идеје које су ме одушевиле, и за бескрајно стрпљење у раду са мном, желим да се захвалим свом ментору, професору Синиши Врећици, који топологију предаје као неко ко то савршено зна, и што је много важније - ко то воли. Такође, захвалност дугујем и свима осталима који су ми предавали топологију, посебно Браниславу Првуловићу, професорки Мили Мршевић и Владимиру Грујићу. И наравно, професору Радету Живаљевићу, зато што је још давно својим сјајним предавањима учинио да поверујем да је топологија савршен спој моћне науке и уметничке креативности. Баш оно што сам желела.

Београд, септембар 2013. *Марија Јелић*

1 Основни појмови

1.1 Дејства група

Почнимо од основног појма еквиваријантне топологије - појма дејства групе. Тај појам се дефинише за произвољну тополошку групу, али ћемо се ми ограничити на коначне групе, а само поменути неколико других примера.

Деф 1. *Дејство (лево дејство) групе* G на тополошки простор X је свака колекција $\Phi = \{\varphi_g\}_{g \in G}$ хомеоморфизама $\varphi_g : X \to X$ који задовољавају следећа два услова:

1) $\varphi_e = \mathbf{1}_X$, где је са e означен неутрал групе G,

2) $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$, за све $g, h \in G$.

Пар (X, Φ), или краће сам X, се у том случају назива *G-простором.* Такође, дејство елемента $g \in G$ на неки елемент $x \in X$, тј. $\varphi_g(x)$ се најчешће означава са $g \cdot x$, или још краће као gx. Ако фиксирамо $x \in X$, скуп $\{\varphi_g(x) : g \in G\}$ се назива *орбитом* елемента x при датом дејству.

Специјално, уколико је X симплицијални (или ћелијски) комплекс на коме дејствује група G, кажемо да је X *симплицијални (ћелијски) G-комплекс* уколико су још и сва пресликавања φ_g, $g \in G$ симплицијална (односно ћелијска).

Деф 2. Дејство групе G на простор X је *слободно* ако за свако $g \in G \backslash \{e\}$ хомеоморфизам φ_g нема фиксних тачака. Тада такође кажемо да је G-простор X *слободан.*

Од посебног значаја су дејства цикличних група $\mathbb{Z}_n$, специјално групе $\mathbb{Z}_p$, где је p прост број. Приметимо да је дејство групе $\mathbb{Z}_n$ потпуно одређено хомеоморфизмом φ_1, јер је $\varphi_k = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_1 = \varphi_1^k$, за свако k. Зато најчешће за такво дејство пишемо (X, φ), где је $\varphi = \varphi_1$. У том специјалном случају проверу да ли је простор слободан нам олакшава следеће тврђење.

Тврђење 3. *За прост број p, $\mathbb{Z}_p$-простор (X, φ) је слободан ако и само ако φ нема фиксних тачака.*

Доказ. Директан смер је тривијалан. Обрнуто, нека φ нема фиксних тачака. Претпоставимо супротно, тј. да за неко k, $1 \leq k < p$ и неко $x \in X$ важи $\varphi_k(x) = \varphi^k(x) = x$. Знамо да постоји $\overline{k} \in \mathbb{Z}_p$ такво да је $k\overline{k} \equiv_p 1$. Тада важи $x = (\varphi^k)^{\overline{k}}(x) = \varphi^{k\overline{k}}(x) = \varphi(x)$, што је контрадикција. $\square$

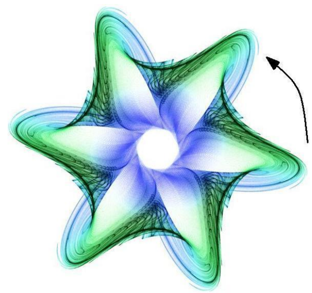
Између G-простора су посебно интересантна непрекидна пресликавања која „поштују” групу. Нека су дата два G-простора (X, Φ) и (Y, Ψ).

Деф 4. Непрекидно пресликавање $f : X \to Y$ је *G-еквиваријантно* ако за свако $g \in G$ важи $f \circ \varphi_g = \psi_g \circ f$, тј. ако је $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$, за све $g \in G$, $x \in X$. Уколико постоји G-еквиваријантно пресликавање $f : X \to Y$, писаћемо $X \leq_G Y$ или $X \xrightarrow{G} Y$.

Примери дејства група

• Вероватно најпознатије дејство је антиподално дејство групе $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ на сфери S^n. Идентички елемент наравно дејствује као идентитет, а генератор дејствује као антиподално пресликавање. Очигледно, дејство је слободно јер антиподално пресликавање нема фиксних тачака. Штавише, познато је да је то једино нетривијално слободно дејство на парно-димензионалној сфери S^{2n}. Сада можемо формулисати Борсук-Уламову теорему у терминима дејства група: *не постоји $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање из сфере S^{n+1} у сферу S^n.*

• Дејство групе $\mathbb{Z}_n$ на кружницу S^1 у равни, при коме генератор дејствује као ротација око координатног почетка за угао $\frac{2\pi}{n}$. То дејство је слободно за сваки природан број $n > 1$.



• Група ротација равни око координатног почетка $SO(2)$ такође слободно дејствује на кружницу S^1. Ово дејство можемо видети и на други начин. Посматрајмо S^1 као потпростор комплексне равни. На тај начин S^1 са комплексним множењем има структуру групе. Зато можемо посматрати дејство групе S^1 на простор S^1, такво да је хомеоморфизам φ_z дат множењем са $z = e^{i\zeta}$. Тада је φ_z управо ротација за угао ζ.

• Општије, $SO(n)$ дејствује на сферу S^{n-1} на природан начин, али то дејство није слободно за $n > 2$. Такође, цела ортогонална група $O(n)$ дејствује на S^{n-1}, а посебно су интересантна сродна дејства њених подгрупа. На пример, група ротација правилног икосаедра је алтернирајућа група A_5, што нам даје дејство групе A_5, као подгрупе од $O(3)$, на икосаедар.

• За произвољан простор X имамо дејство симетричне групе S_n на производу X^n одређено пермутовањем координата. Прецизније, за пермутацију $\pi \in S_n$, $\varphi_\pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$. Ово дејство није слободно, али постаје слободно када се избаце све тачке које су фиксне при некој од пермутација. Специјално, свака подгрупа од S_n, као на пример $\mathbb{Z}_n$, такође дејствује на X^n. Користићемо ово дејство на простору $\mathbb{R}^n$ или на $(\mathbb{R}^d)^n$. Такође, приметимо да имамо наслеђено дејство и на потпростору $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ (при дејству било ког елемента симетричне групе, тачке сфере се опет сликају у тачке сфере).

Спој простора. Дејство на споју

Појам споја простора ћемо често користити, па се најпре сасвим укратко подсетимо дефиниције споја (енг. *join*) и основних особина.

Деф 5. Нека су X и Y тополошки простори. *Спој* $X * Y$ се дефинише као количник простор $X * Y := (X \times Y \times [0, 1])/\sim$, где је $\sim$ релација еквиваленције задата са: $(x, y, 0) \sim (x', y, 0)$, за све $x, x' \in X$ и све $y \in Y$; $(x, y, 1) \sim (x, y', 1)$, за све $x \in X$ и све $y, y' \in Y$.

Став 6. *Нека су X и Y потпростори од $\mathbb{R}^n$, такви да су афини потпростори који су њихови носачи, у општем положају. Тада се спој $X * Y$ може видети као унија свих сегмената који повезују тачке из X са тачкама из Y, тј. важи:*

$$\{tx + (1-t)y \in \mathbb{R}^n \mid t \in [0, 1], x \in X, y \in Y\} \approx X * Y.$$

Због тога се тачке споја често означавају са (x, t, y) или $tx \oplus (1-t)y$.

Специјално, у случају симплицијалних комплекса, и спој ће бити симплицијални комплекс. Наиме, уведимо помоћну ознаку $A \uplus B := A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$, тј. то је „означена” дисјунктна унија. Тада је спој симплицијалних комплекса K и L симплицијални комплекс чија су темена $V(K) \uplus V(L)$, а састављен је од симплекса $\{F \uplus G \mid F \in K, G \in L\}$. Слично се дефинише n-тоструки спој комплекса K: $K^{*n} := K * K * \cdots * K \cong \{F_1 \uplus F_2 \uplus \cdots \uplus F_n \mid F_1, F_2, \ldots, F_k \in K\}$. Међутим, ми ћемо најчешће користити појам умањеног споја.

Деф 7. Нека је $n \geq k \geq 2$, $n, k \in \mathbb{N}$. Тада дефинишемо следеће појмове:
1) *n-тоструки умањени спој* тополошког простора X је простор:
$X^{*n}_{\Delta} := X^{*n} \backslash \{\frac{1}{n}x \oplus \frac{1}{n}x \oplus \ldots \oplus \frac{1}{n}x \mid x \in X\}$,
2) *n-тоструки умањени спој k-типа* симплицијалног комплекса K је комплекс:
$K^{*n}_{\Delta(k)} := \{F_1 \uplus \ldots \uplus F_n \in K^{*n} \mid$ сваких k међу $F_1, \ldots, F_n$ имају празан пресек$\}$.
Специјално, за $k = n$ пишемо K^{*n}_{Δ} уместо $K^{*n}_{\Delta(n)}$.

За нашу примену је веома важно да спој и умањени спој симплицијалних комплекса комутирају, тј. ако су K и L симплицијални комплекси, а $n \in \mathbb{N}$, онда важи следеће познато тврђење.

Став 8. $(K * L)^{*n}_{\Delta} \cong K^{*n}_{\Delta} * L^{*n}_{\Delta}$, $(K * L)^{*n}_{\Delta(2)} \cong K^{*n}_{\Delta(2)} * L^{*n}_{\Delta(2)}$. $\diamondsuit$

Такође, потребан нам је и појам *споја пресликавања*. Ако су дата пресликавања $f_1 : X_1 \to Y_1$ и $f_2 : X_2 \to Y_2$, њихов спој $f_1 * f_2 : X_1 * X_2 \to Y_1 * Y_2$ дефинише се на следећи начин: $(f_1 * f_2)(tx \oplus (1-t)y) := tf_1(x) \oplus (1-t)f_2(y)$.

Сада можемо говорити о дејству на споју. За дате G-просторе (X, Φ) и (Y, Ψ), природно дефинишемо дејство групе G на споју $X * Y$ као $\Theta = \Phi * \Psi$, тј. за свако $g \in G$ имамо хомеоморфизам $\theta_g := \varphi_g * \psi_g$. Ако су X и Y слободни G-простори, онда им је и спој слободан. Такође, лако се проверава да је спој G-еквиваријантних пресликавања G-еквиваријантно пресликавање.

• Слично дејству на производу, за произвољан простор X имамо дејство групе S_n (као и сваке њене подгрупе) и на споју X^{*n}. За пермутацију $\pi \in S_n$ дефинишемо $\varphi_\pi(t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus \cdots \oplus t_nx_n) := t_{\pi(1)}x_{\pi(1)} \oplus t_{\pi(2)}x_{\pi(2)} \oplus \cdots \oplus t_{\pi(n)}x_{\pi(n)}$.

• Помоћу споја можемо видети и слободно дејство групе $\mathbb{Z}_p$ на сфери S^{2n-1}. Знамо да је $S^{2n-1} \approx (S^1)^{*n}$ ([18], 4.2.2), па можемо дејство групе $\mathbb{Z}_p$ применити на сваку од кружница споја и узети дејство на споју. Додуше, исто дејство се може видети и на други начин. Наиме, ако S^{2n-1} посматрамо као јединичну сферу у $\mathbb{C}^n$, тј. као $\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2 = 1\}$, дејство генератора $\mathbb{Z}_p$ дефинишемо са: $\varphi_1(z_1, \ldots, z_n) = (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, \ldots, e^{\frac{2\pi i}{p}} z_n)$. Заиста важи $\varphi_1^p = \mathbf{1}_{S^{2n-1}}$.

1.2 Конфигурациони простор - тест пресликавање

Опишимо сада идеју коју ћемо користити много пута. То је идеја *конфигурационог простора* и *тест пресликавања* која је веома честа у комбинаторној геометрији. Наиме, рецимо да желимо да покажемо да постоји комбинаторни или геометријски објекат (граф, партиција, распоред тачака, правих,...) са неким одређеним својством. Назовимо у конфигурацију *решењем* нашег проблема. Тада можемо применити следећи метод.

• Скуп свих кандидата међу којима тражимо решење обједединимо у један простор, зваћемо га *конфигурациони простор.* Нека је то простор X.

• Конструишемо непрекидно пресликавање из простора X у неки други, пажљиво одабрани простор Y, које има за циљ да утврди да ли нека конфигурација јесте или није решење. То пресликавање $f : X \to Y$ се назива *тест пресликавање.* Оно треба да има следеће својство - елемент x из X је решење нашег проблема ако и само ако $f(x)$ припада протпростору Z од Y. Y се тада назива *тест простор*, а Z *циљни простор.*

• Претпоставимо супротно, да не постоји решење, па тест пресликавање можемо посматрати као пресликавање са смањеним кодоменом, $f : X \to Y \backslash Z$.

• Сада нам је потребно да на просторима X и $Y \backslash Z$ имамо лепо дејство неке групе G и да пресликавање f поштује то дејство, тј. $f : X \xrightarrow{G} Y \backslash Z$.

• Последњи корак је да на неки начин утврдимо да такво пресликавање не може постојати. Ми ћемо то радити методама еквиваријантне топологије. Добијена контрадикција указује на то да решење постоји.

У нашем раду ће се током овог поступка више пута јављати исти корак, па ћемо га овде детаљно проанализирати. Наиме, циљ је да за скупове $A, B \subset \mathbb{R}^d$ услов $A \cap B \neq \emptyset$ искажемо у терминима производа и споја A и B. Један начин би био да $A \times B$ посматрамо као потпростор од $\mathbb{R}^{2d} \cong \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, па је горњи услов еквивалентан услову да $(A \times B) \cap \Delta \neq \emptyset$, где је $\Delta \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ дијагонала.

Покушајмо исто у терминима споја. Производ $A \times B$ можемо видети као потпростор од $A * B$, где $(a, b) \in A \times B$ идентификујемо са $\frac{1}{2}a \oplus \frac{1}{2}b \in A * B$. Тада је услов $A \cap B \neq \emptyset$ еквивалентан услову $(A * B) \cap \Delta \neq \emptyset$, где је сада дијагонала Δ скуп свих елемената облика $\frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}x$, $\Delta \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$. Спој $\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$ можемо видети унутар $\mathbb{R}^{2d+1}$. Заиста, уочимо утапања $u_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{2d+1}$, $i = 1, 2$, таква да су $u_1(\mathbb{R}^d)$ и $u_2(\mathbb{R}^d)$ афини потпростори у општем положају. Тада спој $\mathbb{R}^d * \mathbb{R}^d$ идентификујемо са геометријским спојем $u_1(\mathbb{R}^d) * u_2(\mathbb{R}^d)$. Дијагонала Δ се идентификује са скупом $\{\frac{1}{2}u_1(x) \oplus \frac{1}{2}u_2(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \subset \mathbb{R}^{2d+1}$. Зато важи:

$$A \cap B \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; (u_1(A) * u_2(B)) \cap \Delta \neq \emptyset.$$

У овом случају тест простор би био $\mathbb{R}^{2d+1}$, а дијагонала Δ циљни простор.

Општије, нека желимо да утврдимо да ли важи $\bigcap_{i=1}^k A_i \neq \emptyset$ за $A_i \subset \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, k$. Тада посматрамо k утапања $u_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^D$ у општем положају, где је $D = (d+1)k - 1$. Прецизније, појам утапања у општем положају каже да афини потпростори $U_i := u_i(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, k$ разапињу простор $\mathbb{R}^D$. На пример, једна могућност је да $\mathbb{R}^D$ посматрамо као хиперраван $U := \operatorname{aff}\{e_j\}_{j \in I}$, где је $\{e_j\}_{j \in I}$ $(I = \{0, 1, \dots, D\})$ ортонормирана база у $\mathbb{R}^{D+1} \cong (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus k}$. Тада $u_i(\mathbb{R}^d)$ можемо видети као $U_i := \operatorname{aff}\{e_j\}_{j \in I_i}$, где је $I_i := \{j \in I \mid (d+1)(i-1) \leq j \leq (d+1)i - 1\}$.

Група која овде природно дејствује је симетрична група S_k (или нека од њених подгрупа) и она дејствује на тест простору $\mathbb{R}^D$ пермутовањем афиних потпростора $\{u_i(\mathbb{R}^d)\}_{i=1}^k$. У изабраном примеру посматрамо дејство S_k на $\mathbb{R}^D$ наслеђено од дејства на $\mathbb{R}^{D+1} \cong (\mathbb{R}^{d+1})^{\oplus k}$ које пермутује факторе ове декомпозиције. Циљни простор би нам опет била дијагонала, само је она овде облика $\Delta = \{\frac{1}{k}u_1(x) \oplus \cdots \oplus \frac{1}{k}u_k(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$. Када бисмо претпоставили супротно, па из кодомена тест пресликавања избацили дијагоналу, ортогоналном па радијалном пројекцијом бисмо еквиваријантно дошли до сфере S^{D-d-1}. А како се може добити контрадикција са претпоставком о постојању неког еквиваријантног пресликавања, видећемо на разним примерима у овом раду.

2 Нумерички индекс

Нумерички индекс је први објекат који ћемо придруживати G-просторима ради лакшег утврђивања постојања или непостојања G-еквиваријантних пресликавања. На неки начин то је прилично комбинаторан појам. Да бисмо дефинисали нумерички индекс, потребан нам је појам E_nG-простора.

Деф 9. Нека је G коначна група и $n \in \mathbb{N}_0$. Кажемо да је тополошки простор X *типа* E_nG (E_nG*-простор*) ако задовољава следеће услове:
1° X је слободан G-простор,
2° X је коначан симплицијални G-комплекс или коначан ћелијски G-комплекс,
3° $\dim X = n$,
4° X је $(n-1)$-повезан.

Најпознатији пример E_nG простора је спој $G^{*(n+1)}$, где G посматрамо као симплицијални комплекс димензије 0, тј. дискретан простор од m тачака, где је $m = |G|$. На пример, за $n = 1$, G^{*2} је комплетан бипартитни граф $K_{m,m}$. Очигледно, $G^{*(n+1)}$ ће бити n-димензионалан симплицијални комплекс чиме је испуњен трећи услов из дефиниције. Дејство групе G на њој самој дефинишемо са $\varphi_g(x) := gx$. Лако се проверава да је ово дејство слободно. Тада дејство на $G^{*(n+1)}$ дефинишемо као дејство на $(n+1)$-took спреа:

$$\theta_g = \varphi_g * \varphi_g * \ldots * \varphi_g,$$

$$\theta_g(t_1x_1 \oplus \ldots \oplus t_{n+1}x_{n+1}) = t_1\varphi_g(x_1) \oplus \ldots \oplus t_{n+1}\varphi_g(x_{n+1}) = t_1gx_1 \oplus \ldots \oplus t_{n+1}gx_{n+1}.$$

Знамо да је то дејство такође слободно, па је $G^{*(n+1)}$ слободан симплицијални G-комплекс, чиме су испуњени и први и други услов. Да је испуњен и четврти услов може се показати индуктивно, коришћењем познатог тврђења о повезаности споја. ([18], Став 4.4.3: Нека је X k-повезан, а Y l-повезан, где су оба ова простора триангулабилна или ћелијски комплекси. Тада је спој $X * Y$ $(k+l+1)$-повезан.)

Специјално, за $G = \mathbb{Z}_2$, најпознатији пример $E_n\mathbb{Z}_2$ простора је сфера S^n.

Покажимо сада да су сви простори E_nG типа равноправни за сврхе у које ћемо их ми употребљавати. То нам говори следећа лема.

Лема 10. *Нека је X $(n-1)$-повезан G-простор, а K слободан коначан симплицијални G-комплекс (или слободан коначан ћелијски G-комплекс) и $\dim K \leq n$. Тада $||K|| \xrightarrow{G} X$ (где је са $||K||$ означен полиедар комплекса K).*

Специјално, за свака два E_nG простора X и Y важи $X \xrightarrow{G} Y$.

Доказ. Детаљно извођење доказа би било доста технички напорно, па ћемо само илустровати главну идеју за случај када је K симплицијални комплекс. Тражено G-пресликавање конструишемо индуктивно, скелетон по скелетон комплекса K. Претпоставимо да смо конструисали G-пресликавање $g_{k-1} : ||K^{(k-1)}|| \xrightarrow{G} X$ и да желимо да га еквиваријантно проширимо до пресликавања $g_k : ||K^{(k)}|| \xrightarrow{G} X$. Посматрајмо k-димензионалне симплексе у K. Можемо их поделити у дисјунктне орбите према дејству групе G. Из сваке орбите уочимо по један симплекс и на њега проширимо пресликавање - знамо да то можемо учинити користећи $(k-1)$-повезаност простора X. На осталим симплексима исте орбите проширење дефинишимо помоћу дејства групе G и проширења на том једном симплексу. Да бисмо то могли једнозначно урадити, неопходно је да симплекси једне орбите имају дисјунктне реативне интериоре, али то је испуњено. Наиме, ако би се десило да релативни интериор $\varphi_g(\operatorname{int}\sigma)$ сече релативни интериор од σ, онда би морало бити $\varphi_g(\sigma)=\sigma$ јер је φ_g симплицијално и хомеоморфизам. Самим тим, φ_g би морало имати фиксну тачку. Како је дејство слободно, φ_g мора бити дејство идентичког елемента.$\square$

Сада можемо дефинисати нумерички индекс:

Деф 11. Нека је X G-простор. Дефинишимо *нумерички G-индекс* простора X на следећи начин:

$$\operatorname{ind}_G(X) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid X \xrightarrow{G} E_nG\},$$

уколико је наведени скуп непразан. (Дефиниција је коректна јер између свака два простора типа E_nG постоји G-еквиваријантно пресликавање.)

Теорема 12.(Својства нумеричког индекса) *Нека је G нетривијална коначна група. Тада за G-просторе важе следећа тврђења.*

1) (Монотоност) Ако $X \xrightarrow{G} Y$, онда $\operatorname{ind}_G(X) \leq \operatorname{ind}_G(Y)$.

2) (Природност) $\operatorname{ind}_G(E_nG) = n$ (за сваки простор типа E_nG).

3) (Индекс споја) $\operatorname{ind}_G(X * Y) \leq \operatorname{ind}_G(X) + \operatorname{ind}_G(Y) + 1$.

4) Ако је X $(n-1)$-повезан простор, тада је $\operatorname{ind}_G(X) \geq n$.

5) Ако је K слободан симплицијални (или ћелијски) G-комплекс димензије n, онда је $\operatorname{ind}_G(K) \leq n$.

Доказ. Тврђење 1) следи директно из дефиниције индекса. За доказ тврђења 3) довољно је за простор E_nG типа узети $G^{*(n+1)}$. Ако је $\operatorname{ind}_G(X) = n$, а $\operatorname{ind}_G(Y) = m$, тада знамо да постоје $f_1 : X \xrightarrow{G} G^{*(n+1)}$ и $f_2 : Y \xrightarrow{G} G^{*(m+1)}$. Спој тих G-пресликавања је опет G-пресликавање $f_1 * f_2 : X * Y \xrightarrow{G} G^{*(n+1)} * G^{*(m+1)}$. Како је $G^{*(n+1)} * G^{*(m+1)} \cong G^{*(n+m+2)}$, имамо да је кодомен $E_{n+m+1}G$ простор. Тиме је тврђење 3) доказано.

Претпоставимо да тврђење 2) важи. Користећи њега, директно имамо да су тврђења 4) и 5) последице леме 10. Преостаје да докажемо тврђење 2). Природно је било да га формулишемо међу овим особинама, али га због значаја издвајамо и у посебну теорему.

Теорема 13.(Борсук-Уламова теорема за G-просторе) *Не постоји G-еквиваријантно пресликавање из произвољног простора E_nG у простор $E_{n-1}G$.*

Пре доказа, приметимо да се тврђење 2) одавде добија директно. Наиме, из дефиниције индекса и овог тврђења знамо де је $\operatorname{ind}_G(E_nG) > n-1$, а како је идентичко пресликавање на простору E_nG свакако G-еквиваријантно, важиће $\operatorname{ind}_G(E_nG) = n$.

Такође, за $G = \mathbb{Z}_2$ ово је управо Борсук-Уламова теорема, чиме добијамо још један од доказа те теореме.

Пређимо сада на доказ. Прва идеја је да не посматрамо дејство целе групе G већ неке њене подрупе. Наиме, ако је H подрупа групе G, сваки G-простор се може посматрати и као H-простор, а свако G-пресликавање као H-пресликавање. Поменимо само да је то честа идеја када дејство целе групе G није слободно, а рецимо јесте слободно дејство неке подгрупе. То нећемо користити у овом доказу. Али, користићемо другу стандардну идеју - знамо да нетривијална коначна група G има подгрупу изоморфну некој цикличној групи $\mathbb{Z}_p$, за неки прост број p. За такву групу G и њену подгрупу $\mathbb{Z}_p$, сваки E_nG простор је истовремено и $E_n\mathbb{Z}_p$ простор.

Дакле, довољно је тврђење доказати за $G = \mathbb{Z}_p$. Како између два $E_n\mathbb{Z}_p$ простора увек постоји $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантно пресликавање, за простор типа $E_n\mathbb{Z}_p$ узмимо $(\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$. Означимо $K := (\mathbb{Z}_p)^{*(n+1)}$ и $L := (\mathbb{Z}_p)^{*(n)}$ и посматрајмо L као потпростор од K одређен са првих n компоненти споја. Уочимо инклузију $i : V(L) \to V(K)$ на нивоу темена ових симплицијалних комплекса.

Претпоставимо супротно тврђењу теореме, тј. да постоји еквиваријантно пресликавање

$$f : ||K|| \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} ||L||.$$

Прво ћемо f „претворити” у симплицијално пресликавање. Прецизније, потребна нам је довољно фина симплицијална подела $\widetilde{K}$ комплекса K, као и симплицијално $\mathbb{Z}_p$-пресликавање $\widetilde{f} : V(\widetilde{K}) \to V(L)$. Познато је да се то може урадити помоћу теореме о симплицијалној апроксимацији ([8], теорема $2C.1$). Потребно је још пазити да та симплицијална апроксимација остане $\mathbb{Z}_p$-пресликавање, али и то није проблем. Нећемо се задржавати на тим техничким детаљима.

Остаје да покажемо да ако је $\widetilde{K}$ симплицијална подела комплекса K, да онда не постоји симплицијално $\mathbb{Z}_p$-пресликавање $\widetilde{f} : V(\widetilde{K}) \to V(L)$.

Посматрајмо композицију поменутих симплицијалних $\mathbb{Z}_p$-пресликавања:

$$g := i \circ \widetilde{f} : V(\widetilde{K}) \to V(K).$$

Израчунаћемо Лефшецов број овог пресликавања на два начина у циљу да добијемо контрадикцију.

Први приступ је да рачунамо Лефшецов број на нивоу ланаца. Знамо да симплицијално пресликавање $g : V(\widetilde{K}) \to V(K)$ индукује ланчасто пресликавање $g_{\sharp k} : C_k(\widetilde{K}) \to C_k(\widetilde{K})$, где је са $C_k(\widetilde{K}) = C_k(\widetilde{K}; \mathbb{Q})$ означена k-димензионална ланчаста група са рационалним коефицијентима (иако је K кодомен пресликавања g, сваки симплекс из K може да се напише као сума симплекса из $\widetilde{K}$ на које је подељен). Тада је Лефшецов број пресликавања g на нивоу ланчастих пресликавања једнак:

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{tr}(g_{\sharp k}).$$

Пошто радимо са рационалним коефицијентима, $C_k(\widetilde{K})$ су заправо векторски простори, па су пресликавања $g_{\sharp k}$ заправо линеарни ендоморфизми векторских простора. Зато им се траг рачуна на уобичајен начин, као траг линеарног пресликавања.

База простора $C_k(\widetilde{K})$ је састављена од свих ланаца e_σ који су 1 на симплексу σ, а 0 иначе, где σ пролази (оријентисане) k-симплексе у $\widetilde{K}$. Израчунајмо $\mathrm{tr}(g_{\sharp k})$ у овој бази. Како је g $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантно,симплекс σ доприноси исто колико и још $p-1$ симплекса његове орбите (овде користимо да су симплекси једне орбите сви различити). Одатле следи да је $\mathrm{tr}(g_{\sharp k})$ дељив са p, па је и Лефшецов број $\Lambda(g)$ дељив са p.

Посматрајмо сада $\Lambda(g)$ на нивоу хомолошких група. Пресликавање g индукује пресликавања $g_{*k} : H_k(K, \mathbb{Q}) \to H_k(K, \mathbb{Q})$ у хомологији. Према Хопфовој формули о трагу, Лефшецов број се може израчунати на следећи начин:

$$\Lambda(g) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \, \mathrm{tr}(g_{*k}).$$

С обзиром на то да је K $(n-1)$-повезан, на основу Хуревићеве теореме знамо да је $H_k(K, \mathbb{Q}) = \mathbb{O}$, за $1 \leq k \leq n-1$. Због тога за Лефшецов број можемо имати нешто само у димензијама 0 и n. Али на нивоу n хомоморфизам g_{*n} је тривијалан, јер је због функторијалности једнак композицији $i_{*n} \circ \widetilde{f}_{*n}$, тј. факторише се кроз тривијалну групу $H_n(L, \mathbb{Q})$ (L је $(n-1)$-повезан). Одатле следи да је $\Lambda(g) = 1$, што је у контрадикцији са чињеницом да је то број дељив са p. Тиме је теорема доказана. □

Специјално, приметимо да смо успут доказали интересантну чињеницу да је Лефшецов број $\mathbb{Z}_p$-пресликавања триангулабилног $\mathbb{Z}_p$-простора у њега самог, дељив са p.

Најпримењивија је следећа последица ове теореме.

Теорема 14. **(Долд)** *Нека је G нетривијална коначна група, X n-повезан G-простор, а Y слободан G-простор такав да је $\dim Y \leq n$ (може бити симплицијални G-комплекс или ћелијски G-комплекс).*

Тада не постоји G-еквиваријантно пресликавање $f : X \to Y$.

Доказ. Следи директно из тврђења 4) и 5) теореме 12 и својства монотоности индекса. □

Наведимо још једну теорему која ће нам бити неопходна за неке доказе у следећем поглављу. Потребно нам је неколико познатих термина у вези симплицијалних коплекса, па их наведимо укратко. Знамо да сваки симплицијални комплекс K дефинише посет $P_K := (K \backslash \{\emptyset\}, \subset)$ који се састоји од свих непразних симплекса у K уређених према релацији припадања (тј. $a \subset b$ ако и само ако је a страна од b). Такође, за сваки посет P можемо посматрати симплицијални комплекс свих ланаца у P (у односу на ову релацију припадања), означимо га са $\Delta(P)$. Тај комплекс се назива *уређајни комплекс*. Познато је да је $\Delta(P_K)$ заправо баш прва барицентричка подела $\widehat{K}$ од K. Сада можемо формулисати следећу важну теорему.

Теорема 15. (Саркаријина неједнакост/Теорема о индексу) *Нека је* K *коначан и слободан симплицијални* G*-комплекс, а* L *његов* G*-инваријантан поткомплекс. Нека је* P_K *посет придружен комплексу* K*, а* P_L *посет придружен* L *(потпосет од* P_K*). Нека је још* $Q_L := P_K \backslash P_L$ *одговарајући комплементаран потпосет, а* $\Delta(Q_L)$ *њему придружен уређајни комплекс. Тада важи:*

$$\mathrm{ind}_G(L) \geq \mathrm{ind}_G(K) - \mathrm{ind}_G(\Delta(Q_L)) - 1.$$

Доказ. Само ћемо скицирати најважније идеје, без залажења у техничке детаље. Најпре, може се показати да су симплицијални комплекс K и његова прва барицентричка подела $\widehat{K} = \Delta(P_K)$ као G-комплекси симплицијално еквивалентни. За доказ ове чињенице би се пратио познат доказ да су комплекс K и његова прва барицентрича подела $\widehat{K}$ симплицијално еквивалентни, а како се еквиваленција конструише индуктивно симплекс по симплекс, може се без тешкоћа учинити еквиваријантном. Нека је $f_1 : K \to \Delta(P_K)$ поменута симплицијална еквиваленција. Следећи корак је да уочимо G-еквиваријантно пресликавање $f_2 : \Delta(P_K) \to \Delta(P_L) * \Delta(Q_L)$. Заиста, сваки ланац $c = \{c_0 < ... < c_k\}$ у P_K може да се природно подели на два ланца: $c' := c \cap P_L$ и $c'' := c \cap Q_L$.

Нека је $\mathrm{ind}_G(L) = m$ и $\mathrm{ind}_G(\Delta(Q_L)) = n$. Узмимо за E_mG и E_nG симплицијалне комплексе $G^{*(m+1)}$ и $G^{*(n+1)}$, редом. Тада је $E_mG * E_nG \cong G^{*(m+n+2)}$, што је један $E_{m+n+1}G$ простор. По дефиницији индекса постоје G-еквиваријантна пресликавања $g : \Delta(P_L) \to E_mG$ и $h : \Delta(Q_L) \to E_nG$, за која можемо претпоставити да су симплицијална према еквиваријантној верзији теореме о симплицијалној апроксимацији. Тада је добро дефинисано пресликавање:

$$g * h : \Delta(P_L) * \Delta(Q_L) \to E_mG * E_nG \cong E_{m+n+1}G.$$

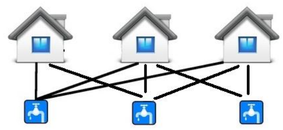
На крају, пресликавање $(g * h) \circ f_2 \circ f_1 : K \to E_{m+n+1}G$ је G-еквиваријантно као композиција еквиваријантних, па закључујемо да је $\mathrm{ind}_G(K) \leq m + n + 1$. Тиме је теорема доказана. $\square$

3 Примене нумеричког индекса

3.1 Непланарност графова

Први пример на коме ћемо применити метод конфигурационог простора и тест пресликавања је доказ непланарности графа $K_{3,3}$. Општа идеја овог доказа ће бити примењивана веома често, па ћемо је овде описати детаљно, а касније користити без залажења у све детаље.

Теорема 16. *Комплетан бипартитни граф $K_{3,3}$ није планаран. Прецизније, ако је $f : K_{3,3} \to \mathbb{R}^2$ произвољно непрекидно пресликавање, онда постоје две дисјунктне гране e_1 и e_2 овог графа такве да $f(e_1) \cap f(e_2) \neq \emptyset$.*



Доказ. Претпоставимо супротно, да постоји утапање $f : K_{3,3} \to \mathbb{R}^2$ нашег графа у раван. Најпре треба изабрати конфигурациони простор који ће репрезентовати све парове дисјунктних ивица графа $K_{3,3}$. Природно је да то буде умањени спој $(K_{3,3})^{*2}_{\Delta}$ (јер баш у њему „спајамо" тачно дисјунктне стране симплекса $K_{3,3}$). Затим, треба конструисати тест пресликавање. Уочимо два независна утапања $u_1, u_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ о којима смо детаљно говорили у поглављу 1.2. Њихова композиција са f нам даје пресликавања $f_i = u_i \circ f : K_{3,3} \to U_i$, $i = 1, 2$, где је $U_i = u_i(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^5$. Сада за тест пресликавање узмимо $F : (K_{3,3})^{*2}_{\Delta} \to U_1 * U_2 \subset \mathbb{R}^5$ дефинисано као спој пресликавања f_1 и f_2, тј. $F(tx \oplus (1-t)y) := tf_1(x) \oplus (1-t)f_2(y)$.

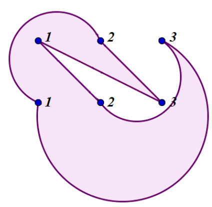
Према претпоставци, слике дисјунктних страна се не секу, па важи да је $F((K_{3,3})^{*2}_{\Delta}) \cap \Delta = \emptyset$, где је Δ дијагонала споја у кодомену. Зато можемо посматрати пресликавање F са смањеним кодоменом; ради једноставности означимо га опет са F:

$$F : (K_{3,3})^{*2}_{\Delta} \to \mathbb{R}^5 \backslash \Delta.$$

Природно је да посматрамо дејство групе $\mathbb{Z}_2$ које замењује две копије $K_{3,3}$ у $(K_{3,3})^{*2}_{\Delta}$. Слично, група $\mathbb{Z}_2$ замењује потпросторе U_1 и U_2. У поглављу 1.2. смо објаснили како она дејствује и на целом простору $\mathbb{R}^5$, остављајући притом фиксним тачке дијагонале Δ. Лако се примети да је F $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно.

Уведимо стандардну ознаку $[n]$ за дискретан скуп од n тачака. Тада $K_{3,3}$ можемо видети као спој $[3]^{*2}$. Пошто знамо да спој и умањени спој комутирају, закључујемо да важе следеће релације:

$$(K_{3,3})^{*2}_{\Delta} \cong ([3]^{*2})^{*2}_{\Delta} \cong ([3]^{*2}_{\Delta})^{*2} \cong (S^1)^{*2} \cong S^3. \tag{1}$$



Притом смо уочили да је $[3]^{*2}_{\Delta} \cong S^1$ (слика десно). Такође, користили смо познато тврђење ([18], 4.2.2) које каже да је $S^k * S^l \cong S^{k+l+1}$ $(k, l \in \mathbb{N}_0)$.

Затим, приметимо да је кодомен $\mathbb{R}^5 \backslash \Delta$ $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно хомотопски еквивалентан ортогоналном комплементу дијагонале без координатног почетка, тј. $\Delta^{\perp} \backslash \{0\}$, а хомотопска еквиваленција је ортогонална пројекција $p : \mathbb{R}^5 \backslash \Delta \to \Delta^{\perp} \backslash \{0\}$. Пошто је дијагонала димензије два, $\Delta^{\perp} \backslash \{0\}$ је тродимензионални простор без једне тачке. Он је $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно хомотопски еквивалентан сфери S^2, помоћу радијалне пројекције $r : \Delta^{\perp}\setminus\{0\} \to S^2$. (Није неопходно да имамо хомотопске еквиваленције у општем случају. Само треба да имамо $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантна пресликавања.) Коначно, као композицију добијамо $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање

$$r \circ p \circ F : (K_{3,3})^{*2}_{\Delta} \to S^2,$$

па уз (1) заправо имамо $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање из S^3 у S^2. Међутим, то је немогуће према Борсук-Уламовој теореми (или из теореме 13, јер не важи $E_3\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} E_3\mathbb{Z}_2$). Тиме је доказ завршен. $\square$

Поменимо да се на начин сличан овоме може показати такозвана тополошка Радонова теорема. Она је општија верзија познате комбинаторне теореме, тј. „обичне" Радонове теореме.

Теорема 17.(Радонова теорема) *Нека је $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{d+2}\}$ произвољан скуп од $d+2$ тачке у простору $\mathbb{R}^d$. Тада се X може поделити на два дисјунктна подскупа чији се конвексни омотачи секу.* $\diamondsuit$

Ово тврђење можемо преформулисати на следећи начин:

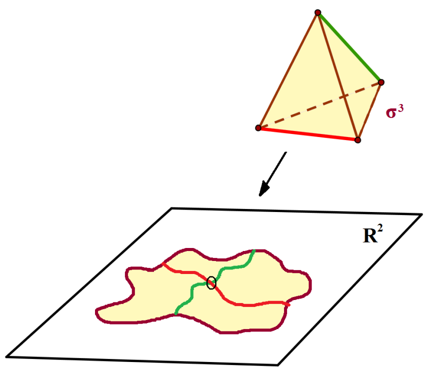
Теорема 18.(Екививалент Радонове теореме) *Нека је σ^{d+1} произвољан симплекс димензије $(d+1)$. Тада за свако афино пресликавање $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$ постоје две дисјунктне стране F_1 и F_2 симплекса σ^{d+1} такве да је*

$$f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \neq \emptyset.$$

$\diamondsuit$

Међутим, показује се да тврђење наведене теореме важи не само за афина, већ и за сва непрекидна пресликавања.

Теорема 19.(Тополошка Радонова теорема) *Нека је дато произвољно непрекидно пресликавање $f : ||\sigma^{d+1}|| \to \mathbb{R}^d$, где је σ^{d+1} произвољан $(d+1)$-димензионални симплекс. Тада постоје две дисјунктне стране F_1 и F_2 овог симплекса такве да је $f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \neq \emptyset$.* $\diamondsuit$



Приметимо још да с обзиром на то да су тражене стране F_1 и F_2 дисјунктне, оне су садржане у граници симплекса, па је свеједно да ли говоримо о пресликавању целог симплекса σ^{d+1} или о пресликавању чији је домен граница посматраног симплекса (некад се ова теорема тако формулише).

Докажимо непланарност и другог графа Куратовског.

Теорема 20. *Комплетни граф K_5 није планаран.*

Доказ. Поред сличног расуђивања као у теореми 16, користићемо и Саркаријину неједнакост. Претпоставимо супротно, да постоји $f : K_5 \to \mathbb{R}^2$ које је утапање графа у раван. Идентификујмо K_5 са 1-димензионалним скелетоном σ_1^4 4-димензионалног симплекса σ^4. Тада је $f : \sigma_1^4 \to \mathbb{R}^2$ непрекидно пресликавање, за које не постоје две дисјунктне ивице e_1 и e_2 овог 1-скелетона такве да је $f(e_1) \cap f(e_2) \neq \emptyset$, према претпоставци. Покажимо да је то немогуће.

За конфигурациони простор изаберимо умањени спој $(\sigma_1^4)^{*2}_\Delta$. Тест пресликавање изаберимо потпуно исто као у теореми 16, $F : (\sigma_1^4)^{*2}_\Delta \to U_1 * U_2 \subset \mathbb{R}^5$. Такође, посматрајмо исто дејство групе $\mathbb{Z}_2$ и на исти начин $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликајмо кодомен у S^2. Дакле, имамо $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање из $(\sigma_1^4)^{*2}_\Delta$ у S^2. Покажимо да оно не постоји применом нумеричког индекса.

За разлику од теореме 16, овде није једноставно одредити $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\sigma_1^4)^{*2}_\Delta)$. Зато посматрајмо $(\sigma_1^4)^{*2}_\Delta = L$ као поткомплекс комплекса $K = (\sigma^4)^{*2}_\Delta$. За K знамо да је то заправо:

$$K = (\sigma^4)^{*2}_\Delta \cong ([1]^{*5})^{*2}_\Delta \cong ([1]^{*2}_\Delta)^{*5} \cong [2]^{*5} \cong S^4.$$

Притом смо користили да је $[2]^{*5} \cong (S^0)^{*5} \cong S^4$, што следи из познатог тврђења које каже да је $(S^0)^{*n} \cong S^{n-1}$ ([18], 4.2.2). Потребан нам је још комплементарни посет Q_L да бисмо применили Саркаријину неједнакост (теорема 15). Приметимо се да је Q_L скуп свих парова дисјунктних страна (θ_1, θ_2) комплекса $(\sigma^4)^{*2}_\Delta$ таквих да је или $\dim(\theta_1) \geq 2$ или $\dim(\theta_2) \geq 2$. (Не могу бити испуњена оба ова услова истовремено због димензије - не постоје две дисјунктне стране симплекса σ^4 димензије ≥ 2). Зато је добро дефинисано пресликавање

$$h : Q_L \to \{a_1, a_2\},\ h(\theta_1, \theta_2) := a_i \Leftrightarrow \dim(\theta_i) \geq 2,$$

где $\{a_1, a_2\}$ посматрамо као двоелементни посет са неупоредивим елементима. Тада h индукује $\mathbb{Z}_2$-еквиваријанто пресликавање $\Delta(h) : \Delta(Q_L) \to \Delta(\{a_1, a_2\})$. Приметимо да је $\Delta(\{a_1, a_2\}) \cong S^0$, одакле због монотоности индекса следи да је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta(Q_L)) = 0$. Сада на основу Саркаријине неједнакости знамо да важи:

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\sigma_1^4)^{*2}_\Delta) = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(L) \geq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(K) - 0 - 1 = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^4) - 1 = 3.$$

Дакле, закључили смо да је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}((\sigma_1^4)^{*2}_\Delta) > 2 = \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^2)$, одакле следи да не постоји $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање из $(\sigma_1^4)^{*2}_\Delta$ у S^2, што је у контрадикцији са претпоставком. Тиме је тврђење доказано. □

Ова теорема је специјалан случај (за $d = 1$) следеће, много садржајније теореме, која се слично доказује.

Теорема 21. (Ван Кампен-Флоресова) *Нека је $d \geq 1$ и нека је K d-скелетон $(2d+2)$-димензионалног симплекса. Тада се K не може утопити у $\mathbb{R}^{2d}$. Прецизније, за свако непрекидно пресликавање $f : ||K|| \to \mathbb{R}^{2d}$, постоје две дисјунктне стране у K чије се слике при f секу.* ◇

Подсетимо се да Витнијева теорема каже да се сваки d-димензионални симплицијални комплекс утапа у $\mathbb{R}^{2d+1}$. Тада из Ван Кампен-Флоресове теореме знамо да се у општем случају та димензија $2d+1$ не може смањити.

3.2 Проблеми Твербергововг типа

Докажимо сада неколико тврђења која су слична тврђењима претходног поглавља у димензији више, посебно по начину на који се доказују. Посматрамо какве положаје могу имати конфигурације тачака у простору $\mathbb{R}^3$.

Теорема 22. *Сваки скуп $\mathcal{C}$ од 9 тачака у $\mathbb{R}^3$ може да се подели на три непразна дисјунктна скупа: $\mathcal{C} = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, тако да важи*

$$\operatorname{conv}(C_1) \cap \operatorname{conv}(C_2) \cap \operatorname{conv}(C_3) \neq \emptyset.$$

Доказ. Теорему можемо преформулисати на следећи начин. Нека је σ^8 канонски 8-димензиони симплекс. Скуп $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ одређује линеарно пресликавање $L : \sigma^8 \to \mathbb{R}^3$ којим се врхови симплекса сликају у тачке скупа $\mathcal{C}$. Желимо да покажемо да постоје три дисјунктне стране θ_1, θ_2 и θ_3 симплекса σ^8 такве да је $L(\theta_1) \cap L(\theta_2) \cap L(\theta_3) \neq \emptyset$. Нагласимо да у доказу нигде нећемо користити да је L линеарно пресликавање већ ћемо доказати тврђење за било које непрекидно пресликавање $L : \sigma^8 \to \mathbb{R}^3$.

Претпоставимо, дакле, супротно, да постоји непрекидно $L : \sigma^8 \to \mathbb{R}^3$ које не задовољава претходни услов. Пошто су нам потребне тројке дисјунктних страна по паровима, за конфигурациони простор узмимо умањени спој $(\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)}$. Из тог простора конструишемо тест пресликавање у $(\mathbb{R}^3)^{*3} \subset \mathbb{R}^{11}$ слично као у доказу теореме 16, тј. као троструки спој пресликавања L компонованог са утапањима ($F(t_1x_1 \oplus t_2x_2 \oplus t_3x_3) := t_1u_1(L(x_1)) \oplus t_2u_2(L(x_2)) \oplus t_3u_3(L(x_3))$, где $u_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^{11}$, за $i = 1, 2, 3$). Дакле, то је пресликавање:

$$F : (\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)} \to \mathbb{R}^{11}.$$

Посматрајмо дејство групе $\mathbb{Z}_3$, које на домену и кодомену циклично помера координате споја (за кодомен је детаљно објашњено у поглављу 1.2). Тада је F очигледно $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно. С обзиром на нашу претпоставку да при L слике никоје три дисјунктне стране немају заједничку тачку, $F((\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)})$ не сече дијагоналу, па смањимо кодомен и имамо $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно пресликавање:

$$F : (\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)} \to \mathbb{R}^{11} \backslash \Delta.$$

Приметимо да је сада дејство на кодомену слободно. Пошто је Δ димензије 3, $\mathbb{R}^{11} \backslash \Delta$ можемо $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно пресликати у сферу S^7, прво ортогоналним па радијалним пројектовањем. Компонујући то пресликавање са F добијамо:

$$(\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)} \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} S^7.$$

Израчунајмо сада индексе ових простора за групу $\mathbb{Z}_3$. Стандардно имамо:

$$(\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)} = (\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)} \cong ([1]^{*9})^{*3}_{\Delta(2)} \cong ([1]^{*3}_{\Delta(2)})^{*9} \cong E_8\mathbb{Z}_3.$$

(Приметили смо да је $[1]^{*3}_{\Delta(2)}$ дискретан скуп од 3 тачке па је претпоследњи простор заиста $E_8\mathbb{Z}_3$.) Одатле следи да је $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_3}((\sigma^8)^{*3}_{\Delta(2)}) = 8$. Са друге стране, пошто је $\mathbb{Z}_3$-дејство на S^7 слободно, $\operatorname{ind}_{\mathbb{Z}_3}(S^7) = 7$. Контрадикцију добијамо на основу својства монотоности индекса. $\square$

Сада ћемо видети да ако додамо још 2 тачке, можемо захтевати какви тачно да буду ови подскупови.

Теорема 23. *Нека је $\mathcal{C}$ скуп од 11 тачака у простору $\mathbb{R}^3$. Тада постоје по паровима дисјунктни троелементни скупови $C_1, C_2, C_3 \subset \mathcal{C}$ такви да важи* $\mathrm{conv}(C_1) \cap \mathrm{conv}(C_2) \cap \mathrm{conv}(C_3) \neq \emptyset$.

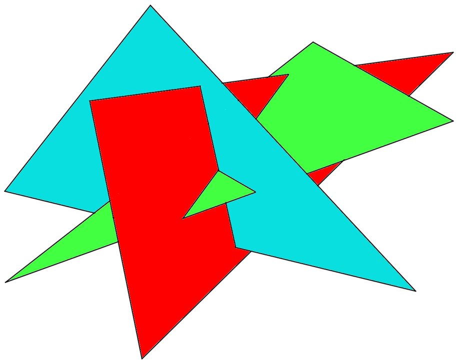
Доказ. Овај доказ идејно прати доказ теореме 20. Природно да конфигурациони простор буде базиран на 2-скелетону σ_2^{10} симплекса σ^{10}. Пошто су нам потребне тројке дисјунктних дводимензионалних страна, узмимо умањени спој $(\sigma_2^{10})^{*3}_{\Delta(2)}$ и означимо га са L. L можемо видети као поткомплекс комплекса $K = (\sigma^{10})^{*3}_{\Delta(2)}$, за који важи:

$$K \cong ([1]^{*11})^{*3}_{\Delta(2)} \cong ([1]^{*3}_{\Delta(2)})^{*11} \cong [3]^{*11} \cong E_{10}\mathbb{Z}_3.$$

Посматрајмо дејство групе $\mathbb{Z}_3$ на K као циклично дејство на споју. Из претходне везе следи да је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_3}(K) = 10$. Приметимо за је L његов $\mathbb{Z}_3$-инваријантан поткомплекс, па можемо применити Саркаријину неједнакост. Посет Q_L, који је комплементаран посету P_L унутар P_K, састављен је од свих уређених тројки $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in (\sigma^{10})^{*3}_{\Delta(2)}$, таквих да за неко $i \in \{1, 2, 3\}$ важи да је димензија θ_i бар 4. Пошто знамо да је $\dim(\theta_1) + \dim(\theta_2) + \dim(\theta_3) \leq 11$, закључујемо да највише два од ових симплекса имају димензију већу или једнаку 4.

Дефинишимо зато пресликавање:

$$h(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3),$$



где је $\epsilon_i = 0$ или 1 зависно од тога да ли је $\dim(\theta_i) \leq 3$ или не. Притом $h : Q_L \to S$, где S можемо видети на два начина. Један је као $\mathcal{P}([3]) \backslash \{\emptyset, [3]\}$, а други као посет ивица границе троугла, па је $\Delta(S) \cong S^1 \cong E_1\mathbb{Z}_3$. Приметимо да је пресликавање h монотоно (у смислу уређености посета) и индукује $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно симплицијално пресликавање $\Delta(h)$ из $\Delta(Q_L)$ у $\Delta(S)$. Зато је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_3} \Delta(Q_L) \leq 1$. Коначно, применом Саркаријине неједнакости имамо да је $\mathrm{ind}(L) \geq 10 - 1 - 1$, тј.

$$\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_3}((\sigma_2^{10})^{*3}_{\Delta(2)}) \geq 8.$$

Одредивши индекс конфигурационог простора завршили смо најважнији део доказа. Сада можемо претпоставити супротно тврђењу теореме и посматрати потпуно исто тест пресликавање као и у претходној теореми. Као и тамо, закључили бисмо да постоји $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно пресликавање из $(\sigma_2^{10})^{*3}_{\Delta(2)}$ у сферу S^7 са слободним дејством групе $\mathbb{Z}_3$, што је очигледно немогуће због монотоности индекса. Тиме је доказ завршен. $\square$

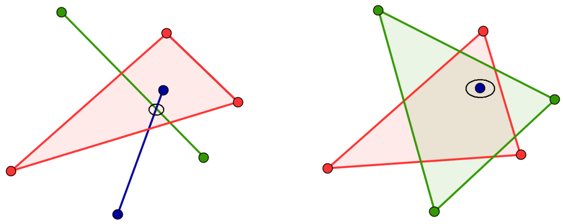
Теорема 22 је само специјални случај једне веома познате и лепе теореме. Наиме, бавимо се поделама скупа тачака у простору неке димензије на више подскупова чији конвексни омотачи треба да имају непразан пресек. Пре свега, није много тешко показати да за свака два броја d и r постоји број

$T = T(d, r)$ такав да сваки скуп A од T тачака у $\mathbb{R}^d$ може да се подели у r дисјунктних подскупова $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таквих да је $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{conv}(A_i) \neq \emptyset$. Циљ нам је да нађемо што бољу процену за $T(d, r)$, коју нам даје следећа теорема.

Теорема 24.(Тверберг) *Нека су дати природни бројеви $d \geq 1$ и $r \geq 2$. Тада се сваки скуп од $(d+1)(r-1)+1$ тачака у $\mathbb{R}^d$ може поделити на r дисјунктних подскупова $A_1, A_2, \ldots, A_r$ таквих да је $\bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{conv}(A_i) \neq \emptyset$.* ♢

Свака таква партиција скупа тачака назива се *Твербергова партиција*.

Погледајмо мало конкретне примере. За $r = 2$ имамо управо Радонову теорему. За $d = 1$ у теореми посматрамо скуп од $2r - 1$ тачака на реалној правој. Ако су те тачке различите, постоји само једна Твербергова партиција (ако означимо тачке према распореду: $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2r-1}$, изаберемо скупове $A_i = \{x_i, x_{2r-i}\}$, за $1 \leq i \leq r-1$, а нека је $A_r = \{x_r\}$).



На слици је приказан пример две Твербергове партиције за $d = 2$ и $r = 3$ (тада имамо 7 тачака). Показује се да тврђење генерално не важи када имамо мање од $(d+1)(r-1)+1$ тачака. Опишимо само идејно како се може конструисати контрапример. Нека су $v_1, v_2, \ldots, v_{d+1}$ темена правилног симплекса у $\mathbb{R}^d$ и нека је B_i скуп од $r-1$ тачака које леже „веома близу” темену v_i. Тада не постоји Твербергова партиција скупа $B := B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{d+1}$ на r дисјунктних делова чији конвексни омотачи имају непразан пресек.

Оригинални доказ Твербергове теореме је изузетно компликован. Али, постоји тополошка верзија Твербергове теореме из које следи Твербергова теорема за случај када је r прост број.

Теорема 25.(тополошка Твербергова теорема) *Нека је p прост, а $d \geq 1$ природан број и нека је $N = (d+1)(r-1)$. Тада за произвољну непрекидну функцију $f : ||\sigma^N|| \to \mathbb{R}^d$ постоји p дисјунктних страна $F_1, \ldots, F_p$ симплекса σ^N таквих да важи $f(||F_1||) \cap f(||F_2||) \cap \cdots \cap f(||F_p||) \neq \emptyset$.* ♢

Доказ тополошке Твербергове теореме нећемо наводити јер је он сасвим исти као доказ теореме 22, само морамо пажљиво одабрати димензије. Прецизније, тест пресликавање ће бити облика $F : (\sigma^N)^{*p}_{\Delta(2)} \to (\mathbb{R}^d)^{*p}$.

За крај овог поглавља, наведимо још једно визуелно лепо тврђење које се такође може показати поступком који смо користили у овом поглављу.

Теорема 26. *Нека је $\mathcal{C}$ скуп од 5 црвених, 5 плавих и 5 белих тачака у простору $\mathbb{R}^3$. Тада постоје три троугла таква да сваки има темена све три боје, да су им скупови темена међусобно дисјунктни по паровима, а да је пресек сва три непразан.* ♢

3.3 Проблем дељења огрлице

Прикажимо примену нумеричког индекса на још једном примеру који се разликује од претходних. У питању је такозвани *проблем дељења огрлице*, који се неформално може испричати кроз кратку причу. Наиме, неколико лопова је украло драгоцену огрлицу, састављену од различитих драгих каменова. Пошто не знају који камен колико вреди, (а то су ипак лопови па нипошто не би хтели да неко добије више) они желе да поделу изврше тако да свако добије исту вредност од сваке врсте драгих каменова. Такође, ланчић на коме су каменови је изузетно вредан, па би хтели да поделу изврше са што је могуће мање сечења ланчића. Наравно, ланчић се може отворити на једном месту. Питање је са колико најмање сечења ланчића могу да поделе огрлицу, какав год да је распоред каменчића.

Ми ћемо посматрати наравно „математичку” и непрекидну верзију овог проблема, као да нису у питању каменчићи већ неке разне легуре. Показаћемо са колико сечења увек можемо да поделимо ланац, као и да у општем случају не можемо са мање.

Теорема 27. *Нека су $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ непрекидне вероватносне мере на $[0,1]$. Нека је $q \geq 2$ природан број и $N = d(q-1)$. Тада постоје партиција сегмента $[0,1]$ на $N+1$ подсегмената $I_1, \ldots, I_{N+1}$ помоћу N резова и партиција скупа индекса $[N+1]$ на подскупове $S_1, S_2, \ldots, S_q$ такве да важи:*

$$\sum_{j \in S_k} \mu_i(I_j) = \frac{1}{q}, \text{ за } i = 1, 2, \ldots, d \text{ и } k = 1, 2, \ldots, q.$$

(Имамо q лопова, а d различитих драгоцених материјала. Сваки од скупова S_k „говори” које подсегменте дајемо k-том лопову - оне чији је индекс елемент скупа S_k.)

Доказ. Најпре ћемо доказати теорему за случај када је број q прост, а онда ћемо на крају индуктивно доказати тврђење за произвољан број лопова.

Дакле, нека је q прост број. Основна идеја је да свим могућим поделама сегмента $[0,1]$ међу лоповима помоћу N резова, придружимо тачке умањеног споја $||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}||$, где је са σ^N означен канонски N-димензионални симплекс.

Нека је дата произвољна таква подела огрлице лоповима. То значи да имамо партицију сегмента $[0,1]$ на $N+1$ сегмената $I_1, \ldots, I_{N+1}$ (нумерисаних од лева на десно) и партицију скупа $[N+1]$ на подскупове $S_1, S_2, ..., S_q$.

Канонски симплекс σ^N садржан је у $\mathbb{R}^{N+1}$ и задат са:

$$\sigma^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} \mid x_1, \ldots, x_{N+1} \geq 0, x_1 + x_2 + \ldots + x_{N+1} = 1\}.$$

Његови врхови леже на координатним осама простора $\mathbb{R}^{N+1}$, па између њих и скупа индекса $[N+1]$ имамо природну бијекцију. Датој подели међу лоповима треба придружити неки елемент умањеног споја $||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}||$, која има облик $T = t_1 X_1 \oplus t_2 X_2 \oplus \ldots \oplus t_q X_q$. Дакле, треба одредити коефицијенте t_k и тачке $X_k \in \sigma^N$. Најпре, за произвољно $k \in \{1, 2, \ldots, q\}$, дефинишимо t_k као укупан збир дужина сегмената које је добио k-ти лопов, тј.

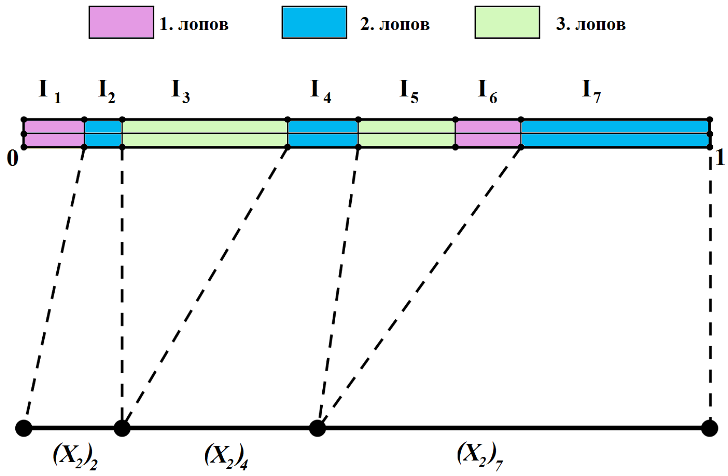
$$t_k := \sum_{j \in S_k} l(I_j).$$

(Са $l(I)$ је означена дужина сегмента I.) Тиме је постигнуто да важи $\sum_{k=1}^{q} t_k = 1$.

X_k је тачка у простору $\mathbb{R}^{N+1}$, па ћемо је дефинисати покоординатно. Ако је $t_k = 0$, X_k не утиче на овај елемент споја па је довољно дефинисати X_k када $t_k \neq 0$. Нека су координате тачке X_k означене са $(X_k)_j$, $j \in [N+1]$. Дефинишимо:

$$(X_k)_j := \begin{cases} \frac{1}{t_k} \cdot l(I_j), & j \in S_k, \\ 0, & j \notin S_k. \end{cases}$$

Другим речима, идеја је да „растегнемо” сегменте дате k-том лопову тако да остану у истом односу а да им збир дужина буде једнак 1, док сегменте дате осталим лоповима скупимо сваки понаособ у тачку. Тиме постижемо да је $\sum_{j=1}^{N+1} (X_k)_j = 1$, па тачка X_k заиста припада σ^N. Као илустрација приказан је пример за $q = 3$ лопова, $d = 3$, а посматрамо другог лопова (X_2).



На основу начина на који смо дефинисали T, јасно је да T припада споју $(\sigma^N)^{*q}$. Штавише, она припада умањеном споју $(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}$, јер симплекс носач сваке од тачака X_k има скуп темена садржан у скупу S_k, па сви X_k-ови имају дисјунктне носаче.

Покушајмо да дефинишемо и обрнуто придруживање. Уочимо произвољни елемент $T = t_1X_1 \oplus t_2X_2 \oplus \ldots \oplus t_qX_q \in ||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}||$. Посматрајмо претходно задате релације. За почетак узмимо за скуп S_k темена носача тачке X_k. Тиме ће скупови S_k бити дисјунктни али не значи да ће покривати цео скуп $[N+1]$ јер могу постојати сегменти дужине 0. Оно што на јединствен начин можемо одредити су дужине сегмената $I_1, \ldots, I_{N+1}$ и ком лопову је додељен сваки од сегмената који није нулте дужине (који није само тачка). Ипак, не можемо на јединствен начин одредити ком лопову да доделимо интервале дужине 0.

Међутим, то нам није ни неопходно, јер на јединствен начин можемо дефинисати функцију $f : ||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}|| \to (\mathbb{R}^d)^q$ која лепо описује поделу међу лоповима. За $T \in ||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}||$ дефинишимо:

$$f(T)_{i,k} := \sum_{j \in S_k} \mu_i(I_j), \; i = 1, \ldots, d, \; k = 1, \ldots, q.$$

Пресликавање f је непрекидно јер су дате мере непрекидне. Такође, f је $\mathbb{Z}_q$-еквиваријантно пресликавање када посматрамо уобичајена дејства групе $\mathbb{Z}_q$ на овим просторима, тј. циклично померање координата споја на домену, односно производа на кодомену.

Претпоставимо сада супротно тврђењу теореме, да за неки распоред мера немамо ниједну жељену поделу међу лоповима. Тада $f(||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}||)$ не сече дијагоналу Δ у производу $(\mathbb{R}^d)^q$ (дијагонала Δ је d-димензионална), па можемо посматрати исто $\mathbb{Z}_q$ - еквиваријантно пресликавање са суженим кодоменом (ради једноставности означимо га истим именом):

$$f : ||(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)}|| \xrightarrow{\mathbb{Z}_q} (\mathbb{R}^d)^q \backslash \Delta.$$

Међутим, покажимо да такво пресликавање не може постојати због својства монотоности индекса. Наиме, због комутирања споја и умањеног споја важи:

$$(\sigma^N)^{*q}_{\Delta(2)} \cong ((\sigma^0)^{*(N+1)})^{*q}_{\Delta(2)} \cong ((\sigma^0)^{*q}_{\Delta(2)})^{*(N+1)} \cong (D_q)^{*(N+1)},$$

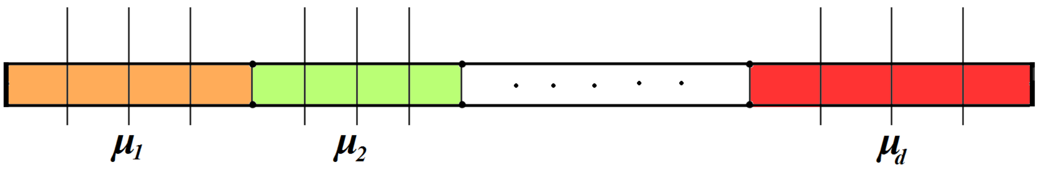
где D_q означава дискретан простор од q тачака. Тако смо добили управо простор $E_N\mathbb{Z}_q$-типа, па је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_q}$ домена једнак N. Што се простора $(\mathbb{R}^d)^q \backslash \Delta$ тиче, на до сада много пута приказан начин показује се да постоји $\mathbb{Z}_q$ - еквиваријантно пресликавање из њега у сферу $S^{d(q-1)-1}$ (ортогонална пројекција на комплемент дијагонале, па радијална пројекција). Следи да је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_q}$ кодомена мањи или једнак $d(q-1)-1 = N-1$, што је у контрадикцији са монотоношћу нумеричког индекса. Тиме је теорема доказана у случају када је q прост.

Докажимо сада теорему за произвољан број лопова, већи од 1. С обзиром на то да знамо да теорема важи за све просте бројеве q, довољно је да покажемо следеће: ако теорема важи за неке бројеве $q = q_1$ и за $q = q_2$, да онда важи и за $q = q_1 \cdot q_2$ (за исте мере $\mu_1, \ldots, \mu_d$). То се показује врло једноставно. Знамо да можемо да поделимо сегмент правилно на q_1 лопова са $N_1 = d(q_1 - 1)$ сечења. Сваки део који бисмо дали неком од q_1 лопова је коначна унија сегмената са мерама, па лако видимо да и на њега можемо применити теорему, сада за $q = q_2$. Тај део дакле можемо правилно поделити са $N_2 = d(q_2 - 1)$ резова. Тиме имамо правилну поделу на $q_1 \cdot q_2$ лопова, а укупно смо направили

$$N = N_1 + q_1 \cdot N_2 = dq_1 - d + q_1 \cdot d(q_2 - 1) = -d + q_1 d q_2 = d(q_1 q_2 - 1) \text{ резова.}$$

Тако је теорема у потпуности доказана. □

Ради комплетности проблема, покажимо да је ово најбоља могућа оцена. Заиста, ако имамо d мера распоређаних правилно, у низу једна по једна, лако се види да сваку морамо поделити са $q-1$ резова да бисмо добили правилну поделу. Тиме ћемо направити тачно $d(q-1)$ резова (као на слици за $q = 4$).



4 Коиндекс

Индекс G-простора смо дефинисали посматрајући пресликавања чији је кодомен простор E_nG-типа. Дуално, можемо посматрати пресликавања чији је домен E_nG-типа. Тада имамо и дуални објекат, G-коиндекс простора. Пошто је ова глава сасвим информативног типа, дефинишимо само $\mathbb{Z}_2$-коиндекс и погледајмо један пример везан за њега.

Деф 28. $\mathbb{Z}_2$-*коиндекс* простора X дефинише се на следећи начин:

$$\mathrm{coind}_{\mathbb{Z}_2}(X) := \max\{n \geq 0 \mid S^n \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} X\},$$

уколико је наведени максимум коначан број.

Директно из дефиниција индекса и коиндекса следи да је

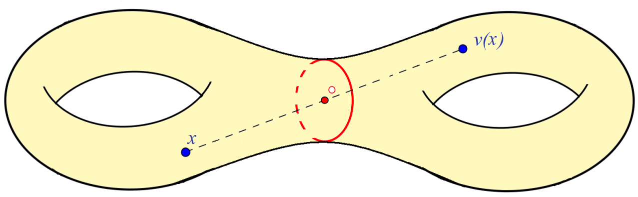
$$\mathrm{coind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X).$$

Када желимо да ограничимо индекс простора одоздо, ми често конструишемо неко пресликавање $S^n \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} X$. Приметимо да тада такође ограничавамо и коиндекс нашег простора.

Природно је запитати се за колико се индекс и коиндекс разликују. Такође, посебно су интересантни простори којима су индекс и коиндекс једнаки. Такве просторе називамо *сређеним*.

Може се показати да за сређене просторе важи једно лепо тврђење. Наиме, ако су X и Y сређени слободни $\mathbb{Z}_2$-простори, тада важи $X \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} Y$ ако и само ако је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \leq \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(Y)$.

Иако би се на први поглед чинило да су сређени простори ретки, заправо се испоставља да су несређени простори мање уочљиви од сређених. Наведимо само један леп пример несређеног простора - то је M_2, оријентабилна површ рода 2. Дејство ν групе $\mathbb{Z}_2$ на њој дефинишемо као антиподално пресликавање у односу на центар симетрије (слика једну „ручку” у другу). То дејство је очигледно слободно.



Докажимо да је M_2 несређен простор. Први корак је да покажемо да је $\mathrm{coind}_{\mathbb{Z}_2}(M_2) \leq 1$, тј. да не постоји пресликавање $S^2 \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} M_2$. Претпоставимо супротно, да постоји $f : S^2 \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} M_2$. Познато је да је $\mathbb{R}^2$ универзално наткривање за све оријентабилне површи осим сфере S^2, па уочимо такво наткривање $p : \mathbb{R}^2 \to M_2$. На основу познатих тврђења основног курса топологије, f се може подићи до $\mathbb{R}^2$, тј. постоји непрекидно пресликавање $\widetilde{f} : S^2 \to \mathbb{R}^2$ такво да важи $p \circ \widetilde{f} = f$. Међутим, према Борсук-Уламовој теореми, постоје две антиподалне тачке сфере S^2 које $\widetilde{f}$ слика у исту. Самим тим, и f ће их сликати у исту тачку, па f не може бити $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно, што је контрадикција. Дакле, $\mathrm{coind}_{\mathbb{Z}_2}(M_2) \leq 1$.

Покажимо још да је $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(M_2) \geq 2$, тј. да не постоји $\mathbb{Z}_2$-еквиваријантно пресликавање из M_2 у S^1. Претпоставимо супротно и нека $f : M_2 \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} S^1$. Рестрикција тог пресликавања на средишњу кружницу (црвена кружница на слици), је једно $\mathbb{Z}_2$-пресликавање $S^1 \to S^1$, које мора бити „на" (у супротном бисмо према Борсук-Уламовој теореми имали две антиподалне тачке које се сликају у исту, што је у контрадикцији са еквиваријантношћу). Због тога је та рестрикција хомолошки нетривијална. Међутим, средишња кружница S^1 јесте граница у M_2, па је хомолошки тривијална. Добијена контрадикција указује на то да је M_2 заиста простор код кога је коиндекс строго мањи од индекса.

Такође, леп пример несређеног простора је и Штифелова многострукост $V_{2,n}$ са (слободним) $\mathbb{Z}_2$-дејством задатим са $(v_1, v_2) \to (-v_1, -v_2)$. Показује се да за непарно n важи: $\mathrm{coind}_{\mathbb{Z}_2}(V_{2,n}) = n-2 < \mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}(V_{2,n}) = n-1$.

На крају приче о нумеричком индексу и коиндексу напоменимо да се у литератури појављује и много других индекса нумеричког типа. Већина њих се налази између коиндекса и индекса. Један интересантан је Јангов параметар придружен $\mathbb{Z}_2$-простору, који доста личи на $\mathrm{ind}_{\mathbb{Z}_2}$. Помоћу тог параметра, Јанг је показао изузетно лепа тврђења (теореме Бургин-Јанг типа) од којих ћемо навести следећу.

Теорема 29. *Ако је (X, ν) $\mathbb{Z}_2$-простор који има Јангов индекс једнак n, и ако је $f : X \to \mathbb{R}^m$ непрекидно пресликавање, тада је скуп $\{x \in X \mid f(x) = f(\nu(x))\}$ димензије бар $n - m$.* $\diamondsuit$

Тиме је прича о нумеричким индексима у овом раду завршена, а оно што следи је индекс сасвим другачијег карактера - кохомолошки индекс простора.

5 Кохомолошки Фадел - Хусеинијев индекс

5.1 Дефиниција. Основне особине

У овој глави изложићемо кохомолошку теорију индекса према раду Фадела и Хусеинија, [4]. Кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс се дефинише на прилично општи начин, за све мултипликативне кохомолошке теорије h^* и компактне Лијеве групе G. Ми ћемо се бавити само стандардном кохомологијом. Такође, уколико није другачије наглашено, G ће бити коначна група.

Неопходан појам еквиваријантне топологије је појам класификационог простора BG и универзалног G-раслојења $EG \to BG$. EG је контрактибилан ћелијски G-комплекс на коме група G дејствује слободно. У нашем случају (G коначна) можемо га видети као бесконачни спој: $EG := G * G * G * \cdots$, а дејство групе G као уобичајено дејство на споју. Када посматрамо простор орбита при овом дејству добијамо:

$$BG := EG/G \text{ - } \textit{класификациони простор групе } G.$$

На пример, лако се види да је $E\mathbb{Z}_2 = S^\infty$, а $B\mathbb{Z}_2 = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$.

Показује се да је $G \to EG \to BG$ једно G-раслојење. Штавише, то је универзално G-раслојење, у смислу да за сваки слободан ћелијски G-комплекс X и његово G-раслојење $X \to X/G$, постоји јединствено (до на хомотопију) пресликавање $\alpha_X : X/G \to BG$, такво да је $X \to X/G$ повлачење раслојења $EG \to BG$ помоћу α_X.

Сада можемо прећи на поступну дефиницију кохомолошког индекса.

Нека је $\mathbb{K}$ поље или комутативан прстен, а X произвољан G-простор. Посматрајмо константно пресликавање $c : X \to *$. Множењем са EG, оно индукује другу пројекцију $p : X \times EG \to EG$. Пресликавање p је G-еквиваријантно када посматрамо на домену дијагонално дејство $(g(x,e) := (gx, ge))$. Тада је добро дефинисано пресликавање простора орбита:

$$(EG \times X)/G \to EG/G = BG.$$

Уведимо ознаку $X_G := (EG \times X)/G$. Претходно наведено пресликавање индукује хомоморфизам у кохомологији са коефицијентима у $\mathbb{K}$:

$$p^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \to H^*(X_G; \mathbb{K}).$$

Деф 30. *Кохомолошки Фадел-Хусеинијев индекс* простора X дефинише се као језгро хомоморфизма p^*, тј.

$$\mathrm{Ind}_G(X) := \ker(p^* : H^*(BG; \mathbb{K}) \to H^*(X_G; \mathbb{K})).$$

Наравно да $\mathrm{Ind}_G(X)$ зависи од $\mathbb{K}$, али нећемо компликовати ознаку.

Предност кохомолошког у односу на нумерички индекс је што даје бољу класификацију G-простора. У питању је идеал у прстену $H^*(BG; \mathbb{K})$. Најчешће је то идеал генерисан полиномима. Подсетимо се зато да се производ два идеала I_1 и I_2 дефинише као идеал генерисан свим елементима облика $x \cdot y$, где је $x \in I_1$, $y \in I_2$. Очигледно је да важи да је $I_1 \cdot I_2 \subset I_1 \cap I_2$.

Наведимо још једну познату чињеницу. Пошто је G-дејство на EG слободно, пројекција $p : X \times EG \to EG$ индукује фибрацију

$$X \to X_G \to BG.$$

Уколико је и **дејство групе G на простору X слободно** имамо једноставнију ситуацију. Наиме, посматрајмо пројекцију на X, $\pi : X \times EG \to X$. Пошто је та пројекција G-еквиваријантна, она индукује пресликавање простора орбита, за које се показује да је раслојење са слојем EG (јер је дејство на X слободно):

$$EG \to X_G \xrightarrow{\pi'} X/G.$$

Посматрајући дуги тачан низ хомотопских група и користећи контрактибилност простора EG, закључујемо да је π' слаба хомотопска еквиваленција, па је за довољно лепе просторе (CW-типа) то и хомотопска еквиваленција.

Зато за случај слободног дејства на X у дефиницији индекса уместо X_G можемо писати X/G, тј. $\mathrm{Ind}_G(X) := \ker(p^* : H^*(BG;\mathbb{K}) \to H^*(X/G;\mathbb{K}))$. Такође, можемо говорити о фибрацији $X \to X/G \to BG$.

Наведимо сада основне особине кохомолошког индекса.

1) *(МОНОТОНОСТ) Ако важи $X \xrightarrow{G} Y$, онда имамо:*

$$\mathrm{Ind}_G(X) \supset \mathrm{Ind}_G(Y).$$

Доказ. Претпоставимо да постоји $f : X \xrightarrow{G} Y$. Користићемо само комутативност дијаграма на слици. Најпре посматрамо константна пресликавања и дијаграм очигледно комутира. Помножимо затим сваки од простора са EG и посматрајмо одговарајуће производе пресликавања. Свако од три пресликавања у другом троуглу је G-еквиваријантно и троугао комутира, па комутира и дијаграм пресликавања простора орбита (и добро је дефинисан). Коначно, тада имамо комутативан дијаграм у кохомологији, само са обрнутим стрелицама. Дакле, важи $f^* \circ p_Y^* = p_X^*$, одакле следи да је $\ker p_Y^* \subset \ker p_X^*$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X \arrow[rr, "G"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & Y \arrow[dl] \\ & * & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] X \times EG \arrow[rr, "G"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & Y \times EG \arrow[dl] \\ & EG & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] X_G \arrow[rr] \arrow[dr] & \circlearrowleft & Y_G \arrow[dl] \\ & BG & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] H^*(X_G) & \circlearrowright & H^*(Y_G) \arrow[ll] \\ & H^*(BG) \arrow[ul, "p_X^*"] \arrow[ur, "p_Y^*"'] & \end{tikzcd}$$

□

2) *(АДИТИВНОСТ) Ако G-простори X_1 и X_2 чине исецајући пар, тј. ако су оба отворени потпростори од $X_1 \cup X_2$, или су оба поткомплекси ћелијског комплекса $X_1 \cup X_2$, онда важи:*

$$\mathrm{Ind}_G(X_1) \cdot \mathrm{Ind}_G(X_2) \subset \mathrm{Ind}_G(X_1 \cup X_2).$$

3) *(НЕПРЕКИДНОСТ) Ако је A затворен G-инваријантан потпростор од X, онда за неки отворен G-инваријантан простор U, $U \supset A$, важи:*

$$\mathrm{Ind}_G(\overline{U}) = \mathrm{Ind}_G(A).$$

4) *(Теорема о индексу) Нека је $f : X \to Y$ G-еквиваријантно пресликавање, B затворен G-инваријантан потпростор од Y и $A = f^{-1}(B) \subset X$. Тада важи:*

$$\mathrm{Ind}_G(A) \cdot \mathrm{Ind}_G(Y \backslash B) \subset \mathrm{Ind}_G(X).$$

Докази својстава 2)-4) су технички захтевнији.

5.2 Индекси неких простора

Навешћемо сада неке познате израчунате индексе.

1) $H^*(B\mathbb{Z}_2;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[t]$ је полиномијални прстен са једним генератором димензије 1. $\mathbb{Z}_2$-индекс сфере S^n (са стандардним антиподалним дејством $\mathbb{Z}_2$) је главни идеал генерисан полиномом t^{n+1}, тј.

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}_2}(S^n) = (t^{n+1}) \subset \mathbb{Z}_2[t].$$

2) Нека је p непаран прост број. Познато је да је $H^*(B\mathbb{Z}_p;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p[a,b]/(a^2)$ тј. то је полиномијални прстен са генераторима a и b, димензија 1 и 2, редом, и једном релацијом $a^2 = 0$.

У првој глави смо објаснили да је сфера непарне димензије $\mathbb{Z}_p$-простор. Показује се да је њен $\mathbb{Z}_p$-индекс следећег облика:

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{Z}_p}(S^{2n-1}) = (b^n) \subset \mathbb{Z}_p[a,b]/(a^2).$$

3) Такође, наведимо још и један пример индекса где G није коначна група. (Индекс се аналогно дефинише, али треба бити пажљивији са класификационим простором и неким другим детаљима.)

У првој глави смо видели да имамо дејство кружнице $U(1) = S^1$ (посматрамо је као подгрупу од $\mathbb{C}\backslash\{0\}$) на сваку непарно-димензионалну сферу S^{2n-1}. Познато је да је $H^*(BU(1);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[t]$ где је генератор t димензије 2. Показује се да је одговарајући индекс:

$$\mathrm{Ind}_{U(1)}(S^{2n-1}) = (t^n) \subset \mathbb{Z}[t].$$

Може се показати и нешто општије од наведених тврђења. Наиме, нека је G нека од група из претходних примера и $\mathbb{K}$ одговарајући прстен који смо посматрали. Тада знамо следеће индексе простора E_nG:

- $\diamond$ за $G = \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Ind}_G(E_nG) = (t^{n+1})$;
- $\diamond$ за $G = \mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Ind}_G(E_{2n}G) = (ab^n)$;
- $\diamond$ за $G = \mathbb{Z}_p$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, $\mathrm{Ind}_G(E_{2n-1}G) = (b^n)$;
- $\diamond$ за $G = U(1)$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, $\mathrm{Ind}_G(E_{2n-1}G) = (t^n)$. $\diamondsuit$

5.3 Израчунавање индекса

Сада ћемо видети како се може рачунати индекс производа и споја простора, као и које су последице тога. У овом одељку ћемо претпостављати да је $\mathbb{K}$ поље.

Теорема 31.(индекс производа) *Нека је X_1 G_1-простор, а X_2 G_2-простор. Посматрајмо $X_1 \times X_2$ као $G_1 \times G_2$-простор ($(g_1,g_2)(x_1,x_2) := (g_1x_1, g_2x_2)$). Тада важи:*

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 \times X_2) = \mathrm{Ind}_{G_1}(X_1) \otimes H^*(BG_2) + H^*(BG_1) \otimes \mathrm{Ind}_{G_2}(X_2),$$

где су дати кохомолошки прстенови $H^*(BG_1)$ и $H^*(BG_2)$ посматрани са коефицијентима у датом пољу $\mathbb{K}$.

Доказ. Директно следи из Кинетове формуле када приметимо да за простор $B(G_1 \times G_2)$ можемо узети $BG_1 \times BG_2$. $\square$

Последица 32. *Нека је* X_1 G_1*-простор, а* X_2 G_2*-простор. Нека су дати кохомолошки прстенови:* $H^*(BG_1;\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[x_1,\dots,x_k]$ *и* $H^*(BG_2;\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}[y_1,\dots,y_l]$. *Претпоставимо још да су индекси простора* X_1 *и* X_2 *следећи идеали:* $\mathrm{Ind}_{G_1}(X_1) = (f_1,\dots,f_m)$ *и* $\mathrm{Ind}_{G_2}(X_2) = (g_1,\dots,g_n)$ *(задати преко генератора). Тада је*

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1\times X_2) = (f_1,\dots,f_m,g_1,\dots,g_n),$$

тј. идеал у прстену $\mathbb{K}[x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_l]$ *генерисан свим полиномима* f_i, g_j.

Пример 33. Посматрајмо производ дејство групе $T(k) = \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\cdots\times\mathbb{Z}_2$ (k пута) на производ сфера $S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_k}$. Из претходног тврђења и првог примера из претходног поглавља имамо да је:

$$\mathrm{Ind}_{T(k)}(S^{n_1}\times\cdots\times S^{n_k}) = (t_1^{n_1+1},\dots,t_k^{n_k+1}) \subset \mathbb{Z}_2[t_1,\dots,t_k].$$

Још једну последицу добијамо када у теореми 31 за један од простора (нпр. X_2) узмемо тачку.

Последица 34. *Нека је* X_1 G_1*-простор, а за простор* X_2 *узмимо тачку посматрану као* G_2*-простор. Тада важи:*

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1) = \mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)\otimes H^*(BG_2),$$

где $G_1\times G_2$ *дејствује на* X_1 *као:* $(g_1,g_2)(x) = g_1x$.

Пређимо сада на тврђења везана за индекс споја простора. За разлику од производа, сада немамо тачну једнакост идеала, већ само знамо неке односе.

Теорема 35.(индекс споја) *Нека је* X_1 G_1*-простор, а* X_2 G_2*-простор. Посматрајмо дејство групе* $G_1\times G_2$ *на споју* $X_1 * X_2$ *дефинисано на уобичајен начин:* $(g_1,g_2)(x_1,t,x_2) = (g_1x_1,t,g_2x_2)$. *Тада важе следеће релације:*

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2) \subset [\mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)\otimes H^*(BG_2)] \cap [H^*(BG_1)\otimes \mathrm{Ind}_{G_2}(X_2)]; \tag{1}$$

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2) \supset [\mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)\otimes H^*(BG_2)] \cdot [H^*(BG_1)\otimes \mathrm{Ind}_{G_2}(X_2)]. \tag{2}$$

Доказ. Простор X_1 можемо видети као $(G_1\times G_2)$-потпростор споја $X_1 * X_2$, одакле на основу монотоности индекса важи:

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1) \supset \mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2).$$

Затим на основу претходне последице знамо да важи $\mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)\otimes H^*(BG_2) \supset \mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2)$. На сличан начин и X_2 можемо видети као $(G_1\times G_2)$-потпростор споја $X_1 * X_2$ и добити аналогну везу. Очигледно, тиме је тврђење (1) доказано.

Да бисмо доказали (2), представимо спој $X_1 * X_2$ као следећу унију:

$$X_1 * X_2 = Y_1 \cup Y_2, \text{ где је}$$

$$Y_1 = \{[x_1,t,x_2] \in X_1 * X_2 \mid t \in [0,\tfrac{2}{3})\},$$

$$\text{а } Y_2 = \{[x_1,t,x_2] \in X_1 * X_2 \mid t \in (\tfrac{1}{3},1]\}.$$

Тада Y_1 и Y_2 чине исецајући пар, а истовремено су $(G_1\times G_2)$-потпростори. Њихова унија је читав спој, па кад применимо адитивност добијамо:

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2) \supset \mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(Y_1)\cdot \mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(Y_2).$$

Очигледно је да је сваки од потпростора Y_i хомотопски еквивалентан простору X_i, $i=1,2$. Тиме у претходној формули Y_i можемо заменити са X_i, $i=1,2$. Коначно, применом последице 34 добијамо тврђење теореме. □

Уведимо на кратко следеће ознаке ради једноставнијег записа. Нека је $p_1 := \mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)$, $p_2 := \mathrm{Ind}_{G_2}(X_2)$, $\Lambda_1 := H^*(BG_1)$ и $\Lambda_2 := H^*(BG_2)$. Ако идентификујемо p_1 са $p_1\otimes 1$ и p_2 са $1\otimes p_2$, онда имамо $p_1\cdot p_2 = (p_1\otimes\Lambda_2)\cdot(\Lambda_1\otimes p_2)$. Тада формулу добијену преходном теоремом можемо записати на следећи начин:

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2) \supset \mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)\cdot \mathrm{Ind}_{G_2}(X_2).$$

Последица 36. *Уколико је* $p_1\cdot p_2 = (p_1\otimes\Lambda_2)\cap(\Lambda_1\otimes p_2)$, *онда важи:*

$$\mathrm{Ind}_{G_1\times G_2}(X_1 * X_2) = \mathrm{Ind}_{G_1}(X_1)\cdot \mathrm{Ind}_{G_2}(X_2).$$

□

Посматрајмо сада дејство исте групе G на два G-простора X_1 и X_2. Нека G дејствује на $X_1\times X_2$ и $X_1 * X_2$ дијагонално, тј. $g(x_1,x_2)=(gx_1,gx_2)$ на производу и $g(x_1,t,x_2)=(gx_1,t,gx_2)$ на спoју. Потпуно аналогно ставовима за две различите групе доказују се следећа два става:

Став 37. $\mathrm{Ind}_G(X_1\times X_2)\supset \mathrm{Ind}_G(X_1)\cap \mathrm{Ind}_G(X_2)$.

Доказ. Свака од пројекција $\pi_i : X_1\times X_2 \to X_i$, $i=1,2$, је G-еквиваријантно пресликавање. На основу монотоности важи $\mathrm{Ind}_G(X_1\times X_2)\supset \mathrm{Ind}_G(X_i)$ за $i=1,2$, чиме је доказ завршен. □

Став 38. $\mathrm{Ind}_G(X_1 * X_2)\supset \mathrm{Ind}_G(X_1)\cdot \mathrm{Ind}_G(X_2)$. □

5.4 Кохомолошка верзија Долдове теореме

Докажимо сада теорему која је општија од Долдове теореме у случају када имамо групу G са довољно лепим простором BG. Наиме, не тражимо тривијалност хомотопских група домена, већ само тривијалност кохомолошких група са коефицијентима у G. Кажемо да је путно повезан G-простор X *G-n-повезан* ако су кохомолошке групе $H^k(X;G)$ тривијалне за $1 \leq k \leq n$. За разлику од већег дела овог рада који није тражио много компликован технички апарат, доказ ове теореме захтева коришћење Серовог спектралног низа фибрације. Зато подразумевамо познавање неколико теорема из [19]. Такође, имаћемо коефицијенте у групи G па наглашавамо да G мора бити и прстен.

Теорема 39. *Нека је G коначан прстен, а X и Y путно повезани ћелијски G-комплекси такви да група G слободно дејствује на Y. Такође, нека постоји природан број n такав да је X G-n-повезан простор, а $\dim Y \leq n$. Нека је још кохомолошка група $H^{n+1}(BG;G)$ нетривијална.*

Тада не постоји G-еквиваријантно пресликавање из X у Y.

Доказ. Претпоставимо супротно, да су испуњени услови теореме за просторе X и Y и да важи $X \xrightarrow{G} Y$. Посматрајмо Фадел-Хусеинијеве индексе $\mathrm{Ind}_G(X)$ и $\mathrm{Ind}_G(Y)$. Знамо да је $\mathrm{Ind}_G(X) \supset \mathrm{Ind}_G(Y)$ на основу монотоности индекса. Идеја доказа је следећа - показаћемо да је

$$H^{n+1}(BG;G) \subseteq \mathrm{Ind}_G(Y) \qquad (1)$$

$$\text{и да } H^{n+1}(BG;G) \nsubseteq \mathrm{Ind}_G(X), \qquad (2)$$

одакле ћемо добити контрадикцију.

Пошто је дејство групе G на Y слободно, знамо да је $\mathrm{Ind}_G(Y) = \ker p_Y^*$, $p_Y^* : H^*(BG;G) \to H^*(Y/G;G)$. Како је $\dim Y \leq n$, а дејство групе G слободно, све кохомолошке групе простора Y/G у димензијама већим од n су тривијалне. Дакле, у тим димензијама, језгро хомоморфизма p_Y^* је цела одговарајућа кохомолошка група простора BG. Одатле важи:

$$H^k(BG;G) \subset \mathrm{Ind}_G(Y), \text{ за свако } k \geq n+1,$$

чиме смо доказали (1).

Доказ тврђења (2) је доста захтевнији. Знамо да је $\mathrm{Ind}_G(X) = \ker p_X^*$, где $p_X^* : H^*(BG;G) \to H^*(X_G;G)$. Занима нас шта се у том индексу налази у димензији $n+1$, тј. $\mathrm{Ind}_G^{n+1}(X) = \ker(p_X^* : H^{n+1}(BG;G) \to H^{n+1}(X_G;G))$. Посматрајмо кохомолошки Серов спектрални низ фибрације $X \to X_G \to BG$. Позната теорема (T 5.2. у [19]) каже да постоји спектрални низ $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ који конвергира ка $H^*(X_G;G)$, са својством:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(BG;\mathcal{H}^q(X;G)),$$

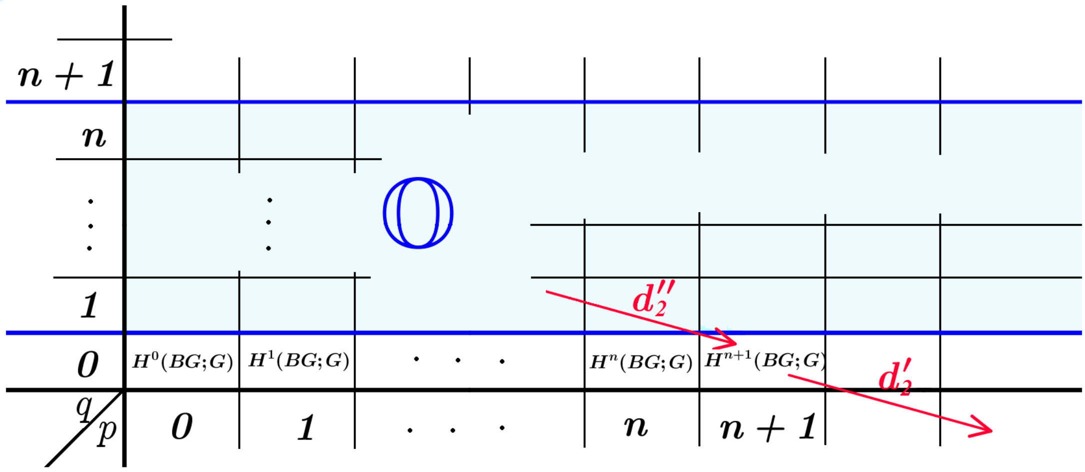
где су $\mathcal{H}^q(X;G)$ локални коефицијенти.

Одредимо шта се налази у нултој врсти у E_2. Пошто је X путно повезан, познато је да важи $H^p(BG;\mathcal{H}^0(X;G)) = H^p(BG;H^0(X;G))$. Такође, знамо да је $H^0(X;G) \cong G$, па су елементи нулте врсте:

$$E_2^{p,0} = H^p(BG; G).$$

Покажимо да је изнад тога n тривијалних врста. Заиста, за $1 \leq q \leq n$ $H^q(X; G)$ је тривијална група, па је дејство $\pi_1(BG) \to \mathrm{Aut}(H^q(X; G))$ тривијално, због чега се локални коефицијенти претварају у обичне. Дакле, имамо:

$$E_2^{p,q} = H^p(BG; H^q(X; G)) = H^p(BG; \mathbb{O}) = \mathbb{O}, \text{ за } 1 \leq q \leq n.$$



Сада можемо да одредимо $\mathrm{Ind}_G^{n+1}(X)$. Заправо, покажимо да је $\mathrm{Ind}_G^{n+1}(X)$ тривијална група, тј. да је p_X^* мономорфизам у димензији $n+1$. Још једна позната теорема (Т.5.9. из [19]) каже да је то p_X^* једнако следећој композицији:

$$H^{n+1}(BG; G) = E_2^{n+1,0} \twoheadrightarrow E_3^{n+1,0} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_{n+1}^{n+1,0} \twoheadrightarrow E_{n+2}^{n+1,0} = E_\infty^{n+1,0} \subset H^{n+1}(X_G; G).$$

Последња инклузија је наравно 1-1, па остаје још да докажемо да је сваки од претходних епиморфизама и мономорфизам.

Знамо да је

$$E_3^{n+1,0} = H(E_2^{n+1,0}) = \ker d_2' / \operatorname{im} d_2'',$$

где су d_2' и d_2'' приказани на слици. Међутим, $\ker d_2' \cong E_2^{n+1,0}$, јер све иде у нулу, а $\operatorname{im} d_2'' \cong \mathbb{O}$ јер је домен од d_2'' баш $\mathbb{O}$. Дакле, први епиморфизам ће бити мономорфизам.

Такође, на сваки од епиморфизама $E_k^{n+1,0} \twoheadrightarrow E_{k+1}^{n+1,0}$ можемо да применимо исто расуђивање, јер када се у спектралном низу једном појави нула, и у свим следећим члановима ће на том месту бити нула, па ћемо на свим наредним "странама" спектралног низа имати исте тривијалне врсте.

Тиме смо закључили да је p_X^* заиста мономорфизам у димензији $n+1$, па је $\mathrm{Ind}_G^{n+1}(X) = \mathbb{O}$. С обзиром на нетривијалност групе $H^{n+1}(BG; G)$, одатле следи тврђење (2).

Коначно, на основу (1), (2) и монотоности индекса добијамо контрадикцију, чиме је теорема доказана. $\square$

Међутим, примена кохомолошког индекса захтева изузетно познавање кохомологије, па ћемо се у овом раду ограничити само на примену у разматрању једног великог проблема који је решен само у малобројним случајевима. То је Кнастеров проблем коме је посвећено следеће поглавље.

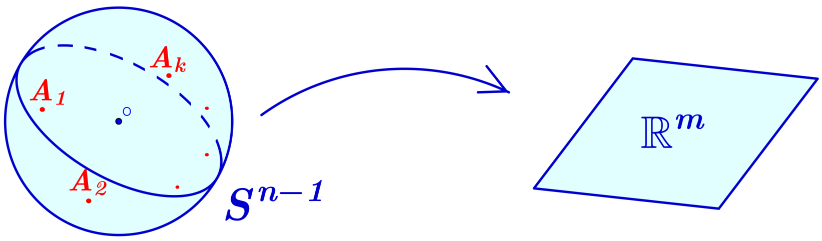
6 Кнастеров проблем

6.1 Формулација. Позната решења

Кнастеров проблем је толико општи, да у себи садржи многе лепе комбинаторне тополошке проблеме. Takoђe, његова решења имају сасвим неочекиване интересантне примене. Почнимо на помало нестандардан начин - дефиницијом решења Кнастеровог проблема.

Деф 40. Нека су n, k и m фиксирани природни бројеви, $n > 1$ и нека је $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ скуп тачака на сфери $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Кажемо да је скуп $\mathcal{A}$ *решење Кнастеровог проблема* за дате бројеве n, k и m, редом, ако за сваку непрекидну функцију $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи:

$$f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \ldots = f(\rho(A_k)).$$

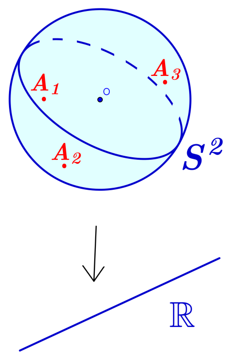


Дакле, проблем би био одредити сва решења за разне n, k и m. Ради једноставности, у овој глави ће n увек бити димензија простора у коме посматрамо сферу, k број тачака на њој, а m димензија долазног простора. Првобитно, Кнастер (у [13]) је проблем формулисао само за $k = n - m + 1$, што се испоставља да је један од најинтригантнијих случајева.

Већ за $n = 3$ и $m = 1$ проблем није ни приближно решен. А тек за остале димензије знају се само појединачни случајеви.

Позната решења Кнастеровог проблема:

- ([12]) $n = 3$, $k = 3$, $m = 1$:
A_1, A_2, A_3 врхови ортонормираног репера на сфери S^2;
- ([5]) $n = 3$, $k = 3$, $m = 1$:
A_1, A_2, A_3 темена једнакостраничног троугла на сфери S^2;
- ([11]) $n = 3$, $k = 3$, $m = 1$:
A_1, A_2, A_3 темена једнакокраког троугла на сфери S^2;
- ([6]) $n = 3$, $k = 3$, $m = 1$:
$\mathbf{A_1, A_2, A_3}$ **произвољне различите тачке на сфери** S^2 **чине решење Кнастеровог проблема**.



- ([21]) $n = k$, $m = 1$:
$A_1, A_2, \ldots, A_n$ врхови ортонормираног репера сфере S^{n-1}.

Овај резултат ће нам бити изузетно значајан за проблем описивања куба око произвољног тела.

Поред наведених, интересантни су и случајеви централно симетричних система тачака на сфери, тј. крајева коначно много дијаметара сфере.

- ([3]) $n = 3,\ k = 4,\ m = 1$:

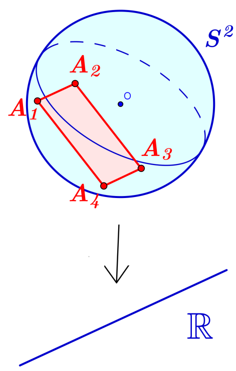
A_1, A_2, A_3, A_4 - крајеви два ортогонална дијаметра S^2;

- ([14]) $n = 3,\ k = 4,\ m = 1$:

A_1, A_2, A_3, A_4 - крајеви два произвољна дијаметра S^2;

- ([7]) $n = 3,\ k = 4,\ m = 1$:

A_1, A_2, A_3, A_4 **- темена произвољног раванског правоугаоника уписаног у сферу S^2, чине решење Кнастеровог проблема.**



Дакле, за $n = 3$ (сфера S^2) и $m = 1$ (кодомен је права), сваке три тачке чине решење Кнастеровог проблема и сваке четири тачке које су темена раванског правоугаоника такође чине решење Кнастеровог проблема.

Показано је да никојих пет тачака сфере у овом случају нису решење Кнастеровог проблема, као и да никоје четири некомпланарне тачке сфере S^2 нису решење Кнастеровог проблема (доказ ове чињенице је специјалан случај ниже наведеног општијег става 41). Остаје још *отворено питање* да ли произвољне четири компланарне тачке на сфери S^2 чине решење Кнастеровог проблема. Показани су једино специјални случајеви.

Наведимо још неколико познатих Кнастерових решења.

- ([2], [22]) $n \in \mathbb{N},\ k = 2(n-1),\ m = 1$: $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-3}, A_{2n-2}$ - крајеви $n-1$ по паровима ортогоналних дијаметра сфере S^{n-1}.
- ([1]) $n \in \mathbb{N},\ k = n,\ m = 1$: $A_1, A_2, \ldots, A_n$ темена правилног $(n-1)$-димензионог симплекса уписаног у сферу S^{n-1}.

Приметимо да су до сада наведени примери имали за кодомен реалну праву. Резултати код којих то није случај су ређи. Наведимо неке од њих.

- ([23]) $n = 2m+1,\ k = 4,\ m \in \mathbb{N}$:

A_1, A_2, A_3, A_4 - крајеви два произвољна дијаметра сфере S^{2m};

- ([10]) $k = 2,\ n = m+1 \in \mathbb{N}$:

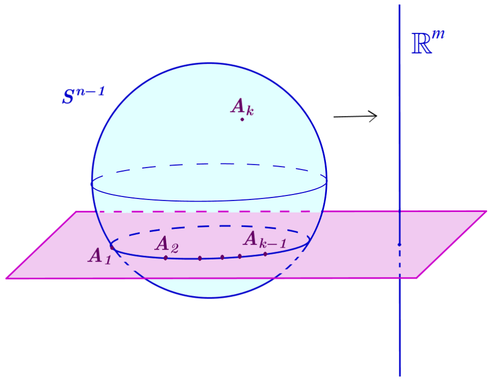
A_1, A_2 - произвољне тачке сфере S^m.

Као последицу последњег примера имамо Борсук-Уламову теорему. Наиме, нека је $f : S^m \to \mathbb{R}^m$ непрекидна функција. Уочимо две антиподалне тачке $A, -A \in S^m$. Тада постоји $\rho \in SO(m)$ тако да $f(\rho(A)) = f(\rho(-A))$. Тачке $\rho(A)$ и $\rho(-A)$ су антиподалне тачке које имају исту слику, чиме је Борсук-Уламова теорема доказана.

У овом раду ћемо се бавити скуповима тачака који са наше тачке гледишта имају лепу структуру, тј. инваријантну при дејству неке групе. Применом техника које смо описивали доказаћемо да су одређене конфигурације решења Кнастеровог проблема. Пре тога, укажимо на једну конфигурацију која никада није решење Кнастеровог проблема.

Став 41. *Нека су дати природни бројеви n и m, $n \geq m$ и нека је $k = n - m + 2$. Тада не постоји k линеарно независних тачака $A_1, A_2, \ldots, A_k \in S^{n-1}$ које чине решење Кнастеровог проблема за бројеве n, k и m.*

Доказ. Претпоставимо супротно. Нека су на сфери S^{n-1} дате линеарно независне тачке $A_1, \ldots, A_k$ које чине решење Кнастеровог проблема за бројеве n, k и m, где је $k = n - m + 2$. Тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ због линеарне независности једнозначно одређују $(n-m)$-димензионалну раван Π у простору $\mathbb{R}^n$. Истакнимо да $A_k \notin \Pi$. Ортогонални комплемент ове равни је m-димензионални потпростор $\Pi^\perp \cong \mathbb{R}^m$.



Нека је $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ ортогонална пројекција на потпростор Π (идентификован са $\mathbb{R}^m$). Тада је $f(A_1) = \ldots = f(A_{k-1}) = 0$, док $f(A_k) \neq 0$. Према претпоставци, постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \ldots = f(\rho(A_k))$. То значи да тачке $\rho(A_1), \rho(A_2), \ldots, \rho(A_k)$ припадају некој $(n-m)$-димензионалној равни ортогоналној на Π. Међутим, знамо да $\rho \in SO(n)$ чува линеарну независност, па $\rho(A_1), ..., \rho(A_k)$ разапињу потпростор димензије $k - 1 = n - m + 1$. Тиме добијамо контрадикцију па је доказ става завршен. $\square$

Због тога су за испитивање посебно интересантни случајеви када су n и m дати природни бројеви, а посматрамо $k = n - m + 1$ линеарно независних тачака сфере S^{n-1}. Такође, такви скупови су изузетно интересантни и без услова линеарне независности.

6.2 Примена Долдове теореме на решавање Кнастеровог проблема

Најпре ћемо у неколико резултата применити Долдову теорему у облику који смо показали код нумеричког индекса. Ови резултати базирани су на радовима Макеева ([15], [16] и [17]). Затим ћемо на два примера видети да нас та верзија Долдове теореме не може довести до циља, па ћемо користити другу, засновану на кохомолошком индексу (теорема 39). Сви докази ће имати заједничку идеју - тест пресликавања из неке Штифелове многострукости $V_{k,n}$ у сферу неке димензије. Зато ћемо у првој теореми дати детаљно објашњење, које ћемо подразумевати и у осталим. Због различитих ознака које се појављују у литератури, нагласимо да под $V_{k,n}$ подразумевамо ортонормиране k-торке вектора у n-димензионалном простору.

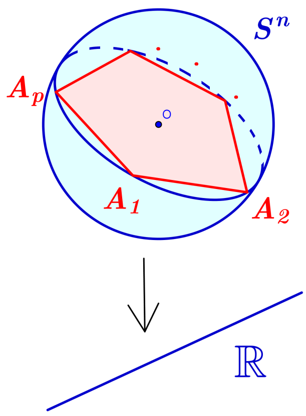
Теорема 42. *Нека је p прост број, $n \in \mathbb{N}$ и $p < n$. Нека тачке $A_1, A_2, \ldots, A_p$ леже на великој кружници сфере S^{n-1} и образују правилан p-тоугао. Тада за сваку непрекидну функцију $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \ldots = f(\rho(A_p))$. Другим речима, ова p-торка тачака чини решење Кнастеровог проблема за дате n, p и за $m = 1$.*

Доказ. Прва идеја је да простор свих могућих избора тачака $A_1, A_2, \ldots, A_p$ које су темена правилног p-тоугла на великој кружници, идентификујемо са Штифеловом многострукошћу $V_{2,n}$. Заиста, свака таква p-торка тачака једнозначно је одређена првом тачком A_1 и другом тачком A_2. Очигледно, постоји једнозначна коресподенција између парова вектора на сфери међу којима је угао једнак $\frac{2\pi}{p}$, и парова ортогоналних вектора сфере.

Када смо одредили конфигурациони простор, настављамо на начин са којим смо се упознали у поглављу 1.2. и трећој глави. Претпоставимо супротно, да постоји функција $f \in \mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$ која не задовољава тврђење теореме.

Дефинишимо пресликавање $F : V_{2,n} \to \mathbb{R}^p$ са

$$F(A_1, A_2, \ldots, A_p) = (f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_p)).$$



Према претпоставци, $F(V_{2,n})$ не сече дијагоналу Δ у простору $\mathbb{R}^p$. Заиста, у супротном би постојао правилни p-тоугао чија сва темена имају исту слику, а онда би постојала ротација која би дати p-тоугао пресликала у тај. Зато можемо посматрати пресликавање F са кодоменом $\mathbb{R}^p \backslash \Delta$ (не мењајући ознаку ради једноставности).

Група $\mathbb{Z}_p$ слободно дејствује на $V_{2,n}$ цикличним померањем парова (пар (A_1, A_2) прелази у пар (A_2, A_3) итд). Такође, $\mathbb{Z}_p$ стандардно дејствује на $\mathbb{R}^p \backslash \Delta$ цикличним померањем координата и то дејство је слободно. Очигледно је да је пресликавање F $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантно у односу на ова дејства.

Као у теореми 16, следећи корак је да еквиваријантно пресликамо кодомен у сферу одговарајуће димензије. Наиме, уочимо ретракцију $q : \mathbb{R}^p \backslash \Delta \to S^{p-2}$ дефинисану као композицију пројекције на потпростор $\Delta^{\perp} \backslash \{0\}$ и радијалне пројекције тог потпростора на сферу S^{p-2}. Ретракција q је $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантна, па смо добили $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантно пресликавање:

$$q \circ F : V_{2,n} \xrightarrow{\mathbb{Z}_p} S^{p-2},$$

при чему и на домену и на кодомену имамо слободно дејство групе $\mathbb{Z}_p$.

Знамо да је Штифелова многострукост $V_{k,n}$ $(n-k-1)$-повезан простор, па је $V_{2,n}$ $(n-3)$-повезан, док је димензија кодомена $p-2 < n-2$. На основу Долдове теореме (теорема 14) добијамо контрадикцију. $\square$

Теорема 43. *Нека је p прост број. Тачке $A_1, A_2, \ldots, A_p$ леже на сфери S^{n-1} и представљају врхове међусобно ортогоналних вектора, дакле образују правилан $(p-1)$-симплекс. Ако је $2p < n+1$, тада за свако $f \in \mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да $f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \ldots = f(\rho(A_p))$. Другим речима, темена оваквог правилног $(p-1)$-симплекса чине решење Кнастеровог проблема за n, p и за $m = 1$.*

Доказ. Конфигурациони простор датих избора тачака $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ сада можемо идентификовати са $V_{p,n}$. Претпоставимо супротно, да постоји функција $f \in \mathcal{C}(S^{n-1}, \mathbb{R})$ која не задовољава услов теореме.

Дефинишимо тест пресликавање слично као и у претходној теореми:

$$F : V_{p,n} \to \mathbb{R}^p \text{ са}$$

$$F(A_1, A_2, \ldots, A_p) = (f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_p)).$$

Према претпоставци, као и у претходној теореми закључујемо да $F(V_{p,n})$ не сече дијагоналу Δ у простору $\mathbb{R}^p$, па можемо посматрати пресликавање F са кодоменом $\mathbb{R}^p \backslash \Delta$, не мењајући ознаку. Уочимо $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантну ретракцију $q : \mathbb{R}^p \backslash \Delta \to S^{p-2}$ о којој смо већ говорили.

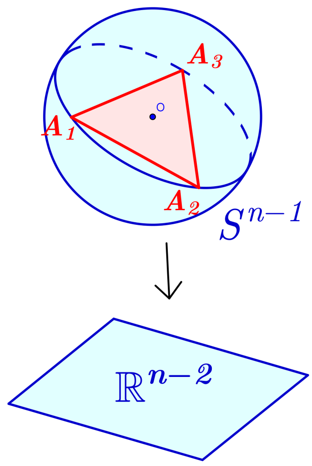
Група $\mathbb{Z}_p$ слободно дејствује на $V_{p,n}$ цикличним померањем тачака и на $S^{p-2} \subset \mathbb{R}^p$ цикличним померањем координата, такође слободно. Према конструкцији непрекидно пресликавање $q \circ F : V_{p,n} \to S^{p-2}$ је $\mathbb{Z}_p$-еквиваријантно.

Применимо сада Долдову теорему (теорема 14). $V_{p,n}$ је $(n-p-1)$-повезан простор, а из услова теореме знамо да је $n-p-1 > p-2 = \dim S^{p-2}$, одакле добијамо контрадикцију. Тиме је тврђење доказано. □

Оно што следи је доказ случаја $m = n-2$, $k = 3$, тј. посматрамо сферу димензије за 1 веће од димензије простора, а на сфери три тачке које на великој кружници чине темена једнакостраничног троугла. То је један од оних случајева који задовољавају везу $k = n - m + 1$, како је Кнастер првобитно испитивао.

Теорема 44. *Нека је $n \in \mathbb{N}$, $k = 3$ и $m = n-2$. Нека су тачке $A_1, A_2, A_3 \in S^{n-1}$ темена једнакостраничног троугла на неком великом кругу сфере S^{n-1}. Тада A_1, A_2 и A_3 чине решење Кнастеровог проблема за n, 3 и m.*

Доказ. Очигледно, за конфигурациони простор који посматрамо, тј. простор свих тројки тачака које одређују темена једнакостраничног троугла на великој кружници, можемо узети Штифелову многострукост $V_{2,n}$ (трећа тачка је једнозначно одређена првим двема).



Претпоставимо супротно, да постоји непрекидна функција $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-2}$, и неки избор темена A_1, A_2, A_3 једнакостраничног троугла на великој кружници, тако да ни за једну ротацију ρ није испуњен услов. Како се сваки скуп темена једнакостраничног троугла на великој кружници може добити неком ротацијом скупа $\{A_1, A_2, A_3\}$, значи да ниједан такав једнакостранични троугао нема својство да му сва темена имају исту слику при f.

Дефинишимо пресликавање:

$$F : V_{2,n} \to \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2},$$

$$F(X_1, X_2, X_3) := (f(X_1), f(X_2), f(X_3))$$

Према претпоставци, знамо да $F(V_{2,n})$ не сече дијагоналу Δ у простору $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^{n-2}$ (подразумевамо дијагоналу троструког производа, тј. она је димензије $n-2$). Зато посматрајмо исто пресликавање са мањим кодоменом, тј. $F : V_{2,n} \to (\mathbb{R}^{n-2})^3 \backslash \Delta$. Затим, нека је p пројекција на ортогонални комплемент дијагонале, $p : (\mathbb{R}^{n-2})^3 \backslash \Delta \to \Delta^\perp \backslash \{0\}$, а $r : \Delta^\perp \backslash \{0\} \to S^{2n-5}$ радијална пројекција $(\dim \Delta^\perp \backslash \{0\} = \dim((\mathbb{R}^{n-2})^3) - \dim(\Delta) = 3(n-2) - (n-2) = 2n-4)$.

Посматрајмо дејство групе $\mathbb{Z}_3$ на сваком од простора низа

$$V_{2,n} \xrightarrow{F} (\mathbb{R}^{n-2})^3 \backslash \Delta \xrightarrow{p} \Delta^\perp \backslash \{0\} \xrightarrow{r} S^{2n-5}.$$

Дејство на $V_{2,n}$ дефинишемо са $g(X_1, X_2, X_3) := (X_2, X_3, X_1)$, тј. као циклично померање улево. На простору $(\mathbb{R}^{n-2})^3 \backslash \Delta$ дејство групе $\mathbb{Z}_3$ циклично помера сваки од $(n-2)$-димензионалних простора, и онда природно имамо дејства све до краја претходног низа. Сва ова дејства су слободна. Такође, према начину на који су дефинисана, сва три пресликавања F, p и r су $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантна, чиме смо добили еквиваријантно пресликавање:

$$F \circ p \circ r : V_{2,n} \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} S^{2n-5}.$$

Остаје да покажемо да такво пресликавање не постоји. Али сада на домену имамо $(n-3)$-повезаност, док је кодомен сфера веће димензије, па не можемо поступити као у претходним примерима. Зато ћемо применити кохомолошку верзију Долдове теореме.

Потребне су нам кохомолошке групе Штифелове многострукости. Познато је да за непаран број $n \geq 3$ важи:

$$H^k(V_{2,n}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, 2n-3 \\ \mathbb{Z}_2, & k = n-1 \\ \mathbb{O}, & k \notin \{0, 2n-3, n-1\} \end{cases}$$

а за парно n имамо:

$$H^k(V_{2,n}; \mathbb{Z}) \cong H^k(S^{n-1} \times S^{n-2}).$$

Пошто су за парно n кохомолошке групе значајно сложеније, идеја је да тврђење докажемо за непарно n, а онда да случај парног n сведемо на $n+1$.

Дакле, нека је n непаран. Пређимо на кохомологију са $\mathbb{Z}_3$ коефицијентима. Важиће:

$$H^k(V_{2,n}; \mathbb{Z}_3) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_3, & k = 0, 2n-3 \\ \mathbb{O}, & k \notin \{0, 2n-3\}. \end{cases}$$

Приметимо да су сада испуњени услови кохомолошке Долдове теореме (теорема 39). Наиме, имамо $\mathbb{Z}_3$-$(2n-4)$-повезаност домена, а кодомен је мање димензије. Познат резултат ([20], Последица 5.3.) нам даје нетривијалност кохомолошке групе $H^k(B\mathbb{Z}_3; \mathbb{Z}_3)$, за свако $k > 0$. Тада на основу теореме 39 добијамо контрадикцију, чиме је доказ завршен у случају непарног n.

Нека је сада n паран природан број. Претпоставимо супротно, тј. да за неко парно n постоји непрекидна функција $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-2}$ која индукује еквиваријантно пресликавање $F : V_{2,n} \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} (\mathbb{R}^{n-2})^3 \backslash \Delta$. Нека $g : S^n \to \mathbb{R}^{n-1}$, $g := Sf$ -суспензија пресликавања f. Претпоставимо да постоје три тачке које су темена једнакостраничног троугла велике кружнице на S^n и које имају исту слику при g. С обзиром на дефиницију суспензије пресликавања (по „нивоима"), такве три тачке морају бити на истом „нивоу", па добијамо темена једнакостраничног троугла на великој кружници сфере S^{n-1} које имају исту слику при f, што је контрадикција. Дакле, не постоје такве три тачке на сфери S^n. Тада функција g (на исти начин као f) индукује пресликавање:

$$G : V_{2,n+1} \xrightarrow{\mathbb{Z}_3} (\mathbb{R}^{n-1})^3 \backslash \Delta.$$

На основу доказаног тврђења за непарне димензије добијамо контрадикцију и у овом случају. Тиме је доказ теореме у потпуности завршен. □

Интересантно је да је за исте бројеве n, $m = n-2$ и $k = 3$ показано да врхови вектора $e_1, e_2, -e_1 \in S^{n-1}$, где су e_1 и e_2 међусобно ортогонални, не чине решење Кнастеровог проблема.

Потпуно аналогно претходној теореми, доказује се следећа.

Теорема 45. *Нека је p непаран прост број, n непаран природан број и $m \in \mathbb{N}$ такви да важи $(p-1)\cdot m < 2n-2$. Нека тачке $A_1, A_2, ..., A_p$ леже на великој кружници сфере S^{n-1} и образују правилан p-тоугао. Тада за сваку непрекидну функцију $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ постоји ротација $\rho \in SO(n)$ таква да важи*

$$f(\rho(A_1)) = f(\rho(A_2)) = \ldots = f(\rho(A_p)).$$

Докажимо још Какутанијев случај Кнастеровог проблема који нам је потребан за следећу главу. Најпре приметимо да смо већ доказали следећу лему.

Лема 46. *Нека циклична група $\mathbb{Z}_3$ слободно дејствује на простору $SO(3)$ и кружници S^1. Тада не постоји $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно пресликавање $f : SO(3) \to S^1$.*

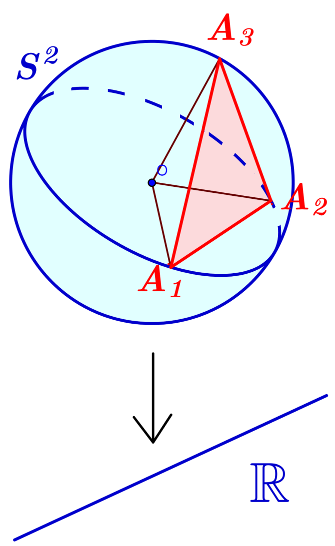
Доказ. Довољно је приметити да је $SO(3) \approx V_{2,3}$. У доказу теореме 44 видели смо да не постоји $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно пресликавање $V_{2,n} \to S^{2n-5}$. За случај $n = 3$ добијамо управо тврђење ове леме. $\square$

Последица 47.(Какутанијева теорема) *Врхови сваког ортонормираног репера на сфери S^2 чине решење Кнастеровог проблема за $n = 3$, $k = 3$ и $m = 1$.*

Доказ. Претпоставимо супротно и нека је $(\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3})$ неки ортонормирани репер који не задовољава ово тврђење. Према претпоставци, постоји непрекидна функција $f : S^2 \to \mathbb{R}$ таква да за свако $\rho \in SO(3)$, нису једнаке све три вредности $f(\rho(\widetilde{e_1})), f(\rho(\widetilde{e_2}))$ и $f(\rho(\widetilde{e_3}))$. Пошто је $SO(3) \approx V_{2,3}$, сваки елемент из $SO(3)$ можемо видети као ортонормиран репер (e_1, e_2, e_3). Посматрајмо пресликавање $F : SO(3) \to \mathbb{R}^3$ дефинисано са

$$F(e_1, e_2, e_3) = (f(e_1), f(e_2), f(e_3)).$$

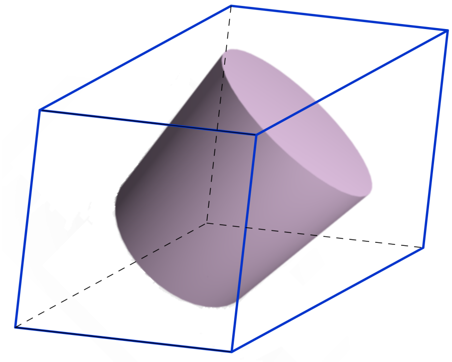
Према претпоставци, ово пресликавање не погађа дијагоналу Δ (јер се вектори сваког ортонормираног репера могу добити од $\widetilde{e_1}$, $\widetilde{e_2}$ и $\widetilde{e_3}$ у неком редоследу, применом неке ротације). Зато ћемо смањити кодомен, тј. узети $F : SO(3) \to \mathbb{R}^3 \backslash \Delta$ (иста ознака ради једноставности). Посматрајмо дејство групе $\mathbb{Z}_3$ на домену и кодомену дато цикличним пермутовањем вектора односно координата. Оба дејства су слободна и још је пресликавање F $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно.



Сада остаје стандардан корак да $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно ретрахујемо $\mathbb{R}^3 \backslash \Delta$ на кружницу S^1. Означимо ту ретракцију са r. Тада је пресликавање $r \circ F : SO(3) \to S^1$ $\mathbb{Z}_3$-еквиваријантно што је контрадикција са претходном лемом. Тиме је последица доказана. $\square$

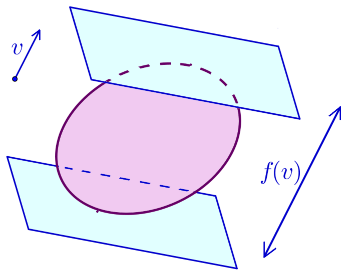
7 Проблем описивања коцке око конвексног тела

Илуструјмо на неколико лепих примера примене Кнастеровог проблема. Користићемо појам *конвексног тела* у Еуклидском простору, под којим подразумевамо компактан конвексан скуп са непразном унутрашњошћу. Може се поставити природно питање - да ли се око сваког конвексног тела у простору $\mathbb{R}^3$ може описати коцка? Одговор је потврдан.



Теорема 48. *Око сваког конвексног тела у $\mathbb{R}^3$ може да се опише коцка.*

Доказ. Нека је K конвексно тело у простору $\mathbb{R}^3$. Уочимо сферу S^2 и произвољан ортонормиран репер (e_1, e_2, e_3). Придружимо телу K једну посебну функцију $f : S^2 \to \mathbb{R}$ која се назива *функција ширине тела.* Наиме, за произвољан вектор $v \in S^2$, $f(v)$ се дефинише као ширина тела у правцу вектора v, тј. као растојање између равни ослонца нормалних на вектор v. Пошто је K конвексно тело, ова функција је непрекидна. На основу последице 47, e_1, e_2 и e_3 чине решење Кнастеровог проблема, па постоји ротација $\rho \in SO(3)$, тако да је $f(\rho(e_1)) = f(\rho(e_2)) = f(\rho(e_3))$. Нека је $\widetilde{e_i} = \rho(e_i)$, $i = 1, 2, 3$. Тада је $\{\widetilde{e_1}, \widetilde{e_2}, \widetilde{e_3}\}$ нови ортонормирани репер чији су вектори паралелни правцима дуж којих тело има исту ширину. Дакле, дуж тих праваца можемо поставити ивице коцке описане око датог тела. $\square$



Може се показати и општи случај претходне теореме.

Теорема 49. *Око сваког конвексног тела у $\mathbb{R}^n$ може да се опише n-куб.*

Доказ. Поступак је потпуно аналоган претходном, с тим што користимо резултат наведен у претходном поглављу који каже да су врхови ортонормираног репера на сфери S^{n-1} решења Кнастеровог проблема за бројеве n, $k = n$ и $m = 1$. $\square$

8 Проблем уписивања коцке у симетрично конвексно тело

Дуално претходном проблему, природно је поставити питање да ли се у свако конвексно тело може уписати коцка. Нећемо посматрати сва конвексна тела, већ само *централно симетрична* у односу на неку тачку. Јасно је да је довољно посматрати само конвексна тела централно симетрична у односу на координатни почетак.

Интуитивни појам уписивања коцке у тело је наравно јасан, а за математичку интерпретацију проблема потребна нам је следећа дефиниција.

Деф 50. За централно симетрично конвексно тело $K \subset \mathbb{R}^3$, са центром у координатном почетку, дефинишемо *функционал Минковског* на следећи начин:

$$||x||_K := \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid x \in \lambda K\},$$

за све $x \in \mathbb{R}^3$ за које тај инфимум постоји.

Показује се да је овако дефинисан функционал $||\cdot||_K$ заправо једна норма на простору $\mathbb{R}^3$, па се много чешће назива *норма Минковског*. Затим, имамо и метрику индуковану овом нормом. Једноставно се види да је у њој кугла полупречника 1 са центром у координатном почетку заправо тело K, а ∂K управо јединична сфера.

Користећи ове чињенице, можемо рећи да ће *коцка бити уписана у дато централно симетрично тело K са центром у координатном почетку ако и само ако њена темена имају норму Минковског (придружену телу K) једнаку 1.*

Скицираћемо два решења овог проблема, јер оба на различите начине илуструју идеје које су нам интересантне у овом раду.

Први приступ овом проблему користи добро познату идеју конфигурационог простора и тест пресликавања. Да бисмо доказали непостојање тест пресликавања које ћемо конструисати, биће нам потребна следећа лема из еквиваријантне топологије.

Лема 51. *Не постоји S_4-еквиваријантно пресликавање*

$$g : (SO(3), \rho_{S_4}) \to (S^2, \tau_{S_4}),$$

где је ρ_{S_4} дејство симетричне групе S_4 на $SO(3)$ задато множењем здесна групом ротација коцке (S_4 видимо као подгрупу од $SO(3)$), а τ_{S_4} дејство групе S_4 на S^2 задато групом изометрија правилног тетраедра уписаног у сферу S^2. $\diamondsuit$

Доказ ове леме је веома кратак и леп (може се наћи у раду [9]), али га нећемо наводити јер захтева много боље познавање еквиваријантне топологије. Наиме, захтева примену еквиваријантне теорије опструкција, што је следећи корак у изучавању еквиваријантне топологије. А то нека остане тема неког другог рада.

Посветимо се сада свођењу проблема на ову лему. Пре свега, упознајмо се мало детаљније са поменутим дејствима.

Дејство τ_{S_4} на кодомену је сасвим природно. Свакој изометрији правилног тетраедра једнозначно одговара пермутација темена тетраедра, па је група изометрија правилног тетраедра изоморфна групи S_4. Штавише, група ротација (тј. изометрија које чувају оријентацију) правилног тетраедра изоморфна је алтернирајућој групи A_4. Када имамо изометрију тетраедра, можемо је природно проширити до изометрије сфере S^2. На тај начин свакој пермутацији групе S_4 одговара изометрија сфере. Једноставно се провери да је дато придруживање заиста једно дејство. Важно је приметити да то дејство није слободно, што онемогућава примену Долдове теореме у доказу леме.

Дејство ρ_{S_4} на домену захтева мало више пажње. Познато алгебарско тврђење каже да је група ротација коцке изоморфна са S_4. Скицирајмо како се успоставља тај изоморфизам. Коцка има четири велике дијагонале. Свака ротација коцке задаје једну пермутацију скупа дијагонала (дакле елемент групе S_4). Приметимо да само идентичко пресликавање међу свим ротацијама коцке задаје идентичку пермутацију дијагонала. Са друге стране, можемо изабрати по једно теме сваке велике дијагонале тако да образују правилни тетраедар. Свака пермутација дијагонала даје пермутацију темена тетраедра, па самим тим елемент групе S_4. Пермутација темена тетраедра задаје изометрију тетраедра, па онда и изометрију коцке. Ако добијена изометрија није ротација, композиција са антиподалним пресликавањем даје ротацију коцке, која индукује дату пермутацију дијагонала. На тај начин можемо S_4 посматрати као групу ротација коцке, па и као подгрупу од $SO(3)$.

Вратимо се сада нашем циљу. Показаћемо мало општију теорему које ћемо затим применити на норму Минковског и тако доказати тврђење о уписивању коцке. Основна теорема је следећа.

Теорема 52. *Нека је $F : S^2 \to \mathbb{R}$ непрекидна парна функција, тј. $F(x) = F(-x)$, за свако $x \in S^2$. Нека је $\{\pm v_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$ скуп темена коцке уписане у сферу S^2. Тада постоји $A \in SO(3)$ такво да је $F(\pm Av_1) = F(\pm Av_2) = F(\pm Av_3) = F(\pm Av_4)$.*

Доказ. За дату непрекидну парну функцију $F : S^2 \to \mathbb{R}$ и темена коцке $\pm v_1, \pm v_2, \pm v_3$ и $\pm v_4$ посматрајмо функцију $f : SO(3) \to \mathbb{R}^4$ дефинисану са:

$$f(A) := (F(\pm Av_1), F(\pm Av_2), F(\pm Av_3), F(\pm Av_4)), \text{ за свако } A \in SO(3).$$

Пошто је F парна и непрекидна, f је добро дефинисана и такође непрекидна. Уколико слика $f(SO(3))$ сече дијагоналу $\Delta \subset \mathbb{R}^4$, то је управо оно што нам треба и теорема је доказана.

Претпоставимо супротно, да је $f(SO(3)) \cap \Delta = \emptyset$. Посматрајмо дејство групе S_4 на домену и кодомену функције f. На $SO(3)$ посматрајмо претходно описано дејство ρ_{S_4}. Затим, нека је $\widehat{\tau_{S_4}}$ дејство на $\mathbb{R}^4$ где свака пермутација дејствује као пермутација координата простора $\mathbb{R}^4$.

Према дефиницији датих дејстава једноставно се проверава да је f једно S_4-еквиваријантно пресликавање. Како смо претпоставили да f не „погађа” дијагоналу Δ, посматрајмо исто пресликавање са суженим кодоменом, тј. $\mathbb{R}^4 \backslash \Delta$ (задржимо исту ознаку):

$$f : (SO(3), \rho_{S_4}) \xrightarrow{S_4} (\mathbb{R}^4 \backslash \Delta, \widehat{\tau_{S_4}}).$$

Даљи поступак нам је добро познат. Посматрамо ортогоналну пројекцију p на потпростор $\Delta^{\perp} \cong \mathbb{R}^3$. Како смо избацили дијагоналу, слика при пројекцији неће садржати нулу, па имамо пресликавање:

$$p : (\mathbb{R}^4 \backslash \Delta, \widehat{\tau_{S_4}}) \xrightarrow{S_4} (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \tau_{S_4}),$$

где је τ_{S_4} дејство групе S_4 на кодомену које је одређено групом изометрија правилног тетраедра. Може се проверити да је p S_4-еквиваријантно у односу на наведена дејства. На крају, потребна нам је још (S_4-еквиваријантна) радијална пројекција:

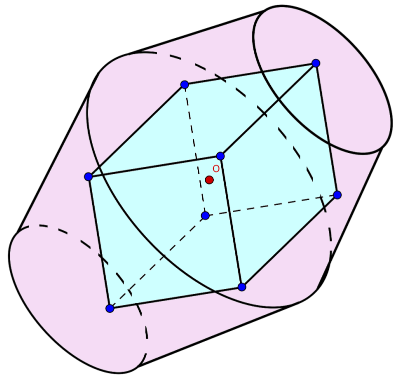
$$r : (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}, \tau_{S_4}) \xrightarrow{S_4} (S^2, \tau_{S_4}).$$

Коначно, као композицију добијамо еквиваријантно пресликавање:

$$r \circ p \circ f : (SO(3), \rho_{S_4}) \xrightarrow{S_4} (S^2, \tau_{S_4}),$$

што је у контрадикцији са лемом 51. Тиме је доказ теореме завршен. □

Последица 53. *Нека је K централно симетрично конвексно тело у $\mathbb{R}^3$. Тада постоји коцка уписана у K, чији се центар поклапа са центром тела K.*



Доказ. Нека је $C \subset \mathbb{R}^3$ фиксирана коцка са центром у координатном почетку и теменима $\{\pm v_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$, где је $||v_i|| = 1$, $1 \leq i \leq 4$ (уписана у сферу S^2). Без умањења општости можемо претпоставити да је центар тела K у координатном почетку.

Посматрајмо норму Минковског придружену телу K, рестриховану на сферу S^2:

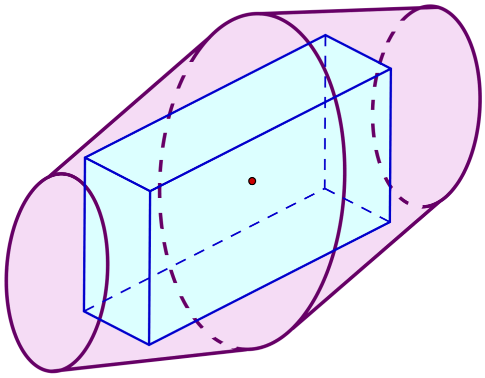
$$F = ||\cdot||_K|_{S^2} : S^2 \to \mathbb{R}.$$

Пошто је тело централно симетрично, F је парна функција па можемо применити теорему 52. Из ње знамо да постоји ротација $A \in SO(3)$ таква да је $F(\pm Av_1) = F(\pm Av_2) = F(\pm Av_3) = F(\pm Av_4)$. Другим речима, $|| \pm Av_1||_K = \ldots = || \pm Av_4||_K = \lambda$, за неко $\lambda > 0$. Заротирајмо зато дату коцку C добијеном ротацијом A и још применимо хомотетију са коефицијентом $\frac{1}{\lambda}$ и центром у координатном почетку. Добијена коцка $\frac{1}{\lambda} \cdot A(C)$ је уписана у тело K, јер свако њено теме има норму Минковског (придружену телу K) једнаку 1.

Такође, центар те коцке је опет у координатном почетку, дакле у центру тела K, чиме је доказ завршен. □

Прикажимо сада други приступ проблему уписивања коцке. Може се доказати значајно општије тврђење користећи један од познатих резултата Кнастеровог проблема. Наиме, као што смо већ поменули у глави 6, познато је да су темена било ког раванског правоугаоника уписаног у сферу S^2 решења Кнастеровог проблема ($n = 3$, $k = 4$ и $m = 1$). Међутим, доказ ове чињенице је веома сложен па га нећемо наводити (видети [7]). Користећи тај резултат можемо доказати следећу теорему.

Теорема 54. *Нека је K централно симетрично конвексно тело у простору $\mathbb{R}^3$ а D произвољан квадар. Тада се у тело K може уписати квадар сличан датом квадру D, чији се центар поклапа са центром тела K.*



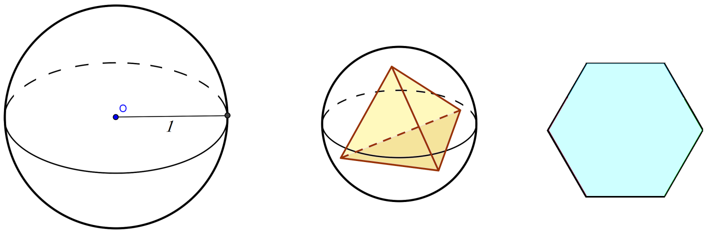
Доказ. Поступамо сасвим слично доказу последице 53. Претпоставимо да је центар тела K у координатном почетку. Упишимо квадар сличан квадру D у сферу S^2. Затим, уочимо једну његову страну; нека су њена темена означена са v_1, v_2, v_3 и v_4. Нека је још $F = ||\cdot||_K|_{S^2} : S^2 \to \mathbb{R}$ већ поменута рестрикција норме Минковског. Знамо да су v_1, v_2, v_3 и v_4 решење Кнастеровог проблема, па постоји ротација $\rho \in SO(3)$ таква да важи

$$||\rho(v_1)||_K = ||\rho(v_2)||_K = ||\rho(v_3)||_K = ||\rho(v_4)||_K = \lambda.$$

Посамтрајмо квадар чији је скуп темена $\{\frac{1}{\lambda} \cdot (\pm\rho(v_i)) \mid \; 1 \leq i \leq 4\}$. Свако његово теме има норму Минковског једнаку 1, па је он уписан у тело K. Такође, он је сличан датом квадру D и центар му је у координатном почетку, дакле у центру тела K. Тиме је доказ завршен. $\square$

9 Уместо закључка - кренимо корак даље...

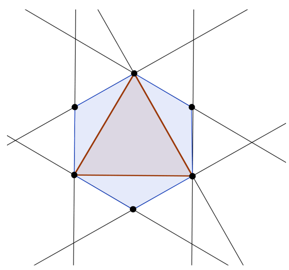
За крај, сасвим илустративно, прикажимо неке сасвим другачије проблеме за које се се испоставља да су у врло блиској вези са претходним. Где би нас могао одвести корак даље у размишљању?



Пре свега, један од веома интересантних појмова је појам универзалног покривања. Кажемо да је скуп $S \subset \mathbb{R}^n$ *универзално покривање* у простору $\mathbb{R}^n$ ако се сваки скуп $X \subset \mathbb{R}^n$, дијаметра не већег од 1, може "покрити" скупом S, тј. строго говорећи, ако постоје трансформација $A \in O(n)$ и вектор транслације $v \in \mathbb{R}^n$ такви да $X \subset AS+v$. Уколико S има раван симетрије, лако је приметити да је довољно посматрати $A \in SO(n)$. Такође, с обзиром на то да скуп има исти дијаметар као и његов конвексни омотач, довољно је посматрати случај када је X конвексан и компактан скуп.

Најприродније универзално покривање у простору $\mathbb{R}^n$ је свакако лопта полупречника 1, али циљ је наћи покривање што је могуће мањег дијаметра. Једно од првих лепих покривања уочио је Јунг и то је описана сфера правилног n-димензионалног симплекса (њен полупречник је $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$).

Затим је показано да је у $\mathbb{R}^2$ универзално покривање правилни шестоугао, чије је растојање наспрамних ивица једнако 1. Зато се природно поставља питање - постоје ли аналогна универзална покривања у простору $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$?



Како би изгледао скуп у n-димензионалном простору који је аналоган шестоуглу? Шестоугао можемо посматрати као пресек три траке ширине 1, ортогоналне на ивице правилног троугла (као на слици десно). У простору произвољне димензије можемо поступити слично. Нека је $\sigma^n \subset \mathbb{R}^n$ правилни симплекс ивице 1, чија су темена $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$. Нека је $T_{i,j}$ $(1 \leq i < j \leq n+1)$ паралелна n-димензионална трака ширине 1, ограничена двема хиперравнима ортогоналним на ивицу $[v_i, v_j]$, које пролазе кроз v_i и v_j. Дефинишимо U_n као пресек свих $\binom{n+1}{2}$ трака $T_{i,j}$. Очигледно је U_2 већ описани шестоугао. 1994. године Макеев је поставио следећу хипотезу.

Хипотеза 1. *U_n је универзално покривање у $\mathbb{R}^n$.*

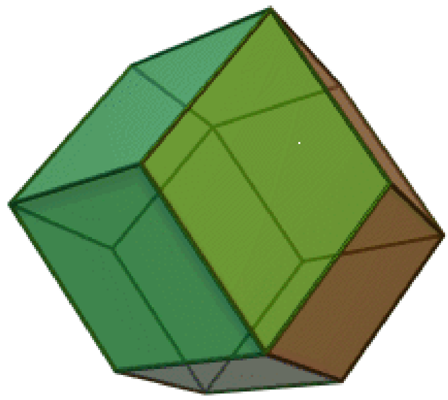
Може се показати (видети [9]) да би тачност ове хипотезе у димензији n следила из тачности следећег тврђења.

Хипотеза 2. *Нека је $F : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ непарна функција, а $\sigma^n \subset \mathbb{R}^n$ правилни симплекс ивице 1, са теменима $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$. Тада постоји $\rho \in SO(n)$ тако да свих $\binom{n+1}{2}$ хиперравни следећег облика имају заједничку тачку:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, \rho(v_j - v_i) \rangle = F(\rho(v_j - v_i))\}, \ (1 \leq i < j \leq n+1).$$

Најзад, време је за еквиваријантна пресликавања. Тврђење хипотезе 2 у општем случају није доказано, али за $n = 3$ јесте, и то применом већ поменуте леме 51. Доказ овде нећемо наводити, може се наћи у раду [9]. Напоменимо само да је идеја доказа нама добро позната - претпоставимо супротно, тј. да тражено ρ не постоји и на основу тога конструишемо еквиваријантно пресликавање $SO(3) \xrightarrow{S_4} S^2$, за које већ знамо да не може постојати.

Доказом хипотезе 2 (па и хипотезе 1) за $n = 3$ открили смо универзално покривање U_3 у тродимензионалном простору. U_3 се назива *ромбо-додекаедар* и представља једно од тако-званих Каталанових тела. Има 12 страна које су подударни ромбови.



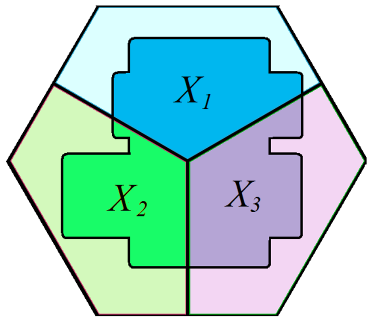
А до чега можемо доћи ако направимо још један корак даље...?

... доћи ћемо до **Борсуковог проблема**:

Да ли се сваки скуп $X \subset \mathbb{R}^n$, дијаметра 1, може поделити на $n+1$ подскупова $X_1, \ldots, X_{n+1}$ мањег дијаметра ?

Познато је да је за довољно велико n, чак и за коначне скупове, одговор не, али је број 903 најмање n за које је познат контрапример.

Међутим, за димензију 2, одговор је потврдан. Доказ је сасвим једноставан користећи универзално покривање U_2. Наиме, поделимо шестоугао U_2 на три подударна петоугла као на слици (сваки од њих је дијаметра $\frac{\sqrt{3}}{2}$), затим покријмо шестоуглом дати скуп X, и делове које одсецају петоуглови узмимо за X_1, X_2 и X_3. Очигледно, сви они имају дијаметар мањи од $\frac{\sqrt{3}}{2}$, па и од 1.



Такође, одговор је потврдан и у димензији 3. Идејно, то је доказано такође коришћењем универзалног покривања у $\mathbb{R}^3$ које се добија када правилном октаедру O_3, са растојањем наспрамних страна једнаким 1, одсечемо 3 одређена врха. Затим, као и у димензији два, може се показати да то покривање можемо поделити на четири дела дијаметра мањег од 1 (конкретно, 0.989 и 0.998), па за $X_1, \ldots, X_4$ узмемо пресеке X са сваким од та четири дела.

Претпоставља се да би се на сличан начин помоћу U_3 добила четири дела још и мањег дијаметра, јер је дијаметар O_3 једнак $\sqrt{3}$, док је дијаметар скупа U_3 једнак $\sqrt{2}$. Међутим, одговор на то још није познат.

А корак даље? Да ли бисмо дошли до још неког лепог проблема? Сасвим сигурно, јер сетимо се - *праве приче никада немају крај...*

ЛИТЕРАТУРА

[1] S. A. BOGATYI, G. H. KHIMSHIASHVILI, *A generalisation of the Borsuk-Ulam theorem and a problem of Knaster*, на руском, Сообщ. Акад. Наук. Грузинскоj ССР, **123**, 1986, 477-480.

[2] D. G. BOURGIN, *On some separation and mapping theorems comment*, Math. Helv. **29**, 1955, 199-214.

[3] F. J. DYSON, *Continuous functions defined on spheres*, Ann. of Math. **54**, 1951, 534-536.

[4] E. FADELL, S. HUSSEINI, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk-Ulam and Bourgin-Yang theorems*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **8**, 1988, 73-85.

[5] DE MIRA FERNANDEZ, *A funzioni continue sorpa una superficie sferica*, Portug. Math., **6**, 1946, 132-134.

[6] E. E. FLOYD, *Real valued mappings of spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 1955, 957-959.

[7] H. B. GRIFFITHS, *The topology of square pegs in round holes*, Proc. London Math. Soc. (3) **62**, 1991, 647-672.

[8] A. HATCHER, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[9] T. HAUSEL, E. MAKAI, A. SZÜCZ, *Inscribing cubes and covering by rhombic dodecahedra via equivariant topology*, math.MG/9906066, 1999.

[10] H. HOPF, *Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze*, Portugal. Math. **4**, 1944, 129-139.

[11] R. D. JOHNSON, *Continuous real valued functons on spheres*, Master Thesis, University of Virginia, 1955.

[12] S. KAKUTANI, *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed set in* $\mathbb{R}^3$, Ann. Math., **43**, 1942, 739-741.

[13] B. KNASTER, *Problème 4*, Colloquium Math, **1**, 1948, 30-31.

[14] G. R. LIVESAY, *On a theorem of F. J. Dyson*, Ann. of Math., **59**, 1954, 227-229.

[15] В.В.МАКЕЕВ, *Пространственные обобщения некоторых теорем о выпуклых фигурах*, Математические заметки, 1984, Т.36, 3, 405-415.

[16] В.В.МАКЕЕВ, *О некоторых своиствах непрерывных отображении сфер и задачах комбинаторнои геометрии*, Геом. вопросы теории функции и множеств (Межвуз.матем.сб.), Калинин, 1986, 75-85.

[17] В.В.МАКЕЕВ, *Задача Кнастера и почти сферические сечения*, Математически сборник, 1989, 180, 3, 424-430.

[18] J. MATOUSEK, *Using the Borsuk-Ulam theorem*, Springer, 2003.

[19] J. McCLEARY, *A user's quide to spectral sequences*, Camb. Univer. Press, 2001.

[20] N. E. STEENROD, D. B. A. EPSTEIN, *Cohomology operations*, Princeton University Press, 1962.

[21] H. YAMABE, Z. YUJOBÔ, *On the continuous function defined on a sphere*, Osaka Math. J. **2**, 1950, 19-22, MP 12-198.

[22] C. T. YANG, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson I*, Ann. of Math., **60**, 1954, 262-282.

[23] C. T. YANG, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobo and Dyson II*, Ann. of Math., **62**, 1955, 271-283.

[24] Р. Т. ЖИВАЉЕВИЋ, *User's guide to equivariant methods in combinatorics*, Publications de l'Institut mathematuque, Nouvelle série, tome **59**(73), 1996, 114-130.

[25] Р. Т. ЖИВАЉЕВИЋ, *User's guide to equivariant methods in combinatorics II*, Publications de l'Institut mathematuque, Nouvelle série, tome **64**(78), 1998, 107-132.