Мастер рад

Економске функције у настави математике
у средњој школи

Ментор:
Проф.др Владимир Божин

Студент:
Зорица Караић-Шибалић
бр. индекса: 1046/2012

САДРЖАЈ

УВОД 3

ПРОБЛЕМИ У РЕАЛНОМ КОНТЕКСТУ 5

ЕКОНОМСКЕ ФУНКЦИЈЕ 8

- **Функција тражње** 8
- **Функција понуде** 11
- **Равнотежа тржишта** 13
- **Функција укупног прихода** 15
- **Функција граничног прихода** 16
- **Функција укупних трошкова** 20
- **Функција просечних трошкова** 21
- **Функција граничних трошкова** 22
- **Функција добити** 27

ЕЛАСТИЧНОСТ ЕКОНОМСИХ ФУНКЦИЈА 34

- **Еластичност функције тражње** 35
- **Еластичност функције прихода** 39
- **Еластичност функције укупних трошкова** 41

ИСТРАЖИВАЊЕ - СХВАТАЊЕ ПРИМЕНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА У ЕКОНОМИЈИ 51

ФИНАНСИЈСКА МАТЕМАТИКА У СРБИЈИ И У СВЕТУ - КОМПАРАТИВНА АНАЛИЗА 56

- **Значај финансијске писмености** 56
- **Финансијска математика у Србији** 57
- **Финансијска математика у свету** 59

ЗАКЉУЧАК 63

ЛИТЕРАТУРА 64

УВОД

Доношење пословних одлука је све сложенији и захтевнији процес, у данашњим условима често и ризик. У суштини економског проблема је економисање са расположивом количином оскудних ресурса, да би се задовољиле човекове потребе.

Све економске појаве и процеси манифестују се у облику количина, квантитета, које се током времена у процесу привредног развоја стално мењају (нпр. количина производње, потрошње, инвестиција, извоза, увоза итд. мењају се током времена). Истовремено, све су економске појаве или процеси (економске варијабле) међусобно зависни тј. промена једне од њих утиче у одређеној мери и на промене осталих.

Основни задатак економске анализе је утврђивање међузависности које постоје међу економским појавама и процесима, ради њиховог објашњавања и предвиђања. Квантитативна економска анализа, осим утврђивања егзистенције, применом различитих математичких метода настоји да одреди међузависности које постоје између економских појава и процеса у реалном економском свету.

Основна карактеристика квантитативне економске анализе је у томе што она на темељу утврђених међузависности може предвидети последице које ће на цео скуп економских варијабли имати аутономна промена једне од њих. Она је претпоставка сваког предвиђања.

Анализа понуде и тражње један је од основних економских алата, а економисти га користе за анализу конкурентских тржишта. На конкурентским тржиштима, криве понуде и тражње нам показују колико ће фирме бити спремне да произведу и колико ће потрошачи да потражују, зависно од цене. Крива тражње показује како количина добара која се потражује зависи од цене. На основу закона тражње - ако цена опада, тражња се повећава и обрнуто. Због тога је крива тражње опадајућа. Крива понуде показује како количина добара која се нуди зависи од цене. Према закону понуде - када цена расте, расте и понуда добара и обрнуто. Због тога је крива понуде растућа.

Понуда и тражња су основне тржишне снаге. То су општи услови без којих размена не постоји. Оне омогућавају функционисање тржишних економија, одређују количину сваког добра које се производи и цену по којој се свако добро продаје. Понуда је одређена количина робе која се под одређеним условима нуди заинтересованим купцима, а тражња је одређена количина новца којом се одређена количина робе купује. Понуда не постоји без робе, а тражња није могућа без новца.

Креирање пословне политике и анализа резултата пословања предузећа и других облика радних организација успешније се може обавити ако се у анализи користе и квантитативне методе.

Међу економским величинама као што су: цена, понуда, тражња, трошкови, приход и добит постоји узајамна зависност. Између међусобно зависних величина у економији не постоји, или се ретко дешава, строга функционална веза. Ипак, пажљивом анализом може се уочити да већини таквих веза приближно одговара нека од математичких функција. Обрадом довољно велике серије података, може се одредити жељена функција која апроксимативно најбоље осликава зависност посматраних величина и на основу које се могу вршити предвиђања даљег понашања једне економске величине у функцији једне или више других величина.

Основна карактеристика тржишних економија је да су оне немирне и да увек осцилирају. Зашто је нпр. у последњих 5 година број корисника LCD телевизора нагло порастао или зашто се цена истих значајно смањила? Зашто је цена нафте на светском тржишту тако висока? На та и слична питања одговоре може дати теорија понуде и тражње.

Основни циљ овог рада је сагледавање како се и у којој мери изучавају економске функције у настави математике у средњој школи. Рад чине следеће целине:

- Проблеми у реалном контексту
- Економске функције (тражња, понуда, приходи, трошкови, добит)
- Истраживање –схватање примене диференцијалног рачуна у економији (спроведено са ученицима четвртог разреда Економске школе у Ужицу)
- Компаративна анализа финансијске писмености у Србији и у свету

ПРОБЛЕМИ У РЕАЛНОМ КОНТЕКСТУ

Важност реалних проблема у настави математике описивао је још Ђерђ Поља (Polya, 1957) у књизи „Математичко откриће“. Он описује три принципа учења: активно учење, најбољи стимуланс и повезане фазе. У сваком од ових принципа Поља истиче важност задатака у реалном контексту.

Основни недостатак уџбеника математике је у томе што су задаци у њима искључиво рутински. Рутински пример – то је пример са уском облашћу примене; он служи за илустрацију једног правила и даје праксу за примену само тог правила. Такви су примери потребни и чак неопходни, али у њима одсуствују две важне фазе учења: фаза истраживања и фаза усвајања. Обе ове фазе имају за циљ да повежу задатак са светом који нас окружује и са знањима која ученик поседује.

Проблеми у реалном контексту провоцирају ученике на већу активност и мотивишу их (најбољи су стимуланс). Када ученик има снажан мотив да решава неки проблем, он ће упијати све информације везане за тему и неће му бити тешко да савлада вештине потребне за решавање проблема. Они, такође, захтевају од ученика да прође кроз више фаза у решавању задатка. Оваквим задацима се ученицима математика представља као животна дисциплина и утиче на њих да математику посматрају као нешто што прожима реалност, а не као издвојену школску дисциплину. Математички проблеми у реалном контексту се последњих деценија све више издвајају у једну посебну математичку дисциплину – математичко решавање проблема (mathematical problem solving), а све чешће и само решавање проблема (problem solving).

Важна је напомена да не треба мешати текстуалне задатке (word problems) са задацима примене, односно задацима у реалном контексту. Међутим, иако текстуални задаци имају потенцијал да буду задаци примене, сама форма не гарантује да они то и јесу. Текстуални задаци у нашој школској пракси углавном се сматрају задацима који би ученицима требало да приближе математичке проблеме и убеде их да је „математика свуда око нас“.

Проблемски задатак обично интегрише више математичких знања и не експлицира начин решавања, већ, напротив, очекује од ученика да препозна који је математички „алат“ примерен проблему. Такође, у збиркама задатака се срећу и такви задаци који неуспешно претендују да буду задаци примене.

Битне разлике између рутинских задатака и математичких задатака у реалном контексту можемо приказати у следећој табели.

	Рутински задатак	**Задатак у реалном контексту**
Језик	Формални математички; редукован.	Неформални, свакодневни, узрасно прилагођен.
Расположиви подаци	Унапред селектовани на нужни минимум; један извор; директно набројани.	Подаци су у „сировом облику” и нису у потпуности селектовани; неретко су из више извора.
Компетенције	Углавном на нивоу репродукције; један задатак тестира једну компетенцију; директно су везани за садржај који се тренутно обрађује.	Комплексније компетенције: анализа, селекција, интеграција, аргументовање; истовремено се тестира више компетенција.
Захтев	Доследна примена процедура и увежбавање рутине; таксативно познавање математичких чињеница.	Селектовање и тумачење података; математизација проблема; избор адекватне процедуре за решавање проблема; тумачење резултата.
Решење	Очекује се једно, тачно, унапред пројектовано решење; од ученика се не очекује да одступи од предвиђене процедуре.	Охрабрују се различити путеви налажења решења; посебан акценат је врло често на тумачењу и аргументовању решења.
Мотивација	Најчешће не постоји део текста којим би се ученик мотивисао да решава задатак; контекст углавном не постоји – задатак је потпуно апстракован.	Често је већи део текста у служби мотивације ученика да решавају проблем; сам контекст мотивише јер је искуствено релевантан за ученика.
Интеракција	Строга оријентација на индивидуални рад, погодује компетитивним облицима рада.	Углавном присутна и истраживачка компонента која погодује тимском раду.

Табела 1

Оно што се данас очекује од математичара је да своје математичке вештине ставе у службу решавања реалних проблема. Моћ знања математике огледа се у томе шта је појединац у стању да уради са тим знањем, какве је проблеме у стању да решава и колики је значај одређеног решења. У решавању проблема мора да се прође кроз више повезаних фаза:

- Идентификовање проблема
- Превођење на математички језик
- Избор адекватног модела за решавање проблема
- Селекција података
- Постављање ограничења
- Примена модела
- Повезивање добијених резултата са реалним проблемом

Велики проблем са увођењем задатака у реалном контексту у наставу математике је што нимало није лако направити овакве задатке. Ово је најпре због тога што математичари, школовани на традиционалан начин, нису током свог школовања имали додира са оваквим задацима. Основна парадигма при састављању задатака у реалном контексту је да се крене од математичке идеје и да се она смести у реалан контекст. На тај начин се праве „вештачки“ задаци, који ретко имају упориште у реалном животу.

ЕКОНОМСКЕ ФУНКЦИЈЕ

Функција тражње

Тражња је количина добара или услуга коју су потрошачи вољни и у стању да купе током неког периода времена, у неким датим економским условима. Временски оквир за тражњу може бити један сат, дан, месец дана или година дана.

У условима тржишне привреде тражња за неким производом зависи од великог броја фактора. То је најпре цена посматраног производа, а затим су то цене осталих производа на тржишту (посебно супститута и комплементарних производа), од стандарда потрошача тј. од њихове куповне способности, од навике потрошача за куповину тог производа, од њихове психологије, од времена продаје (што је врло значајно за сезонске производе), од укуса потрошача итд. Наравно, немогуће је обухватити све факторе који утичу на потражњу неког производа на тржишту. Истовремено, анализа функције тражње је квалитетнија уколико се она спроводи на већем броју параметара који утичу на њу. Очигледно је да се таква анализа мора вршити по правилима анализе функција више промењљивих.

Ми ћемо математичко испитивање тражње свести на ниво функције једне промењљиве и то на анализу функције тражње неког производа у зависности од његове цене, занемарујући све остале чиниоце (под претпоставком да се остали чиниоци не мењају или да су од мањег значаја).

Функција тражње даје уверење да постоји мерљива релација између цене коју фирма тражи за њен производ и броја јединица које је купац вољан да купи током одређеног временског периода. Економисти повезују овакво релацијско понашање као *закон потражње*, који се некада назива првим фундаменталним законом у економији. По дефиницији, закон потражње тврди да је тражена количина робе или услуга у индиректној релацији са продајном ценом, при чему важи *ceteris paribus* (све остале детерминанте тражње су непромењене).

У том смислу обележимо тражњу неког производа са x, а јединичну цену тог производа са p. Веза између тражње производа на тржишту и његове цене дата је у виду функционалне зависности:

$$x = f(p).$$

Да би функција $f(p)$ могла представљати функцију тражње, област дефинисаности ове функције одређује се из услова:

1. $p > 0$ (цена је увек позитивна)

2. $x > 0$ (потражња за неким производом мора бити позитивна)

3. $x' = f'(p) < 0$ (пораст цене неког производа смањује његову потражњу) у посматраном интервалу (a, b), који је економски остварив.

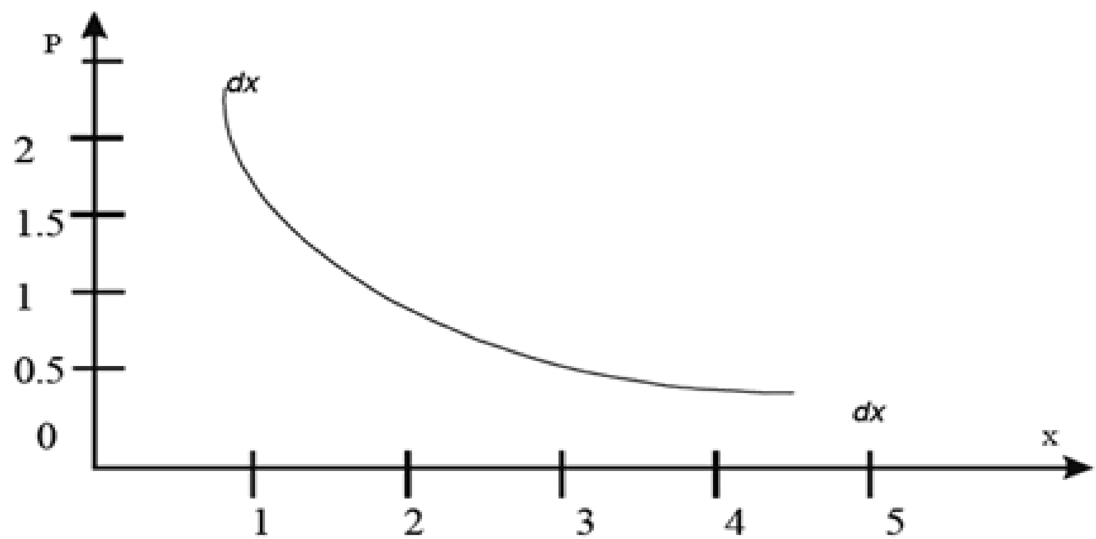
Крива тражње изражава однос између цене која се наплаћује за неки дати производ и количине у којој се тражи тај производ, при чему се (анализе ради) све остале променљиве сматрају константнима. Крива тражње се често приказује у облику графика, а све променљиве у функцији тражње, осим цене и количине самог производа се фиксирају. Инверзна релација између цене и тражене количине за одређену робу у временским периодима је *план тражње* за робом и графички приказ података (са ценом на вертикалној оси и количином на хоризонталној оси) даје *криву тражње* појединачне робе.

Рецимо, нека је веза између јединичне цене производа и тражње за тим производом дата у следећој табели:

Цена робе p (у јединицама)	Тражена количина робе x (у јединицама)
2,0	1,0
1,5	2,0
1,0	3,0
0,5	4,5

Табела 2

Тада криву тражње за тим производом графички можемо представити на следећи начин (Слика 1).



Слика 1

Крива тражње има негативни нагиб, што индицира да појединац купује више робе у временском периоду по мањим ценама (остали фактори су константни). Два су разлога зашто количина опада када цена расте:

1. ***Учинак супституције*** - кад цена добра расте, заменићемо га са другим сличним добром (ако цена електричне енергије као енергента за грејање порасте, заменићемо је са јефтинијим плином)

2. ***Учинак дохотка*** - ако цена порасте, а доходак остане исти, имамо мање расположивог дохотка, па ћемо обуздати потрошњу.

Инверзна релација између цене робе и тражене количине у временском периоду приписује се *закону потражње*. Смањење цене води ка повећању тражње (тако да је нагиб негативан) услед наведених ефеката супституције и прихода.

Најчешћи облици функције тражње су :

1) $x = ap + b$ нпр. $x = -2p + 1000$

2) $x = ap^2 + bp + c$ нпр. $x = -p^2 + 20p + 400$

3) $x = ae^{bp}$ нпр. $x = e^{2p}$

4) $x = ap^b$ нпр. $x = 70p^{-2,7}$

Параметри a, b и c, који изражавају различите случајеве тражње, одређују се на основу датих цена и њима одговарајућих количина тражене робе разним математичко-статистичким методама.

Функција тражње се некада задаје и у инверзном облику:

$$p = \varphi(x), \quad p' < 0.$$

Ту је цена функција количине тражене робе. Овај облик означава просечан приход по јединици производа.

Ученици средње школе изучавање економских функција управо почињу упознавањем са функцијом тражње. Ова функција им је, наравно, позната из стручних предмета, као што су Основи економије и Маркетинг. Они су одмах у стању да решавају неке конкретне задатке.

Пример 1)

Дата је функција тражње за чоколадне бананице у облику $x = 100 - 5p$.

а) Која је тражена количина бананица, ако је цена 8 (новчаних јединица)?

б) Ако је тражња 40 бананица, која је одговарајућа цена једне бананице?

в) Колика ће бити тражња ако је p=0 (расподела без накнаде)?

г) Која је највиша цена коју ће неко прихватити да плати за једну бананицу?

Решење:

а) $p = 8 \Rightarrow x = 100 - 5 \cdot 8 = 100 - 40 = 60$ (бананица)

б) $x = 40 \Rightarrow 40 = 100 - 5 \cdot p \Rightarrow 5p = 100 - 40 = 60 \Rightarrow p = 12$ (цена једне бананице)

в) $p = 0 \Rightarrow x = 100 - 5 \cdot 0 = 100$

г) $x = 0 \Rightarrow 0 = 100 - 5 \cdot p \Rightarrow 5p = 100 \Rightarrow p = 20$ (да би постојала тражња, цена једне бананице мора да буде мања од 5).

Функција понуде

Појам понуде означава количину робе или услуга које су произвођачи вољни и могућности да продају у одређеном временском периоду и по одређеним условима. Фактори који се морају узети у обзир су цена добара, цена повезаних добара, текуће технолошко стање, временски услови, ниво цена инпута, владине регулативе и друго. Понуда једног производа, такође, зависи и од трошкова производње. Количина производа коју произвођачи износе на тржиште – понуда производа – зависи од тих инфлуенсера.

Ми ћемо понуду посматрати у зависности од једног параметра, од цене производа, занемарујући све остале чиниоце .

Економисти повезују овакво релацијско понашање као *закон понуде*. По дефиницији, закон понуде тврди да количина робе или услуга која се нуди је у директном (позитивном) односу са продајном ценом, при чему важи *ceteris paribus* (све остале детерминанте тражње су непромењене).

Обележимо количину производа која се нуди са y, а јединичну цену тог производа са p. Веза између понуде производа на тржишту и његове цене дата је у виду функционалне зависности:

$$y = f(p).$$

Да би функција $f(p)$ могла представљати функцију понуде, област дефинисаности ове функције одређује се из услова:

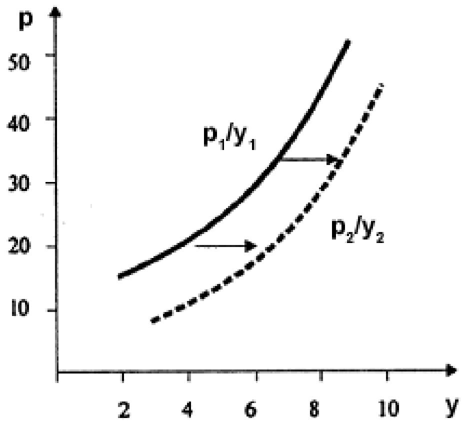
1. $p > 0$ (цена је увек позитивна)

2. $y > 0$ (понуда неког производа мора бити позитивна)

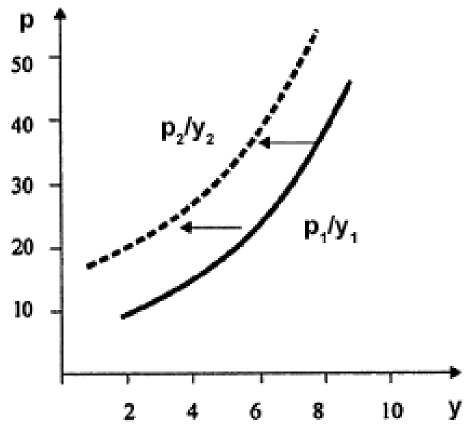
3. $y' = f'(p) > 0$ (пораст цене неког производа стимулише произвођача да га што више нуди тржишту)

Ако су сви остали услови непромењени, када цена неког производа расте, тада расте и понуђена количина тог производа и обратно – када цена пада, тада пада и понуђена количина. Постоји скала или табела понуде која показује понуђену количину за сваки ницо цене. Однос између цене неког добра и понуђене количине тог добра приказује крива понуде. Када се промени тржишна цена, доћи ће до промене нуђене количине и графички ће се то приказати као помак на кривој понуде. Уколико се промене остали фактори понуде при истим ценама, доћи ће до промене понуде. Ако се повећа понуда, њена крива ће се померити удесно, а ако се понуда смањи, њена крива ће се померити улево.

Рецимо, ако посматрамо количину произведених аутомобила у хиљадама комада (y) и њене вредности прикажемо на x- оси, а цену аутомобила у хиљадама евра по комаду (p) прикажемо на y- оси. Онда ћемо при повећању понуде имати померање криве удесно (Слика 2а), а при смањењу понуде имаћемо померање криве улево (Слика 2б).



Слика 2а



Слика 2б

Ученицима средње школе је функција понуде, такође, позната из стручних предмета, као што су Основи економије и Маркетинг. У настави математике се ова функција само информативно обрађује у циљу математичког објашњења појма равнотеже тржишта и одређивања цене за неки конкретан производ при којој се та равнотежа постиже.

Равнотежа тржишта

Тржишна равнотежа представља ценовни и количински однос, где су силе понуде и тражње у равнотежи. У тачки равнотеже количина коју купци желе купити једнака је количини коју продавци желе продати. Једноставно речено, у равнотежи цене и количине теже остати исте, све док сви остали фактори буду једнаки.

Равнотежа на тржишту одређује се, дакле**,** из услова $\boldsymbol{y = x}$, односно функција понуде неког производа једнака је функцији тражње за тим производом.

Пример 2)

Дате су функције понуде и тражње неког производа:

$y = 6p - 2$ и $x = -4p + 18$

Одреди цену при којој се постиже равнотежа тржишта.

Решење:

$y = x$

$6p - 2 = -4p + 18 \Rightarrow 10p = 20 \Rightarrow p = 2$

При цени $p=2$, добијамо да је вредност функције понуде $y=6\cdot 2-2$ тј. $y=10$, а вредност функције тражње је $x=-4\cdot 2+18$ тј. $x=10$, па је постигнута равнотежа тржишта.

Пример 3)

Одреди цену при којој се постиже равнотежа тражње и понуде неког производа, ако је функција тражње $x=(p-3)^2$, а функција понуде $y=2p-3$.

Решење:

Област дефинисаности функције понуде одређујемо из услова:

$$p>0 \wedge y>0 \;\wedge y'>0 \;\text{ тј. }\; p>0 \wedge 2p-3>0 \;\wedge 2>0 \;\text{ тј. }\; p\in\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$$

а област дефинисаности функције тражње одређујемо из услова:

$$p>0 \wedge x>0 \;\wedge x'<0 \;\text{ тј. }\; p>0 \wedge (p-3)^2>0 \;\wedge 2(p-3)<0 \;\text{ тј. }\; p\in(0, 3).$$

Цена при којој наступа равнотежа на тржишту мора бити из скупа вредности за које је дефинисана и тражња и понуда на тржишту, односно из скупа

$$p\in(0, 3)\wedge p\in\left(\frac{3}{2}, \infty\right) \Rightarrow p\in\left(\frac{3}{2}, 3\right).$$

Изједначавајући функције тражње и понуде добијамо:

$$\begin{aligned}
&x=y\\
&(p-3)^2=2p-3\\
&p^2-6p+9-2p+3=0\\
&p^2-8p+12=0\\
&p_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}\\
&p_1=\frac{4}{2}=2\\
&p_2=\frac{12}{2}=6
\end{aligned}$$

Решење $p_2=6$ не припада интервалу $p\in\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, па га одбацујемо, док решење $p_1=2$ припада интервалу $p\in\left(\frac{3}{2}, 3\right)$, па закључујемо да се равнотежа на тржишту постиже за вредност цене $p=2$.

Функција укупног прихода

Укупан приход представља новчани израз реализоване производње и услова на тржишту. Он се састоји од:

- вредности продате робе
- вредности извршених услуга
- других прихода остварених пословањем
- ванредних прихода

Укупан приход је један од израза резултата пословања предузећа. Он је финансијски резултат пословања предузећа и састоји се од наплаћених износа за продату робу, за готове производе, за извршене услуге и од осталих прихода. Рангирање у смислу величине фирме се најчешће изводи по критеријуму укупних прихода. Слично овоме, раст се често изражава у смислу повећања укупне продаје. С обзиром да тај раст одражава способност фирме да задовољи тражњу потрошача, употреба укупних прихода као мере успеха фирми има оправдање.

Вредност реалиизоване производње утврђује се множењем укупне производње са продајном ценом по јединици производа. Свако повећање продајне цене, без промене реализоване количине робе, утиче на повећање укупног прихода и обратно.

Функција укупног прихода представља производ количине производа, продате на тржишту, и цене по којој је јединица производа продата на тржишту. Обележавамо је са P**.** Количина производа продатог на тржишту је, уствари, функција тражње тог производа x, па је функција укупног прихода дата са:

$$P = x \cdot p\,.$$

Из ове једначине видимо да је укупан приход функција две независно промењиве p и x, али ако је функција тражње за одређени производ позната $x = f(p)$, онда:

а) укупан приход може се представити као функција једне промењиве, цене, као: $P = p \cdot f(p)$

б) ако функција $x = f(p)$ има инверзну функцију $p = f^{-1}(x)$, тада се укупан приход може представити као функција једне промењиве, количине производа реализованог на тржишту, као: $P = x \cdot f^{-1}(x)$.

Област дефинисаности функције укупног прихода одређена је облашћу дефинисаности функције тражње $x = f(p)$.

Можемо закључити да мудро одлучивање о цени неке робе изискује поседовање информација о тражњи. У неким случајевима више цене могу повећати укупне приходе, док у другим околностима повећање цена може имати и обрнути ефекат. У следећој табели можемо уочити да се укупан приход повећава при повећању цене од 1 евра на 5 евра док се, насупрот томе, смањује када цена расте преко 6 евра.

Цена (у еврима)	Количина	Укупан приход
1	10	10
2	9	18
3	8	24
4	7	28
5	6	30
6	5	30
7	4	28
8	3	24
9	2	18
10	1	10

Табела 3

Ученици средње школе изучавају функцију укупног прихода у оквиру примене диференцијалног рачуна на економске функције. У том смислу, они решавају проблеме одређивања максималног укупног прихода, као и одређивања количине производа и цене при којима се он може остварити. Такође, решавају и проблеме у којима се испитује како повећање тражње или цене са неког нивоа утиче на укупан приход. Пре решавања конкретних примера, упознају и функцију граничног прихода.

Функција граничног прихода

Извод функције укупног прихода служи за израчунавање максимума прихода, уз коришћење и другог извода. Преко првог извода функције укупног прихода посматрамо понашање прихода у зависности од промене цене или тражње.

Испитивањем знака првог извода закључујемо да ли укупан приход расте или опада при промени цене или тражње. Први извод функције укупног прихода називамо функцијом граничног прихода.

За функцију граничног прихода важи:

а) ако је укупан приход представљен као функција цене, $P = p \cdot f(p)$, онда је функција граничног прихода први извод функције укупног прихода по промењљивој цена, тј.

$$P' = \frac{\partial P}{\partial p}$$

б) ако је укупан приход представљен као функција количине реализоване робе на тржишту, $P = x \cdot f^{-1}(x)$, онда је функција граничног прихода први извод функције укупног прихода по промењљивој количина реализоване робе на тржишту, тј.

$$P' = \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Пример 4)

Закон тражње неког артикла је $x = \frac{15-p}{2}$. Одреди функцију укупног прихода и функцију граничног прихода.

Решење:

Како је укупан приход производ количине и цене, имамо:

$$P = x \cdot p$$

$$P = \frac{15-p}{2} \cdot p \quad \text{тј.} \quad P = \frac{15p-p^2}{2}$$

(укупан приход у зависности од јединичне цене).

Функција граничног прихода, као први извод функције укупног прихода, је:

$$P'(p) = \left(\frac{15p - p^2}{2}\right)' = \frac{15}{2} - p.$$

Функцију укупног прихода можемо представити и у зависности од количине тражене и продате робе x. Онда имамо:

$$x = \frac{15-p}{2} \Rightarrow 2x = 15 - p \Rightarrow p = 15 - 2x$$

$$P = x \cdot p$$

$$P = x \cdot (15 - 2x) \quad \text{тј.} \quad P = 15x - 2x^2$$

Функција граничног прихода, као први извод функције укупног прихода, сада је:

$$P'(x) = \left(15x - 2x^2\right)' = 15 - 4x.$$

Пример 5)

Функција тражње за неки производ дата је у облику $x = -5p + 40$. Одреди количину реализоване робе на тржишту и цену при којима се постиже максималан укупан приход. Колико износи максималан укупан приход?

Решење:

Област дефинисаности функције тражње одређена је са:

$p > 0 \wedge x > 0 \wedge x' < 0$ тј. $p > 0 \wedge -5p + 40 > 0 \wedge -5 < 0$ тј. $p \in (0, 8)$

Укупан приход износи:

$$P = x \cdot p \text{ тј. } P = (-5p + 40) \cdot p = -5p^2 + 40p$$

Нађимо максимум укупног прихода:

$$P'(p) = \left(-5p^2 + 40p\right)' = -10p + 40$$

Ако гранични приход изједначимо са нулом, добијамо:

$$-10p + 40 = 0 \text{ тј. } -10p = -40 \Rightarrow p = 4$$

Да бисмо проверили да ли се при овој јединичној цени постиже максимум, наћи ћемо вредност другог извода функције укупног прихода.

$$P''(p) = (-10p + 40)' = -10$$

Како је $P''(p) < 0$, функција има максимум за $p = 4$.

Пошто тачка $p = 4$ припада области дефинисаности функције тражње и како је у њој први извод укупног прихода једнак нули, а други извод мањи од нуле, онда је то оптимална јединична цена за коју укупан приход има максимум.

Количина робе реализоване на тржишту при тој цени $p_o = 4$ износи:

$$x_o = -5p_o + 40 = -5 \cdot 4 + 40 = -20 + 40 = 20.$$

Вредност максималног укупног прихода је:

$$P_{\max} = x_o \cdot p_o = 20 \cdot 4 = 80.$$

Пример 6)

Функција тражње једне робе дата је у облику $x = 20 \cdot e^{-\frac{p}{20}+4}$. Одреди количину робе и цену при којима ће укупан приход при продаји ове робе бити максималан. Колико износи максималан укупан приход?

Решење:

Област дефинисаности функције тражње одређена је следећим условима:

$p > 0 \wedge x > 0 \wedge x' < 0$ тј. $p > 0 \wedge 20 \cdot e^{-\frac{p}{20}+4} > 0 \wedge -e^{-\frac{p}{20}+4} < 0$ тј. $p \in (0, \infty)$

Укупан приход износи:

$$P = x \cdot p \text{ тј. } P = 20 \cdot e^{-\frac{p}{20}+4} \cdot p$$

Гранични приход је онда:

$$P'(p) = \left(20 \cdot e^{-\frac{p}{20}+4} \cdot p\right)' = 20 \cdot e^{-\frac{p}{20}+4} - pe^{-\frac{p}{20}+4} = e^{-\frac{p}{20}+4}(20-p)$$

Ако гранични приход изједначимо са нулом, добијамо:

$$e^{-\frac{p}{20}+4}(20-p) = 0 \text{ тј. } 20 - p = 0 \Rightarrow p = 20$$

Тачка $p = 20$ припада области дефинисаности функције тражње и у њој је први извод укупног прихода једнак нули. Како је $P'(p) > 0$ за $p \in (0, 20)$ и $P'(p) < 0$ за $p \in (20, \infty)$, закључујемо да за цену $p = 20$ функција укупног прихода има максимум који износи:

$$P_{\max} = 20 \cdot e^{-\frac{20}{20}+4} \cdot 20 = 400 \cdot e^{-1+4} = 400e^{-3}$$

Количина при којој се постиже максималан укупан приход је:

$$x_o = 20 \cdot e^{-\frac{20}{20}+4} = 20 \cdot e^{-1+4} = 20e^{-3}$$

Пример 7)

Функција тражње за неки производ дата је у облику $x = -2p + 16$.

а) Испитај како повећање цене са нивоа $p = 2$ утиче на укупан приход.

б) Испитај како повећање количине са нивоа $x = 10$ утиче на укупан приход.

Решење:

а) Област дефинисаности функције тражње одређена је са:

$p > 0 \wedge x > 0 \wedge x' < 0$ тј. $p > 0 \wedge -2p + 16 > 0 \wedge -2 < 0$ тј. $p \in (0, 8)$

Тачка $p = 2$ припада области дефинисаности функције тражње.

Функција укупног прихода је:

$$P = x \cdot p \text{ тј. } P = (-2p + 16) \cdot p = -2p^2 + 16p$$

Функција граничног прихода по промењљивој p је:

$$P'(p) = (-2p^2 + 16p)' = -4p + 16$$

Вредност ове функције за цену $p = 2$ је:

$$P'(2) = -4 \cdot 2 + 16 = -8 + 16 = 8$$

$P'(2) > 0$, па се укупан приход повећава при повећању цене са нивоа $p = 2$.

б) Из дате функције тражње $x=-2p+16$, добијамо да је $2p=16-x$ тј. $p=\dfrac{16-x}{2}$

односно $p=8-\dfrac{x}{2}$.

Област дефинисаности функције тражње одређена је са:

$x>0 \wedge p>0 \wedge p'<0$ тј. $x>0 \wedge 8-\dfrac{x}{2}>0 \wedge -\dfrac{1}{2}<0$ тј. $x\in(0,16)$

Тачка $x=10$ припада области дефинисаности функције тражње у инверзном облику.

Функција укупног прихода је:

$$P=x\cdot p \text{ тј. } P=x\cdot\left(8-\frac{x}{2}\right)=8x-\frac{x^2}{2}$$

Функција граничног прихода по промењивој x је:

$$P'(x)=\left(8x-\frac{x^2}{2}\right)'=8-x$$

Вредност ове функције за количину $x=10$ је:

$$P'(10)=8-10=-2$$

$P'(10)<0$, па се укупан приход смањује при повећању тражње са нивоа $x=10$.

Функција укупних трошкова

Трошкови су један од битних фактора који се разматра приликом формирања цена. Иако битан, трошкови нису једини фактор који треба анализирати при формирању цена. Трошкове је неопходно анализрати да би се видео ефекат цене на добит. Трошкови утичу на обим понуде, али је однос између криве понуде и тражње детерминанта која одређује цену. Трошкови су једини фактор интерног карактера и подаци о њима, иако најчешће нису адекватни, ипак су прецизнији и детаљнији него о деловању других екстерних фактора на цену. Како прецењивање, тако и потцењивање улоге трошкова у формирању цена, носи са собом низ негативних консеквенци. Свакако да трошкови представљају увек доњу границу, док је горња граница тражња. То је оквир у коме цене треба да се крећу.

Трошкови се састоје од фиксних трошкова (трошкови који постоје и када се ништа не производи) и варијабилних трошкова (трошкови који зависе од физичког обима производње).

Означимо са X неки производ. Ако са C означимо укупне трошкове производње тог производа, са x физички обим производње, са p_1, p_2 ,..., p_n цене фактора производње, онда се функција укупних трошкова C може изразити као функција више промењљивих:

$$C = f(x,\ p_1, p_2,.....p_n\ ).$$

Због једноставнијег проучавања функције трошкова, цене фактора производње ћемо сматрати константним, а функцију трошкова ћемо посматрати као функцију једне промењљиве x (обима производње). Функција укупних трошкова или функција трошкова производње тада представља функционалну зависност трошкова од обима производње тј. од количине произведене робе (x):

$$C = f(x)$$

Овако дефинисана функција C је позитивна растућа функција. Област дефинисаности функције укупних трошкова одређује се из услова:

1. $x > 0$ (обим производње је увек позитиван)
2. $C > 0$ (укупни трошкови производње су позитивни)
3. $C' > 0$ (пораст производње повећава укупне трошкове производње)

Најчешћи облици функције укупних трошкова су:

1) $C = ax + b$ (ax - варијабилни трошкови, b - фиксни трошкови)
   нпр. $C = 20x + 100$

2) $C = ax^2 + bx + c$ нпр. $C = 3x^2 - 80x + 672$

3) $C = ax^3 + bx^2 + cx + d$ нпр. $C = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$

4) $C = ae^{bx}$ нпр. $C = 3{,}2e^{0{,}4x}$

Функција просечних трошкова

Просечни трошкови производње показују кретање економичности у производњи. Њихова минимална вредност представља остварење пуне економичности у пословању предузећа за дату производњу.

Морају се знати просечни трошкови за сваки производ за који се цена формира. Цена по јединици производа може се дати само ако се претпостави одређени обим прозиводње. Трошкови по јединици производа су функција обима производње и тачни су само за одређени ужи оквир обима производње.

Циљ је постизање максимума укупне добити, а не добити по јединици производа. Дугорочно пројектовани просечни трошкови, полазећи од стандардног обима производње у планском периоду, погодна су концепција која води постизању максимума укупне добити. Планирањем и предвиђањем трошкова и тражње може се доћи до задовољавајућег одговора на питање која је то цена која омогућава остварење најповољнијег износа добити у планском периоду. Основна улога трошкова је да укажу која би се добит остварила при алтернативним ценама и обимима производње.

Полазна основа је политика цена на основу које се предузеће опредељује за одређену концепцију трошкова, док изабрана концепција трошкова представља аналитички оквир да се изабере одговарајућа метода формирања цена. Када се утврде базични трошкови мора се одговорити на питање која ће се концепција трошкова користити. То зависи од тражње, од конкурнеције, од државе. При формулисању цена користе се трошкови по јединици производа, при чему калкулација садржи, како трошкове производње, тако и трошкове продаје.

Функција просечних трошкова или трошкова по јединици производа представља количник укупних трошкова (C) и количине произведене робе (x). Означавамо је са $\overline{C}$ и онда је:

$$\overline{C} = \frac{C}{x}$$

Област дефинисаности функције просечних трошкова одређена је облашћу дефинисаности функције укупних трошкова.

Функција граничних трошкова

Нека је $x_0 \in (0, b)$ и нека је Δx такво да $x_0 + \Delta x \in (0, b)$, где је $b \in R^+$, $\forall x \in [0, b]$, $C(x) > 0$. Ако се обим производње повећа са нивоа x_0 за Δx, онда ће се укупни трошкови повећати са нивоа $C(x_0)$ за

$$\Delta C = C(x_0 + \Delta x) - C(x_0).$$

Гранични трошкови у тачки $x_0 \in (0, b)$, у ознаци $C'(x_0)$, једнаки су граничној вредности тј.

$$C'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x_0 + \Delta x) - C(x_0)}{\Delta x}$$

ако она постоји и ако је коначна.

Помоћу функције граничних трошкова испитујемо промену укупних трошкова и просечних трошкова при промени обима производње x. Економска интерпретација граничних трошкова је следећа: Ако се физички обим производње повећа са нивоа x_0 за јединицу, укупни трошкови ће се повећати приближно за $C'(x_0)$.

Уколико нам је позната функција граничних трошкова, можемо одредити функцију укупних трошкова на следећи начин:

$$C'(x)=\frac{dC}{dx}\Rightarrow dC=C'(x)\cdot dx\text{, односно}$$

$$C=\int C'(x)\cdot dx+c$$

Интеграциону константу c одређујемо из услова да је $C(0)=c$.

Веза између просечних и граничних трошкова је следећа: Ако просечни трошкови расту са порастом производње, тада су гранични трошкови већи од просечних трошкова, а ако просечни трошкови опадају са порастом производње, тада су гранични трошкови мањи од просечних трошкова. У то се можемо лако уверити.

Ако просечни трошкови расту са порастом производње, онда је:

$$\overline{(C)}'>0 \text{ тј. } \left(\frac{C}{x}\right)'>0\Rightarrow\frac{C'x-C}{x^2}>0$$

$$C'x-C>0\Rightarrow C'x>C\Rightarrow C'>\frac{C}{x} \text{ тј. } C'>\overline{C}.$$

Ако просечни трошкови опадају са порастом производње, онда је:

$$\overline{(C)}'<0 \text{ тј. } \left(\frac{C}{x}\right)'<0\Rightarrow\frac{C'x-C}{x^2}<0$$

$$C'x-C<0\Rightarrow C'x<C\Rightarrow C'<\frac{C}{x} \text{ тј. } C'<\overline{C}.$$

Ученици средње школе изучавају функције трошкова у оквиру примене диференцијалног рачуна на економске функције. У том смислу, они решавају проблеме одређивања минималних просечних трошкова, као и одређивања количине производа при којој се они остварују. Такође, решавају и проблеме у којима се испитује до које количине производа гранични трошкови опадају. С обзиром на чињеницу да ученици економских струка у средњој школи не изучавају интегрални рачун, они се не баве проблемима одређивања укупних трошкова производње када су познати маргинални трошкови.

Пример 8)

Дата је функција укупних трошкова $C = x^3 - 8x^2 + 50x$.

а) Одреди обим производње за који су просечни трошкови минимални.

б) Покажи да су у тачки минимума просечних трошкова (x_0), просечни трошкови једнаки граничним трошковима.

Решење:

а) Укупни трошкови су:

$$C = x^3 - 8x^2 + 50x$$

Онда је функција просечних трошкова:

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{x^3 - 8x^2 + 50x}{x} = x^2 - 8x + 50$$

Нађимо минимум просечних трошкова:

$$\overline{C}'(x) = \left(x^2 - 8x + 50\right)' = 2x - 8$$

Ако први извод просечних трошкова изједначимо са нулом, добијамо:

$$2x - 8 = 0 \text{ тј. } 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Да бисмо проверили да ли се при овом обиму производње постиже минимум, наћи ћемо вредност другог извода функције просечних трошкова.

$$\overline{C}''(x) = \left(2x - 8\right)' = 2$$

Како је $\overline{C}''(x) > 0,$ функција просечних трошкова има минимум за $x = 4$.

Дакле, обим производње за који су просечни трошкови минимални је $x_0 = 4$.

б) Како је функција просечних трошкова: $\overline{C} = x^2 - 8x + 50$, то је:

$$\overline{C}(x_0) = \overline{C}(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 50 = 16 - 32 + 50 = 34$$

Функција граничних трошкова је у овом случају:

$$C'(x) = \left(x^3 - 8x^2 + 50x\right)' = 3x^2 - 16x + 50$$

Ако нађемо њену вредност у тачки минимума просечних трошкова тј. за $x_0 = 4$:

$$C'(x_0) = C'(4) = 3 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 50 = 48 - 64 + 50 = 34$$

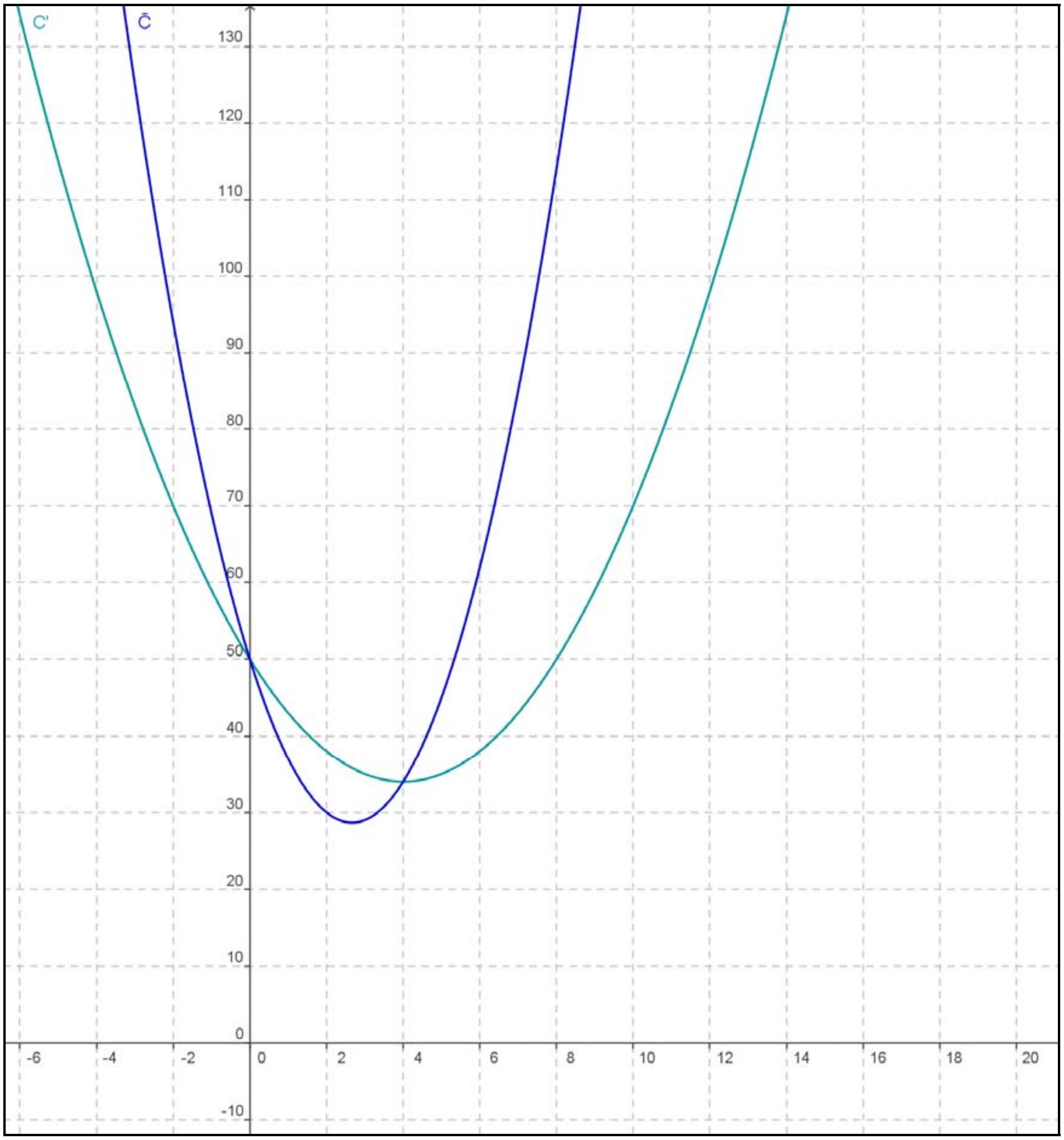
Дакле, важи да су у тачки минимума просечних трошкова једнаки просечни и гранични трошкови. Притом је то једина тачка у којој то важи, јер ако поставимо једначину:

$\overline{C} = C'$ тј. $x^2 - 8x + 50 = 3x^2 - 16x + 50$, добијамо:

$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 2x(x - 4) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Како обим производње мора бити већи од нуле, закључујемо да је једино решење ове једначине $x = 4$. Једнакост функција граничних и просечних трошкова у тачки минимума просечних трошкова тј. $x = 4$ може се приказати и графички (Слика 3).



Слика 3

У тачки минимума просечних трошкова (x_0), просечни трошкови су увек једнаки граничним трошковима. То лако можемо утврдити. Ако просечни трошкови постижу минимум у тачки x_0 , онда је у тој тачки:

$$\overline{(C)}' = 0 \text{ тј. } \left(\frac{C}{x}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{C'x - C}{x^2} = 0$$

$$C'x - C = 0 \Rightarrow C'x = C \Rightarrow C' = \frac{C}{x} \text{ тј. } C' = \overline{C}.$$

Пример 9)

Дата је функција укупних трошкова $C = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$.

а) Одреди функцију граничних трошкова.

б) До које количине производа гранични трошкови опадају?

Решење:

а) Функција граничних трошкова је у овом случају:

$$C'(x) = \left(x^3 - 6x^2 + 15x + 10\right)' = 3x^2 - 12x + 15$$

б) Функција граничних трошкова опада када је њен први извод тј. други извод функције укупних трошкова, негативан. Одредимо тај извод:

$$C''(x) = \left(3x^2 - 12x + 15\right)' = 6x - 12$$

Из $C''(x) < 0$, добијамо: $6x - 12 < 0$ тј. $6x < 12 \Rightarrow x < 2$.

Дакле, гранични трошкови опадају када се обим производње мења од 0 до 2.

Пример 10)

Дата је функција укупног прихода $P = 96x - 2x^2$ и функција укупних трошкова $C = x^2 + 468$. Одреди обим производње при коме су приходи по јединици производа једнаки просечним трошковима.

Решење:

Функција укупног прихода је $P = 96x - 2x^2$. Како је $P = x \cdot p$, овде ће бити

$$P = 96x - 2x^2 = x \cdot (96 - 2x), \text{ па је } p = 96 - 2x$$

Ова функција означава просечан приход по јединици производа.

Функција укупних трошкова је $C = x^2 + 468$. Како је $\overline{C} = \dfrac{C}{x}$, овде ће бити

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{x^2 + 468}{x} = x + \frac{468}{x}$$

Ова функција означава просечне трошкове. Приходи по јединици производа једнаки су просечним трошковима ако је:

$$p = \overline{C} \Rightarrow 96 - 2x = x + \frac{468}{x}$$

$$96 - 3x = \frac{468}{x}$$

$$96x - 3x^2 = 468 \Rightarrow 3x^2 - 96x + 468 = 0 \Rightarrow x^2 - 32x + 156 = 0$$

Решења ове једначине су: $x_1 = 6,\ x_2 = 26$.

Пример 11)

Дата је функција маргиналних трошкова $C' = 3 + 4e^x$. Одреди функцију просечних трошкова, уз услов $C(0) = 80$.

Решење:

Најпре одређујемо функцију укупних трошкова:

$$C = \int C'(x) \cdot dx + c$$

$$C = \int (3 + 4e^x) \cdot dx + c$$

$$C = \int 3 \cdot dx + 4\int e^x \cdot dx + c$$

$$C = 3x + 4e^x + c$$

Из услова $C(0) = 80$, добијамо:

$$3 \cdot 0 + 4e^0 + c = 80$$
$$0 + 4 + c = 80 \Rightarrow c = 76$$

Функција укупних трошкова дата је са: $C = 3x + 4e^x + 76$.

Онда је функција просечних трошкова:

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{3x + 4e^x + 76}{x} = 3 + \frac{4e^x}{x} + \frac{76}{x}$$

Функција добити

Рентабилност пословања предузећа представљена је величином добити. У производном предузећу добит се утврђује као разлика између укупног прихода и укупних трошкова производње. Добит остварена у производњи неког производа X , у ознаци *D*, дефинише се као разлика укупног прихода *P* и укупних трошкова *C*, тј.

$$D = P - C$$

Ако су за неки производ познате функција прихода, функција трошкова и функција тражње $x = f(p)$, функцију добити можемо изразити као функцију од једне промењиве:

$$D(x) = P(x) - C(x) \text{ (обима производње) или}$$

$$D(p) = p \cdot f(p) - C(f(p)) \text{ (јединичне цене).}$$

Истовремено посматрање прихода и трошкова омогућава да се одреди интервал производње у коме предузеће остварује добит, водећи рачуна о производним могућностима и о тржишним условима за пласман робе. У том интервалу је пословање рентабилно. Под интервалом рентабилности за неки производ X, подразумева се интервал производње (x_1, x_2) за који важи да је $D > 0$ тј. $P - C > 0$, односно $P > C$. Границе овог интервала одређују се из услова $D(x) = 0$ тј. $P(x) - C(x) = 0$, што значи за производњу за коју су приходи једнаки трошковима. У економији се говори о доњој и горњој граници рентабилности производње.

Пошто су функције прихода и трошкова диференцијабилне на интервалу у ком су дефинисане, онда је и функција добити диференцијабилна на том интервалу. Занимљив је ниво производње x_0 при којем се остварује максимална добит. Он се одређује из услова $D'(x) = 0$ и $D''(x) < 0$, на основу теореме о екстремним вредностима. Обим производње $x_0 \in (x_1, x_2)$ за који се остварује највећа добит назива се оптимална производња, а цена $p_0 = f^{-1}(x_0)$ назива се оптимална продајна цена.

Можемо да запазимо да максималну добит добијамо из услова:

$$D'(x) = 0 \text{ тј. } P'(x) - C'(x) = 0 \text{ или}$$

$$P'(x) = C'(x).$$

Значи у тачки где је остварена највећа добит, гранични приход једнак је граничним трошковима.

Ученици средње школе изучавају функцију добити, повезујући знања о изводу функције и његовој примени на екстремне вредности са знањима из стручних економских предмета, као што је рецимо предмет Основи економије. У том смислу, они решавају проблеме одређивања доње и горње границе интервала рентабилности производње. Такође, одређују оптималну количину тј. производњу и оптималну цену, при којима се остварује максимална добит и израчунавају колико она износи.

Пример 12)

За неки производ функција укупног прихода је $P = -2x^2 + 140x$ и функција просечних трошкова је $\overline{C} = 3x + 60 + \dfrac{30}{x}$.

а) Одреди количину производа и цену при којима ће предузеће остварити највећу добит.

б) Колико износи максимална добит?

Решење:

а) Да бисмо одредили функцију добити као $D(x) = P(x) - C(x)$, морамо најпре наћи функцију укупних трошкова. Из:

$$\overline{C} = \frac{C}{x} \text{ добијамо да је } C = \overline{C} \cdot x$$

$$C = \left(3x + 60 + \frac{30}{x}\right) \cdot x = 3x^2 + 60x + 30$$

Онда је функција добити:

$$D(x) = P(x) - C(x) \text{ тј.}$$

$$D(x) = -2x^2 + 140x - \left(3x^2 + 60x + 30\right)$$

$$D(x) = -2x^2 + 140x - 3x^2 - 60x - 30 \text{ тј.}$$

$$D(x) = -5x^2 + 80x - 30$$

Извод ове функције је: $D'(x) = \left(-5x^2 + 80x - 30\right)'$

$$D'(x) = -10x + 80$$

Да бисмо одредили оптималну производњу, имамо услов $D'(x) = 0$ тј.

$$-10x + 80 = 0 \Rightarrow -10x = -80 \Rightarrow x = 8$$

Онда је:

$$D''(x) = \left(-10x + 80\right)' = -10$$

Како је $D''(x) < 0$, функција има максимум за $x = 8$ тј. количина производа при којој ће предузеће остварити највећу добит је $x_0 = 8$.

Да бисмо одредили оптималну цену, кренућемо од дате функције укупног прихода $P = -2x^2 + 140x$. Како је:

$$P = p \cdot x \text{ добијамо да је } p = \frac{P}{x}$$

$$p = \frac{-2x^2 + 140x}{x} = -2x + 140$$

Онда је $p_0 = -2x_0 + 140 = -2 \cdot 8 + 140 = -16 + 140 = 124$

б) Максималну добит предузеће ће остварити при количини производа $x_0 = 8$, па је:

$$D_{\max} = D(x_0)$$

$$D_{\max} = -5 \cdot 8^2 + 80 \cdot 8 - 30$$

$$D_{\max} = -5 \cdot 64 + 640 - 30$$

$$D_{\max} = -320 + 640 - 30 = 290$$

Пример 13)

За један производ дате су функција укупних трошкова $C = x^2 + 12$ и функција тражње у инверзном облику $p = 15 - 2x$.

а) Одреди функцију укупног прихода у зависности од продате количине робе.

б) Одреди интервал рентабилности производње.

в) Одреди максималну добит.

Решење:

а) Како је укупан приход производ продате количине робе и цене по јединици производа, имаћемо:

$$P = x \cdot p$$

$$P(x) = x \cdot (15 - 2x) \text{ тј. } P(x) = 15x - 2x^2$$

б) Да бисмо одредили интервал рентабилности производње (x_1, x_2) за који важи да је $D > 0$ тј. $P - C > 0$, односно $P > C$, наћи ћемо границе овог интервала из услова $D(x) = 0$ тј. $P(x) - C(x) = 0$.

$$P(x) - C(x) = 0$$

$$15x - 2x^2 - (x^2 + 12) = 0$$

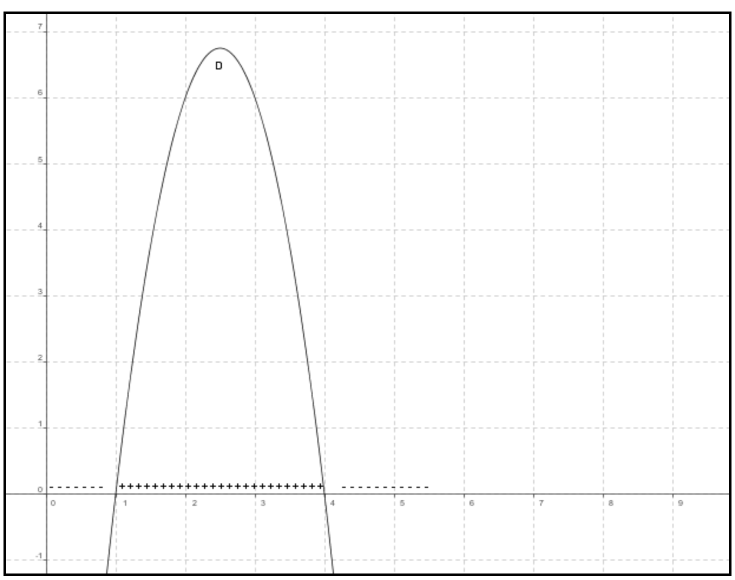
$$15x - 2x^2 - x^2 - 12 = 0 \text{ тј. } -3x^2 + 15x - 12 = 0$$

Ако поделимо ову једначину са –3, добијамо:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \text{, па је:}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 4$$

x_1 и x_2 су доња и горња граница интервала рентабилности, па је производња рентабилна на интервалу $x \in (1, 4)$. То се може приказати и графички (Слика 4).



Слика 4

в) Извод ове функције је: $D'(x) = \left(-3x^2 + 15x - 12\right)'$

$$D'(x) = -6x + 15$$

Да бисмо одредили оптималну производњу, имамо услов $D'(x) = 0$ тј.

$$-6x + 15 = 0 \Rightarrow -6x = -15 \Rightarrow x = 2{,}5$$

Онда је:

$$D''(x) = \left(-6x + 15\right)' = -6$$

Како је $D''(x) < 0$, функција има максимум за $x = 2{,}5$ тј. количина производа при којој ће предузеће остварити највећу добит је $x_0 = 2{,}5$.

Максимална добит је:

$$D_{\max} = D(x_0)$$

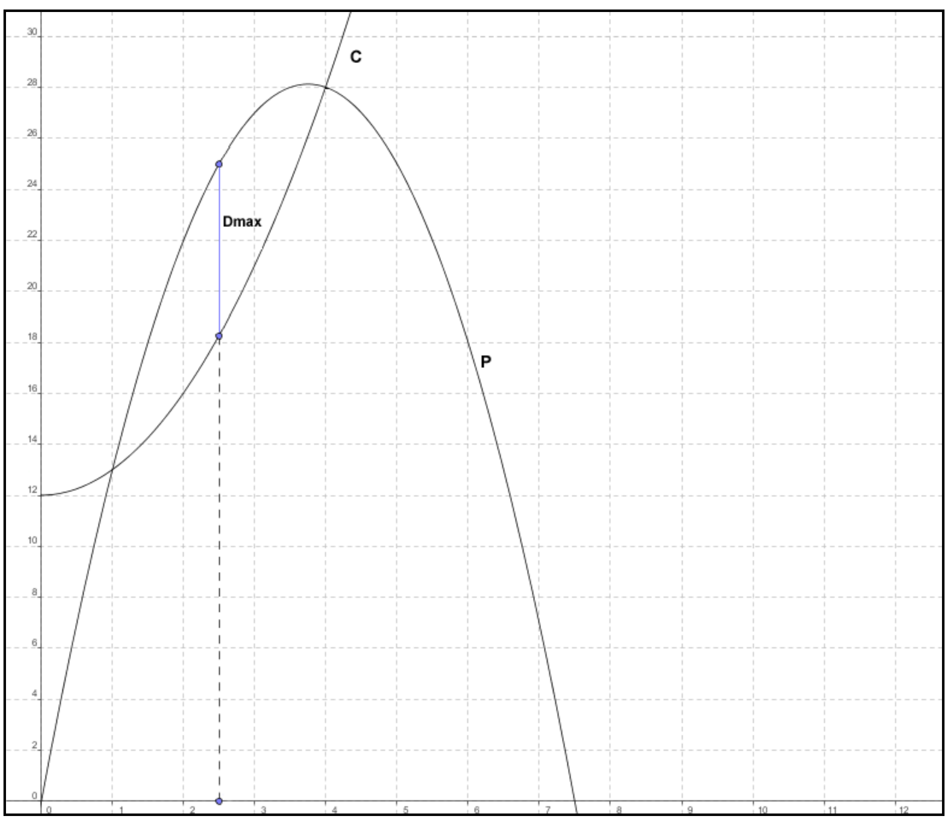
$$D_{\max} = -3 \cdot 2{,}5^2 + 15 \cdot 2{,}5 - 12$$

$$D_{\max} = -3 \cdot 6{,}25 + 37{,}5 - 12$$

$$D_{\max} = -18{,}75 + 37{,}5 - 12$$

$$D_{\max} = 6{,}75$$

Веза функција укупног прихода и укупних трошкова са максималном добити приказана је на следећој слици.



Слика 5

Пример 14)

Предузеће производи једну врсту робе X са функцијом укупних трошкова $C = 3x^2 + 35000000$, где је x месечна производња и $x = -\frac{p}{2} + 15000$ функција тражње.

Цена једног производа је p.

а) Одреди интервал рентабилитета производње.

б) Одреди добит при производњи од 2000 производа.

в) Колика је добит при минималним просечним трошковима?

Решење:

а) Из дате функције тражње $x = -\frac{p}{2} + 15000$, добијамо да је:

$$\frac{p}{2} = -x + 15000 \text{ тј. } p = -2x + 30000$$

Онда је укупан приход, као производ продате количине робе и јединичне цене, једнак

$$P = x \cdot p$$
$$P(x) = x \cdot (-2x + 30000) \text{ тј. } P(x) = -2x^2 + 30000x$$

Да бисмо одредили интервал рентабилности производње (x_1, x_2), наћи ћемо границе овог интервала из услова $D(x) = 0$ тј. $P(x) - C(x) = 0$.

$$P(x) - C(x) = 0$$
$$-2x^2 + 30000x - (3x^2 + 35000000) = 0$$
$$-2x^2 + 30000x - 3x^2 - 35000000 = 0 \text{ тј.}$$
$$-5x^2 + 30000x - 35000000 = 0$$

Ако поделимо ову једначину са –5, добијамо:

$$x^2 - 6000x + 7000000 = 0$$

Решења ове једначине су: $x_1 = 1586$, $x_2 = 4414$

x_1 и x_2 су доња и горња граница интервала рентабилности. Функција добити је позитивна на интервалу $x \in (1586, 4414)$, па је производња ту рентабилна.

б) Износ добити при производњи од 2000 производа је:

$$D(2000) = -5 \cdot 2000^2 + 30000 \cdot 2000 - 35000000 \text{ тј.}$$
$$D(2000) = -5 \cdot 4000000 + 60000000 - 35000000$$
$$D(2000) = -20000000 + 25000000$$
$$D(2000) = 5000000$$

в) Функција просечних трошкова за ову врсту робе је:

$$\overline{C}=\frac{C}{x}=\frac{3x^2+35000000}{x}=3x+\frac{35000000}{x}$$

Нађимо минимум просечних трошкова:

$$\overline{C}'(x)=\left(3x+\frac{35000000}{x}\right)'=3-\frac{35000000}{x^2}$$

Ако први извод просечних трошкова изједначимо са нулом, добијамо:

$$3-\frac{35000000}{x^2}=0 \text{ тј. } x=3416$$

Да бисмо проверили да ли се при овом обиму производње постиже минимум, наћи ћемо вредност другог извода функције просечних трошкова.

$$\overline{C}''(x)=\left(3-\frac{35000000}{x^2}\right)'=\frac{70000000}{x^3}$$

Како је $\overline{C}''(3416)>0$, функција просечних трошкова има минимум за $x=3416$.

Износ добити при производњи од 3416 производа је:

$$D(3416)=-5\cdot 3416^2+30000\cdot 3416-35000000 \text{ тј.}$$

$$D(3416)=-5\cdot 11669056+102480000-35000000$$

$$D(3416)=-58345280+67480000$$

$$D(3416)=9134720$$

ЕЛАСТИЧНОСТ ЕКОНОМСКИХ ФУНКЦИЈА

Једно од мерила одзивности које се користи кроз читав поступак менаџерског одлучивања је еластичност, која се дефинише као процентуална промена у некој зависној промењљивој (y), која настаје услед 1%-тне промене у вредности неке независне промењљиве (x). Једначина за израчунавање еластичности је:

$$\text{Еластичност} = \frac{\text{процентуална промена код x}}{\text{процентуална промена код y}}$$

Концепт еластичности просто повезује процентуалну промену код једне промењљиве са неком датом процентуалном променом код друге промењљиве.

Нека је $y = f(x)$ диференцијабилна функција у интервалу (a, b). Еластичност функције $f(x)$ у тачки x из овог интервала, у ознаци $E_{y,x}$, је гранична вредност количника релативне промене функције и релативне промене аргумента у тачки x, тј.

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Из дефиниције се види да еластичност не зависи од јединице мере за x и y.

На основу оваквог тумачења еластичности произилази да еластичност функције у тачки x показује за колико се процената приближно мења вредност функције када се вредност независно промењљиве мења за 1%. Израчуната вредност $E_{y,x}$ је коефицијент еластичности. Кажемо да је:

а) функција $f(x)$ **нееластична** у тачки x ако је $|E_{y,x}| < 1$ (тада се при промени независно промењљиве за 1%, функција мења за мање од 1%).

б) функција $f(x)$ **еластична** у тачки x ако је $|E_{y,x}| > 1$ (тада се при промени независно промењљиве за 1%, функција мења за више од 1%).

ц) функција $f(x)$ има **јединичну еластичност** у тачки x ако је $|E_{y,x}| = 1$ (тада се при промени независно промењљиве за 1%, функција мења такође за1%).

Еластичност функције тражње

Закон тражње каже да ће купци одговорити на снижење цене куповином више производа. Међутим, он не говори ништа о степену поузданости или одзива потрошача на ценовну промену. Допринос теорије еластичности лежи у чињеници да она не говори само о томе да потрошачева тражња одговара на промену цене, већ и о степену одзивности потрошача на промену цене. За конструктивно менаџерско одлучивање, фирма мора познавати осетљивост или одзивност тражње на промене у факторима који сачињавају функцију тражње која објашњава промене тражње.

Поред тога што се користи у анализи тражње, концепт се користи у финансијама, где се утицаји промена у продаји на зараду, при различитим нивоима производње (тзв. оперативни левериџ), и различите финансијске структуре (финансијски левериџ), мере преко неког фактора еластичности.

Фирма мора да буде у стању да ефективно реагује на промене у економском окружењу. На пример, фирма мора да разуме ефекте коју на тражњу имају цене и приходи потрошача да би одредила евентуалну потребу за снижавањем цена како би се надокнадио пад продаје узрокован пословном рецесијом (падом прихода). Слично овоме, осетљивост тражње на промене у обиму оглашавања мора бити квантификована уколико се жели да фирма правовремено и на прави начин одреагује на ценовне или промене у оглашавању које су настале код конкуренције.

С обзиром да је функција тражње дата са $x = f(p)$ (односно да је тражња функција цене), имамо да је еластичност функције тражње у тачки p:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x'$$

и представља релативну промену тражње на јединицу релативне промене цене.

Имајући у виду област дефинисаности функције тражње ($p > 0$, $x > 0$, $x' < 0$), закључујемо да је $E_{x,p} < 0$ па је:

а) тражња нееластична у тачки p ако $E_{x,p} \in (-1, 0)$

б) тражња еластична у тачки p ако $E_{x,p} \in (-\infty, -1)$

ц) тражња има јединичну еластичност у тачки p ако је $E_{x,p} = -1$.

Тако, на пример ако је $E_{x,4} = -7$, тражња је за цену p=4 еластична. То значи да, ако цена порасте са нивоа p=4 за 1%, тада ће тражња опасти приближно за 7%.

У инверзном облику функције тражње $p = f^{-1}(x)$ (цена је функција количине), имамо да је еластичност (флексибилност) цене у тачки x:

$$E_{p,x} = \frac{x}{p} \cdot p'$$

<u>*Пример 15)*</u>

Функција тражње за неки производ је $x = 15 - 2p$.

Испитај њену еластичност за p=3 и p=7.

<u>*Решење:*</u>

Еластичност функције тражње у тачки p је:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = -\frac{2p}{15-2p}$$

Онда је $E_{x,3} = -\frac{2 \cdot 3}{15 - 2 \cdot 3} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$ тј. $E_{x,3} \in (-1, 0)$.

Тражња је за цену p=3 нееластична, јер ако се цена повећа са нивоа p=3 за 1%, тада ће тражња опасти приближно за $\frac{2}{3}$%.

Слично је $E_{x,7} = -\frac{2 \cdot 7}{15 - 2 \cdot 7} = -\frac{14}{1} = -14$ тј. $E_{x,7} \in (-\infty, -1)$.

Тражња је за цену p=7 еластична, јер ако се цена повећа са нивоа p=7 за 1%, тада ће тражња опасти за око 14%.

<u>*Пример 16)*</u>

Дата је функција тражње за неки производ у облику $x = -200p + 1000$. Одреди интервале у којима се може кретати цена тако да тражња буде еластична, односно нееластична.

<u>*Решење:*</u>

Област дефинисаности функције тражње одређена је са:

$$p > 0 \wedge x > 0 \wedge x' < 0 \text{ тј. } p > 0 \wedge -200p + 1000 > 0 \wedge -200 < 0$$

$$-200p > -1000 \Rightarrow p < 5 \text{ тј. } p \in (0, 5)$$

Еластичност функције тражње у тачки p је:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{-200p + 1000} \cdot (-200p + 1000)'$$

$$E_{x,p} = \frac{-200p}{-200p + 1000}$$

Одредимо цену при којој се постиже јединична еластичност функције тражње тј. за коју је $E_{x,p} = -1$:

$$\frac{-200p}{-200p+1000} = -1 \Rightarrow \quad \frac{p}{p-5} = -1 \Rightarrow 2p = 5 \Rightarrow p = \frac{5}{2}$$

Ова цена дели интервал $(0,5)$ на два интервала $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ и $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$. У једном од њих је тражња еластична, а у другом нееластична. Да бисмо то утврдили, проверићемо еластичност за произвољну цену из једног од интервала. Рецимо, цена p=1 припада интервалу $\left(0, \frac{5}{2}\right)$. Како је

$$E_{x,1} = \frac{-200}{-200+1000} = -\frac{200}{800} = -\frac{1}{4} \text{ тј. } E_{x,1} \in (-1, 0),$$

тражња је нееластична за цену p=1. Закључујемо да је тражња нееластична у интервалу $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, а еластична у интервалу $\left(\frac{5}{2}, 5\right)$.

<u>*Пример 17)*</u>

На тржишту одређеног типа робе функција тражње је облика $x = -0{,}6p + 6$. Проанализрати алгебарски и табеларно еластичност тржишне тражње у односу на цену.

<u>*Решење:*</u>

Област дефинисаности функције тражње одређена је са:

$$p > 0 \wedge x > 0 \wedge x' < 0 \text{ тј. } p > 0 \wedge -0{,}6p + 6 > 0 \wedge -0{,}6 < 0$$

$$-0{,}6p > -6 \Rightarrow p < 10 \text{ тј. } p \in (0, 10)$$

Еластичност функције тражње у тачки p је:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{-0{,}6p+6} \cdot (-0{,}6p+6)'$$

$$E_{x,p} = \frac{-0{,}6p}{-0{,}6p+6}$$

Добијамо да је: $E_{x,p} = 0$ ако је $p = 0$;

$$E_{x,p} = -1 \text{ ако је } \frac{-0{,}6p}{-0{,}6p+6} = -1 \Rightarrow \quad \frac{p}{p-10} = -1 \Rightarrow 2p = 10 \Rightarrow p = 5;$$

$E_{x,p} < -1$ ако је $p > 5$;

$E_{x,p} > -1$ ако је $p < 5$.

Табеларно то можемо приказати на следећи начин:

$E_{x,p}=0$	$p=0$	$x=6$
$E_{x,p}<-1$	$5<p<10$	$0<x<3$
$E_{x,p}=-1$	$p=5$	$x=3$
$E_{x,p}>-1$	$0<p<5$	$3<x<6$
$E_{x,p}\to-\infty$	$p\to10$	$x=0$

Потражња за неком робом не зависи само од цене те робе. Посебно се посматра веза између потражње робе и прихода које остварује купац или домаћинство. Уочене су законитости које притом важе и обликоване су у облику Енгелових закона (по Енгелу који је истраживао ове законитости у Саској 1857. год.)

Први Енгелов закон: ”Издаци домаћинства за храну, у односу на приход, нису еластични”. (издаци за храну релативно падају кад приход домаћинства расте).

Други Енгелов закон: ”Еластичност издатака за одевање, у односу на приход, приближно је једнака јединици.” (постотак издвајања за одевање остаје приближно исти без обзира на висину прихода домаћинства).

Трећи Енгелов закон: ”Еластичност издатака за стан, грејање и струју приближно је једнака јединици.”

Четврти Енгелов закон: ”Што је већи приход домаћинства, већи је постотак издатака за културне потребе, разоноду и слично.”

Јасно је да промене у дохотку утичу на понашање потрошача – повећање дохотка омогућује нам куповину скупље и квалитетније робе, а његово смањење тера нас на штедњу и одрицање. Неких ствари се теже одричемо (нпр. хране), а других лакше. Доходовна еластичност мери осетљивост потражње на промену дохотка потрошача.

Случајеви који се разликују наведени су у табели 4:

Доходовна еластичност	Врста робе
$E_{x,p}<0$	инфериорна роба
$E_{x,p}=0$	неутрална роба
$0<E_{x,p}<1$	нормална, нужна роба
$E_{x,p}>1$	нормална, луксузна роба

Табела 4

Без детаљнијег коментарисања ове класификације, закључујемо да је она повезана са употребним вредностима роба и задовољством конзумената. Нпр. инфериорна роба има негативну еластичност, што значи да са порастом дохотка потрошачи мање купују ову робу. Очито се у том случају ради о роби за коју постоје скупљи супститути. Ова класификација користи се, нпр. код креирања порезне политике.

Еластичност функције прихода

Еластичност прихода показује релативне, приближно процентуалне, промене укупног прихода проузроковане релативним променама цене, односно тражње. Раније смо уочили да и гранични приход даје слична обавештења. Разлика је у томе што гранични приход изражава промену прихода у апсолутним вредностима, а еластичност прихода то чини у релативним показатељима.

Еластичост прихода у односу на цену представљена је преко еластичности тражње:

$$E_{P,p} = \frac{p}{P} \cdot P' = \frac{p}{x \cdot p} \cdot (x \cdot p)' = \frac{1}{x} \cdot (x + px') \text{ тј.}$$

$$E_{P,p} = 1 + \frac{p}{x} \cdot x' = 1 + E_{x,p}.$$

Еластичост прихода у односу на тражњу представљена је преко еластичности цене:

$$E_{P,x} = \frac{x}{P} \cdot P' = \frac{x}{x \cdot p} \cdot (x \cdot p)' = \frac{1}{p} \cdot (p + xp') \text{ тј.}$$

$$E_{P,x} = 1 + \frac{x}{p} \cdot p' = 1 + E_{p,x}.$$

Веза између еластичности функције тражње и зависности промене укупног прихода од промене цене производа и продаје производа на тржишту је следећа:

У области дефинисаности функције тражње у којој је тражња нееластична, односно $E_{x,p} \in (-1, 0)$, укупан приход опада са даљом продајом производа на тржишту, а расте са порастом цене производа.

У области дефинисаности функције тражње у којој је тражња еластична, односно $E_{x,p} \in (-\infty, -1)$, укупан приход расте са даљом продајом производа на тржишту, а опада са порастом цене производа.

У области дефинисаности функције тражње у којој тражња има јединичну еластичност, укупан приход је константан.

Пример 18)

За одређени производ функција тражње је облика $x = -2p + 6$.

а) Израчунај функцију граничног прихода.

б) Израчунај еластичност прихода у односу на цену.

в) Покажи како се приход мења при повећању цене са нивоа $p = \frac{1}{3}$ помоћу граничног прихода и помоћу еластичности прихода.

Решење:

а) Како је укупан приход производ количине и цене, имамо:

$$P = x \cdot p$$

$$P = (-2p + 6) \cdot p \quad \text{тј.} \quad P = -2p^2 + 6p$$

(укупан приход у зависности од јединичне цене).

Функција граничног прихода, као први извод функције укупног прихода, је:

$$P'(p) = \left(-2p^2 + 6p\right)' = -4p + 6 .$$

б) На основу претходно изнетог је еластичност прихода у односу на цену:

$$E_{P,p} == 1 + E_{x,p} ,$$

а како је еластичност функције тражње у тачки p:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{-2p + 6} \cdot (-2p + 6)'$$

$$E_{x,p} = \frac{-2p}{-2p + 6} = \frac{p}{p - 3}$$

добијамо

$$E_{P,p} == 1 + \frac{p}{p - 3} = \frac{2p - 3}{p - 3}$$

в) За цену $p = \frac{1}{3}$, вредност граничног прихода је:

$$P'\left(\frac{1}{3}\right) = -4 \cdot \frac{1}{3} + 6 = \frac{14}{3}$$

То значи да ће се при малом повећању цене са нивоа $p = \frac{1}{3}$, укупан приход повећати за $\frac{14}{3}$ новчане јединице на јединичну промену цене.

За цену $p = \frac{1}{3}$, еластичност прихода је:

$$E_{P,\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{3} - 3}{\frac{1}{3} - 3} = \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{8}{3}} = \frac{7}{8}$$

То значи да се при малом повећању цене за 1% са нивоа $p = \frac{1}{3}$, укупан приход повећава за $\frac{7}{8}$%.

Еластичност функције укупних трошкова

Еластичност се, такође, користи у анализи трошкова производње да би се оценили ефекти промена у инпутима и њихов утицај на резултате (аутпут), као и ефекти које промене у аутпуту имају на трошкове.

С обзиром на чињеницу да је функција укупних трошкова дата са $C = f(x)$ (односно да су укупни трошкови функција обима производње), а да је функција просечних трошкова дата са $\overline{C} = \frac{C}{x}$, имамо да је еластичност функције укупних трошкова:

$$E_{C,x} = \frac{x}{C} \cdot C' = \frac{C'}{\overline{C}}.$$

Дакле, еластичност укупних трошкова представља однос између граничних и просечних трошкова производње.

Имајући у виду област дефинисаности функције укупних трошкова ($C > 0$, $x > 0$, $C' > 0$), закључујемо да је $E_{C,x} > 0$ па су:

а) укупни трошкови нееластични у тачки x ако $E_{C,x} \in (0, 1)$

б) укупни трошкови еластични у тачки x ако $E_{C,x} \in (1, \infty)$

ц) укупни трошкови имају јединичну еластичност у тачки x ако је $E_{C,x} = 1$.

Веза између еластичности функције укупних трошкова и утицаја промене производње на промену просечних трошкова је следећа:

У области дефинисаности функције укупних трошкова у којој су укупни трошкови нееластични, односно $E_{C,x} \in (0, 1)$, повећање производње изазива пропорционално мање повећање укупних трошкова, па се у том случају просечни трошкови смањују.

У области дефинисаности функције укупних трошкова у којој су укупни трошкови еластични, односно $E_{C,x} \in (1, \infty)$, повећање производње изазива пропорционално веће повећање укупних трошкова, па се у том случају просечни трошкови повећавају.

У области дефинисаности функције укупних трошкова у којој укупни трошкови имају јединичну еластичност, односно $E_{C,x} = 1$, повећање производње изазива пропорционално исто повећање укупних трошкова, па се у том случају просечни трошкови не мењају.

Пример 19)

Дата је функција укупних трошкова за неки производ $C = \frac{x^2}{100} + 20x + 900$.

Испитај њену еластичност за x=250, x=300 и x=350.

Решење:

Укупни трошкови су:

$$C = \frac{x^2}{100} + 20x + 900$$

Онда је функција просечних трошкова:

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{\frac{x^2}{100} + 20x + 900}{x} = \frac{x}{100} + 20 + \frac{900}{x}$$

Функција граничних трошкова је у овом случају:

$$C'(x) = \left(\frac{x^2}{100} + 20x + 900 \right)' = \frac{x}{50} + 20$$

Еластичност функције укупних трошкова је:

$$E_{C,x} = \frac{C'}{\overline{C}} = \frac{\frac{x}{50} + 20}{\frac{x}{100} + 20 + \frac{900}{x}} .$$

Онда је $E_{C,250} = \dfrac{\dfrac{250}{50}+20}{\dfrac{250}{100}+20+\dfrac{900}{250}} = \dfrac{5+20}{2{,}5+20+3{,}6} = \dfrac{25}{26{,}1} < 1$ тј. $E_{C,250} \in (0,1)$.

За производњу од 250 јединица функција укупних трошкова је нееластична, па са повећањем производње са овог нивоа, просечни трошкови опадају.

Слично је $E_{C,300} = \dfrac{\dfrac{300}{50}+20}{\dfrac{300}{100}+20+\dfrac{900}{300}} = \dfrac{6+20}{3+20+3} = \dfrac{26}{26} = 1$ тј. $E_{C,250} = 1$.

За производњу од 300 јединица функција укупних трошкова има јединичну еластичност. Тада су просечни трошкови једнаки граничним трошковима, па је то оптимум производње за који су просечни трошкови минимални.

Добијамо да је $E_{C,350} = \dfrac{\dfrac{350}{50}+20}{\dfrac{350}{100}+20+\dfrac{900}{350}} = \dfrac{7+20}{3{,}5+20+2{,}57} = \dfrac{27}{26{,}07} > 1$ тј. $E_{C,250} \in (1,\ \infty)$.

За производњу од 350 јединица функција укупних трошкова је еластична. Гранични трошкови су већи од просечних, па се са повећањем производње са овог нивоа, повећавају и просечни трошкови.

Пример 20)

Испитај како повећање производње са нивоа x=3 утиче на просечне трошкове, ако је функција укупних трошкова $C = 12e^{\frac{x}{4}}$.

Решење:

Важи да је:

$$C'(x) = \left(12e^{\frac{x}{4}}\right)' = 12e^{\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{4} = 3e^{\frac{x}{4}}$$

Област дефинисаности функције укупних трошкова добијамо из услова:

$x > 0$, $C > 0$ и $C' > 0$ тј.

$x > 0$ $x > 0$, $12e^{\frac{x}{4}} > 0$ и $3e^{\frac{x}{4}}$ >0, односно $x > 0$.

Ниво производње x=3 припада области дефинисаности функције укупних трошкова. Еластичност функције укупних трошкова је:

$$E_{C,x} = \frac{C'}{\overline{C}} = \frac{3e^{\frac{x}{4}}}{\dfrac{12e^{\frac{x}{4}}}{x}} = \frac{x}{4}$$

У тачки x=3 еластичност функције укупних трошкова износи:

$$E_{C,3}=\frac{3}{4}<1 \text{ тј. } E_{C,3}\in(0,1)$$

Закључујемо да је за производњу од 3 јединице производа функција укупних трошкова нееластична, што значи да повећање производње са нивоз x=3 утиче на смањење просечних трошкова.

Пример 21)

На тржишту потпуне конкуренције један произвођач има функцију просечних трошкова $\overline{C}=50+4x+\frac{100}{x}$. Алгебарски, табеларно и графички одреди еластичност укупних трошкова у односу на количину производње x.

Решење:

Функција укупних трошкова је:

$$C=\overline{C}\cdot x$$

$$C=\left(50+4x+\frac{100}{x}\right)\cdot x=50x+4x^2+100$$

Онда је функција граничних трошкова:

$$C'(x)=\left(50x+4x^2+100\right)'=50+8x$$

Еластичност функције укупних трошкова је:

$$E_{C,x}=\frac{C'}{\overline{C}}=\frac{50+8x}{50+4x+\frac{100}{x}}=\frac{50x+8x^2}{50x+4x^2+100}.$$

Добијамо да је: $E_{C,x}=0$ ако је $x=0$;

$E_{C,x}<1$ ако је $50x+8x^2<50x+4x^2+100$ тј. $4x^2<100\Rightarrow x<5$;

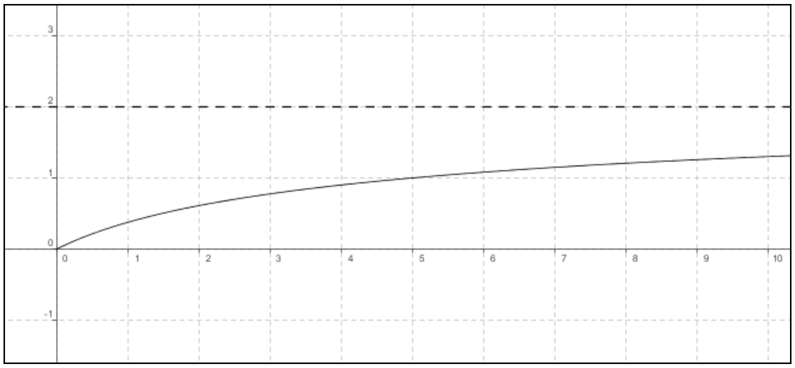
$E_{C,x}=1$ ако је $50x+8x^2<50x+4x^2+100$ тј. $4x^2=100\Rightarrow x=5$;

$E_{C,x}>1$ ако је $x>5$.

Табеларно то можемо приказати на следећи начин:

$E_{C,x}=0$	$x=0$	$C=100$
$0<E_{C,x}<1$	$0<x<5$	$100<C<450$
$E_{C,x}=1$	$x=5$	$C=450$
$1<E_{C,x}<2$	$5<x<\infty$	$450<C<\infty$
$E_{C,x}\to 2$	$x\to\infty$	$C\to\infty$

Графички, еластичност укупних трошкова у односу на количину производње x приказана је на слици 6.



Слика 6

Са ученицима средње школе, у оквиру изучавања економских функција, радим и примере примене у конкретним животним ситуацијама тј. ситуацијске задатке. У складу са уводним делом рада у коме је наведен значај решавања проблема у реалном контексту, овде ћу навести 2 таква примера које су решавали ученици у оквиру рада са економским функцијама.

Пример 22)

У протеклом месецу фирма "Mistery" која се бави продајом накита продала је 600 наруквица по 15 долара. Анализа маркетинга је показала да, повећањем цене за по 1 долар по комаду, продаја пада за по 30 наруквица. Шеф продаје је желео да сам, на основу добијене анализе, одреди за колико треба повећати цену да би се остварио максималан приход. Направио је следећу табелу у прилогу (табела 5). На основу табеле, предложио је повећање цене за 2 долара. Шеф набавке Јоца, који иначе није у добрим односима са шефом продаје, тврди да треба цену повећати за 3 долара и да ће шеф продаје упропастити фирму. Ти радиш у одсеку за књиговодство и директор ти је дао задатак да одредиш за колико долара треба повећати цену по комаду да би се остварио максималан приход и који од шефова је у праву.

количина	**цена**	**приход**
600	15	9000
570	16	9120
540	17	9180
510	18	9180
480	19	9120

Табела 5

Решење:

Функција укупног прихода је:

$$P = x \cdot p \text{ тј.}$$

$$P = (600 - 30m)(15 + m)$$

$$P = -30m^2 + 150m + 9000$$

Функција граничног прихода, као први извод функције укупног прихода, сада је:

$$P'(m) = \left(-30m^2 + 150m + 9000\right)' = -60m + 150.$$

Ако гранични приход изједначимо са нулом, добијамо:

$$-60m + 150 = 0 \text{ тј. } -60m = -150 \Rightarrow m = 2{,}5$$

Да бисмо проверили да ли се при овој јединичној цени постиже максимум, наћи ћемо вредност другог извода функције укупног прихода.

$$P''(m) = (-60m + 150)' = -60$$

Како је $P''(m) < 0,$ функција има максимум за $m = 2{,}5$ тј. за $p = 17{,}5$.

Вредност максималног укупног прихода је:

$$P_{\max} = (600 - 30 \cdot 2{,}5)(15 + 2{,}5)$$

$$P_{\max} = 525 \cdot 17{,}5$$

$$P_{\max} = 9187{,}5$$

Дакле, цену по комаду треба повећати за 2,5 долара.

Ниједан од шефова није био у праву.

Пример 23)

Предузеће "ДХМ" из Ужица бави се производњом нумеризованих машина за обраду метала. Шеф предузећа ангажовао је берзанску консултантску кућу, која је закључила да се добит тог предузећа може изразити функцијом $D(x) = -5x^2 + 30x - 25$, где је x количина производње. Ти си пословни администратор у овом предузећу. Шеф ти је дао задатак да презентујеш предузећу шта говори о производњи оваква функција добити.

1. а) Одреди границе интервала рентабилности производње.
   б) Израчунај трошкове предузећа, ако дође до прекида производње.
   ц) Израчунај оптималну количину производње.
   д) Одреди максималну добит.
   е) Нацртај график функције добити.

2. Од консултантске куће добио си и ф-ју тражње у инверзном облику $p = 30 - 2x$.

Шеф ти је дао задатак да одредиш при којој цени и количини производа ће предузеће остварити максималан укупан приход.

а) Одреди функцију укупног прихода.

б) Израчунај цену и количину при којима се постиже максималан укупан приход.

3. Шеф је, у жељи да повећа приход предузећа, размишљао о повећању цене производа. Због бојазни да ће доћи до смањења тражње, дошао је на идеју да опет ангажује консултантску кућу. Ти си рекао да можеш и сам да испиташ еластичност и анализираш промену цене .

а) Нађи еластичност функције тражње нумеризованих машина у односу на цену.

б) Одреди интервал у коме се може кретати цена производа да тражња буде нееластична.

ц) Образложи шефу за колико процената може повећати цену производа са нивоа $p = 12$, а да не дође до смањења прихода.

4. Рекао си шефу да сада, и без помоћи консултантске куће, можеш сам да нађеш функције укупних и просечних трошкова.

а) Одреди функцију укупних трошкова производње.

б) Одреди функцију просечних трошкова производње.

Решење:

1. а) Да бисмо одредили интервал рентабилности производње (x_1, x_2) за који важи да је $D > 0$, наћи ћемо границе овог интервала из услова $D(x) = 0$ тј.

$$-5x^2 + 30x - 25 = 0$$

Ако поделимо ову једначину са –5, добијамо:

$$x^2 - 6x + 5 = 0\text{, па је:}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 5$$

x_1 и x_2 су доња и горња граница интервала рентабилности, па је производња рентабилна на интервалу $x \in (1, 5)$.

б) Прекид производње настаје када је количина производа једнака нули. У том случају је вредност добити:

$$D(0) = -5 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 - 25 \text{ тј.}$$

$$D(0) = -25 \,,$$

што значи да су у трошкови предузећа 25 новчаних јединица.

ц) Да бисмо израчунали оптималну производњу, имамо услов $D'(x) = 0$ тј.

$$D'(x) = \left(-5x^2 + 30x - 25\right)'$$

$$D'(x) = -10x + 30$$

$$-10x + 30 = 0 \Rightarrow -10x = -30 \Rightarrow x = 3$$

Онда је:

$$D''(x) = \left(-10x + 30\right)' = -10$$

Како је $D''(x) < 0,$ функција има максимум за $x = 3$ тј. количина производа при којој ће предузеће остварити највећу добит је $x_0 = 3$.

д) Максималну добит предузеће ће остварити при количини производа $x_0 = 3$, па је:

$$D_{\max} = D(x_0)$$

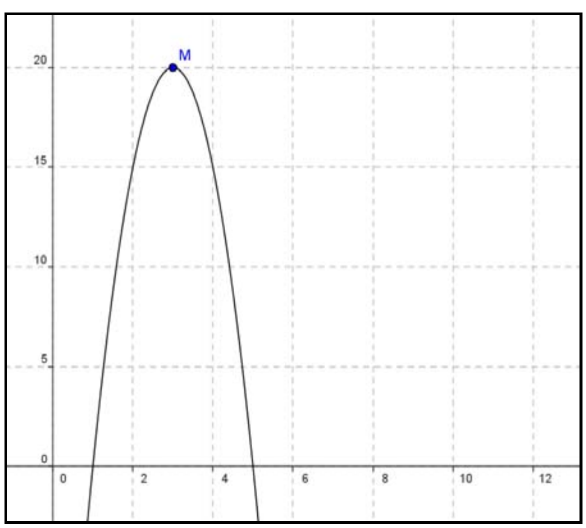
$$D_{\max} = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 - 25$$

$$D_{\max} = -5 \cdot 9 + 90 - 25$$

$$D_{\max} = -45 + 65$$

$$D_{\max} = 20$$

е) График функције добити приказан је на слици 7.



Слика 7

2. а) Функцију укупног прихода можемо представити у зависности од количине тражене и продате робе x. Имамо: $p = 30 - 2x$

Онда је укупан приход:

$$P = x \cdot p$$
$$P = x \cdot (30 - 2x) \text{ тј. } P = 30x - 2x^2$$

б) Област дефинисаности функције тражње одређена је са:

$$p > 0 \wedge x > 0 \wedge p' < 0 \text{ тј. } 30 - 2x > 0 \wedge x > 0 \wedge -2 < 0 \text{ тј. } x \in (0, 15)$$

Нађимо максимум укупног прихода:

$$P'(x) = \left(30x - 2x^2\right)' = 30 - 4x$$

Ако гранични приход изједначимо са нулом, добијамо:

$$30 - 4x = 0 \text{ тј. } -4x = -30 \Rightarrow x = 7{,}5$$

Да бисмо проверили да ли се при овој количини постиже максимум, наћи ћемо вредност другог извода функције укупног прихода.

$$P''(x) = (30 - 4x)' = -4$$

Како је $P''(x) < 0,$ функција има максимум за $x = 7{,}5$.

Пошто тачка $x = 7{,}5$ припада области дефинисаности функције тражње и како је у њој први извод укупног прихода једнак нули, а други извод мањи од нуле, онда је то оптимална количина за коју укупан приход има максимум.

Јединична цена при тој количини робе реализоване на тржишту $x_0 = 7{,}5$ износи:

$$p_o = 30 - 2x_0 = 30 - 2 \cdot 7{,}5 = 30 - 15 = 15.$$

3. а) Из инверзног облика функције тражње $p = 30 - 2x$ добијамо:

$$2x = 30 - p \Rightarrow x = \frac{30 - p}{2} = 15 - \frac{p}{2}$$

Еластичност функције тражње у тачки p је:

$$E_{x,p} = \frac{p}{x} \cdot x' = \frac{p}{15 - \frac{p}{2}} \cdot \left(15 - \frac{p}{2}\right)'$$

$$E_{x,p} = \frac{-\frac{1}{2}p}{15 - \frac{p}{2}}$$

$$E_{x,p} = \frac{-p}{30 - p}$$

б) Област дефинисаности за цену одређена је са:

$$p > 0 \wedge x > 0 \ \wedge x' < 0 \text{ тј. } p > 0 \wedge 15 - \frac{p}{2} > 0 \ \wedge -\frac{1}{2} < 0$$

$$-\frac{p}{2} > -15 \Rightarrow p < 30 \text{ тј. } p \in (0, 30)$$

Одредимо цену при којој се постиже јединична еластичност функције тражње тј. за коју је $E_{x,p} = -1$:

$$\frac{-p}{30-p} = -1 \Rightarrow \ -p = -30 + p \Rightarrow 2p = 30 \Rightarrow p = 15$$

Ова цена дели интервал $(0, 30)$ на два интервала $(0, 15)$ и $(15, 30)$. У једном од њих је тражња еластична, а у другом нееластична. Да бисмо то утврдили, проверићемо еластичност за произвољну цену из једног од интервала. Рецимо, цена p=5 припада интервалу $(0, 15)$. Како је

$$E_{x,5} = \frac{-5}{30-5} = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5} \text{ тј. } E_{x,5} \in (-1, 0),$$

тражња је нееластична за цену p=5. Закључујемо да је тражња нееластична у интервалу $(0, 15)$.

ц) Како је функција тражње нееластична када цена припада интервалу $(0, 15)$, укупан приход ће се повећавати за сваку цену из овог интервала тј. док цена не достигне ону вредност за коју се постиже јединична еластичност функције тражње. То значи да се цена са нивоа $p = 12$ може повећати за 3 новчане јединице, односно за 25%, а да притом не дође до смањења укупног прихода.

4. а) Функција укупних трошкова је разлика функције прихода и функције добити:

$$C(x) = P(x) - D(x) \text{ тј.}$$

$$C(x) = 30x - 2x^2 - (-5x^2 + 30x - 25)$$

$$C(x) = 30x - 2x^2 + 5x^2 - 30x + 25 \text{ тј.}$$

$$C(x) = 3x^2 + 25$$

б) Функција просечних трошкова је:

$$\overline{C} = \frac{C}{x} \text{ тј.}$$

$$\overline{C} = \frac{3x^2 + 25}{x} = 3x + \frac{25}{x}$$

ИСТРАЖИВАЊЕ - СХВАТАЊЕ ПРИМЕНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА У ЕКОНОМИЈИ

У уводном делу овог рада било је осврта на књигу „Математичко откриће“ у којој Ђерђ Пољa (Polya, 1957) описује три принципа учења: активно учење, најбољи стимуланс и повезане фазе.

Идеја активног учења је: ставити ученика у центар образовног система. То не значи да се занемарује улога наставника, већ напротив, наставник сада постаје и режисер и сценариста часа. Много је теже креирати час у коме ће ученици активно учествовати, него одржати класично предавање и након тога испитати ученике.

Активно учење пре свега погодује настави математике, јер нигде као у математици није толико важно о чему размишљају ученици на часу. При решавању проблема идеје треба да се рађају у главама ученика, а улога наставника у том процесу се може упоредити са улогом бабице при порођају – да помогне да се идеја роди. Веома је важно да, када се проблем решава у малим групама, наставник да подршку лидеру или лидерима и да се на тај начин развија позитиван однос према онима који имају боља постигнућа.

Форма учења која ученику највише одговара је сократовски дијалог. То подразумева да наставник напише на табли само оно што кажу ученици. Наравно, он филтрира идеје ученика и обликује их тако да све што се напише буде смислено. Овај концепт наставе математике је познат широм света и сматра се најефикаснијим.

Један ефикасан начин да се ученици укључе у наставу и при обради новог градива је техника “мождане олује “ (brainstorming), која ће бити примењена на уводном делу часа, чији опис следи. Битно је да је са ученицима остварен добар контакт, да су они опуштени на часу и онда се може очекивати читав низ одговора. Важно је да се сваки одговор добро чује, да их наставник све запише на табли и да охрабрује нове одговоре. Када више нема продуковања нових одговора, онда почиње анализа записаних одговора и даљи рад на теми. Ово је врло једноставан начин да се ученици заинтересују за нову тему.

Може бити проблем што нису свима иста интересовања, али због тога је добар групни рад, нарочито када ученици нешто истражују. На тај начин до изражаја долазе разноликости које ће допринети раду тима. Заинтересованост ученика је најбољи стимуланс за рад.

Овде ћу описати ток огледног часа који сам одржала у Економској школи у Ужицу за ученике четвртог разреда. Одабрала сам овај узраст (матуранте) јер је познато да је њихова заинтересованост за математику на најнижем нивоу. Такође, у претходном периоду они су изучавали особине функција, појам извода функције, његову примену на одређивање екстремних вредности и интервала монотоности функције.

Тема часа је „Примена извода на економске функције“. То је први у низу часова на којима ће уследити изучавање економских функција и њихове еластичности, што је детаљно описано у главном делу овог рада. Ево основних техничких детаља о извођењу часа:

Време извођења: Друго полугодиште (средина марта)

Трајање: 2 школска часа

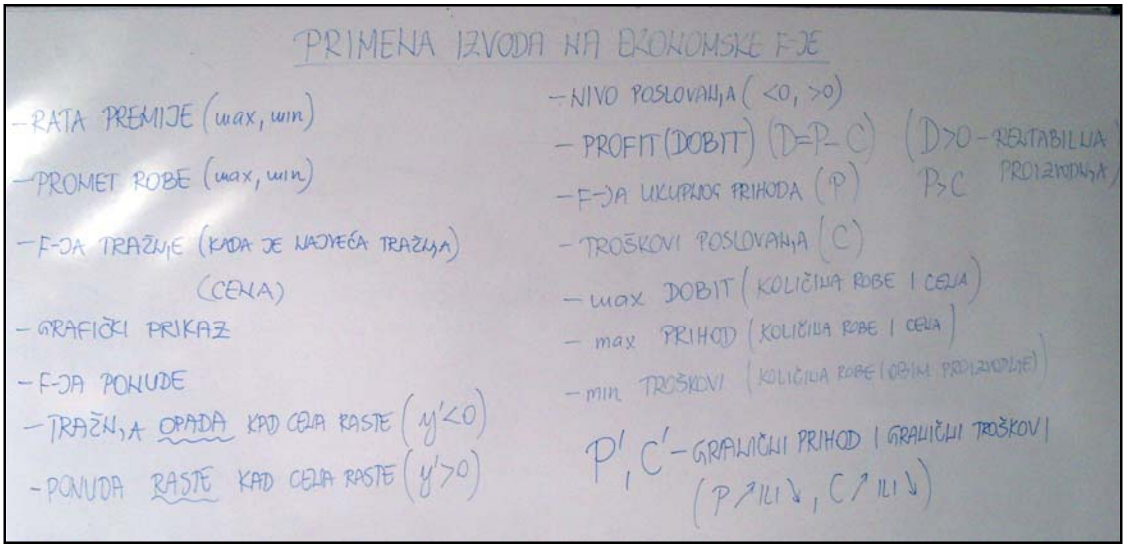
Одељење: ученици четвртог разреда, образовни профил Службеник осигурања

Као што сам већ раније напоменула, у уводном делу часа применила сам технику brainstorming, како бих стекла увид у то колико су ученици у стању да повезују знања која стичу из различитих наставних предмета. Наиме, они су из Економике предузећа, из Основа економије и из Маркетинга изучавали економске функције. На претходним часовима математике научили су које се особине функција могу испитати помоћу извода функције.

Написала сам назив теме на табли и рекла ученицима да размисле мало где се диференцијални рачун користи у економији и да онда свако од њих каже идеје које буде имао. У почетку су ученици били мало бојажљиви, уздржани и нерадо су се јављали. Мало сам их охрабрила рекавши да ниједна идеја није лоша и да нам је циљ да прикупимо што више идеја. Затим су ученици износили своје идеје, заиста добре, а ја сам их бележила на табли. Они су заиста добро препознали проблеме из економије тј. економске функције на које се може применити извод. Навели су све оно чиме у наставку и треба да се бавимо:

- Функцију тражње
- Функцију понуде
- Функцију прихода
- Функцију трошкова
- Функцију добити

Такође, ученици су навели и неке друге идеје за примену диференцијалног рачуна, које сам ја забележила на табли (слика 8).



Слика 8

Ученике сам затим поделила у пет група. Свака група добила је задатак да размишља о примени диференцијалног рачуна на једну од економских функција (функцију тражње, функцију понуде, функцију прихода, функцију трошкова и функцију добити) и да покуша самостално да изведе одговарајуће закључке. Ученици су углавном добро размишљали и имали су идеје када одређене функције расту или опадају, под којим условима достижу максимум или минимум. Били су у недоумици како да означе неке функције, како да запишу то што утврде и сл. У томе сам ученицима ја помогла, дајући им сугестије у вези са ознакама, како би оне биле усклађене са оним што ћемо у наставку радити.

Интересантно је приметити да су сви ученици активно учествовали у раду својих група, трудећи се максимално да дају свој допринос. Такође, ученици су међусобно добро сарађивали. Свака група је желела да буде што успешнија у решавању проблема и јавио се позитиван такмичарски дух међу групама. Цео разред је био апсолутно заокупљен проблемом.

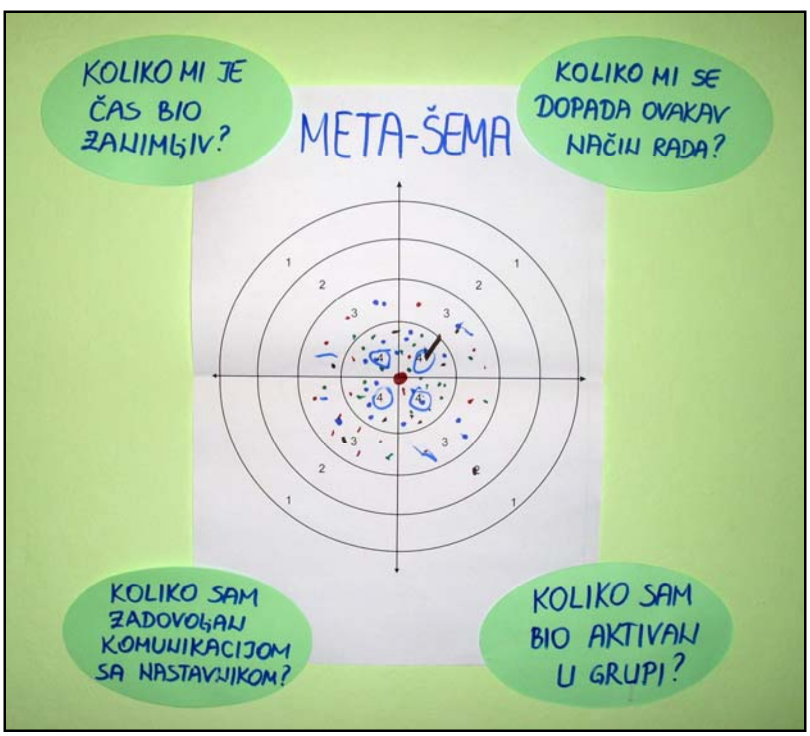
Слика 9

Представници сваке од група изложили су укратко своје резултате осталим ученицима. Идеја је била да остале групе сагледају шта су други ученици радили и колико су били успешни у решавању проблема. У току рада дала сам им инструкције да не треба да буду много детаљни, јер ћемо се тим проблемима и конкретним примерима бавити заједно на наредним часовима.

На самом крају часа, ученици су евалуирали час. За евалуацију сам одлучила да искористим мета-шему. На папиру сам нацртала мету са четири нивоа. Поставила сам четири питања:

- Колико ми је час био занимљив?
- Колико ми се допада овакав начин рада?
- Колико сам задовољан комуникацијом са наставником?
- Колико сам био активан у групи?

Објаснила сам ученицима да је потребно да свако од њих анонимно стави по неки симбол као одговор на постављена питања. Уколико су одговори позитивни, тј. што је задовољство веће, симболи треба да буду ближи центру мете, а рекла сам им да могу исказати и незадовољство стављајући свој симбол изван мете. Док су ученици попуњавали мету, била сам окренута леђима, да би њихови одговори били што искренији. Када сам погледала попуњену мету, одмах сам уочила да су сви симболи уписани у поља 3 и 4 тј. да су ученици исказали у великој мери задовољство након овог часа, што се може видети на слици 10.



Слика 10

Било је и усмених коментара да је штета што нема више оваквих часова и да им је било изузетно занимљиво. Једна ученица је прокоментарисала након двочаса да је мислила да се завршио тек први час. Сви су се сложили да је било веома забавно и поучно, а видљив је био и одређени умор на већини ученика. Мали одмор између часова нису користили. Иако сам им ја више пута рекла да је одмор почео и да могу да направе паузу, они нису желели.

Резултати говоре да је овакав час оставио дубок утисак на ученике.

ФИНАНСИЈСКА МАТЕМАТИКА У СРБИЈИ И У СВЕТУ - КОМПАРАТИВНА АНАЛИЗА

Значај финансијске писмености

Савремени финансијски токови потрошачима нуде све већу лепезу производа који излазе у сусрет потребама потрошача. Овај широк избор, иако врло користан, захтева да потрошачи буду опремљени информацијама, знањем и вештинама потребним за разумевање и процену могућности како би изабрали оно што најбоље одговара њиховим потребама. На финансијском тржишту јављају се различите финансијске понуде које са собом носе велики ризик по саме потрошаче. Са порастом трошкова, потреба за позајмицама и другим финансијским услугама постаје све већа. На глобалном тржишту и они који нуде те услуге (на првом месту банке и осигуравајућа друштва) труде се да различитим понудама изађу у сусрет потрошачима. Да би донео праву одлуку, осим тога што му све информације морају бити јавне и доступне, врло је важно и то да потрошач зна да селектује и анализира дате информације и изабере најбољу опцију. Управо због тога је веома важно развијати финансијску писменост код грађана.

Развијен, сигуран и стабилан финансијски сектор који може да задовољи потребе корисника финансијских услуга је важан за сваку земљу и њен развој. Широка лепеза финансијских производа је у интересу, не само професионалних инвеститора, већ и сваког клијента појединачно. У условима тржишне економије сваки појединац пре свега води рачуна о свом кућном буџету и доноси самосталне одлуке о улагањима и задуживањима преузимајући ризик на себе. Обезбеђењем информација и унапређењем разумевања финансијских услуга корисници финансијских услуга развијају свест о ризицима и стичу вештине управљања тим ризицима. Финансијски писмени потрошачи својим активним учешћем на финансијском тржишту доприносе јачању поверења у финансијски сектор. Трагањем за производима који одговарају њиховим потребама, потрошачи подстичу финансијске институције да развијају нове производе, а самим тим подстичу конкуренцију и иновације, као и подизање квалитета финансијског тржишта на виши ниво.

Финансијска писменост може потрошачима да омогући да постану бољи купци и да производе и услуге добијају по повољнијим ценама. То ће им, заузврат, помоћи да побољшају кућни буџет и отворити нове могућности за штедњу и улагања. Финансијска писменост је вештина за читав живот.

Финансијска писменост промовише личну добробит и доприноси економском развоју и богатству нације побољшањем квалитета расположивих финансијских услуга и развојем способности појединаца да ефикасније користе услуге.

Већ дуже време се истиче, нарочито у развијеним земљама, да омладина мало штеди и не разуме потребу инвестирања, а старији све више осећају последице сиромаштва. Због таквог стања све се већи приоритет даје финансијској едукацији, која може да повећа квалитет живота појединаца и интегритет и квалитет финансијских тржишта.

Финансијско образовање треба да почне већ у најранијим школским данима. Одлука PISA комитета да се на тестирање математичке писмености у 2012. години дода и сегмент – тестирање финансијске писмености, само је потврдила став да су финансије и финансијска писменост постале неодвојиве области математике и кључни апарат модерног друштва који се мора савладати врло рано. Овако PISA дефинише финансијску писменост:

Финансијска писменост представља знање и разумевање финансијских концепата, као и вештине, мотивацију и самопоуздање да се оне примене у циљу креирања ефикасних одлука које позитивно утичу на финансијско стање појединаца и друштва како би активно учествовали у економији једне државе.

Финансијска математика у Србији

Финансијско образовање у Србији готово да и не постоји, или се појављује у траговима, у редовној настави математике у школама, иако је значај финансијске писмености препознат и постао неодвојив део математичке писмености. Као изузетак треба узети образовање у средњим економским школама где се ова грана математике обрађује у задовољавајућем обиму.

Настава математике у основним школама не обрађује у довољној мери овај битан сегмент образовања, иако је његова важност несагледива. Осим процентног рачуна, где се највећи део пажње посвећује разумевању појма процента и његовом израчунавању, готово да се не дотиче сфера примене истог у реалним проблемима који су повезани са основним финансијским образовањем.

У средњим школама (осим економске струке) ситуација није нимало боља. У редовној настави у првом разреду средње школе изучавају се делови простог каматног рачуна, док се у трећем разреду гимназија помиње појам сложеног каматног рачуна. Веома мали број часова предвиђен је за обраду ове тематике. У првој години прост каматни рачун обрађује се са два часа, док је за обраду сложеног каматног рачуна издвојен само један час.

Наставним планом и програмом за средње економске школе настава финансијке математике подељена је на неколико тематских целина које се обрађују у току две школске године:

- Прост каматни рачун
- Сложен каматни рачун
- Рачун улога
- Рачун ренте
- Зајмови

Притом су циљеви изучавања финансијске математике у економским школама:

- стицање основног знања и примена простог и сложеног каматног рачуна
- примена сложеног каматног рачуна у рачуну улога и у рачуну ренте
- стицање основних знања о елементима зајма
- овладавање поступком израде амортизационог плана отплате кредита
- стицање знања о конверзији зајма.

Исходи који се очекују од ученика на крају тј. шта је оно што ће ученик бити у стању да уради су:

- примени формулу за израчунавање интереса ако је време дато у годинама, месецима или данима
- примени каматни рачун више сто и ниже сто
- разликује прост и сложен каматни рачун
- израчуна увећану вредност главнице
- израчуна сложену камату
- одреди увећану вредност више периодичних улога при улагању почетком и крајем периода
- одреди садашњу вредност више периодичних сума које се исплаћују почетком или крајем периода
- разликује врсте зајмова
- објасни и израчуна ануитет, отплату, камату, отплаћени дуг и остатак дуга
- изради план амортизације зајма, изврши контролу амортизационог плана

Укупан фонд часова предвиђен за изучавање финансијке математике креће се од 50 до 90. Имајући у виду прописане циљеве наставе финансијске математике и исходе којима се тежи, овај број часова може се сматрати довољним за квалитетну обраду теме.

У једној таквој динамичној сфери какво је финансијко образовање, врло је важан квалитет и редовно ажурирање уџбеника и осталих пропратних материјала који су у служби наставе финансијске математике. Нажалост, задаци који се налазе у постојећим уџбеницима нису прилагођени савременим токовима, па су наставници препуштени личним способнистима сналажења и импровизације. Највећи недостатак наставе финансијске математике у средњим економским школама јесте занемаривање математичких модела на којима се базира финансијска математика. Наиме, у настави финансијске маематике у циљу „лакшег рачунања“ користе се финансијске таблице.

Финансијска математика у свету

Последњих година, развијеније земље постају све више заинтересоване за ниво финансијске писмености својих држављана. Проблем недостатка исте је посебно дошао до изражаја услед смањених система јавне и приватне подршке, померањем демографских профила у смеру старије популације, као и великог напретка на финансијском тржишту. Бригу су увећале и финансијске кризе, које се делимично могу приписати финансијској неписмености јавности, која је показала учестало понављање погрешних финансијских одлука. Све је то повукло многе негативне последице које су се гомилале, резултирајући економским кризама. Због тога је појам финансијске писмености сада општеприхваћен елемент економске и финансијске стабилности и развоја.

Поред тог „ефекта кризе”, серије разних проблема су подстакле већу заинтересованост за финансијску писменост јавности. То су:

- размена ризика
- повећана одговорност појединаца
- повећан број финансијских производа и сервиса и потражња за њима
- потенцијалне користи од финансијске писмености
- мерење финансијске писмености у PISA-и

OECD (The Organisation for Economic Co-operation and Development) је 2003. године започео далекосежан пројекат финансијског образовања који се односио на све већу бригу влада о потенцијалним последицама финансијске неписмености.

Примећујући пораст светске финансијске писмености и образовних исхода, 2008. године OECD је основао Међународну мрежу финансијског образовања (INFE) да би се искористило и обухватило искуство и стручност развијених економија и економија у успону. Тренутно се више од 138 јавних установа из 68 земаља придружило овој мрежи. Чланови се састају два пута годишње да би расправљали о последњим напрецима у њиховим земљама и како би развијали аналитичке и компаративне студије, методологије, најбољу праксу и водиље у кључним областима. У овом контексту, програми финансијског образовања у школама препознати су као главно питање за које су формиране подгрупе стручњака, како би започели рад на прикупљању података и на развијању.

Још 2005. OECD је препоручила да финансијско образовање треба започети у школама. Људи би требало да буду едуковани по финансијском питању у што ранијој могућој животној доби. Два битна разлога подупиру ову препоруку: важност усмерења пажње ка младима и успешност омогућавања финансијског образовања у школама.

Уз припремање младих за каснији живот, финансијско образовање у школама се односи и на непосредна финансијска питања младих. Многа деца су корисници финансијских сервиса још од малих ногу. Није ретко да имају отворене рачуне за интернет куповину или да користе мобилне телефоне (са различитим опцијама плаћања) чак и пре него што постану тинејџери, и, јасно је колику би корист они имали од финансијског описмењавања при употреби таквих сервиса. Пре завршетка школе, могу се суочити и са питањима као што су осигурање возила, производи штедње и прекорачења рачуна.

У многим земљама, у узрасту од 15 до 18 година, млади људи (и њихови родитељи) се суочавају са најважнијом финансијском одлуком, а то је: да ли улагати у њихово студирање и даље образовање или не. Разлика у дохотку оних са завршеним факултетом и радника без факултета је све већа у многим економијама. Истовремено, трошкови студирања које сносе студенти и њихова породица су у порасту. Бројчано стање објављено у марту 2010. године показује да се за половину студената Велике Британије очекује да напусте факултете дугујући преко 15 000 фунти. Важно је да људи буду финансијски писмени пре но што се упусте у велике финансијске трансакције и уговоре. Програми финансијског образовања за младе могу бити пресудни у одржавању квалитетног финансијског знања и понашања ученика још од младог узраста, које они могу наставити да користе и у годинама које долазе.

Истраживања показују да они који су финансијски писменији знатно чешће долазе из високо образованих и финансијски софистицираних породица. Да би се омогућиле једнаке шансе за све, важно је понудити финансијско образовање и онима који му иначе не би имали приступ. Школе су у доброј позицији да побољшају финансијску писменост у свим демографским групама, што би прекинуло циклус преноса исте само са колена на колено. Све већи број земаља се прихватио развоја програма финансијског образовања. Они су или посвећени младежи уопште, или доступни преко школа, и примењују се на националном, регионалном и локалном нивоу, као и у пилот програмима. Истраживање које је покренула INFE подгрупа на финансијско образовање у школама, показало је да међу 38 земаља које су учествовале у истраживању, њих 23 су имале некакве програме у школама.

PISA 2012 је прво међународно истраживање великих размера које се бави питањем финансијске писмености младих. PISA узима шири приступ мерењу знања и стручности, крећући се изван оквира школовања које се базира само на наученом, према процени спремности младих за живот ван обавезног образовања, а посебно ка њиховој способности за употребу знања и стручности. PISA сакупља спознајне и остале нформације од 15-огодишњака у многим државама и економијама. Према томе, способни су да обезбеде широку палету компаративних података коју креатори политике и остале интересне групе могу да користе да би донеле одлуке засноване на доказима. Као и код осталих PISA домена, финансијској писмености се приступа употребом инструмената дизајнираних да обезбеде податке који су валидни, поуздани и лако се интерпретирају.

У земљама које су лидери математичке писмености на ранијим PISA тестирањима, финансијски појмови активно се уводе у наставу већ у нижим разредима основне школе.

Америчко Министарство финансија је у 2002. години основало Биро за финансијску едукацију, чији је задатак унапређивање приступа различитим облицима финансијске едукације који могу да помогну америчким грађанима да доносе боље одлуке у свим областима управљања личним финансијама, са посебним нагласком на штедњу, кредите, куповину куће и планирање одласка у пензију. Амерички Конгрес је 2003. године основао Комисију за финансијску писменост и едукацију на основу Закона о побољшању финансијске писмености и едукације. Комисија има задатак да унапређује финансијску писменост грађана САД путем развоја националне стратегије. Централна банка САД (FED) је, заједно са бројним другим агенцијама савезне владе, члан наведене комисије.

FED је недавно побољшала своју веб страницу за финансијску едукацију која треба да повећа коришћење његових едукативних материјала и да промовише финансијску едукацију у учионицама. Материјали су намењени за широку јавност, а посебни материјали су припремљени за наставнике и студенте виших и високих школа.

У Аустралији је 2002. године влада основала посебну комисију која је предложила увођење Фондације за финансијску писменост у 2005. години. Фондација је, у тесној сарадњи са државама и покрајинама, донела национални програм за финансијску едукацију који обезбеђује оспособљавање школске деце за управљање новцем.

Централне банке у Малезији и Сингапуру су заједно са финансијским институцијама и другим владиним агенцијама донеле програме за финансијску едукацију својих грађана.

Истраживања показују да је ниво финансијског знања низак у већини земаља, укључујући и развијене земље. На пример, у Јапану 71% анкетираних пунолетних грађана није знало ништа о инвестирању у акције и обвезнице, а студенти у САД и Кореји нису положили тест о способности избора и управљања кредитним картицама или штедњом за пензију.

У руске школе ће у току 2013. бити уведена Финансијска писменост, нови предмет који ће изучавати ученици свих разреда. На иницијативу Министарства финансија, пројекат ће почети да се реализује у пет региона Русије, а до 2018. Финансијска писменост може бити укључена у општеобразовни програм свих руских школа. Увођењем овог предмета власт жели да објасни деци да новац не треба да стоји „у сламарици“, већ да циркулише, и да их научи како да планирају породични буџет. Ниво финансијске писмености становништва је и даље веома низак. Према подацима анкете националне агенције за финансијска истраживања, најтраженије банкарске услуге још увек су пластифициране картице за подизање плате на банкомату и плаћање комуналија.

У Енглеској је у плану да од наредне школске године буде уведено Финансијско образовање у све основне школе. Ученици узраста између 11 и 14 година изучаваће коришћење новца, важност планирања личног буџета и упознаће финансијске производе и сервисе. Са 14 година ће већ учити о платама, таксама, кредитима, зајмовима, финансијским ризицима, као и о многобројним сложенијим финансијским производима и услугама.

ЗАКЉУЧАК

Финансијска криза која је данас присутна у целој светској економији, страх свих, почев од државе до појединца, за будућност треба да нас освести и упозори колико мало знамо о финансијама уопште.

Појединачна је одговорност разумети принципе по којима функционишу финансије, како бисмо могли да успешно управљамо својим новцем, односно приходима и трошковима.

Основни циљ образовања треба да буде да се изгради појединац који ће се уклопити у социјалне оквире друштва који ће разумети свет који га окружује. Ако је могуће да учимо о биљкама, физичким појавама, хемијским процесима и да нам је то сасвим нормално (што не треба порицати); исто тако, ако не и више, неопходно је да научимо колико год је то могуће о финансијама како бисмо разумели свет у коме живимо.

Данас огроман број људи не разуме принципе и правила у вези управљања својим новцем и основним елементима финансијског пословања.

Велики број младих, средњошколаца, нема развијену свест о "ширини" математике тј. о њеној примени у многобројним реалним животним ситуацијама. Изузетно велики проценат деце математику види само кроз бројке и рачун, па свако појављивање текстуалног проблема ствара извесну забуну и пометњу.

Да би се држава економски уздигла и попела на виши ниво, потребно је направити промене на првом степенику - образовању. Са унапређењем образовања, кроз усмеравање наставе ка оспособљавању ученика да решавају реалне проблеме, образоваће се генерације младих које ће бити способне да несметано приступе проблемима и, у складу са одређеним начелима, приступе њиховом решавању.

Због тога је важно у оквиру редовног школовања развити образовне програме, чији крајњи циљ треба да буде разумевање света финансија које директно могу променити животе младих људи. Разлика између финансијски образованог друштва и оног које то није је огромна.

Размислимо сви која су то знања потребна нашој деци да успешно живе у будућности. Ако то урадимо на прави начин, онда се финансијском образовању мора заиста посветити далеко већа пажња него што је данас случај.

ЛИТЕРАТУРА

1. Др Јелена Кочовић, *Финансијска математика,* Центар за издавачку делатност Економског факултета у Београду, Београд 2006

2. Др Бранко Урошевић, *Финансијска економија,* Центар за издавачку делатност Економског факултета у Београду, Београд 2013

3. Др Душан Јоксимовић, *Пословна математика,* Мегатренд универзитет примењених наука, Београд 2003

4. Др Миливоје Цветиновић, *Менаџерска економија,* Сингидунум, Београд 2009

5. Радич Вучићевић, Милорад Ђорђевић, Миливоје Лазић, *Математика са збирком задатака за 4. разред средње школе,* Завод за уџбенике, Београд 2009

6. Мр Иван Анић, Др Драгица Павловић Бабић, Владислав Радак, *Формула живота за све оне који воле математику и желе да је поклоне другима,* Математископ, Београд 2011

7. Мр Иван Анић, *Когнитивни процеси у решавању математичких проблема у реалном контексту,* докторска дисертација, Департман за математику и информатику Природно математичког факултета у Новом Саду, Нови Сад 2011

8. Мр Владимир Врачарић, *Финансијски образованији грађани - стабилнији финансијски систем и цела економија,* научни рад

9. *Pisa 2012 financial literacy framework,* htpp://www.oecd.org/dataoecd/8/43/46962580.pdf

10. http://www.nbs.rs

11. http://www.oecd.org/redirect/document/5/0,3476,en 2649 15251491 47225669

12. http://lat.ruskarec.ru/news/2013/03/01/predmet finansijska pismenost 20443