

Универзитет у Београду

Математички факултет

# МАСТЕР РАД

Логички аспекти аксиоматског заснивања геометрије у  
настави математике

Студент:  
Јелена Николић, 1053/2012

Ментор:  
проф. др Небојша Икодиновић

Београд, октобар 2013

# САДРЖАЈ

|                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>САДРЖАЈ .....</b>                                                | <b>2</b>  |
| <b>УВОД .....</b>                                                   | <b>3</b>  |
| 1.1. ИНДУКЦИЈА И ДЕДУКЦИЈА КРОЗ ИСТОРИЈУ МАТЕМАТИКЕ .....           | 4         |
| 1.2. О АКСИОМАТСКИМ СИСТЕМИМА .....                                 | 5         |
| 1.3. МАЛО ФИЛОЗОФИЈЕ .....                                          | 6         |
| 1.4. О АКСИОМАТСКОМ ЗАСНИВАЊУ МАТЕМАТИКЕ .....                      | 7         |
| 1.5. ЛОГИЧКИ ПОДСЕТНИК .....                                        | 8         |
| 1.6. ШТА ЈЕ ДОКАЗ? .....                                            | 11        |
| 1.7. О ПОСТУПКУ РЕШАВАЊА МАТЕМАТИЧКОГ ПРОБЛЕМА .....                | 13        |
| <b>2. НЕКИ АКСИОМАТСКИ СИСТЕМИ ЕУКЛИДСКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ .....</b>       | <b>15</b> |
| 2.1. ЕУКЛИДОВ АКСИОМАТСКИ СИСТЕМ .....                              | 15        |
| 2.2. ХИЛБЕРТОВ АКСИОМАТСКИ СИСТЕМ .....                             | 20        |
| 2.3. АКСИОМАТСКИ СИСТЕМ БОРСУКА И ШМИЕЛЕВЕ .....                    | 24        |
| 2.4. АКСИОМЕ БИРКХОФА .....                                         | 26        |
| <b>3. О АКСИОМАТСКОМ ЗАСНИВАЊУ ГЕОМЕТРИЈЕ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ .....</b> | <b>29</b> |
| <b>ЗАКЉУЧАК .....</b>                                               | <b>37</b> |
| <b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>                                             | <b>39</b> |

## Увод

Геометрија – некима најинтересантнији, многим најтежи део математике, једна је од најстаријих математичких дисциплина. Вековима је изучавана у чисто практичне сврхе – да би се измерило земљиште, одакле и потиче назив *геометрија*. У облику у ком је данас проучавамо, геометрија се развила у старој Грчкој. Данас је саставни део стандардног курикулума основних и средњих школа у већини земаља.

Иако о томе не размишљамо, радећи геометрију, ми користимо законитости многих других математичких дисциплина. У овом раду, концентрисаћемо се на примену математичке логике у аксиоматском заснивању геометрије. У првом делу рада размотрићемо шта заправо значи аксиоматски засновати неку научну теорију, и направити кратак историјски и филозофски осврт на ову тему. Затим ћемо, у виду *логичког подсетника*, дати кратак преглед неких елементарних појмова и закона математичке логике. Дакле, у овом делу позабавићемо се неопходним предзнањем из логике које мора предходити аксиоматском заснивању геометрије. На крају првог дела бавићемо се доказима, као једним од најважнијих сегмената било које математичке дисциплине.

У другом делу рада, приказаћемо неке значајне аксиоматске системе еуклидске геометрије. Има доста радова и уџбеника у којима је један од ових аксиоматских система детаљно објашњен, где су наведени и доказани неки важнији геометријски ставови. Ми ћемо овде мало другачије приступити теми. Наиме, циљ нам је да прикажемо више различитих аксиоматских приступа еуклидској геометрији, а не да детаљно прикажемо сваки од њих. Наравно, било би идеално када бисмо урадили и једно и друго, али је потпуно јасно да би број страна таквог рада био неприхватљиво велик. Код сваког од ових аксиоматских система, на почетку ћемо изложити списак основних појмова, а затим списак аксиома (ово је мало другачије у Еуклидовом аксиоматском систему, биће објашњено и зашто). На крају, да бисмо их, са једног становишта, на изванредан начин упоредили, доказаћемо у сваком од ових аксиоматских система једно значајно тврђење еуклидске геометрије.

Трећи део рада ће, у одређеном смислу, објединити прва два дела, и приказати их из једне мало другачије перспективе. Овде ћемо покушати да, са методичког и дидактичког становишта, размотримо и прокоментаришемо идеју аксиоматског заснивања геометрије у настави математике. С обзиром на то да се геометријска аксиоматика у нашој земљи (на средњошколском нивоу) ради само у гимназијама (по плану и програму, на свим смеровима) и Математичкој гимназији, у оквиру трећег дела рада прилажемо план и програм наставе математике за гимназије, као и план и програм наставе геометрије за Математичку гимназију. На крају укратко приказујемо како се геометрија ради у неколико других држава.

# 1. О аксиоматским системима уопште

*„Логика се с правом сматра основом свих осталих наука, макар и само зато што у сваком доказу користимо појмове узете из области логике и што се свако исправно закључивање одвија са законима те дисциплине. Али, то не значи да је целокупно знање логике потребно за исправно мишљење; чак и професионални математичари, који, уопште узев, не праве грешке у својим закључивањима, у великом броју случајева, не владају логиком у тој мери да би били свесни свих логичких закона које иначе несвесно примењују.“*

*Алфред Тарски*

## 1.1. Индукција и дедукција кроз историју математике

Разликујемо две основне методе закључивања – индукцију и дедукцију. Најједноставније, индукцију можемо објаснити као начин резоновања при ком од појединачних долазимо до општих закључака, док код дедукције из општих закључака и ставова изводимо појединачне. Математика се вековима развијала као индуктивна наука. Емпиријским путем долазило се до појединачних закључака, из којих су се, индукцијом, изводила општија тврђења. По већини историчара математике, до значајних математичких открића долазило се управо на овај начин у Месопотамији, Египту, па и у старој Грчкој. Развијање дедуктивне методе везује се за једно важно начело, које се приписује старогрчком математичару Талесу. То је начело доказивања математичких тврђења. Према списима Еудема, Талес је умео да докаже да *пречник полови круг*, да су *унакрсни углови међусобно једнаки*, и још неколико значајних тврђења. Готово сигурно то нису били докази у данашњем смислу речи, већ је, ослањајући се на уверљивост слика којима је илустровао ове ставове, само приметио да они важе. Иако бисмо данас за доказ „види се са слике“ дали јединицу већ детету у првом разреду средње школе, чињеница да је Талес приметио потребу за доказивањем тврђења је од изузетног значаја за даљи развој не само математике, већ науке уопште. Следеће начело, које је од пресудног значаја за развој дедуктивне методе, приписује се такође старогрчком математичару, Питагори. То је начело систематизације. Верује се да је он доказао многа важна математичка тврђења, и што је још значајније, да је уочио важност редоследа њиховог излагања и коришћења већ доказаних тврђења у доказивању нових. Сматра се да је прво систематизовано дело, придржавајући се начела дедукције, написао Хипократ средином петог века пре нове ере. Многи каснији аутори, позивајући се на Хипократове *Елементе*, истичу прецизност и строгост у излагању и доказивању ставова. На разлику између научног закључивања и емпиријског сазнања први је указао Платон. Важан допринос заснивању научних теорија на овој основи дао је и Аристотел, који основне принципе дели на дефиниције, аксиоме и постулате, о чему ће детаљније бити речи касније у овом раду. Свакако најзанчајније дело за развој дедуктивне методе написао је Еуклид, око 300. године пре нове ере. Еуклидови *Елементи* су више од два миленијума били основни

учбеник на коме се темељило читаво образовање, те ћемо се због тога, у другом поглављу овог рада, детаљније позабавити аксиоматским заснивањем геометрије код Еуклида. Ипак, Еуклидови Елементи имали су низ пропуста. Кроз историју, многи математичари су покушавали да те пропусте исправе и да попуне уочене празнине. Најзначајнију улогу у томе има Давид Хилберт, који је, систематизујући све дотадашње резултате, крајем деветнаестог века дао јако важан допринос аксиоматском заснивању еуклидске геометрије. Међутим, нису сви покушаји побољшања Еуклидовог аксиоматског система отишли у овом смеру. Наиме, велико интересовање изазвао је чувени пети постулат, који је, првенствено због своје сложености и неочигледности, одударао од осталих Еуклидових постулата. Николај Иванович Лобачевски, као и многи истакнути математичари пре њега, покушао је да изведе пети постулат из осталих Еуклидових аксиома и постулата. Уместо тога, он долази до (у то време) потпуно револуционарног открића – ако пети постулат заменимо новим постулатом, који тврди да *кроз дату тачку ван једне праве постоје бар две праве које су са датом правом компланарне и дисјунктне*, добијамо нову непротивречну теорију. Наиме, он смело тврди да, осим Еуклидове, постоји и геометрија која се значајно разликује, а која је „подједнако исправна“. До сличних резултата, потпуно независно од Лобачевског, долази и мађарски математичар Јанош Бољај, мада их доста скромније приказује. Наравно, у то време обојица наилазе на жестоко неодобравање. Десетак година касније, Риман презентује своју идеју о новој нееуклидској геометрији. Тек након тога, почиње да бива прихваћена идеја да су алтернативне геометрије могуће. Италијански математичар Белтрами 1868. године започиње, а касније немачки математичар Клајн довршава доказ да су еуклидска и геометрија Лобачевског еквиконзистентне, тј. да је геометрија Лобачевског непротивречна ако и само ако је таква и еуклидска геометрија. Значај овог открића Лобачевског је непроцењив, не само за геометрију, већ уопште, за даљи развој математике као дедуктивне науке. Заснивање геометрије на неочигледним аксиомама је, између осталог, подстакло развој математичке логике, и отворило многа нова питања у математици. Генерално, сва важна геоеметријска открића, од Еуклида па све до Лобачевског, и даље, нису била важна само за геометрију, већ су непобитно утицала и на развој целокупне математике.

## 1.2. О аксиоматским системима

Када поменемо аксиоматско заснивање неке научне дисциплине, подразумевамо избор основних појмова, основних ставова, односно аксиома (данас више немамо поделу основних ставова на постулате и аксиоме) и коришћење одређених логичких принципа при извођењу осталих ставова те теорије. Размотримо мало детаљније ову тему.

Шта је аксиоматски систем? Можемо рећи да се аксиоматски систем састоји из скупа основних, недефинисаних појмова и скупа аксиома (основних ставова). Основни појмови су они појмови које, без претходног дефинисања, користимо да бисмо објаснили све остале појмове неке теорије. Аксиоме су почетни ставови, чију истинитост претпостављамо. Свака следећа тврдња, теорема неке теорије,

мора бити логичка последица аксиома и претходно доказаних теорема<sup>1</sup>. У аксиоматском систему неке теорије постоје и дефиниције, али оне заправо служе само да би поједноставиле ствари. Дефиницијама уводимо нове појмове, чија значења објашњавамо основним и претходно дефинисаним појмовима. Дакле, да бисмо аксиоматски засновали неку дедуктивну теорију, потребно је да направимо избор основних појмова и аксиома. При том, желимо да наш аксиоматски систем има следеће особине:

- непротивречност (конзистентност),
- потпуност,
- независност аксиома.

Објаснимо детаљније свако од ових својстава која може имати произвољни аксиоматски систем. Када кажемо да желимо *непротивречан* систем аксиома, подразумевамо да из њега не можемо дедуковати и неки став и његову негацију. Ово је врло важна особина аксиоматског система коју увек захтевамо, с обзиром на то да неконзистентан аксиоматски систем није од великог значаја, јер се из њега може дедуковати било који став. Затим, желимо да наш аксиоматски систем буде *потпун*, тј. да за сваки став који се може формулисати у појмовима те теорије важи да се из аксиоматског система може дедуковати или тај став, или његова негација. Ово је такође особина аксиоматског система која је веома пожељна, али морамо приметити да је мање значајна од особине конзистентности. Недостатак непотпуног аксиоматског система је тај што се у њему нека тврђења не могу ни доказати ни оповргнути. Особина аксиоматског система на којој се најмање инсистира и од које се понекад свесно одустаје због поједностављивања записа је *независност аксиома и основних појмова*. Наиме, код аксиоматских система који задовољавају ово својство, ниједна аксиома није логичка последица осталих аксиома, и ни један основни појам се не може дефинисати помоћу осталих основних појмова. Дакле, иако није једнозначно одређен, избор аксиома неког аксиоматског система не може бити потпуно произвољан.

За два аксиоматска система неке теорије кажемо да су еквивалентни ако се сваки појам једног од тих система може објаснити појмовима другог система, и ако се сваки став једног може дедуковати из ставова другог система.

Ако неки објекти задовољавају аксиоме неке теорије, онда они чине модел<sup>2</sup> те теорије.

### 1.3. Мало филозофије...

Први покушаји да се нека теорија аксиоматски заснује, као што смо већ поменули, датирају из Античке Грчке. Кроз историју, на развој математике значајно су утицали различити филозофски правци. Размишљајући о различитим приступима математици као науци, немогуће је не дотаћи се филозофије математике. Ово је заиста интересантна и опширна тема и, иако детаљнији увид у њу превазилази

---

<sup>1</sup> О томе шта тачно подразумевамо под термином *доказати теорему* биће речи нешто касније у овом раду.

<sup>2</sup> Појам модела неке аксиоматске теорије први уводи Хилберт у својим *Основама геометрије*.

оквиру овог рада, покушаћемо да макар укратко поменемо неке (за нашу тему) значајне филозофске правце.

- Реализам (платонизам)
- Формализам
- Интуиционизам (конструктивизам)

Реалиста верује да математички објекти постоје независно од математичара, на математичарима је само да их открију. По реалистима, математичар је више истраживач него стваралац. Један од најпознатијих математичара који заступају ово становиште био је Бертранд Расел. Он каже: *Свако знање мора бити препознавање; све оно о чему се може мислити постоји, а његово постојање је предуслов, не резултат, да се о њему може мислити.*

Насупрот томе, формалиста верује да се математика не мора односити на чулну реалност. За њега је математика скуп формалних система чији се елементи комбинују према одређеним правилима, која су, заправо, суштински задатак математичара. Формалиста је стваралац, не истраживач. На питања платониста о постојању математичких објеката, један од највећих формалиста међу математичарима, Давид Хилберт, одговара: *У математици постојати значи бити непротивречан.*

Оснивач интуиционизма, Лујцен Брауер, верује да људски ум поседује интуицију природног броја, и да на њој гради све остале математичке конструкције. Он признаје за математичке објекте *само оне који су конструисани од природних бројева ефективним, алгоритамским поступком.*<sup>3</sup> О томе сведочи и његова чувена реченица: *Постојати, значи бити конструисан.*

Интересантан је однос ових филозофија према логици. За реалисте, закони математике изводљиви су из логики, или се могу свести на логику. Хилберт успоставља логику као математичку дисциплину, док Брауер потпуно одбацује класичну логику. По Брауеру, неки закони логики, као што су, нпр. закон двојне негације и закон искључења трећег не морају да важе у математици. Брауеров ученик, Аренд Хејтинг је формализовао интуиционистичко резонување, у ком је могуће спроводити само директне доказе.<sup>4</sup>

## 1.4. О аксиоматском заснивању математике...

Хилберт и Бернајс, у свом делу *Основи математике*, покушавају да аксиоматски заснују целокупну математику. Хилберт је аксиоматизовао геометрију у *Основама геометрије*, Цермело и Френкел су аксиоматизовали теорију скупова, а Расел и Вајтехед теорију бројева. Пеано је радио на аксиоматизацији аритметике. Међутим, Курт Гедел<sup>5</sup> је, покушавајући да до краја реализује Хилбертову идеју, доказао да је то заправо немогуће онако како је Хилберт конципирао свој програм. Гедел доказује да сваки непротивречни формални систем који укључује Пеанову

---

<sup>3</sup> М. Божић „Преглед историје и филозофије математике“

<sup>4</sup> Детаљније о овој теми може се наћи у **Error! Reference source not found.**

<sup>5</sup> Kurt Gödel (1906-1978), аустријски логичар, математичар и филозоф. Једно од својих најзначајнијих открића – теорему непотпуности, Гедел је 26. августа 1930. презентовао својим пријатељима и колегама у кафићу Reichsrat у Бечу.

аритметику није потпун, и нешто касније, да се непротивречност аритметике не може доказати средствима унутар ње саме. Дакле, потпуна аксиоматизација математике на начин на ком су формалисти инсистирали је неостварива. Нас, међутим, овде интересује доста слабији захтев. Занима нас шта нам је потребно да бисмо аксиоматски засновали геометрију. Математичке дисциплине које користимо у изградњи неке математичке теорије називамо претпостављеним дисциплинама. Које математичке дисциплине је згодно претпоставити за заснивање геометрије? У формулацијама аксиома употребљавамо појмове логики, у доказима теорема користимо одређене логичке законитости. Дакле, свакако ћемо логику користити као претпостављену дисциплину при заснивању геометрије. Тачније, користимо математичку логику, науку која се, крајем деветнаестог века, нагло развија на темељима Аристотелове логики. Тада већ типичан пример дедуктивне науке, математика, не може без логики. Због непрецизности природних језика, математичари користе језик логики, обогаћујући га новим, математичким појмовима. Данас је математичка логика изузетно значајна дисциплина, која се не може избећи било да желимо да проучавамо класичну логику, било да покушавамо аксиоматски да заснујемо неку математичку теорију. Као што каже Тарски, *логички појмови прожимају целокупну математику, обухватају све специфичне математичке појмове као посебне случајеве, а логички закони се, свесно или несвесно, примењују у математичким расуђивањима*. Ми ћемо овде навести неке основне појмове математичке логики, и неке њене законе које најчешће сусрећемо у геометрији.

## 1.5. Логички подсетник

Подсетимо се најпре исказа и логичких операција над њима.

Све реченице које имају тачно једну истинитосну вредност (или су тачне или нетачне) називају се **искази**.

**Дисјункција** два исказа  $p$  и  $q$  је исказ  $p \vee q$  ( $p$  или  $q$ ), који је тачан ако је бар један од исказа  $p$ ,  $q$  тачан, а нетачан ако су оба исказа  $p$ ,  $q$  нетачна.

**Конјункција** два исказа  $p$  и  $q$  је исказ  $p \wedge q$  ( $p$  и  $q$ ), који је тачан ако су оба исказа  $p$ ,  $q$  тачна, а нетачан ако је бар један од исказа  $p$ ,  $q$  нетачан.

**Негација** исказа  $p$  је исказ  $\neg p$  (није  $p$ ), који је тачан ако је исказ  $p$  нетачан, а нетачан ако је исказ  $p$  тачан.

**Импликација** два исказа  $p$  и  $q$  је исказ  $p \Rightarrow q$  (ако  $p$ , онда  $q$ ;  $p$  повлачи  $q$ ; из  $p$  следи  $q$ ;  $p$  је довољан услов за  $q$ ;  $q$  је потребан услов за  $p$ ...), који је нетачан ако је исказ  $p$  тачан и исказ  $q$  нетачан, а тачан у свим осталим случајевима.

**Еквиваленција** два исказа  $p$  и  $q$  је исказ  $p \Leftrightarrow q$  ( $p$  ако и само ако  $q$ ;  $p$  је еквивалентно са  $q$ ;  $p$  је потребан и довољан услов за  $q$ ...), који је тачан ако су истинитосне вредности исказа  $p$ ,  $q$  исте, а нетачан ако су истинитосне вредности исказа  $p$ ,  $q$  различите.

Нама ће од највећег значаја бити операција импликације и операција еквиваленције. Већина геометријских тврђења јесте формулисана у облику импликације или еквиваленције. Подсетимо се још неких важних појмова математичке логики.

### Дефиниција:

1) Исказна слова (симболи  $p, q, r, \dots$ ) и логичке константе ( $\top$  и  $\perp$ ) су **исказне формуле** (ово су најједноставније, атомске формуле).

2) Ако су  $A$  и  $B$  **исказне формуле**, онда су и  $(A \vee B)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(\neg A)$ ,  $(A \Rightarrow B)$  и  $(A \Leftrightarrow B)$  такође исказне формуле.

3) **Исказне формуле** се могу градити само коначном применом правила 1) и 2) ове дефиниције.

Исказна формула је **таутологија** ако је тачна за било које истинитосне вредности исказних слова која се у њој појављују.

Исказна формула је **контрадикција** ако је нетачна за било које истинитосне вредности исказних слова која се у њој појављују.

Две исказне формуле су **логички еквивалентне** ако имају исте истинитосне вредности за било који избор истинитосних вредности исказних слова која се у њима појављују.

Таутологије можемо схватити као законе мишљења, односно законе закључивања. Неке од њих често користимо у доказивању математичких ставова (када и како то радимо детаљније ћемо објаснити нешто касније у овом раду). Међутим, често их несвесно користимо и у свакодневном резонувању. Наведимо сада неке важније таутологије и, за неке од њих, примере њихове свакодневне употребе.

### **Закон искључења трећег:** $p \vee \neg p$

Овај закон баш свакодневно користимо - у разговору, писању, размишљању. Чак и када, шаловитим тоном, кажемо *Доћи ћу. Или нећу. Једно од та два...* ми се, заправо, позивамо на ову таутологију.

### **Закон двојне негације:** $\neg \neg p \Leftrightarrow p$

Такође често коришћена у говору, иако у нашем језику понекад доводи до забуна. Позната је у говору и као дупла негација. *Није тачно да нисам долазила!* Дакле, *долазила сам*.

### **Закон непротивречности:** $\neg (p \wedge \neg p)$

Иако *јаре* и *паре* нису искази, па самим тим није ни једно од њих негација другог, мислим да ће свима бити јасно зашто наша изрека *Не може и јаре и паре*, неодољиво подсећа на ову таутологију. Иначе, прецизнији пример би, рецимо, била реченица *Не може истовремено на једном месту да пада киша и да не пада киша*.

### **Modus ponens:** $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

Modus ponens или правило одвајања. Из  $p$  и  $p \Rightarrow q$  изводимо, тј. „одвајамо“  $q$ . Ако знамо да је данас 5. у месецу, и ако сваког 5. у месецу примамо плату (скривена импликација – ако је данас 5. у месецу, данас ћемо примити плату), онда можемо закључити да ћемо данас заиста примити плату. Без обзира на то што у Србији поменути импликација није увек тачна, modus ponens остаје на снази.

**Modus tollens:**  $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Ако целу ноћ пада киша, ујутру ће бити мокра земља. Ујутру излазимо из куће и видимо да земља није мокра. Дакле, киша сигурно није падала целе ноћи.

**Закони контрапозиције:**  $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

Ако знаш да докажеш све теореме са предавања, сигурно ћеш положити испит. Дакле, ако ниси положио испит, значи да ниси знао да докажеш бар неку од тражених теорема.

**Де Морганови закони:**  $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Није тачно да Маја уме да пева и да црта. Дакле, Маја не уме да пева или не уме да црта.

Није тачно да је Аца био у биоскопу у уторак или у среду. Дакле, Аца није био у биоскопу ни у уторак ни у среду.

**Транзитивност импликације:**  $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Београд је у Србији, а Србија на Балкану. Дакле, ако неко живи у Београду, он живи у Србији. Ако неко живи у Србији, он живи на Балкану. Одатле можемо да закључимо да ако неко живи у Београду, он сигурно живи на Балкану.

**Закон набрајања:**  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$

Београд је у Србији, и Крагујевац је у Србији. Дакле, ако неко живи у Београду, он живи у Србији. Ако неко живи у Крагујевцу, он такође живи у Србији. Одатле можемо да закључимо да ако неко живи у Београду или у Крагујевцу, он сигурно живи у Србији.

**Закон уклањања еквиваленције:**  $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Милош жели да иде у биоскоп. Каже мајци *Потребно ми је 500 динара за карту*. Мајка пита – *Да ли ти је довољно 500 динара?* 500 динара је потребно и довољно за карту, односно карта кошта тачно 500 динара.

**Свођење на апсурд:**  $(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$

**Закон уклањања импликације:**  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

**Транзитивност еквиваленције:**  $((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

**Закон о правој последици:**  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p \wedge q)$

Приликом формулација математичких ставова, важну улогу играју и **квантификатори**.

**Универзални квантификатор** –  $\forall$

Обрнуто слово А као почетно слово немачке речи *alles*, значи „сваки“, „било који“, „произвољан“.

### Егзистенцијални квантификатор – $\exists$

Обрнуто слово Е као почетно слово немачке речи *existiert*, значи „постоји“, „неки“, „бар један“.

Најчешће користимо такозване **ограничене (условне) квантификаторе**:

$(\forall x \in A) \alpha(x)$  - За сваки елемент  $x$  скупа  $A$  важи својство  $\alpha$ .

$(\exists x \in A) \alpha(x)$  - Постоји елемент  $x$  скупа  $A$  за који важи својство  $\alpha$ .

Од посебне важности, биће нам понашање квантификатора у односу на негацију.

То понашање видимо из Де Морганових закона:

$$\neg(\forall x) \alpha(x) \Leftrightarrow (\exists x) \neg \alpha(x)$$

$$\neg(\exists x) \alpha(x) \Leftrightarrow (\forall x) \neg \alpha(x)$$

Први нам каже да ако неко својство не важи за сваки елемент, значи да постоји елемент за који то својство не важи (*Није сваки паралелограм квадрат* исто је што и *Постоји паралелограм који није квадрат*), а други нам каже да ако не постоји елемент за који неко својство важи, онда је тачно да за сваки елемент то својство не важи (*Не постоји троугао у који се не може уписати круг*, исто је што и *У сваки троугао може се уписати круг*).

Често ћемо чути да се универзални квантификатор „слаже“ са конјункцијом, а егзистенцијални са дисјункцијом. То заправо значи да важе следеће еквиваленције:

$$(\forall x) \alpha(x) \wedge (\forall x) \beta(x) \Leftrightarrow (\forall x) (\alpha(x) \wedge \beta(x));$$

$$(\exists x) \alpha(x) \vee (\exists x) \beta(x) \Leftrightarrow (\exists x) (\alpha(x) \vee \beta(x)).$$

Такође, кажемо да се универзални квантификатор „делимично слаже“ са дисјункцијом, као и егзистенцијални са конјункцијом, тј. важе следеће импликације:

$$(\forall x) \alpha(x) \vee (\forall x) \beta(x) \Rightarrow (\forall x) (\alpha(x) \vee \beta(x));$$

$$(\exists x) \alpha(x) \wedge (\exists x) \beta(x) \Leftarrow (\exists x) (\alpha(x) \wedge \beta(x)).$$

До сад смо приказали многе важне појмове и законитости математичке логике. Многе смо и изоставили, јер, када бисмо хтели детаљно и строго формално да уведемо све појмове који су нам потребни за аксиоматско заснивање геометрије, овај рад би био заиста преобиман. Међутим, још увек нам недостаје један круцијални део, без ког нам је тешко да замислимо било какву математичку теорију. Већ смо нагласили да је једна од најзначајних особина математике дедуктивност – изводљивост. Једина исправна закључивања у математици јесу извођења, односно доказивања. Важан део математичке логике је управо уобличавање и утврђивање средстава која користимо при доказивању математичких тврђења. Размотримо сада шта подразумевамо под доказима математичких тврђења.

## 1.6. Шта је доказ?

Доказати у старој Грчкој заправо је значило показати, илустровати и уочити. Чак и у Еуклидовим доказима има недоследности и позивања на очигледност. Иако свесни да то није математички коректно, и ми данас, у настави математике у основним школама, често прибегавамо показивању уместо доказивања теорема. Наиме, деца у том узрасту најчешће не баратају довољно јаким математичким апаратом да би разумела доказе неких тврђења, а са методичке стране је битно

сваку тврдњу поткрепити, макар и илустрацијом коју понекад деци пласирамо као доказ. Делове доказа које деца не могу да схвате, често вешто прескочимо синтагмом *Очигледно је да важи*, чак и када оно што важи, иако интуитивно јасно, уопште није једноставно доказати. Такође, честа замка крије се и у реченици *Види се са слике*. Наиме, као што смо већ поменули, у једној формално заснованој теорији, слика није део аксиоматског система, није нешто на шта смо да се позивамо. Поново, слика је илустрација, не доказ. Има још много сличних начина да будемо у заблуди да смо нешто доказали. Нећемо се, међутим, више задржавати на томе шта све није доказ. Покушајмо да објаснимо шта може бити доказ одређеног става неке аксиоматски засноване теорије.

Доказ неког тврђења можемо дефинисати као коначан низ тврђења чији је сваки члан аксиома, већ доказано тврђење или тврђење које се добија из претходних чланова низа помоћу неког правила закључивања (таутологије или ваљане формуле).

Већ смо навели неке најчешће коришћене таутологије. Покажимо сада укратко како њих користимо у доказима теорема.

Чак и у најједноставнијим примерима, када треба да докажемо да конјункција нека два исказа није тачна, то радимо тако што доказујемо да је бар један од ова два исказа нетачан. Дакле, примењујемо Де Морганов закон.

Велики број математичких тврђења дат је у виду импликације. Међутим, често је тешко доказати импликацију директно. Закон контрапозиције нам омогућава да импликацију  $p \Rightarrow q$  докажемо тако што заправо докажемо њој еквивалентну импликацију  $\neg q \Rightarrow \neg p$ , што је често доста једноставније<sup>6</sup>.

Такође, доста математичких тврђења дато је у виду еквиваленције. Када доказујемо оваква тврђења, најчешће доказујемо „оба смера“. Наиме, исказ  $p \Leftrightarrow q$  логички је еквивалентан исказу  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ , односно конјункцији две обратне импликације (закон о уклањању еквиваленције). Ако докажемо да важе обе импликације, доказали смо да важи и тражена еквиваленција. Међутим, понекад је једноставније применити закон о транзитивности еквиваленције, тако што ћемо пронаћи неко помоћно тврђење  $r$  за које нам је једноставније да докажемо да важи  $p \Leftrightarrow r$  и  $r \Leftrightarrow q$ , па да одатле, примењујући закон о транзитивности еквиваленције, закључимо да је и  $p \Leftrightarrow q$ .

Када треба да докажемо неко тврђење, понекад доказујемо неко шире тврђење па из њега закључујемо тражено (уже) тврђење. То нам омогућава закон *modus ponens*, који каже да ако докажемо да је тачно тврђење  $p$  и докажемо да оно имплицира тврђење  $q$ , тада је и тврђење  $q$  тачно.

Свако ко је завршио средњу школу у Србији, готово сигурно је наишао на чувени почетак доказа *Претпоставимо супротно*. Који закон закључивања се крије иза овог приступа доказу? Наиме, код оваквих доказа, на почетку претпоставимо супротно од оног што желимо да докажемо, а затим из те претпоставке закључујемо неку контрадикторну тврдњу (да је, рецимо, под нашом претпоставком, тачан и неки исказ и његова негација). Тиме доказујемо да наша претпоставка није тачна, односно да важи њој супротно тврђење, тј. да важи оно

---

<sup>6</sup> Ово не треба мешати са тзв. индиректним доказом, код ког користимо закон свођења на апсурд.

што смо и хтели да докажемо. Односно, ако тврђење које желимо да докажемо означимо са  $p$ , ми претпоставимо да важи  $\neg p$ , из чега закључујемо неку контрадикцију  $q \wedge \neg q$ , па из свега тога можемо закључити да важи  $p$ . Сада је већ јасно да смо применили закон свођења на апсурд  $-(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p$ , а користили смо и закон непротивречности  $-(q \wedge \neg q)$ , као и закон искључења трећег  $p \vee \neg p$ . Овакав доказ често називамо индиректним доказом.

Када желимо да докажемо да неко тврђење није тачно, довољно нам је да пронађемо контрапример, односно макар један случај у ком одређено тврђење није тачно. Међутим, није увек једноставно пронаћи контрапример. Тада, понекад, прибегавамо правилу логичког закључивања познатом под латинским називом *modus tollens*. Наиме, ако знамо да тврђење  $q$ , за које желимо да покажемо да није тачно, повлачи тврђење  $p$ , и докажемо да тврђење  $p$  није тачно, тада, по поменутом правилу, можемо закључити да није тачно ни тврђење  $q$ .

## 1.7. О поступку решавања математичког проблема

Грчки математичар Папус у седмој књизи свог чувеног дела *Collectiones* говори о вештини решавања задатака, и илуструје своју методу на примерима конструктивних задатака. Он издваја четири важна дела решења сваког математичког проблема:

- анализа (у овом делу претпостављамо да је задатак решен и уочавамо односе између датих и тражених елемената);
- конструкција (полазећи од задатих, коначним бројем корака долазимо до тражених елемената);
- доказ (доказујемо да је оно до чега смо дошли у конструкцији заиста оно што је тражено од нас у задатку);
- дискусија (разматрамо егзистенцију и број решења у зависности од задатих услова).

Иако данас ову форму решења експлицитно срећемо само у конструктивним задацима, наведене етапе су подразумевани део сваког коректно решеног математичког задатка. Дакле, решавајући било који математички проблем (иако то не наводимо увек експлицитно), ми пролазимо кроз сваку од ових етапа. У поменутој књизи, Папус дефинише и два важна мисаона процеса – анализу и синтезу.

**Анализа** узима оно што се тражи као да је већ нађено и полази од тога преко узастопних последица до нечега што се узима као почетак синтезе; јер у анализи узимамо да је оно што се тражи већ учињено и питамо се чија је то последица, и опет шта је узрок последњег, и тако даље све док идући оваквим корацима не стигнемо до нечега што је већ познато или што припада класи првих начела. Овакву методу називамо анализом као решавање уназад.

**Синетза** је обнут процес, у њој узимамо као учињено то што је у анализи било последње достигнуто и сређујући у њиховом природном поретку као последице оно што су пре биле претпоставке и спајајући их редом једну за другом коначно долазимо до конструкције онога што је било тражено; и то зовемо синтезом.

Приметимо да, када доказујемо неку теорему или решавамо неки математички задатак, процес којим долазимо до решења је готово супротан редоследу којим ће решење бити приказано у уџбенику. Размишљајући о проблему, ми га рашчлањујемо, гледајући шта треба да докажемо размишљамо шта мора да важи. Када проблем решимо, делове до којих смо дошли анализирајући проблем обједињујемо у целину и, корак по корак (супротним смером од оног којим смо ишли у анализи проблема), исписујемо решење поступно долазећи до онога што је тражено у задатку.

## 2. Неки аксиоматски системи Еуклидске геометрије

*„Чисто формални језик геометрије на одговарајући начин описује реалност простора. У том смислу можемо рећи да је геометрија успешно чаробњаштво. Истовремено треба да додам и обрнуто: зар није све чаробњаштво, ако је успешно, у ствари геометрија?“*

*Рене Том*

### 2.1. Еуклидов аксиоматски систем

Еуклид, један од најзначајнијих античких математичара, студирао је на Платоновој академији. Прва асоцијација када данас чујемо за њега, јесте његово дело *Елементи*, које је вековима представљало узор логичког расуђивања. Сакупивши дотадашња математичка знања, Еуклид пише, како се данас сматра, *капитално дело којим се математика дефинитивно заснива као дедуктивна дисциплина*<sup>7</sup>. *Елементи* се састоје од тринаест књига, од којих се првих шест односи на планиметрију, наредне четири на теорију бројева, а последње три на стереометрију. На почетку прве књиге, Еуклид наводи низ дефиниција. Ово, наравно, нису дефиниције у данашњем смислу речи, и с обзиром на њихову непрецизност и понегде чак и некоректност, изазвале су много полемике. Као разлог за неувођење основних, недефинисаних појмова и покушај да се дефинише чак и тачка, многи историчари математике наводе Еуклидова филозофска уверења. Ми се овде на томе нећемо задржавати, приметимо само да, иако нема експлицитног „пописа“ основних појмова, они се имплицитно подразумевају. Затим, за разлику од каснијих аксиоматских система, код Еуклида поред аксиома срећемо и постулате. У складу са Аристотеловом поделом, код Еуклида постулати су основна тврђења која се односе конкретно на геометрију, а аксиоме су општија основна тврђења, применљива и у другим научним областима. Овде ћемо навести<sup>8</sup> дефиниције, аксиоме и постулате прве књиге *Елемената*.

#### Дефиниције

1. *Тачка* је оно што нема делова.
2. *Линија* је дужина без ширине .
3. Крајеви линије су тачке.
4. *Правна линија* је она, која за тачке на њој подједнако лежи.

---

<sup>7</sup> М. Божић „Преглед историје и филозофије математике“

<sup>8</sup> Наводи дефиниција, аксиома и постулата преузети су из превода Еуклидових *Елемената* Антона Билимовића.

5. *Површина* је оно што има само дужину и ширину.
6. Крајеви површине су линије.
7. *Раван* је површина која за праве на њој подједнако лежи.
8. *Угао* у равни је узајамни нагиб двеју линија у равни, које се стичу и које не леже у истој правој.
9. Ако су линије које образују угао праве, угао се зове *праволинијски*.
10. Ако права, која стоји на другој правој, образује са овом два суседна једнака угла, сваки од њих је *прав*, а подигнута права зове се *норамала* на оној на којој стоји.
11. *Туп угао* је онај, који је већи од правог.
12. *Оштар* је онај, који је мањи од правог.
13. *Граница* је оно што је крај ма чега.
14. *Фигура* је оно што је омеђено или једном или са више граница.
15. *Круг* је равна фигура омеђена таквом једном линијом (која се зове *периферија*), да су све праве повучене од једне тачке, која се налази у самој тој фигури, према тој линији (према периферији круга) међусобно једнаке.
16. Ова тачка се зове *средиште* круга.
17. *Пречник* круга је свака права што пролази кроз средиште круга, а ограничена је са сваке стране периферијом круга; он полови круг.
18. *Полукруг* је фигура ограничена пречником и њиме одвојеном периферијом круга; *средиште полукруга* је исто као и средиште круга.
19. Праволинијске фигуре су оне које су ограничене правама; *тностране* су ограничене са три, *четворостране* са четири, *многострране* са више од четири праве.
20. Од тностраних фигура *једнакострани троугао* има три једнаке стране, *једнакократи* има само две једнаке стране, а *разнострани* има три неједнаке стране.
21. Даље, од тностраних фигура је *правоугли троугао* онај који има прав угао, *тупоугли* који има туп угао, а *оштроугли* који има три оштра угла.

22. Од четвоространих фигура *квадрат* је једнакостран и са правим угловима; *правоугаоник* је са правим угловима, но није са једнаким странама; *ромб* је са једнаким странама, но није са правим угловима; *ромбоид* са једнаким наспрамним странама и једнаким наспрамним угловима, но није ни једнакостран ни са правим угловима. Остале четворостране фигуре нека се зову *трапези*.

23. *Паралелне* су оне праве, које се налазе у истој равни и које се, продужене у бескрајност на обе стране, не секу једна са другом.

### **Постулати**

Нека се претпостави:

1. Да се може повући од сваке тачке ка свакој другој тачки права линија.
2. И да ограничена права може бити продужена у свом правцу непрекидно.
3. И да се може описати из сваког средишта сваким растојањем круг.
4. И да су сви прави углови једнаки међусобно.
5. И да ће се, ако једна права у пресеку са другим двома образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи и то са оне стране са које су ови углови мањи од два права.

### **Аксиоме**

1. Они (објекти) који су једнаки истом (објекту) једнаки су међусобно.
2. И ако се једнаким (објектима) додају једнаки (објекти) целине су једнаке.
3. И ако се од једнаких (објеката) одузму једнаки (објекти) остаци су једнаки.
4. И ако се неједнаким (објектима) додају једнаки (објекти) целине су неједнаке.
5. И удвостручени једнаки (објекти) једнаки су међусобно.
6. И половине од једнаких (објеката) једнаке су међусобно.
7. И они (геометријски објекти) који се могу поклопити једнаки су међусобно.
8. И целина је већа од дела.
9. И две праве не ограничавају област.

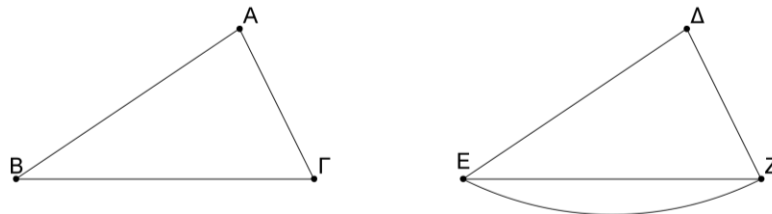
Код Еуклида, кретање је основни, недефинисани појам, који користи да би дефинисао подударност (седма аксиома). У другом ставу прве књиге, где Еуклид конструше дуж *једнаку* датој дужи, он заправо имплицитно дефинише појам подударности дужи нешто строжије, не ослањајући се на кретање. Међутим, он то даље не користи, већ тврђења која се односе на подударност троуглова доказује ослањајући се на седму аксиому. Приказаћемо овде Еуклидову формулацију и доказ првог става подударности троуглова, који Еуклид наводи као четврти став прве књиге.

#### Став 4:

Ако су код два троугла две стране једног једнаке одговарајућим двема странама другог и ако су једнаки углови које образују једнаке стране, мора и основица бити једнака основици, један троугао једнак другом троуглу и остали углови морају бити једнаки осталим угловима и то одговарајући, наиме они који леже спрам једнаких страна.

#### Доказ:

Нека су код два троугла  $ABГ$  и  $\Delta EZ$  две стране,  $AB$  и  $AG$ , једнаке странама  $\Delta E$ ,  $\Delta Z$  и то одговарајуће, тј.  $AB$  једнака  $\Delta E$  и  $AG$  једнака  $\Delta Z$  и нека је угао  $BAG$  једнак углу  $E\Delta Z$ . Тврдим да је основица  $BГ$  једнака  $EZ$ , троугао  $ABГ$  једнак троуглу  $\Delta EZ$  и остали углови једнаки осталим угловима, и то одговарајући, тј. они који се налазе спрам једнаких страна, тј. угао  $ABГ$  једнак углу  $\Delta EZ$  и угао  $AGB$  углу  $\Delta ZE$ .



Ако се троугао  $ABГ$  положи на троугао  $\Delta EZ$  тако да тачка  $A$  падне у тачку  $\Delta$ , а да дуж  $AB$  иде по дужи  $\Delta E$ , тада ће се тачка  $B$  поклопити са тачком  $E$  због једнакости  $AB$  и  $\Delta E$ . Пошто се  $AB$  поклапа са  $\Delta E$ , мора права  $AG$  ићи у правцу  $\Delta Z$  због једнакости углова  $BAG$  и  $E\Delta Z$ . Такође ће се поклопити тачке  $Г$  и  $Z$ , због једнакости  $AG$  и  $\Delta Z$ . Али се и  $B$  поклапа са  $E$ . Отуда следи да ће се основица  $BГ$  поклопити са основицом  $EZ$ , јер ако би се  $B$  поклапало са  $E$  и  $Г$  са  $Z$ , а основица  $BГ$  не би поклапала са  $EZ$ , тада би две праве ограничавале област, а то је немогуће. Према томе и основица  $BГ$  поклопиће се са основицом  $EZ$  и биће са њом једнака. А и цео троугао  $ABГ$  ће се поклопити и бити једнак целом троуглу  $\Delta EZ$  и остали углови ће се поклопити и бити једнаки осталим угловима, наиме угао  $ABГ$  једнак углу  $\Delta EZ$  и угао  $AGB$  углу  $\Delta ZE$ .

На овај начин, ако су код два троугла две стране једног једнаке одговарајућим двема странама другог и једнаки углови које образују једнаке стране, мора и основица бити једнака основици, један троугао мора бити једнак другом троуглу и

остали углови морају бити једнаки осталим угловима и то одговарајући, наиме они који леже спрам једнаких страна. А то је требало доказати.

### Pons Asinorum

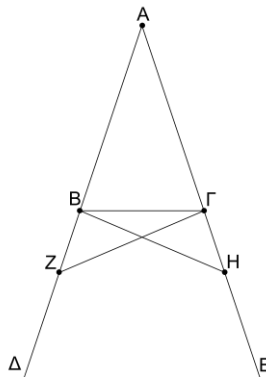
Навешћемо сада још један Еуклидов доказ, познат под латинским називом Pons Asinorum, односно Магарећи мост. Сам назив је изузетно интересантан, и у литератури се може наћи неколико верзија приче о томе зашто је ова важна теорема позната баш под овако необичним именом. Када погледамо Еуклидов доказ, примећујемо да његова скица подсећа на товар за магарце, што многи наводе као разлог овог назива. Међутим, постоји и прича по којој је сам Еуклид ову теорему (која се код њега налази као пети став прве књиге Елемената) сматрао преласком са елементарне ка напредној геометрији, и да је говорио да је овај став мост од лакшег ка тежем, али мост који је толико једноставно прећи да само магарац то не би успео. Испод је дата Еуклидова формулација и доказ овог важног тврђења<sup>9</sup>.

### Став 5:

Код једнакокраних троуглова углови су на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно.

### Доказ:

Нека је  $AB\Gamma$  једнакокрани троугао са краком  $AB$  једнаким краку  $A\Gamma$  и нека су праве  $B\Delta$  и  $\Gamma E$  продужења кракова  $AB$  и  $A\Gamma$  (та продужења постоје, на основу другог постулата). Тврдим да је угао  $AB\Gamma$  једнак углу  $A\Gamma B$  и угао  $\Gamma B\Delta$  углу  $B\Gamma E$ .



Нека се на правој  $B\Delta$  узме произвољна тачка  $Z$  и пренесе на већу дуж  $AE$  дуж  $AH$  једнака мањој  $AZ$  (што се може урадити на основу трћег става прве књиге, у ком Еуклид доказује да ако су дате две неједнаке дужи, на већу се може пренети дуж једнака мањој), па затим повуку праве  $Z\Gamma$  и  $H\Gamma$  (позива се на први постулат). Пошто је  $AZ$  једнако  $AH$  и  $AB$  једнако  $A\Gamma$ , тј. пошто су две стране  $ZA$ ,  $A\Gamma$  једнаке

<sup>9</sup> Једноставнији доказ овог става даје Папус Александријски, ослањајући се на симетричност једнакокраног троугла. Овај доказ може се пронаћи у [16].

одговарајућим двома странама  $HA$ ,  $AB$  и чине заједнички угао  $ZAH$ , то је основица  $ZG$  једнака основици  $HB$ , и троугао  $AZG$  једнак троуглу  $AHB$  и остали углови једнаки одговарајућим осталим угловима који леже спрам једнаких страна, наиме угао  $AGZ$  углу  $ABH$  и угао  $AZG$  углу  $AHB$  (четврти став прве књиге). И пошто је цела дуж  $AZ$  једнака целој дужи  $AH$ , а дуж  $AB$  је једнака дужи  $AG$ , биће и остатак, тј. дуж  $BZ$ , једнак остатку – дужи  $GH$ . А раније је показано, да је  $ZG$  једнако  $HB$ . Према томе, две стране  $BZ$ ,  $ZG$  једнаке су одговарајућим двома странама  $GH$ ,  $HB$  и угао  $BZG$  једнак је углу  $GNB$ , а основица је иста  $BG$ ; троугао  $BZG$  биће једнак троуглу  $GNB$ , и остали углови биће једнаки одговарајућим угловима што леже спрам једнаких страна; угао  $ZBG$  биће према томе једнак углу  $HGB$  и угао  $BGZ$  углу  $GBH$ . А пошто је, како је показано, цео угао  $ABH$  једнак целом углу  $AGZ$ , а угао  $GBH$  једнак углу  $BGZ$ , то ће и остатак – угао  $ABG$ , бити једнак остатку – углу  $AGB$ ; а ови углови леже на основици троугла  $ABG$ . А раније је показано, да је угао  $ZBG$  једнак углу  $HGB$ , а ови се налазе под основицом. Тако су код једнакокраких троуглова углови на основици једнаки међусобно, а у случају продужења једнаких страна углови под основицом такође морају бити једнаки међусобно. А то је требало доказати.

## 2.2. Хилбертов аксиоматски систем

Као што смо већ навели, Еуклидови *Елементи* су вековима били најзначајнији и најобухватнији математички уџбеник. Ипак, многи математичари су уочавали недостатке Еуклидовог аксиоматског система, и временом попуњавали уочене празнине. Већ Архимед уочава да Еуклидови постулати и аксиоме нису довољни да се из њих изведу сва тада позната геометријска тврђења, и допуњава Еуклидов систем са пет нових аксиома. Доста касније, велики допринос унапређењу Еуклидовог аксиоматског система дали су математичари Пеано, Паш и Веронезе. Међутим, тек 1899. године, немачки математичар Давид Хилберт, у свом делу *Основи геометрије*, еуклидску геометрију заснива на независном, непротивречном и потпуном систему аксиома. За разлику од Еуклида, Хилберт не покушава да дефинише појмове тачке, праве и равни, већ их узима за основне појмове. Код Хилберта, прва група аксиома (аксиоме везе) „дефинишу“ појам *припадања*, аксиоме распореда дају прецизнији опис појма *између* и сл. О томе да аксиоме за Хилберта представљају и неку врсту одређења основних појмова, сведочи и његова чувена изјава: *Уместо тачке, праве, равни, можемо рећи сто, столица, кригла пива. Оно што је битно је да су аксиоме у основи свих њих.*

Наведимо<sup>10</sup> за почетак дефиниције<sup>11</sup> којима Хилберт уводи основне појмове, а затим и аксиоме Хилбертовог система.

**Дефиниција:** Ми замишљамо три система ствари: ствари првог система називамо тачкама и означавамо их са  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ...; ствари другог система називамо правама и

<sup>10</sup> Наводи дефиниција и аксиома преузети су из осмог издања *Основа геометрије*, у преводу Ж. Гарашанина.

<sup>11</sup> У Хилбертовим *Основама геометрије* реч **дефиниција** се користи у мало другачијем смислу од оног на који смо ми данас навикли.

означавамо их са  $a, b, c, \dots$ ; ствари трећег система називамо равнима и означавамо их са  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ; тачке се називају и елементима линеарне геометрије, тачке и праве се називају елементима равне геометрије, а тачке, праве и равни се називају елементима просторне геометрије или елементима простора.

Ми замишљамо тачке, праве и равни у извесним међусобним односима и означавамо ове односе речима „лежати“, „између“, „подударно“, „паралелно“, „непрекидно“; тачан и за математичке сврхе потпун опис ових односа постиже се помоћу аксиома геометрије.

Аксиоме геометрије можемо поделити у пет група; свака појединачно од ових група изражава извесне повезане основне чињенице нашег опажаја. Ми ћемо ове групе аксиома разврстати на следећи начин:

- I 1–8. аксиоме везе,
- II 1–4. аксиоме распореда,
- III 1–5. аксиоме подударности,
- IV аксиома паралелности,
- V 1–2. аксиоме непрекидности.

### **Аксиоме везе**

- I<sub>1</sub>. За две тачке  $A, B$  постоји увек права  $a$  која припада свакој од ових двеју тачака  $A, B$ .
- I<sub>2</sub>. За две тачке  $A, B$  не постоји више од једне праве која би припадала свакој од двеју тачака  $A, B$ .
- I<sub>3</sub>. На правој постоје увек најмање две тачке. Постоје најмање три тачке које не леже на једној правој.
- I<sub>4</sub>. Ма за које три тачке  $A, B, C$  које не леже на истој правој, постоји увек раван  $\alpha$  која припада свакој од ове три тачке  $A, B, C$ . За сваку раван увек постоји тачка која јој припада.
- I<sub>5</sub>. Ма за које три тачке које не леже на истој правој не постоји више од једне равни која припада свакој од ових трију тачака  $A, B, C$ .
- I<sub>6</sub>. Ако две тачке  $A, B$  праве  $a$  леже у равни  $\alpha$ , онда свака тачка праве  $a$  лежи у равни  $\alpha$ .
- I<sub>7</sub>. Ако две равни  $\alpha$  и  $\beta$  имају заједничку тачку  $A$ , онда оне имају најмање још једну заједничку тачку  $B$ .
- I<sub>8</sub>. Постоје најмање четири тачке које не леже у једној равни.

### **Аксиоме распореда**

- II<sub>1</sub>. Ако тачка  $B$  лежи између тачака  $A$  и  $C$ , онда су  $A, B, C$  три различите тачке праве и  $B$  лежи такође између  $C$  и  $A$ .
- II<sub>2</sub>. За две тачке  $A$  и  $C$  увек постоји најмање једна тачка  $B$  на правој  $AB$  тако да  $C$  лежи између  $A$  и  $B$ .
- II<sub>3</sub>. Од ма којих трију тачака праве не постоји више од једне која лежи између оне друге две.

П<sub>4</sub>. Нека су  $A, B, C$  три тачке које не леже на једној правој и нека је  $a$  права у равни  $ABC$  која не пролази ни кроз једну од тих тачака  $A, B, C$ : ако тада права  $a$  пролази кроз једну од тачака дужи  $AB$ , она мора пролазити кроз једну од тачака дужи  $AC$  или кроз једну од тачака дужи  $BC$ .

### **Аксиоме подударности**

П<sub>1</sub>. Ако су  $A, B$  две тачке на правој  $a$  и ако је, даље,  $A'$  на истој или на другој правој  $a'$ , онда се може увек наћи таква тачка  $B'$  праве  $a'$  на датој страни од тачке  $A'$ , да дуж  $AB$  буде подударна или једнака дужи  $A'B'$ , што ћемо означити на следећи начин<sup>12</sup>:  $AB \equiv A'B'$ .

П<sub>2</sub>. Ако су дужи  $A'B'$  и  $A''B''$  подударне једној те истој дужи  $AB$ , биће и дуж  $A'B'$  подударна дужи  $A''B''$ , или кратко: ако су две дужи подударне трећој, подударне су и међу собом.

П<sub>3</sub>. Нека су  $AB$  и  $BC$  две дужи на правој  $a$  без заједничких тачака и нека су, даље,  $A'B'$  и  $B'C'$  две дужи на истој правој  $a$  или на некој другој правој  $a'$  које исто тако немају заједничких тачака: ако је  $AB \equiv A'B'$  и  $BC \equiv B'C'$ , биће увек  $AC \equiv A'C'$ .

П<sub>4</sub>. Нека је дат угао  $\angle(h, k)$  у равни  $\alpha$  и права  $a'$  у равни  $\alpha'$  као и одређена страна у равни  $\alpha'$  према правој  $a'$ . Нека  $h'$  означава полуправу праве  $a'$  која полази из тачке  $O'$ ; онда у равни  $\alpha'$  постоји једна и само једна полуправа  $k'$  тако да је угао  $\angle(h, k)$  подударан или једнак углу  $\angle(h', k')$  и у исто време све унутрашње тачке угла  $\angle(h', k')$  налазе се на датој страни од праве  $a'$ , што ћемо означити на овај начин  $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ . Сваки је угао подударан самом себи, тј. увек је  $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$ .

П<sub>5</sub>. Ако за два троугла  $ABC$  и  $A'B'C'$  важе подударности  $AB \equiv A'B'$ ,  $AC \equiv A'C'$  и  $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$  онда увек постоје и подударности  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  и  $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ .

### **Аксиома паралелних**

IV (Еуклидова аксиома): Нека је  $a$  произвољна права и  $A$  тачка ван  $a$ ; тада постоји у равни, одређеној правом  $a$  и тачком  $A$ , највише једна права која пролази кроз  $A$  и не пресеца  $a$ .

### **Аксиоме непрекидности**

V<sub>1</sub>. (аксиома мерења или Архимедова аксиома): Ако су  $AB$  и  $CD$  ма које две дужи, онда постоји неки такав број  $n$ , да кад се дуж  $CD$  пренесе  $n$  пута од  $A$  једно за другим по полуправој која пролази кроз тачку  $B$ , прелази се преко тачке  $B$ .

V<sub>2</sub>. (аксиома линеарне потпуности): Систем тачака једне праве са својим релацијама распореда и конгруенције не може се проширити тако да остану очуване релације које постоје између претходних елемената као и основне особине линеарног распореда и конгруенције које проистичу из аксиома I-III и аксиоме V<sub>1</sub>.

<sup>12</sup> Да бисмо испоштовали Хилбертову нотацију, као ознаку за подударност користимо симбол „ $\equiv$ “ иако га касније употребљавамо у другачијем контексту, који је данас уобичајен. Ознака коју данас користимо за подударност је „ $\cong$ “.

У настави математике се јако дуго користио Хилбертов систем аксиома. Касније, углавном из дидактичких разлога долази до разних модификација Хилбертовог система. У неким од тих модификација (нпр. у аксиоматском систему који се користи у уџбенику за Математичку гимназију), аксиоме непрекидности замењене су Дедекиндовом аксиомом.

Дедекиндова аксиома<sup>13</sup>: Нека је отворена дуж  $AB$  разложена на унију два дисјунктна непразна подскупа  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$ . Ако ниједна тачка из скупа  $\mathcal{U}$  није између неке две тачке скупа  $\mathcal{V}$  и ниједна тачка из скупа  $\mathcal{V}$  није између неке две тачке скупа  $\mathcal{U}$ , тада постоји јединствена тачка  $C$  отворене дужи  $AB$  таква да је  $\mathcal{B}(A', C, B')$  за свако  $A' \in \mathcal{U} \setminus \{C\}$  и свако  $B' \in \mathcal{V} \setminus \{C\}$ .

Код Хилберта, аксиоме подударности се односе и на појам подударности дужи и на појам подударности углова. Хилберт *дуж* дефинише као скуп тачака неке праве које се налазе између две дате тачке  $A$  и  $B$ , укључујући и те две тачке које зове *крајевима дужи*, а *угао* дефинише као пар полуправих које имају заједнички почетак у тачки  $O$  и које не припадају истој правој. Погледајмо најпре те две дефиниције из *Основа геометрије*.

#### Дефиниција:

Посматраћемо на правој  $a$  две тачке  $A$  и  $B$ : Систем двеју тачака  $A$  и  $B$  зваћемо дуж и означавати са  $AB$  или  $BA$ . Тачке *између*  $A$  и  $B$  зваћемо тачкама дужи  $AB$  или тачкама које леже у унутрашњости дужи  $AB$ ; тачке  $A$ ,  $B$  називају се крајњим тачкама дужи  $AB$ . Све остале тачке праве  $a$  називају се тачкама које леже ван дужи  $AB$ .

#### Дефиниција:

Нека је  $\alpha$  произвољна равна, а  $h$  и  $k$  нека су две ма које различите полуправе које излазе из тачке  $O$  у равни  $\alpha$  и припадају разним правама. Систем ове две полуправе  $h$ ,  $k$  називаћемо углом и означаћемо са  $\angle(h, k)$  или  $\angle(k, h)$ . Полуправе  $h$ ,  $k$  називају се крацима угла, а тачка  $O$  назива се теменом угла.

По Хилберту, два троугла су подударна ако су им подударни сви парови одговарајућих страница и сви парови одговарајућих углова.

Докажимо сада први став подударности троуглова, користећи Хилбертов аксиоматски систем.

#### Први став о подударности троуглова:

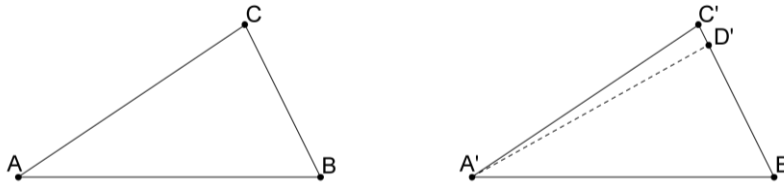
Троугао  $ABC$  је подударан троуглу  $A'B'C'$  ако важе подударности  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  и  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ .

#### Доказ:

Из аксиоме III<sub>5</sub> закључујемо да важи  $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$  и  $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$ . Остаје још да докажемо да важи  $BC \cong B'C'$ . По аксиоми III<sub>1</sub> постоји тачка  $D'$  на полуправој

<sup>13</sup> Формулација је преузета из [16]

$B'C'$  таква да је  $BC \cong B'D'$ . Претпоставимо да су  $C'$  и  $D'$  две разне тачке полуправе  $B'C'$ . Тада, ако применимо аксиому  $\Pi_5$  на троуглове  $ABC$  и  $A'B'D'$ , имамо да је  $\angle CAB \cong \angle D'A'B'$ , па је угао  $\angle CAB$  истовремено подударан и углу  $\angle C'A'B'$  и углу  $\angle D'A'B'$ , што је у контрадикцији са аксиомом  $\Pi_4$ . Дакле, тачка  $D'$  је идентички једнака тачки  $C'$ , и важи  $BC \cong B'C'$ .



### 2.3. Аксиоматски систем Борсука и Шмиелеве

Нема математичара у Србији који не зна за чувену Жуту књигу Драгомира Лопандића. Реч је о књизи *Геометрија, уџбеник за трећи разред усмереног образовања математичко–техничке струке*. Још од 1979. године, када је тај уџбеник објављен, Жута књига је незаобилазни део наставе еуклидске геометрије код нас. И управо због тога, овде ћемо навести аксиоматски систем који Лопандић користи. То је, заправо, модификована верзија Хилбертовог система аксиома, коју су предложили Борсук и Шмиелева у својим *Основима геометрије* из 1955. године. Они као основне, недефинисане појмове уводе скуп  $\mathcal{S}$ , који називамо простором, а његове елементе тачкама; две класе  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{P}$  његових подскупова, при чему елементе класе  $\mathcal{L}$  зовемо правима, а елементе класе  $\mathcal{P}$  равнима; и две релације дефинисане на скупу  $\mathcal{S}$ : трочлану релацију  $\mathcal{B}$ , коју називамо релацијом између, или релацијом поретка тачака на правој и четворочлану релацију  $\mathcal{C}$ , коју зовемо релацијом подударности. Основне ставове (аксиоме), они сврставају у пет група, као и Хилберт, и иако број аксиома по групама није исти као код Хилберта, суштинских разлика нема много. Једна од битнијих разлика је у аксиомама подударности, о чему ће бити речи при крају овог дела. Наведимо<sup>14</sup> сада све аксиоме овог система.

#### Аксиоме инциденције (припадања)

- $I_1$ . Свака права садржи најмање две разне тачке.
- $I_2$ . Постоји најмање једна права која садржи две тачке.
- $I_3$ . Постоји највише једна права која садржи две разне тачке.
- $I_4$ . Свака раван садржи најмање три неколинеарне тачке.
- $I_5$ . Постоји најмање једна раван која садржи три тачке.
- $I_6$ . Постоји највише једна раван која садржи три неколинеарне тачке.
- $I_7$ . Ако две разне тачке неке праве припадају једној равни, онда свака тачка те праве припада истој равни.

<sup>14</sup> Наводи дефиниција и аксиома преузети су из уџбеника *Еуклидска и Хиперболичка геометрија* Зорана Лучића.

I<sub>8</sub>. Ако две разне равни имају једну заједничку тачку, онда оне имају најмање још једну заједничку тачку.

I<sub>9</sub>. Постоје четири некопланарне тачке.

### Аксиоме распореда

П<sub>1</sub>. Ако је  $\mathcal{B}(A, B, C)$ , тада су  $A, B, C$  три разне колинеарне тачке.

П<sub>2</sub>. Ако је  $\mathcal{B}(A, B, C)$ , тада је  $\mathcal{B}(C, B, A)$ .

П<sub>3</sub>. Ако је  $\mathcal{B}(A, B, C)$ , тада није  $\mathcal{B}(A, C, B)$ .

П<sub>4</sub>. Ако су  $A$  и  $B$  две разне тачке, тада постоји тачка  $C$  таква да је  $\mathcal{B}(A, B, C)$ .

П<sub>5</sub>. Ако су  $A, B, C$  три разне колинеарне тачке, тада је  $\mathcal{B}(A, B, C)$  или  $\mathcal{B}(B, C, A)$  или  $\mathcal{B}(C, A, B)$ .

П<sub>6</sub>. Ако су  $A, B, C$  три неколинеарне тачке и  $p$  права која припада равни  $ABC$ , не садржи тачку  $A$  и сече праву  $BC$  у тачки  $P$  таквој да је  $\mathcal{B}(B, P, C)$ , тада права  $p$  сече праву  $CA$  у тачки  $Q$  таквој да је  $\mathcal{B}(C, Q, A)$  или праву  $AB$  у тачки  $R$  таквој да је  $\mathcal{B}(A, R, B)$ .

### Аксиоме подударности

П<sub>1</sub>. Ако су  $A, B, C, D$  тачке такве да је  $(A, B) \cong (C, D)$  и  $A \equiv B$ , тада је  $C \equiv D$ .

П<sub>2</sub>. Ако су  $A$  и  $B$  било које две тачке, тада је  $(A, B) \cong (B, A)$ .

П<sub>3</sub>. Ако су  $A, B, C, D, E, F$  тачке такве да је  $(A, B) \cong (C, D)$  и, уз то,  $(A, B) \cong (E, F)$  тада је  $(C, D) \cong (E, F)$ .

П<sub>4</sub>. Ако су  $C$  и  $C'$  тачке двеју отворених дужи  $AB$  и  $A'B'$  такве да је  $(A, C) \cong (A', C')$  и  $(B, C) \cong (B', C')$  тада је и  $(A, B) \cong (A', B')$ .

П<sub>5</sub>. Ако су  $A$  и  $B$  две разне тачке и  $C$  теме неке полуправе, тада на тој полуправој постоји тачка  $D$  таква да је  $(A, B) \cong (C, D)$ .

П<sub>6</sub>. Ако су  $A, B, C$  три неколинеарне тачке и  $A', B'$  тачке руба неке полуравни, такве да је  $(A, B) \cong (A', B')$  тада у тој полуравни постоји јединствена тачка  $C'$  таква да је  $(A, C) \cong (A', C')$  и  $(B, C) \cong (B', C')$ .

П<sub>7</sub>. Ако су  $A, B, C$  и  $A', B', C'$  две тројке неколинеарних тачака и  $D$  и  $D'$  тачке полуправих  $BC$  и  $B'C'$  такве да је  $(A, B) \cong (A', B')$ ,  $(B, C) \cong (B', C')$ ,  $(C, A) \cong (C', A')$  и  $(B, D) \cong (B', D')$  тада је и  $(A, D) \cong (A', D')$ .

### Аксиоме непрекидности

IV<sub>1</sub>. Ако су  $AB$  и  $CD$  две произвољне дужи, тада на полуправој  $AB$  постоји коначан низ тачака  $A_1, A_2, \dots, A_n$  таквих да је  $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$  при чему је свака од дужи  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  подударна дужи  $CD$  и  $\mathcal{B}(A, B, A_n)$ .

IV<sub>2</sub>. Ако је  $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$  низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка  $X$  која припада свакој дужи тог низа.

### Аксиома паралелних

V<sub>1</sub>. Постоје тачка  $B$  и права  $a$  која је не садржи такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку  $B$ , а са правом  $a$  нема заједничких тачака.

Поменули смо да је једна од важних разлика између овог и Хилбертовог аксиоматског система у аксиомама подударности. Наиме, Борсук и Шмиелева појам подударности користе доста елементарније, код њих се тај појам односи на подударност парова тачака. У складу са тим, дефинишемо следеће појмове:

*Изометријска трансформација* или *изометрија* је свака бијекција праве, равни или простора, која сваки пар тачака дате праве, равни или простора слика у њему подударан пар тачака.

Кажемо да су две фигуре  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  подударне ако постоји изометрија која пресликава  $\Phi_1$  у  $\Phi_2$ .

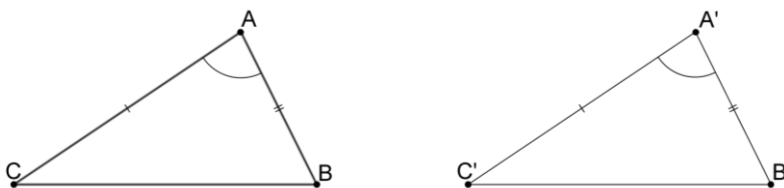
Докажимо сада први став о подударности троуглова.

#### Први став подударности троуглова:

Два троугла су подударна ако су две странице и њима захваћен угао једног троугла подударни са одговарајућим страницама и одговарајућим углом другог троугла.

#### Доказ:

Нека су  $ABC$  и  $A'B'C'$  два троугла, таква да је  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  и  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ . Тада постоји нека изометрија  $J$  која угао  $BAC$  пресликава у угао  $B'A'C'$ , при чему се теме  $A$  првог угла слика у теме  $A'$  другог угла. Тачке  $B$  и  $C$  се овом изометријом сликају у тачке  $B_1$  и  $C_1$  на крацима  $A'B'$  и  $A'C'$  такве да је  $AB \cong A'B_1$  и  $AC \cong A'C_1$ . Из аксиома подударности се једноставно доказује да су такве тачке  $B_1$  и  $C_1$  јединствене, па мора бити  $B_1 \equiv B'$  и  $C_1 \equiv C'$ . Дакле, изометријом  $J$  троугао  $ABC$  слика се у троугао  $A'B'C'$ , па су ова два троугла подударна.



## 2.4. Аксиоме Биркхофа<sup>15</sup>

Иако су у Хилбертовом аксиоматском систему исправљени недостаци Еуклидовог система, са методичке стране гледишта (ако претпоставимо да еуклидску геометрију треба предавати у средњим школама), он није савршен. Наиме, иако (с правом) замерамо Еуклиду много ствари у вези са његовим дефиницијама, увек их „илустративно“ наводимо пре него што ђацима изложимо Хилбертов систем (или неки други који је попут њега). Испоставља се да је средњошколцима доста тешко

<sup>15</sup> George David Birkhoff (1884-1944), амерички математичар

да разумеју толики ниво апстракције какав имамо код Хилберта. Такође, када ствари поставимо онако како то Хилберт ради, готово је немогуће у средњој школи строго формално увести нпр. појам растојања, односно меру дужи. Многи математичари су покушавали да (пре свега у дидактичком смислу) побољшају Хилбертов систем аксиома.<sup>16</sup> Значајан корак направио је Биркхоф, чији ћемо аксиоматски систем овде навести.<sup>17</sup> Он управо полази од појма растојања као једног од основних, недефинисаних појмова, што се, са методичке стране, чини доста исправнијим. Код Биркхофа су основни појмови скуп тачака, подскуп скупа тачака који се назива права и две реално-вредносне функције - растојање и угао (мера угла). За било које две тачке  $A$  и  $B$ , растојање  $d(A,B)$  је реалан број, а за било коју уређену тројку тачака  $(A,B,C)$ , мера угла  $m\angle ABC$  је реалан број дефинисан по модулу  $2\pi$ .

Овде имамо само четири аксиоме:

#### Еуклидова аксиома:

Две разне тачке одређују јединствену праву.

#### Аксиома лењира:

За сваку праву, постоји 1-1 пресликавање између тачака те праве и реалних бројева, које тачки  $A$  придружује реалан број  $t_A$ , а тачки  $B$  реалан број  $t_B$ , тако да је  $d(A,B)=|t_B - t_A|$ .

#### Аксиома угломера:

За сваку тачку  $Q$  постоји 1-1 пресликавање између полуправих са почетком у тој тачки и реалних бројева из интервала  $[0, 2\pi)$ , које полуправој  $r$  додељује реалан број  $\omega_r$  из интервала  $[0, 2\pi)$ , а полуправој  $s$  реалан број  $\omega_s$  из интервала  $[0, 2\pi)$ , тако да је  $m\angle RQS = \omega_s - \omega_r \pmod{2\pi}$ , где је тачка  $R$  на полуправој  $r$ , а тачка  $S$  на полуправој  $s$ .

#### Аксиома СУС:

Ако је  $m\angle PQR = m\angle P'Q'R'$  и  $d(P,Q):d(P',Q') = d(Q,R):d(Q',R') = k$  онда важи и  $m\angle QRP = m\angle Q'R'P'$ ,  $m\angle RPQ = m\angle R'P'Q'$  и  $d(P,R):d(P',R') = k$ .

Кажемо да су троуглови слични ( $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$ ), а да је коефицијент сличности  $k$ . Када је  $k=1$  кажемо да су троуглови подударни ( $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$ ).

Растојање  $d(A,B)$  називамо дужином дужи  $AB$ . Код Биркхофа, дуж  $AB$  подударна је дужи  $A'B'$  ( $AB \cong A'B'$ ) ако је  $d(A,B) = d(A',B')$ , а угао  $PQR$  је подударан углу  $P'Q'R'$  ( $\angle PQR \cong \angle P'Q'R'$ ) ако је  $m\angle PQR = m\angle P'Q'R'$ . Другим речима, две дужи су подударне ако имају једнаке дужине, а два угла су подударна ако су њихове мере једнаке.

<sup>16</sup> Списак је подужи, неки од њих су Балдус, Карзел, Блументал, Борсук и Шмиелева, Тарски, ...

<sup>17</sup> Аксиоме које наводимо преведене су из рада *Axiomatic Systems for Geometry*, Џорџа Франсиса, [9].

У оваквом аксиоматском систему, доказ првог става подударности троуглова је доста једноставнији него у претходним аксиоматским системима које смо овде разматрали.

Први став подударности троуглова:

Два троугла су подударна ако су две странице и њима захваћен угао једног троугла подударни са одговарајућим страницама и одговарајућим углом другог троугла.

Доказ:

Нека су  $ABC$  и  $A'B'C'$  два троугла таква да је  $AB \cong A'B'$ ,  $AC \cong A'C'$  и  $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$ . Дакле, тада важи  $d(A,B):d(A',B')=d(A,C):d(A',C')=1$  и  $m\angle BAC=m\angle B'A'C'$ , па су, по аксиоми СУС, троуглови  $ABC$  и  $A'B'C'$  слични са коефицијентом сличности  $k=1$ , тј. троуглови  $ABC$  и  $A'B'C'$  су подударни.

### 3. О аксиоматском заснивању геометрије у средњој школи

*Шта ће мени математика?* – питање је које је, вероватно, више пута чуо сваки наставник математике. Свакоме ко се на било који начин бави математиком ово питање делује смешно, као да се онај ко га је поставио шали са нама. Међутим, деца се врло озбиљно питају зашто се, кроз цело њихово школовање, делећи централно место са матерњим језиком, провлачи математика. Један од бољих одговора који сам ја чула дала је једна наставница која предаје математику језичком смеру гимназије: *Од свега што научите на часовима математике, добар део ћете користити, мада има и ствари које већини вас никада неће затребати. Али, све то је прилично неважно у односу на то да је начин размишљања који увежбавате на овим часовима незаобилазни део ваше свакодневице.* И заиста, став да је математика својеврсна „обука мозга“ јесте један од важних разлога за толику заступљеност математике у основним и већини средњих школа. У прилог овоме говори и чувени Рејлијев извештај из 1997. године, који се односи на образовање у САД-у. На основу података из неколико важних истраживања, овај извештај говори да је факултет уписало чак 83% средњошколаца који су слушали предавања из алгебре и геометрије, а само 36% оних који те часове нису похађали. Такође, ученици који су слушали предавања из математике, касније су били значајно успешнији студенти, не само на математичким и техничким факултетима, већ и на факултетима на којима се уопште не слуша и не полаже математика. Из овога, између осталог, можемо закључити да за већину људи само градиво и није толико значајно, колико начин размишљања који се развија кроз рад математике. Кит Девлин у својој књизи *Математички ген*, као поруку Рејлијевог извештаја истиче једну интересантну реченицу – *Дневна доза математике исто је толико добра за ум колико је дневна доза шетања или трчања добра за тело.* Чини се да се креатори школског програма код нас у солидној мери придржавају ове максиме. Погледајмо сада мало детаљније како и колико се математика ради у нашим гимназијама.

|                           | први<br>разред | други<br>разред | трећи<br>разред | четврти<br>разред |
|---------------------------|----------------|-----------------|-----------------|-------------------|
| општи тип гимназије       | 4              | 4               | 4               | 4                 |
| друштвено-језички смер    | 4              | 3               | 2               | 2                 |
| природно-математички смер | 4              | 5               | 5               | 4                 |

табела 1 – Број часова математике на недељном нивоу у гимназијама у Србији

**Циљ наставе математике у гимназији јесте<sup>18</sup>:** да ученици усвоје елементарне математичке компетенције (знања, вештине и вредносне ставове) које су потребне за схватање појава и законитости у природи и друштву и које ће да

<sup>18</sup> Преузето из [26]

*оспособе ученике за примену усвојених математичких знања (у решавању разноврсних задатака из животне праксе) и за успешно настављање математичког образовања и за самообразовање; као и да доприносе развијању менталних способности, формирању научног погледа на свет и свестраном развоју личности ученика.*

**Задаци наставе математике** су да ученици:

- развијају логичко и апстрактно мишљење;
- развијају способности јасног и прецизног изражавања и коришћења основног математичко-логичког језика;
- развијају способности одређивања и процене квантитативних величина и њиховог односа;
- разликују геометријске објекте и њихове узајамне односе и трансформације;
- разумеју функционалне зависности, њихово представљање и примену;
- развијају систематичност, уредност, прецизност, темељност, истрајност, критичност у раду, креативност;
- развијају радне навике и способности за самостални и групни рад;
- формирају систем вредности;
- стичу знања и вештине корисне за трансфер у друге предмете и развијају способности за правилно коришћење стручне литературе;
- формирају свест о универзалности и примени математичког начина мишљења;
- буду подстакнути за стручни развој и усавршавање у складу са индивидуалним способностима и потребама друштва;
- развијају способности потребне за решавање проблема и нових ситуација у процесу рада и свакодневном животу.

Већ смо напоменули да су, кроз историју, открића у области геометрије била од изузетног значаја за развој целокупне математике. Исто тако, морамо да приметимо да се доста набројаних циљева и задатака у великој мери остварује кроз наставу геометрије, или је бар замишљено да буде тако. Наиме, геометрија је јако погодно тло за развијање прецизности и систематичности, али и креативности код деце, као и за учење многих техника за решавање проблема. Међутим, не можемо а да не приметимо да настава математике у последње време трпи невероватан број критика. По многим истраживањима, страх и анимозитет према математици у нашој земљи је на критичном нивоу. И што је још страшније, чини се да настава геометрије има велики утицај на ширење такозване *математичке анксиозности*. Зашто је тако? Многи стручњаци се већ годинама баве овим (и многим сличним) питањима, и дошли су до читавог низа могућих узрока проблема. Воде се многе дискусије на ову тему, разматра се шта су веродостојни начини испитивања стања у ком се налази настава математике код нас. Иако занимљива и изузетно опширна тема, ми се овде нећемо њом бавити у целости. Концентрисаћемо се на предности и недостатке аксиоматског заснивања геометрије у настави математике код нас, а касније ћемо дати краћи увид у то како се геометрија предаје у неким другим земљама. Када помињемо аксиоматско заснивање геометрије у настави математике, имамо у виду углавном први разред гимназија (сви смерови) и први разред

Математичке гимназије. Што се гимназија тиче, програм за први разред је исти за све смерове, и у прилогу (1) га приказујемо. У Математичкој гимназији, геометрија се предаје као посебан предмет у првом и другом разреду, и као што се види из прилога (2), креће се са детаљним увидом у аксиоматику. У свим типовима гимназија (укључујући и Математичку гимназију), користи се нека од модификација Хилбертовог аксиоматског система. Ово је непротивречан, потпун и независан аксиоматски систем ком, са математичке стране, не можемо наћи много замерки. Међутим, када погледамо проблем из другог угла, ситуација није баш тако савршена. Када питамо средњошколце који део математике им је најтежи, скоро по правилу добијамо одговор који личи на следећи, који сам ја добила када сам то питање поставила свом комшији који је ове године завршио природно-математички смер гимназије – *Оно на почетку првог разреда, када је требало да доказујемо потпуно очигледне ствари. Сећам се да сам на крају научио напамет задатке које смо радили на часу, и надао се да ће на контролном бити нешто слично.* Интересантно је да, када наставнике математике питамо шта им је најтеже да објасне деци, опет дођемо до геометријске аксиоматике. Узроци ових потешкоћа су разноврсни. Многи наставници тврде да се суштински узрок крије у узрасту ученика, наводећи да просечан гимназијалац у првом разреду још увек не може да схвати потребу за формалним заснивањем геометрије. Они кажу да ученици у том узрасту нису довољно зрели за строг, дедуктивни приступ математици, и да, који год аксиоматски систем изабрали, у том тренутку не можемо да постигнемо жељени ефекат. Овај став делимично потврђује Пијажеова когнитивистичка теорија. По Пијажеу, интелектуални развој детета можемо поделити у четири фазе:

- сензомоторни развој (од рођења до отприлике друге године живота)
- преоперациони стадијум (2 – 6. година)
- стадијум конкретних операција (6 – 12. година)
- стадијум формалних операција (12 – 16. година)

Између стадијума нема оштрих граница. Редослед стадијума је исти код све деце, док се брзина проласка кроз одређене стадијуме може знатно разликовати. По Пијажеу, деца до четвртог стадијума нису способна за високи ниво апстракције, односно неопходни су им материјални предмети које везују за менталне симболе. Тек у овом стадијуму, дете је способно да расуђује по законима формалне логике. Такође, он тврди да децу треба подстицати, али да подстицаји морају да се слажу са менталном зрелошћу детета. Међутим, по новијим истраживањима, неки делови Пијажеове теорије доведени су у питање. Ми се овде на томе нећемо задржавати, а детаљније о овој теми може се наћи у [24].

Као још један од узрока овако тешког схватања и прихватања аксиоматике у геометрији од стране гимназијалаца, помиње се чињеница да ученици, када се сретну са овом материјом, још увек не владају добро неопходним логичким апаратом. Правила логичког закључивања која користе при доказивању геометријских теорема, а пре свега терминологија која је ту присутна, су нешто сачим су се ученици први пут сусрели тек неколико недеља раније, и што још увек нису довољно увежбали. Такође, чини се да ученици тада још увек немају довољно јасну представу о томе шта чини математички доказ, и да им је, с обзиром на то да

они већ имају извесно знање геометрије, тешко да разграниче шта од оног што знају могу да користе у доказивању теорема.

Такође, наставници се жале на број часова који је посвећен овој теми. Тврде да то нипошто није довољно да ученик схвати и прихвати овако сложену материју. Мислим да је јако лоше и то што, када се ово градиво једном испредаје, ученици се са њим више не срећу до краја свог средњошколског школовања. Тако им се не пружи прилика да постепено све боље разумевају суштину таквог приступа геометрији, а и стичу утисак да је то нешто што је потпуно беспотребно и бескорисно, убачено ту само зато што је то неком пало на памет. Предавачима математике је то често несхваљиво, али деци заиста треба много, много више времена него што је то предвиђено планом и програмом, да се привикну на овакав начин размишљања. Често и они који су до тад показивали изузетну дозу „талента за математику“, не успевају да се снађу када треба доказати да права и тачка ван ње одређују јединствену раван.

Већина наведених примедби односи се, уопштено, на аксиоматско заснивање геометрије у настави математике, а не на одређени аксиоматски систем. Међутим, размотримо проблем и са ове стране – ако би се исти систем аксиома деци презентовао нешто касније, ако бисмо овој тематици посветили већи број часова, и претходно са децом увежбали метод доказивања свођењем на апсурд и дали им времена да се „сроде“ са квантификаторима, да ли би проблем у потпуности био решен? Сигурно је да би резултати били значајно бољи него сада, али, поставља се питање да ли можда имамо и боље решење. Наиме, у претходном поглављу овог рада дат је преглед четири аксиоматска система и доказан један став еуклидске геометрије у сваком од њих. Врло лако примећујемо да је доказ најкомпликованији, односно ученицима најтеже схватљив, управо у систему који се користи у већини наших уџбеника. Наравно, доказ једног става није довољан да било шта закључимо о томе који од ових система треба изабрати, али када се узму у обзир и остали аргументи, мислим да вреди макар детаљније размислити о томе да ли можда постоји и ефектнији пут од оног којим тренутно идемо. Већ смо поменули, као један од недостатака Хилбертовог аксиоматског система (као и многих система који су настали његовом модификацијом), тешкоћу долажења до појма метрике. Мислим да је врло згодно овај појам узети за основни (као што, рецимо, ради Биркхоф), првенствено зато што је то појам који је деци врло близак и разумљив. Наравно, Хилбертов аксиоматски систем има и доста предности. Требало би проценити да ли је корист задржавања овог система у настави већа од користи које бисмо добили заменивши га, рецимо Биркхофовим аксиоматским системом. Наравно, не постоји краљевски пут, нити је циљ овог рада да било који од наведених аксиоматских система предложи као „прави“. Ипак, надам се да је у овом раду указано на потребу за побољшањем тренутног стања наставе геометрије. Нисам довољно компетентна да закључим да ли то треба урадити заменом аксиоматског система (и ако треба, који изабрати<sup>19</sup>), или можда (за шта се залажу многи математичари, а са чим се лично не слажем) потпуним избацивањем аксиоматике из наставе математике и заменом синтетичке геометрије аналитичком

---

<sup>19</sup> Треба, наравно, имати у виду да аксиоматски системи наведени у овом раду нису једини који су на располагању и да имамо читав спектар аксиоматских система које бисмо могли изабрати.

и алгебарском геометријом. Лично мислим да, ако би аксиоматски систем био прихватљивији ученицима, блискији њиховом начину размишљања, можда би било могуће чак и раније их припремати за формално увођење геометрије, приближити им идеју и концепт доказа постепено, избегаваши нагли скок. Наравно, то би подразумевало доста прилагођавања плана и програма наставе математике у основним и средњим школама. Намеће се и питање централизованости курикулума, односно степена слободе који треба оставити наставницима у односу на (јединственим планом и програмом) прописан садржај и начин рада. За све наведено, рецепт који увек може уродити плодом је и „вирење у туђе двориште“. С тим циљем, овде је дат кратак осврт на приступ геометрији у настави неколико земаља.

### Пољска

После пада комунизма у Пољској, дозвољено је да свако (наставник, школа или нека друга тела) предложи курикулум, који релативно лако буде одобрен. Тако данас у Пољској имамо на стотине курикулума, мада је у већини садржај прилично сличан, разлике су углавном у редоследу и начину извођења наставе. Слично је и са уџбеницима. Обавезно основно образовање предвиђено је за децу од седам до петнаест година, након чега ученици бирају између средњих школа које трају три, четири или пет година. Иако могу да бирају курикулум и уџбенике, ипак се већински држе традиционалног приступа, јер на крају сваког циклуса образовања имају универзални тест који полажу сви ђаци. Раде стандардно еуклидску геометрију, али теореме углавном наводе као чињенице, без доказивања. На предавањима ретко доказују теореме, а на испитима готово да и не траже од ђака разумевање доказа. Већина средњих школа има рачунаре, али се они користе за наставу информатике, а не као помоћно средство у настави математике. Мали број ентузијаста (користећи углавном софтверски пакет Cabri), труди се да то промени.

### Немачка

Образовна политика у Немачкој није ствар федерације, већ сваке државе понаособ, тако да данас у Немачкој имамо шеснаест (мање или више различитих) наставних планова. Ипак, постоје одређени општи услови које мора да задовољава сваки од ових курикулума. На средњошколском нивоу постоје и разлике у наставним плановима у зависности од типа школе. У целој Немачкој, обавезно је основно образовање које траје од шесте до десете године (primary grades), где је један од важнијих задатака геометрије да наведе ученике да схвате неко своје просторно искуство (ово се ради кроз мноштво различитих задатака, као што су, нпр. прављење и анализирање модела чврстих тела и облика, интерпретација различитих врста мапа, и слично). Средње образовање је у Немачкој врло специфично. У нижим разредима средње школе (lower secondary grades), геометрија је стандардни предмет, али приступ геометрији је различит од школе до школе. У „занатским“ школама (Hauptschule) геометрија се третира као средство да се научи мерење, у школама које припремају за индустрију и трговину (Realschule), акценат је на пројективној и нацртној геометрији. Класична Еуклидска геометрија (у дедуктивном смислу) учи се у Гимназији. Што се тиче виших разреда средње

школе (upper secondary grades), најзаступљенији део геометрије је аналитичка геометрија, а срећу се понегде и делови алгебарске геометрије, сферне геометрије као и неких неевклидских геометрија. У последње време, у Немачкој се води доста дискусија (у стручним часописима, на научним скуповима и сл.) на тему наставе геометрије. Општи утисак је да геометрија у настави нема улогу коју би требало да има, с обзиром на њен значај за развој математичког начина мишљења.

### Колумбија

Од 1994. године, све школе у Колумбији могу формирати сопствени курикулум, који треба да буде у складу са генералним курикулумом (који важи на нивоу државе). Што се тиче наставе геометрије, акценат је на динамичком, активном карактеру геометрије. Један од важних принципа је илустрација и демонстрација – геометрија није само предавање и цртеж на табли. У нижим разредима (од првог до трећег разреда) ради се праметричка геометрија, акценат је на уочавању геометријских фигура и тела у простору, уочавању симетрија и сл. Од четвртог до шестог разреда, уводе се основни метрички појмови (наравно, на интуитивном нивоу), изометријске трансформације равни, основне конструкције лењиром и шестаром. Од седмог до деветог разреда, геометрија се ради доста формалније, излаже се аксиоматски, доказују се теореме. Такође, од седмог до деветог разреда ради се Картезијански координатни систем и делови аналитичке геометрије. Постоји тенденција ка што широј употреби компјутера у настави математике, коришћењем софтвера као што су CAD и слични.

### Египат

У Египту, курикулум је већински централизован. У државним школама, настава се одвија на арапском језику, а у приватним школама на арапском, француском, енглеском или немачком језику. Обавезно је школовање деце од шесте до петнаесте године. Елементарни ниво (elementary level, од првог до петог разреда) подразумева 5 сати геометрије и аритметике (у оквиру једног школског предмета) на недељном нивоу. У припремном нивоу (preparatory level) од шестог до осмог разреда предвиђена су два и по сата наставе геометрије и два и по сата наставе алгебре недељно, а у деветом разреду два сата алгебре и два сата геометрије са тригонометријом. На средњем нивоу (secondary level) у десетом разреду деца слушају алгебру три сата и геометрију са тригонометријом два сата недељно, док у једанаестом разреду имају сат и по алгебре, сат и по аритметике и два сата механике на недељном нивоу. Геометрија заузима велики део математичког курикулума у Египту на свим нивоима школовања. Што се уџбеника тиче, не постоји посебан уџбеник за геометрију, већ се геометрија налази у посебним поглављима математичких уџбеника. Иначе, имају велику понуду уџбеника и бирају које ће да користе. На крају сваког циклуса школовања имају обавезне испите на нивоу државе. У обавезном образовању углавном се учи класична синтетичка Еуклидска геометрија. На секундарном нивоу учи се и аналитичка и векторска геометрија.

## Кина

Учење геометрије у Кини је било униформно у целој земљи, изузев периода од 1950. до 1980. године. Сва предавања прописана курикулумом била су обавезна и није било опционих (изборних) предмета. Настава геометрије је скоро искључиво базирана на традиционалној еуклидској геометрији. Од осамдесетих до данас у прогресу је реформа образовања у Кини. И даље постоји униформни курикулум, али су дозвољена извесна прилагођавања тог курикулума на локалном нивоу. Целокупна реформа спроведена је у Шангају и Дзеђангу, који имају различите курикулуме и различите уџбенике од остатка Кине. Већина математичких експерата у Кини сматра да геометрију ђацима не треба предавати као скуп чињеница. Сматрају да теореме треба доказивати, јер је проучавање доказа у геометрији веома важно за развијање математичког мишљења. Са 13 – 14 година кинески ђаци почињу да уче доказе. Наводи се да су, да би деца у овом узрасту могла да схвате доказе, неопходне многе реформе наставе математике, које подразумевају одступање од традиционалног начина наставе. Наглашавају да је важно ићи од конкретних објеката ка апстрактном, и кроз адекватан избор задатака олакшати ђацима схватање важних идеја у геометрији. Такође, истичу да је важно да деца разумеју значај доказа и потребу за доказивањем, као и да савладају неке методе и технике доказивања. Предлажу, такође, да се у настави математике не уведе цео аксиоматски систем. Испоставило се да више од 90% ђака може да разуме доказе ако се настава одвија у складу са овим принципима.

Овде смо укратко приказали стање наставе (са акцентом на настави геометрије) у шест земаља (укључујући Србију). Међу њима има сличности и разлика, и анализирање позитивних и негативних страна сваког од ових (и многих других, по много чему значајних) система образовања би захтевало доста детаљнију анализу, која превазилази оквири овог рада. Јасно је да се код аксиоматског заснивања геометрије у школама јавља много потешкоћа. Сама сложеност материје захтева изузетно пажљив приступ теми. Такође, циљеви наставе математике који би се могли постићи овим делом градива завређују детаљно разматрање начина на који би требало приступити овој теми. Један од проблема на које наилазимо је и чињеница да се геометрија (поготово у основној школи) неминовно ослања на просторно искуство ученика. Заправо, то се може схватити као предност геометрије, и многи методичари тврде да се на вези између геометрије и просторног искуства ученика може изузетно профитирати у геометријском смислу. Чувени методичар Фројдентал тврди да би кључна тачка наставе геометрије требало да буде ученичко разумевање искуственог простора. Међутим, проблем на који ту наилазимо је и чињеница да искуство једног појединца може у великој мери да се разликује од искуства другог појединца, па га самим тим може довести у потпуно другачији увид или закључак. На пример, примећено је да многа афричка деца немају интуитивну представу шта је права линија, какву имају, нпр. америчка деца. То нам, између осталог, указује и на многе проблеме који би настали када бисмо пробали да предложимо неки универзални курикулум, који би (уз неминовна одступања) важио у свим земљама. Такође, примећујемо да је запостављање логике у школама (већина школа нема логику као формални предмет) такође

проблематична ставка. Као што смо видели у овом раду, да би ученик адекватно разумео смисао аксиоматске геометрије, мора имати неко знање и разумевање логичких принципа. Јасно је да је потребна доста детаљнија припрема пре него што се од ученика затражи да посматра геометрију са аксиоматске тачке гледишта. Између осталог, та припрема би требало да се односи и на изоштравање представе ученика шта чини математички доказ. Замка у коју се прилично лако упадне када се предаје геометријска аксиоматика је и то да, трудећи се да ђаци виде што више доказаних теорема (како би и сами разумели и знали да изводе доказе), сведемо наставу геометрије на приказивање великог броја теорема и њихових доказа, што често не доведе до жељеног ефекта. Можда је боље да се уместо конкретних теорема као знање које треба да усвоје, ђацима презентују теореме и докази као начин размишљања, при чему би, на средњошколском нивоу, акценат требало да буде на разумевању и способности да се научено примени, а не на чистој репродукцији. Многи методичари, као основни принцип кога се треба придржавати при избору *шта и како треба предавати* наводе „схватљивост“. Наиме, нема сврхе предавати нешто што велика већина ђака не разуме. Дакле, ако желимо да предајемо геометријску аксиоматику у средњим школама, морамо учинити да она ђацима буде разумљива. Наравно, лакше рећи него учинити. Готово је немогуће одредити неки курикулум који би обухватио само позитивне стране, и ком не бисмо могли да нађемо значајне недостатке. Такође, имали бисмо веома захтеван посао, с обзиром на то да није нимало једноставно одговорити ни на једно од дидактичких питања која се намећу. Позитивна околност је то што се о овој теми у последње време доста размишља, дискутује и истражује, па се шансе за проналажењем довољно доброг решења из дана у дан повећавају.

## Закључак

Трудећи се да реализујемо циљеве који су поменути у уводу, у првом делу рада, кроз историју и филозофију математике, покушали смо да укажемо на значај геометријске аксиоматике и дамо детаљнији, али не потпуно формалан опис појма *аксиоматски систем*. Дат је преглед неких основних логичких појмова и закона који су нам неопходни за аксиоматско заснивање било које теорије. Надам се да је успешно указано на значајну улогу логику у аксиоматизацији геометрије. У централном делу рада изложена су четири аксиоматска система еуклидске геометрије. Покушаћу да објасним зашто баш ова четири. Првенствено због историјског значаја, не може се замислити ни један рад са овом тематиком без Еуклида. Као један од првих значајних покушаја систематизације геометријских знања, Еуклидов аксиоматски систем је неминовно утицао на сваку каснију аксиоматизацију геометрије. Хронолошки гледано, следећи изузетно значајан корак у тој систематизацији начинио је Хилберт. Он исправља све недостатке Еуклидовога система и потпуно формализује еуклидску геометрију. Годинама је већина наредних аксиоматских система била само модификација Хилбертовог система, настала углавном из дидактичких разлога. Међутим, те модификације су некада поједностављивале, а понекад и знатно компликовале овај систем. Једна од предности Хилбертовог система над многим другим је и аксиома подударности троуглова, коју Хилберт наводи као пету аксиому прве групе. Аксиоматски систем Борсука и Шмиелеве је једна од успешнијих модификација Хилбертовог система. Један од важнијих разлога што је баш он наведен у овом раду је и чињеница да се управо по овим аксиомама геометрија ради у нашим средњим школама, као и на факултетима у Србији. Већ смо уочили, као један од најзначајнијих недостатака свих поменутих система немогућност формалног увођења метрике на средњошколском нивоу. Аксиоматски систем у ком је овај проблем доста елегантно решен је Биркхофов систем. Претпостављање метричких појмова као основних нам омогућава да искористимо инуитивно разумевање ових појмова које је присутно код ученика и да им целу причу представимо на њима лакши и разумљивији начин. Трећи део рада се бави управо овом проблематиком – недовољним разумевањем геометријске аксиоматике које је врло приметно по школама. Из перспективе неког ко се у првом разреду средње школе први пут сусрео са геометријском аксиоматиком као ђак, а онда, десетак година касније покушао ту исту аксиоматику да објасни ђацима, једноставно не могу да се одлучим у којој од те две ситуације су ми аксиоме представљале већи проблем. Као ђак сам их на крају, уз много труда схватила, односно научила да их користим у доказивању ставова чији су докази тражени од мене. Тек доста касније сам заиста разумела суштину оваквог приступа. Мислим да је јако важно да ђаци разумеју потребу за аксиоматизацијом, али да можда геометрија, као изузетно захтевна дисциплина и није најпогоднија за први сусрет ђака са том идејом. Аксиоматски приступ можемо илустровати и на неком једноставнијем примеру, са малим бројем (лакше схватљивих) аксиома, које би ђаци могли у целости да сагледају, разумеју и из њих дедукују одређена тврђења. Иако наводимо комплетан аксиоматски систем,

у средњим школама се детаљније раде само аксиоме инциденције и аксиоме паралелности. Докази последица аксиома распореда, по речима мојих ђака *делују некако намештено, потпуно вештачки* и, чак и ако их разумеју (што није тако чест случај), углавном не умеју ништа одатле сами да докажу. Последице аксиома подударности и непрекидности се не доказују. Иако радим са напредном децом, и трудим се да им, што је више могуће, објасним и приближим ову тематику, уочавам да их је доста теже заинтересовати за овај, него за другачији приступ геометрији. Из угла наставника, проблем са аксиоматским заснивањем геометрије у настави овако како се код нас ради очигледно постоји. Надам се да је овим радом указано на неке од могућих узрока проблема, и да се, из свега изложеног, може доћи до корисних идеја за побољшање тренутног стања.

## Литература

- [1] M. Black, *Place of Logic in the Teaching of Geometry*, The Mathematical Gazette, Vol. 23, No. 253 (Feb., 1939), pp. 39-48;
- [2] M. Božić, S. Vujić, *Matematička logika sa elementima opšte logike*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011;
- [3] M. Božić, *Pregled istorije i filozofije matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010;
- [4] G. F. Burrill, J. J. Cummins, T. D. Kanold, L. E. Yunker, *Geometry*, Glencoe, 1993;
- [5] G. Cigler, *Smem li da brojim?*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2012;
- [6] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, John Wiley & Sons, 1969;
- [7] K. Devlin, *Matematički gen*, Plato, Beograd, 2001;
- [8] Euklid, *Elementi*, Naučna knjiga, Beograd, 1957;
- [9] G. Francis, *Axiomatic Systems for Geometry*, Post-Euclidean Geometry: Class Notes and Workbook, UpClose Printing & Copies, Champaign, IL 1995;
- [10] H. Frojdenal, *Mathematics as an educational task*, D. Reidel Publishing Company, 1973;
- [11] D. Hilbert, *Osnove geometrije*, Naučno delo, Beograd, 1957;
- [12] N. Ikodinović, *Matematika 1*, Klet, Beograd, 2013;
- [13] D. Lopandić, *Geometrija*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011;
- [14] Z. Lučić, *Euklidska i hiperbolička geometrija*, Matematički fakultet, Beograd, 1997;
- [15] Z. Lučić, *Ogledi iz istorije antičke geometrije*, Službeni glasnik, Beograd, 2009;
- [16] C. Mammana, V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21<sup>st</sup> Century*, Kluwer Academic Publishers, 1998;
- [17] M. Mitrović, S. Ognjanović, M. Veljković, Lj. Petković, N. Lazarević, *Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 2003;
- [18] M. Rašković, N. Ikodinović, *Priče o malim i velikim brojevima*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2010;
- [19] V. Simonović, D. Mujica, *Metodika nastave matematike*, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011;
- [20] M. Stone, *Learning and Teaching Axiomatic Geometry*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 4, No. 1, Lectures of the CSMP. Conference on the Teaching of Geometry (Jun., 1971), pp.91-103;
- [21] H. Zeitler, *Axiomatics of Geometry in School and in Science*, For the Learning of Mathematics, Vol. 10, No. 2 (Jun., 1990), pp. 17-24;
- [22] A. Zolić, Z. Kadelburg, S. Ognjanović, *Analiza sa algebrom, udžbenik sa zbirkom zadataka za 1. razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 2003;
- [23] K. Yang, F. Lin, *A Model of Reading Comprehension of Geometry Proof*, Educational Studies in Mathematics, Vol. 67, No. 1 (Jan., 2008), pp. 59-76;
- [24] [http://www.cep.edu.rs/sites/default/files/eknjiga/Razumeti\\_mozak.pdf](http://www.cep.edu.rs/sites/default/files/eknjiga/Razumeti_mozak.pdf);
- [25] <http://www.zuov.gov.rs/novisajt2012/dokumenta/CRPU/Programi%20za%20gimnaziju%20PDF/13%20matematika.pdf>;

- [26] <http://userpages.umbc.edu/~rcampbel/Math306/Axioms/Birkhoff.html>;
- [27] <http://www.matf.bg.ac.rs/p/nebojsa-ikodinovic/kurs/99/metodika-nastave-matematike-i-racunarstva/>;
- [28] <http://mg.edu.rs/images/stories/dokumenta/nastavni-plan/geometrija%20-%20razred%201.pdf>.