Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

MASTER RAD

PREGOVORI

U TEORIJI IGARA

Mentor:

dr Đorđe Dugošija

Kandidat:

Jelena Vicanović
1125/2011

Beograd, 2012.

SADRŽAJ

1. UVOD

Teorija igara je nauka o strategijama. To je metodologija koja se koristi za analizu strateških problema pri različitim okolnostima i rešavanje konfliktnih ili delimično konfliktnih situacija u kojima učesnici imaju suprotstavljene interese. Tokom studiranja, teorija igara je bila jedan od retkih predmeta čija mi je primena u svakodnevnom životu bila očigledna. Njen jezik razumeju i oni koji se nikada nisu bavili matematikom jer njene formule govore koje odluke da donesemo kako bismo najbolje prošli u dogovorima sa drugim ljudima. Osim toga, ova teorija se suštinski može razumeti samo u praksi. Najpoznatiji primeri odnose se na probleme odluka sa kojima se suočavaju firme, zaposleni, sindikati, različita udruženja, fudbaleri, političari, vlade, nevladine organizacije, itd.

Džon Neš je 50-ih godina prošlog veka razvio teoriju koja opisuje kompleksno ljudsko ponašanje, a čiji je cilj bio da pomogne nauci da predvidi dešavanja u svetu. Ekonomisti su moć i primenu njegovih spisa[1] uvideli tek 30 godina kasnije, a 1994. Neš je postao dobitnik Nobelove nagrade. On nije osnivač teorije igara (to su fon Nojman i Morgenštern[2]), ali je proširio njen delokrug i omogućio da moćnijim alatom rešava probleme stvarnog sveta. Tako je vremenom ova teorija počela da se izučava i u sklopu političkih nauka, psihologije, sociologije, a danas se infiltrirala u gotovo sve oblasti moderne nauke!

Mi ćemo se u ovom radu baviti teorijom igara koja se koristi za analizu interakcija koje podrazumevaju pregovore. Razmatraćemo razvoj teorije pregovora koju je zasnovao Džon Neš u svom radu ranih 50-ih godina prošlog veka. Koristimo termin "pregovor" da opišemo situaciju u kojoj

1) individue (igrači) imaju mogućnost postizanja dogovora
2) postoji sukob interesa oko kojih se dogovor postiže
3) nije moguće nametnuti dogovor na koji neka od strana nije pristala.

Teorija pregovora je ispitivanje veza između ishoda pregovora i okolnosti. Pretpostavljamo da su igrači racionalni i jednakih pregovaračkih sposobnosti, da obe strane (ili koliko ih već ima) imaju jasno određene prioritete za svaki mogući ishod i kad mora da bira, igrač će izabrati alternativu koja dovodi do za njega najpovoljnijeg ishoda. Probaćemo da nametnemo određenu strukturu pregovorima i proučimo ishode koji su predviđeni pojmom savršene ravnoteže. Struktura koju ćemo nametnuti čini igrače maksimalno simetričnim. Igrač1 istupi sa ponudom koju Igrač2 može da prihvati ili odbije. U slučaju odbijanja, Igrač2 daje svoju ponudu koju Igrač1 može da prihvati ili odbije i tako dalje. Gotovo da svi modeli imaju sekvencijalnu strukturu: igrači moraju da donose odluke jedan za drugim i to po unapred određenom redosledu. Taj redosled oslikava proces pregovora i proces trgovine. Pregovaračima je bitno i vreme za koje će postići dogovor. Ovakva struktura je fleksibilna i omogućava nam da rešimo širok spektar pitanja.

Razmatraćemo dva pristupa teoriji pregovora. Počinjemo proučavajući Nešovu aksiomatsku teoriju. Nešov rad je početna tačka za formiranje teorije pregovora. On je definisao problem pregovora kao skup parova korisnosti koji se mogu izvesti iz dogovora zajedno sa parom korisnosti koji je određen kao "tačka neuspeha". Funkcija koja dodeljuje jedinstveni ishod svakom takvom problemu je "rešenje pregovora". Neš predlaže da to rešenje treba da zadovolji četiri uslova. Ispostavilo se da postoji samo jedno takvo rešenje i ono je poznato kao "Nešovo rešenje pregovora". To rešenje ima veoma jednostavan oblik pa je zgodno za primenu u ekonomskim modelima.

---

1 Najznačajniji su radovi *Nash Equilibrium* i *Nash Bargaining Solution* (1950)

2 Džon fon Nojman i Oskar Morgenštern smatraju se osnovačima teorije igara zahvaljujući njihovom radu *Teorija igara i ekonomsko ponašanje* (1944)

2. Aksiomatski pristup : Nešovo rešenje

2.1. Problemi pregovora

Neš je ranih 50-ih godina prošlog veka postavio okvir u kome mi danas proučavamo probleme pregovora. Skup pregovarača (igrača) je N. Najčešće ćemo se baviti igrama sa 2 igrača u kojima oni sarađuju. Igrači mogu ili da postignu dogovor iz skupa dogovora A ili da ga ne postignu, što dovodi do događaja u slučaju neuspeha D. Za svakog igrača $i \in N$ na skupu $A \cup \{D\}$ definisana je relacija $\succcurlyeq_i$ ($a \succcurlyeq_i b$ ako i samo ako Igrač i preferira alternativu a u odnosu na b ili mu je svejedno; ako igrač *i* smatra da su dogovori *a* i *b* podjednako povoljni, to ćemo označavati $a \sim_i b$). Objekti N, A, D i pomenuta relacija za svako $i \in N$ definišu jedan pregovor.

Skup A mogućih dogovora može imati različite oblike. Dogovor može biti samo cena ili može biti ugovor koji precizira poteze igrača u svakom od mogućih slučajeva. Pomenuti skup nema ograničenja, ali se određuje jedinstveni ishod ako igrači ne postignu dogovor. Centralnu ulogu u Nešovoj teoriji igra stav koji igrači zauzimaju prema riziku jer uvek postoji neizvesnost u vezi sa ponašanjem drugog igrača i to može da dovede do toga da pregovori propadnu.

Pretpostavimo da za svakog igrača i postoji tzv. *funkcija korisnosti* $u_i : A \cup \{D\} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je jedan ishod poželjniji od drugog (ima veću korisnost) ako očekivana isplata (korisnost) u prvom slučaju premašuje očekivanu isplatu u drugom (ovu formulaciju ćemo nadalje nazivati pretpostavkom fon Nojmana i Morgenšterna). Drugim rečima, poželjnijem ishodu pripisujemo veću korisnost, a ako neke ishode smatramo podjednako poželjnim, pripisujemo im jednake korisnosti. Takva funkcija korisnosti jedinstvena je do na pozitivnu afinu transformaciju. Dakle, ako je u_i funkcija korisnosti koja predstavlja $\succcurlyeq_i$ i v_i je jedna funkcija korisnosti, tada će v_i predstavljati $\succcurlyeq_i$ ako i samo ako je $v_i = \alpha u_i + \beta,$ za neke realne brojeve α i $\beta,$ gde je $\alpha > 0$.

Ako je dat skup mogućih dogovora, događaj u slučaju neuspeha i funkcija korisnosti za prioritete igrača, možemo konstruisati skup svih parova koji mogu biti ishod pregovora, tzv. dostupnu oblast. To je unija skupa S svih parova $(u_1(a), u_2(a)), a \in A$ i tačke neuspeha (status quo) $d = (u_1(D), u_2(D))$. Predmet našeg istraživanja nadalje će biti rešenje pregovora. Rešenje pregovora neće dati ishod za pojedinačnu situaciju već će to biti funkcija.

Definicija1: Problem pregovora je par $\langle S, d \rangle,$ gde je $S \subset \mathbb{R}^2$ kompakt (zatvoren i ograničen) i konveksan, a $d \in S$ i postoji $s \in S$ tako da je $s_i > d_i,\ i = 1,2.$ Skup svih problema pregovora označavamo sa ***B***. Rešenje pregovora je funkcija $f : B \rightarrow \mathbb{R}^2$ koja svakom problemu pregovora $\langle S, d \rangle \in B$ dodeljuje element iz *S*.

Ova definicija ograničava problem pregovora na mnogo načina. Najznačajnije, svaki pregovor indukovan istim parom $\langle S, d \rangle$ tretiraće se isto jer je taj par osnova problema. Druge teorije uzimaju skup A za osnovni. Pretpostavka da je skup *S* ograničen znači i da su sve isplate koje se mogu dobiti u ishodima ograničene. Još značajnije ograničenje je konveksnost jer ograničava prirodu skupa mogućih dogovora i funkcije korisnosti. Ona je zadovoljena ako je A skup svih lutrija iz nekog određenog skupa "čistih" dogovora. Definicija takođe pretpostavlja da igrači mogu da odluče da ne postignu dogovor $(d \in S)$ i utvrđen je ishod u tom slučaju (koji je za svakog igrača nepovoljniji). Ta pretpostavka obezbeđuje da igrači imaju zajednički interes da se dogovor postigne, iako su u osnovi sukobljene strane.

2.2 Nešove aksiome

Nešov pristup je aksiomatski. Nametnuo je četiri aksiome za rešenje pregovora $f: B \rightarrow \mathbb{R}^2$. To su uslovi koje bi svako rešenje pregovora trebalo da zadovolji.

Kažemo da je par $\langle S', d' \rangle$ dobijen iz pregovaračkog problema $\langle S, d \rangle$ transformacijama $s_i \rightarrow \alpha_i s_i + \beta_i,\ i=1,2,$ ako je $d_i' = \alpha_i d_i + \beta_i, i=1,2$ i $S' = \{(\alpha_1 s_1 + \beta_1, \alpha_2 s_2 + \beta_2) \in \mathbb{R}^2 : (s_1, s_2) \in S\}$. Lako se može proveriti da ako je $\alpha_i > 0$ za $i=1,2,$ onda par $\langle S', d' \rangle$ predstavlja zadati problem pregovora.

Nezavisnost od ekvivalentnih prezentacija (EP): Pretpostavimo da je pregovor $\langle S', d' \rangle$ dobijen iz $\langle S, d \rangle$ linearnom transformacijom $s_i \rightarrow \alpha_i s_i + \beta_i,\ i=1,2,$ gde je $\alpha_i > 0$ za $i=1,2,$. Tada je $f_i(S', d') = \alpha_i f_i(S, d) + \beta_i$ za $i=1,2.$

Problemi pregovora $\langle S, d \rangle$ i $\langle S', d' \rangle$ predstavljaju istu situaciju. Ako funkcija korisnosti u_i generiše skup S koji se primenjuje za neki skup dogovora A, onda funkcija korisnosti $v_i = \alpha_i u_i + \beta_i,\ i=1,2$ generiše skup S' koji je takođe primenjen za skup A. Kako v_i predstavlja istu prioritetizaciju kao u_i, ishod predviđen rešenjem pregovora će biti isti i za $\langle S, d \rangle$ i za $\langle S', d' \rangle$. Stoga će ishodi biti u sličnoj vezi kao što su funkcije $f_i(S', d') = \alpha_i f_i(S, d) + \beta_i$ za $i=1,2.$ Ukratko, ova aksioma zahteva da svaki ishod koji odgovara problemu $\langle S, d \rangle$ odgovara i problemu $\langle S', d' \rangle$.

Neš izuzima bilo kakve razlike u pregovaračkim sposobnostima među igračima. Ako postoji takva asimetrija ona mora biti sadržana u $\langle S, d \rangle$. S druge strane, ako su igrači zamenljivi, tada rešenje pregovora mora dodeliti jednake korisnosti svakom igraču. Kažemo da je problem pregovora $\langle S, d \rangle$ *simetričan* ako je $d_1 = d_2$ i ako $(s_1, s_2) \in S \Leftrightarrow (s_2, s_1) \in S$.

Simetričnost (SIM): Ako je problem pregovora $\langle S, d \rangle$ simetričan, tada je $f_1(S, d) = f_2(S, d)$.

Ovaj uslov treba da obezbedi fer pregovore. To znači da će igrači koji se nalaze na simetričnim pozicijama ostvariti jednake korisnosti.

Nezavisnost od irelevantnih alternativa (IA): Ako su $\langle S, d \rangle$ i $\langle T, d \rangle$ problemi pregovora gde je $S \subset T$ i $f(T, d) \in S,$ tada $f(S, d) = f(T, d)$.

Drugim rečima, pretpostavimo da ako su moguće sve alternative iz T, igrači će se dogovoriti za ishod s iz manjeg skupa S. Tada zahtevamo da se igrači odluče za isti ishod s i kada su samo alternative iz S moguće. To znači da su odabirom s igrači odbacili kao "irelevantne" sve druge ishode iz T. Zaključujemo da onda treba da se odluče za s i kada su ograničeni na manji skup: rešenje ne treba da zavisi od "irelevantnih" alternativa.

Pareto-optimum (PO): Pretpostavimo da je $\langle S, d \rangle$ problem pregovora, $s \in S, t \in S$ i $t_i > s_i$ za i=1,2. Tada $f(S, d) \neq s.$

To znači da se igrači nikada neće opredeliti za ishod s ako postoji ishod t koji je za obe strane bolji. Ako bi pristali na lošiji ishod, to bi ostavilo mesta za ponovne pregovore. Ova aksioma dalje implicira da neće doći do neslaganja među igračima. Ako sada shvatimo svaki element skupa A kao par koji čine dogovor i vreme za koje je taj dogovor postignut i pretpostavimo da se u procesu pregovora troše resursi, onda nam ova aksioma nalaže da se dogovor postiže odmah. Primetimo da aksiome *Simetričnost* i *Pareto-optimum* ograničavaju ponašanje rešenja pojedinačnog problema pregovora, dok EP i IA zahtevaju da rešenje ispolji neku konzistentnost tokom pregovora.

2.3 Nešova teorema

Nešova ideja da se rešenje dobije iz nekoliko jednostavnih aksioma savršeno funkcioniše. On pokazuje da postoji tačno jedno rešenje problema koje zadovoljava navedene četiri aksiome i to rešenje je jednostavnog oblika: izdvaja korisni par koji maksimizuje dobitak igrača u odnosu na ishod u slučaju da se dogovor ne postigne.

Teorema1: Postoji jedinstveno rešenje pregovora $f^N : B \to \mathbb{R}^2$ koje zadovoljava aksiome EP, SIM, IA i PO . To rešenje dato je formulom :

$$f^N(S,d) = \underset{(d_1,d_2)\le(s_1,s_2)\in S}{\arg\max}\,(s_1-d_1)(s_2-d_2).$$

Dokaz: (a) Najpre proverimo da je f^N dobro definisano. Skup $\{s\in S : s\ge d\}$ je kompaktan i funkcija H definisana sa $H(s_1,s_2)=(s_1-d_1)(s_2-d_2)$ je neprekidna, tako da postoji rešenje problema maksimizacije f^N . Dalje, kako je lnH strogo konkavna na $\{s\in S : s>d\}$, postoji $s\in S$ tako da je $s>d.$ S je konveksan tako da je maksimum jedinstven.

(b) Dalje proveravamo da li f^N zadovoljava aksiome.

EP: Ako su parovi $\langle S',d'\rangle$ i $\langle S,d\rangle$ kao iz pretpostavke aksiome, tada je $s'\in S'$ ako i samo ako postoji $s\in S$ tako da važi $s_i'=\alpha_i s_i+\beta_i$ za i=1,2. Tada imamo

$(s_1'-d_1')(s_2'-d_2')=\alpha_1\alpha_2(s_1-d_1)(s_2-d_2).$

Stoga, (s_1^*,s_2^*) maksimizuje $(s_1-d_1)(s_2-d_2)$ na skupu S ako i samo ako $(\alpha_1 s_1^*+\beta_1,\alpha_1 s_2^*+\beta_2)$ maksimizuje $(s_1'-d_1')(s_2'-d_2')$ na skupu S'.

SIM: Ako je $\langle S,d\rangle$ simeričan i (s_1^*,s_2^*) maksimizuje H na skupu S, tada, kako je H simetrična funkcija, (s_2^*,s_1^*) takođe maksimizuje H na skupu S . Iz toga sledi da je $s_1^*=s_2^*,$ jer je maksimum jedinstven.

IA: Ako $T\supset S$ i $s^*\in S$ maksimizuje H na skupu T , tada s^* takođe maksimizuje H na skupu S.

PO: Kako je H svuda rastuća, s neće biti maksimum H na skupu S ako postoji $t\in S$ pri čemu je $t_i>s_i$ za i=1,2.

(c) Konačno, pokazaćemo da je f^N jedino rešenje pregovora koje zadovoljava sve četiri aksiome. Pretpostavimo da je i f rešenje pregovora koje zadovoljava sve aksiome. Neka je problem pregovora zadat parom $\langle S,d\rangle$. Pokazaćemo da je $f(S,d)=f^N(S,d)$.

Korak1. Neka je $f^N(S,d)=z.$ Kako postoji $s\in S$ tako da je $s_i>d_i,\ i=1,2,$ imamo $z_i>d_i.$ Neka je $\langle S',d'\rangle$ problem pregovora dobijen iz $\langle S,d\rangle$ transformacijama $s_i\to\alpha_i s_i+\beta_i,$ koje pomeraju tačku neuspeha na početnu, a rešenje $f^N(S,d)$ na tačku (1/2, 1/2).

($\alpha_i=1/(2(z_i-d_i)),\beta_i=-d_i/(2(z_i-d_i)),d_i'=\alpha_1 d_1+\beta_1=0$ i

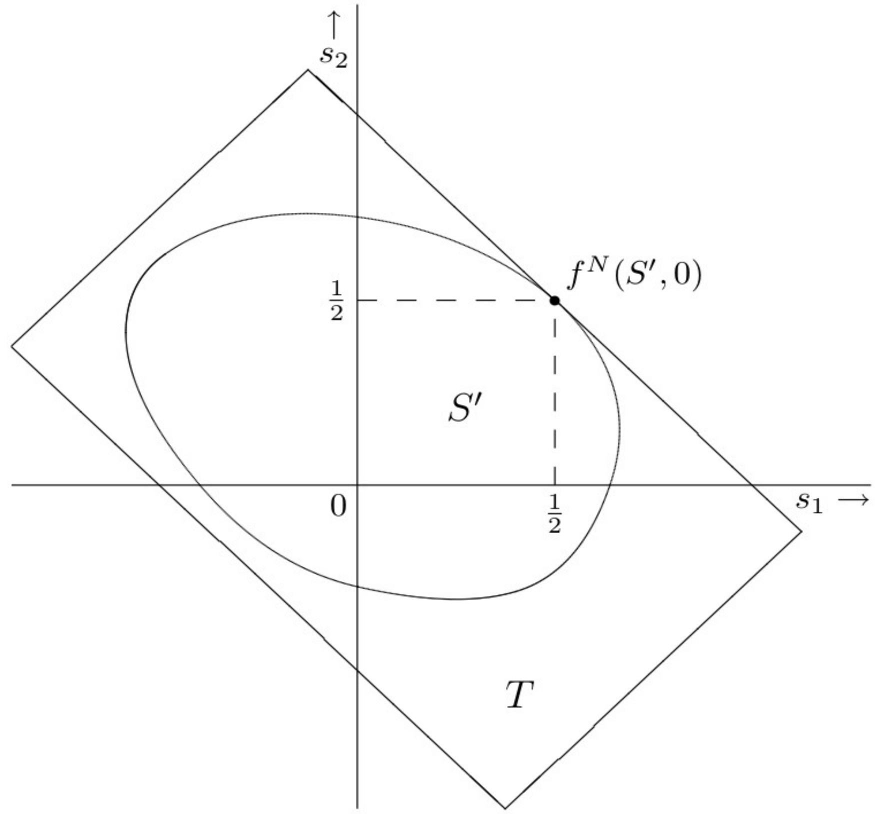
$\alpha_i f_i^N(S,d)+\beta_i=\alpha_i z_i+\beta_i=1/2, i=1,2$). I f i f^N zadovoljavaju aksiomu EP pa imamo

$f_i(S',0)=\alpha_i f_i(S,d)+\beta_i$ i $f_i^N(S',0)=\alpha_i f_i^N(S,d)+\beta_i$ (=1/2), i=1,2.

$f(S,d)=f^N(S,d)\Leftrightarrow f(S',0)=f^N(S',0).$

Kako je $f^N(S',0)=(1/2,1/2),$ ostaje da pokažemo da je $f(S',0)=(1/2,1/2).$

Korak2. Tvrdimo da S' ne sadrži tačku (s_1', s_2') takvu da je $s_1' + s_2' > 1$. Pretpostavimo suprotno i neka je $(t_1, t_2) = ((1-\epsilon)(1/2) + \epsilon s_1', (1-\epsilon)(1/2) + \epsilon s_2')$, gde je $0 < \epsilon < 1$. Kako je S' konveksan, tačka (t_1, t_2) se nalazi unutar njega, ali za dovoljno malo ϵ je $t_1 t_2 > 1/4$, što je suprotno pretpostavci $f^N(S', 0) = (1/2, 1/2)$.
Korak3. Zbog ograničenosti S', Korak2 obezbeđuje postojanje pravougaonika T koji sadrži S' sa tačkom (1/2,1/2) na granici. (Videti Sliku1)
Korak4. Zbog aksioma PO i SIM imamo $f(T, 0) = (1/2, 1/2)$.
Korak5. Zbog IA imamo $f(S', 0) = f(T, 0) \Rightarrow f(S', 0) = (1/2, 1/2)$. □



Slika1.

f^N je Nešovo rešenje za problem pregovora $\langle S, d \rangle$. Najpre definišimo granice skupa *S*, tako da za svako $s \in S$ ne postoji $s' \in S$ za koje važi $s' \neq s \wedge s_i' \geq s_i$, $i = 1,2$ i neka je $s_2 = \psi(s_1)$ jednačina te granice. Par isplate (s_1^*, s_2^*) je Nešovo rešenje problema $\langle S, d \rangle$ ako i samo ako je $s_2^* = \psi(s_1^*)$ i s_1^* maksimizuje $(s_1 - d_1)(\psi(s_1) - d_2)$. Ako je ψ diferencijabilno u s_1^* tada je drugi uslov ekvivalentan $(s_2^* - d_2)/(s_1^* - d_1) = |\psi'(s_1^*)|$.

Iako se data definicija odnosi na reprezentativni par, Nešovo rešenje zavisi samo od prioriteta igrača a ne od reprezentacije tih prioriteta. Pokušaćemo da dođemo do alternativne definicije koja se odnosi direktno na prioritete igrača. Označimo sa $p \cdot a$ mogućnost da se dogovor $a \in A$ postigne sa verovatnoćom $p \in [0,1]$, a verovatnoća za događaj *D* je $1 - p$. Neka $\succcurlyeq_i$ označava da igrač *i* daje prednost mogućnostima oblika $p \cdot a$, a $\succ_i$ označava strogu prednost. Razmotrimo dogovor a^* sa konkretnim vrednostima $(i, j) = (1,2)$ i $(i, j) = (2,1)$, za svako $a \in A$ i $p \in [0,1]$ za koje je $p \cdot a \succ_i a^*$ imamo $p \cdot a^* \succcurlyeq_j a$. Pretpostavimo da je "na stolu" dogovor a^*. Ako igrač *i* želi da podnese prigovor za a^* tako što će predložiti alternativu a, čak i ako se suočava sa rizikom da postoji verovatnoća $1 - p$ da pregovori propadnu i dođe do događaja *D*, tada će i igrač *j* prihvatiti isti rizik i odbaciti a u korist dogovora a^*. Svaki takav dogovor a^* će dovesti do Nešovog rešenja za problem pregovora. Izaberimo reprezentaciju u_i za $\succcurlyeq_i$ takvu da je $u_i(D)=0,\ i=1{,}2.$ Dakle, a^* maksimizuje $u_1(a)u_2(a)$. Pretpostavimo da igrač i daje prednost dogovoru a nad a^* i $u_i(a^*)/u_i(a)< u_j(a)/u_j(a^*)$. Tada postoji $0<p<1$ tako da $u_i(a^*)/u_i(a)< p < u_j(a)/u_j(a^*)$, pa je $u_i(a^*)< p u_i(a)$ i $u_j(a)> p u_j(a^*)$, što je u suprotnosti sa definicijom a^*. Stoga je $u_i(a^*)/u_i(a)\geq u_j(a)/u_j(a^*)\Rightarrow u_1(a^*)u_2(a^*)\geq u_1(a)u_2(a)$.

2.4 Primene

Podela novca; Averzija prema riziku

Dvoje ljudi mogu da podele određenu sumu novca na mnogo načina. Ako ne uspeju da se dogovore oko podele, novac će im biti oduzet. Ako žele, oni mogu nešto od te sume da odbace (ali to ne podrazumeva efikasnu podelu). Pretpostavimo da se radi o sumi od 1000 dinara. Koristeći iste termine, imamo $A=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2: a_1+a_2\leq 1000\wedge a_i\geq 0, i=1{,}2\}$ (sve moguće podele 1000 dinara) i $D=(0{,}0)$ (ako se ne dogovore igrači ne dobijaju ništa). Svakog igrača interesuje samo koliko će on da dobije: igraču i je prioritet $a\in A$ u odnosu na $b\in A$ ako i samo ako je $a_i> b_i\ (i=1{,}2)$. Prema tome, prioriteti igrača i na skupu mogućnosti (lutrija) A se mogu predstaviti očekivanom vrednošću funkcije u_i na domenu $[0{,}1]$ (zbog opštosti skaliramo ukupnu sumu na 1). Pretpostavljamo da svaki igrač ima averziju prema riziku, zbog čega je u_i uvek konkavna i bez smanjenja opštosti neka je $u_i(0)=0,\ i=1{,}2.$ Tada je skup

$$S=\{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2:(s_1,s_2)=(u_1(a_1),u_2(a_2)),\ (a_1,a_2)\in A\}$$

kompaktan i konveksan. Dalje, S sadrži $d=(u_1(0),u_2(0))=(0{,}0)$, i postoji tačka $s\in S$ takva da je $s_i> d_i,\ i=1{,}2.$ Stoga je $\langle S,d\rangle$ problem pregovora.

Najpre pretpostavimo da igrači imaju iste prioritete, pa se mogu predstaviti istim funkcijama korisnosti. Tada je $\langle S,d\rangle$ simetričan problem pregovora. U tom slučaju znamo Nešovo rešenje direktno iz aksioma SIM i PO: to je jedinstveni par korisnosti $(u(1/2),u(1/2))$ koji odgovara ishodu u kojem se suma podeli na jednake delove među igračima.

Ako igrači imaju različite prioritete, tada jednaka podela novca više nije dogovor dat Nešovim rešenjem. Tada rešenje zavisi od prirode njihovih prioriteta. Kako bismo ispitali ovu zavisnost, pretpostavićemo da Igrač2 ima veću averziju prema riziku. Tada se njegovi prioriteti, koji su ranije bili predstavljeni sa u_2, mogu predstaviti sa $v_2=h\circ u_2$, gde je $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ rastuća konkavna funkcija i $h(0)=0.$ (sledi da je i v_2 rastuća konkavna sa nulom u 0.) Prioriteti Igrača1 se nisu promenili, $v_1=u_1$. Neka je $\langle S',d'\rangle$ pregovor za ovu novu situaciju gde su funkcije korisnosti igrača v_1 i v_2. Neka je z_u rešenje od

$$\max_{0\leq z\leq 1} u_1(z)u_2(1-z),$$

i neka je z_v rešenje odgovarajućeg problema gde v_i zamenjuje $u_i,\ i=1{,}2.$ Tada je $(u_1(z_u),u_2(1-z_u))$ Nešovo rešenje za $\langle S,d\rangle$, dok je $(v_1(z_v),v_2(1-z_v))$ Nešovo rešenje za $\langle S',d'\rangle$. Ako su u_1,u_2 i h diferencijabilne i $0<z_u<1$, tada je z_u rešenje za

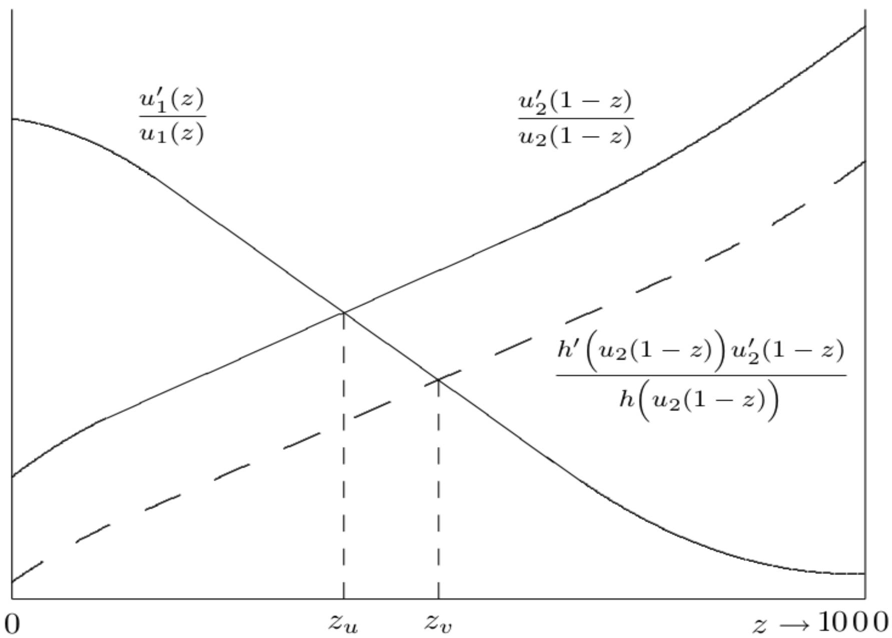
$$\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}=\frac{u_2'(1-z)}{u_2(1-z)}.$$

Slično, z_v je rešenje za

$$\frac{u_1'(z)}{u_1(z)}=\frac{h'(u_2(1-z))u_2'(1-z)}{h(u_2(1-z))}.$$

Leve strane prethodne dve jednačine su opadajuće po *z*, a desne strane rastuće po *z*. Kako je *h* konkavna i $h(0)=0$, imamo da je $h'(t)\leq h(t)/t,\ \forall t,$ tako da su desne strane prethodne dve jednačine barem jednake. Zato zaključujemo $z_u\leq z_v,$ kao što je prikazano na slici2. Ako je $u_1=u_2,$ iz prethodnog znamo da je $z_u=1/2,$ pa je $z_v\geq 1/2.$ Sumirajući dobijamo sledeći zaključak:

Ako se igrač 2 više plaši rizika, onda će se dobitak igrača 1 u Nešovom rešenju povećati. Ako se igrač 2 više plaši rizika od igrača 1, onda će dobitak igrača 1 u Nešovom rešenju prevazići polovinu sume.



Slika2. Ako su funkcije korisnosti igrača $u_i,$ (i=1,2) Igrač 1 dobija z_u dinara na osnovu Nešovog rešenja. Ako je funkcija korisnosti Igrača 2 $v_2=h\circ u_2,$ pri čemu je *h* rastuća i konkavna, a funkcija korisnosti Igrača 1 ostaje $u_1,$ tada Igrač 1 osvaja z_v na osnovu Nešovog rešenja. Iznos novca koji se deli na slici je predstavljen sa 1 (u našem primeru je 1000 dinara)

Primetimo da ovo važi samo u slučaju kada je jedna od funkcija korisnosti predstavljena kao kompozicija konkavne funkcije i funkcije korisnosti drugog igrača. Druga interpretacija istog problema je transfer robe. Pretpostavimo da Igrač 1, "prodavac", poseduje neku nedeljivu robu, a Igrač 2, "kupac", poseduje (deljiv) novac. Roba prodata za količinu novca p za prodavca ima korisnost $u_1(p),$ pri čemu je $u_1(0)=0.$ Ako kupac ne uspe da dođe do robe, tada je njegova korisnost 0, a ako je dobije po ceni *p*, tada je njegova funkcija korisnosti $u_2(1-p),$ gde je $u_2(0)=0.$ Pretpostavlja se da su u_1 i u_2 konkavne. Ako igrači ne postignu dogovor oko prodajne cene, zadržavaju ono što imaju. Skup uređenih parova za dogovor je $S=\{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2:(s_1,s_2)=(u_1(p),u_2(1-p)),0\leq p\leq 1\}$ a tačka neuspeha je $d=(0,0),$ tako da je ovaj problem identičan problemu podele sume novca.

U gornjem primeru dogovor podrazumeva da obe strane dobiju određenu sumu novca. U ostalim slučajevima dogovor može biti jako kompleksan. Na primer, u pregovorima između preduzeća i radničkog sindikata, dogovor može odrediti tok budućih zarada, pogodnosti i napredovanja. Ilustrovaćemo jedan relativno jednostavan slučaj. Razmatramo pregovore preduzeća i sindikata oko zarade zaposlenih. Pretpostavimo da sindikat predstavlja L radnika, pri čemu svaki van tog preduzeća može da zaradi w_0. Ako preduzeće zaposli l radnika, tada će mu proizvodnja biti $f(l)$. Pretpostavimo da je f strogo konkavna, $f(0)=0$ i $f(l)>lw_0$. Dogovor je par koji predstavlja zaradu i broj zaposlenih (w,l). Korist od dogovora (w,l) za preduzeće je profit $f(l)-wl$, a korist za sindikat je svota $lw+(L-l)w_0$ koju zarade članovi. Ograničićemo se na sporazume (w,l) za koje će profit preduzeća biti nenegativan $(w\le f(l)/l)$, a zarada je barem w_0. Stoga je skup korisnih parova koji mogu biti ishod sporazuma

$$S=\{(f(l)-lw,\, lw+(L-l)w_0): f(l)\ge lw,\, 0\le l\le L\wedge w\ge w_0\}.$$

Ako se strane ne dogovore, profit preduzeća će biti 0 (jer je $f(0)=0$), a sindikat dobija Lw_0, tako da je $d=(0,Lw_0)$.

Svaki korisni par je oblika $(f(l)-lw,\, lw+(L-l)w_0)$, pri čemu je $w_0\le w\le f(l)/l$. Neka je l^* jedinstveni maksimum $f(l)+(L-l)w_0$. Tada je skup korisnih parova koji se mogu postići dogovorom $S=\{(s_1,s_2)\in\mathbb{R}^2: s_1+s_2\le f(l^*)+(L-l^*)w_0,\ s_1\ge 0,\ s_2\ge Lw_0\}$. Ovo je kompaktan konveksan skup koji sadrži tačku neuspeha $d=(0,Lw_0)$ u svojoj unutrašnjosti. Stoga je $\langle S,d\rangle$ problem pregovora.

S obzirom na to da je Nešovo rešenje efikasno (nalazi se na granici skupa *S*), predviđena radna snaga je l^*, što maksimizuje profit $f(l)-lw_0$. Kako bismo našli predviđenu zaradu, primetimo da je razlika između isplate sindikata u slučaju dogovora (w,l) i isplate u slučaju neuspeha $lw+(L-l)w_0-Lw_0=l(w-w_0)$. Stoga je predviđena zarada

$$\arg\max_{w\ge w_0}(f(l^*)-l^*w)\,l^*(w-w_0).$$

2.5 Da li su aksiome međusobno zavisne?

Pokazaćemo sada da nijedna od aksioma nije zavisna od ostalih (suvišna) i to tako što ako izbacimo bilo koju od aksioma rešenje koje zadovoljava preostale tri će se razlikovati od Nešovog.

EP: Neka je $g:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ rastuća i strogo konkavna i pretpostavimo da svaka kontura $g(x_1,x_2)=c$ ima nagib -1 kada je $x_1=x_2$. Rešenje za problem pregovora $\langle S,d\rangle$ je jedinstveni maksimum za $g(s_1-d_1,s_2-d_2)$ na skupu $\{s\in S: s\ge d\}$. Ovo rešenje zadovoljava PO, IA (jer maksimizuje rastuću funkciju) i SIM (zbog nagiba kontura). Da bismo pokazali da se ovo rešenje razlikuje od Nešovog, neka je $g(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ i neka je problem pregovora $\langle S,d\rangle$ u kojem je $d=(0,0)$ i *S* je najmanji konveksan skup koji sadrži tačke (0,0), (1,0) i (0,2). Maksimum za g je tačka $(s_1,s_2)=(1/3,4/3)$, dok je Nešovo rešenje (1/2,1).

Drugo rešenje koje zadovoljava PO, IA i SIM, a razlikuje se od Nešovog je maksimum s_1+s_2 na skupu $\{s\in S: s\ge d\}$ koji je najbliži pravoj sa koeficijentom pravca 1 i prolazi kroz *d*.

SIM: Za svako $\alpha\in(0,1)$ rešenju f^{α} koje se odnosi na $\langle S,d\rangle$ dodeljujemo par

$$\arg\max_{(d_1,d_2)\le(s_1,s_2)\in S}(s_1-d_1)^{\alpha}(s_2-d_2)^{1-\alpha}.$$

Rešenja iz familije $\{f^{\alpha}\}_{\alpha\in(0,1)}$ poznata su kao Nešova asimetrična rešenja. Za problem $\langle S,d\rangle$, gde je *d*=(0,0), a *S* najmanji konveksan skup tačaka (0,0), (1,0) i (0,1), imamo $f^{\alpha}(S,d)=(\alpha,1-\alpha)$, što se za $\alpha\ne 1/2$ razlikuje od Nešovog rešenja za $\langle S,d\rangle$.

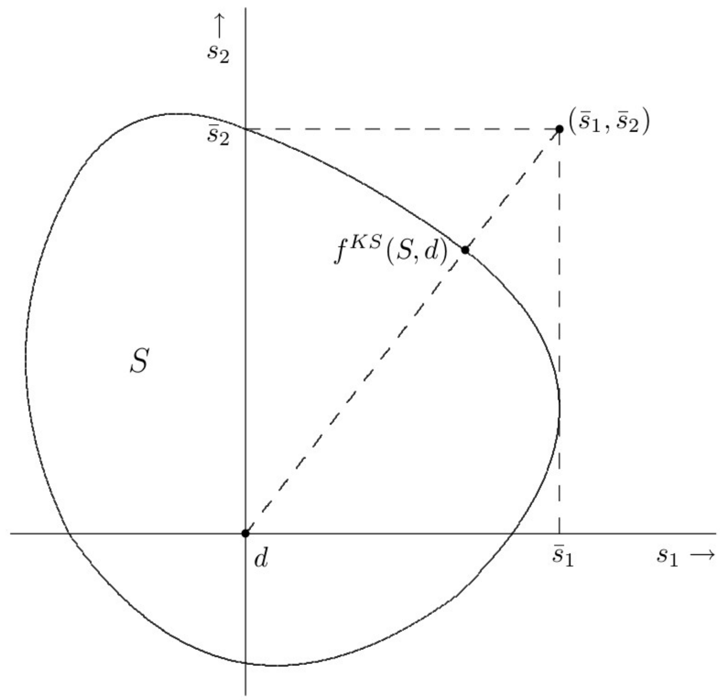
IA: Neka je u nekom problemu pregovora $\langle S,d\rangle$ $\overline{s_i}$ maksimalni dobitak koji igrač *i* može da dobije iz skupa $\{s\in S: s\ge d\}$, $i=1,2$. Neka je rešenje $f^{KS}(S,d)$ problema $\langle S,d\rangle$ maksimum skupa *S* na pravoj koja sadrži d i $(\overline{s_1},\overline{s_2})$. (videti Sliku3) Za problem pregovora u kom je *d*=(0,0) i

S najmanji konveksan skup tačaka (0,0), (1,0), (1/2,1/2) i (0,1/2), imamo $f^{KS}(S,d)=(2/3,1/3)$, što je različito od Nešovog rešenja (1/2,1/2). Aksiome SIM, PO i EP su očigledno zadovoljene. Ovo rešenje je poznato kao Kalai- Smorodinski rešenje.

PO: Neka je rešenje f^d definisano $f^d(S,d)=d.$ Ovo rešenje će zadovoljavati aksiome EP, IA i SIM i razlikovaće se od Nešovog.

Neka od opisanih rešenja koje zadovoljavaju po 3 Nešove aksiome imaju zanimljive aksiomatizacije. Reći ćemo da rešenje pregovora f zadovoljava *jaku individualnu racionalnost* (JIR) ako je $f(S,d)>d$ za svaki problem $\langle S,d\rangle$. Tada neko rešenje zadovoljava EP, PO, IA i JIR ako i samo ako je to antisimetrično Nešovo rešenje.

Kalai-Smorodinski rešenje f^{KS} je jedino rešenje koje zadovoljava EP, SIM, PO i aksiomu "monotonosti" koja zahteva da ako $S\subset T$ i ako su maksimalni dobici za igrača *i* iz skupa $\{s\in S: s\geq d\}$ i skupa isti, tada svaki igrač nakon pregovora $\langle T,d\rangle$ dobija barem onoliko koliko bi dobio nakon pregovora $\langle S,d\rangle$.



Slika3.Rešenje Kalai-Smorodinski f^{KS}

2.6 Proširenja teorije

Više od dva igrača?

Svi argumenti koji se tiču Nešovog rešenja se mogu proširiti tako da važe i za situacije u kojima učestvuje više od dva igrača. Ako postoji *n* igrača tada je problem pregovora par $\langle S,d\rangle$ gde je $S\subset\mathbb{R}^n$ kompaktan i konveksan, $d\in S$ i postoji $s\in S$ tako da je $s_i>d_i,\ i=1,\ldots,n.$ Može se pokazati da je jedinstveno rešenje koje zadovoljava 4 aksiome (EP, SIM, IA i PO su proširene tako da važe i za problem sa *n* igrača) funkcija koja svakom problemu $\langle S,d\rangle$ dodeljuje vektor korisnosti

$$\arg\max_{d \le s \in S} \prod_{i=1}^{n} (s_i - d_i).$$

Neka je $\Gamma = \langle S_1, S_2, \ldots, S_n, d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$ igra sa *n* igrača. Neka je $\Sigma = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ i $\Phi = \{ f | f = (d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x)), x \in \Sigma \}$ je skup svih mogućih ishoda. Neka je *L* konveksna granica tog skupa. Razmotrićemo svaki element iz *L* kao ishod. Neka je $(K_1(x^{(i)}), \ldots, K_n(x^{(n)})) \in \Phi$, $(i = \{1, \ldots, m\})$ i $0 \le \lambda_i \le 1$ realni brojevi $(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1)$.

Tada se vektor $\varphi = (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_1(x^{(i)}), \ldots, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_n(x^{(i)})) \in L$ može protumačiti kao očekivani ishod za igrača kada se n-torka strategija $x^{(i)}$ primenjuje sa verovatnoćom λ_i $(i = 1, \ldots, m)$.

Dalje pretpostavimo da je dat vektor isplata $f^* \in \mathbb{R}^n$, tzv. "status-quo tačka". Njegove komponente su isplate svakom igraču u slučaju da se dogovor ne postigne. Par (L, f^*) zvaćemo *produženom formom kooperativne igre* Γ.

Igrači teže da povećaju svoj dobitak u odnosu na onaj predviđen komponentama status-quo tačke i žele da ostvare dobitak *f* takav da je $f \ge f^*$. Njihove nejednake pozicije i sposobnosti će se svakako odraziti na vektor isplate *f*.

Pristupićemo ovom problemu tako što ćemo paru (L, f^*) dodeliti vektor f. Definisaćemo funkciju Ψ čija je oblast definisanosti skup parova (L, f^*), pri čemu je $L \subset \mathbb{R}^n$ zatvorena, ograničena i konveksna oblast, a $f^* \in \mathbb{R}^n$ takav da postoji $f \in L$ za koji važi $f \ge f^*$ i čije su vrednosti podskup $\mathbb{R}^n$.

Osim prethodnog, pretpostavićemo da Ψ zadovoljava i sledeće aksiome:

1. $\Psi(L, f^*) \in L$
2. $\Psi(L, f^*) \ge f^*$
3. $f \in L, f \ge \Psi(L, f^*) \Rightarrow f = \Psi(L, f^*)$ (Pareto-optimum)
4. Ako je $L_1 \subseteq L$ i $\Psi(L, f^*) \in L_1$ tada važi $\Psi(L, f^*) = \Psi(L_1, f^*)$ (Nezavisnost od irelevantnih alternativa)
5. Neka su $\alpha_k > 0, \beta_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ proizvoljne konstante, $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$ i
   $f^{*\prime} = (\alpha_1 f^* + \beta_1, \ldots, \alpha_n f^* + \beta_n)$,
   $L' = \{(\alpha_1 l_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n l_n + \beta_n) | (l_1, \ldots, l_n) \in L\}$.
   Tada je $\Psi(L', f^{*\prime}) = (\alpha_1 \psi_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n \psi_n + \beta_n)$, gde je $\Psi(L, f^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ (Nezavisnost od monotono rastućih linearnih transformacija).
6. Neka postoje indeksi i i j takvi da je $f = (f_1, \ldots, f_n)$ element iz *L* ako i samo ako je $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$ $(\varphi_k = f_k, k \ne i, \varphi_i = f_j, \varphi_j = f_i)$ i $f_i^* = f_j^*$ za $f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$. Tada za vektor $\Psi(L, f^*) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ važi $\psi_i = \psi_j$ (Simetrija)

Teorema2 (Sidarovski). Postoji jedinstvena funkcija Ψ koja zadovoljava aksiome 1-6.

Dokaz. Podelićemo dokaz u pet delova.

(a) Neka L, f^* zadovoljava aksiomu 1. Definišimo sada $r \ge 0$ kao najveći broj za koji postoji $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in L$ tako da važi $\varphi \ge f^* = (f_1^*, \ldots, f_n^*)$, $\varphi_{i_k} > f_{i_k}^*$ $(k = 1, \ldots, r)$ za odgovarajuće indekse $i_1, \ldots, i_r$.

Dokazaćemo da ne postoji $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi_1}, \ldots, \overline{\varphi_n}) \in L$ tako da važi $\overline{\varphi} \ge f^*$ i $\overline{\varphi_i} \ge f_i^*$ za neki indeks $i \ne i_k (k = 1, \ldots, r)$. Ako bi takvo $\overline{\varphi} \in L$ postojalo, uticalo bi na konveksnost *L*.

$$\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n) = \frac{1}{2}(\overline{\varphi} + \varphi) \in L \quad \text{i}$$

$\tilde{\varphi}_{i_k}=\frac{1}{2}\overline{\varphi_{i_k}}+\frac{1}{2}\varphi_{i_k}>\frac{1}{2}f^*_{i_k}+\frac{1}{2}f^*_{i_k}=f^*_{i_k} \quad (k=1,\ldots,r),$ pa je

$\tilde{\varphi}_i=\frac{1}{2}\overline{\varphi_i}+\frac{1}{2}\varphi_i>\frac{1}{2}f^*_i+\frac{1}{2}f^*_i=f^*_i,$ što je u kontradikciji sa definicijom broja r.

(b) Neka su L, f^* i r definisani kao u prethodnom tekstu i posmatramo problem nelinearnog programiranja:

$$
\begin{aligned}
\text{(max)} \quad & g(\tilde{\varphi})=g(u_1,\ldots,u_r)=\prod_{k=1}^{r}(u_k-f^*_{i_k}) && (*)\\
& \tilde{\varphi}\in L,\\
& \tilde{\varphi}\geq f^*,\\
& \tilde{\varphi}_{i_k}=u_k \ (k=1,\ldots,r),\\
& \tilde{\varphi}_j=f^*_j \ (j\neq i_k; k=1,\ldots,r),\\
& \tilde{\varphi}=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n).
\end{aligned}
$$

Posmatramo ovaj problem na nepraznoj, zatvorenoj i ograničenoj oblasti, što znači da postoji optimalno rešenje. Dokazaćemo da je ono jedinstveno. Pretpostavimo suprotno: neka su $(u_1,\ldots,u_r)$ i $(u_1',\ldots,u_r')$ dva različita optimalna problema. Optimalna vrednost funkcije cilja postavljenog problema je pozitivna, jer je φ u (a) definisano kao dopustivo rešenje. Tako je $u_k>f^*_{i_k}, u_k'>f^*_{i_k}$ (k=1,...,r). Neka je sada $a_k=u_k-f^*_{i_k},\ b_k=u_k'-f^*_{i_k}$ i definišimo dopustivo rešenje $u_k''=\frac{1}{2}(u_k+u_k')\ (k=1,\ldots,r)$. Dobijamo

$$g(u_1'',\ldots,u_r'')=\prod_{k=1}^{r}\frac{a_k+b_k}{2}\geq\prod_{k=1}^{r}\sqrt{a_k b_k}=\sqrt{\prod_{k=1}^{r}a_k\prod_{k=1}^{r}b_k}=g(u_1,\ldots,u_r). \qquad (**)$$

Zbog optimalnosti $(u_1,\ldots,u_r)$ mora važiti jednakost u (**), odakle imamo $a_k=b_k$, pa dalje sledi $u_k=u_k', k=1,..,r.$

(c) Neka je $(u_1,\ldots,u_r)$ optimalno rešenje (*) i $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_n),\ \tilde{\varphi}_{i_k}=u_k$ (k=1,.. $\tilde{\varphi}_j=f^*_j(j\neq i_k, k=1,\ldots,r)$. Definišemo funkciju $\tilde{\varphi}$ sa $\tilde{\varphi}(L,f^*)=\tilde{\varphi}$. Dokazaćemo da $\tilde{\varphi}$ zadovoljava aksiome 1-6. Aksiome 1-3 su ispunjene prema konstrukciji ove funkcije. Ako je $\tilde{\varphi}(L,f^*)$ optimalno na L, biće optimalno i na nekom podskupu $L_1\subset L$, pa važi i aksioma 4. Kako bismo dokazali da je ispunjena aksioma 5, izabraćemo konstante $\alpha_k>0$ i β_k (k=1,...,n), pri čemu su $L, f^*, r, i_1,\ldots,i_r$ definisani kao u delu (a). Ako su L' i $f^{*\prime}$ definisani tako da zadovoljavaju aksiomu 5, tada je $r'=r$ i indeksi $i_1,\ldots,i_r$ imaju ista svojstva kao za L, f^*. Kako je $g(u_1',\ldots,u_r')=\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_r}g(u_1,\ldots,u_r)$, sledi da je ispunjena i aksioma 5. Uzmimo sada da indeksi i, j ispunjavaju uslove iz aksiome 6. Prema toj aksiomi važi $\varphi^*_k=f^*_k\ (k\neq i, k\neq j), \varphi^*_i=f^*_j, \varphi^*_j=f^*_i$, odakle sledi $\varphi^*=f^*$, gde je $\varphi^*=(\varphi^*_1,\ldots,\varphi^*_n)$. Neka je $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_n)$ optimalno rešenje (**) i $\tilde{\psi}=(\tilde{\psi}_1,\ldots,\tilde{\psi}_n)\ (\tilde{\psi}_k=\tilde{\varphi}_k, k\neq i, k\neq j, \tilde{\psi}_i=\tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j=\tilde{\varphi}_i)$. Tada je $\tilde{\varphi}\in L\Leftrightarrow\tilde{\psi}\in L$ i $i\in\{i_1,\ldots,i_r\}\Leftrightarrow j\in\{i_1,\ldots,i_r\}$. Ako su $i, j\in\{i_1,\ldots,i_r\}$, tada zbog ograničenja (**) važi $\tilde{\varphi}_i=\tilde{\varphi}_j=f^*_i$.

(d) Neka su opet L, f^*, r i $i_1,\ldots,i_r$ definisani kao u delu (a). Dokazujemo da optimalno rešenje $\tilde{\varphi}=(\tilde{\varphi}_1,\ldots,\tilde{\varphi}_n)$ problema (**) maksimizuje funkciju $h(\varphi)=\sum_{k=1}^{r}(\prod_{j=1, j\neq k}^{r}(\tilde{\varphi}_{i_j}-f^*_{i_j}))\varphi_{i_k}$ na skupu L.

Pretpostavimo suprotno: neka je $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\in L$ tako da važi $h(\varphi)>h(\tilde{\varphi})$.

Definišimo $\overline{\varphi}=\tilde{\varphi}+\epsilon(\varphi-\tilde{\varphi})$ $(0<\epsilon<1)$. Možemo uvideti da je $g(\overline{\varphi})=\prod_{j=1}^{r}[\tilde{\varphi}_{i_j}-f_{i_j}^*+\epsilon(\varphi_{i_j}-\tilde{\varphi}_{i_j})]=g(\tilde{\varphi})+\epsilon h(\varphi-\tilde{\varphi})+a_2\epsilon^2+\ldots+a_r\epsilon^r$, gde su $a_2,\ldots,a_r$ neke konstante (nezavisne od ϵ).

Zbog linearnosti funkcije *h* važi $h(\varphi)-h(\tilde{\varphi})=h(\varphi-\tilde{\varphi})>0$. Za dovoljno malo ϵ dobijamo i $g(\overline{\varphi})>g(\tilde{\varphi})$, što je u kontradikciji sa optimalnošću $\tilde{\varphi}$.

(e) Konačno dokazujemo da je svaka funkcija ψ koja zadovoljava aksiome 1-6 jednaka funkciji $\overline{\varphi}$. Definišemo $H=\{\varphi|h(\varphi)\le h(\tilde{\varphi}),\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\ge f^*,\ \varphi_i=f_i^*\quad(i\ne i_k,k=1,\ldots,r)\}$ i $L_1=L\cap\{\varphi|\varphi\ge f^*\}$.

Očigledno je $L_1\subseteq H$. Posmatrajmo sada linearne transformacije

$$f_{i_k}'=\varphi_{i_k}-f_{i_k}^*\ (k=1,\ldots,r),$$

$$f_j'=\varphi_j\ (j\ne i_k,k=1,\ldots,r).$$

Tada će se, prema delu (c) ovog dokaza, f^* i $\tilde{\varphi}$ transformisati u

$$f_{i_k}'=0\ (k=1,\ldots,r),\ f_j^{*}{}'=f_j^*\ (j\ne i_k,k=1,\ldots,r),$$
$$\tilde{\varphi}_{i_k}'=1\ (k=1,\ldots,r),\ \tilde{\varphi}_j'=\tilde{\varphi}_j\ (j\ne i_k,k=1,\ldots,r),$$

a *H* će se transformisati u $H'=\{\varphi'|\sum_{k=1}^{r}\varphi_{i_k}'\le r,\ \varphi_{i_k}'\ge 0,\ \varphi_i'=f_i^*\ (i\ne i_k),k=1,\ldots,r\}$.

Odavde sledi, na osnovu aksiome 6 za $\psi'=(\psi_1',\ldots,\psi_n')=\psi(H',f^*)$ da važi odnos $\psi_{i_k}'=\psi_{i_l}'=1$ (*k*,*l*=1,...,*r*). Transformacijom unazad odmah dobijamo $\psi(H,f^*)=\varphi^*$ na osnovu aksiome 5. Kako je $\tilde{\varphi}\in L_1$ i $L_1\subseteq H$, na osnovu aksiome 4 dobijamo $\psi(L_1,f^*)=\tilde{\varphi}$. Kako se iz aksiome 2 dobija $\psi(L,f^*)\in L_1$, prema aksiomi 4 važi $\psi(L,f^*)=\psi(L_1,f^*)=\tilde{\varphi}$, što je i trebalo dokazati. □

Alternativna definicija problema pregovora

Problem pregovora, kako smo ga definisali, sastoji se iz kompaktnog konveksnog skupa $S\subset\mathbb{R}^2$ i elementa $d\in S$. Ipak, Nešovo rešenje za $\langle S,d\rangle$ zavisi samo od *d* i Pareto granice za *S*. Kompaktnost i konveksnost skupa *S* obezbeđuju da Pareto granica bude dobro definisana i konkavna. Umesto što smo počeli od skupa *S*, mogli smo da zadamo aksiome i na problemu definisanom sa nerastućom konkavnom funkcijom (i tačkom neuspeha *d*). U narednim poglavljima biće prirodnije tako definisati problem. Tako ćemo ponekad terminom “problem pregovora” označiti par $\langle S,d\rangle$, gde je *S* grafik nerastuće konkavne funkcije definisane na zatvorenom intervalu iz skupa prirodnih brojeva, $d\in\mathbb{R}^2$, i postoji $s\in S$ tako da je $s_i>d_i$, $i=1,2$.

Da li rešenje može da se bazira na prioritetizaciji igrača?

U Nešovom modelu problema pregovora koji se sastoji samo iz skupa *S* i tačke $d\in S$ ne pojavljuje se funkcija korisnosti. Prirodno se nameće pitanje da li možemo bazirati teoriju pregovora samo na osnovnim informacijama o prioritetima igrača. Pretpostavimo da nam je dat skup dogovora *A*, ishod u slučaju neslaganja $D\in A$, i prioriteti svakog igrača nad skupom *A*. Moguće je napraviti teoriju pregovora koja se zasniva samo na ovim elementima ako odstupimo od osnovne Nešove pretpostavke da nije bitna karakterizacija članova skupa A. U svakom slučaju, suočavamo se sa poteškoćama ako želimo teoriju koja će označiti ishod koji zavisi samo od prioriteta igrača. Da bismo došli do takve teorije, moramo biti u mogućnosti da opišemo ishod samo u terminima prioriteta. Na primer, teorija može da predvidi ishod koji Igrač 1 najviše priželjkuje, ili može da predvidi ishod koji Igrač 2 najviše priželjkuje, a prema kojem je Igrač 1 ravnodušan. Nijedan od ovih ishoda ne deluje prihvatljivo. Dalje, intuicija ukazuje na to da će skup ishoda koji se mogu opisati u terminima prioriteta verovatno biti premali i neće sadržati neki "razuman" ishod.

Ako želimo teoriju koja će zavisiti samo od podataka $\langle A, D, \succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2 \rangle$, tada naše rešenje F mora da zadovolji sledeći uslov. Neka su $\langle A, D, \succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2 \rangle$ i $\langle A', D', \succcurlyeq_1', \succcurlyeq_2' \rangle$ dva pregovora i neka je $T: A \rightarrow A'$ funkcija "1-1" tako da je $T(A) = A'$. Pretpostavimo da T čuva prioritete ($T(a) \succcurlyeq_i' T(b)$ ako i samo ako $a \succcurlyeq_i b$ za $i=1,2$) i zadovoljava $T(D) = D'$. Tada T preslikava rešenje prvog problema u rešenje drugog problema: $T(F(A, D, \succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2)) = F(A', D', \succcurlyeq_1', \succcurlyeq_2')$. Specijalno, ako je $\langle A, D, \succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2 \rangle = \langle A', D', \succcurlyeq_1', \succcurlyeq_2' \rangle$, tada je T identičko preslikavanje.

Sada pretpostavimo da je skup dogovora $A = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 + a_2 \leq 1 \wedge a_i \geq 0, i=1,2\}$, ishod u slučaju neuspeha $D=(0,0)$ i prioriteti svakog igrača $i=1,2$ definisani su sa $(a_1, a_2) \succcurlyeq_i (b_1, b_2)$ ako i samo ako $a_i \geq b_i$. Definišimo $T: A \rightarrow A$ sa $T(a_1, a_2) = (2a_1/(1+a_1), a_2/(2-a_2))$. Ovako definisana funkcija čuva prioritete i zadovoljava $T(0,0) = (0,0)$. Jedine tačke za koje važi $T(a_1, a_2) = (a_1, a_2)$ su (0,0), (1,0) i (0,1). Stoga teorija pregovora sagrađena samo na informaciji $\langle A, D, \succcurlyeq_1, \succcurlyeq_2 \rangle$ dolazi samo do ova tri rešenja, ali nam nijedno nije zadovoljavajuće.

Nešov model "promenljive pretnje"

U Nešovom aksiomatskom modelu tačka d koja označava ishod ukoliko do dogovora ne dođe je fiksna. Neš je proširio svoju teoriju tako da obuhvata i situacije u kojima igrači mogu da utiču na ovaj ishod. Neka je P_i skup čistih strategija igrača i, Σ_i njegov skup mešovitih strategija i neka je $H_i : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ njegova funkcija isplate. Igra počinje tako što igrači naizmenično biraju mešovite strategije. Te strategije su potezi koje igrači moraju da preduzmu ako ne postignu dogovor i smatramo ih *pretnjama*. Igrači moraju da iznesu svoje pretnje za slučaj da se ne dođe do dogovora, čak i kada par pretnji nije Nešova ravnoteža. Kada izaberu pretnje kojima mogu da maksimizuju sebi isplatu, dogovor koji se postiže je Nešovo rešenje pregovora gde je skup mogućih dogovora iz $P_1 \times P_2$, a tačka neuspeha par isplata u slučaju da se pretnje ostvare. Dakle, time što je zapretio Igraču j, Igrač i je uticao na svoju isplatu datu Nešovim rešenjem.

Preciznije, neka je S (konveksan i kompaktan) skup parova isplata nad $P_1 \times P_2$, i definišimo funkciju $g: S \rightarrow S$ sa $g(d) = f^N(S, d)$, gde je f^N funkcija Nešovog rešenja. Nešova igra pretnji je G^* u kojoj je skup čistih strategija igrača i Σ_i i njegova isplata za par (σ_1, σ_2) je $g_i(H(\sigma_1, \sigma_2))$, gde je $H(\sigma_1, \sigma_2) = (H_1(\sigma_1, \sigma_2), H_2(\sigma_1, \sigma_2))$. Igra G^* ima Nešovu ravnotežu jer je $g_i \circ H$ neprekidna i kvazi-konkavna po σ_i za svaku vrednost σ_j.

3. Strateški pristup: Model naizmeničnih ponuda

3.1 Struktura pregovora

Pomenuti model "promenljive pretnje" možemo shvatiti kao jednu od prvih igara strateških pregovora. U aksiomatskom pristupu, ishod pregovora definisan je nizom uslova koje treba da zadovolji. U strateškom pristupu, ishod je ravnoteža eksplicitnog modela pregovaračkog procesa. Posmatrajući zapanjujuću raznolikost procedura pregovora, suočeni smo sa teškim zadatkom da formulišemo model koji izražava glavne uticaje na ishod. U ovom poglavlju izgradićemo model koji se fokusira na jednu osnovnu karakteristiku pregovora: stavovi učesnika prema vremenu.

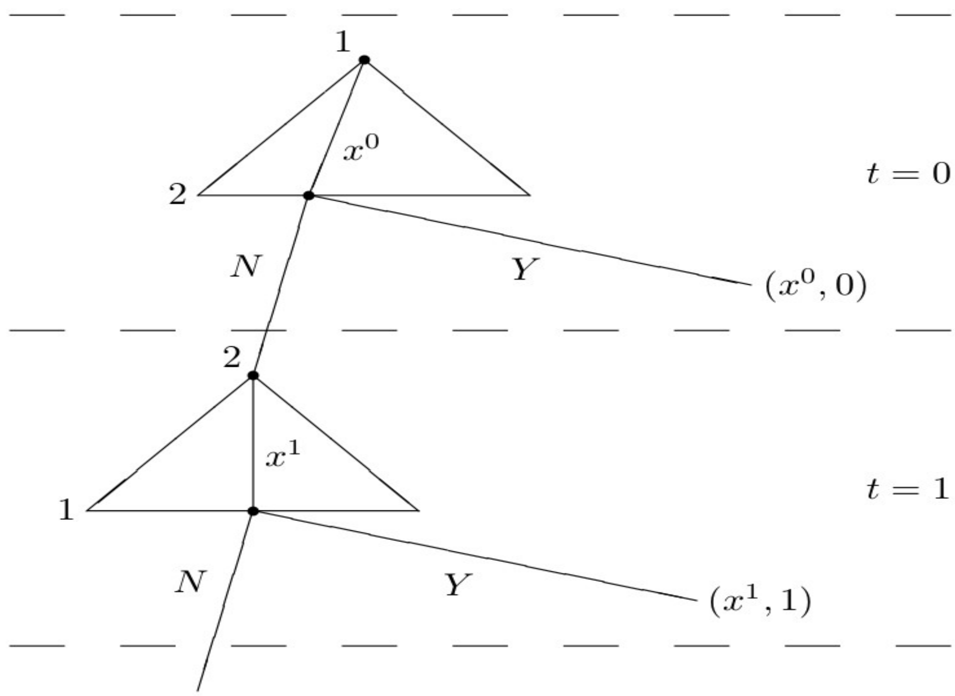
Pretpostavimo da dva igrača pregovaraju oko nekog plena veličine 1. Dogovor je par (x_1, x_2), gde je x_i dobitak igrača *i*. Skup mogućih dogovora je

$$X=\{(x_1, x_2)\in\mathbb{R} : x_1+x_2=1 \wedge x_i\geq 0,\ i=1,2\}.$$

Želje igrača iz ovog skupa su dijametralno suprotne. Svaki igrač razmišlja samo o tome koliki deo plena će dobiti i želi da to bude što više. To znači da će igrač *i* birati radije $x\in X$ nego $y\in X$ ako i samo ako je $x_i > y_i$. Primetimo da je *X* skup dogovora, a ne korisnih parova. Ovaj model možemo primeniti na ranije opisane primere. U slučaju pregovora oko podele 1000 dinara, x_i je predstavljalo sumu koju dobije *i*-ti igrač. U slučaju ugovaranja prodajne cene za nedeljivu robu, x_1 je cena koju kupac plaća prodavcu. U modelu pregovora oko zarade, x_1 je profit firme.

Opišimo proces pregovora. Igrači mogu da povlače poteze samo u određenim periodima iz (beskonačnog) skupa $T=\{0,1,2,\ldots\}$. U svakom periodu $t\in T$ jedan od igrača, recimo *i,* predloži dogovor (iz skupa *X*), a drugi igrač (*j*) ili prihvati tu ponudu (izabere *Y*) ili odbije (izabere *N*). Ako je ponuda prihvaćena, pregovori su završeni i sprovodi se ono što je dogovoreno. Ako je odbijena, prelazi se na period $t+1$. Sada igrač *j* predlaže dogovor koji igrač *i* može da prihvati ili odbije. Igra se nastavlja na isti način, kad god je neka ponuda odbijena, prelazi se na sledeći period. Vreme je neograničeno, ali će u većini slučajeva igrači snositi neke troškove trajanja pregovora što ih dodatno motiviše da se dogovore. Ponuda koja je jednom odbijena se poništava. Igrač koji ju je izneo može u budućnosti predložiti bilo koji dogovor i nema ograničenja u vezi toga kakvu ponudu može prihvatiti ili odbaciti. U svakom trenutku igrači su svesni svojih i protivnikovih prethodnih poteza. Sledeća slika prikazuje strukturu igre u prva dva perioda. Igra počinje na vrhu "drveta" i vreme počinje u nultom periodu. Broj pored svakog čvora označava koji je igrač na potezu. Igrač 1 je prvi na potezu da ponudi dogovor iz *X*, koji Igrač 2 može da prihvati (*Y*) ili odbije (*N*). Ako ga prihvati, igra se završava. Pratimo desnu granu drveta i dolazimo do oznake $(x^0, 0)$ koja nam govori da je dogovor x^0 postignut u periodu 0. Ako Igrač 2 odbije ponudu Igrača 1 (leva grana), igra prelazi u period 1 u kojem Igrač 2 iznosi ponudu, a Igrač 1 na nju odgovara.

Završne čvorove (u kojima je dogovor postignut) označili smo parovima oblika (x, t) što označava prirodu dogovora koji je postignut i period u kom je postignut, umesto da ih označimo isplatama. Takođe smo pretpostavili da sve beskonačne grane (u kojima se dogovor nikad ne postigne) vode do istog ishoda *D*. Kako bismo analizirali izbore igrača, moramo da konkretizujemo njihove prioritete nad ovim ishodima. Ali, pre toga primetimo da smo pri definisanju da ishod bude ili (x, t) ili *D*, napravili stroge pretpostavke u vezi tih prioriteta. Za svaki period $t\geq 1$ mnoge grane vode do krajnjeg čvora označenog sa (*x, t*), bez obzira na prethodnu putanju ili odbijene ponude. Dakle, pretpostavili smo da je igračima bitno samo kakva je priroda dogovora i u kom vremenskom intervalu je postignut, a ne i koje su ponude i kontraponude do njega dovele.



Slika4.

3.2 Prioriteti

Pretpostavke

U Nešovom aksiomatskom pristupu rešenje nije zavisilo samo od prioriteta igrača nad ishodom već i od njihovog stava prema riziku. Ovde struktura igre nalaže da je jedan od prioriteta i vreme za koje se dogovor postigne.

Pretpostavimo da svaki igrač i=1,2 ima kompletnu, tranzitivnu i refleksivnu prioritetizaciju $\succcurlyeq_i$ [3] na skupu ishoda $(X \times T) \cup \{D\}$.

Definicija2: Igra pregovora sa naizmeničnim ponudama je igra sa strukturom opisanom u prethodnom odeljku, pri čemu je prioritetizacija svakog igrača kompletna, tranzitivna i refleksivna relacija na skupu $(X \times T) \cup \{D\}$.

Postavićemo uslove koji će biti dovoljno slabi da omoguće širok spektar prioriteta. Najpre pretpostavljamo da je najmanje željeni ishod *D*.

A1 (*Neuspeh je najgori ishod*) Za svaki par $(x, t) \in X \times T$ imamo $(x, t) \succcurlyeq_i D$.

Ostali uslovi se tiču ponašanja ove relacije na skupu $X \times T$. Najpre zahtevamo da će među dogovorima postignutim u istom periodu igrač *i* birati one sa većim iznosom x_i i birati da to dobije što pre.

A2 (*Plen je poželjan*) Za svako $t \in T$, $x \in X$ i $y \in X$ imamo $(x, t) \succ_i (y, t)$ ako i samo ako $x_i > y_i$.

3 Ako igrač *i* smatra da su ishodi z i z' podjednako povoljni, pišemo $z \sim_i z'$, ili pišemo $z \succ_i z'$, ako ne važi $z \succcurlyeq_i z'$.

A3 (*Vreme je dragoceno*) Za svako $t \in T, s \in T$ i $x \in X$ imamo $(x,t) \succcurlyeq_i (x,s)$ ako je $t < s$ i $x_i > 0$.

Dalje pretpostavljamo da je prioritetizacija igrača *i* neprekidna.

A4 (*Neprekidnost*) Neka su $\{(x_n, t)\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{(y_n, s)\}_{n=1}^{\infty}$ nizovi članova iz $X \times T$ pri čemu je $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ i $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Tada je $(x,t) \succcurlyeq_i (y,s)$ kad god je $(x_n, t) \succcurlyeq_i (y_n, s)$ za svako *n*.

Relacija $\succcurlyeq_i$ zadovoljava pretpostavke A2 do A4 ako i samo ako se prioriteti igrača *i* na skupu $X \times T$ mogu predstaviti neprekidnom funkcijom korisnosti $U_i : [0,1] \times T \to \mathbb{R}$ koja je rastuća po svom prvom argumentu (udeo plena koju taj igrač dobija), a opadajuća po drugom (vreme za koje će ga dobiti). Ovo sledi iz teoreme dokazane u [8] (Teorema1, str. 680).

Sledeća pretpostavka veoma uprošćava strukturu prioriteta. Ona zahteva da to da li će igrač birati (x,t) ili (y,s) zavisi samo od *x*, *y* i razlike $s - t$.

A5 (*Stacionarnost*) Za svako $t \in T, x \in X$ i $y \in X$ imamo $(x,t) \succ_i (y, t+1)$ ako i samo ako $(x,0) \succ_i (y,1)$.

Ako relacija $\succcurlyeq_i$ zadovoljava A2 – A5 tada postoji funkcija korisnosti U_i koja prikazuje prioritete igrača *i* na skupu $X \times T$ i ima specifičan oblik: za svako $\delta \in (0,1)$ postoji neprekidna rastuća funkcija $u_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ takva da je $U_i(x_i, t) = \delta^t u_i(x_i)$. [4] Primetimo da za svaku vrednost δ možemo naći odgovarajuću funkciju u_i. Vrednost δ nije određena prioritetima. Takođe, funkcija u_i nije obavezno konkavna.

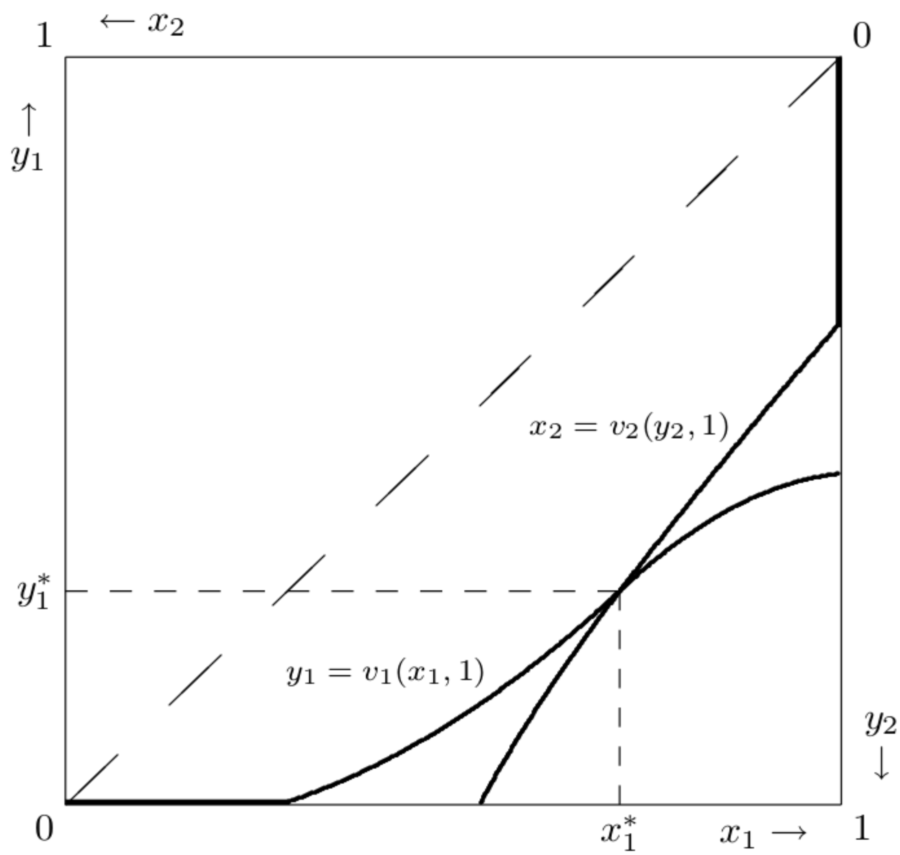
Ubacićemo neka nova obeležja. Za svaki ishod (x,t) iz aksioma A2-A4 sledi da ili postoji jedinstveno $y \in X$ takvo da je igraču *i* svejedno kad bira između (x,t) i $(y,0)$ ili će radije izabrati bilo koji ishod $(y,0)$. Definišimo $v_i : [0,1] \times T \to [0,1]$ za *i*=1,2 sa:

$$v_i(x_i, t) = \begin{cases} y_i & \text{, ako je } (y,0) \sim_i (x,t) \\ 0 & \text{, ako je } (y,0) \succ_i (x,t), \forall y \in X. \end{cases}$$

Pojednostavićemo analizu ako pretpostavimo da za svako (x,t) postoji *y* tako da je $(y,0) \sim_i (x,t)$. Iz prethodne jednakosti sledi da ako je $v_i(x_i, t) > 0$ tada je igraču *i* svejedno da li će dobiti $v_i(x_i, t)$ odmah ili x_i u periodu *t*. $v_i(x_i, t)$ se odnosi na sadašnju vrednost (x,t) za igrača *i*, čak i kad je $v_i(x_i, t) = 0$. Primetimo $(y,0) \succcurlyeq_i (x,t)$ kad god je $y_i = v_i(x_i, t)$ i $(y,t) \succ_i (x,s)$ kad god je $v_i(y_i, t) > v_i(x_i, s)$.

Ako $\succcurlyeq_i$ zadovoljava A2-A4, tada za svako $t \in T$ funkcija $v_i(., t)$ je neprekidna, neopadajuća i rastuća za svako $v_i(x_i, t) > 0$. Dalje imamo $v_i(x_i, t) \leq x_i$ za svako $(x,t) \in X \times T$ i $v_i(x_i, t) < x_i$ kad god je $x_i > 0$, $t \geq 1$. Ako važi i A5 imamo $v_i(v_i(x_i, 1), 1) = v_i(x_i, 2), \forall x \in X$. Primeri funkcija $v_1(., 1)$ i $v_2(., 1)$ prikazani su na slici:

4 Na osnovu Teoreme2 iz [8], str. 682



Slika 5.

Poslednji uslov koji postavljamo govori da gubici pri kašnjenju predstavljaju rastuću funkciju.

A6 (*Gubici prilikom kašnjenja rastu*) Razlika $x_i - v_i(x_i, 1)$ je rastuća funkcija po x_i.

Pod ovom pretpostavkom grafik svake funkcije $v_i(., 1)$ sa Slike4. ima svuda nagib manji od 1. Takođe, ako je u_i diferencijabilna, iz A6 sledi da je $\delta u_i'(x_i) < u_i'(v_i(x_i, 1))$ kad god je $v_i(x_i, 1) > 0$. Ovaj uslov je slabiji od konkavnosti u_i, što implicira $u_i'(x_i) < u_i'(v_i(x_i, 1))$.

Presek grafika funkcija $v_1(.,1)$ i $v_2(.,1)$

Osim toga što presek grafika funkcija $v_1(., 1)$ i $v_2(., 1)$ ima poseban značaj, on je i jedinstven: postoji samo jedan par $(x, y) \in X \times X$ takav da je $y_1 = v_1(x_1, 1)$ i $x_2 = v_2(y_2, 1)$.

Lema1. Ako relacija $\succcurlyeq_i$ svakog igrača *i* zadovoljava aksiome A2-A6, tada postoji jedinstveni par $(x^*, y^*) \in X \times X$ takav da je $y_1^* = v_1(x_1^*, 1)$ i $x_2^* = v_2(y_2^*, 1)$.
Dokaz: Neka je za svako $x \in X$ $\psi(x)$ dogovor takav da je $\psi_1(x) = v_1(x_1, 1)$ i definišimo $H : X \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = x_2 - v_2(\psi_2(x), 1)$. Par dogovora *x* i $y = \psi(x)$ zadovoljava i $x_2 = v_2(y_2, 1)$ ako i samo ako $H(x) = 0$. Imamo da je $H(0,1) \geq 0$ i $H(1,0) \leq 0$ i *H* je neprekidna. Stoga, po teoremi o srednjoj vrednosti, funkcija *H* ima nulu. Dalje imamo

$$H(x) = [v_1(x_1, 1) - x_1] + [1 - v_1(x_1, 1) - v_2(1 - v_1(x_1, 1), 1)].$$

Kako je $v_1(x_1, 1)$ neopadajuća po x_1, oba sabirka su opadajuća na osnovu A6, pa *H* ima jedinstvenu nulu. □

Jedinstveni par $\left(x^{*}, y^{*}\right)$ iz preseka grafika prikazan je na Slici4. Primetimo da se nalazi ispod glavne dijagonale, tako da je $x_1^{*} > y_1^{*}$ (i $x_2^{*} < y_2^{*}$).

3.3 Strategije

Strategija igrača precizira njegovu akciju na svakom čvoru drveta kada je taj igrač na potezu[5]. Na primer, strategija Igrača1 počinje preciziranjem dogovora koji predlaže u t =0, a zatim sledi izbor (Y - prihvatiti ili N - odbiti) za svaku od mogućih kontraponuda Igrača 2 u t =1. Strategija se nastavlja preciziranjem poteza za svaki sledeći period u odnosu na sve prethodne poteze. Preciznije, neka je X^t skup svih sekvenci $\left(x^0, \ldots, x^{t-1}\right)$ članova X. Strategija Igrača 1 je niz funkcija $\sigma=\{\sigma^t\}_{t=0}^{\infty}$, gde svaka ukazuje na prethodne poteze iz tog skupa. Dakle, $\sigma^t: X^t \rightarrow X$, ako je t parno i $\sigma^t: X^{t+1} \rightarrow \{Y, N\}$, ako je t neparno: strategija Igrača 1 propisuje ponudu u svakom parnom periodu t, za svaki niz prethodno odbijenih ponuda i odgovor (prihvaćeno ili odbijeno) u svakom neparnom periodu, za svaki niz prethodno odbijenih ponuda nakon čega Igrač2 iznosi svoju ponudu. Slično tome, strategija Igrača2 je niz funkcija $\tau=\{\tau^t\}_{t=0}^{\infty}$, gde je $\tau^t: X^{t+1} \rightarrow \{Y, N\}$, kad je t parno i $\tau^t: X^t \rightarrow X$, kad je t neparno: Igrač2 prihvata ili odbija ponudu Igrača1 u svakom parnom periodu, a u neparnom sam izbacuje ponudu.

Primetimo da strategija precizira poteze u svakom periodu, za svaki niz prethodnih poteza, uključujući i nizove poteza do kojih ne mora nikada doći. Svaka strategija Igrača1 mora, na primer, propisati izbor Y ili N (da ili ne) za t =1 za slučaj da u t =0 ponudi (1/2, 1/2), a Igrač2 to odbije i da kontraponudu, čak iako strategija zahteva da Igrač1 u t =0 ponudi nešto drugo. Dakle, strategija propisuje i poteze na čvorovima do kojih se neće doći ako se prate njene preporuke u prethodnim periodima. Ovo se u prvom trenutku može učiniti čudnim i nepotrebnim. Ako nas interesuje samo Nešova ravnoteža (videti odeljak 3.4), onda je ovo zaista suvišno. Pretpostavimo da se strategija σ' Igrača1 razlikuje od strategije σ samo u potezima koje propisuje, a do kojih se ne može doći ako se poštuje strategija σ. Tada će parovi strategija (σ, τ) i (σ', τ) dovesti do istog ishoda za svaku strategiju τ Igrača2. Ako želimo koncept savršene ravnoteže (biće opisana u odeljku 3.6), tada zahtevamo da strategija igrača precizira njegove poteze i u situacijama u kojima se neće naći ako bude poštovao tu strategiju. Kako bismo ispitali optimalnost strategije Igrača i, na primer nakon što Igrač j odstupi od svoje prvobitne strategije, Igrač i mora imati očekivanja o budućim potezima Igrača j. Strategija igrača j će se tada sastojati od njegovih uverenja šta Igrač i očekuje da će j da uradi.

Imajte na umu da ne ograničavamo strategije da budu “stacionarne”. Dozvoljavamo da ponude i reakcije igrača na ponude zavise od događaja u prethodnim periodima. U nekim modelima se pretpostavlja stacionarnost, ali je ta pretpostavka problematična. Stacionarna strategija je jednostavna jer ne zavisi od vremena niti poteza u prethodnim periodima, ali to znači da će Igrač j očekivati od Igrača i da se drži svog stacionarnog ponašanja, čak i kada on sam to ne radi. Na primer, stacionarna strategija u kojoj Igrač1 uvek predlaže (1/2,1/2) znači da će i nakon što Igrač 1 po hiljaditi put predloži (3/4,1/4), Igrač 2 i dalje verovati da će Igrač1 u sledećem periodu predložiti (1/2,1/2). Ako pretpostavimo da su strategije igrača “proste”, znači da smo pretpostavili da Igrač2 veruje da će Igrač1 nastaviti da predlaže (3/4,1/4).

5 Ako su svi potezi u igri unapred isplanirani i propisani nekom strategijom, smatramo je “čistom” strategijom.

3.4 Nešova ravnoteža

Par strategija (σ, τ) je “Nešova ravnoteža” ako za dato τ nijedna stategija Igrača1 ne može dovesti do za njega boljeg ishoda od onog koji je određen parom (σ, τ) i za dato σ nijedna strategija Igrača2 ne može dovesti do za njega boljeg ishoda od onog koji je određen parom (σ, τ).

Nešova ravnoteža je standardno rešenje u teoriji igara. Smatramo da je to odgovarajuće rešenje kada su igrači racionalni, iskusni i kada su više puta igrali iste ili bar slične igre. U nekim igrama postoji jedinstvena Nešova ravnoteža, pa teorija daje veoma jasna predviđanja. Nažalost, to nije slučaj u pregovorima sa alternativnim ponudama u kojima prioriteti igrača zadovoljavaju aksiome A1-A6.

Neka je $\bar{x} \in X$ i razmotrimo par $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ (stacionarnih) strategija u kojima Igrač1 uvek predlaže $\bar{x}$ i prihvata ponudu x ako i samo ako je $x_1 \geq \bar{x_1}$, a Igrač2 uvek predlaže $\bar{x}$ i prihvata ponudu ako i samo ako je $x_2 \geq \bar{x_2}$. Neka je za Igrača1

$$\bar{\sigma}^t(x^0, \ldots, x^{t-1}) = \bar{x}, \ \forall (x^0, \ldots, x^{t-1}) \in X^t, \text{ ako je } t \text{ parno i}$$

$$\bar{\sigma}^t(x^0, \ldots, x^t) = \begin{cases} Y & \text{ako je } x_1^t \geq \bar{x_1} \\ N & \text{ako je } x_1^t < \bar{x_1}, \end{cases}$$

ako je t neparno.

Strategija $\bar{\tau}$ Igrača2 definisana je analogno.

Ako igrači koriste strategije $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$, Igrač1 će predložiti $\bar{x}$ u t =0, što će Igrač2 odmah prihvatiti i ishod je $(\bar{x}, 0)$. Da bismo se uverili da je $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$ Nešova ravnoteža, pretpostavimo da igrač i ima drugu strategiju. $(\bar{x}, 0)$ je najbolji ishod za igrača i jer će j uvek predlagati x i odbijati one x za koje je $x_j < \bar{x_j}$.

Skup ishoda generisanih Nešovom ravnotežom sadrži ne samo sve moguće dogovore u nultom periodu, već i u kasnijim periodima. Pretpostavimo, na primer, da se strategije $\hat{\sigma}$ i $\hat{\tau}$ razlikuju od $\bar{\sigma}$ i $\bar{\tau}$ samo u periodu 0 kada Igrač 1 ponudi (1,0) umesto $\bar{x}$, a Igrač 2 odbija svaku ponudu. Strateški par $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ dovodi do dogovora $(\bar{x}, 1)$ i jeste ravnoteža ako $(\bar{x}, 1) \succsim_2 ((1{,}0), 0)$. Ako Igrač 2 nije toliko nestrpljiv da bi radije dobio 0 danas nego 1 sutra, postoje vrednosti za $\bar{x}$ koje zadovoljavaju ovaj uslov, tako da postoji ravnoteža pri kojoj se dogovor postiže u periodu 1. Slično se može pokazati da za neke prioritete postoje Nešove ravnoteže pri kojima se dogovor postiže u periodu 2 ili kasnije.

Možemo zaključiti da pojam Nešove ravnoteže zadaje određena ograničenja za ishod, ali nas ne zadovoljava u potpunosti.

3.5 Savršena ravnoteža podigre

Možemo prikazati poteze propisane ranije definisanim strategijama $\bar{\sigma}$ i $\bar{\tau}$ kao “prazne pretnje”. Strategija $\bar{\tau}$ od Igrača2 zahteva da odbaci sve ponude koje su za njega manje povoljne od $\bar{x}$. Ipak, kada se Igrač2 suoči sa takvom ponudom, pod pretpostavkom da će Igrač1 pratiti strategiju $\bar{\sigma}$, tada Igraču2 može biti u interesu da je ipak prihvati. Pretpostavimo da je $x_1 < 1$ i da Igrač1 izbacuje ponudu x za koju je u periodu t $x_1 = \bar{x_1} + \epsilon$, za neko malo $\epsilon > 0$. Ako Igrač2 prihvati ovu ponudu, u periodu t dobija $\bar{x_2} - \epsilon$, dok ako je odbije, na osnovu para $(\bar{\sigma}, \bar{\tau})$, u periodu $t+1$ ponudiće $\bar{x}$, što će Igrač1 prihvatiti i ishod je $(\bar{x}, t+1)$. Ako je ϵ dovoljno malo, za Igrača2 je povoljnije da dobije $\bar{x_2} - \epsilon$ u periodu t nego $\bar{x_2}$ u periodu t +1, pa ne može da preti time da će odbiti ponudu x.

Pojam Nešove ravnoteže ne isključuje korišćenje "praznih pretnji" jer procenjuje koliko je strategija poželjna samo na osnovu aspekta sa početka igre. Kako se nižu potezi propisani parom strategija, pravi se putanja kroz drvo. Samo je mali podskup svih čvorova povezan ovom putanjom. Ako je par strategija Nešova ravnoteža, ne ulazimo u optimalnost poteza na nepovezanim čvorovima. Ako se strategije τ i τ' Igrača2 razlikuju samo po potezima koje propisuju na nedostignutim čvorovima kada Igrač1 prati strategiju σ, tada će (σ, τ) i (σ, τ') praviti istu putanju kroz drvo. Stoga je Igraču2 svejedno da li prati strategiju τ ili τ'. Konkretnije, razmotrimo strategiju τ' Igrača2 koja se razlikuje od strategije $\overline{\tau}$ definisane u prethodnom odeljku samo u periodu 0, kada Igrač2 prihvata neke ponude x za koje važi $x_2 < \overline{x_2}$. Kad igrač1 koristi strategiju $\overline{\sigma}$, koja od njega zahteva da Igraču2 ponudi barem $\overline{x}$, strategije $\overline{\tau}$ i τ' generišu istu putanju kroz stablo.

Zeltenov[6] pojam savršene ravnoteže se bavi ovim problemom zahtevajući da strategija igrača bude optimalna počevši od bilo kog čvora u stablu, bez obzira da li će se taj čvor dostići ukoliko se igrači pridržavaju svojih strategija. Pretpostavimo da je Igrač1 u periodu 0 ponudio $x \neq \overline{x}$. Ako se on inače pridržava strategije $\overline{\sigma}$, da li je poželjno da se Igrač2 pridržava $\overline{\tau}$? Odgovor je ne kada je $x_1 = \overline{x_1} + \epsilon$ i $\epsilon > 0$, pa par $(\overline{\sigma}, \overline{\tau})$ nije savršena ravnoteža podigre. Par (σ, τ) za koji to važi na svakom čvoru jeste savršena ravnoteža podigre. Preciznije, podigrama nazivamo igre koje počinju od svakog čvora u pregovoru.

Definicija3: Strateški par je savršena ravnoteža podigre pregovora sa alternativnim ponudama ako u svakoj podigri indukuje Nešovu ravnotežu.

3.6 <u>Glavni zaključak</u>

Sada ćemo pokazati da pojam savršene ravnoteže podigre, za razliku od Nešove, predviđa jedinstven ishod pregovora sa alternativnim ponudama, pri čemu prioriteti igrača zadovoljavaju A1-A6.

Strategije $\overline{\sigma}$ i $\overline{\tau}$ iz prethodnog odeljka zahtevaju od oba igrača da predlože isti dogovor $\overline{x}$ i prihvate ponude samo ukoliko su dobre barem kao $\overline{x}$. Razmotrimo alternativni strateški par $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ za koji Igrač1 uvek predlaže $\hat{x}$, a prihvata ponudu y ako i samo ako je $y_1 \geq \hat{y}_1$, a Igrač2 uvek predlaže $\hat{y}$ i prihvata x ako i samo ako je $x_2 \geq \hat{x}_2$. Pod kojim uslovima za $\hat{x}$ i $\hat{y}$ će $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ biti savršena ravnoteža podigre? U slučaju da Igrač2 odbije ponudu x u periodu 0, on će ponuditi $\hat{y}$ u periodu 1, što će Igrač1 prihvatiti. Kako bi njegovo odbijanje svake ponude x za koju važi $x_2 < \hat{x}_2$ bilo uverljivo, moramo imati $(\hat{y}, 1) \succsim_2 (x, 0)$ kad god je $x_2 < \hat{x}_2$, pa ako je $\hat{x}_2 > 0$, treba nam (na osnovu A4) $(\hat{y}, 1) \succsim_2 (\hat{x}, 0)$. Istovremeno, mora biti $(\hat{x}, 0) \succsim_2 (\hat{y}, 1)$ ili će Igrač2 biti podstaknut da odbije ponudu $\hat{x}$ u periodu 0. Zaključujemo da ako je par $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ savršena ravnoteža podigre, tada je ili $(\hat{x}, 0) \sim_2 (\hat{y}, 1)$, ili $\hat{x} = (1,0)$ i $(\hat{x}, 0) \succsim_2 (\hat{y}, 1)$, ili kraće $v_2(\hat{y}_2, 1) = \hat{x}_2$. Po istoj logici, da bi Igrač1 prihvatio neku ponudu u periodu 1 zaključujemo da mora biti $(\hat{y}, 1) \sim_1 (\hat{x}, 2)$, ili $\hat{y} = (0,1)$ i $(\hat{y}, 1) \succsim_1 (\hat{x}, 2)$. Na osnovu A5 to je ekvivalentno $v_1(\hat{x}_1, 1) = \hat{y}_1$. Ovaj argument pokazuje da ako je $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$ savršena ravnoteža podigre, onda se $(\hat{x}, \hat{y})$ mora poklapati sa jedinstvenim rešenjem (x^*, y^*) sledećih jednačina:

$$y_1^* = v_1(x_1^*, 1) \;\; , \;\; x_2^* = v_2(y_2^*, 1). \qquad (1.1)$$

(Jedinstvenost sledi iz prethodne leme.) Primetimo da ako je $y_1^* > 0$ i $x_2^* > 0$, tada je

$$(y^*, 0) \sim_1 (x^*, 1) \;\; , \;\; (x^*, 0) \sim_2 (y^*, 1). \qquad (1.2)$$

6 Rajnhard Zelten je nemački ekonomista sa kojim je Džon Neš podelio Nobelovu nagradu

Primetimo dalje da ako su prioriteti igrača takvi da za svakog igrača i i svaki ishod (x,t) postoji dogovor y takav da je tom igraču svejedno da li će ishod biti $(y,0)$ ili (x,t), tada će za jedinstveno rešenje (x^*, y^*) iz (1.1) važiti $y_1^*> 0$ i $x_2^*> 0$, pa (x^*, y^*) zadovoljava i (1.2).

Glavni zaključak ovog poglavlja je da svaka igra pregovora sa alternativnim ponudama u kojoj prioriteti igrača zadovoljavaju aksiome A1-A6 ima jedinstvenu savršenu ravnotežu podigre koja ima strukturu $(\hat{\sigma}, \hat{\tau})$.

Teorema3: Svaka igra pregovora sa alternativnim ponudama u kojoj prioriteti igrača zadovoljavaju A1-A6 ima jedinstvenu savršenu ravnotežu podigre (σ^*, τ^*) . Pri ovoj ravnoteži Igrač1 svaki put predlaže dogovor x^* definisan u (1.1), a prihvata ponudu y Igrača2 ako i samo ako je $y_1 \geq y_1^*$. Igrač2 svaki put predlaže y^*, a prihvata samo one ponude x za koje važi $x_2 \geq x_2^*$. Ishod toga je da Igrač1 predloži x^* u periodu 0, a Igrač2 to odmah prihvati.

Formalno, strategija σ^* savršene ravnoteže Igrača1 opisana u ovoj teoremi definisana je ovako:

$$\sigma^{*t}(x^0, \ldots, x^{t-1}) = x^*, \quad \forall (x^0, \ldots, x^{t-1}) \in X^t, \text{ ako je } t \text{ parno i}$$

$$\sigma^{*t}(x^0, \ldots, x^t) = \begin{cases} Y & \text{ako je } x_1^t \geq y_1^* \\ N & \text{ako je } x_1^t < y_1^*, \end{cases} \quad \text{ako je } t \text{ neparno.}$$

Strategija τ^* Igrača2 ima istu strukturu: uloge x^* i y^* su zamenjene, kao i reči “paran” i “neparan”. Takođe, nismo pretpostavili da su strategije stacionarne, dozvolili smo da potezi zavise od celokupne istorije igre.

Dokaz: Najpre, da bismo pokazali da je strateški par (σ^*, τ^*) savršena ravnoteža, moramo pokazati da u svakoj podigri indukuje Nešovu ravnotežu. Posmatrajmo podigru koja počinje ponudom Igrača1 u periodu t^*. Kako se Igrač2 pridržava strategije τ^*, svaka strategija Igrača1 koja predlaže x^* u periodu t^* dovodi do ishoda (x^*, t^*). Svaka druga strategija Igrača1 dovešće do (x,t), gde je $x_1 < x_1^*$, $t \geq t^*$ ili do (y^*, t), gde je $t \geq t^* + 1$ ili do D. Kako je $x_1^* \geq y_1^*$, iz A1, A2 i A3 sledi da je za Igrača1 najbolji od ovih ishoda (x^*, t^*), pa je σ^* najbolji odgovor na τ^*. S druge strane, ako Igrač1 koristi strategiju σ^*, svaka strategija Igrača2 koja prihvata x^* u periodu t^* dovodi do ishoda (x^*, t^*). Svaka druga strategija Igrača2 dovešće do (x^*, t) za $t > t^*$ ili do (y,t), gde je $y_2 \leq y_2^*$, $t \geq t^* + 1$ ili do D. Iz A1,A2 i A3 sledi da je za Igrača2 od ovih ishoda najbolji ili (x^*, t^*) ili $(y^*, t^* + 1)$. Sada, po definiciji imamo da je $x_2^* = v_2(y_2^*, 1)$, pa je (iz A5) $(x^*, 0) \geq_2 (y^*, 1)$, $(x^*, t^*) \geq_2 (y^*, t^* + 1)$. Stoga je τ^* najbolji odgovor Igrača2 na σ^*. Slično bi bilo i da smo podigru započeli ponudom Igrača2 ili odgovorom na ponudu bilo kog igrača.

Sada ćemo dokazati jedinstvenost. Za i=1,2 sve podigre koje počinju ponudom Igrača1 su izomorfne (zbog A5). Neka je G_i jedna takva podigra. Postojanje savršene ravnoteže nam omogućava da definišemo $M_i = \sup\{v_i(x_i, t) : \text{postoji savršena ravnoteža za } G_i \text{ sa ishodom } (x,t)\}$ i neka je m_i odgovarajući infimum. Primetimo da su M_1 i m_1 definisane na podigri koja počinje ponudom Igrača1, a M_2 i m_2 na podigri koja počinje ponudom Igrača2. Pokazaćemo da je

$$M_1 = m_1 = x_1^* \quad \text{i} \quad M_2 = m_2 = y_2^*, \tag{1.3}$$

pa je trenutna vrednost za Igrača1 svake savršene ravnoteže ishod G_1, x_1^*, a trenutna vrednost ishoda G_2 za Igrača2 svake savršene ravnoteže je y_2^*.

Treba dokazati da iz (1.3) sledi da je svaka savršena ravnoteža G_1 (σ^*, τ^*). Najpre tvrdimo da je u svakoj savršenoj ravnoteži prva ponuda prihvaćena. Pretpostavimo suprotno. Neka postoji savršena ravnoteža u kojoj je prva ponuda x Igrača1 odbijena. Nakon toga igrači moraju da prate savršenu ravnotežu G_2. Iz (1.3) trenutna vrednost za Igrača2 je y_2^*, pa trenutna vrednost za Igrača1 nije više od y_1^*. Kako je $v_1(y_1^*,1) \leq y_1^* < x_1^*$, trenutna vrednost savršene ravnoteže za Igrača1 je manja od x_1^*, što je u suprotnosti sa (1.3). Znači, pri svakoj savršenoj ravnoteži G_1 Igrač1 uvek predlaže x^*, što Igrač2 prihvata, a Igrač2 predlaže uvek y^*, što Igrač1 takođe prihvata. Iz (1.1) sledi da Igrač1 odbija svaku ponudu y za koju važi $y_1 < y_1^*$, a prihvata onu za koju važi $y_1 > y_1^*$. Analogno je za Igrača2.

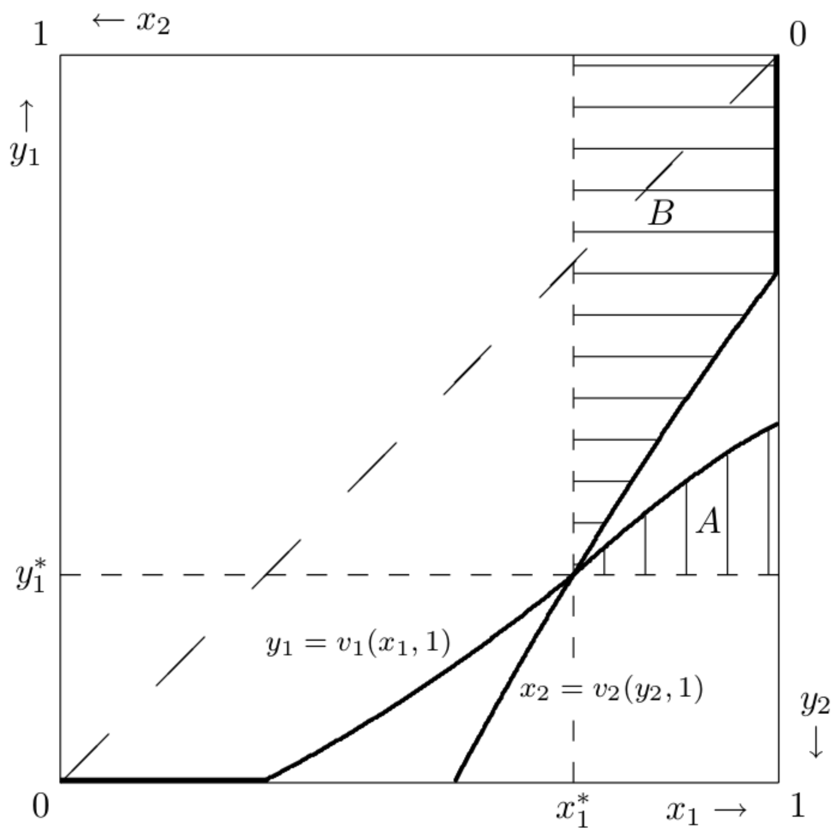
Ostalo je da utvrdimo (1.3) u sledeća dva koraka:

Korak1. $m_2 \geq 1 - v_1(M_1, 1)$.

Dokaz: Pretpostavimo da u prvom periodu G_2 Igrač2 predlaže z, pri čemu je $z_1 > v_1(M_1, 1)$. Ako Igrač1 prihvati tu ponudu, ishod je $(z, 0)$. Ako je odbije, ishod će imati trenutnu vrednost najviše $v_1(M_1, 1)$. Stoga će Igrač1 uvek prihvatiti ponudu z, pa je $m_2 \geq 1 - v_1(M_1, 1)$.

Korak2. $M_1 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$.

Dokaz: Ako u prvom periodu G_1 Igrač2 odbije ponudu Igrača1, može da zadrži barem m_2 odloženo za jedan period. Stoga će u svakoj savršenoj ravnoteži Igrač2 odbiti svaku ponudu x za koju je $x_2 < v_2(m_2, 1)$. Najviše što Igrač1 može dobiti, ako se dogovor postigne u prvom periodu je $1 - v_2(m_2, 1)$. Kako ishod u svakoj savršenoj ravnoteži u kojoj je dogovor odložen ima trenutnu vrednost za Igrača1 najviše $v_1(1-m_2, 1) \leq 1 - m_2 \leq 1 - v_2(m_2, 1)$, sledi zaključak.



Slika6. Iz Koraka1 i činjenice da je $m_2 \leq y_2^*$ sledi da par $(M_1, 1-m_2)$ leži u oblasti A. Slično, na osnovu Koraka2 i činjenice $M_1 \geq x_1^*$ zaključujemo da taj par leži i u oblasti B.

Korak1 obezbeđuje da par $(M_1, 1-m_2)$ leži ispod krive $y_1 = v_1(x_1, 1)$. Slično, iz Koraka2 imamo da taj par leži levo od krive $x_2=v_2(y_2, 1)$. Kako smo pokazali da je (σ^*, τ^*) savršena ravnoteža G_1, znamo da je $M_1 \geq x_1^*$. Slično postoji savršena ravnoteža za G_2, čiji je ishod $(y^*, 0)$, pa je $m_2 \leq y_2^*$ i $1-m_2 \geq y_1^*$. Uz ove činjenice i pomoću slike5. možemo zaključiti $M_1=x_1^*$, $m_2=y_2^*$. Analogno se može pokazati da je $m_1=x_1^*$, $M_2=y_2^*$, čime je dokaz završen. □

Primetimo da se ovaj dokaz ne oslanja na pretpostavku A6, tako da se umesto nje može iskoristiti i bilo koji uslov koji garantuje jedinstvenost (1.1).

3.7 Primeri

Već smo spomenuli funkciju korisnosti U_i definisanu sa $U_i(x_i, t)=\delta_i^t x_i$ za svaki par $(x, t) \in X \times T$ i $U_i(D)=0$, gde je 0< δ_i <1. Prioriteti koji su predstavljeni ovom funkcijom zadovoljavaju A1-A6. δ_i se odnosi na diskontni faktor Igrača *i*. Dakle, ovo je model pregovora u kojem je vreme igračima dragoceno pa se vrednost dobitka u svakom periodu umanjuje proporcionalno (to će biti geometrijska progresija). Imamo da je $v_i(x_i, t)=\delta_i^t x_i$. Koeficijent δ_i zavisi od strpljenja igrača *i*. Iako dobitak vremenom teži nuli, njegova vrednost će uvek biti pozitivna pa igra može trajati neograničeno. Tada je na osnovu (1.1) $y_1^*=\delta_1 x_1^*$ i $x_2^*=\delta_2 y_2^*$ pa je

$$x^*=\left(\frac{1-\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{\delta_2(1-\delta_1)}{1-\delta_1\delta_2}\right) \text{ i } y^*=\left(\frac{\delta_1(1-\delta_2)}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1-\delta_1}{1-\delta_1\delta_2}\right).$$

Ako je $\delta_1=\delta_2=\delta$, tada je $x^*=(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$.

Primetimo da kako se δ_1 približava 1, dogovor x^* se približava (1,0): što je Igrač1 strpljiviji, njegov udeo se povećava i u jednom trenutku će osvojiti ceo plen. Slično, ako Igrač2 postaje strpljiviji, udeo Igrača1 teži nuli. Pretpostavka A3 isključuje slučajeve kada su δ_1 ili δ_2 jednaki jedinici. Ipak, ako je samo jedno δ_i jednako jedinici, i dalje važi dokaz da postoji jedinstveni vektor isplate savršene ravnoteže, ali u ovom slučaju postoji mnoštvo savršenih ravnoteža podigre. Na primer, ako je $\delta_1=1$, a $\delta_2<1$, tada je jedinstveni vektor isplate savršene ravnoteže (1,0), ali pored savršene ravnoteže opisane u prethodnoj teoremi postoji još jedna u kojoj Igrač2 odbija ponudu (1,0) u periodu 0 i predlaže (1,0) u periodu 1, što Igrač1 prihvata.

Razmotrićemo već pomenuti primer podele novca kroz ovaj model. Igrači 1 i 2 treba da podele među sobom iznos od 1000 dinara, ali ta vrednost svakim periodom proporcionalno opada. Za Igrača 1 ova suma će posle perioda *t* vredeti $\delta_1^{t-1} \cdot 1000$, a za Igrača 2 $\delta_2^{t-1} \cdot 1000$, pri čemu su δ_1 i δ_2 redom njihovi diskontni faktori. Ako je $\delta_1 > \delta_2$ znači da je Igrač 2 manje strpljiv. Intuitivno očekujemo da će s tim u vezi i njegov dobitak biti manji.

Najpre pretpostavimo da je $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Ako igrač 1 u periodu *t* može osvojiti najviše *X* nakon što odbije ponudu Igrača 2, onda on u tom periodu treba da prihvati svaku ponudu kojom dobija barem δX. To je zato što će X u periodu *t* +1 vredeti $\delta^t X$, a δX u periodu *t* vredi $\delta^{t-1}\delta X=\delta^t X$. Dakle, Igrač 1 ne može da preti time da će odbiti ponudu δX u periodu *t.* Imajući ovo u vidu, ako u *t* =2 Igrač 1 može osvojiti najviše *X*, on treba Igraču 2 da ponudi $1000-X$. Umanjena vrednost od X u ovom periodu je δX, tako da Igrač 2 može u periodu t =1 da ponudi dogovor $(\delta X, 1000-\delta X)$. U *t* =0 Igrač 1 mora ponuditi barem

$$(1000-(\delta-\delta^2 X), \delta(1000-\delta X)).$$

Maksimum dobitka Igrača 1 mora biti isti i za podigru koja počinje u periodu 0 i za podigru koja počinje u periodu 2. Možemo zaključiti da je $X=1000-(\delta-\delta^2 X)$, pa je rešenje

$$X=\frac{1000-\delta}{1-\delta^2}.$$

Ovo je ujedno i minimum koji Igrač 1 može dobiti (što možemo zaključiti na isti način ako pretpostavimo da je X u nekom periodu minimum koji Igrač 1 može osvojiti). Dakle, jedinstveni ishod igre je $\left(\frac{1000-\delta}{1-\delta^2}, \frac{\delta-1000\,\delta^2}{1-\delta^2}\right)$.

Ako vrednosti δ_1 i δ_2 nisu jednake , analogno prethodnom, vrednost od X u periodu t =3 umanjena u odnosu na period t =2 iznosi $\delta_1 X$. U periodu t =1 Igrač 2 može ponuditi dogovor $(\delta_1 X, 1000-\delta_1 X)$. U t =0 Igrač 1 mora da ponudi barem

$$(1000-\delta_2(1000-\delta_1 X), \delta_2(1000-\delta_1 X)).$$

Ravnotežni ishod je

$$\left(\frac{1000-1000\,\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}, \frac{1000\,\delta_2-1000\,\delta_1\delta_2}{1-\delta_1\delta_2}\right).$$

Konstantni troškovi odlaganja

Funkcija korisnosti definisana sa $U_i(x_i, t)=x_i-c_i t$ i $U_i(D)=-\infty$, gde je $c_i>0$, predstavlja prioritete igrača *i* koji zadovoljavaju A1-A5, ali ne i A6. Tada je $v_i(x_i, t)=x_i-c_i t$, ako je $x_i \geq c_i t$, odnosno $v_i(x_i, t)=0$ u suprotnom. Stoga, ako je $x_i \geq c_i$, važi $v_i(x_i, 1)=x_i-c_i$, tako da je $x_i-v_i(x_i, 1)=c_i$, što je konstantno, a ne rastuće po x_i. c_i su troškovi pregovora (ili troškovi odlaganja) za igrača *i*. Iako ovi prioriteti ne zadovoljavaju A6, za $c_1 \neq c_2$ postoji jedinstveni par (x^*, y^*) koji zadovoljava (1.1): za $c_1 < c_2$ važi $x^*=(1{,}0)$, $y^*=(1-c_1, c_1)$, a ako je $c_1 > c_2$ važi $x^*=(c_2, 1-c_2)$, $y^*=(0{,}1)$. Stoga po prethodnoj teoremi i dalje važi da postoji jedinstvena savršena ravnoteža podigre u kojoj igrači odmah postignu dogovor $x^*=(1{,}0)$ ako je $c_1 < c_2$ ili $x^*=(c_2, 1-c_2)$ ako je $c_1 > c_2$. Dakle, Rubinštajn je pokazao da u ovom modelu ravnotežna isplata zavisi od troškova pregovora i redosleda igrača (prvi igrač je u prednosti). Kada su im troškovi kašnjenja jednaki i manji od 1, ne postoji jedinstveno rešenje za (1.1).

Pokažimo ovo na prethodnom primeru. Ako Igrač 2 odbije početnu ponudu Igrača 1 ukupna suma će mu nakon toga vredeti $1000-c_2$. Ako zatim i Igrač 1 odbije ponudu Igrača 2, vrednost će pasti na $1000-2c_2$. Kako se pregovori nastavljaju, vrednost početne sume opada u svakom periodu. Isto će se desiti I Igraču 1, s tim što je njegov trošak u svakom periodu c_1. Ishod pregovora za Igrača 1 biće α od 1000, a za Igrača 2 β od 1000, pri čemu je $\alpha+\beta=1$. Troškovi pregovora Igrača 2 ukazuju na to da ako bi on prihvatio ponudu $\beta \cdot 1000$ u periodu *t*, dobitak bi mu vredeo $\beta \cdot 1000-t\,c_2$. Slično tome, Igraču 1 bi ponuda $\alpha \cdot 1000$ u periodu t vredela samo $\alpha \cdot 1000-t\,c_1$.

Rubinštajn je pokazao da α i β zavise od toga koji je igrač prvi na potezu i da li je $c_1>c_2, c_1=c_2$ ili $c_1<c_2$. Pretpostavimo da Igrač 2 u periodu t Igraču 1 nudi dobitak jednak s_{1t}. Igrač 1 treba da prihvati ovu ponudu ukoliko bi u nastavku igre mogao da dobije samo manji iznos. Ako bi pokušao da preti da će odbiti ovu ponudu, to bi bila prazna pretnja. Neka je, na primer, $s_{1t}=450$ dinara, $c_1=100$ dinara i ako odbije ovu ponudu Igrač 1 bi u nastavku pregovora mogao da se nada isplati ne većoj od 500 dinara. Ako Igrač 1 odbije ponudu i osvoji 500 dinara u narednom periodu, to će mu vredeti 500-(t +1)100= 400-100 t. Ako, ipak, prihvati ponudu, dobiće 450-100 t > 400-100 t. Zapravo, Igrač 1 će pristati na svaku ponudu s_{1t} za koju važi $s_{1t}>500-(t+1)\cdot 100+100t=500-100=400$. Uopšteno, ako je maksimum koji Igrač 1 može dobiti nakon što odbije ponudu Igrača 2 u periodu t Z, što će mu vredeti najviše $Z-(t+1)c_1$, on treba da prihvati svaku ponudu s_{1t} za koju važi $s_{1t}-t\,c_1>Z-(t+1)c_1$ ili $s_{1t}>Z-c_1$. Razmotrimo sada pomenute tri mogućnosti:

1) $c_1 > c_2$
Savršena ravnoteža podigre je da Igrač 1 u t =0 predlaže dogovor $(c_2, 1000-c_2)$, što Igrač 2 prihvata.
Troškovi pregovora za Igrača 1 su veći, ali on ima prednost prvog na potezu. Ako u periodu t =1 Igrač 2 predloži Igraču 1 0, maksimum koji on u tom trenutku može osvojiti, nakon što je u periodu 0 odbio ponudu Igrača 1, je svih 1000 dinara. Znajući to, Igrač 1 će u periodu 0 predložiti $(c_2, 1000-c_2)$, jer zna da će dobitak za Igrača 2 u narednom periodu biti manji. Dakle, iako ima veće troškove pregovora, Igrač 1 može da zagarantuje sebi isplatu c_2 zato što je prvi na potezu.
2) $c_1 < c_2$
Savršena ravnoteža podigre ove igre podrazumeva da će Igrač 1 u t =0 ponuditi dogovor (1000,0) i da će Igrač 2 to prihvatiti.
Igrač 1 je u apsolutnoj prednosti u ovoj igri tako da će mu pripasti ceo plen. Odlaganje ne bi promenilo situaciju, osim što bi umanjilo zaradu oba igrača, a Igrač 2 bi svakako izgubio više.
3) $c_1 = c_2 = c$
U ovom slučaju ne postoji jedinstvena savršena ravnoteža podigre, ali Igrač 1 sebi može zagarantovati najmanje c (zbog prednosti prvog na potezu). Ako bi Igrač 2 u periodu t ponudio Igraču 1 x, Igrač 1 u prethodnom periodu (t -1) može da zahteva $x+c$. Ali, u t -2 je x ponovo pristojna ponuda Igrača 2 i kako je x proizvoljno (vrednosti se razlikuju u zavisnosti od perioda), ne postoji jedinstveno rešenje. Osim toga, ako su troškovi pregovora za igrače jednaki, igrači ne moraju da dođu do dogovora odmah u t =1, već može biti i u t =2.

3.8 Važne karakteristike savršene ravnoteže podigre

Odlaganje

Struktura pregovaračke igre sa naizmeničnim ponudama omogućava da pregovori traju neograničeno. Ipak, kod jedinstvene savršene ravnoteže odmah se završavaju. Sa ekonomske tačke gledišta pregovarački proces je efikasan (ne gube se sredstva prilikom kašnjenja). Kojim karakteristikama to možemo pripisati? Videli smo da je kod Nešove ravnoteže kašnjenje moguće, ali efikasnost ima veze i sa bitnim pretpostavkama koje smo postavili.

Primetimo da se dokaz da će se dogovor postići odmah ako igra ima jedinstveni vektor isplate savršene ravnoteže zasniva samo na pretpostavkama A1, A2 i A3. Drugim rečima, ako prioriteti igrača zadovoljavaju ove tri pretpostavke i postoji jedinstvena savršena ravnoteža podigre, odlaganja neće biti. Dakle, odlaganje je u bliskoj vezi sa postojanjem višestrukih ravnoteža.

Pretpostavimo da su moguće samo tri podele plena: $X=\{a, b, c\}$. Neka je $a_1 > b_1 > c_1$ i prioriteti igrača zadovoljavaju A1, A2, A3 i A5. Pretpostavimo dalje da, ako igrač želi (x, t) više nego (y, t), tada će takođe više želeti $(x, t+1)$ nego (y, t) (dakle $(a, 1) \succ_1 (b, 0)$, $(b, 1) \succ_1 (c, 0)$, $(b, 1) \succ_2 (a, 0)$ i $(c, 1) \succ_2 (b, 0)$). Tada je za svako $x \in X$ par strategija pri čemu svaki igrač uvek insistira na $\bar{x}$ (na primer, Igrač i uvek predlaže $\bar{x}$ i prihvata ponudu x ako i samo ako je $x_i \geq \bar{x}_i$) savršena ravnoteža podigre.

Konstruišimo savršenu ravnotežu podigre u kojoj se dogovor postiže u periodu 1. U periodu 0 Igrač1 predloži a. Igrač2 odbije ponudu a ili b i prihvati c. Ako Igrač1 predloži a u periodu 0 i to bude odbijeno, od perioda 1 igraće po strateškom paru savršene ravnoteže pri čemu svaki igrač insistira na b (kao što je gore opisano). Ako Igrač1 ponudi b ili c u periodu 0 i to bude odbijeno, tada će se od perioda 1 igrati po strateškom paru savršene ravnoteže pri čemu svaki igrač insistira na c.

Ishod ove strategije je da Igrač1 ponudi a u periodu 0, a Igrač2 to odbije i predloži b u periodu 1, što Igrač1 prihvata. Ako bi Igrač1 ponudio b pre nego a, ishod bi bio (c ,1), što je za njega lošije od

(b ,1). Ako ponudi c ishod je (c ,0), što je opet lošije od (b ,1). Dakle, ovo je savršena ravnoteža.

Poslednja stavka koja doprinosi da se dogovor postigne bez odlaganja je pretpostavka da je svaki igrač potpuno informisan o željama njegovog protivnika. Intuicija nalaže da se u suprotnom pregovori mogu odužiti jer igrač može da predloži nešto što bi jedan protivnik prihvatio a neki drugi ne bi.

Strpljenje

Ishod pregovora zavisi od prirode prioriteta igrača. Karakteristika koju možemo istaći je stepen strpljenja. Neka je $\succcurlyeq_1'$ relacija koja označava manje strpljenja od $\succcurlyeq_1$ ako je $v_1'(x_1,1)\le v_1(x_1,1)$ za sve $x\in X$ i $v_1'(x_1,1)< v_1(x_1,1)$ za neke $x\in X$. Vrednost x_1^* koja je rešenje (1.1) za $\succcurlyeq_1'$ ne može biti veća od vrednosti koja je rešenje za $\succcurlyeq_1$. Dakle, ovaj model predviđa da što je igrač manje strpljiv, njegov dobitak je manji.

Simetrija

Struktura pregovaračke igre sa alternativnim ponudama je asimetrična u jednom pogledu: jedan od pregovarača prvi iznosi ponudu. Ako igrač koji započinje pregovore ima prioritetizaciju $\succcurlyeq_2$, a igrač koji prvi odgovara na ponudu $\succcurlyeq_1$, teorema3 implicira da će pri jedinoj savršenoj ravnoteži igrači postići dogovor y^* (videti (1.1)) u periodu 0. Kako je $x_1^*> y_1^*$, igrač koji prvi daje ponudu je u prednosti. Ako igrači imaju isti stav prema vremenu možemo biti i konkretniji. Tada je $v_1=v_2$, pa za (1.1) imamo $x_1^*=y_2^*=1-y_1^*$. Kako je $x_1^*> y_1^*$, imamo da je $x_1^*> 1/2$, a $y_1^*< 1/2$. Dakle, onaj koji je prvi na potezu dobija više od polovine plena. U igri u kojoj jedan igrač daje sve ponude postoji jedinstvena savršena ravnoteža pri kojoj taj igrač zadržava čitav plen.

Asimetrija u strukturi pregovaračke igre sa alternativnim ponudama je veštačka. Jedan od načina da se ublaži njeno dejstvo je da se smanji količina vremena koja protekne između dva perioda. Ako je igračima vreme prioritet i imaju konstantnu diskontnu stopu, možemo, kao u ovom slučaju, simulirati efekat skraćenja perioda razmatrajući sekvence igre indeksirane sa Δ, gde je $\delta_i^{\Delta t} x_i$ korisnost igrača i nakon dogovora x i t perioda kašnjenja. Neka je $x^*(\Delta)$ dogovor postignut (u periodu 0) pri jedinstvenoj savršenoj ravnoteži u igri indeksiranoj sa Δ, u kojoj Igrač1 prvi iznosi ponudu. Neka je $y^*(\Delta)$ dogovor postignut u istoj igri kada Igrač2 prvi iznosi ponudu. Iz proračuna sa početka odeljka sledi da je $x_1^*(\Delta)=(1-\delta_2^{\Delta})/(1-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta})$ i $y_2^*(\Delta)=(1-\delta_1^{\Delta})/(1-\delta_1^{\Delta}\delta_2^{\Delta})$. Pomoću Lopitalovog pravila nalazimo da je $\lim_{\Delta\to 0} x^*(\Delta)=\lim_{\Delta\to 0} y^*(\Delta)=(\frac{\log\delta_2}{\log\delta_1+\log\delta_2},\frac{\log\delta_1}{\log\delta_1+\log\delta_2})$.

Dakle, kako period teži 0, dobitak igrača je isti, bez obzira koji igrač prvi iznosi ponudu.

Umesto da skraćujemo period, možemo modifikovati igru tako da njena struktura bude simetrična. Jedan način da se to uradi je da razmotrimo igru u kojoj se na početku svakog perioda bira igrač koji će prvi izneti ponudu sa verovatnoćom ½. Uz pretpostavke fon Nojmana i Morgenšterna možemo pokazati da ova igra ima jedinstvenu savršenu ravnotežu. Pri toj ravnoteži Igrač1 uvek predlaže $\tilde{x}$, a Igrač2 $\tilde{y}$, gde je $(\tilde{x},\tilde{y})$ takvo da je Igraču1 svejedno kada bira između ishoda $(\tilde{y},0)$ i lutrije koja dovodi do $(\tilde{x},1)$ ili $(\tilde{y},1)$ sa istom verovatnoćom, a Igraču2 svejedno kada bira između ishoda $(\tilde{x},0)$ i iste lutrije.

Stacionarnost prioriteta

Teorema3 važi i ako oslabimo pretpostavku A5 i zahtevamo samo da prioritet Igrača1 između ishoda (x, t) i (y, t+1) kada je t neparno, ne zavisi od t, a prioritet Igrača2 između (x, t) i (y, t+1) ne zavisi od t ako je ono parno. Razlog je taj što smo uz A1, A2 i A3 u vezi sa prioritetima koristili samo pretpostavku koja se ticala toga da li će igrač prihvatiti ili odbiti ponudu i na taj način odvesti igru u jednu od podigara koje počinju u sledećem periodu. Zato je Igraču1 svejedno da li će doći do ishoda (x, t) ili (y, t+1) kada je t parno, a Igraču2 kada je t neparno. Sve dok prioriteti zadovoljavaju A1, A2 i A3 postoji jedinstvena savršena ravnoteža podigre koja se karakteriše odgovarajućom modifikacijom (1.1):

$$v_1(y_1^*, 1) = v_1(x_1^*, 2) \quad \text{i} \quad x_2^* = v_2(y_2^*, 1).$$

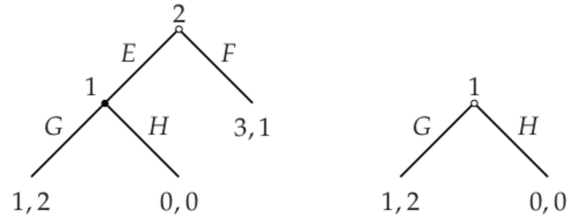
Da bismo ovo predstavili, razmotrimo slučaj u kome svaki period odgovara nekom intervalu u realnom vremenu. Pretpostavimo da su prioriteti igrača i nad parom (x, θ), gde je x dogovor, a θ realno vreme za koje je taj dogovor postignut, predstavljeni funkcijom korisnosti $\delta^{\theta} x_i$. Neka je vreme potrebno igraču i da iznese novu ponudu nakon što odbije prethodnu Δ_i. Tada je jedinstvena savršena ravnoteža ove igre ista kao i za igru u kojoj je svaki period dužine 1 gde igrači imaju konstantne diskontne faktore δ^{Δ_i}. Što brže igrač i iznese kontraponudu, nakon što odbije ponudu igrača j, δ^{Δ_i} je veće. Iz toga sledi da će x_1^* biti veće, a y_1^* manje. Dakle, ako Δ_1 teži nuli, dobitak Igrača1 teži celom plenu ($x^* = y^* = (1,0)$).

3.9 Konačni naspram beskonačnih horizonata

Naš izbor beskonačnih horizonata za igru pregovora pokreće važna pitanja. Na prvi pogled pretpostavka o beskonačnom horizontu nije realistična jer je svačiji život konačan. Umesto toga možemo konstruisati model čiji je horizont ili neki fiksiran konačan broj ili slučajna promenljiva.

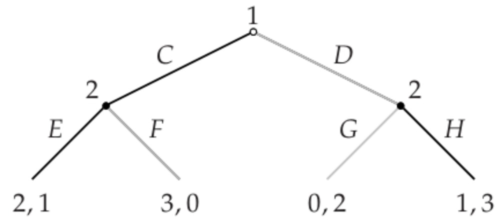
Igra pregovora sa naizmeničnim ponudama sa konačnim horizontom ima jedinstvenu savršenu ravnotežu podigre (pod pretpostavkama koje smo postavili za prioritete), koja se može izračunati indukcijom unazad. S povećanjem horizonta, dogovor postignut pri ovoj ravnoteži konvergira ka dogovoru postignutom pri jedinstvenoj savršenoj ravnoteži modela sa beskonačnim horizontom. Dakle, model sa beskonačnim horizontom će predvideti ishod veoma sličan onom koji predviđa model sa veoma širokim horizontom. Ipak, razlike između ova dva modela nisu beznačajne. U modelu sa beskonačnim horizontom igrači smatraju da posle svakog odbijanja ponude postoji prostor za kontraponudu. Takva percepcija ignoriše činjenicu da smrt jednog od igrača ili kraj sveta može sprečiti neku kontraponudu. U modelu sa konačnim horizontom, igrači su svesni da postoji završna faza igre i u potpunosti je uzimaju u obzir prilikom formulisanja svojih strategija. Dakle, značajna razlika između ova dva modela nije u realnom postojanju horizonata, već u strateškom rezonovanju igrača.

Definišimo da dužina podigre bude jednaka najdužoj istoriji poteza. Na primer u igrama prikazanim na sledećoj slici (slika7) dužine su redom 2 i 1. Opisaćemo indukciju unazad. Pronaći ćemo najpre optimalne poteze igrača koji je prvi na potezu u poslednjoj podigri (dužine 1). Zatim ćemo, uzevši te poteze kao date, pronaći optimalne poteze igrača koji je prvi na potezu u prethodnoj podigri (dužine 2). Nastavićemo po istom principu dok se ne vratimo na početak igre. Lako je odrediti optimalne poteze igrača na početku podigre dužine k: to su potezi koji igraču garantuju najveću isplatu.



Slika7.

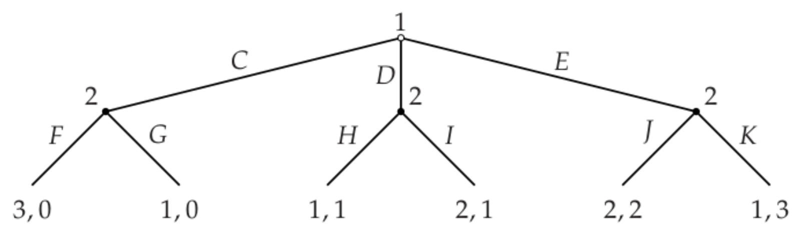
Razmotrimo igru na slici8. Ova igra ima dve podigre dužine 1 u kojima je na potezu Igrač 2. U podigri sa istorijom poteza *C*, optimalni potez za Igrača 2 je *E*, dok je u podigri nakon istorije *D* njegov optimalni potez *H*.



Slika8.

Razmotrimo sada podigre dužine 2. Ova igra ima jednu takvu podigru koja je zapravo cela igra. Započinje je Igrač 1. Kako su nam zadati optimalni potezi u podigrama dužine 1, izborom *C* na početku igre Igrač 1 sebi garantuje isplatu 2, a izborom *D* 1. Zaključujemo da je njegov optimalni potez na početku igre odabir *C*. Ova igra nema podigre veće dužine od 2 pa nas je indukcija unazad dovela do strateškog para (*C*, *EH*). Dakle, ovaj par je jedinstvena savršena ravnoteža podigre.

Šta će se desiti ako na početku neke podigre postoji više optimalnih poteza? Nastavak indukcije unazad bi doveo do svih savršenih ravnoteža igre jer bi razmotrio sve kombinacije optimalnih poteza u podigrama. Posmatrajmo igru na sledećoj slici:



Slika9.

Ova igra ima tri podigre dužine 1 i u svakoj od njih na potezu je Igrač 2. U podigrama nakon istorija poteza *C* i *D* Igraču 2 su oba moguća poteza podjednako povoljna. U podigri nakon istorije poteza *E* jedinstveni optimalan potez za Igrača 2 je *K*. Dakle, sve četiri kombinacije poteza (*FHK*, *FIK*, *GHK* i *GIK*) su optimalne za Igrača 2 u podigrama dužine 1 (prva komponenta označava potez Igrača 2 nakon istorije *C*, druga nakon istorije *D*, a treća nakon istorije *E*).

Ova igra ima jedinstvenu podigru dužine 2 koja je i cela ta igra. Igrač 1 je prvi na potezu. Razmatramo njegov optimalni potez za svaku kombinaciju optimalnih poteza Igrača 2 u podigrama dužine 1.

- Za kombinacije optimalnih poteza *GHK* i *FIK* Igrača 2, optimalni potez za Igrača 1 na početku igre je *C*.
- Za kombinaciju optimalnih poteza *GHK* Igrača 2, potezi *C*, *D* i *E* su optimalni za Igrača 1
- Za kombinaciju optimalnih poteza *GIK* Igrača 2, optimalni potez za Igrača 1 na početku igre je *D*

Dakle, došli smo do strateških parova (*C*, *FHK*), (*C*, *FIK*), (*C*, *GHK*), (*D*, *GHK*), (*E*, *GHK*) i (*D*, *GIK*). Opišimo ovu proceduru algoritmom:

- Za svaku podigru dužine 1 naći skup optimalnih poteza igrača koji je prvi na potezu.

Indeksirati podigre sa *j* i označiti skup optimalnih poteza za podigru *j* sa $S_j^*(1)$.

- Za svaku kombinaciju poteza (od kojih je po jedan iz svakog skupa $S_j^*(1)$) u svakoj podigri dužine 2 naći skup optimalnih poteza igrača koji je prvi na potezu. Rezultat je skup strategija za svaku podigru dužine 2. Označiti sa $S_l^*(2)$ skup strategija podigre *l*.

- Nastaviti ispitujući redom duže podigre dok se ne dođe do početka igre. Na svakom stupnju *k,* za svaku kombinaciju strategija gde je po jedna iz svakog skupa $S_p^*(k-1)$, naći, za svaku podigru dužine *k,* skup optimalnih poteza igrača koji je prvi na potezu (a time i skup strategija).

Primenimo ovaj algoritam na prethodni primer. Nabrojmo podigre dužine 1 s leva na desno: $S_1^*(1)=\{F,G\}$, $S_2^*(1)=\{H,I\}$ i $S_3^*(1)=\{K\}$. Postoji četiri niza poteza tako da je jedan potez iz svakog skupa: *FHK*, *FIK*, *GHK* i *GIK*. Za *FHK* i *FIK* potez *C* Igrača 1 je optimalan na početku igre, za *GHK* su optimalni *C*, *D* i *E*, a za *GIK* potez *D*. Stoga se skup strategija $S^*(2)$ sastoji iz (*C*, *FHK*), (*C*, *FIK*), (*C*, *GHK*), (*D*, *GHK*), (*E*, *GHK*) i (*D*, *GIK*). Ne postoje duže podigre pa je ovo savršena ravnoteža podigre ove igre.

Primeri u ovom odeljku su konačne igre, što znači da imaju konačni broj prethodnih poteza. Igrač koji je prvi na potezu u svakoj podigri ima konačno mnogo mogućih poteza i bar je jedan optimalan. Zato će indukcija unazad uvek izdvojiti bar jedno rešenje koje će biti savršena ravnoteža podigre.

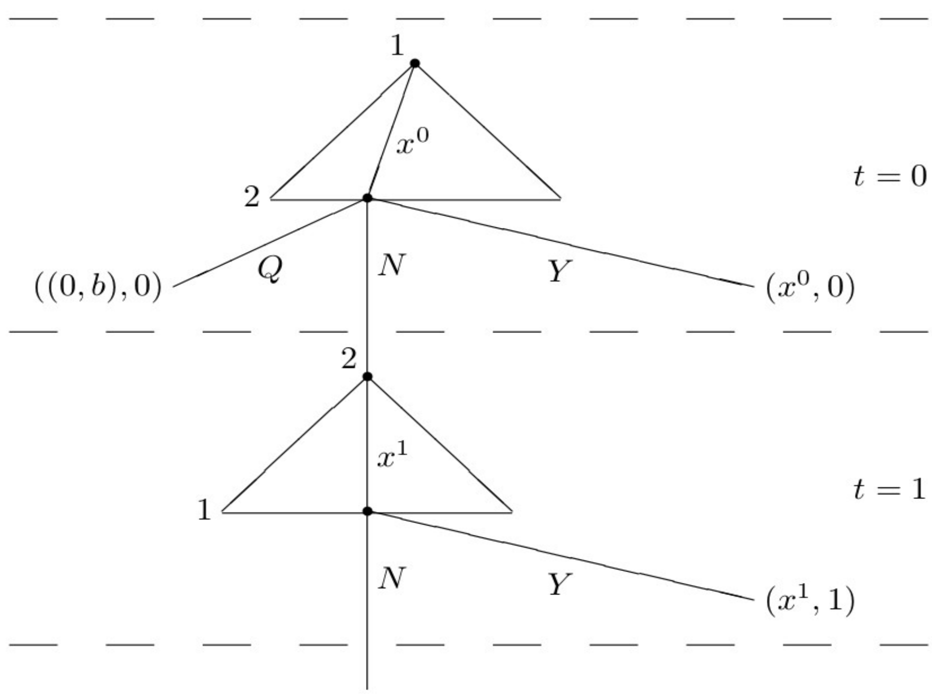
3.10. Modeli u kojima igrači imaju i drugih (spoljnih) opcija

Ovde ćemo analizirati dve modifikacije strukture pregovaračke igre sa naizmeničnim ponudama u kojima jedan od igrača ima opciju da napusti svog aktuelnog partnera i u tom slučaju igra se završava. Obratićemo pažnju na slučaj kada je igračima vreme prioritet sa istim konstantnim diskontnim faktorom $\delta < 1$. Razmotrimo dve igre u kojima Igrač2 ima opciju da završi pregovore (i dobije isplatu *b*). Ako može da prekine igru samo nakon što odbije ponudu, igra ima jedinstvenu savršenu ravnotežu. Ako može da prekine igru samo nakon što Igrač1 odbije njegovu ponudu ili nakon bilo kog odbijanja, tada za neke vrednosti drugih (spoljnih) opcija, igra ima više savršenih ravnoteža. U oba slučaja ako je *b* malo u odnosu na isplatu Igraču2 u jedinstvenoj savršenoj ravnoteži pri čemu nema drugih opcija, onda ova spoljna opcija nema uticaja na ishod igre. Dakle, on ne može da dobije više na drugoj strani. Ako je *b* veliko, tada u prvom modelu postoji jedinstvena savršena ravnoteža podigre u kojoj se igračima isplaćuje (1-*b*, *b*), a u drugom postoji opseg isplata (savršenih ravnoteža).

1. *Model u kojem Igrač2 može istupiti samo prilikom odgovaranja na ponudu*

Proučavamo model pregovora sa naizmeničnim ponudama u kojem Igrač2, i to samo Igrač2, može unilateralno da prekine pregovore. Ako se to desi u periodu *t*, igračima se isplaćuje $(0,\delta^t b)$, pri čemu je $b<1$. Ako je $b>0$, Igrač2 je u prednosti u osnosu na Igrača1. On ima alternativu, dok Igrač1 nema drugog izbora sem da nastavlja pregovore.

Kada Igrač2 može da istupi? Ispostavilo se da je ovo pitanje od važnosti. U ovom odeljku pretpostavićemo da Igrač2 može istupiti samo prilikom odgovaranja na ponudu Igrača1. S tim u vezi, struktura pregovora je sledeća. Najpre Igrač1 predloži podelu plena *x*. Igrač2 može da prihvati ovaj predlog, da ga odbaci i istupi ili da ga odbaci i nastavi pregovore. U prva dva slučaja pregovori se završavaju. U prvom slučaju vektor isplate je *x*, a u drugom (0, *b*). Ako Igrač2 odbije ponudu i nastavi pregovore, igra prelazi u sledeći period, kada je red na Igrača2 da da ponudu koju Igrač1 može da prihvati ili odbaci. U slučaju odbijanja prođe još jedan period i opet će biti red na Igrača1 da iznese novu ponudu. Prva dva perioda prikazana su na sledećoj slici.



Slika10. Grana označena sa x^0 predstavlja "tipičnu" ponudu Igrača1 u periodu 0. Slično tome, grana označena sa x^1 je "tipična" ponuda Igrača2 u periodu 1. U periodu 0 Igrač2 može da odbije ponudu i istupi (Q), odbije ponudu i nastavi pregovore (N) ili prihvati ponudu (Y).

Propozicija1. *Razmotrimo gore opisanu igru pregovora, u kojoj Igrač2 može istupiti samo prilikom odgovaranja na ponudu (kao na slici 6). Pretpostavimo da je igračima vreme prioritet sa istim konstantnim diskontnim faktorom* $\delta < 1$ *i njihove isplate, u slučaju da Igrač2 istupi u periodu t, su* $(0, \delta^t b)$, *gde je b* <1.

1. *Ako je* $b < \delta/(1+\delta)$, *igra ima jedinstvenu savršenu ravnotežu koja se poklapa sa savršenom ravnotežom igre u kojoj Igrač2 nema drugih (spoljnih) opcija. To znači da će Igrač1 uvek predlagati dogovor* $(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$ *i prihvatati svaki predlog y za koji je* $y_1 \geq \delta/(1+\delta)$, *a Igrač2 će uvek predlagati dogovor* $(\delta/(1+\delta), 1/(1+\delta))$, *prihvatati svaki predlog x za koji je* $x_2 \geq \delta/(1+\delta)$ *i nikada neće istupiti. Ishod je da će dogovor* $(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$ *biti postignut odmah.*
2. *Ako je* $b > \delta/(1+\delta)$, *igra će imati jedinstvenu savršenu ravnotežu pri čemu Igrač1 uvek predlaže* (1-*b*, *b*), *a prihvata svaku ponudu y za koju je* $y_1 \geq \delta(1-b)$, *a Igrač2 uvek predlaže* $(\delta(1-b), 1-\delta(1-b))$, *prihvata svaki predlog x za koje je* $x_2 \geq b$ *i istupa iz pregovora ako je* $x_2 < b$. Ishod je da će se odmah dogovoriti oko podele (1-*b*, *b*).
3. *Ako je* $b = \delta/(1+\delta)$, tada se pri svakoj savršenoj ravnoteži podigre ishod (1-*b*, *b*) *postiže odmah.*

Dokaz. Najpre primetimo da ako je $\delta/(1+\delta) \geq b$ tada je savršena ravnoteža podigre (SRP) pregovaračke igre sa naizmeničnim ponudama data prethodnom teoremom savršena ravnoteža ove igre.

Ako je $\delta/(1+\delta) \leq b$, jednostavno je dokazati da je SRP par strategija iz dela 2 propozicije. Na primer, da bismo proverili da li je za Igrača2 optimalno da istupi prilikom odgovaranja na ponudu *x* za koju je $x_2 < b$ u periodu *t*, razmotrimo isplate nakon njegove tri mogućnosti. Ako istupi, zadržava

b. Ako prihvati ponudu, zadržava $x_2 < b.$ Ako odbije ponudu i nastavi pregovore, najbolja isplata koju može obezbediti u periodu $t+1$ je $1-\delta(1-b),$ a u periodu $t+2$ b. Zbog stacionarnosti strategije Igrača1, za Igrača2 je lošije ako čeka do perioda $t+2$. Sada imamo $\delta^2 b \leq \delta[1-\delta(1-b)] \leq b$ pa zaključujemo da je za Igrača2 optimalno da istupi iz pregovora u slučaju da Igrač1 ponudi dogovor x za koji je $x_2 < b.$

Neka su M_1 i M_2 supremumi isplata Igrača1 i Igrača2 pri savršenim ravnotežama podigara u kojima Igrač1 i Igrač2, redom, prvi iznose ponude. Slično, neka su m_1 i m_2 infimumi ovih isplata.

Korak1. $m_2 \geq 1-\delta M_1$ (dokaz je isti kao za Korak1 u dokazu teoreme3)

Korak2. $M_1 \leq 1-max\{b, \delta m_2\}.$

Dokaz. Nakon što istupi iz pregovora, Igraču2 se isplaćuje b, pa mora biti $M_1 \leq 1-b.$ Činjenica $M_1 \leq 1-\delta m_2$ sledi iz istog argumenta kao i u dokazu Koraka2 iz teoreme3.

Korak3. $m_1 \geq 1-max\{b, \delta M_2\}$ *i* $M_2 \leq 1-\delta m_1.$

Dokaz je analogan kao u koracima 1 i 2.

Korak4. $\delta/(1+\delta) \geq b \Rightarrow m_i \leq 1/(1+\delta) \leq M_i, \; i=1,2.$

Dokaz. Ove nejednakosti slede iz činjenice da pri savršenoj ravnoteži podigre kakva je opisana u propoziciji Igraču1 se isplaćuje $1/(1+\delta)$ u svakoj podigri u kojoj on prvi iznosi ponudu, a Igraču2 isto toliko u podigrama u kojima on prvi iznosi ponudu.

Korak5. $\delta/(1+\delta) \geq b \Rightarrow M_1 = m_1 = 1/(1+\delta) \wedge M_2 = m_2 = 1/(1+\delta).$

Dokaz. Iz Koraka2 imamo da je $1-M_1 \geq \delta m_2$ i iz Koraka1 da je $m_2 \geq 1-\delta M_1,$ pa je $1-M_1 \geq \delta - \delta^2 M_1$ i iz toga $M_1 \leq 1/(1+\delta).$ Zbog Koraka4 sada važi $M_1 = 1/(1+\delta).$

Dalje,iz Koraka1 imamo $m_2 \geq 1-\delta M_1 = 1/(1+\delta),$ pa je opet zbog Koraka4 $m_2 = 1/(1+\delta).$

Opet koristeći Korak4 važi $\delta M_2 \geq \delta/(1+\delta) \geq b,$ pa je zbog Koraka3 $m_1 \geq 1-\delta M_2 \geq 1-\delta(1-\delta m_1).$ Stoga je $m_1 \geq 1/(1+\delta),$ odnosno (zbog Koraka4) $m_1 = 1/(1+\delta).$

Korak6. $b \geq \delta/(1+\delta) \Rightarrow m_1 \leq 1-b \leq M_1 \wedge m_2 \leq 1-\delta(1-b) \leq M_2.$

Dokaz. Nejednakosti slede iz opisa SRP u propoziciji (kao kod Koraka4).

Korak7. $b \geq \delta/(1+\delta) \Rightarrow M_1 = m_1 = 1-b \wedge M_2 = m_2 = 1-\delta(1-b).$

Dokaz. Iz Koraka2 imamo da je $M_1 \leq 1-b,$ pa je iz Koraka6 $M_1 = 1-b.$ Iz koraka1 imamo $m_2 \geq 1-\delta M_1 = 1-\delta(1-b),$ pa je $m_2 = 1-\delta(1-b).$

Pokazaćemo da je $\delta M_2 \leq b.$ Ako pretpostavimo suprotno, da je $\delta M_2 > b,$ iz Koraka3 je $M_2 \leq 1-\delta m_1 \leq 1-\delta(1-\delta M_2),$ pa je $M_2 \leq 1/(1+\delta).$ To znači da bi bilo $b < \delta M_2 \leq \delta(1+\delta),$ što je suprotno pretpostavci.

Kako je $\delta M_2 \leq b,$ iz Koraka3 imamo $m_1 \geq 1-b,$ pa je $m_1 = 1-b$ (iz Koraka6). Dalje je $M_2 \leq 1-\delta m_1 = 1-\delta(1-b)$ (K3), pa je $M_2 = 1-\delta(1-b)$ (K6).

Dakle, u svakom od slučajeva ishod SRP je jedinstven. Ako je $b \neq \delta/(1+\delta)$ dokaz je isti kao za teoremu3. Ako je $b = \delta/(1+\delta)$ postoji više od jedne savršene ravnoteže podigre. U nekim od njih Igrač2 istupa iz igre kada se suoči sa ponudom koja mu nudi manje od b, a u nekim nastavlja pregovore.

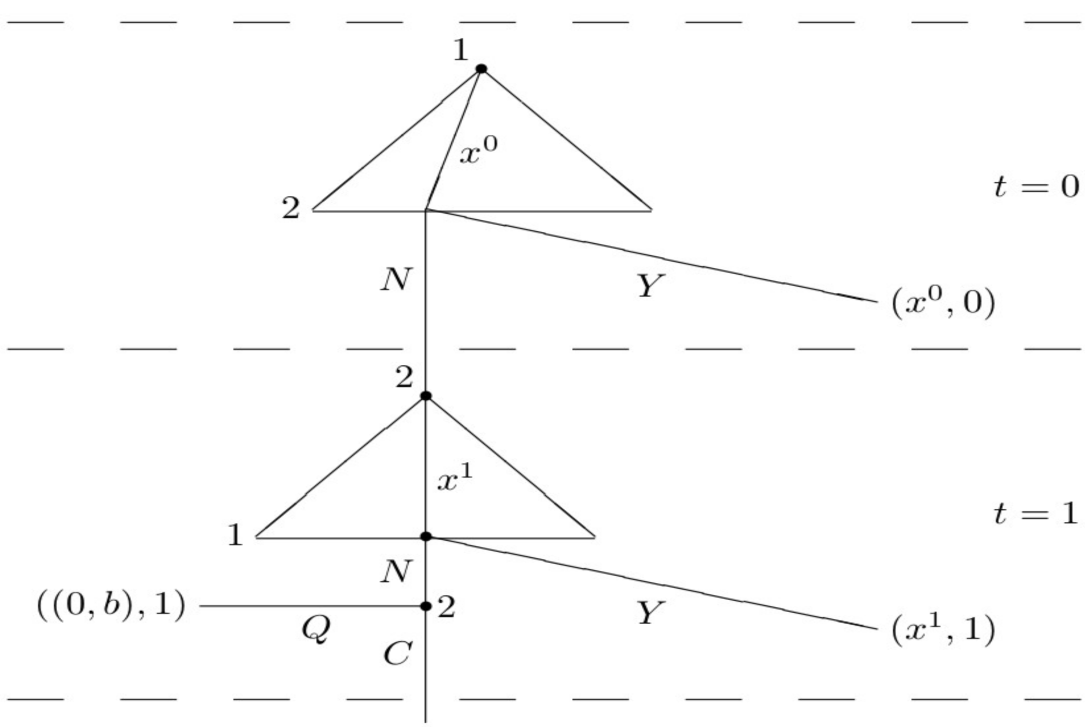
□

2. Model u kojem Igrač2 može istupiti samo nakon što Igrač1 odbije ponudu

Sada ćemo proučiti drugu modifikaciju pregovaračke igre sa naizmeničnim ponudama. Za razliku od prethodnog modela, pretpostavljamo da Igrač2 može istupiti samo nakon što Igrač1 odbije ponudu. Slična analiza slučaja odnosi se i na model u kojem Igrač2 može istupiti u oba slučaja – ili prilikom odgovaranja na ponudu ili nakon što Igrač1 odbije ponudu, ali ćemo se zbog jednostavnosti ograničiti na gore pomenutu situaciju. Prva dva perioda ove igre prikazana su na sledećoj slici (Slika11).

Ako je $b< \delta^2/(1+\delta)$, tada spoljna opcija nema uticaja. Igra će imati jedinstvenu savršenu ravnotežu podigre koja se poklapa sa savršenom ravnotežom igre u kojoj Igrač2 nema spoljnih opcija. Ovo je u vezi sa prvim slučajem prethodne propozicije. Zahtevamo da je $b< \delta^2/(1+\delta)$, umesto $b< \delta/(1+\delta)$, kao što je u modelu iz prethodnog poglavlja, pa bi, ako igrači iznose ponude i odgovaraju na njih kao kod savršene ravnoteže igre bez spoljnih opcija, za Igrača2 bilo optimalno da nastavi pregovore umesto da istupi nakon što Igrač1 odbije ponudu. (Ako Igrač2 istupi, on osvaja b odmah. Ako nastavi pregovore, nakon što prihvati dogovor $(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$, isplaćuje mu se $\delta/(1+\delta)$ sa periodom zakašnjenja, što će sada iznositi $\delta^2/(1+\delta)$.)

Ako je $\delta^2/(1+\delta)\leq b\leq \delta^2$, dobićemo rezultat koji se prilično razlikuje od onog iz propozicije1. Postoji mnoštvo savršenih ravnoteža podigri: za svako $\xi\in[1-\delta, 1-b/\delta]$ postoji savršena ravnoteža podigre koja se završava momentalnim dogovorom $(\xi, 1-\xi)$. Postoje i one ravnoteže u kojima isplata Igraču2 premašuje vrednost njegove spoljne opcije. Tada Igrač2 koristi svoju spoljnu opciju kao ozbiljnu pretnju.



Slika11. U periodu 0 Igrač2 može da odbije (N) ili prihvati ponudu (Y), a u periodu 1, nakon što Igrač1 odbije ponudu, Igrač2 može da istupi iz igre (Q) ili nastavi pregovore (C).

Propozicija2. *Razmotrimo gore opisanu pregovaračku igru, u kojoj Igrač2 može istupiti samo nakon što Igrač1 odbije ponudu (kao na prethodnoj slici). Pretpostavimo da je igračima vreme prioritet sa istim konstantnim faktorom popusta* $\delta< 1$ *i njihove isplate, u slučaju da Igrač2 istupi u periodu t, su* $(0, \delta^t b)$, *gde je b <1.*

1. *Ako je* $b< \delta^2/(1+\delta)$, *igra ima jedinstvenu savršenu ravnotežu koja se poklapa sa savršenom ravnotežom igre u kojoj Igrač2 nema drugih (spoljnih) opcija. To znači da će Igrač1 uvek predlagati dogovor* $(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$ *i prihvatati svaki predlog* y *za koji je* $y_1\geq \delta/(1+\delta)$, *a Igrač2 će uvek predlagati dogovor* $(\delta/(1+\delta), 1/(1+\delta))$, *prihvatati svaki predlog* x *za koji je* $x_2\geq \delta/(1+\delta)$ *i nikada neće istupiti. Ishod je da će dogovor* $(1/(1+\delta), \delta/(1+\delta))$ *biti postignut odmah.*
2. *Ako je* $\delta^2/(1+\delta)\leq b\leq \delta^2$, *postojaće mnogo savršenih ravnoteža podigre. Na primer, za svako* $\xi\in[1-\delta, 1-b/\delta]$ *postoji savršena ravnoteža podigre koja se završava*

momentalnim dogovorom $(\xi, 1-\xi)$. *Pri svakoj od tih ravnoteža Igraču2 se isplaćuje najmanje* $\delta/(1+\delta)$.

Dokaz. Svaki deo dokazujemo posebno.

1. Najpre razmotrimo slučaj $b<\delta^2/(1+\delta)$. Rezultat će slediti iz teoreme3 kada dokažemo da je pri svakoj savršenoj ravnoteži, posle bilo kog niza poteza, za Igrača2 optimalno da nastavi pregovore umesto da istupi. Neka su M_1 i m_2 definisani kao u dokazu Propozicije1. Iz Koraka 1 i 2 dokaza teoreme3 imamo da je $m_2 \geq 1-\delta M_1$ i $M_1 \leq 1-\delta m_2$, tako da je $m_2 \geq 1/(1+\delta)$. Razmotrimo sada odluku Igrača2 da istupi iz igre. Ako to uradi, zadržaće *b* odmah. Ako nastavi pregovore i odbije ponudu Igrača1, igra prelazi u podigru u kojoj on prvi iznosi ponudu. U ovoj podigri njemu se isplaćuje minimum m_2, ali sa dva perioda zakašnjenja, tako da vredi barem $\delta^2 m_2 \geq \delta^2/(1+\delta)$. Kako je $b<\delta^2/(1+\delta)$, Igraču2 je bolje da nastavi pregovore nego da istupi.

2. Razmotrimo sada slučaj gde je $\delta/(1+\delta) \leq b \leq \delta^2$. Kao u prethodnom slučaju važi $m_2 \geq 1/(1+\delta)$. Pokazaćemo da za svako $\eta^* \in [b/\delta, \delta]$ postoji savršena ravnoteža podigre u kojoj je isplata Igraču2 jednaka η^*. Nakon toga iskoristićemo te savršene ravnoteže da bismo dokazali da za svako $\xi^* \in [\delta b, \delta]$ postoji savršena ravnoteža podigre u kojoj je isplata Igraču2 ξ^*. Pošto Igrač2 sebi može garantovati dobitak δb tako što odbije svaku ponudu Igrača1 u prvom periodu i istupi u drugom periodu, ne postoji savršena ravnoteža u kojoj je njegov dobitak manji od δb. Dalje, pošto Igrač2 mora prihvatiti svaku ponudu x u kojoj je $x_2 > \delta$ u periodu 0, očigledno ne postoji savršena ravnoteža podigre u kojoj njegov dobitak premašuje δ. Dakle, skup isplata Igraču2 je $[\delta b, b]$.

Neka je $\eta^* \in [b/\delta, \delta]$. Savršena ravnoteža podigre data je sledećom tabelom:

Tabela1		η^*	b/δ	IZLAZ
1	ponude	$(1-\eta^*, \eta^*)$	$(1-b/\delta, b/\delta)$	$(1-\delta, \delta)$
	prihvatiti	$x_1 \geq \delta(1-\eta^*)$	$x_1 \geq \delta(1-b/\delta)$	$x_1 \geq 0$
2	ponude	$(\delta(1-\eta^*), 1-\delta(1-\eta^*))$	$(\delta(1-b/\delta), 1-\delta(1-b/\delta))$	(0,1)
	prihvatiti	$x_2 \geq \eta^*$	$x_2 \geq b/\delta$	$x_2 \geq \delta$
	istupiti?	ne	ne	da
Prelasci		Ići na IZLAZ ako Igrač1 predloži x za koje je $x_1 > 1-\eta^*$	Ići na IZLAZ ako Igrač1 predloži x za koje je $x_1 > 1-b/\delta$	Ići na b/δ ako Igrač2 nastavi pregovore nakon što Igrač1 odbije ponudu

Pokažimo da je ovaj par strategija SRP. Optimalnost strategije Igrača1 je jasna. Razmotrimo strategiju Igrača2. Pretpostavimo da je stanje $\eta \in \{b/\delta, \eta^*\}$ i Igrač1 predlaže dogovor x za koji je $x_1 \leq 1-\eta$. Ako Igrač2 prihvati ovu ponudu, kao što bi trebalo, isplaćuje mu se $x_2 > \eta$. Ako je odbije, stanje ostaje η i s obzirom na strategiju Igrača1 najbolji potez Igrača2 bio bi ili da predloži dogovor y, $y_1 = \delta(1-\eta)$, što Igrač1 prihvata, ili da predloži dogovor koji će Igrač1 odbiti i istupi iz igre. Vrednost prvog ishoda za Igrača2 je danas $\delta[1-\delta(1-\eta)]$, što je pod našom pretpostavkom da je $\eta^* \geq b/\delta \geq \delta/(1+\delta)$, jednako većini vrednosti η. Drugi ishod Igraču2 danas vredi $\delta b < b/\delta \leq \eta^*$. Stoga je za Igrača2 optimalno da prihvati ponudu *x*. Pretpostavimo sada da Igrač1 predlaže dogovor x za koji je $x_1 > 1-\eta (\geq 1-\delta)$. Tada stanje prelazi u IZLAZ. Ako Igrač2 prihvati ponudu, isplaćuje mu se $x_2 < \eta \leq \delta$. Ako je odbije i predloži dogovor (0,1), može dobiti δ. Stoga je u ovom slučaju za njega optimalno da odbije *x*.

Razmotrimo izbor Igrača2 nakon što je Igrač1 odbio ponudu. Pretpostavimo da je stanje η. Ako Igrač2 istupi, dobija *b*. Ako nastavi pregovore i prihvati ponudu Igrača1 dobija η sa periodom zaostatka, što sada vredi $\delta\eta \geq b$. Stoga je za njega optimalno da nastavi pregovore.

Konačno, razmotrimo ponašanje Igrača2 kada je stanje IZLAZ. Jasno je šta će prihvatati, a šta predlagati, ali šta će odlučiti nakon što Igrač1 odbije ponudu? Ako istupi, zadržava *b* odmah. Ako nastavi pregovore, stanje prelazi u b/δ i najbolje što može je da prihvati ponudu Igrača1 kojom dobija b/δ sa periodom zakašnjenja. Dakle, u ovom slučaju je optimalno da istupi. □

Ako je $\delta^2 < b < 1$, postoji jedinstvena savršena ravnoteža podigre, u kojoj Igrač1 uvek predlaže $(1-\delta, \delta)$ i prihvata svaku ponudu, a Igrač2 uvek predlaže (0,1), prihvata svaku ponudu *x*, za koje je $x_2 \geq \delta$ i uvek istupa.

Uporedimo modele iz ovog i prethodnog odeljka. Kada je vrednost *b* spoljne opcije Igrača2 relativno niska (niža od jedinstvene savršene ravnoteže podigre u igri u kojoj on nema spoljnih opcija), tada se njegova pretnja da će istupiti ne shvata ozbiljno i prisustvo te spoljne opcije ne utiče na ishod. S druge strane, kada je vrednost *b* relativno visoka, to jeste ozbiljna pretnja zbog čega može biti na dobitku. Modeli se razlikuju po načinu na koji pretnja može dovesti do prednosti u pregovorima. Pozicija Igrača2 je jača u drugom modelu. Tada on može da iznese ponudu koja se, zahvaljujući pretnji, shvata kao “uzmi ili ostavi”. U prvom modelu Igrač1 ima pravo da iznese poslednju ponudu pre nego što Igrač2 ostvari svoju pretnju, pa može obezbediti da Igrač2 ne dobije više od *b*. Zaključujemo da postojanje spoljne opcije za nekog igrača utiče na ishod igre samo ako je korišćenje te pretnje verodostojno, a do koje mere ona igraču pomaže zavisi od mogućnosti pravljenja “uzmi ili ostavi” ponude, što opet zavisi od toka pregovora.

3.11 Igra naizmeničnih ponuda sa tri pregovarača

Ovde razmatramo slučaj u kojem tri pregovarača imaju pristup plenu veličine 1, ako mogu da se dogovore kako da ga među sobom podele. Dogovor zahteva da se sva tri igrača usaglase. Postoji mnogo načina da se pregovaračka igra sa naizmeničnim ponudama proširi na ovaj slučaj. Avner Šaked[7] je predložio i analizirao jedno takvo proširenje koje se činilo prirodnim. Ipak, došlo je do razočaravajućeg rezultata da ako su igrači dovoljno strpljivi, za svaku podelu plena postoji savršena ravnoteža podigre pri kojoj se za tu podelu dogovor postiže odmah.

Sledi opis Šaked-ove igre. U prvom periodu Igrač1 predloži podelu (na primer, vektor $x=(x_1, x_2, x_3)$ gde je $x_1 + x_2 + x_3 = 1$), a igrači 2 i 3 taj predlog prihvate ili odbiju. Ako je bilo ko od njih odbije, igra prelazi u sledeći period u kojem je red na Igrača2 da predloži podelu, na koju će odgovarati Igrači 1 i 3. Ako bar jedan odbije ponudu igra opet prelazi u sledeći period, u kojem Igrač3 daje predlog, a Igrači 1 i 2 odgovaraju. Igra će se nastavljati sve dok oba igrača ne prihvate ponudu na koju odgovaraju. Prioriteti igrača zadovoljavaju A1-A6 iz poglavlja 3.2. Setimo se da je $v_i(x_i, t)$ predstavljalo sadašnju vrednost koja se isplaćuje igraču *i* za dogovor *x* u periodu *t*.

Propozicija3. *Pretpostavimo da prioriteti igrača zadovoljavaju pretpostavke A1-A6 iz poglavlja 3.2, i* $v_i(1,1) \geq 1/2$, za $i=1,2,3$. *Tada za svaku podelu plena* x^*, *postoji savršena ravnoteža podigre gore definisane pregovaračke igre sa tri igrača u kojoj se ishod za podelu* x^* *postiže odmah.*

Dokaz. Fiksirajmo podelu x^*. Tabela 2 opisuje savršenu ravnotežu podigre u kojoj igrači odmah

7 Avner Šaked, izraelski matematičar

postignu dogovor x^*, pri čemu je e^i jedinični vektor za igrača *i*. Pri svakom stanju $y=(y_1, y_2, y_3)$, svaki igrač *i* predlaže podelu *y* i prihvata podelu *x* ako i samo ako je $x_i \geq v_i(y_i, 1)$. Ako, pri bilo kom stanju *y* igrač predloži dogovor *x* za koji će dobiti više od y_i, postoji prelaz do stanja e^j, gde je $j \neq i$ igrač sa najnižim indeksom za koga je $x_j < 1/2$. Kao i uvek, svaki prelaz između stanja se odigra odmah nakon događaja koji ga uslovi, odnosno odmah nakon što je iznešena ponuda, a pre odgovora na nju. Primetimo da kad god Igrač *i* predloži dogovor *x* za koji je $x_i > 0$, postoji bar jedan igrač *j* za koga je $x_j < 1/2$.

Da bismo pokazali da ove stategije čine savršenu ravnotežu podigre, najpre ćemo razmotriti pravilo igrača *i* za prihvatanje ponuda. Ako, pri stanju *y* Igrač *i* mora da odgovori na ponudu, tada je najviše što može dobiti ako je odbije y_i sa periodom zaostatka, što mu vredi $v_i(y_i, 1)$. Stoga je prihvatanje dogovora *x* ako i samo ako je $x_i \geq v_i(y_i, 1)$ najbolji odgovor na strategije ostalih igrača. Sada razmotrimo pravilo Igrača *i* za predlaganje ponuda pri stanju *y*. Ako predloži *x* za koje je $x_i > y_i$, stanje prelazi u e^j, *j* odbije ponudu igrača *i* (jer je $x_j < 1/2 \leq v_i(e^j_j, 1) = v_i(1,1)$) i *i* dobije 0. Ako predloži *x* za koje je $x_i \leq y_i$, ta ponuda će biti ili prihvaćena ili odbijena, a Igrač *i* dobija najviše y_i u sledećem periodu. Stoga je za Igrača *i* optimalno da predloži *y*.

□

U ovom dokazu jedan od igrača biva "nagrađen" jer je odbio ponudu koja odstupa od strategije i nakon toga osvaja ceo plen. Rezultat je u suprotnosti sa teoremom3, što pokazuje da pregovaračka igra naizmeničnih ponuda sa dva igrača ima jedinstvenu savršenu ravnotežu podigre. Zaključujemo da je ključna razlika između ove dve situacije sledeća: kada je u igri tri (ili više) igrača, jednom od ispitanika se uvek može nadoknaditi odbijanje ponude koja odstupa od strategije, dok toga nema u igri dva igrača. Na primer, u igri sa dva igrača ne postoji savršena ravnoteža podigre u kojoj Igrač1 predlaže dogovor *x* za koji će dobiti manje od $1 - v_2(1,1)$, jer ako odstupi i predloži dogovor *y* za koji važi $x_1 < y_1 < 1 - v_2(1,1)$, Igrač2 će morati da pristane na tu ponudu (jer ako je odbije, može dobiti najviše $v_2(1,1)$).

Tabela2		x^*	e^1	e^2	e^3
1	predlaže	x^*	e^1	e^2	e^3
	prihvata	$x_1 \geq v_1(x_1^*, 1)$	$x_1 \geq v_1(1, 1)$	$x_1 \geq 0$	$x_1 \geq 0$
2	predlaže	x^*	e^1	e^2	e^3
	prihvata	$x_2 \geq v_2(x_2^*, 1)$	$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq v_2(1, 1)$	$x_2 \geq 0$
3	predlaže	x^*	e^1	e^2	e^3
	prihvata	$x_3 \geq v_3(x_3^*, 1)$	$x_3 \geq 0$	$x_3 \geq 0$	$x_3 \geq v_3(1, 1)$
Prelasci		Ako, pri bilo kom stanju y, Igrač i predloži x za koje je $x_i > y_i$, ići na stanje e^j, gde je $j \neq i$ igrač sa najnižim indeksom za koga je $x_j < 1/2$.			

Postoji više načina da se dođe do jedinstvenog ishoda u Šaked-ovoj igri sa tri igrača. Na primer, jasno je da jedina savršena ravnoteža podigre u kojoj su strategije igrača stacionarne ima oblik sličan jedinstvenoj savršenoj ravnoteži podigre igre sa dva igrača. (Ako je igračima vreme prioritet sa uobičajenim konstantnim faktorom popusta δ, ravnoteža vodi do podele plena $(\xi, \delta\xi, \delta^2\xi)$, pri čemu je $\xi(1+\delta+\delta^2)=1.$) Drugi način je da se nekako izmeni struktura igre. Na primer, Peri[8] i Šaked su predstavili igru u kojoj se igrači smenjuju u postavljanju zahteva. Kada igrač iznese svoj zahtev ne može ga naknadno uvećati. Igra se završava kada je zbir svih zahteva ne veći od 1.

8 Moti Peri je izraelski profesor ekonomije.

4. ZAKLJUČAK

Možemo slobodno reći da u posleratnom periodu skoro nijedno područje ekonomske analize i matematičkog modeliranja ekonomskih pojava nije ostvarilo toliku ekspanziju i razvoj kao što je to slučaj sa teorijom igara. Ona nudi matematički recept za shvatanje, prihvatanje i snalaženje u naizgled beznadežno haotičnom svetu.

Savremena teorija igara se fokusira na to da razjasni opšte principe ljudskog rezonovanja i na taj način zaključi šta presuđuje prilikom donošenja odluka. Pregovori, za razliku od onih igara u kojima jedan igrač dobija onoliko koliko drugi izgubi, nude mogućnost dobitka za obe strane. Cilj svakog igrača je da dobije što više može, ali ne (uvek) i da umanji dobitak protivnika. U dobroj nagodbi obe strane su na dobitku! Nešova prva studija o pregovorima nastala je u njegovom tinejdžerskom dobu, što se može i videti jer se pregovara o loptama, džepnim noževima i sličnim stvarima, ali su principi relevantni i za sofisticiranije ekonomske situacije. Pregovori su osnovna aktivnost u trgovini. Čak i na velikom tržištu gde trgovci imaju svoje okruženje u kome posluju, postoji prostor za pregovore. Ipak, već polazna pretpostavka o savršeno racionalnim i intelektualno ravnopravnim protivnicima značajno razdvaja teoriju od prakse. U realnim pregovaračkim situacijama ishod će najčešće biti određen znanjem, inteligencijom i karakternim osobinama pregovarača.

Moguće je obrađivati ovu temu iz različitih uglova i za različite potrebe, pa je samim tim i literatura obimna, ali nažalost ne i na srpskom jeziku. Lično sam se opredelila za opšti (matematički) pristup, umesto za navođenje specifičnih konfliktnih situacija. Cilj je na prvom mestu bio da pokažem univerzalnu primenu ovog “oružja”, zbog čega ga svako može primeniti na svoje područje rada.

5. LITERATURA

1. Martin J. Osborne, Ariel Rubinstein, *Bargaining and Markets,* Academic Press 1990.

2. Guillermo Owen, *Game Theory,* Academic Press, 1995.

3. Martin J. Osborne, *An Introduction to Game Theory*, 2006.

4. Fiona Carmichael, *A guide to game theory*, Pearson Education 2005.

5. Fernando Vega-Redondo, *Economics and the theory of games,* Cambridge University Press 2003.

6. Dubravka Pavličić, *Teorija odlučivanja*, Ekonomski fakultet, Beograd 2004.

7. Marko Backović, *Matematički modeli i metodi u ekonomiji*, Ekonomski fakultet, Beograd 2000.

8. Peter C. Fishburn, Ariel Rubinstein, *Time Preference*, International Economic Review 23, 1982.

9. Ariel Rubinstein, *Perfect Equilibrium in a Bargaining Model*, Econometrica Vol. 50, No. 1, 1982.

10. Harold Houba, Wilko Bolt, *Credible Threats in Negotiations*, Kluwer Academic Publishers 2002.

11. Tom Siegfried, *A beautiful math : John Nash, game theory, and the modern quest for a code of nature,* Joseph Henry Press 2006.

12. J.Szep, F. Forgo, *Einfuehrung in die Spieltheorie*, Akademia-Kiado, Budimpešta 1983.

13. E.N.Barron, *Game theory*, Wiley 2008.

14. J. Miller, *Game theory at work*, McGraw-Hill, 2003.