Математички факултет, Универзитет у Београду

Магистарска теза

Димензија модела непребројиво категоричне теорије

Кандидат

Дејан Илић

Комисија

Др Жарко Мијајловић,
Др Предраг Тановић,
Др Александар Перовић

Београд, 2011. године

Садржај

Глава 1

Увод

У овом раду посматрамо комплетне теорије првог реда у највише пребројивом језику. Испитујемо моделско теоретске могућности за увођење појма димензије који би био у складу са раније познатим примерима, рецимо димензијом у векторским просторима. Задовољавајући појам димензије је онај који до на изоморфизам класификује моделе једне теорије. Централни део рада чине теорема:

> За $\aleph_1$-категоричну теорију, постоји формула и изоловани тип и за њих везан појам димензије такав да су два модела теорије изоморфна ако и само ако им је димензија једнака;

и пут до ње: Доказ ове теореме је заснован на специфичном моделско теоретском концепту независности у моделима ω-стабилних теорија (што је шира класа од класе непребројиво категоричних).

Интуитивно јасани појамови (линеарне) независности у векторским просторима и алгебарске независности у пољима се дају релативно једноставно могу уопштити у појам acl независности, али се показује да то није довољно, па је наше истраживање великим делом било окренуто појму независности у Морлијевом рангу, као и појмовима тежине и предтежине. Управо коришћење предтежине и тежине чини оригиналан део овог рада.

Теорија је категорична у кардиналу κ или κ-категорична, ако до на изоморфизам има један модел моћи κ. Мотивација за увођење овог појма лежи у следећим примерима:

- Нека је T теорија бесконачних векторских простора над пољем F у језику $\{+, \cdot_f, 0 \mid f \in F\}$. Сваки модел теорије T је до на изоморфизам одређен димензијом.

  (a) Поље F је бесконачно: T је непребројиво категорична али није $\aleph_0$-категорична.

(б) Поље F је коначно: T је тотално категорична (у свим бесконачним кардиналима).

- Два алгебарски затворена поља карактеристике 0 су изоморфна акко им трансцендентне базе имају исту моћ.

  Дакле, ACF_0 је κ-категорична за сваки непребројив кардинал κ.

1954. Лош (Łøs)је поставио следећу хипотезу:

> Нека је L пребројив језик и T његова теорија. Ако је T категорична у једном непребројивом кардиналу, онда је категорична у сваком непребројивом кардиналу.

Може се спекулисати да ли је Лош претпоставио да постоји природан појам димензије у моделима непребројиво категоричних теорија, јер такав појам постоји у претходним примерима. У тим примерима су модели изоморфни ако и само ако имају исту димензију. При том су моћ структуре $\mathcal{M}$ и њена димензија $\dim(\mathcal{M})$ повезани једнакошћу $|\mathcal{M}| = \dim(\mathcal{M}) + \aleph_0$, одакле директно следи да су свака два непребројива модела изоморфна. Дакле, проширење Лошове хипотезе је:

> Два модела $\aleph_1$-категоричне теорије су изоморфна акко им је димензија једнака.

Директна последица оваквог уопштења би била Лошова оригинална хипотеза. За доказ уопштене хипотезе потребно је увести одговарајући појам димензије. Морли (Morley) је 1965. године доказао Лошову хипотезу:

Морлијева теорема([9]): Ако је T категорична у неком, онда је категорична у сваком непребројивом кардиналу! $\square$

Морли је истраживао разне карактеризације непребројиво категоричних теорија. Показао је да су следећи искази еквивалентни:

1. T је непребројиво категорична;
2. T је ω-стабилна и нема Вотов пар;
3. Сваки непребројив модел теорије T је засићен.

У свом доказу, Морли није увео прецизан појам димензије. То је за једну поткласу непребројиво категоричних теорија урадио Марш (Marsh) 1966. године у својој докторској дисертацији ([7]). Ту поткласу чине јако минималне теорије и Марш је за њих доказао уопштену хипотезу. Формула са параметрима из $\mathcal{M}$ је минимална ако дефинише бесконачан скуп који се не може поделити на два бесконачна дефинабилна подскупа са параметрима из $\mathcal{M}$. Она је јако минимална ако се то не може урадити ни у било ком елементарном раширењу структуре $\mathcal{M}$. Теорија је јако минимална ако је формула $x \equiv x$ (јако) минимална у сваком њеном моделу.

Предгеометрију чини скуп снабдевен оператором cl који зовемо оператором затворења и који задовољава монотоност, транзитивност, коначног је карактера и задовољава Штајнцову (Steinitz) аксиому замене:

$$a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A) \ \text{ повлачи } \ b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\}).$$

Особине које мора задовољавати оператор затворења је први навео Ван дер Верден (Van der Waerden) 1930. године. Ако је (V, cl) предгеометрија, онда се у њој може увести појам базе и димензије слично као у векторским просторима: База је минималан у односу на инклузију скуп коме је затворење цео простор или, еквивалентно, максималан независан скуп. Показује се да су сваке две базе исте моћи за коју кажемо да је димензија предгеометрије. Класични примери предгеометрија су:

1. За векторски простор V и $A \subseteq V$ нека је $\mathrm{cl}(A)$ потпростор генерисан скупом A, тј. линеал скупа A.
   - (V, cl) је предгеометрија.
   - $\dim(V)$ је (обична) димензија.
2. За поље $(F, +, \cdot, 0, 1)$ означимо са A' његово потпоље генерисано скупом $A \subset F$. Нека је $b \in \mathrm{cl}(A)$ акко $p(b) = 0$ за неки неконстантан полином $p(x)$ са коефицијентима из A'.
   - (F, cl) је предгеометрија.
   - Њена димензија је трансцендентна димензија поља F.

Треба приметити да је појам предгеометрије (а тиме и појам базе и димензије) независан од теорије модела, тј. за њихово увођење није потребно никакво предзнање. Марш је водећи се наведеним примерима увео појам алгебарског затворења acl у било ком моделу $\mathcal{M}$:

$\mathrm{acl}(A)$ је унија свих коначних скупова који се могу дефинисати преко A.

Марш је доказао да acl задовољава монотоност, транзитивност и да је коначног карактера, а ако је уз то још $\mathcal{M}$ минималан, онда је $(\mathcal{M}, \mathrm{acl})$ предгеометрија. Марш је затим показао да су два модела јако минималне теорије изоморфна акко им је димензија једнака. Последица је да су јако минималне теорије непребројиво категоричне.

Има међутим теорија које су непребројиво категоричне али нису јако минималне. То показује следећи пример.

Пример: $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Z}_4^{(\omega)}, +, 0)$ при чему је $\mathbb{Z}_4^{(\omega)}$ директна сума копија $\mathbb{Z}_4$ или скуп свих ω-низова који имају све нуле осим коначно много који припадају скупу $\{1, 2, 3\}$, и сабирање је по координатама $\mod 4$.

• T није јако минимална: $\varphi(x) = 2x \equiv 0$ дефинише подгрупу бесконачног индекса, сваки њен косет је бесконачан па теорија није јако минимална.

• $\varphi(x)$ је јако минимална. Дакле, у T постоји јако минимална формула **без параметара**.

• T је непребројиво категорична. $\square$

Присуство јако минималне формуле у овом примеру није случајно. Већ из Морлијевог рада се могло извести да непребројиво категорична теорија има јако минималну формулу са параметрима из неког модела. Уколико се, као у примеру, таква формула може наћи без параметара Марш је у докторату 1966. показао да:

(а) Ако $M \models T$, онда је $(\varphi(M), \mathrm{acl})$ предгеометрија;

(б) Сваки $\mathcal{M} \models T$ је прост и моделски минималан над $\varphi(\mathcal{M})$; и

(в) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су изоморфни акко $\varphi(M)$ и $\varphi(N)$ имају исту димензију.

У доказу овог дела Маршове чувене теореме, осим јаке минималности, није потребно користити нове технике, а изгледа да је овакав опис модела у то време био познат Морлију.

Пример: Посматрајмо $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Z}_4^{(\omega)}, f)$ где је f дефинисано са

$$f(x,y,z) = x - y + z \quad \text{(сабирање по координатама је mod 4).}$$

• Ако $c \in \mathbb{Z}_4^{(\omega)}$, тада је са $F_c(x) = x + c$ дефинисан аутоморфизам.

• Ако су a и b различити тада је $F(x) = x - a + b$ аутоморфизам и $F(a) = b$. Свака два елемента имају исти тип.

• Фиксирајмо $a \in \mathbb{Z}_4^{(\omega)}$ и дефинишимо $x +_a y = f(x, a, y)$. Тада $F(x) = x -_a a$ дефинише изоморфизам структура $(\mathbb{Z}_4^{(\omega)}, +_a, a)$ и $(\mathbb{Z}_4^{(\omega)}, +, 0)$.

T није јако минимална. Како свака два елемента имају исти тип, све што се у овој теорији може дефинисати без параметара је празан скуп и цео модел: нема јако минималних формула без параметара. Али, ако се убаци параметар a онда је формула $f(x, a, x) = a$ јако минимална. $\square$

Дакле, постоје непребројиво категоричне теорије у којима јако минималне формуле зависе од параметара. Поставља се питање: Да ли димензија модела зависи од избора параметара? Болдвин-Лахланова теорема даје негативан одговор на ово питање. Њен доказ је захтевао нове идеје и технике, што је био увод у теорију класификација структура првог реда зачет у [13].

Да бисмо ближе објаснили формулацију теореме, фиксирајмо непребројиво категоричну теорију T и наведимо пар чињеница:

• Постоји јако минимална формула са параметрима из простог модела $\varphi(x, \overline{a})$; тип $p^* = \mathrm{tp}(\overline{a})$ је реализован у сваком моделу.

• За сваку реализацију $\overline{b}$ типа p^* у моделу $\mathcal{M}$ формула $\varphi(x, \overline{b})$ је јако минимална. На њеном скупу решења имамо предгеометрију дефинисану са

$$\mathrm{acl}_{\bar{b}}(A) = \mathrm{acl}(A \cup \{\bar{b}\}) \cap \varphi(M, \bar{b}), \quad \text{за} \;\; A \subseteq \phi(M, \bar{b}).$$

$\dim_{\bar{b}}(M)$ означава њену димензију.

Теорема Болдвина и Лахлана([1])

(а) Ако $\bar{a}_1, \bar{a}_2 \in M$ реализују p^* тада је

$$\dim_{\bar{a_1}}(M) = \dim_{\bar{a_2}}(M).$$

$\dim_{\bar{a_1}}(M)$ зависи само од p^* и ϕ па је означавамо са $\dim_{\phi,p^*}(M)$.

(б) Ако је I база предгеометрије $(\phi(M, \bar{a}_1), \mathrm{acl}_{\bar{a}_1})$, тада је M прост и моделски минималан над $\bar{a}_1 I$.

(в) M је до на изоморфизам одређен са $\dim_{\phi,p^*}(M)$.

Рад је пун техничких детаља који се читаоцу могу (и вероватно хоће) учинити заморним. На жалост, они чине битан алат и не могу се избећи. Такав је, рецимо, појам Вотовог пара. Неопходан је да би се показало да је теорија категорична у једном кардиналу, таква у сваком кардиналу или да је прост модел над одређеним типовима бесконачних скупова уједно и моделски минималан.

После овог следе два поглавља у којима су наведени основни појмови и тврђења из теорије модела. Затим следи поглавље које се бави појмом предгеометрије. Већ ту се могу уочити кључне особине појма тернарне независности: „Скуп A не зависи у предгеометрији од скупа B преко C" ћемо обележавати са $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{dim} B \; \langle C \rangle$. У петој глави уводимо појам јако минималне формуле, структуре и теорије и бавимо се Маршовом теоремом.

У шестом поглављу уводимо појам κ-стабилне теорије и Вотових парова и доказујемо Морлијеву теорему. Седмо поглавље се бави Морлијевим рангом и тотално трансцендентним теоријама. То су теорије у којима сваки тип има ординалан ранг а описујемо их тиме да се у њиховим моделима не може правити бесконачно бинарно дрво дефинабилних скупова. У случају пребројивих теорија тотална трансцендентност је еквивалентна ω-стабилности.

Осмо поглавље је посвећено независности у Морлијевом рангу. У њему утврђујемо основне особине релације $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{MR}$, дефинишемо појам независних фамилија и тежине типа.

Ради се о тернарној релацији независности на подскуповима:

> $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B \, \langle C \, \rangle$ означава да „a не зависи више од $B \cup C$ него што већ зависи од C".

Теорија тернарне независности је развијена тек крајем седамдесетих и почетком осамдесетих година, и то у нешто ширем контексту стабилних теорија. Наравно да Болдвин и Лахлан нису користили ову технику већ је њихов доказ користио ad hoc аргументе који су је замењивали у кључим деловима, што је било могуће уз претпоставку непребројиве категоричности. Изложени доказ се ипак не ослања на пуну теорију независности, и кључно техничко тврђење „коначност тежине типова” у последњој глави је доказано само за случај непребројиво категоричних теорија.

У последњем, деветом поглављу доказујемо Болдвин-Лахланову теорему.

Посебну захвалност дугујем професору Предрагу Тановићу на уложеном труду и стрпљену у раду са мном. Није никакво претеривање рећи да ме је он увео у свет модерне теорије модела и да без њега ове тезе не би било!

У Београду, 1. фебруара 2011. године Дејан Илић

Глава 2

Основе

Крај целине која почиње једном од речи: *Теорема, Лема, Тврђење, Дефиниција, Напомена* и *Особина* је означен знаком $\square$. Стандардни скупови природних, целих, рационалних, реалних и комплексних бројева су означени mathbb словима: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Структуре су означене mathcal словима: $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, S, 0)$, $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$, $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$, $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$, $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, <)$ итд. $|M|$ означава моћ скупа M. $|\mathcal{M}|$ је моћ скупа носача структуре $\mathcal{M}$. $\overline{a}$ означава $(a_1, \ldots, a_n)$. Ако је $f : A \longrightarrow B$ и $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ онда ћемо са $f(a_1, \ldots, a_n)$, односно са $f(\overline{a})$ означавати $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Као што за скуп једначина у пољу реалних бројева кажемо да је сагласан ако има решења, тако и за Γ, скуп формула језика L којима су слободне променљиве међу $\{x_1, \ldots, x_n\}$, кажемо да је сагласан са теоријом T акко је теорија $T \cup \Gamma(c_1, \ldots, c_n)$ задовољива у језику L' који настаје тако што смо језику L додали нове симболе константи $\{c_1, \ldots, c_n\}$, при чему је $\Gamma(c_1, \ldots, c_n)$ скуп реченица која настаје тако што свако слободно јављање променљиве x_i у формулама скупа Γ заменимо симболом константе c_i. За интерпретације нових симбола константи, тј. за $(c_1^{\mathcal{M}}, \ldots, c_n^{\mathcal{M}})$ кажемо да је решење Γ-е у структури $\mathcal{M}$. Скуп свих решења у $\mathcal{M}$ обележавамо са $\Gamma(\mathcal{M})$. Кад је Γ сагласно са T, такође кажемо да је T$\cup\Gamma$ задовољиво.

Ознаке везане за скупове, операције са скуповима, релације, ординале и кардинале и њихову аритметику су стандардне и могу се наћи у већини уџбеника (на пример у [11]).

Кад не прави забуну, уместо да пишемо $X \cup \{a_1, \ldots, a_k\}$, можемо да скратимо запис и пишемо $X \cup \overline{a}$, за $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k)$. Такво запис ће бити згодан, рецимо, кад параметре формуле $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ желимо да додамо неком скупу X или језику L. У литератури се налази још скраћнији запис: $X\overline{a}$, уместо $X \cup \overline{a}$ и $\overline{a}\overline{b}$ уместо $\overline{a} \cup \overline{b}$. И ми ћемо некад користити исти запис, претежо кад радимо у универзуму.

Са $ForL$ ћемо означити скуп свих формула језика L. $\mathrm{Fv}(\varphi)$ је скуп слободних промењљивих формуле φ. $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ значи да је $\mathrm{Fv}(\varphi)\subseteq\{x_1,\dots,x_n\}$. Скуп таквих формула[1] обележавамо са $ForL(x_1,\dots,x_n)$. Ако је $\mathrm{Fv}(\varphi)=\emptyset$ онда за φ кажемо да је реченица. $SentL$ је скуп свих реченица језика L. AtL скуп свих атомских формула језика L. Нећемо писати $ForL\emptyset$ за $SentL$.

2.1 Елементарна пресликавања

Користићемо основна тврђења теорије модела која се могу наћи у стандардним уџбеницима теорије модела [4, 5, 8, 12].

Теорема сагласности: Ако је $T\vdash\varphi$, онда $T\models\varphi$.

Теорема комплетности: Ако је $T\models\varphi$, онда $T\vdash\varphi$.

Теорема компактности: Теорија има модел ако и само ако сваки њен коначан подскуп има модел.

Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L и $A\subset M$. **Апсорбовање скупа A у језик** је проширивање језика L до језика $L_A=L\cup\{c_a\,|\,a\in A\}$ (при чему су c_a нови симболи константи, тј. $L\cap\{c_a\,|\,a\in A\}=\emptyset$) и формирање L_A-структуре $\mathcal{M}_A=(M,...,a)_{a\in A}$, где је сваки нов симбол константе c_a интерпретиран као a. Кад не доводи до забуне, користићемо $\mathcal{M}$ и за структуру језика L и за структуру језика L_A. Некад ћемо писати $L_A=L\cup\{a\,|\,a\in A\}$ уместо $L_A=L\cup\{c_a\,|\,a\in A\}$. $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M})=\{\varphi\in Sent_{L_A}\,|\,\mathcal{M}\models\varphi\}$.

$\mathrm{Th}_M(\mathcal{M})$ је **елементарни дијаграм** L-структуре $\mathcal{M}$.
$\mathrm{Th}_\emptyset(\mathcal{M})=\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ је **пуна теорија** структуре $\mathcal{M}$.
$\Delta(\mathcal{M})=\mathrm{Th}_M(\mathcal{M})\cap\{\varphi(\overline{m}),\ \neg\varphi(\overline{m})\,|\ \varphi\in AtL$ и $\overline{m}\in M^n\}$ је **дијаграм** L-структуре $\mathcal{M}$.

Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ две L-структуре и $Th(\mathcal{M})=Th(\mathcal{N})$, онда пишемо $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$ и кажемо да су структуре $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ **елементарно еквивалентне**.

Ако је $a_1,a_2,\dots,a_n\in A\subseteq M$, онда

$$\mathcal{M}\models\varphi[a_1,\dots,a_n]\qquad\text{акко}\qquad\mathcal{M}\models\varphi(a_1,\dots,a_n)$$

(тј. $\mathcal{M}_A\models\varphi(a_1,\dots,a_n)$). Зато нећемо инсистирати на прецизној употреби синтаксе већ ћемо често писати $\mathcal{M}\models\varphi(a_1,a_2,\dots,a_n)$ мислећи на претходна два.

Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ две L-структуре и $\mu:M\longrightarrow N$. Кажемо да је μ **L-утапање** ако је „1-1” пресликавање сагласно са интерпретацијом симбола језика L. Ако је инклузија L-утапање, онда пишемо $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}$ и/или $\mathcal{N}\supseteq\mathcal{M}$ и кажемо **да је $\mathcal{M}$ подструктура структуре $\mathcal{N}$** или **да је $\mathcal{M}$ сужење структуре $\mathcal{N}$** или **да је $\mathcal{N}$ надструктура структуре $\mathcal{M}$** или **да је $\mathcal{N}$ раширење (проширење) структуре $\mathcal{M}$**. Када је јасно о ком језику је реч, онда уместо „L-утапање” кажемо само „утапање”.

[1] $\varphi(x_1,\dots,x_n)$

Особина 2.1.1 Следећи искази су еквивалентни:

1) $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$;

2) За све атомске L-формуле φ и све $\overline{a} \in M^{<\omega}$ кад год је $\varphi(\overline{a})$ смислено због дужине n-торке $\overline{a}$ и броја слободних променљивих у φ важи:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \quad \text{акко} \quad \mathcal{N} \models \varphi(\mu(\overline{a}));$$

3) За све L-формуле без квантора φ и све $\overline{a} \in M^{<\omega}$ кад год је $\varphi(\overline{a})$ смислено због дужине n-торке $\overline{a}$ и броја слободних променљивих у φ важи:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \quad \text{акко} \quad \mathcal{N} \models \varphi(\mu(\overline{a}));$$

4) $\mathcal{N} \models \Delta(\mathcal{M})$ кад $m^{\mathcal{N}} = \mu(m)$ за све $m \in M$. □

Дефиниција 2.1.2 Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ две L-структуре, $A \subseteq M$ и $\mu : A \longrightarrow N$. Кажемо да је μ **елементарно L-пресликавање** или, кад хоћемо да нагласимо да домен функције није цео скуп носач структуре $\mathcal{M}$, да је **делимично (парцијално) елементарно L-пресликавање** ако за сваку L-формулу φ и све $\overline{a} \in A^{<\omega}$ важи

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \qquad \text{акко} \qquad \mathcal{N} \models \varphi(\mu(\overline{a})),$$

кад год је $\varphi(\overline{a})$ смислено због дужине n-торке $\overline{a}$ и броја слободних променљивих у φ. Ако је $A = M$, за μ кажемо да је **елементарно L-утапање**. Ако је инклузија $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ елементарно L-утапање, онда пишемо $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ и/или $\mathcal{N} \succcurlyeq$ [2] $\mathcal{M}$ и кажемо **да је $\mathcal{M}$ елементарна подструктура структуре $\mathcal{N}$** или **да је $\mathcal{M}$ елементарно сужење структуре $\mathcal{N}$** или **да је $\mathcal{N}$ елементарна надструктура структуре $\mathcal{M}$** или **да је $\mathcal{N}$ елементарно раширење (проширење) структуре $\mathcal{M}$**. □

Тврђење 2.1.3 Следећи искази су еквивалентни:

1) $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ је елементарно;

2) $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}_{\mathcal{M}}(\mathcal{M})$ кад $m^{\mathcal{N}} = \mu(m)$ за све $m \in M$;

3) **Тарски-Вот (*Tarski-Vaught*) тест:** За све L-формуле $\varphi(\overline{x}, y)$ и све $\overline{a} \in M^{<\omega}$ кад год је $\varphi(\overline{a}, b)$ смислено због дужине n-торке $\overline{a}$ и броја слободних променљивих у φ важи:

Ако постоји $b \in N$ такав да $\mathcal{N} \models \varphi(\mu(\overline{a}), b)$, онда постоји $a \in M$ такав да $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}, a)$. □

Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L и $A \subseteq M$. Нека је

$$\text{„}\varphi \sim \psi \qquad \text{акко} \qquad \mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Leftrightarrow \psi(\overline{x}))\text{”}$$

[2] Ово ће бити корисно кад хоћемо да кажемо да за $\mathcal{M}$ „постоји $\mathcal{N}$ такво да је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$”. Тада ћемо скратити и рећи: „Постоји $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$”.

дефиниција релације на скупу $ForL_A(x_1,\dots,x_n)$. Релација $\sim$ је еквиваленција, чије ћемо класе означавати са $\lceil\varphi\rceil$. Нека је $B_{n\mathcal{M}_A} = ForL_A(\overline{x})_{/\sim}$ и нека су операције $+$, $\cdot$ и $'$ у скупу $B_{n\mathcal{M}_A}$ дефинисане једнакостима

$$\lceil\varphi\rceil + \lceil\psi\rceil = \lceil\varphi\vee\psi\rceil,\ \lceil\varphi\rceil\cdot\lceil\psi\rceil = \lceil\varphi\wedge\psi\rceil \text{ и } \lceil\varphi\rceil' = \lceil\neg\varphi\rceil.$$

Дефиниције операција не зависе од представника класе па су добре, па је $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A} = (B_{n\mathcal{M}_A}, +, \cdot, ', 0, 1)$, при чему су $0 = \lceil\neg\forall x(x\equiv x)\rceil$ и $1 = \lceil\forall x(x\equiv x)\rceil$, једна Булова алгебра. За њу кажемо да је Линденбаумова (Lindenbaum[3]) алгебра структуре $\mathcal{M}_A$. На сличан начин се добија Булова алгебра $\mathcal{B}_{nT}$, за коју ћемо рећи да је Линденбаумова алгебра теорије T, ако се еквиваленција дефинише помоћу

$$„\varphi\sim\psi \qquad \text{акко} \qquad T\models\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x})\Leftrightarrow\psi(\overline{x}))”.$$

Тврђење 2.1.4 Важи:
1) Ако је $\mu:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$ елементарно, онда је $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$;
2) Ако је L-утапање сурјективно, онда је елементарно;
3) Ако је $\mathcal{M}\cong\mathcal{N}$, онда $\mathcal{M}\equiv\mathcal{N}$;
4) Ако је $\mathcal{M}\preccurlyeq\mathcal{N}$, онда је за све n важи $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A} = \mathcal{B}_{n\mathcal{N}_A}$. □

Дефиниција 2.1.5 Нека је $(I,<)$ линеарно уређење за неко $I\neq\emptyset$ и за свако $i\in I$ нека је $\mathcal{M}_i$ L-структура. Кажемо да је $\{\mathcal{M}_i \mid i\in I\}$ **ланац** L-структура или да је L-ланац ако за све i, j из I из $i<j$ следи $\mathcal{M}_i\subseteq\mathcal{M}_j$. Ако из $i<j$ следи $\mathcal{M}_i\preccurlyeq\mathcal{M}_j$, онда за $\{\mathcal{M}_i|\ i\in I\}$ кажемо да је **елементарни L-ланац**. Када је јасно о ком језику је реч, изостављамо га и кажемо само „ланац” и „елементарни ланац” уместо „L-ланац” и „елементарни L-ланац”. □

Нека је $\{\mathcal{M}_i| i\in I\}$ L-ланац. L-структура $\mathcal{M}$ са скупом носачем $M=\bigcup_{i\in I} M_i$ се дефинише на следећи начин:

- Ако је $c\in ConstL$ и $i\in I$ произвољно изабрано, онда је $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$. Ова дефиниција ће бити добра ако не зависи од тога који елемент скупа I смо изабрали за представника у дефиницији. Нека је $j\in I\setminus\{i\}$.

  $$\left.\begin{array}{l}\text{Из } i<j \text{ следи } \mathcal{M}_i\subseteq\mathcal{M}_j,\text{ а тиме и } c^{\mathcal{M}_i}=c^{\mathcal{M}_j}\\ \text{Из } j<i \text{ следи } \mathcal{M}_j\subseteq\mathcal{M}_i,\text{ а тиме и } c^{\mathcal{M}_j}=c^{\mathcal{M}_i}\end{array}\right\},$$

  па уместо i може стајати j.

- Ако је f n-арни функцијски симбол језика L и $\overline{m}\in M^n$, онда постоји $i\in I$ такав да $\overline{m}\in M_i^n$. Нека једнакост $f^{\mathcal{M}}(\overline{m}) = f^{\mathcal{M}_i}(\overline{m})$ дефинише вредност функције $f^{\mathcal{M}}$ у n-торци $\overline{m}$. Треба показати да не зависи од избора представника елемнта скупа I.

  Нека је $j\in I\setminus\{i\}$ такво да $m_1,\dots,m_n\in M_j^n$.

[3] Адолф Линденбаум пољски математичар, рођен 12. јуна 1904. у Варшави, убијен од стране нациста 1941. у Панериаи.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ако је } i<j, \text{ онда је } \mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}_j, \text{ а тиме и } f^{\mathcal{M}_i}(\overline{m}) = f^{\mathcal{M}_i}(\overline{m}).\\ \text{Ако је } j<i, \text{ онда је } \mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M}_i, \text{ а тиме и } f^{\mathcal{M}_j}(\overline{m}) = f^{\mathcal{M}_i}(\overline{m}).\end{array}\right\}$$

Дакле, дефиниција не зависи од избора елемента скупа I, па је добра.

- Ако је R n-арни релацијски симбол језика L, онда дефинишимо $R^{\mathcal{M}}$ једнакошћу: $R^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i\in I} R^{\mathcal{M}_i}$. Очигледно је да је $R^{\mathcal{M}}|_{M_i} = R^{\mathcal{M}_i}$.

За овако дефинисано $\mathcal{M}$ кажемо да је унија ланца и пишемо $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$.

Тврђење 2.1.6 1) Нека је $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ ланац L-структура и $\mathcal{M} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$. За свако $i \in I$ важи $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$. Шта више, ако је $\mathcal{N}$ L-структура и за свако $i \in I$ важи $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$, онда је $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

2) Ако је ланац $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ елементарни, онда је $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}$ за свако $i \in I$ и ако је $\mathcal{N}$ L-структура и за свако $i \in I$ важи $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{N}$, онда је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$.

Доказ: 1) Да за свако $i \in I$ важи $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{M}$, очигледно је из тога како је дефинисана интерпретација симбола језика L.

Ако је $\mathcal{N}$ L-структура и за свако $i \in I$ важи $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$, онда:

- Очигледно је $M \subseteq N$.
- Ако је $c \in ConstL$, онда је $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$ за свако $i \in I$. Због $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$ је и $c^{\mathcal{M}_i} = c^{\mathcal{N}}$, па је $c^{\mathcal{N}} = c^{\mathcal{M}}$.
- Ако је f n-арни функцијски симбол језика L и $\overline{m} \in M^n$, онда постоји $i \in I$ такав да $\overline{m} \in M_i^n$ и тада важи (по дефиницији интерпретације $f^{\mathcal{M}}$) $f^{\mathcal{M}}(\overline{m}) = f^{\mathcal{M}_i}(\overline{m})$. Због $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$ је и $f^{\mathcal{N}}(\overline{m}) = f^{\mathcal{M}_i}(\overline{m})$, па је $f^{\mathcal{N}}(\overline{m}) = f^{\mathcal{M}}(\overline{m})$.

  Дакле, $f^{\mathcal{N}} = f^{\mathcal{M}}$.
- Ако је R n-арни релацијски симбол језика L, онда из дефиниције $R^{\mathcal{M}}$-а и чињенице да за свако $i \in I$ важи $\mathcal{M}_i \subseteq \mathcal{N}$ следи $R^{\mathcal{N}}|_M = R^{\mathcal{N}}|_{\bigcup_{i\in I} M_i} = \bigcup_{i\in I} R^{\mathcal{N}}|_{M_i} = \bigcup_{i\in I} R^{\mathcal{M}_i} = R^{\mathcal{M}}$.

Дакле, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

2) На основу доказаног под 1, за свако $l \in I$ је $\mathcal{M}_l \subseteq \mathcal{M}$. На основу особине 2.1.1 следи да за све формуле без квантора $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ (за све k) и све $(a_1,\ldots,a_k) \in M_l^k$ важи:

$$\Big(\star\Big) \qquad \mathcal{M}_l \models \varphi(a_1,\ldots,a_k) \qquad \text{акко} \qquad \mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_k).$$

Такође, за све $l_1, l_2 \in I$, за све формуле без квантора $\varphi(x_1,\ldots,x_k)$ (за све k) и све $(a_1,\ldots,a_k) \in M_{l_1}^k \cap M_{l_2}^k$ важи:

$$\binom{\star}{\star}\ \mathcal{M}_{l_1} \models \varphi(a_1,\ldots,a_k) \text{ акко } \mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_k) \text{ акко } \mathcal{M}_{l_2} \models \varphi(a_1,\ldots,a_k).$$

Нека је $i \in I$ и је $(a_1,\ldots,a_n) \in M_i^n$ и $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n,b)$ за неко $b \in M$. Тада је $b \in M_j$ за неко $j > i$, па $\mathcal{M}_j \models \varphi(a_1,\ldots,a_n,b)$. Тиме је и $\mathcal{M}_j \models \exists y\varphi(a_1,\ldots,a_n,y)$. Због $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}_j$ ће бити и $\mathcal{M}_i \models \exists y\,\varphi(a_1,\ldots,a_n,y)$, што значи да за неко $d \in M_i$ важи $\mathcal{M}_i \models \varphi(a_1,\ldots,a_n,d)$. Дакле, важи $\mathcal{M}_i \preccurlyeq \mathcal{M}$.

На основу (1) важи $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Нека је $m_1,\ldots,m_k \in M^k$ и $b \in N$ такво да важи $\mathcal{N} \models \varphi(a_1,\ldots,a_k,b)$. Пошто је $m_1,\ldots,m_k \in M^k$ и $M = \bigcup_{i\in I} M_i$, постоји $j \in I$ такво да је $m_1,\ldots,m_k \in {M_j}^k$. Пошто је $\mathcal{M}_j \preccurlyeq \mathcal{N}$ биће $\mathcal{M}_j \models \varphi(a_1,\ldots,a_k,d)$, за неко $d \in M_j$. Како је $\mathcal{M}_j \preccurlyeq \mathcal{M}$ (шта више, за ово је довољно да је $\mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{M}$) то је $\mathcal{M} \models \varphi(a_1,\ldots,a_k,d)$. По Тарски-Вот тесту је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$. □

Лема 2.1.7 Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ L-структуре, $A \subseteq M$, $\mu : A \longrightarrow N$ елементарно и $b \in N$, онда се μ може продужити до елементарног $\mu_p : A \cup \{b\} \longrightarrow \mathcal{N}_p$ за неко $\mathcal{N}_p \succcurlyeq \mathcal{N}$.

Доказ: Нека су

- $c \notin L_N$,
- $L' = \{c\} \cup L_N$,
- $\Gamma = \{\varphi(c,\mu(a_1),\ldots,\mu(a_k)) \,|\, \mathcal{M} \models \varphi(b,a_1,\ldots,a_k)\}$ и
- $\Delta = \Gamma \cup \mathrm{Th}_N(\mathcal{N}) \subseteq SentL'$.

Нека је Π коначан подскуп скупа Δ. По избору скупова Δ и Γ бић коначан и $\Gamma \cap \Pi$. Нека је $\Gamma \cap \Pi = \{\varphi_1(c,\mu(a_1),\ldots,\mu(a_{k_1})),\ldots,\varphi_j(c,\mu(a_1),\ldots,\mu(a_{k_j}))\}$. Тада важи $\mathcal{M} \models \varphi_i(b,a_1,\ldots,a_{k_i})$, кад год је $1 \leqslant i \leqslant j$, па важи $\mathcal{M} \models \bigwedge_{i=1}^{j} \varphi_i(b,a_1,\ldots,a_{k_i})$. Дакле, важи $\mathcal{M} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^{j} \varphi_i(x,a_1,\ldots,a_{k_i})$, а како је μ елементарно, биће испуњено и $\mathcal{N} \models \exists x \bigwedge_{i=1}^{j} \varphi_i(x,\mu(a_1),\ldots,\mu(a_{k_i}))$. Ако структуру $\mathcal{N}$ проширимо до структуре језика L' тако што симбол константе c интерпретирамо било којим сведоком формуле $\exists x \bigwedge_{i=1}^{j} \varphi_i(x,\mu(a_1),\ldots,\mu(a_{k_i}))$, онда важи $\mathcal{N} \models (\Gamma \cap \Pi) \cup \mathrm{Th}_N(\mathcal{N})$, а тиме и $\mathcal{N} \models \Pi$, јер је $\Pi \subseteq \Gamma \cup \mathrm{Th}_N(\mathcal{N})$.

Дакле, Δ је коначно задовољива, па је, по компактности, задовољива. Нека је $\mathcal{N}_p$ модел теорије Δ и $\mu_p = \mu \cup \{(b, c^{\mathcal{N}_p})\}$. Очигледно је $\mu_{p|A} = \mu$. Из $\mathrm{Th}_N(\mathcal{N}) \subseteq \Delta$ следи да је $\mathcal{N}_p \models \mathrm{Th}_N(\mathcal{N})$, па је $\mathcal{N}_p \succcurlyeq \mathcal{N}$.

Важи низ еквиваленција:

$\mathcal{M} \models \varphi(b, a_1, a_2, \ldots, a_k)\}$
акко $\varphi(c, \mu(a_1), \mu(a_2), \ldots, \mu(a_k)) \in \Gamma$
акко $\mathcal{N}_p \models \varphi(c, \mu(a_1), \mu(a_2), \ldots, \mu(a_k))$
акко $\mathcal{N}_p \models \varphi(c^{\mathcal{N}_p}, \mu(a_1), \mu(a_2), \ldots, \mu(a_k))$
акко $\mathcal{N}_p \models \varphi(\mu_p(b), \mu_p(a_1), \mu_p(a_2), \ldots, \mu_p(a_k))$,

па је μ_p елементарно пресликавање, што је требало показати. $\square$

Последица 2.1.8 Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ L-структуре, $A \subseteq M$ и $\mu : A \longrightarrow N$ елементарно, онда се μ може продужити до елементарног $\mu_p : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}_p$ за неко $\mathcal{N}_p \succcurlyeq \mathcal{N}$.

Доказ: Нека је $M = \{a_i |\ i < |M|\}$, $A_0 = A$, $A_{i+1} = A_i \cup \{a_i\}$ и за $i = \cup i \leqslant |M|$ нека је $A_i = \bigcup\limits_{j<i} A_j$.

1) Нека је $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ и $\mu_0 = \mu : A_0 \longrightarrow \mathcal{N}_0$.

2) На основу претходног тврђења за свако $\mu_i = A_i \longrightarrow \mathcal{N}_i$ постоје $\mathcal{N}_{i+1} \succcurlyeq \mathcal{N}_i$ (а тиме и $\mathcal{N}_{i+1} \succcurlyeq \mathcal{N}$) и $\mu_{i+1} : A_{i+1} \longrightarrow \mathcal{N}_{i+1}$ које продужава μ_i.

3) За $i = \cup i \leqslant |M|$ нека је $\mathcal{N}_i = \bigcup\limits_{j<i} \mathcal{N}_j$ и $\mu_i = \bigcup\limits_{j<i} \mu_j$. Пошто је $\{\mathcal{N}_j |\ j < i\}$ елементарни ланац, за све $j < i$ важи $\mathcal{N}_j \preccurlyeq \mathcal{N}_i$. Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A_i$ онда су $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A_j$ за неко $j \leqslant i$. Шта више, постоји најмањи такав j. Важи:

$\mathcal{M} \models \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ акко (јер је μ_j елементарно)

$\mathcal{N}_j \models \varphi(\mu_j(a_1), \mu_j(a_2), \ldots, \mu_j(a_k))$ акко (јер је $\{\mathcal{N}_j |\ j < i\}$ елементарни ланац)

за све $j \leqslant l < i$ $\mathcal{N}_l \models \varphi(\mu_j(a_1), \mu_j(a_2), \ldots, \mu_j(a_k))$ акко (јер је $\mathcal{N}_l \preccurlyeq \mathcal{N}_i$ за $l < i$)

$\mathcal{N}_i \models \varphi(\mu_j(a_1), \mu_j(a_2), \ldots, \mu_j(a_k))$ акко (јер μ_i продужава μ_j)

$\mathcal{N}_i \models \varphi(\mu_i(a_1), \mu_i(a_2), \ldots, \mu_i(a_k))$.

μ_i је, дакле, елементарно.

Из 1), 2) и 3) следи да је $\mu_{|M|}$ елементарно пресликавање коме је домен M, па је $\mu_p = \mu_{|M|}$ и $\mathcal{N}_p = \mathcal{N}_{|M|}$. $\square$

Последица 2.1.9 Ако је $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ и $|\mathcal{A}| < \aleph_0$, онда је $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Доказ: Нека су $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\mu_0 = \emptyset$. μ_0 је елементарно па се може продужити до елементарног $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}_1$ за неко $\mathcal{B}_1 \succcurlyeq \mathcal{B}$.

Пошто важи $\mathcal{A} \models \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \left(\bigwedge\limits_{i<j} \neg(x_i \equiv x_j) \wedge \forall x \bigvee\limits_{i=1}^{n} (x \equiv x_i) \right)$ и $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{B}_1$, биће $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1 \models \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \left(\bigwedge\limits_{i<j} \neg(x_i \equiv x_j) \wedge \forall x \bigvee\limits_{i=1}^{n} (x \equiv x_i) \right)$, па и $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}_1$ имају исту моћ те су једнаки и μ је „на" пресликавање, тј $\mu : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. □

Горња Ловенхајм-Сколемова теорема[4]

Нека је $\mathcal{M}$ бесконачна L структура и нека је $\kappa \geqslant |\mathcal{M}| + |L|$. Тада:

- Постоји L структура $\mathcal{N}$ моћи κ и
- Постоји елементарно утапање структуре $\mathcal{M}$ у структуру $\mathcal{N}$. □

Дефиниција 2.1.10 Нека је κ бесконачан кардинал. Кажемо да је T κ-категорична теорија ако има моделе моћи κ и свака таква два њена модела су изоморфна један другом. □

Тврђење 2.1.11 Ако је T κ-категорична теорија онда је потпуна.

Доказ: Претпоставимо да теорија T има модел моћи κ и да није потпуна. Тада су за неку реченицу φ непротивречне теорије $T \cup \{\varphi\}$ и $T \cup \{\neg \varphi\}$, па постоје структуре $\mathcal{M}_i$ моћи κ[5] такве да је $\mathcal{M}_1 \models T \cup \{\varphi\}$ и $\mathcal{M}_2 \models T \cup \{\neg \varphi\}$. Из $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ би, на основу тврђења 2.1.4 следило $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$, па би због $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ морало бити и $\mathcal{M}_2 \models \varphi$. С друге стране из $\mathcal{M}_2 \models T \cup \{\neg \varphi\}$ следи $\mathcal{M}_2 \models \neg \varphi$, па би $\mathcal{M}_2 \models \{\varphi, \neg \varphi\}$, што је контрадикција па је претпоставка $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ неодржива. Дакле, T има бар два неизоморфна модела моћи κ, те није κ-категорична. □

2.2 Типови

Тврђење 2.2.1 Нека је L језик, $\mathcal{M}$ L-структура, $A \subseteq M$ и $p(x_1, \ldots, x_n) \subseteq ForL_A(x_1, \ldots, x_n)$. Следећи искази су еквивалентни:

1) $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \cup \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) | \varphi \in p\}$ је задовољива теорија језика $L_A \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ (при чему важи $L_A \cap \{c_1, \ldots, c_n\} = \emptyset$);

2) За сваки коначан $\Delta \subseteq p$ важи $\mathcal{M}_A \models \exists \overline{x} \bigwedge\limits_{\varphi \in \Delta} \varphi(\overline{x})$;

3) Постоје L-структура $\mathcal{N}$ и $(b_1, \ldots, b_n) \in N^n$ такви да је :

[4] Löwenheim, Skolem

[5] Ловенхајм-Сколемове теореме

а) $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$
б) За све $\varphi \in p$ важи $\mathcal{N} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$;

4) Скуп $\hat{p} = \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\}$ је садржан у неком ултрафилтеру Булове алгебре $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A}$.

Ако за $p(\overline{x})$ важи још и да је за свако $\varphi \in ForL_A$ тачно бар једно (а тиме и баш једно) од $\varphi \in p$ и $\neg\varphi \in p$, онда су 1) и 2) еквивалентни са

3') Постоје L-структура $\mathcal{M}$ и $(b_1, \ldots, b_n \in M^n)$ такви да је:
а) $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$
б) $p(\overline{x}) = \{\varphi \in ForL_A | \mathcal{N} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)\}$;

4') Скуп $\hat{p} = \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\}$ је ултрафилтер Булове алгебре $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A}$.

Доказ: „$1 \Leftrightarrow 2$" : Следи из теореме компактности и чињенице да је $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$ потпуна и дедуктивно затворена теорија, па је за Δ, коначан подскуп p-а, рећи да је $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \cup \{\exists\overline{x} \bigwedge_{\varphi\in\Delta} \varphi(\overline{x})\}$ задовољиво је исто што и рећи да је $\exists\overline{x} \bigwedge_{\varphi\in\Delta} \varphi(\overline{x}) \in \mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$, а то је исто као рећи $\mathcal{M}_A \models \exists\overline{x} \bigwedge_{\varphi\in\Delta} \varphi(\overline{x})$

„$3 \Rightarrow 1$" : Очигледно је да би такво $\mathcal{N}$ какво је у 3) било модел теорије $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \cup \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) | \varphi \in p\}$ кад се c_i интерпретира као b_i.

„$2 \Rightarrow 3$" : Посматрајмо теорију $\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \cup \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) | \varphi \in p\}$. Нека је Δ њен коначан подскуп. Онда је $\Delta_1 = \Delta \cap \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) | \varphi \in p\}$ коначан скуп који одговара коначном подскупу p-а. Из 2) следи да $\mathcal{M}_A \models \exists\overline{x} \bigwedge_{\varphi(\overline{c})\in\Delta_1} \varphi(\overline{x})$. Ако се сведоци те формуле узму за интерпретацију симбола c_i, очигледно је да структура $\mathcal{M}'_M = (\mathcal{M}_M, c_i^{\mathcal{M}_M})_{i\in\{1,2,\ldots,n\}}$ постаје модел теорије Δ_1. Како је $\mathcal{M}'_M$ модел теорије $\mathrm{Th}_M(\mathcal{M})$ и модел теорије Δ_1 то је и модел теорије Δ па је $\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \cup \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) | \varphi \in p\}$ (коначно) задовољива. Очигледно је да сваки њен модел $\mathcal{N}$ и n-торка $(c_1^{\mathcal{N}}, \ldots, c_n^{\mathcal{N}})$ задовољавају услове тврђења.

„$2 \Leftrightarrow 4$" : За сваки коначан $\Delta \subseteq p$ је $\mathcal{M}_A \models \exists\overline{x} \bigwedge_{\varphi\in\Delta} \varphi(\overline{x})$ акко
Сваки коначан подскуп скупа $\hat{p} = \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\}$ има СКП[6] акко
Скуп $\hat{p} = \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\}$ је садржан у неком ултрафилтеру Булове алгебре $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A}$.

3') постаје очигледно кад се уочи да за свако φ важи тачно једно од $\mathcal{N} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ и $\mathcal{N} \models \neg\varphi(b_1, \ldots, b_n)$.

4') Ако за свако $\varphi \in ForL_A$ важи тачно једно од $\varphi \in p$ и $\neg\varphi \in p$, онда за свако $\varphi \in ForL_A$ важи тачно једно од $\lceil\varphi\rceil \in \hat{p}$ и $\lceil\neg\varphi\rceil \in \hat{p}$, па је $\hat{p}$ ултрафилтер. $\square$

Дефиниција 2.2.2 За p из претходног тврђења кажемо да је **n-тип са параметрима из A**. Ако за свако $\varphi \in ForL_A(\overline{x})$ важи тачно једно од $\varphi \in p$ и $\neg\varphi \in p$, онда је p **потпуни (комплетни) n-тип**, а у супротном да је

[6] Својство коначног пресека.

делимичан или **непотпун**. Скуп свих потпуних n-типова са параметрима из A обележавамо са $S_n^{\mathcal{M}}(A)$, а скуп свих потпуних типова са параметрима из A обележавамо са $S^{\mathcal{M}}(A)$[7]. Ако за неко $\overline{m} \in M^n$ важи

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{m}) \qquad \text{за свако} \qquad \varphi \in p,$$

онда кажемо да $\overline{\mathbf{m}}$ **реализује p** и да се **p реализује у** $\mathcal{M}$. Ако се p не реализује у $\mathcal{M}$, онда кажемо да га $\mathcal{M}$ **испушта**. □

Дефиниција 2.2.3 За $\overline{m} \in M^n$ означићемо скуп $\{\varphi \in ForL_A \mid \mathcal{M}_A \models \varphi(\overline{m})\}$ са $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{m}/A)$. Нећемо писати $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{m}/\emptyset)$, већ $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{m})$. □

Особина 2.2.4 Из $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ следи $\mathrm{Th}_A\mathcal{M} = \mathrm{Th}_A\mathcal{N}$ и $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A} = \mathcal{B}_{n\mathcal{N}_A}$ а тиме и $S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n^{\mathcal{N}}(A)$. Очигледно важи $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{m}/A) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ □

Последица 2.2.5 [Последица тврђења 2.2.1]
$p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ акко постоје $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ и $\overline{m} \in N^n$ такви да је $p = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{m}/A)$. □

Тврђење 2.2.6 Нека је $\mathcal{M}$ L-структура и $\bar{b}, \bar{d} \in M^{<\omega}$. Тада:

1) Ако је μ аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира тачке скупа A и који слика b_i у d_i, онда је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{d}/A)$.

2) Ако је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{d}/A)$, онда постоје L-структура $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ и њен аутоморфизам μ такви да је $\mu|_A = 1_A$ и $\mu(\bar{b}) = \bar{d}$.

Доказ: 1) Нека је μ аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира тачке скупа A и који слика b_i у d_i и $\varphi \in ForL$. Важи:

$$\begin{array}{ll} & \varphi \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A) \\ \text{акко} & \mathcal{M} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n, a_1, \ldots, a_k) \\ \text{акко} & \mathcal{M} \models \varphi(f(b_1), \ldots, f(b_n), f(a_1), \ldots, f(a_k)) \quad \text{(јер је } f \text{ аутоморфизам)} \\ \text{акко} & \mathcal{M} \models \varphi(d_1, \ldots, d_n, a_1, \ldots, a_k) \quad \text{(јер } f \text{ фиксира } a \in A \text{ и слика } b_i \text{ у } d_i) \\ \text{акко} & \varphi \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{d}/A). \end{array}$$

2) Доказ овог дела тврђења је технички и спроводи се индукцијом.
Нека је $f : A \cup \{b_1, \ldots, b_n\} \longrightarrow M$ дефинисано са $f|_A = 1_A$ и $f(b_i) = d_i$ за $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Почетни корак: Означимо $\mathcal{M}$ са $\mathcal{M}_0$. На основу последице 2.1.8 може се закључити да постоје $\mathcal{N}_0 \succcurlyeq \mathcal{M}_0$ и елементарно $\mu_0 : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathcal{N}_0$ такви да μ_0 продужава f. Ако се посматра μ_0^{-1} али као пресликавање из $\mu_0(M_0) \subseteq N_0$ у N_0 а не у M_0, што се може јер је $M_0 \subseteq N_0$, онда је оно (делимично) елементарно. Заиста,

$$\begin{array}{lll} \mathcal{N}_0 \models \varphi(\mu_0(a_1), \ldots, \mu_0(a_n)) & \text{акко} & \text{(јер је } \mu_0 \text{ елементарно)} \\ \mathcal{M}_0 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) & \text{акко} & \text{(јер је } \mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_0) \\ \mathcal{N}_0 \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) & \text{акко} & \end{array}$$

[7] $S^{\mathcal{M}}(A) = \bigcup_{0<n<\omega} S_n^{\mathcal{M}}(A)$

$\mathcal{N}_0 \models \varphi(\mu_0^{-1}\mu_0(a_1), \ldots, \mu_0^{-1}\mu_0(a_n))$, па се на основу последице 2.1.8 може продужити до неког елементарног $\eta_0 : \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{M}_1$ за неко $\mathcal{M}_1 \succcurlyeq \mathcal{N}_0$. Сад имамо следећу ситуацију:

$\mathcal{M}_0 \overset{\mu_0}{\preccurlyeq} \mathcal{N}_0 \overset{\eta_0}{\preccurlyeq} \mathcal{M}_1$.

Следбенички корак:
Нека је $\mathcal{M}_0 \overset{\mu_0}{\preccurlyeq} \mathcal{N}_0 \overset{\eta_0}{\preccurlyeq} \mathcal{M}_1 \overset{\mu_1}{\preccurlyeq} \mathcal{N}_1 \overset{\eta_1}{\preccurlyeq} \mathcal{M}_2 \overset{\mu_2}{\preccurlyeq} \mathcal{N}_2 \overset{\eta_2}{\preccurlyeq} \mathcal{M}_3 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathcal{M}_n \overset{\mu_n}{\preccurlyeq} \mathcal{N}_n \overset{\eta_n}{\preccurlyeq} \mathcal{M}_{n+1}$.
Посматрајмо η_n^{-1}, слично као малопре као пресликавање из подскупа скупа M_{n+1} у скуп M_{n+1}. Слично се као малопре може показати да је η_n^{-1} елементарно па се на основу последице 2.1.8 може проширити до неког елеметарног $\mu_{n+1} : \mathcal{M}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{N}_{n+1}$ за неко $\mathcal{M}_{n+1} \preccurlyeq \mathcal{N}_{n+1}$. Ако се сад посматра μ_{n+1}^{-1} као пресликавање из подскупа скупа N_{n+1} у скуп N_{n+1}, па се опет, на основу последице 2.1.8 може проширити до неког елементарног $\eta_{n+1} : \mathcal{N}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{M}_{n+2}$ за неко $\mathcal{M}_{n+2} \succcurlyeq \mathcal{N}_{n+1}$.

$\{\mathcal{M}_i \mid i \in \omega\}$ је елементарни ланац, као што су елементарни и $\{\mathcal{N}_i \mid i \in \omega\}$ и $\{\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i \mid i \in \omega\}$

$\mathcal{N} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{N}_i$ и $\mu = \bigcup_{i<\omega} \mu_i$, задовољавају исказ теореме. $\square$

Да има ситуација кад је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{d}/A)$ а за сваки аутоморфизам μ структуре $\mathcal{M}$ такав да је $\mu|_A = 1_A$ није $\mu(\bar{b}) = \bar{d}$ показује следећи пример:

Пример 2.2.7 Нека је $L = \{<\}$ и $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$ и $A = \{1 - \frac{1}{i+1} | \ i < \omega\}$. Све што се језиком L и елементима скупа A (и логиком првог реда) може рећи о елементима 1 и 2 јесте да су већи од сваког $a \in A$ па они имају исти тип ($\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(1/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(2/A)$). Не можемо рећи да је 1 тачка нагомилавања скупа A и да 2 то није јер бисмо за тако нешто морали да кавнтификујемо по елементима скупа A: „За свако $x < 1$ постоји $a \in A$ такво да је $x < a$". Са друге стране, сваки аутоморфизам структуре $(\mathbb{Q}, <)$ који је идентичан на скупу A, мора бити идентичан и на тачкама нагомилавања скупа A (јер $<$ индукује интервалну топологију). Конкретно: Ако би неки аутоморфизам μ структуре $\mathcal{M}$ био идентичан на тачкама скупа A и сликао 2 у 1, онда би било коју тачку $q \in [1, 2) \cap \mathbb{Q}$ сликао у неки елемент мањи од 1, јер $\mathcal{M} \models q < 2$, па $\mathcal{M} \models \mu(q) < \mu(2)$, тј. $\mathcal{M} \models \mu(q) < 1$, па је за бар једно (тј. све сем коначно много) $i < \omega$ тачно $\mathcal{M} \models \mu(q) < 1 - \frac{1}{i+1}$. Пошто μ фиксира елементе скупа A онда мора бити $\mathcal{M} \models \mu(q) < \mu(1 - \frac{1}{i+1})$, а тиме и $\mathcal{M} \models q < 1 - \frac{1}{i+1}$, што је у контрадикцији са $q \in [1, 2) \cap \mathbb{Q}$. Дакле, ниједан аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира елементе скупа A не слика 2 у 1. Зато, ако желимо да аутоморфизмом фиксирамо елементе скупа A и да 2 сликамо у 1, морамо проширити $\mathcal{M}$ тако да буде елемената између 1 и скупа A. $\square$

Тврђење 2.2.8 Нека $(a_1, ..., a_n) \in M^n$ и $(b_1, ..., b_n) \in N^n$. Следећи услови су еквивалентни:

(1) $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_n) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b_1, ..., b_n)$;

(2) $f : \{a_1, ...a_n\} \longrightarrow N$ дефинисана са $f(a_i) = b_i$ је елементарно;

(3) $(\mathcal{M}, a_1, a_2, ...a_n) \equiv (\mathcal{N}, b_1, b_2, ..., b_n)$ као модели језика $L \cup \{c_1, c_2, ...c_n\}$ где су c_i-ови нови симболи константи, тј. $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_{\{a_1,...a_n\}}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N}_{\{b_1,...b_n\}})$.$\square$

Тврђење 2.2.9 Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L, $A \subseteq M$, $p(x_1, \ldots, x_n) \subseteq ForL_A(x_1, \ldots, x_n)$ (не обавезно потпун) n-тип и $\varphi \in ForL_A(x_1, \ldots, x_n)$. Следећи искази су еквивалентни:

1) За свако $\psi(\overline{x}) \in p$ $\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x}))$;

2) $\hat{p}$ је садржано у филтеру генерисаном елементом $\lceil \varphi \rceil$.

Ако је p потпун n-тип, онда су 1) и 2) еквивалентни са

3) $\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x}))$ акко $\psi(\overline{x}) \in p$

4) $\hat{p}$ је ултрафилтер генерисан елементом $\lceil \varphi \rceil$.

Доказ:
1)$\Longleftrightarrow$2) $\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x}))$ акко
$\lceil \varphi \rceil < \lceil \psi \rceil$ акко
$\lceil \psi \rceil$ је у филеру генерисаном елементом $\lceil \varphi \rceil$.
3) и 4) су очигледни. $\square$

Напомена 2.2.10 Уместо $\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x}))$ могли смо писати $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x}))$ или $\forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x})) \in \mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$. $\square$

Дефиниција 2.2.11 За φ из претходног тврђења кажемо да **изолује** тип p а за p **да је изолован** (формулом φ) и пишемо $\varphi \vdash p$ и/или $\varphi \models p$. $\square$

Тврђење 2.2.12 (Транзитивност изолованости типова):
Нека је $A \subseteq M$ и $(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in M^{m+n}$. Тада

$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b}/A)$ је изоловани тип у $S^{\mathcal{M}}_{m+n}(A)$ акко

1. $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$ је изолован тип у $S^{\mathcal{M}}_m(A)$ и
2. $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A \cup \{a_1, \ldots, a_m\})$ изоловани тип у $S^{\mathcal{M}}_n(A \cup \{a_1, \ldots, a_m\})$.

Доказ: „ $\Rightarrow$ ” : Нека је $tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b}/A)$ изолован у $S^{\mathcal{M}}_{m+n}(A)$ и нека га изолује L_A-формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$. Тада је $\exists \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$. Нека је $\psi(\overline{x}) \in tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A) \subseteq tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b}/A)$. Тада је
$\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x} \forall \overline{y}(\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow \psi(\overline{x}))$
$\mathcal{M}_A \models \forall \overline{y}(\forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \longrightarrow \psi(\overline{x})))$
$\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}, \overline{d}) \longrightarrow \psi(\overline{x}))$, за свако $\overline{d} \in M^n$

$\mathcal{M}_A \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x},\overline{d})\longrightarrow\psi(\overline{x}))$, за неко $\overline{d}\in M^n$
$\mathcal{M}_A \models \exists\overline{y}(\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x},\overline{y})\longrightarrow\psi(\overline{x})))$
$\mathcal{M}_A \models \forall\overline{x}(\exists\overline{y}\varphi(\overline{x},\overline{y})\longrightarrow\psi(\overline{x}))$, па
$\exists\overline{y}\varphi(\overline{x},\overline{y})$ изолује $tp^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$.

Нека је $\theta(\overline{y})$ $L_{A\cup\{a_1,\ldots,a_m\}}$-формула таква да је $\theta(\overline{y})\in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A\cup\{a_1,\ldots,a_m\})$. Тада је $\theta(\overline{y})=\Theta(\overline{a},\overline{y})$ за неку L_A-формулу $\Theta(\overline{x},\overline{y})$[8]. Тада је
$\mathcal{M}_{A\cup\{a_1,\ldots,a_m\}}\models\theta(\overline{b})$, а тиме и
$\mathcal{M}_A\models\Theta(\overline{a},\overline{b})$, па је $\Theta(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$. Дакле,
$\mathcal{M}_A\models\forall\overline{y}(\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x},\overline{y})\longrightarrow\Theta(\overline{x},\overline{y})))$, јер $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$
$\mathcal{M}_A\models\forall\overline{y}((\varphi(\overline{a},\overline{y})\longrightarrow\Theta(\overline{a},\overline{y})))$
$\mathcal{M}_A\models\forall\overline{y}((\varphi(\overline{a},\overline{y})\longrightarrow\theta(\overline{y})))$
Дакле, $\varphi(\overline{a},\overline{y})$ изолује $tp^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A\cup\{a_1,\ldots,a_m\})$.

„ $\Leftarrow$ ” : Нека је $\psi(\overline{x})$ L_A-формула која изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$ и нека је $\theta(\overline{x},\overline{y})$ L_A-формула таква да $\theta(\overline{a},\overline{y})$ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A\cup\{a_1,\ldots,a_m\})$. Нека је $\varphi(\overline{x},\overline{y})=\psi(x)\wedge\theta(\overline{x},\overline{y})$. Показаћемо да φ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$.

За почетак, приметимо да $\varphi(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$
Нека је $\phi(\overline{x},\overline{y})\in\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$ произвољно изабрана формула. Тада $\phi(\overline{a},\overline{y})\in\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A\cup\{a_1,\ldots,a_m\})$, па

$(\star)\qquad \mathcal{M}_{A\cup\{a_1,\ldots,a_m\}}\models\forall\overline{y}(\theta(\overline{a},\overline{y})\Longrightarrow\phi(\overline{a},\overline{y}))$.

Ако не би било $\mathcal{M}_A\models\forall\overline{x}\forall\overline{y}((\psi(\overline{x})\wedge\theta(\overline{x},\overline{y}))\Longrightarrow\phi(\overline{x},\overline{y}))$, онда би за неко $\overline{a}_1\in M$ важило
$\mathcal{M}_A\models\exists\overline{y}(\psi(\overline{a}_1)\wedge\theta(\overline{a}_1,\overline{y})\wedge\neg\phi(\overline{a}_1,\overline{y}))$.

Дакле, важи $\mathcal{M}_A\models\psi(\overline{a}_1)$, па је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}_1/A)=\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$. Зато (по тврђењу2.2.6) постоји $\mathcal{N}\succcurlyeq\mathcal{M}_A$ и $\mu\in\mathrm{Aut}(\mathcal{M}_A)$ који фиксира елементе скупа A и $\overline{a}_1$ слика у $\overline{a}$. Тада је $\mathcal{M}_A\models\exists\overline{y}(\psi(\overline{a})\wedge\theta(\overline{a},\overline{y})\wedge\neg\phi(\overline{a},\overline{y}))$, што би значило да постоји неко $\overline{b}_1$ такво да је $\mathcal{M}_A\models(\psi(\overline{a})\wedge\theta(\overline{a},\overline{b}_1)\wedge\neg\phi(\overline{a},\overline{b}_1))$, што је у супротности са $(\star)$, па је претпоставка да није $\mathcal{M}_A\models\forall\overline{x}\forall\overline{y}((\psi(\overline{x})\wedge\theta(\overline{x},\overline{y}))\Longrightarrow\phi(\overline{x},\overline{y}))$ неодржива. □

Напомена 2.2.13 Доказ претходног тврђења нам каже у каквој су вези формуле које изолују типове:
Ако $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$, онда $\exists\,\overline{y}\varphi(\overline{x},\overline{y})$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$ и $\varphi(\overline{a},\overline{y})$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A\overline{a})$. И обратно, ако је $\psi(\overline{x})$ L_A-формула која изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$ ако је $\theta(\overline{x},\overline{y})$ L_A-формула таква да $\theta(\overline{a},\overline{y})$ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A\cup\{a_1,\ldots,a_m\})$, онда $\varphi(\overline{x},\overline{y})=\psi(x)\wedge\theta(\overline{x},\overline{y})$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a},\overline{b}/A)$. □

Последица 2.2.14 Ако је $A\subseteq M$ и ако је $tp^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n/A)$ изолован у $S^{\mathcal{M}}_{m+n}(A)$, онда је $tp^{\mathcal{M}}(a_1,\ldots,a_m/A)$ изолован у $S^{\mathcal{M}}_m(A)$.

Ако $(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n)\in M^{m+n}$ реализује изолован тип у $S_{m+n}(T)$, онда $(a_1,\ldots,a_m)$ реализује изоловани тип у $S_m(T)$. □

[8] Могуће да су сви параметри који се јављају у формули θ заправо само из скупа A (или их нема), али тим пре су у скупу $A\cup\{a_1,\ldots,a_m\}$

2.3 Тополошка својства простора типова $S_n^{\mathcal{M}}(A)$

На скупу $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ се на природан начин уводи топологија: за све $\varphi \in ForL_A$ означимо са $[\varphi]$ скуп свих елемената $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ који садржи φ а онда је база топологије на $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ скуп $B = \{[\varphi] \,|\, \varphi \in ForL_A(x_1, \ldots, x_n)\}$. Веза између овог тополошког простора и Стоновог простора Булове алгебре $\mathcal{B}_{n\mathcal{M}_A}$ је очигледна и почива на бијекцији:

$$p \overset{f}{\longmapsto} \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\} = \hat{p} \qquad \text{и} \qquad \hat{p} \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \bigcup \hat{p} = \bigcup_{\lceil\varphi\rceil \in \hat{p}} \lceil\varphi\rceil = \{\varphi | \lceil\varphi\rceil \in \hat{p}\} = p.$$

Тврђење 2.3.1 Важи:
1) Базни скупови у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ су отворено-затворени;
2) $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ је компактан;
3) $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ је тотално неповезан простор.

Доказ: 1) $p \in [\varphi]$ акко $p \notin [\neg\varphi]$, па $[\varphi] = S_n^{\mathcal{M}}(A) \setminus [\neg\varphi]$;

2) Нека је $\mathcal{F} \subseteq S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Тада је $\mathcal{F} = \{[\varphi] \mid \varphi \in F\}$, за неко $F \subseteq ForL_A$. Нека $\mathcal{F}$ има својство коначног пресека. Нека је Δ коначан подскуп F-а. Тада је је $\{[\varphi] \mid \varphi \in \Delta\}$ коначан подскуп скупа $\mathcal{F}$, па има својство коначног пресека, тј. постоји неки тип p садржан у сваком елемнту скупа $\{[\varphi] \mid \varphi \in \Delta\}$. То заправо значи да је Δ коначан подскуп типа p, па $\mathcal{M}_A \models \exists \overline{x} \bigwedge_{\varphi \in \Delta} \varphi(\overline{x})$. Зато се може закључити да је F n-тип, па је сваки потпун n-тип који садржи F, а такав је бар један, садржан у свим елементима фамилије $\mathcal{F}$, па је пресек те фамилије непразан;

3) Нека је $p \neq q$. Постоји $\varphi \in p \setminus q$, па је $p \in [\varphi]$ и $q \in [\neg\varphi]$ и $[\varphi] \cap [\neg\varphi] = \emptyset$. $\square$

Тврђење 2.3.2 Ако је $A \subseteq B \subseteq M$ и $p \in S_n^{\mathcal{M}}(B)$, нека је $p_{|A} = \{\varphi \in p \mid \varphi \in ForL_A\}$. Тада је $p_{|A} \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ и пресликавање $p \mapsto p_{|A}$ је непрекидно пресликавање.

Доказ: Ако је $p \in S_n^{\mathcal{M}}(B)$, онда је $p = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{d}/B)$ за неко $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}_B$.) Нека је $\mathcal{N}'$ сужење структуре $\mathcal{N}$ на језик L_A. Тада је $p_{|A} = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}'}(\overline{d}/A)$, а тиме и $p_{|A} \in S_n^{\mathcal{N}'}(A)$. Како је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}'$ (тј. $\mathcal{M}_A \preccurlyeq \mathcal{N}'$), то је $S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n^{\mathcal{N}'}(A)$. $\square$

Тврђење 2.3.3 Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ L-структуре, $A \subseteq M$ и $\mu : A \longrightarrow \mathcal{N}$ елементарно и за $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ нека је $\tilde{\mu}(p) = \{\varphi(\overline{x}, \mu(\overline{a})) | \varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in p\}$. Тада:

1) $\tilde{\mu}(p) \in S_n^{\mathcal{N}}(\mu(A))$;

2) Пресликавање $\tilde{\mu}$ је непрекидно;

3) $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ и $S_n^{\mathcal{N}}(\mu(A))$ су хомеоморфни.

Доказ:

1) $\psi(\overline{x},\mu(\overline{a})) \notin \tilde{\mu}(p)$ акко
$\psi(\overline{x},\overline{a}) \notin p$ акко
$\neg\psi(\overline{x},\overline{a}) \in p$ акко
$\neg\psi(\overline{x},\mu(\overline{a})) \in \tilde{\mu}(p)$, па ако је $\tilde{\mu}(p)$ тип, онда је потпун тип.

Нека је $\{\varphi_1(\overline{x},\mu(\overline{a})),\dots,\varphi_k(\overline{x},\mu(\overline{a}))\} \subseteq \tilde{\mu}(p)$. Тада је $\{\varphi_1(\overline{x},\overline{a}),\dots,\varphi_k(\overline{x},\overline{a})\} \subseteq p$.
Пошто је p n-тип важиће $\mathcal{M} \models \exists\overline{x}(\varphi_1(\overline{x},\overline{a}) \wedge \dots \wedge \varphi_k(\overline{x},\overline{a}))$.
Пошто је μ елементарно, биће $\mathcal{N} \models \exists\overline{x}(\varphi_1(\overline{x},\mu(\overline{a})) \wedge \dots \wedge \varphi_k(\overline{x},\mu(\overline{a}))$.
Дакле, $\tilde{\mu}(p)$ је n- тип. Тачније $\tilde{\mu}(p) \in S_n^{\mathcal{N}}(\mu(A))$;

2) Нека је $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ L_A-формула (тј. $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ L-формула).
Тада је $p \in [\varphi(\overline{x},\overline{a})]$ акко
$\varphi(\overline{x},\overline{a}) \in p$ акко
$\varphi(\overline{x},\mu(\overline{a})) \in \tilde{\mu}(p)$ акко
$\tilde{\mu}(p) \in [\varphi(\overline{x},\mu(\overline{a})]$, па је $\mu^{-1}[\varphi(\overline{x},\mu(\overline{a})] = [\varphi(\overline{x},\overline{a}]$;

3) У доказу дела тврђења под 2) је доказано више, доказано је да је μ непрекидно и отворено (и затворено): и слика базног је базан скуп и инверзна слика базног је базан скуп.

Ако је $p \neq q$, онда за неко $\varphi \in ForL_A$ важи $\varphi \in p \setminus q$, а тиме и

$p \in [\varphi] \subseteq S_n^{\mathcal{M}}(A)$ (и $p \notin [\neg\varphi] \subseteq S_n^{\mathcal{M}}(A)$) и $q \in [\neg\varphi] \subseteq S_n^{\mathcal{M}}(A)$ (и $q \notin [\varphi] \subseteq S_n^{\mathcal{M}}(A)$).

Тада важи

$$\tilde{\mu}(p) \in [\varphi] \subseteq S_n^{\mathcal{N}}(\mu(A)) \qquad \text{и} \qquad \tilde{\mu}(q) \in [\neg\varphi] \subseteq S_n^{\mathcal{N}}(\mu(A)) \ ,$$

па је $\mu(p) \neq \mu(q)$. Дакле, μ је „1-1” пресликавање.

Ако је $q \in S_n^{\mathcal{N}}(\mu(A))$, нека је $p = \{\varphi(\overline{x},\overline{a}) | \varphi(\overline{x},\mu(\overline{a})) \in q\}$. Ако покажемо да је $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, с обзиром да је очигледно је $\tilde{\mu}(p) = q$, показаћемо да је μ на пресликавање. Да је $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ следи из:

(I) $\psi(\overline{x},\overline{a}) \notin p$ акко
$\psi(\overline{x},\mu(\overline{a})) \notin q$ акко
$\neg\psi(\overline{x},\mu(\overline{a})) \in q$ акко
$\neg\psi(\overline{x},\overline{a}) \in p$, па ако је p тип, онда је потпун тип.

(II) Ако $\{\psi_1(\overline{x},\overline{a}),\dots,\psi_k(\overline{x},\overline{a})\} \subseteq p$, онда је
$\{\psi_1(\overline{x},\mu(\overline{a})),\dots,\psi_k(\overline{x},\mu(\overline{a}))\} \subseteq q$, па, пошто је q тип
$\mathcal{N}_{\mu(A)} \models \exists\overline{x}(\psi_1(\overline{x},\mu(\overline{a})) \wedge \dots \wedge \psi_k(\overline{x},\mu(\overline{a})))$, па, пошто је μ елементарно
$\mathcal{M}_A \models \exists\overline{x}(\psi_1(\overline{x},\overline{a}) \wedge \dots \wedge \psi_k(\overline{x},\overline{a}))$, па је p тип. $\square$

Тврђење 2.3.4 Следећи искази су еквивалентни:

1) $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ је изолован;

2) $\{p\}$ је отворен скуп у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$;

3) Постоји L_A-формула φ таква да је $\{p\} = [\varphi]$ (φ ће бити баш формула која изолује тип p).

Доказ:
„$2 \Rightarrow 3$" : Сваки отворен скуп је унија базних, па ако је $\{p\}$ отворен, онда је $\{p\} = \bigcup_{[\varphi] \in F}[\varphi]$ за неку непразну фамилију F. Пошто је унија $\bigcup_{[\varphi] \in F}[\varphi]$ непразна, бар један њен члан $[\varphi]$ мора бити непразан. Пошто је унија једночлана, ниједан њен члан не сме имати више од једног елемента. Дакле, бар један члан уније је једночлан. Очигледно је да је тај једини елемент једночланог члана уније баш p. Дакле, за неко $\varphi \in ForL_A$ је $[\varphi] = \{p\}$;

„$3 \Rightarrow 2$" : Ако је $[\varphi] = \{p\}$, онда је $\{p\}$ базни а тиме и отворен скуп;

„$1 \Rightarrow 3$" : Да важи 1) значи да постоји L_A-формула φ таква да је:

$$\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \longrightarrow \psi(\overline{x})) \qquad \text{акко} \qquad \psi(\overline{x}) \in p.$$

Нека је $q \in [\varphi] \setminus \{p\}$. Нека је $\psi(\overline{x}) \in q \setminus p$. Тада је:

I $\{\psi, \varphi\} \subseteq q$, па је $\mathcal{M}_A \models \exists \overline{x}(\varphi\overline{x} \wedge \psi\overline{x})$. Нека је $\overline{d}$ сведок те формуле. Важи дакле, $\mathcal{M}_A \models \varphi(\overline{d})$ и $\mathcal{M}_A \models \psi(\overline{d})$.

II $\neg\psi \in p$, па $\mathcal{M}_A \models \forall \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \longrightarrow \psi(\overline{x}))$, па, како важи $\mathcal{M}_A \models \varphi(\overline{d})$ важиће и $\mathcal{M}_A \models \neg\psi(\overline{d})$.

I и II дају контрадикторне закључке ($\mathcal{M}_A \models \neg\psi(\overline{d})$ и $\mathcal{M}_A \models \psi(\overline{d})$), па је претпоставка да постоји $q \in [\varphi] \setminus \{p\}$ неодржива.

„$3 \Rightarrow 1$" : Заправо „из $\neg 1$ следи $\neg 3$".
Нек не важи 1: За свако $\varphi(\overline{x}) \in ForL_A$ постоји $\theta(\overline{x}) \in p$ такво да $\mathcal{M}_A \models \exists \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \wedge \neg\theta(\overline{x}))$. Ако је $p \in [\varphi]$, онда је $\varphi \in p$. За такво φ постоји $\psi \in p$ такво да $\mathcal{M}_A \models \exists \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x}))$. Из $\varphi, \psi \in p$ следи да је $p \in [\varphi] \cap [\psi]$.
Из $\mathcal{M}_A \models \exists \overline{x}(\varphi(\overline{x}) \wedge \neg\psi(\overline{x}))$ следи да је за неко $\overline{b} \in M^{<\omega}$ важи $\mathcal{M}_A \models \varphi(\overline{b})$ и $\mathcal{M}_A \models \neg\psi(\overline{b})$. Очигледно је да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A) \in [\varphi] \cap [\neg\psi]$.
Из $[\varphi] = ([\varphi] \cap [\psi]) \cup ([\varphi] \cap [\neg\psi])$ и чињенице да су $[\varphi] \cap [\psi]$ и $[\varphi] \cap [\neg\psi]$ непразни следи $|[\varphi]| = |([\varphi] \cap [\psi])| + |([\varphi] \cap [\neg\psi])| \geqslant 2$, па не може бити $[\varphi] = \{p\}$. $\square$

Тврђење 2.3.5
Нека је L језик, T задовољива L-теорија и $p\,(x_1, \ldots, x_n) \subseteq ForL(x_1, \ldots, x_n)$.
Следећи искази су еквивалентни:

1) $T \cup \{\varphi(c_1, \ldots, c_n) \,|\, \varphi \in p\}$ је задовољива теорија језика $L \cup \{c_1, \ldots, c_n\}$ (при чему важи $L \cap \{c_1, \ldots, c_n\} = \emptyset$);
2) За сваки коначан $\Delta \subseteq p$ важи $T \models \exists \overline{x} \bigwedge\limits_{\varphi \in \Delta} \varphi(\overline{x})$;

3) Скуп $\hat{p} = \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\}$ је садржан у неком ултрафилтеру Булове алгебре $\mathcal{B}_{nT}$.

Ако за $p(\overline{x})$ важи још и да је за свако $\varphi \in ForL_A$ тачно бар једно (а тиме и баш једно) од $\varphi \in p$ и $\neg\varphi \in p$, онда су 1) и 2) еквивалентни са

3') Скуп $\hat{p} = \{\lceil\varphi\rceil | \varphi \in p\}$ је ултрафилтер Булове алгебре $\mathcal{B}_{nT}$.

Доказ: Слично као тврђење 2.2.1 $\square$

Дефиниција 2.3.6 Нека је T L-теорија и $p\,(x_1,\ldots,x_n) \subseteq ForL(x_1,\ldots,x_n)$. Ако је $T \cup p\,(c_1,\ldots,c_n)$ задовољива теорија језика $L \cup \{c_1,\ldots,c_n\}$, при чему важи $L \cap \{c_1,\ldots,c_n\} = \emptyset$, онда за $p\,(x_1,\ldots,x_n)$ кажемо да је **n-тип теорије** T. Ако за сваку формулу $\varphi \in ForL(x_1,\ldots,x_n)$ важи $\varphi \in p$ или $\neg\varphi \in p$, онда је p **потпуни n-тип теорије** T, а у супротном да је **делимичан** или **непотпун**. Скуп свих потпуних n-типова теорије T се обележава са $S_n(T)$. $S(T) = \bigcup_{n\in\omega} S_{n+1}(T)$ $\square$

Напомена 2.3.7 Тврђење 2.3.5 заправо наводи еквиваленте претходне дефиниције. $\square$

Напомена 2.3.8 Ако је T потпуна теорија, онда је њено дедуктивно затворење исто што и $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ за било који $\mathcal{M} \models T$, па је $S_n(T) = S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$. $\square$

Дефиниција 2.3.9 Нека је $\varphi(x_1,\ldots,x_n) \in ForL(x_1,\ldots,x_n)$, нека је L-теорија $T\cup \{\exists\overline{x}\,\varphi(\overline{x})\}$ задовољива и нека је $p\,(\overline{x})$ n-тип теорије T. Кажемо да φ **изолује p** ако за сваку формулу $\psi \in p$ важи

$$T \models \forall x_1,\ldots,x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)) \qquad \square$$

Напомена 2.3.10 Ако φ изолује потпуни тип p, онда за сваку формулу $\psi \in ForL_A(x_1,\ldots,x_n)$ важи:

$$\psi \in p \qquad \textbf{акко} \qquad T \models \forall x_1,\ldots,x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n) \Longrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_n)). \qquad \square$$

Тврђење 2.3.11 Следећи искази су еквивалентни:

1. $p \in S_n(T)$ је изолован;
2. $\{p\}$ је отворен скуп у $S_n(T)$;
3. Постоји L-формула φ таква да је $\{p\} = [\varphi]$ (φ ће бити баш формула која изолује тип p).

Доказ: Слично као доказ тврђења 2.3.4. $\square$

2.4 Испуштање типова

Ако $T \models \forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \Longrightarrow \psi(\overline{x}))$ и $\mathcal{M}$ модел теорије T, онда из $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$, следи $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a})$. Отуд следеће

Тврђење 2.4.1 Ако φ изолује p, онда сваки модел теорије $T \cup \{\exists\overline{x}\varphi(\overline{x})\}$ реализује p.
Ако је T потпуна теорија, онда сваки њен модел реализује све њене изоловане типове. □

Поставља се питање шта са неизолованим типовима. Стандардно поље реалних бројева нема бесконачно мале бројеве, нестандардно има. Дакле, можемо бирати, хоћемо ли радити у моделу који реализује или испушта тип бесконачно мале бројеве. Да ли за сваки неизолован тип имамо избор да га реализујемо или не? Да ли за сваки скуп неизолованих типова можемо конструисати модел који испушта све типове тог скупа? Ако не, онда под којим условима то можемо а под којим не?

Тврђење 2.4.2 [Теорема о испуштању типова]
Нека је L највише пребројив језик, T задовољива L-теорија и p неизолован (могуће непотпун) тип теорије T. Тада, постоји пребројив модел $\mathcal{M}$ теорије T који испушта p.

Доказ: Нека је p k-тип и нека је $\widetilde{C} = \{c_i \mid i < \omega\}$ скуп нових симбола константи и $L' = L \cup \widetilde{C}$. Нека је $SentL' = \{\varphi_i| \ i \in \omega\}$ и $\{\overline{d_i}| \ i \in \omega\} = \widetilde{C}^k$. Конструисаћемо L'-реченице θ_i за $i \in \omega$ и тиме L'-теорију $T' = T \cup \{\theta_i| \ i \in \omega\}$. Сужење њеног канонског (Хенкиновог) модела на језик L ће бити модел теорије T који испушта p. Реченице θ_n ће задовољавати $T \models \theta_{i+1} \longrightarrow \theta_i$ за све природне i.

корак [0]: Нека је $\theta_0 = \exists x(x \equiv x)$ Пошто је T непротивречна, биће то и $T \cup \{\theta_0\}$.

корак [$3i+1$] (потпуност): Ако је $T \cup \{\theta_{3i}, \varphi_i\}$ непротивречна теорија, нека је $\theta_{3i+1} = \theta_{3i} \wedge \varphi_i$, а у супротном нека је $\theta_{3i+1} = \theta_{3i}$. У оба случаја је $T \cup \{\theta_{3i+1}\}$ непротивречна теорија и $T \models \theta_{3i+1} \longrightarrow \theta_{3i}$[9].

корак [$3i+2$] (својство сведока): Нека је $n_i = min\{i \mid c_i \in \widetilde{C}$ и c_i не учествује у $\theta_{3i+1}\}$. Ово заправо значи да је c_{n_i} први симбол нове константе који нисмо употребили у досадашњој конструкцији.

Ако је $T \cup \{\theta_{3i}, \varphi_i\}$ непротивречна теорија и φ_i је облика $\exists x\, \psi(x)$, онда нека је $\theta_{3i+2} = \theta_{3i+1} \wedge \psi(c_{n_i})$. Пошто је $T \cup \{\theta_{3i+1}\}$ непротивречна теорија, она има модел. Пошто се c_{n_i} се не јавља у $T \cup \{\theta_{3i+1}\}$, онда се у том моделу може интерпретирати како било и та структура ће остати модел теорије

[9] Заправо је $T \cup \{\ \theta_{3i+1}\ \} \models T \cup \{\theta_j| \ j \leqslant 3i+1\}$.

$T \cup \{\theta_{3i+1}\}$. Пошто је $\theta_{3i+1} = \theta_{3i} \wedge \exists x\, \psi(x)$ у том моделу је задовољена формула $\exists x\, \psi(x)$. Ако се c_{n_i} интерпретира као (било који) сведок те формуле, у добијеној структури је задовољена формула $\psi(c_{n_i})$, а тиме та структура постаје модел теорије $T \cup \{\theta_{3i+2}\}$ па је она непротивречна и $T \models \theta_{3i+2} \longrightarrow \theta_{3i+1}$.

Ако $T \cup \{\theta_{3i}, \varphi_i\}$ није непротивречна теорија или φ_i није обилка $\exists x\, \psi(x)$, онда нека је $\theta_{3i+2} = \theta_{3i+1}$. Очигледно је $T \cup \{\theta_{3i+2}\}$ непротивречна теорија и $T \models \theta_{3i+2} \longrightarrow \theta_{3i+1}$[10].

корак $[3i+3]$ (заобилажење p-а): Нека је $\overline{d_i} = (e_1, \ldots, e_k)$. Нека L-формула $\psi(x_1, \ldots, x_k)$ настаје тако што се свако јављање симбола $c_j \in \widetilde{C} \setminus \{e_1, \ldots, e_k\}$ у формули θ_{3i+2} прво замени променљивом y_j а затим се испред свега стави $\exists\, y_j$ и свако јављање симбола e_j се замени промељивом x_j[11].
Пошто p није изолован тип, постоји формула $\varphi_\psi(x_1, \ldots, x_k) \in p$ таква да важи $T \not\models \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longrightarrow \varphi_\psi(\overline{x}))$. Нека је $\theta_{3i+3} = \theta_{3i+2} \wedge \neg\varphi_\psi(\overline{d_i})$. Пошто је $T \not\models \forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longrightarrow \varphi_\psi(\overline{x}))$, то постоји $\mathcal{M}$, модел теорије $T \cup \{\neg\forall \overline{x}(\psi(\overline{x}) \Longrightarrow \varphi_\psi(\overline{x}))\}$ и $\overline{a} \in M^k$ такав да важи $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a}) \wedge \neg\varphi_\psi(\overline{a})$. Због начина на који је настала формула ψ, ако у структури $\mathcal{M}$ симболе константи $e_1, \ldots, e_k$ интерпретирамо елементима $a_1, \ldots, a_k$ и остале симболе константи из $\widetilde{C}$ које се јављају у θ_{3i+2}, облика c_j интерпретирамо сведоком за променљиву y_j, онда $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a})$ значи исто што и $\mathcal{M} \models \theta_{3i+2}$, а $\mathcal{M} \models \neg\varphi_\psi(\overline{a})$ исто што и $\mathcal{M} \models \neg\varphi_\psi(\overline{d_i})$, па је тако добијена структура модел теорије $T \cup \{\theta_{3i+3}\}$. Због $\theta_{3i+3} = \theta_{3i+2} \wedge \neg\varphi_\psi(\overline{d_i})$ биће $T \models \theta_{3i+3} \Longrightarrow \theta_{3i+2}$[12].

Овим је завршена индуктивна констурукција. Нека је $T' = T \cup \{\theta_i |\ i \in \omega\}$. Ако би теорија T' била противречна, онда би, због компактности, неки њен коначан део био противречан. Дакле, постоји $m \in \omega$ такво да је $T \cup \{\theta_0, \ldots \theta_m\}$ противречно. Шта више, због $T \models \theta_{i+1} \Longrightarrow \theta_i$, биће $T \cup \{\theta_m\} \models T \cup \{\theta_0, \ldots \theta_m\}$, па је $T \cup \{\theta_m\}$ противречна, што је у супротности са m-тим кораком конструкције, па T' не може бити противречна.

Нека је $\mathcal{M}'$ канонски (Хенкинов) модел теорије T' и $(a_1, \ldots, a_k) \in M'^k$. . Пошто су сви елементи структуре $\mathcal{M}'$ интерпретација неких симбола константи, то је k-торка $(a_1, \ldots, a_k)$ интерпретација неког $\overline{d_i} \in \widetilde{(C)}$. У кораку $3i+3$ смо се побринули да $\overline{d_i}$ не реализује тип p (тако што смо уредили да задовољава негацију (једне) формуле из p).

Дакле, ниједан елемент структуре $\mathcal{M}'$ не реализује p, па га $\mathcal{M}'$ испушта. $\mathcal{M}$ сужење структуре $\mathcal{M}'$ на језик L је тражени модел. $\square$

Напомена 2.4.3 Када би L био непребројив језик такав да има непребројив скуп константи C онда би могло да се поступи овако: Уочи се неки пребројив скуп константи $C_1 = \{c_n |\ n \in N\}$ и непребројив остатак означи са C_2.

[10] Заправо је $T \cup \{\ \theta_{3i+2}\ \} \models T \cup \{\theta_j |\ j \leqslant 3i+2\}$.

[11] Подразумева се да се променљиве y_j и x_j не јављају у формули θ_{3i+2}. Ако се јављају, можемо уместо c_j писати y_{c_j} и стављати $\exists y_{c_j}$ и уместо e_j писати x_{e_j}, па да формула постане $\psi(x_{e_1}, \ldots, x_{e_k})$).

[12] Заправо је $T \cup \{\ \theta_{3i+3}\ \} \models T \cup \{\theta_j |\ j \leqslant 3i+3\}$.

Уочи се теорија $T = \{\neg(c \equiv d) |\ c \neq d, c, d \in C_2\}$ и тип $p = \{\neg(x \equiv c_n) |\ n \in N\}$. Ако је $\varphi(x)$ L-формула таква да је $T \cup \{\exists x \varphi(x)\}$ задовољиво, онда, пошто у тој теорији учествује само коначно много од константи из C_1, постоји неко $k \in N$ такво да је $T \cup \{\varphi(c_k)\}$ задовољиво, па φ не изолује p [13]. Сваки модел теорије T је непребројив те мора имати елемент који није интерпретација ниједног симбола константи из C_1; тај елемент реализује p. $\square$

Тврђење 2.4.4 Нека је L највише пребројив језик, T задовољива L-теорија и P највише пребројив скуп неизолованих типова теорије T. Тада, постоји пребројив модел $\mathcal{M}$ теорије T који испушта све $p \in P$.

Доказ: P је највише пребројив, па постоји сурјекција $k : \omega \longrightarrow P$. Нека је $\pi : \omega \longrightarrow \omega^2$ бијекција и нека је $\pi(i) = (j, k)$. Правимо исту конструкцију као малопре, само што у кораку $3i + 3$ обезбедимо да $\overline{d_j}$ заобиђе тип p_k. На тај начин се обезбеђује да ниједан елемент канонског модела не реализује ниједан тип из P. $\square$

2.5 Нераспознатљиве, Сколемизација

Пример 2.5.1 Класичан примери (и вероватно инспирација за увођење појма) нераспознатљивих су база векторског простора и трансцедетна база у пољу комплексних бројева (заправо било који бесконачан скуп алгебарски независних елемената у било коме алгебарски затвореном пољу $\mathcal{F}$ чији је степен транцедентности бесконачан). За било које низове $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ алгебарски независних елемената базе постоји аутоморфизам σ који слика a_i у b_i. Очигледно је да је тад $\mathcal{F} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \varphi(b_1, \ldots, b_n)$ за све φ које немају више од n слободних промењљивих. $\square$

Дефиниција 2.5.2 Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L, I бесконачан скуп и $X = \{\, x_i \mid i \in I \,\}$ скуп (међусобно) различитих елемената скупа M. Ако за све n-торке $i_1, \ldots, i_n$ и $j_1, \ldots, j_n$ важи $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})$, онда кажемо да је X скуп **нераспознатљивих** структуре $\mathcal{M}$. $\square$

Очигледно је да би било која релација поретка била препрека нераспознатљивости, па је од интереса увођење следећег појма.

Дефиниција 2.5.3 Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L, $(I, <)$ бесконачан линеарно уређен скуп и $X = \{\, x_i \,|i \in I\}$ скуп (међусобно) различитих елемената скупа M. Ако све растуће n-торке за $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$ важи $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_n})$, онда кажемо да је X скуп **уређених нераспознатљивих** структуре $\mathcal{M}$. $\square$

[13] Ако би φ изоловало p онда би за свако $n \in \mathbb{N}$ важило
$T \models \forall x(\varphi(x) \longrightarrow \neg(x \equiv c_n))$ па би то важило и за $n = k$ и за $x = c_k$ па би онда $T \models \neg(c_k \equiv c_k)$ што је у супротности с претпоставком да је T задовољива теорија.

Напомена 2.5.4 Релација $<$ којом се уређује скуп I не мора да буде у језику L. $\square$

Пример 2.5.5 Структура $(\mathbb{Q}, <)$ је пример стурктуре која има уређене нераспознатљиве. Како су свака два интервала (уређених) рационалних бројева изоморфни то се за сваке $q'_1 < q'_2 < \cdots < q'_n$ и $q''_1 < q''_2 < \cdots < q''_n$ постоје бијекције $\mu_0, \ldots, \mu_{n+1}$ такве да

1. $\mu_0 : (-\infty, q'_1) \longrightarrow (-\infty, q''_1)$;
2. $\mu_i : (q'_i, q'_{i+1}) \longrightarrow (q''_i, q''_{i+1})$, за $0 < i < n$;
3. $\mu_n : (q'_n, \infty) \longrightarrow (q''_n, \infty)$.

и свако пресликавање чува уређење. Унија

$$\mu = \{(q'_1, q''_1), (q'_2, q''_2), \ldots, (q'_n, q''_n)\} \bigcup_{0 \leqslant i \leqslant n} \mu_i$$

је пресликавање које чува уређење па је аутоморфизам. За сваку формулу φ такву да је $|\operatorname{Fv}(\varphi)| \leqslant n$ очигледно важи

$$(\mathbb{Q}, <) \models \varphi(q'_1, \ldots, q'_n) \Longleftrightarrow \varphi(q''_1, \ldots, q''_n),$$

па је цео скуп рационалних бројева скуп уређених нераспознатљивих. $\square$

Структура $(\mathbb{Q}, <)$ је пример структуре која нема неразпознатљиве и има уређене нераспознатљиве.

Тврђење 2.5.6 Нека је $\mathcal{M}$ структура и $(X, <)$ линеарно уређен подскуп скупа M такав да за сваки пар растућих низова $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ и $b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ постоји аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који слика a_i у b_i, онда је $(X, <)$ скуп уређених нераспознатљивих структуре $\mathcal{M}$. $\square$

За дати скуп A нека је $[A]^n$ скуп свих n-точланих подскупова скупа А. Приметимо да ако је A линеарно уређен, онда постоји $1-1$ пресликавање између елемената скупа $[A]^n$ и растућих низова елемената скупа A дужине n.

Теорема 2.5.7 - Рамзијева (Ramsey) теорема : Нека је I бесконачан скуп и $n < \omega$. Нека је $\sim$ релација еквиваленције на $[I]^n$ која има (само) коначно много класа, тада постоји бесконачан подскуп $J \subseteq I$ такав да је цео $[J]^n$ садржан у једној класи релације $\sim$. $\square$

Тврђење 2.5.8 Нека је L пребројив језик и нека је T његова теорија која има бесконачне моделе. Нека је $(I\ <)$ бесконачан линерано уређен скуп. Постоји L-структура $\mathcal{M} \models T$ која садржи скуп $\{x_i \,|\, i \in I\}$ као скуп уређених нераспознатљивих.

Доказ: Нека је $L^* = L + {}^{14} \cap \{ c_i \mid i \in I \}$. Нека је $\Gamma = T \cup \{ \neg c_i \equiv c_j \mid i \neq j \} \cup \Pi$, при чему је $\Pi = \{ \varphi(c_{i_1}, c_{i_2}, \ldots, c_{i_m}) \Longleftrightarrow \varphi(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_m}) \mid$ за све природне бројеве m и растуће низове $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_m$ и $|\operatorname{Fv}(\varphi)| \leqslant m \}$.
Ако се покаже да је Γ задовољив скуп, онда ће сваки њен модел $\mathcal{M}$ имати скуп уређених нераспознатљивих и то ће бити скуп $\{ c_i^{\mathcal{M}} \mid i \in I \}$.
Нека је Δ коначан подскуп скупа Γ. Нека је $I_0 = \{ i \in I \mid c_i$ се појављује у скупу $\Delta\}$ и нека је $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ скуп формула које учествују у $\Pi \cap \Delta$. Нека је $\operatorname{Fv}(\varphi_1) \cup \operatorname{Fv}(\varphi_2) \cup \cdots \cup \operatorname{Fv}(\varphi_m) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Нека је $\mathcal{N}$ бесконачан модел теорије T и нека је $<_{\mathcal{N}}$ било које линеарно уређење скупа N. Дефинишимо $F : [N]^n \longrightarrow P(\{1, 2, \ldots, n\})$ на следећи начин:

За $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ нека је $F(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \{k \mid \mathcal{N} \models \varphi_k(a_1, \ldots, a_n)\}$.

Тада $A \sim B$ акко $F(A) = F(B)$ дефинише једну еквиваленцију скупа $[N]^n$ којој су класе $\{F^{-1}(X) \mid X \in P(\{1, 2, \ldots, m\}$ па $\sim$ има коначно много класа (јер $\{1, 2, \ldots, m\}$ има 2^m подскупова). По Разијевој теореми (2.5.7) постоји H бесконачан подскуп скупа N, такав да је $[H]^n$ садржано у једној класи релације $\sim$. Нека је та класа $F^{-1}(X)$ за неко $X \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$. Нека је f било које пресликавање I_0 у H које чува уређење, тј. нека важи $f(i) <_{\mathcal{N}} f(j)$ акко $i < j$. Означимо са h_i елемент $f(i)$. Сада за све $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ и све $j_1 < j_2 < \cdots < j_n$

$$\mathcal{N} \models \varphi_k(h_{i_1}, h_{i_2}, \ldots, h_{i_n}) \quad \text{акко} \quad k \in X \quad \text{акко} \quad \mathcal{N} \models \varphi_k(h_{j_1}, h_{j_2}, \ldots, h_{j_n}).$$

Ако за $i \in I_0$ интерпретирамо c_i са h_i, онда $(\mathcal{N}, h_i)_{i \in I_0} \models \Delta$. Дакле, Δ је задовољиво, па је Γ задовољиво. □

Дефиниција 2.5.9 Нека је $(X, <_X)$ уређен скуп и $\mathcal{M}$ структура која га садржи. За скуп $\{\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ и $x_1 < x_2 < \cdots < x_n \}$ ћемо рећи да је **тип нераспознатљивих** и обележаваћемо га са $\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(X, <_X)$.□

Тврђење 2.5.10 Нека је $(X, <_X)$ скуп уређених нераспознатљивих структуре $\mathcal{M}$ и нека је $(Y, <_Y)$ бесконачан линеарно уређен скуп. Постоји структура $\mathcal{N}$ таква да је $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ и $(Y, <_Y)$ је скуп уређених нераспознатљивих структуре $\mathcal{N}$ и да важи $\operatorname{tp}^{\mathcal{M}}(X, <_X) = \operatorname{tp}^{\mathcal{N}}(Y, <_Y)$. □

Особина 2.5.11 Нека је $L_1 \subseteq L_2$ и нека је $\mathcal{M}_i$ структура језика L_i таква да је $\mathcal{M}_1$ сужење структуре $\mathcal{M}_2$ на језик L_1.

1. Ако је $(X, <)$ скуп уређених нераспознатљивих структуре $\mathcal{M}_2$, онда је $(X, <)$ скуп уређених нераспознатљивих структуре $\mathcal{M}_1$;

2. Ако је X скуп нераспознатљивих структуре $\mathcal{M}_2$, онда је X скуп нераспознатљивих структуре $\mathcal{M}_1$. □

Дефиниција 2.5.12 Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L и нека је $X \subseteq M$.

[14] $L^* = L \cup \{ c_i \mid i \in I \}$ уз $L \cap \{ c_i \mid i \in I \} = \emptyset$

1. $H(X)$ је подскуп скупа M који се добија тако што се додају све константе, тј. интерпретације симболе константи и онда затвори за интерпретацију функцијских симбола. Тачније: $X_0 = X \cup \{c^{\mathcal{M}} \mid c \in ConstL\} \subseteq \mathcal{M}$. $X_{n+1} = X_n \cup \{\, f^{\mathcal{M}}(\overline{x}) \mid f \in FunL$ и $\overline{x} \in X_n^{<\omega}\}$.

   $H(X) = \bigcup_{n<\omega} X_n$.

2. Ако је $H(X)$ непразан, онда нека је $\mathcal{H}(X)$ подструктура структуре $\mathcal{M}$ чији је скуп носач $H(X)$. За $\mathcal{H}(X)$ кажемо да је **љуска скупа X**. □

Ако је бар један од скупаова X и $ConstL$ непразан, онда ће и $H(X)$ бити непразан и тада ће постојати $\mathcal{H}(X)$. $\mathcal{H}(X)$ је у неком смислу подмодел генерисан скупом X:

- $\mathcal{H}(X)$ је подструктура структуре $\mathcal{M}$ и
- Ако је $X \subseteq N$ и $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$, онда је $\mathcal{H}(X) \subseteq \mathcal{N}$.

Очигледно је да је $|\,\mathcal{H}(X)\,| = |\,X\,| + \|\,L\,\|$.

За разлику од алгебре, где је јасан појам објекта генерисаног скупом, када су релације „уплету”, ствар се компликује и морамо се одлучити да ли ће нам главни појам бити „подструктура” или „елементарна подструктура”. Ако је $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$ и X коначан скуп рационалних бројева, онда је очигледно да је $(X, < \cap X^2) \subseteq (\mathbb{Q}, <) = \mathcal{M}$ и да није $(X, < \cap X^2) \preccurlyeq (\mathbb{Q}, <) = \mathcal{M}$. Са друге стране, ако је $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ и $X \subseteq N$, онда постоји структура $\mathcal{N}'$таква да је $X \subseteq N'$ и $\mathcal{N}' \preccurlyeq \mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$.

С тим у вези је следеће разматрање.
Нека је $\exists x\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \in ForL$ формула којој су слободне променљиве баш $y_1, \ldots, y_n$. За сваку такву формулу језика L уочимо симбол n-арне фукнције $f_{\exists x\varphi(x,y_1,\ldots,y_)}$. Нека је $\widehat{L}$ језик који настаје кад језику L додамо све такве симболе функција. Тачније,
$\widehat{L} = L \cup \{\, f_{\exists x\varphi(x,\overline{y})} \mid \exists x\varphi(x, \overline{y}) \in ForL$ и $|\,\mathrm{Fv}(\exists x\varphi(x, \overline{y}))\,| = n$ и $f_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}$ је n-арни функцијски симбол $\}$.

Нека је $\Sigma_L = \{\forall \overline{y}(\exists x\varphi(x, \overline{y}) \Longrightarrow \varphi(f_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{y}), \overline{y})) \mid \exists x\varphi(x, \overline{y}) \in ForL\}$

Тврђење 2.5.13 Нека је T теорија језика L. Важи:

1. $L \subseteq \widehat{L}$ и $\|\widehat{L}\| = \|L\|$;

2. Ако је T непротивречна теорија језика L, онда је $T \cup \Sigma_L$ непротивречна теорија језика $\widehat{L}$ и сваки модел теорије T (језика L) може да се прошири до модела теорије $T \cup \Sigma_L$ (језика $\widehat{L}$).

3. Ако су $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ и $\widehat{\mathcal{M}}, \widehat{\mathcal{N}}$ њихова раширења у језик $\widehat{L}$ и модели теорије $T \cup \Sigma_L$, онда из $\widehat{\mathcal{M}} \subseteq \widehat{\mathcal{N}}$ следи $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$. □

Доказ:

1. Очигледно.

2. Нека је $\mathcal{M} \models T$, нека је $|\mathrm{Fv}(\exists x \varphi(x,\overline{y}))\,| = n$, нека је $a_1,\ldots,a_n \in M^n$ и нека је $d \in M$ произвољно изабран.

Ако је $\varphi(\mathcal{M},\overline{a})$ непразан[15], онда нека је b његов произвољно изабран елемент. Нека је тад $f^{\widehat{\mathcal{M}}}_{\exists x\varphi(x,\overline{y})} = b$; У супротном, нека је $f^{\widehat{\mathcal{M}}}_{\exists x\varphi(x,\overline{y})} = d$.

На тај начин се у структури $\mathcal{M}$ могу интерпретирати сви симболи скупа $\widehat{L} \setminus L$ и на тај начин се добије структура $\widehat{\mathcal{M}}$.

Очигледно важи $\widehat{\mathcal{M}} \models \forall \overline{y}(\exists x\varphi(x,\overline{y}) \Longrightarrow \varphi(f_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{y}),\overline{y}))$, па је структура $\mathcal{M}$ проширена до структуре теорије $T \cup \Sigma_L$.

3. За почетак, $\widehat{\mathcal{M}} \subseteq \widehat{\mathcal{N}}$ повлачи $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$.

Ако за неке $a_1,\ldots,a_n \in M^n$, постоји $b \in N$ такво да важи $\mathcal{N} \models \varphi(b,\overline{a})$, онда важи $\mathcal{N} \models \exists x\,\varphi(x,\overline{a})$, а тиме и $\widehat{\mathcal{N}} \models \exists x\,\varphi(x,\overline{a})$, што уз $\widehat{\mathcal{N}} \models \forall \overline{y}(\exists x\varphi(x,\overline{y}) \Longrightarrow \varphi(f_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{y}),\overline{y}))$, даје $\widehat{\mathcal{N}} \models \varphi(f_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{a}),\overline{a}))$. $\widehat{\mathcal{M}} \subseteq \widehat{\mathcal{N}}$ повлачи $f^{\widehat{\mathcal{M}}} = f^{\widehat{\mathcal{N}}}_{|M}$, па је $f^{\widehat{\mathcal{N}}}_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{a}) = f^{\widehat{\mathcal{N}}}_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{a}) \in M$. Дакле, за неко $d \in M$ важи $\mathcal{M} \models \varphi(d,\overline{a})$, па, по Тарски-Вот тесту, закључујемо да је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$. $\square$

Тврђење 2.5.14 - Сколемова (*Skolem*) теорема : Нека је T теорија језика L. Постоје језик L^* и његова теорија T^* такви да је:

1. $L \subseteq L^*$, $T \subseteq T^*$ и $\|\,L\,\| = \|\,L^*\|$;
2. Сваки модел теорије T може да се прошири до модела теорије T^*;
3. T^* је модлски потпуна[16].

Доказ: Нека је T теорија језика L. Нека је $L_0 = L$, $L_{n+1} = \widehat{L_n}$ и $L^* = \bigcup_{n<\omega} L_n$. Важи $\|\,L_{n+1}\,\| = \|\,L_n\|$, па је $\|\,L^*\| = \|\,L\,\| \cdot \aleph_0 = \|\,L\,\|$. Нека је $T_0 = T$, $T_{n+1} = \widehat{T_n}$ и $T^* = \bigcup_{n<\omega} T_n = T \cup \bigcup_{n<\omega} \Sigma_{L_n}$. Примењујући тврђење 2.5.13 индуктивно, лако се доказују тачке 2 и 3 овог тврђења. $\square$

За елементе скупа $L^* \setminus L$ кажемо да су **Сколемове функције језика L**, а за елементе скупа $\Sigma^*_L = T^* \setminus T$ да су **Сколемове аксиоме језика L**. Индекс у ознаци Σ^*_L је оправдан јер Сколемове аксиоме не зависе од теорије T већ само од језика L. Ако су T_1 и T_2 две теорије језика L, онда су $T^*_i = T_i \cup \Sigma^*_L$ теорије које задовољавају услове тврђења 2.5.14.

За теорију језика L у којој за сваку формулу $\exists x\varphi(x,\overline{y}) \in ForL$ постоји L-терм $t_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{y})$ такав да је доказиво $\forall \overline{y}\,(\exists x\varphi(x,\overline{y}) \Longrightarrow \varphi(t_{\exists x\varphi(x,\overline{y})}(\overline{y}),\overline{y}))$ кажемо **да има уграђене Сколемове функције**. Наравно, то кажемо без обзира да ли смо спровели претходну конструкцију или је почетна теорија већ задовољавала тражени услов.

[15] $\mathcal{M} \models \exists x\varphi(x,\overline{a})$

[16] Ако су $\mathcal{M}^*, \mathcal{N}^* \models T^*$ и ако је $\mathcal{N}^* \subseteq \mathcal{M}^*$, онда је $\mathcal{N}^* \preccurlyeq \mathcal{M}^*$

Дефиниција 2.5.15 Ако је $\mathcal{M}$ модел теорије која има уграђене Сколемове функције и $X \subseteq M$, онда за љуску $\mathcal{H}(X)$ кажемо да је **Сколемова љуска скупа X**. □

- $\mathcal{H}(X)$ је елементарна подструктура структуре $\mathcal{M}$.
- Ако је $X \subseteq Y \subseteq M$, онда је $\mathcal{H}(X) \preccurlyeq \mathcal{H}(Y)$.

Тврђење 2.5.16 Доња Ловенхајм-Сколемова теорема
Нека је $\mathcal{M}$ бесконачна L структура и нека је $X \subseteq M$. Тада постоји L структура $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ таква да $X \subseteq N$ и $|N| \leqslant |X| + |L| + \aleph_0$. □

За структуре које се праве као Сколемове љуске скупова нераспознатљивих кажемо да су Еренфојхт-Мостовски[17] структуре.

Тврђење 2.5.17 Нека је T^* потпуна теорија која има уграђене Сколемове функције и нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ њени модели. Нека су $(X, <)$ и $(Y, <)$ скупови уређених нераспознатљивх структура $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ такви да је $\mathrm{tp}(X, <) = \mathrm{tp}(Y, <)$.

1. $\mathrm{Dtp}(\mathcal{H}(X)) = \mathrm{Dtp}(\mathcal{H}(Y))$;
2. Ако је μ пресликавање из X у Y које чува уређење, онда се продужава до елементарногу утапања μ^* Сколемове љуске X у Сколемову љуску Y-а. Шта више, важи $\mu^*(\mathcal{H}(X)) = \mathcal{H}(\mu(X))$;
3. Ако је μ пресликавање из X у њега самог и ако чува уређење, онда се продужава до аутоморфизма структуре $\mathcal{H}(X)$. □

Тврђење 2.5.18 Еренфојхт-Мостовски (Ehrenfeucht-Mostowski):
Нека је T потпуна теорија која има бесконачне моделе и нека је $(X, <)$ неки бесконачан линеарно уређен скуп. Тада постоји структура $\mathcal{M} \models T$ у којој је $(X, <)$ скуп уређених нераспознатљивих и свако пресликавање скупа X које чува уређење се продужава до аутоморфизма структуре $\mathcal{M}$. □

Тврђење 2.5.19 Нека је T пребројива потпуна теорија језика L. Ако T има бесконачне моделе, онда има пребројив модел $\mathcal{M}$ такав да за сваки кардинал $\kappa > \aleph_0$ постоји модел $\mathcal{N}$ моћи κ такав да је $\mathrm{Dtp}(\mathcal{M}) = \mathrm{Dtp}(\mathcal{N})$. □

[17] Ehrenfeucht-Mostowski

Глава 3

Мале и велике структуре

Модели теорије који се утапају (елементарно) у све друге моделе, и који су дакле, интуитивно мали, су уједно и модели који реализују најмање могуће типова. Зовемо их простим. Са друге стране су модели теорије који реализују највише могуће типова. Показује се да су у њих утапају (елементарно) сви други модели те теорије кардиналности мање или једнаке датом модели. Зовемо их засићеним. Ово поглавље се бави таквим структурама, ондосима међу њима и условима за њихово постојање.

3.1 Прости модели

Дефиниција 3.1.1 Нека је T комплетна[1] теорија и $\mathcal{M} \models T$. Ако за свако $\mathcal{N} \models T$ постоји елментарно $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, онда за $\mathcal{M}$ кажемо да је **прост модел теорије** T. Ако је $A \subseteq M$ и ако за свако $\mathcal{N} \models T$ и свако елементарно $\mu : A \longrightarrow N$ постоји елементарно $\mu* : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ које продужава μ, онда за $\mathcal{M}$ кажемо да је **прост модел теорије** T **над скупом** A. $\square$

Пример 3.1.2 Нека је $T = \mathrm{ACF}_0$ и F алгебарско затворење поља рационалних бројева. Свако ACF_0 поље садржи копију рационалних бројева па ако је $K \models \mathrm{ACF}_0$ онда се F утапа у K. Пошто је ACF_0 моделски потпуна теорија то утапање је елементарно. Зато је F прост модел теорије ACF_0. $\square$

Пример 3.1.3 Слично претходном примеру, реално затворење поља рационалних бројева је прост модел теорије RCF. $\square$

[1] комплетност теорије следи из постојања простог модела или модела простог над скупом, па смо је могли изоставити из дефиниције

Пример 3.1.4 Слично, због моделске потпуности, $(\mathbb{Q}, >)$ је прост модел теорије DLO. $\square$

Пример 3.1.5 $(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$ је прост молед теорије $\mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$. $\square$

Дефиниција 3.1.6 Нека је L највише пребројив језик, T његова потпуна теорија и $\mathcal{M} \models T$. Ако је за свако $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ тип $\mathrm{tp}(\overline{a}) \in S(T)$ изолован, онда кажемо да је $\mathcal{M}$ **атомски модел теорије** T. Ако је $A \subseteq M$ за свако $\overline{a} \in \mathcal{M}^{<\omega}$ тип $\mathrm{tp}(\overline{a}/A) \in S^{\mathcal{M}}(A)$ изолован, онда кажемо да је $\mathcal{M}$ **атомски модел теорије** T **над скупом** A. $\square$

Тврђење 3.1.7 Нека је L највише пребројив језик, T задовољива и потпуна L-теорија која има бесконачне моделе и нека је $\mathcal{M} \models T$.

$\mathcal{M}$ је прост модел акко је $\mathcal{M}$ атомски и пребројив модел.

Доказ:
„ $\Rightarrow$ ” : Нека је $\mathcal{M}$ прост модел теорије T. Пошто је T теорија највише пребројивог језика, она има пребројив модел. У тај модел теорије T се, као и у све остале, утапа $\mathcal{M}$ јер је прост, па и он сам $(\mathcal{M})$ мора бити пребројив. Ако $\overline{a} \in M^{<\omega}$ реализује $p \in S(T)$ и μ утапа $\mathcal{M}$ у неки $\mathcal{N} \models T$, онда и $\mu(\overline{a}) \in N^{<\omega}$ реализује исти p, па p не сме бити неизолован, јер такав може да се испусти (у неком моделу у који се $\mathcal{M}$ утапа).

„ $\Leftarrow$ ” : Нека је $\mathcal{M}$ пребројив атомски модел теорије T и нека је $\mathcal{N}$ било који други модел теорије T. Нека је $M = \{a_i | \ i < \omega\}$ добро уређење носача структуре $\mathcal{M}$.

1. Нека је $\mu_0 = \emptyset$ и $\emptyset = \{a_j | \ j < 0\}$.

2. Ако је конструисано елементарно пресликавање $\mu_i : \{a_j | \ j < i\} \longrightarrow N$, продужимо га до елементарног $\mu_{i+1} : \{a_j | \ j < i+1\} \longrightarrow N$.

Пошто је $\mathcal{M}$ атомски, $tp^{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_i)$ је изолован. Нека је $\varphi(v_0, \ldots, v_i)$ формула која га изолује. Тада је $\exists v_i \varphi(v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i) \in tp^{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_{i-1})$, а пошто је μ_i елементарно биће и $\exists v_i \varphi(v_0, \ldots, v_{i-1}, v_i) \in tp^{\mathcal{N}}(\mu(a_0), \ldots, \mu(a_{i-1}))$, па постоји $b \in N$ такво да $\mathcal{N} \models \varphi(\mu(a_0), \ldots, \mu(a_{i-1}), b)$, а тиме и $tp^{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_i) = tp^{\mathcal{N}}(\mu(a_0), \ldots, \mu(a_{i-1}), b)$. Ако μ_{i+1} дефинишемо једнакошћу $\mu_{i+1} = \mu_i \cup \{(a_i, b)\}$, очигледно је (из $tp^{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_i) = tp^{\mathcal{N}}(\mu(a_0), \ldots, \mu(a_i))$) да је μ_{i+1} елементарно.

$\mu = \bigcup_{i<\omega} \mu_i$ је очигледно елементарно и домен му је цео M па је елементарно утапање. Дакле, $\mathcal{M}$ је прост модел теорије T. $\square$

Тврђење 3.1.8 Ако је L највише пребројив језик и T његова потпуна теорија која има бесконачне моделе, онда су следећи искази еквивалнетни:

1) T има прост модел;

2) T има атомски пребројив модел;

3) изоловани типови су густи у $S_n(T)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Доказ:
„$1 \Leftrightarrow 2$" : Показано тврђењем 3.1.7.
„$2 \Rightarrow 3$" : Нека је $\mathcal{M}$ атомски модел теорије T и $\varphi(\overline{x})$ формула језика L сагласна са теоријом T. Дакле, $T \models \exists\overline{x}\varphi(\overline{x})$. Нека је $\overline{a} \in M^{<\omega}$ сведок те формуле у структури $\mathcal{M}$. Тада је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ изолован и садржан у $[\varphi]$.
„$3 \Rightarrow 2$" : Нека је $N_i = \{\neg\varphi(x_1, \dots, x_i) \mid \varphi(x_1, \dots, x_i)$ изолује тип у $S_i(T)\}$. Ако L-формула $\theta(x_1, \dots, x_i)$ изолује N_i, онда је $\neg\theta(x_1, \dots, x_i) \in N_i$, што је немогуће. Дакле, N_i је или несагласан скуп формула или је неизоловани тип, могуће непотпун. На основу тврђења 2.4.4, постоји пребројив модел теорије T који испушта све елементе скупа $\{N_{i+1} \mid i \in \omega\}$. То је тражена структура. □

Тврђење 3.1.9 Лема потребна за доказ тврђења 3.1.11 и 6.1.3:
Нека је L највише пребројив језик, T његова потпуна теорија, $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$, κ бесконачачн кардинал и $|A| \leqslant \kappa$. Ако за неку формулу ϕ важи $|\,[\,\phi\,]\,| > \kappa$, онда постоји формула θ таква да је и $|\,[\,\phi\wedge\theta\,]\,| > \kappa$ и $|\,[\,\phi\wedge\neg\,\theta\,]\,| > \kappa$. $(\,[\,\phi\,] = \{p \in S_n^{\mathcal{M}}(A) \,|\, \phi \in p\}\,)$

Доказ: Претпоставимо супротно. Нека је $p = \{\ \theta \mid |\,[\,\phi \wedge \theta\,]\,| > \kappa\}$. Пошто смо претпоставили да ни за једну формулу θ не важи да је и $|\,[\,\phi \wedge \theta\,]\,| > \kappa$ и $|\,[\,\phi \wedge \neg\,\theta\,]\,| > \kappa$, онда ће за свако $\theta \in p$ да важи $|\,[\,\phi \wedge \neg\,\theta\,] \leqslant \kappa$. Јасно је да је за свако $\theta \in ForL_A(x_1, \dots, x_n)$ важи тачно једно од $\theta \in p$ и $\neg\,\theta \in p$ (јер смо претпоставили да ни за једно θ није истовремено и $|\,[\,\phi \wedge \theta\,]\,| > \kappa$ и $|\,[\,\phi \wedge \neg\,\theta\,]\,| > \kappa$ и јер је $[\,\phi \wedge \theta\,] \cup [\,\phi \wedge \neg\,\theta\,] = [\,\phi\,]$ и $|\,[\,\phi\,]\,| > \kappa$). Дакле, ако је p сагласан са T биће потпун тип. Нека је $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ коначан подскуп p-а.

-Ако је $\bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j \in p$, онда је $|\,[\,\phi \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j\,]\,| > \kappa$, па постоји тип (има их непребројиво много) који садржи $\phi \wedge \bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j$ а тиме и $\bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j$, па је $\bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j$ задовољива.

-Ако није $\bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j \in p$, онда мора бити $\neg \bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j \in p$, тј. $\bigvee_{j=1}^{k} \neg\,\varphi_j \in p$, а тиме и $|[\bigvee_{j=1}^{k} \neg\,\varphi_j]| > \kappa$. Пошто је $[\bigvee_{j=1}^{k} \neg\,\varphi_j] = \bigcup_{j=1}^{k} [\neg\,\varphi_j]$, биће $|[\neg\,\varphi_j]| > \kappa$, за бар једно j. Али, онда је $\neg\,\varphi_j \in p$, па није $\varphi_j \in p$, што је у супротности с тим да је $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ подскуп p-а.
Дакле, p је потпун n-тип. Ако је $q \in [\phi] \setminus \{p\}$, онда постоји $\theta \in q \setminus p$. Дакле, $q \in [\phi \wedge \theta]$ и $p \notin [\phi \wedge \theta]$. Ако означимо $\neg\,\theta$ са ψ, онда се може рећи да је $q \in [\phi \wedge \neg\,\psi]$ и $p \in [\phi \wedge \psi]$. Дакле, ако је $q \in [\phi] \setminus \{p\}$, онда је $q \in [\phi \wedge \neg\,\psi]$, за неко $\psi \in p$. Тачније, ако је $q \in [\phi] \setminus \{p\}$, онда је $q \in \bigcup_{\psi \in p} [\varphi \wedge \neg\,\psi]$.
Дакле, $[\phi] = \{p\} \cup \bigcup_{\psi \in p} [\phi \wedge \neg\,\psi]$, па $|\,[\,\phi\,]\,| = |\{p\}| + |\bigcup_{\psi \in p} [\phi \wedge \neg\,\psi]| \leqslant \kappa$, јер за свако $\psi \in p$ важи $|[\phi \wedge \neg\,\psi]| \leqslant \kappa$ и $|p| \leqslant \kappa$, што је у супротности с $|\,[\,\phi\,]\,| > \kappa$. □

Тврђење 3.1.10 Лема потребна за доказ тврђења 3.1.11 и 6.1.4:
Нека је L највише пребројив језик, T његова потпуна теорија, $\mathcal{M} \models T$ и $A \subseteq M$. Ако за неку формулу $\phi(\overline{x})$ важи да је $[\,\phi(\overline{x})\,]$ непразан и не садржи ниједан изоловани тип из $S_n^{\mathcal{M}}(A)$, онда постоји формула $\theta(\overline{x})$ таква да ни $[\,\phi(\overline{x}) \wedge \theta(\overline{x})\,]$ ни $[\,\phi(\overline{x}) \wedge \neg\,\theta(\overline{x})\,]$ не садрже изоловане типове и непразни су.

Доказ: Ако би бар један од $[\,\phi(\overline{x})\wedge\theta(\overline{x})\,]$ и $[\,\phi(\overline{x})\wedge\neg\,\theta(\overline{x})\,]$ садржао изоловани тип онда би тај тип садржавала и њихова унија $[\,\phi(\overline{x})\,]$.

Ако би за свако $\theta(\overline{x})$ бар један од $[\,\phi(\overline{x})\wedge\theta(\overline{x})\,]$ и $[\,\phi(\overline{x})\wedge\neg\,\theta(\overline{x})\,]$ био празан (а не могу истовремено бити оба), онда нека је $p=\{\theta(\overline{x})\,|\,[\,\phi(\overline{x})\wedge\theta(\overline{x})\,]\neq\emptyset\}$.

$(\star)$ $\quad\theta(\overline{x})\notin p$ акко $[\,\phi(\overline{x})\wedge\theta(\overline{x})\,]=\emptyset$.

Нека је $q\in[\,\phi(\overline{x})\,]$. Ако је $q\neq p$. Тада постоји $\psi(\overline{x})\in q\setminus p$. Важи:

•из $\psi(\overline{x})\in q$ следи да је $q\in[\,\phi(\overline{x})\wedge\psi(\overline{x})\,]$;

•из $(\star)$ и $\psi(\overline{x})\notin p$ следи да је $[\,\phi(\overline{x})\wedge\psi(\overline{x})\,]=\emptyset$.

Дакле, не може бити $q\neq p$. Другим речима:

- p је тип;
- p је једини елемент скупа $[\,\phi(\overline{x})\,]$, па $\phi(\overline{x})$ изолује p. □

Тврђење 3.1.11 Ако је L највише пребројив језик, T његова потпуна теорија, $\mathcal{M}\models T$ пребројив, $A\subseteq M$ и $|S_n^{\mathcal{M}}(A)|<2^{\aleph_0}$, онда:

1) изоловани типови у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ су густи;

2) $|S_n^{\mathcal{M}}(A)|\leqslant\aleph_0$.

Доказ:

1. Ако је $[\theta(\overline{x})]\neq\emptyset$ и ако у $[\theta(\overline{x})]$ нема изолованих типова, мора постојати $\phi(\overline{x})$ таква да су и $[\theta\wedge\phi]$ и $[\theta\wedge\neg\phi]$ непразни (и, наравно, не садрже изоловане типове).

Претпоставимо да изоловани типови не чине густ скуп у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. Направићемо бинарно дрво формула чија ће свака грана бити један потпун n-тип и различите гране ће давати различите типове, па ће их имати бар $2^{\aleph_0}$.

корак 1: Нека је $\varphi(\overline{x})$ било која формула таква да је $[\varphi(\overline{x})]$ непразан и не садржи изоловане типове. Такав постоји јер изоловани типови не чине густ скуп у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$. По тврђењу 3.1.10 постоји ψ таква да су и $[\varphi\wedge\psi]$ и $[\varphi\wedge\neg\psi]$ непразни и не садрже изоловане типове. Означимо $\varphi\wedge\psi$ са φ_1, $\varphi\wedge\neg\psi$ са φ_0 и φ са $\varphi_\emptyset$.

Ако смо за све $\sigma\in 2^i$ конструисали φ_σ прелазимо на

корак i + 1: За φ_σ, по тврђењу 3.1.10, постоји ψ такво да су и $[\varphi_\sigma\wedge\psi]$ и $[\varphi_\sigma\wedge\neg\psi]$ непразни и не садрже изоловане типове. Нека су $\varphi_{\sigma,1}=\varphi_\sigma\wedge\psi$ и $\varphi_{\sigma,0}=\varphi_\sigma\wedge\neg\psi$.

Из конструкције је јасно да за било које $\sigma,\tau\in 2^{\aleph_0}$ важи:

- $[\varphi_\tau]$ је непразан и не садржи изоловане типове;
- Ако је $\sigma\subset\tau$ онда $\varphi_\tau\models\varphi_\sigma$;
- $\varphi_{\tau,j}\models\neg\varphi_{\tau,1-j}$

Нека је $f\in 2^\omega$. Важи $[\varphi_{f_{|1}}]\supset[\varphi_{f_{|2}}]\supset[\varphi_{f_{|3}}]\supset\ldots$.

Дакле, скуп $\{[\varphi_{f_{|i+1}}]\mid i\in\omega\}$ представља фамилију затворених скупова која има својство коначног пресека. $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ је компактан тополошки простор, па

$\{\,[\varphi_{f_{|i+1}}]\mid i\in\omega\}$ има непразан пресек. Изаберимо произвољан елемент тог пресека и означимо га са p_f. Ако је $f\neq g$ онда постоји $i\in\omega$ такав да је $f_{|i}=g_{|i}$ и $f(i)\neq g(i)$. По конструкцији је $\varphi_{f_{|i+1}}\models\neg\varphi_{g_{|i+1}}$ па су p_f и p_g различити. Дакле, додељивање $f\mapsto p_f$ је $1-1$ па следи $2^{\aleph_0}=|2^\omega|=|\{p_f\mid f\in 2^\omega\}|\leqslant|S_n^{\mathcal{M}}(A)|$.

2. Слично како малопре, направићемо бинарно дрво.

Нека је $|S_n^{\mathcal{M}}(A)|>\aleph_0$. Пошто формула има пребројиво много, тј. $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ је унија пребројиво много скупова, бар један од њих мора да буде непребројив. Нека је то $[\varphi_\emptyset]$.

корак 1: По тврђењу 3.1.9 постоји формула ψ, таква да су и $[\varphi\wedge\psi]$ и $[\varphi\wedge\neg\,\psi]$ непребројиви. Нека су $\varphi_1=\varphi\wedge\psi$ и $\varphi_0=\varphi\wedge\neg\,\psi$. Важи:

- $|\,[\varphi_j]\,|>\aleph_0$;
- $\varphi_j\models\neg\,\varphi_{1-j}$.

Ако смо за све $\sigma\in 2^i$ конструисали φ_σ, онда прелазимо на

корак $\mathbf{i+1}$: Пошто $|\,[\varphi_\sigma]\,|>\aleph_0$, опет на основу тврђања 3.1.9 постоји формула θ, таква да су и $[\varphi\wedge\theta]$ и $[\varphi\wedge\neg\,\theta]$ непребројиви. Нека су $\varphi_{\sigma,1}=\varphi_\sigma\wedge\theta$ и $\varphi_{\sigma,0}=\varphi_\sigma\wedge\neg\,\theta$. Важи:

- $|\,[\varphi_{\sigma,j}]\,|>\aleph_0$;
- $\varphi_{\sigma,j}\models\neg\,\varphi_{\sigma,1-j}$.

Из конструкције је јасно да за било које $\sigma,\tau\in 2^{\aleph_0}$ важи:

$$\text{Ако је } \sigma\subset\tau \text{ онда } \varphi_\tau\models\varphi_\sigma.$$

Слично као малопре, сваком $f\in 2^\omega$ може се доделити $p_f\in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ и то додељивање је $1-1$, па типова има бар $2^{\aleph_0}$. □

Тврђење 3.1.12 Ако је $|S_n^{\mathcal{M}}(A)|<2^{\aleph_0}$, онда T има прост модел.

Доказ: Ако је $|S_n^{\mathcal{M}}(A)|<2^{\aleph}_0$, онда је, на основу тврђења 3.1.11, скуп изолованаих типова густ у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$, а тада, на основу тврђења 3.1.8, закључијемо да има прост модел. □

Ако је $|S_n^{\mathcal{M}}(A)|<2^{\aleph}_0$, онда је A највише пребројив па тада T има атомски над A тј прост над A. То следи из чињенице да кад апсорбујемо A у језик не мења се ништа, тј. L_A остаје највише пребројив, $T'=\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ је проширење теорије T у језик L_A и важи $|S_n(T')|<2^{\aleph}_0$, па T' има прост (и атомски пребројив) модел, а та структура је над A прост (и атомски модел) теорије T.

Дефиниција 3.1.13 Нека је κ бесконачан кардинал. Ако за свако $A \subseteq M$ за које важи $|A| < \kappa$, свако делимично елементарно пресликавање $f : A \longrightarrow M$ и свако $b \in M$ постоји делимично елементарно $g : A \cup \{b\} \longrightarrow M$ које продужава f, онда кажемо да је $\mathcal{M}$ κ**-хомогена** структура. Кажемо да је $\mathcal{M}$ **хомогена** структура, ако је $|\mathcal{M}|$-хомогена. □

Тврђење 3.1.14 Нека је $A \subseteq M$, $|A| < |M|$ и $\mu : A \longrightarrow M$ елементарно пресликавање. Ако је $\mathcal{M}$ хомогена структура, онда постоји аутоморфизам структуре $\mathcal{M}$ који продужава μ.

Специјално, две n-торке елемената хомогене структуре имају исти тип, акко постоји аутоморфизам који једну n-торку слика у другу. □

Доказ: Уредимо добро M: $M = \{a_\alpha |\ \alpha < |M|\}$.

почетак : Нека је $\mu_0 = \mu : A \longrightarrow M$. μ_0 је, по услову тврђења, елементарно пресликавање.

следбеник : Ако је за неко $\alpha < |M|$ конструисано елементарно пресликавање μ_α са особином $|\mathrm{dom}(\mu_\alpha)| < |M|$, онда се због хомогености структуре $\mathcal{M}$, оно (μ_α) може продужити до елементарног $\eta_\alpha = \mu_\alpha \cup \{a_\alpha, b)\}$. Пресликавање η_α^{-1} је такође елементарно (резоновање слично као у доказу тврђења 2.2.6), па се може продужити до ементарног $\nu_\alpha = \eta_\alpha^{-1} \cup \{(a_\alpha, d)\}$. Тада је ν_α^{-1} елементарно пресликавање. Означимо са $\mu_{\alpha+1}$ њему инверзно пресликавање. Важи $\mu_{\alpha+1} = \mu_\alpha \cup \{(a_\alpha, b), (d, a_\alpha)\}$.

1. $\mu_{\alpha+1}$ је елементарно пресликавање у чијем домену и скупу слика се налази a_α.
2. Домен пресликавања $\mu_{\alpha+1}$ има највише два елемента више него домен пресликавања μ_α, па ако је било $|\mathrm{dom}(\mu_\alpha)| < |M|$, онда је $|\mathrm{dom}(\mu_{\alpha+1})| < |M|$.

гранични : Ако је $\alpha \leqslant |M|$ гранични ординал такав да је за сваки $\beta < \alpha$ пресликавање μ_β елементарно и да је $|\mathrm{dom}(\mu_\beta)| < |M|$, онда нека је $\mu_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mu_\beta$. Очигледно је да је $|\mathrm{dom}(\mu_\alpha)| \leqslant |M|$ и да је μ_α елементарно пресликавање.

$\mu_{|M|}$ је тражени аутоморфизам.◇

Ако је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\bar{b})$, онда је пресликавање $\mu = \{(a_i, b_i) \,|\, i < n\}$ елементарно. По малопређашњем, μ се може продужити до аутоморфизма. □

Тврђење 3.1.15 Атомски модели су $\aleph_0$-хомогени.

Доказ: Нека је $\mathcal{M}$ атомски модел и нека је $\mu = \{(a_i, b_i) \,|\, i < n\}$ елементарно пресликавање и $d \in M$. Нека формула $\varphi(\overline{x}, y)$ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}, d)$. Тада је $\exists y\, \varphi(\overline{x}, y) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a})$ и $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b})$, па $\mathcal{M} \models \exists y\, \varphi(\overline{b}, y)$. Нека је $e \in M$ сведок формуле $\exists y\, \varphi(\overline{b}, y)$, тј. нека је $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{b}, e)$. Тада је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}, d) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}, e)$, па је $\eta = \mu \cup \{(b, d)\}$ елементарно пресликавање. Дакле, $\mathcal{M}$ је $\aleph_0$-хомогена структура. $\square$

Дефиниција 3.1.16 Нека је T потпуна теорија и $\mathcal{M}$ њен модел. За скуп свих типова (из $S(T) = \bigcup_{1 \leqslant n < \omega} S_n(T)$) који се реализују у $\mathcal{M}$ кажемо да је **дијаграм типова структуре** $\mathcal{M}$. Дијаграм типова структуре $\mathcal{M}$ ћемо означавати са $\mathrm{Dtp}(\mathcal{M})$. $\square$

Тврђење 3.1.17 Нека је L највише пребројив језик, T његова потпуна теорија и $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ пребројиви и хомогени модели теорије T. $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ акко $\mathrm{Dtp}(\mathcal{M}) = \mathrm{Dtp}(\mathcal{N})$.

Доказ: „ $\Rightarrow$ ” : Очигледно.

„ $\Leftarrow$ ” : Нека су $\{a_i \,|\, i < \omega\} = M$ и $\{b_i \,|\, i < \omega\} = N$
Конструисаћемо низ елементарних пресликавања из подскупова структуре $\mathcal{M}$ у структуру $\mathcal{N}$.

корак 0: Нека је $\mu_0 = \emptyset$. Пошто је T потпуна теорија, μ_0 је елементарно. Ако је конструисано μ_i, онда можемо да пређемо на

корак i + 1: Нека је j најмањи такав да a_j није у $\mathrm{dom}(\mu_i) = \{a_{i_1}, a_{i_2} \ldots, a_{i_k}\}$. Нека је $p = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_{i_1}, a_{i_2} \ldots, a_{i_k}, a_j)$. Пошто је $\mathrm{Dtp}(\mathcal{M}) = \mathrm{Dtp}(\mathcal{N})$, мора постојати $(d_1, \ldots, d_k, d) \in N^{k+1}$ такво да је

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_k, d) = p = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_{i_1}, a_{i_2} \ldots, a_{i_k}, a_j).$$

Тада је $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_k) = p = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\mu_i(a_{i_1}), \ldots, \mu_i(a_{i_k}))$ (последња једнакост јер је μ_i елементарно). Пресликавање које слика $(d_1, \ldots, d_k)$ у $(\mu_i(a_{i_1}), \ldots, \mu_i(a_{i_k}))$ је елементарно, па се, због хомогености структуре $\mathcal{N}$, може продужити до f аутоморфизма структуре $\mathcal{N}$.

Тада је

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\mu_i(a_{i_1}), \ldots, \mu_i(a_{i_k}), f(d)) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(d_1, \ldots, d_k, d) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, a_j),$$

па је $\eta_i = \mu_i \cup \{(a_j, f(d))\}$ елементарно. η_i^{-1} је такође елементарно. Нека је l најмањи такав да b_l није у $\mathrm{dom}(\eta_i^{-1}) = \{b_{i_1}, b_{i_2} \ldots, b_{i_{k+1}}\}$. Слично као малопре, η_i^{-1} се може продужити до елементарног ν_i таквог да је $\mathrm{dom}(\nu_i) = \mathrm{dom}(\eta_i^{-1}) \cup \{b_l\}$. Онда је $\mu_{i+1} = \nu_i^{-1}$ елементарно пресликавање.

Нека је $\mu = \bigcup_{i<\omega} \mu_i$. μ је очигледно елементарно пресликавање. Елемент $a_i \in M$ је додат домену пресликавања μ најкасније у i-том кораку, па је μ елементарно утапање, тј. домен му је цео M. Елементу $b_j \in N$ је нађен неки из M који се слика у њега, најкасније у j-ом кораку па је μ „на” елементарно пресликавање, а тиме и изоморфизам. $\square$

Последица 3.1.18 Нека је L највише пребројив језик, T његова потпуна теорија и $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ прости модели теорије T. Важи $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Доказ: По тврђењу 3.1.7, $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су атомски и пребројиви, па су по тврђењу 3.1.15 изоморфни. $\square$

3.2 Засићене структуре

Дефиниција 3.2.1 Нека је κ бесконачан кардинал, L највише пребројив језик, T његова комплетна теорија и $\mathcal{M} \models T$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ κ**-засићен** ако за свако $A \subseteq M$ за које важи $|A| < \kappa$ у $\mathcal{M}$ реализовано свако $p \in S^{\mathcal{M}}(A)$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ **засићен** ако је $|M|$-засићен. $\square$

Тврђење 3.2.2 За природан број n и бесконачан кардинал κ су еквивалентни искази:

- $\mathcal{M}$ κ-засићен;
- Ако је $A \subseteq M$, $|A| < \kappa$ и p (не обавезно потпун) n-тип над A, онда се p реализује у $\mathcal{M}$;
- Ако је $A \subseteq M$,$|A| < \kappa$ и p (не обавезно потпун) 1-тип над A, онда се p реализује у $\mathcal{M}$. $\square$

Тврђење 3.2.3 Нека је κ бесконачан кардинал.
Ако је $\mathcal{M}$ κ-засићена, онда је $\mathcal{M}$ κ-хомогена структура. $\square$

Тврђење 3.2.4 Нека је L највише пребројив језик, нека је $\mathcal{M}$ L-структура и нека је $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Тада:
$\mathcal{M}$ је $\aleph_0$-засићена акко је $\aleph_0$-хомогена и реализује све типове у $S(T)$.$\square$

Последица 3.2.5 Ако су две структуре засићени и пребројиви модели исте потпуне теорије највише пребројивог језика, онда су изоморфне једна другој. $\square$

Тврђење 3.2.6 Нека је $\mathcal{M}$ структура пребројивог језика. Постоји структура $\widetilde{\mathcal{M}} \succcurlyeq \mathcal{M}$ која је $\aleph_0$-хомогена и за коју важи $|\mathcal{M}| = |\widetilde{\mathcal{M}}|$.

Доказ: Прво ћемо за произвољну структуру $\mathcal{N}$ наћи $\mathcal{N}' \succcurlyeq \mathcal{N}$, такво да је $|N| = |N'|$ и да за сваку тројку $\overline{a}, \overline{b}, d \in N^{<\omega}$, такву да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b})$, постоји $e \in N'$ такво да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}'}(\overline{a}, d) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}'}(\overline{b}, e)$.

Нека је $\{(\overline{a}_\alpha, \overline{b}_\alpha, d) \,|\, \alpha < |N|\}$ набрајање свих тројки $(\overline{a}, \overline{b}, d)$ таквих да је $\overline{a}, \overline{b}, d \in N^{<\omega}$ и да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b})$. Правићемо елементарни ланац структура $\mathcal{N}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_1 \preccurlyeq \mathcal{N}_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathcal{N}_\alpha \ldots$.

1) Нека је $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$.$\diamond$

2) Ако је α гранични ординал, онда нека је $\mathcal{N}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}_\beta$.$\diamond$

3) За $\alpha = \beta+1$ нека је $\Pi(x) = \{\varphi(\overline{b}_\beta, x) \,|\, \mathcal{N}_\beta \models \varphi(\overline{a}_\beta, d)\} \cup \mathrm{Th}_{N_\beta}(\mathcal{N}_\beta)$. Нека је $\Delta(c)$ коначан подскуп скупа $\Pi(c)$ и нека је $\{\varphi_1(\overline{b}_\beta, x), \varphi_2(\overline{b}_\beta, x), \ldots, \varphi_k(\overline{b}_\beta, x)\} = \Delta(x) \setminus \mathrm{Th}_{N_\beta}(\mathcal{N}_\beta)$. Тада за свако $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ важи $\mathcal{N}_\beta \models \varphi_i(\overline{a}_\beta, d)$, а тиме и $\mathcal{N}_\beta \models \varphi_1(\overline{b}_\beta, d) \wedge \varphi_2(\overline{b}_\beta, d) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\overline{b}_\beta, d)$.

Дакле, $\mathcal{N}_\beta \models \exists x(\varphi_1(\overline{b}_\beta, x) \wedge \varphi_2(\overline{b}_\beta, x) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\overline{b}_\beta, x))$, а тиме $\mathcal{N}_\beta \models \varphi_1(\overline{b}_\beta, c) \wedge \varphi_2(\overline{b}_\beta, c) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\overline{b}_\beta, c)$, што уз $\mathcal{N}_\beta \models \mathrm{Th}_{N_\beta}(\mathcal{N}_\beta)$ даје $\mathcal{N}_\beta \models \Delta(c)$.

Дакле, $\Pi(c)$ је (коначно) задовољив скуп реченица језика $L_{N\beta} \cup \{c\}$. Нека је $\mathcal{N}_\alpha$ $(\alpha = \beta + 1)$ сужење њеног модела на језик L.$\diamond$

1, 2 и 3. чине индуктивну конструкцију елементарног ланца. Нека је $\mathcal{N}' = \bigcup_{\alpha<|N|} \mathcal{N}_\alpha$. Очигледно је да је $|\mathcal{N}'| = |\mathcal{N}|$.

1. Нека је $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}'$. Дакле, за сваку тројку $\overline{a}, \overline{b}, d \in M^{<\omega}$, такву да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b})$, постоји $e \in M_0$ такво да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(\overline{a}, d) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(\overline{b}, e)$.

2. Нека је $\mathcal{M}_{i+1} = \mathcal{M}'_i$. Дакле, за сваку тројку $\overline{a}, \overline{b}, d \in M_{i+1}^{<\omega}$, такву да је $\mathrm{tp}_i^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}_i^{\mathcal{M}}(\overline{b})$, постоји $e \in M_{i+1}$ такво да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_{i+1}}(\overline{a}, d) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}_{i+1}}(\overline{b}, e)$.

Нека је $\widetilde{\mathcal{M}} = \bigcup_{i<\omega} \mathcal{M}_i$. Очигледно је да је $|\widetilde{\mathcal{M}}| = |\mathcal{M}|$ и да је $\widetilde{\mathcal{M}}$ $\aleph_0$-хомогена структура. $\square$

Тврђење 3.2.7 Нека је T потпуна теорија пребројивог језика. T има пребројив засићен модел акко је $S(T)$ највише пребројив[2]. $\square$

Последица 3.2.8 1. Ако T има пребројив засићен модел, онда има и прост модел.
2. Ако T има мање од $2^{\aleph_0}$ модела, онда има и засићен пребројив и прост модел. $\square$

Тврђење 3.2.9

[2] и тад за њу кажемо да је мала.

1. За све $\mathcal{M}$ постоји κ^+-засићен модел $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ за које је $|N| \leqslant |M|^\kappa$.
2. Ако је $2^\kappa = \kappa^+$, онда постоји засићен модел теорије T моћи κ^+.
3. Ако је κ непребројив, регуларан[3] кардинал такав да је $2^\lambda \leqslant \kappa$ за све $\lambda < \kappa$, онда T има засићен модел моћи κ. □

Дефиниција 3.2.10: Нека је κ бесконачан кардинал. За потпуну теорију T кажемо да је κ-стабилна ако из $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $|A| \leqslant \kappa$ следи $|S^{\mathcal{M}}(A)| \leqslant \kappa$.

Кажемо да је $\mathcal{M}$ κ-стабилна ако је таква $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. □

Тврђење 3.2.11 Нека је κ регуларан кардинал. Ако је T κ-стабилна, онда постоји засићен $\mathcal{M} \models T$ моћи κ. Шта више, за $\mathcal{M}_0 \models T$ моћи κ, постоји засићен $\mathcal{M} \succcurlyeq \mathcal{M}_0$ моћи κ.

Специјално, ако је T ω-стабилна теорија, онда постоји засићен модел моћи κ за све регуларне кардинале κ. □

Дефиниција 3.2.12 Нека је $\mathcal{M}$ структура највише пребројивог језика и $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ **κ-универзална** структура ако се свака структура $\mathcal{N} \models T$ моћи мање од κ елементарно утапа у $\mathcal{M}$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ **универзална** структура ако је $|M|^+$-универзална. □

Тврђење 3.2.13 Нека је $\kappa \geqslant \aleph_0$. Ако је $\mathcal{M}$ κ-засићен, онда је $\mathcal{M}$ κ^+-универзалан. □

Тврђење 3.2.14 Нека је $\kappa \geqslant \aleph_0$. Следећи искази су еквивалентни:

1. $\mathcal{M}$ је κ- засићена структура;
2. $\mathcal{M}$ је κ- хомогена и κ^+-универзална структура.

   Ако је κ непребројив кардинал, онда су 1. и 2. еквивалентни исказу

3. $\mathcal{M}$ је κ- хомогена и κ-универзална структура. □

Последица 3.2.15 Структура $\mathcal{M}$ је засићена акко је универзалана и хомогена. □

[3] λ је регуларан кардинал ако му је кофиналност λ. Добар пример регуларног је λ^+.

Тврђење 3.2.16 Нека је L највише пребројив језик, T потпуна L теорија и $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ њени модели.

1. Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ засићене бесконачне структуре исти моћи, онда су једна другој изоморфне;

2. Ако је $\mathcal{N}$ κ- хомогена структура за неко $\kappa \leqslant |N|$ и $\mathrm{Dtp}(\mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Dtp}(\mathcal{N})$, онда за $A \subseteq M$ такво да је $|A| \leqslant \kappa$ постоји елементарно пресликавање $\mu : A \longrightarrow N$;

3. Ако је $\mathcal{M}$ κ- хомогена структура за неко $\kappa \leqslant |M|$ и $\mathrm{Dtp}(\mathcal{M}) = S(\mathrm{Th}(\mathcal{M}))$, онда је $\mathcal{M}$ κ-засићена структура. $\square$

Тврђење 3.2.17 Ако су $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ хомогене структуре исте моћи које реализују исте типове без параметара, онда су изоморфне једна другој. $\square$

Последица 3.2.18 Нека је T потпуна теорија највише пребројивог језика. Тада:

1. Број неизоморфних хомогених модела теорије T моћи κ није већи од $2^{2^{\aleph_0}}$;

2. Ако T има пребројив засићен модел, онда број неизоморфних хомогених модела теорије T моћи κ није већи од $2^{2^{\aleph_0}}$. $\square$

Дефиниција 3.2.19 Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L, $\overline{a} \in M^n$, $A \in M$ и $D \subseteq M^n$. За $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in ForL$ означимо $\{\overline{m} \in M^k \,|\, \mathcal{M} \models \varphi(\overline{m}, \overline{a})\}$ са $\varphi(M^k, \overline{a})$ или са $\varphi(M, \overline{a})$, будући да значење k произилази из контекста $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$. Кажемо и да је скуп решења формуле $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$.

Кажемо **да се D може дефинисати** (енглески ***definable***) **у** $\mathcal{M}$ или, ако је јасно у којој структури $\mathcal{M}$ радимо, **да се D може дефинисати** акко постоје формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ и $\overline{b} \in M^m$ такви да $D = \varphi(M, \overline{b})$. Тада кажемо и да $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ **дефинише D у** $\mathcal{M}$ или, ако је јасно у којој структури $\mathcal{M}$ радимо, кажемо да $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ **дефинише D**.

Ако скуп D дефинише формула из $ForL_A$, онда кажемо **да се D може дефинисати преко A** (у $\mathcal{M}$).

За $b \in M$ кажемо **да се може дефинисати преко A у** $\mathcal{M}$ ако се скуп $\{b\}$ може дефинисати преко A (у $\mathcal{M}$).

Ако је $\varphi(M,\overline{a})$ непразан и коначан скуп и ако је $\overline{a} \in A^m$ за $A \subseteq M$, онда за $\varphi(\overline{x},\overline{a}) \in ForL_A$ кажемо да је **алгебарска над A** или да је **алгебарска са параметрима из A**.

За $\overline{b} \in M^{<\omega}$ кажемо **да је алгебарски над A** ако постоји алгебарска формула $\varphi(\overline{x},\overline{a}) \in ForL_A$ таква да је $b \in \varphi(M,\overline{a})$. $\square$

Тврђење 3.2.20 Нека је $\mathcal{M}$ засићен, нека је $A \subseteq M$ такав да је $|A| < |M|$ и нека је $X \subseteq M^n$ дефинабилан параметрима из M. Тада важи:

X може да се дефинише параметрима из A акко сваки аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира тачке скупа A, фиксира скуп X.

Доказ:
„ $\Rightarrow$ ” : Нека је $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ L-формула таква да $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ дефинише X.
Нека је μ аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира тачке скупа A.
$\overline{b} \in X$ акко (јер $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ дефинише X)
$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{b},\overline{a})$ акко (јер је μ аутоморфизам)
$\mathcal{M} \models \varphi(\mu(\overline{b}),\mu(\overline{a}))$ акко (јер μ фиксира тачке скупа A)
$\mathcal{M} \models \varphi(\mu(\overline{b}),\overline{a})$ акко (јер $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ дефинише X)
$\mu(\overline{b}) \in X$

„ $\Leftarrow$ ” : Нека X није такав и нека не може да се дефинише параметрима из A. Дакле, није $X = M$ и $X = \emptyset$ и за свако $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ и свако $\overline{a} \in A^{<\omega}$ такве да је $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(\overline{x},\overline{a})$ и $\mathcal{M} \models \exists x \neg\varphi(\overline{x},\overline{a})$, постоје $\overline{b} \in X$ и $\overline{d} \notin X$ такви да $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{b},\overline{a})$ и да $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{d},\overline{a})$. Нека је $\psi(\overline{x},\overline{m})$ формула која дефинише X. Дакле, за свако $\varphi(\overline{x},\overline{y})$ и свако $\overline{a} \in A^{<\omega}$ такве да је $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(\overline{x},\overline{a})$ и $\mathcal{M} \models \exists x \neg\varphi(\overline{x},\overline{a})$, постоје $\overline{b} \in X$ и $\overline{d} \notin X$ такви да

$(\star)$ $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{b},\overline{a}) \wedge \psi(\overline{b},\overline{m}) \wedge \varphi(\overline{d},\overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{d},\overline{m})$.
Нека је $A_1 = A \cup \{\overline{m}\}$.
Посматрајмо скуп L_{A_1}-формула $p(\overline{x},\overline{y}) = \{\neg\psi(\overline{x},\overline{m})\} \cup \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b},\overline{m}/A)$.

Ако је сагласан биће садржан у неком $q \in S^{\mathcal{M}}_{n+i}(A_1)$, а како је $\mathcal{M}$ засићена структура, постојаће $(\overline{b}_1,\overline{m}_1) \in M^{n+i}$ који га реализује. Тада $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b},\overline{m}/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}_1,\overline{m}_1/A)$, па је μ које фиксира елементе скупа A и пар $(\overline{b},\overline{m})$ слика у $(\overline{b}_1,\overline{m}_1)$ елементарно пресликавање. Како је $\mathcal{M}$ засићена структура, то је и хомогена, па се μ може продужити до аутомофизма (који ћемо такође да означимо са μ).

Тада је $\mathcal{M} \models \neg\psi(\overline{b}_1,\overline{m})$, јер $(\overline{b}_1,\overline{m}_1)$ реализује тип q (а тиме и p), тј.
$\mathcal{M} \models \neg\psi(\mu(\overline{b}),\overline{m})$, па $\mu(\overline{b}) \notin X$.

Дакле, остало је да се покаже да је p сагласан са теоријом $\mathrm{Th}_{A_1}(\mathcal{M})$.

Нека је Δ коначан подскуп скупа p. Без умањења општости, можемо претпоставити да је $\Delta = \{\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a})\}$[4].

Ако није
$\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \models \exists\overline{x}\exists\overline{y}(\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a}))$, онда је
$\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \models \forall\overline{x}\forall\overline{y}\neg(\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a}))$
$\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \models \forall\overline{x}\forall\overline{y}(\psi(\overline{x}, \overline{m}) \vee \neg\,\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a}))$
$\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \models \forall\overline{x}\forall\overline{y}(\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a}) \longrightarrow \psi(\overline{x}, \overline{m}))$
$(\star\star)$ $\mathrm{Th}_M(\mathcal{M}) \models \forall\overline{x}(\forall\overline{y}\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a}) \longrightarrow \psi(\overline{x}, \overline{m}))$.

Како је $\forall\overline{y}\theta(\overline{x}, \overline{y}, \overline{a}) \in For_{L_A}$, то , на основу $\star$ морају постојати $\overline{b}_2, \overline{d}_2$ такви да важи
$\mathcal{M} \models \forall\overline{y}\theta(\overline{b}_2, \overline{y}, \overline{a}) \wedge \psi(\overline{b}_2, \overline{m}) \wedge \forall\overline{y}\theta(\overline{d}_2, \overline{y}, \overline{a}) \wedge \neg\,\psi(\overline{d}_2, \overline{m})$ што је у супротности са $(\star\star)$ по чему би било
$\mathcal{M} \models \forall\overline{y}(\theta(\overline{d}_2, \overline{y}, \overline{a}) \longrightarrow \psi(\overline{d}_2, \overline{m}))$.

Нашли смо, дакле, аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира елементе скупа A и не фиксира скуп X. □

Последица 3.2.21 Нека је $\mathcal{M}$ засићена структура и нека је $A \subseteq M$ такав да је $|A| < |M|$. Тада важи: b може да се дефинише параметрима из A акко сваки аутоморфизам $\mathcal{M}$-а који фиксира тачке скупа A, фиксира и тачку b".

Доказ: Директна последица тврђења 3.2.20. □

Тврђење 3.2.22 Нека је $\mathcal{M}$ засићен, нека је $A \subseteq M$ такав да је $|A| < |M|$ и нека је $b \in M$. Следећи искази су еквивалентни:

1. b је алгебарски над A;
2. b има само коначно много слика при аутоморфизмима структуре $\mathcal{M}$ који фиксирају елементе скупа A;
3. $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ има коначно много реализација у $\mathcal{M}$.

Доказ:

„1 $\Rightarrow$ 2" : Ако је b алгебарски над A, онда се за неко k и неке $b = b_1, b_2, \ldots, b_k$ скуп $\{b_1, \ldots, b_k\}$ може дефинисати параметрима из A. По тврдјењу 3.2.20, сваки аутоморфизам $\mathcal{M}$ који фиксирају елементе скупа A фиксира скуп $\{b_1, \ldots, b_k\}$, па је
$\{\mu(b) \,|\, \mu \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ и μ фиксира елементе скупа $A\} \subseteq \{b_1, \ldots, b_k\}$;

[4] $\Delta \setminus \{\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m})\} \subseteq \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}, \overline{m}/A)$ па како је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}, \overline{m}/A)$ дедуктивно затворен и Δ коначан, биће $\bigwedge\{\Delta \setminus \{\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m})\}\} \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}, \overline{m}/A)$. Δ је сагласан акко је $\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m}) \wedge \bigwedge\{\Delta \setminus \{\neg\,\psi(\overline{x}, \overline{m})\}\}$ сагласан.

„$2 \Rightarrow 3$" : Ако је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(d/A)$, онда је пресликавање $\widetilde{\mu}$ који фиксира елементе скупа A и слика b у d елементарно пресликавање, а како је $\mathcal{M}$ засићена структура, то је и хомогена, па се $\widetilde{\mu}$ може продужити до аутоморфизма μ. Дакле, $\{d \,|\, \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(d/A)\} \subseteq$ [5]

$\{\mu(b) \,|\, \mu \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M})$ и μ фиксира елементе скупа $A\}$.

„$3 \Rightarrow 1$" : Нека је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ тип који има коначно много реализација и нека их је k. Тада скуп

$$\Gamma(x_0, \ldots, x_k) = \mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \cup \bigcup_{i=0}^{k} \{\varphi(x_i) \,|\, \varphi(x) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)\} \cup \{ \bigwedge_{0 \leqslant i < j \leqslant k} \neg\, (x_i \equiv x_j)\}$$

мора бити противречан, тј. не може бити задовољив, јер би онда постојало $k+1$ реализација типа $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$. Дакле, за неке $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A)$ важи

$$\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \models \bigcup_{i=0}^{k} \{\varphi_1(x_i), \varphi_2(x_i), \varphi_3(x_i), \ldots \varphi_m(x_i)\} \Longrightarrow \neg \left(\bigwedge_{0 \leqslant i < j \leqslant k} \neg\, (x_i \equiv x_j) \right), \text{ тј}$$

$$\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) \models \bigwedge_{i=0}^{k} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j(x_i) \right) \Longrightarrow \bigvee_{0 \leqslant i < j \leqslant k} x_i \equiv x_j,$$

па је $\bigwedge_{j=1}^{n} \varphi_j(x)$ формула (са пареметримa из скупа A) која дефинише коначан скуп и b припада том скупу, те је b алгебарски. $\square$

3.3 Универзални домен

Једна од јако корисних особина засићених структура је универзалност: Ако је $\mathcal{M}$ засићена стркутура и $\mathcal{N}$ њој елементарно еквивалентна структура моћи мање или једнаке (тј. $|\mathcal{N}| \leqslant |\mathcal{M}|$), онда је $\mathcal{N}$ изоморфна некој елементарној подструктури структуре $\mathcal{M}$. Зато је свако при изоморфизмима инваријантно својство које посудују модели теорије $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ моћи $\leqslant |\mathcal{M}|$ одржано у елементарним подструктурама структуре $\mathcal{M}$. Зато можемо, ако изаберемо довољно велики засићен модел $\mathcal{M} \models T$, све моделе теорије T сматрати за елементарне подструктуре $\mathcal{M}$-а.

Претпоставимо да је T потпуна теорија има произвољно велике засићене моделе. Нека је Υ неки исказ о моделима теорије T и нека је $\mathcal{M}$ засићен модел теорије T. Ако са $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ означимо релативизацију исказа Υ на елементарне подструктуре $\mathcal{M}$-а, онда је доказати да важи Υ (за све моделе теорије T) исто што прво произвољно изабрати засићено $\mathcal{M} \models T$, фиксирати га, а онда за њега доказати $\Upsilon_{\mathcal{M}}$ (за све подмоделе $\mathcal{M}$-а).

Отуд следећа дефиниција

[5]заправо важи једнакост, али за овај део доказа то није битно.

Дефиниција 3.3.1 Нека T потпуна теорија која има засићене моделе произвољно велике моћи и нека је $\mathbb{U}$ један такав. За њега кажемо да је **универзални домен теорије** T или, краће, да је **универзум теорије** T. Користи се још и термин „монструм модел”. $\square$

Ако је T ω-стабилна теорија онда има засићене моделе моћи κ за сваки регуларан кардинал κ. Ако радимо уз додатни скуповно теоретски услов да за сваки кардинал λ постоји јако недостижив већи од њега, онда ће T имати универзални домен.

Надаље ћемо подразумевати следеће:

-$\mathbb{U}$ је довољно велики засићен модел теорије T;

-За све $\mathcal{M} \models T$ подразумевамо $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathbb{U}$ и $|\mathcal{M}| < |\mathbb{U}|$;

-За сваки скуп параметара A подразумевамо да је подскуп универзума и да је $|A| < |\mathbb{U}|$. За такво A ће свако $p \in S(A)$ бити реализовано (у $\mathbb{U}$);

-Уместо $\mathrm{tp}^{\mathbb{U}}(\overline{a}/A)$ и $S_n^{\mathbb{U}}(A)$ пишемо $\mathrm{tp}(\overline{a}/A)$ и $S_n(A)$

-Ако је $\overline{a} \in M^{<\omega}$ и φ формула са параметрима из M, онда је $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a})$ акко је $\mathbb{U} \models \varphi(\overline{a})$. Зато ћемо уместо $\mathbb{U} \models \varphi(\overline{a})$ писати $\models \varphi(\overline{a})$ и подразумеваћемо да је $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{a})$ кад год је $\overline{a} \in N^{<\omega}$.

Једна од предности универзалног домена је што се сад свако елементарно пресликавање продужава до аутоморфизма $\mathbb{U}$-а.

Глава 4

О димензији

4.1 Предгеометрије

Дефиниција 4.1.1 Нека је $\mathrm{cl} : P(V) \longrightarrow P(V)$. (V, cl) је **предгеометрија** уколико за све $A, B \subseteq V$ и $a, b \in V$ важе следећи услови:

(1) Идемпотентност $A \subseteq \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A))$

(2) Монотоност $A \subseteq B$ повлачи $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$;

(3) Коначан карактер $\mathrm{cl}(A) = \bigcup\{\mathrm{cl}(A_0) | A_0$ коначан подскуп од $A\}$;

(4)[1] Замена $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$ повлачи $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.

За оператор cl који задовољава (1)-(3) кажемо да је **оператор затворења**
□

Пример 4.1.2 Примери оператора затворења

1. Универзална алгебра

   Нека је $(M, f_i)_{i \in I}$ алгебра[2]. Нека је $\mathrm{cl}(A)$ подалгебра алгебре $(M, f_i)_{i \in I}$ генерисана скупом A, за $A \subseteq M$. cl је оператор затворења.

2. Парцијална уређења

   Нека је $(P, \leqslant)$ парцијално уређење. За $A \subset P$ дефинишемо

   $$\mathrm{cl}(A) = \{x \in P \,|\, x \leqslant a \text{ за неко } a \in P$$

   и $\mathrm{cl}(\emptyset) = \emptyset$. (P, cl) је оператор затворења. □

[1] Steinitz-ова аксиома замене

[2] нема релацијских знакова у језику

Дефиниција 4.1.3 За $\mathrm{cl}(A)$ кажемо да је **затворење скупа** A, а за скупове облика $\mathrm{cl}(A)$ да су **затворени скупови**. Коначна предгеометрија се у комбинаторици назива и **матроид**. **Геометрија** је предгеометрија која задовољава и: $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$ за све $x \in V$. □

Пример 4.1.4 Примери предгеометрија

1. Векторски простори - пројективна предгеометрија

   Нека је $(V, +, f\cdot)_{f\in F}$ векторски простор над пољем F, при чему су $f\cdot$ унарне функције „множење скаларом f". За $A \subseteq V$ дефинишемо $\mathrm{cl}(A)$ као подпростор генерисан са A (исто као у Примеру 4.1.2). (V, cl) је предгеометрија. Ако је $V = R^3$, затворени скупови су праве и равни које пролазе кроз координатни почетак (и $\emptyset$ и R^3).

2. Деловање групе - дегенерисана предгеометрија

   Нека је $(G, \circ, 1)$ група и $L = \{F_g \,|\, g \in G\}$ скуп унарних функцијских симбола. G-скуп је свака L-структура која задовољава:

   $$F_1(x) = x \qquad \text{и} \qquad F_g(F_h(x)) = F_{g\circ h}(x) \quad (\text{за све } g, h \in G).$$

   Ако је $(V, ...)$ G-скуп тада се докаже да свака функција F_g индукује пермутацију скупа V. **Орбита** елемента $v \in V$ је $O(v) = \{F_g(v) \,|\, g \in G\}$. За $A \subseteq V$ дефинишимо: $\mathrm{cl}(A) = \bigcup\{O(x) \,|\, x \in A\}$ (исто као у Примеру 4.1.2). (V, cl) је предгеометрија.

   \- Овако дефинисана предгеометрија је **дегенерисана** (или **тривијална**) што значи да задовољава:

   $$x \in \mathrm{cl}(Y) \quad \text{акко} \quad (\exists y \in Y)\, x \in \mathrm{cl}(\{y\}).$$

   \- Ако је $G = \{1\}$ онда можемо сматрати да се ради о чистој теорији једнакости.

3. Векторски простори - афина геометрија

   Нека је V векторски простор над неким пољем F. Посматрајмо структуру $(V, G, F_\alpha)_{\alpha\in F}$ где је:

   $$G(x, y, z) = x - y + z \qquad \text{и} \qquad F_\alpha(x, y) = \alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y.$$

   $\mathrm{cl}(A)$ дефинишемо као у Примеру 4.1.2 (тј. као афини подпростор генерисан скупом A). (V, cl) је предгеометрија.

   Ако је $V = R^3$ тада функција G одређује „четврто теме паралелограма дијагонално насупрот темену y": тачке x y z и $G(x, y, z)$ су темена паралелограма и дуж $y\,G(x, y, z)$ је његова дијагонала; $F_\alpha(x, y)$ је тачка која „дуж" xy дели у односу $(1 - \alpha) : \alpha$. Затворени скупови су све праве и равни (и $\emptyset$ и R^3).

4. Поља - алгебарско затварање

   Нека је $(F, +, \cdot)$ поље. Дефинишемо $b \in \mathrm{acl}(A)$ акко постоји неконстантан полином p са коефицијентима из поља генерисаног скупом A, такав да је $p(b) = 0$. (F, acl) је предгеометрија. □

Погледајмо пример поља из другог угла: имамо бесконачно поље $(F, +, \cdot)$. Његовим 'малим' подскуповима сматрамо коначне подскупове описане као скуп решења полиномијалне једначине. Тада је $\mathrm{cl}(A)$ унија свих малих подскупова чије полиномијалне једначине имају коефицијенте у потпољу генерисаним са A.

Слично, у случају векторских простора, малим формулама (по x) сматрамо оне облика $x = \sum_{i=1}^{n} f_i\, v_i$ (v_i сматрамо параметрима) па је $\mathrm{cl}(A)$ унија скупа решења свих малих формула са параметрима из A.

Општи модел-теорецки основ је следећи: Фиксирамо структуру првог реда $\mathcal{M}$ у језику L. Посматрамо формуле $\phi(x; \overline{y})$ где су $\overline{y}$ променљиве резервисане за параметре. Неке од формула $\phi(x, \bar{m})$ прогласимо за мале (пазећи да неке очите ствари морају да важе; нпр. инваријантност у односу на аутоморфизме, унија две мале мора бити мала, ...) Затим дефинишемо $\mathrm{cl}(A)$ као унију скупа решења свих малих формула које имају параметре из A...

Дефиниција 4.1.5 Нека је (V, cl) предгеометрија. За непразан скуп $A \subseteq V$ кажемо да је **cl-независан**[3] ако за све $a \in A$ важи $a \notin \mathrm{cl}(A \backslash \{a\})$. У супротном кажемо да је **скуп** A **cl-зависан**. Кажемо да a cl-не зависи од A акко је $\{a\}$ cl-независно над A а у супротном да a cl-зависи од A.
За максималан у односу на инклузију cl-независан скуп кажемо да је **база простора** V. □

Лема 4.1.6 Нека је (V, cl) скуп снабдевен оператором затворења. Важи:
1) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$ акко $A \subseteq \mathrm{cl}(B)$ и $B \subseteq \mathrm{cl}(A)$;
2) Пресек затворених скупова је затворен.

Доказ: 1) „ $\Leftarrow$ ” : из $A \subseteq \mathrm{cl}(B)$ на основу монотоности следи $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(B))$ па се на основу идемпотентности може закључити $\mathrm{cl}(A) \subseteq \mathrm{cl}(B)$. Слично, из $B \subseteq \mathrm{cl}(A)$ следи $\mathrm{cl}(B) \subseteq \mathrm{cl}(A)$.
„ $\Rightarrow$ ” : Претпоставимо $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$. Како, због монотоности, важи $A \subseteq \mathrm{cl}(A)$ закључујемо $A \subseteq \mathrm{cl}(B)$. Слично $B \subseteq \mathrm{cl}(A)$.

2) Подсетимо да је A затворен ако је $A = \mathrm{cl}(A)$. Нека је $A_i = \mathrm{cl}(A_i)$ за свако $i \in I$. Из аксиоме (1) у дефиницији следи

(*) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq \mathrm{cl}(\bigcap\limits_{i \in I} A_i)$.

Са друге старне важи $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq A_i$ за свако $i \in I$, па важи

[3] мада ћемо, кад не доводи до забуне, изостављати „cl” и само говорити „независан”.

$\mathrm{cl}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \mathrm{cl}(A_i) = A_i$ за свако $i \in I$, а тиме и

(**) $\mathrm{cl}(\bigcap_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$

Из звезде и две звезде следи тврђење. □

Фиксирајмо предгеометрију (V, cl).

Лема 4.1.7 Ако је $A \cup B$ независан и $A \cap B = \emptyset$ онда је $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B) = \mathrm{cl}(\emptyset)$.

Доказ: Из $\emptyset \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ због монотоности је $\mathrm{cl}(\emptyset) \subseteq \mathrm{cl}(\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B))$. Како је, према другом делу леме 4.1.6, $\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$ затворен тиме је и $\mathrm{cl}(\emptyset) \subseteq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$.

Претпоставимо супротно тврђењу: $\mathrm{cl}(\emptyset) \neq \mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)$. Нека је d такав да $d \in (\mathrm{cl}(A) \cap \mathrm{cl}(B)) \setminus \mathrm{cl}(\emptyset)$. Тада $d \in \mathrm{cl}(A) \setminus \mathrm{cl}(\emptyset)$ и $d \in \mathrm{cl}(B) \setminus \mathrm{cl}(\emptyset)$.

Из $d \in \mathrm{cl}(A)$ и финитарног карактера оператора затворења (аксиома (3)) следи да за неки коначан $A_0 \subseteq A$ важи $d \in \mathrm{cl}(A_0)$, а због $d \notin \mathrm{cl}(\emptyset)$ следи да је A_0 непразан, тј да за сваки A_0 за који важи $d \in \mathrm{cl}(A_0)$ и $A_0 \subseteq A$ мора да важи $A_0 \neq \emptyset$. Нека је $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq A$ један такав и то такав да је $d \in \mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\})$ и није $d \in \mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \setminus \{a_i\})$ за свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ово заправо значи да је A_0 најмањи такав скуп, тј. да ниједан његов прави подскуп не садржи d у свом затворењу. Нека је $B_0 = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\} \subseteq B$ такав да је $d \in \mathrm{cl}(\{b_1, b_2, \ldots, b_k\})$.

Пошто је $d \in \mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}) \setminus \mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\})$, на основу аксиоме замене се може закључити да је $a_n \in \mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, d\})$.

Имамо следећу ситуацију:

$$d \in \mathrm{cl}(B_0) \subseteq \mathrm{cl}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \cup B_0) \quad \text{и} \quad \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \subseteq \mathrm{cl}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \cup B_0)$$

Одавде следи $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, d\} \subseteq \mathrm{cl}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \cup B_0)$, а тиме и

$$\mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, d\}) \subseteq \mathrm{cl}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \cup B_0)).$$

Дакле, $a_n \in \mathrm{cl}(\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, d\}) \subseteq \mathrm{cl}(\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \cup B_0)$, па $A_0 \cup B_0$ није независан скуп, а тиме ни $A \cup B$ није независан, што је контрадикција. □

Тврђење 4.1.8 (Индуктивна конструкција независних скупова):

$$A = \{a_i \,|\, i < \alpha\} \text{ је cl-независан} \quad \text{акко} \quad a_i \notin \mathrm{cl}(\{a_j \,|\, j < i\}) \text{ за све } i < \alpha.$$

Доказ: Означимо $A_i = \{a_\xi \,|\, \xi < i\}$. Нетривијалан смер: Претпоставимо да $a_i \notin \mathrm{cl}(A_i)$ за све $i < \alpha$ и докажимо да је A независан т.ј $a_j \notin \mathrm{cl}(A \setminus \{a_j\})$ за све $j < \alpha$.

Ради свођења на контрадикцуију, претпоставимо супротно: Неки $a_j \in \mathrm{cl}(A \setminus \{a_j\})$ па, због коначног карактера cl (аксиома (3)), постоје $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ различити од j такви да $a_j \in \mathrm{cl}(\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{n+1}}\})$; због $a_j \notin \mathrm{cl}(A_j)$ мора важити $j < i_{n+1}$. Претпоставимо такође да смо i_k-ове одабрали тако да је i_{n+1} најмањи могућ. Тада:

$$a_j \in \mathrm{cl}(\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{n+1}}\}) \setminus \mathrm{cl}(\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}\}).$$

Применом аксиоме замене добијамо

$$a_{i_{n+1}} \in \mathrm{cl}(\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}, a_j\}).$$

Из $i_1 < i_2 < ... < i_n < i_{n+1}$ и $j < i_{n+1}$ следи $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}, a_j\} \subset A_{i_{n+1}}$. Према томе $a_{i_{n+1}} \in \mathrm{cl}(A_{i_{n+1}})$. Контрадикција. □

Лема 4.1.9 Важи:
1) A је база акко је A cl-независан и $\mathrm{cl}(A) = V$;
2) Ако је $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$ онда је $\mathrm{cl}(A \cup \{b\}) = \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$.

Доказ: 1) Ако је A независан и није $\mathrm{cl}(A) = V$, онда је $A \cup \{v\}$ независан за било које $v \in V \setminus \mathrm{cl}(A)$. Ако се за неко $v \in V$ скуп A може проширити до независног скупа $A \cup \{v\}$, онда $v \notin \mathrm{cl}(A)$ па није $\mathrm{cl}(A) = V$.

2)Ако је $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$ онда је $\{a\} \cup A \subseteq \mathrm{cl}(A \cup \{b\})$, па је, по аксиомама 2 и 1 тачно и $\mathrm{cl}(\{a\} \cup A) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup \{b\})$. Такође, ако је $a \in \mathrm{cl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$, онда, по аксиоми замене, важи и $b \in \mathrm{cl}(A \cup \{a\}) \setminus \mathrm{cl}(A)$, па је по истој логици као мало пре $\mathrm{cl}(\{b\} \cup A) \subseteq \mathrm{cl}(A \cup \{a\})$. □

Тврђење 4.1.10 За свака два cl-независна скупа A и B за која важи $B \subseteq \mathrm{cl}(A)$, важи и $|B| \leqslant |A|$.

Доказ: Нека је $A = \{a_i \,|\, i < \lambda\}$ нека нумерација скупа A и $B = \{b_i \,|\, i < \alpha\}$. Како $b_0 \in \mathrm{cl}(A)$ постоји најмањи $i < \lambda$ такав да $b_0 \in \mathrm{cl}(\{a_0, a_1, ..., a_i\})$; Тада:

$$b_0 \in \mathrm{cl}(\{a_0, ..., a_{i-1}, a_i\}) \setminus \mathrm{cl}(\{a_0, ..., a_{i-1}\}).$$

Према аксиоми замене имамо $a_i \in \mathrm{cl}(\{b_0, a_0, ..., a_{i-1}\})$ а према леми 4.1.9

$$\mathrm{cl}(\{b_0, a_0, ..., a_{i-1}\}) = \mathrm{cl}(\{a_0, a_1, ..., a_i\}).$$

Користећи последње и тврђење 4.1.8 закључујемо да је независан и скуп

$$A_0 = \{a_0, ..., a_{i-1}, b_0, a_{i+1}, ...\} = A \cup \{b_0\} \setminus \{a_i\}.$$

Одавде, слично као у леми 4.1.9 следи $\mathrm{cl}(A_0) = \mathrm{cl}(A)$. Све у свему:

$$A_0 = \{a_0, ..., a_{i-1}, b_0, a_{i+1}, ...\} \text{ је независан, } |A_0| = |A| \text{ и } B \subseteq \mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(A_0).$$

Овим смо заменили један елемент из A са b_0 не променивши $\mathrm{cl}(A)$ па A_0 и B задовољавају исте услове као и A и B. Даље ћемо поновити горњи поступак са A_0 и b_1 на месту A и b_0. Пре тога, због једноставности записа, а како нумерација елемената скупа A није битна можемо претпоставити да важи:

$$A_0 = \{b_0, a_1, a_2, ...\} = \{b_0, a_i \,|\, 0 < i < \lambda\} \text{ је независан, } |A_0| = |A| \text{ и}$$
$$B \subseteq \mathrm{cl}(A_0) = \mathrm{cl}(A).$$

Поновимо претходни поступак са A_0 (у нумерацији $b_0, a_1, a_2, ...$) и b_1 уместо са A и b_0: за b_1 нађемо најмањи члан низа којим можемо да га заменимо (то не може бити b_0 јер због независности скупа B важи $b_1 \notin \mathrm{cl}(\{b_0\})$); тако добијемо

$$A_1 = \{b_0, b_1, a_2, a_3 ...\} \text{ је независан, } |A_1| = |A| \text{ и } B \subseteq \mathrm{cl}(A_1) = \mathrm{cl}(A).$$

Сада тражимо замену за b_2; због независности скупа B је $b_2 \notin \mathrm{cl}(\{b_0, b_1\})$ па то неће бити ни b_0 ни b_1...
Тако можемо цео B утопити у A, тј. $|B| \leqslant |A|$. □

Последица 4.1.11 Ако су A и B независни скупови и ако је $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$, онда је $|A| = |B|$. □

Дефиниција 4.1.12 Из претходне последице следи да сваке две базе имају исту кардиналност која се назива **димензија** простора V (ознака $\dim(V)$).

Ако је $A \subseteq V$, онда за максималан независан скуп $I \subseteq A$ кажемо да је **база скупа** A. □

Централни резултат овог дела је:

Теорема 4.1.13 Важи:

1) I је база скупа A акко је I независан и $\mathrm{cl}(I) = \mathrm{cl}(A)$.

2) Сваке две базе скупа A су исте кардиналности (за коју кажемо да је **димензија скупа A**; ознака $\dim(A)$).

3) $\mathrm{cl}(A) = \mathrm{cl}(B)$ повлачи $\dim(A) = \dim(B)$. Посебно: $\dim(A) = \dim(\mathrm{cl}(A))$.

Доказ:
1) Слично као доказ леме 4.1.9.
2) Последица последице 4.1.11.
3) Следи из 1) овог тврђења. □

Последица 4.1.14 (1) Сваке две базе векторског простора имају исту кардиналност, то је димензија векторског простора.

(2) Сваке две трансцендентне базе поља F имају исту кардиналност која се назива степен трансцендентности поља F. □

4.2 dim-независност у предгеометријама

У овом делу ћемо дефинисати тернарну релацију независности у предгеометријама. Њен циљ је да послужи као увод у касније дефинисану релацију независности $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B \ \langle C \rangle$ у ω-стабилним теоријама. Будући да се ови резултати касније неће користити, њихове доказе, који су углавном елементарни и ослањају се на резултате претходног дела, ћемо изоставити.

Видели смо да у модел-теоретском тумачењу предгеометрија параметри у формулама имају важну ролу. Следећа дефиниција покрива случај када параметре из A абсорбујемо у језик, не мењајући 'мале' формуле.

Дефиниција 4.2.1 Нека је $\mathrm{cl} : P(V) \longrightarrow P(V)$ и нека је $A \subseteq V$. За пресликавање $\mathrm{cl}^A : P(V) \longrightarrow P(V)$ дефинисано са $\mathrm{cl}^A(X) = \mathrm{cl}(A \cup X)$ кажемо да је локализација cl-а на A. □

Наравно, $\mathrm{cl} = \mathrm{cl}^{\emptyset}$.

Тврђење 4.2.2 Нека је $\mathrm{cl} : P(V) \longrightarrow P(V)$ и нека је $A \subseteq V$.
1) Ако је cl оператор затворења, онда је cl^A оператор затворења .
2) Ако је cl предгеометрија, онда је cl^A предгеометрија. □

У светлу дефиниције 4.2.1 и тврђења 4.2.2 постоје еквиваленти појмови и особине онима који раније исказани. Докази већине тврђења која следе се могу добити тако што се преправе докази одговарајућих тврђења који су претходили. Махом се преправка састоји у униформној замени оператора „cl" оператором „cl^C" или „cl^X" итд.

Нека је (V, cl) фиксирана предгеометрија.

За непразан скуп $A \subseteq V$ кажемо да је **cl-независан**[4] **над** B ако за све $a \in A$ важи $a \notin \mathrm{cl}^B(A \setminus \{a\})$. У супротном кажемо да је A **cl-зависан над** B. Максималан у односу на инклузију cl-независан скуп над B је **база над** B **простора** V.

Тврђење 4.2.3 Важи:
1) I је база скупа A над C акко је независан над C и ако је $\mathrm{cl}^C(I) = \mathrm{cl}^C(A)$.
2) Сваке две базе скупа A над C су исте моћи. □

Из резултата претходног поглавља, претходтног тврђења као и тврђења 4.2.2 следи да сваке две базе над C имају исту моћ. За тај кардинал кажемо да је **димензија простора** V **над** C и означавамо га са $\dim(V/C)$. Ако је $A \subseteq V$, онда за максималан над C независан скуп $I \subseteq A$ кажемо да је **база скупа** A **над** C. Сваке две базе за A над C имају исту моћ, то је **димензија скупа** A **над** C, у ознаци $\dim(A/C)$.

Тврђење 4.2.4 (1) Ако је C_0 cl-база за C и A_0 cl^C-база за A тада је $C_0 \cup A_0$ cl-база за $A \cup C$.

(2) $\dim(A \cup C) = \dim(C) + \dim(A/C)$ □

[4] мада ћемо, као и у случају дефиниције 4.1.5 кад не доводи до забуне, изостављати „cl" и само говорити „независан".

Дефиниција 4.2.5 Нека су A, B и C подскупови скупа V. Кажемо да је A **dim-независно од** B **над** C (или само да је A независно од B над C) ако је за сваки коначан $A_0 \subseteq A$ испуњено $\dim(A_0/B \cup C) = \dim(A_0/C)$. Ознака $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B \ \langle C \rangle$. □

Релацију $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B \ \langle C \rangle$ схватамо и као: A не зависи више од $B \cup C$ него што зависи од C.

Теорема 4.2.6 Основна својства dim-независности су:

1. Коначни карактер

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B \ \langle C \rangle \ \text{ акко } \text{ за све коначне } A_0 \subseteq A \text{ и } B_0 \subseteq B \text{ важи } A_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_0 \langle C \rangle$$

2. Монотоност

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_1 \cup B_2 \ \langle C \rangle \quad \text{повлачи} \quad A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_1 \ \langle C \rangle.$$

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_1 \cup B_2 \ \langle C \rangle \quad \text{повлачи} \quad A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_1 \cup B_2 \ \langle C \cup B_2 \rangle;$$

3. Симетрија

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B \ \langle C \rangle \quad \text{акко} \quad B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} A \ \langle C \rangle;$$

4. Транзитивност

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_1 \ \langle C \rangle \ \text{ и } \ A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_2 \ \langle C \cup B_1 \rangle \quad \text{акко} \quad A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{dim} B_1 \cup B_2 \ \langle C \rangle.$$

□

Глава 5

Минималне структуре, Маршова теорема

5.1 Оператор acl

Нека је $\mathcal{M}$ структура језика L, $\overline{a} \in M^n$ и $A \subseteq M$. Поновимо неке дефиниције и неке проширимо. За формулу $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ језика L

$$\{\overline{m} \in M^k \,|\mathcal{M} \models \varphi(\overline{m}, \overline{a})\}$$

је скуп дефинисан формулом $\varphi(\overline{m}, \overline{a})$. Означавамо га са $\varphi(M^k, \overline{a})$, а често и са $\varphi(M, \overline{a})$, будући да значење k произилази из контекста $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$. Кажемо и да је скуп решења формуле $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$.

Нека је $D \subseteq M^n$. Кажемо да се D може дефинисати (у $\mathcal{M}$) (или да је дефинабилан са параметрима у M) ако постоје формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ и $\overline{b} \in M^m$ такви да $D = \varphi(M, \overline{b})$. Тада кажемо и да $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ дефинише D. Ако скуп D дефинише формула са параметрима из A, онда кажемо да се D може дефинисати преко A (или да је A-дефинабилан). За $b \in M$ кажемо A-дефинабилан ако се скуп $\{b\}$ може дефинисати преко A.

$\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A)$ је скуп свих елемената скупа M који су A-дефинабилни. Уколико је $\mathcal{M}$ јасан из контекста, онда пишемо dcl уместо $\mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}$. За $A \subseteq D$ је $\mathrm{dcl}_D(A) = \mathrm{dcl}_{\mathcal{M}}(A) \cap D$. Овим је дефинисан оператор

$$\mathrm{dcl}_D : P(D) \longrightarrow P(D)$$

Ако је $\varphi(M, \overline{a})$ непразан и коначан скуп и ако је $\overline{a} \in A^m$ за $A \subseteq M$, онда за $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in ForL_A$ кажемо да је алгебарска над A или да је алгебарска са параметрима из A. За $b \in M$ кажемо да је алгебарски над A ако постоји алгебарска формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in ForL_A$ таква да је $b \in \varphi(M, \overline{a})$.

$\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A)$ је скуп свих елемената скупа M који су алгебарски над A. Уколико је M јасан из контекста, онда пишемо acl уместо $\mathrm{acl}_{\mathcal{M}}$. Ако је $D = \varphi(\mathcal{M}, \overline{m})$, онда за $A \subseteq D$ је $\mathrm{acl}_D(A) = D \cap \mathrm{acl}_{\mathcal{M}}(A \cup \overline{m})$. Овим је дефинисан оператор

$$\mathrm{acl}_D : P(D) \longrightarrow P(D).$$

У извесном смислу алгебарско затворење скупа не зависи од модела. Тачније, важи следеће тврђење.

Тврђење 5.1.1 Ако је $A \subseteq M$ и $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ онда је:
1. $\mathrm{acl}_M(A) = \mathrm{acl}_N(A)$;
2. $\mathrm{dcl}_M(A) = \mathrm{dcl}_N(A)$

Доказ:
1. Ако $\bar{a} \in M^{<\omega}$ и $|\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})| = k$, онда је

$$\mathcal{M} \models \exists \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k (\textstyle\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant k} \varphi(\overline{x}_i, \overline{a}) \wedge \forall \overline{y} (\varphi(\overline{y}, \overline{a}) \Longrightarrow \textstyle\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant k} \overline{y} \equiv \overline{x}_i)$$

па исту реченицу мора задовољавати свака елементарна надструктура и свака елементарна подструктура структуре $\mathcal{M}$ који садржи параметре формуле φ. Ако је $A \subseteq M$ и $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ онда је $|\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})| = |\varphi(\mathcal{N}, \overline{a})|$ за било коју алгебарску формулу φ са параметрима из A, а тиме и $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a}) = \varphi(\mathcal{N}, \overline{a})$.
Дакле, $b \in \mathrm{acl}_M(A)$ акко
постоји $\bar{a} \in M^{<\omega}$ и алгебарска формула $\varphi(x, \overline{a})$ таква да је $b \in \varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ акко
постоји $\bar{a} \in M^{<\omega}$ и алгебарска формула $\varphi(x, \overline{a})$ таква да је $b \in \varphi(\mathcal{N}, \overline{a})$ акко
$b \in \mathrm{acl}_N(A)$.

Следи $\mathrm{acl}_M(A) = \mathrm{acl}_N(A)$.

2. Слично као 1. □

Напомена 5.1.2 Из претходног тврђења је јасно да ако се D може дефинисати, ако је $A \subseteq D \subseteq M$ и ако је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$, онда је рачунати $\mathrm{acl}_D(A)$ у $\mathcal{M}$ исто што и рачунати га у $\mathcal{N}$. Слично за $\mathrm{dcl}_D(A)$. □

Дефиниција 5.1.3 Тип је алгебарски ако садржи алгебарску формулу. □

Тврђење 5.1.4 Ако $\overline{a} \in \mathrm{acl}(C)^k$ тада постоји алгебарска формула $\phi(\overline{x}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C)$ таква да:

$$\text{за све } \overline{b} \in M^k \text{ такве да } \mathcal{M} \models \phi(\overline{b}, \overline{c}) \text{ важи } \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/C)^1.$$

Шта више, свака $\phi(\overline{x}, \overline{c}) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C)$ таква да је $|\phi(M^k, \overline{c})| = m$ најмањи могућ задовољава тврђење.

[1] тј. ϕ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C)$.

Доказ: Нека је $\phi(\overline{x},\overline{c}) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C)$ таква да је $|\phi(M^k,\overline{c})| = m$ најмањи могућ и нека је $\varphi(\overline{x},\overline{c}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/C)$. Ако не би било $\mathcal{M}_C \models \forall\overline{x}(\phi(\overline{x},\overline{c}) \Longrightarrow \varphi(\overline{x},\overline{c}))$, онда би постојало неко $\overline{a}_0$ такво да је $\mathcal{M}_C \models \phi(\overline{a}_0,\overline{c})$ и није $\mathcal{M}_C \models \varphi(\overline{a}_0,\overline{c})$. Ако са $\theta(\overline{x},\overline{c})$ означимо формулу $\phi(\overline{x},\overline{c}) \wedge \varphi(\overline{x},\overline{c})$, онда $\overline{a}_0 \notin \theta(\mathcal{M}^k,\overline{c})$ и $\overline{a} \in \theta(\mathcal{M}^k,\overline{c})$ $\overline{a} \in \theta(\mathcal{M}^k,\overline{c}) \subset \{\overline{a}_0\} \cup \theta(\mathcal{M}^k,\overline{c}) \subseteq \phi(M^k,\overline{c})$, што је у супротности с избором формуле ϕ.

Дакле, ϕ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C)$. Ако је $\mathcal{M} \models \phi(\overline{b},\overline{c})$, онда $\overline{b}$ реализује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/C)$. □

Напомена 5.1.5

1. Сваки алгебарски тип је изолован.

2. Алгебарска формула $\varphi(\overline{x},\overline{a})$ (са n слободних промељивих) је садржана само у коначно много поптпуних n-типова од којих је сваки алгебарски и изолован. То су тачно $\{\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/\overline{a}) \,|\, \overline{b} \in \varphi(\mathcal{M},\overline{a})\}$.

3. Алгебарност типа p се не може проверити тако што се провери скуп $p(\mathcal{M})$, тј. има случаја кад је $p(\mathcal{M})$ коначан скуп а тип p није алгебарски.

4. Структура која реализује само алгебарске типове је атомска. Таква структура је проста без обзира на кардиналност језика. □

Дефиниција 5.1.6 Ако $a \in \mathrm{acl}(C) \subseteq M$, онда за најмањи могући m такав да постоји алгебарска над C формула $\phi(x,\overline{c})$ таква да је $a \in \phi(M,\overline{c})$ и $|\phi(M,\overline{c})| = m < \aleph_0$ кажемо да је **вишеструкост** или **мултиплицитет** (multiplicity) a над C, у ознаци $\mathrm{mult}(a/C) = m$.

Вишеструкост се на исти начин дефинише и за таплове: ако $C \subseteq M$ и $\overline{a} \in M^k$ и постоји алгебарска над C формула $\phi(\overline{x},\overline{c})$ таква да $\overline{a} \in \phi(M^k,\overline{c})$ и $|\phi(M^k,\overline{c})| = m < \aleph_0$ тада се најмањи могућ такав m назива вишеструкост $\overline{a}$ над C, у ознаци $\mathrm{mult}(\overline{a}/C) = m$. Можемо проширити дефиницију и рећи да је

$$\mathrm{mult}(\overline{a}/C) = \inf\{\, |\varphi(\mathcal{M}^k,\overline{c})| \,|\, \varphi(\overline{x},\overline{c}) \in ForL_C \text{ и } \mathcal{M} \models \varphi(\overline{a},\overline{c}) \,\}$$

ако је тај инфимум постоји. □

Особина 5.1.7 Ако је $\overline{a} \in \mathrm{acl}(C)^k \subseteq M^k$ и за формулу φ важи $\mathrm{mult}(\overline{a}/C) = |\phi(M^k,\overline{c})|$ за $\overline{a} \in \mathrm{acl}(C)^k \subseteq M^k$ следи $\phi(\overline{x},\overline{c}) \vdash \mathrm{tp}(\overline{a}/C)$. □

Тврђење 5.1.8 Нека су $C \subseteq M$, $\overline{a} = (a'_1,...a'_k) \in \mathrm{acl}_M(C)^k$, $\overline{b} = (b'_1,...b'_l) \in \mathrm{acl}_M(C \cup \{a'_1,...a'_k\})^l$ и $\overline{a}\overline{b} = (a'_1,...a'_k,b'_1,...,b'_l)$. Тада:

$$\mathrm{mult}(\overline{a}/C) \cdot \mathrm{mult}(\overline{b}/C \cup \{\overline{a}\}) = \mathrm{mult}(\overline{a}\overline{b}/C).$$

Доказ: Доказаћемо тврђење у случају $k = l = 1$ и $C = \emptyset$; опште је слично. Претпоставимо:

$$\mathrm{mult}(a) = m, \ \ \phi(x) \text{ је алгебарска над } \emptyset \text{ и } \ a = a_1 \in \{a_1, a_2, ...a_m\} = \phi(M);$$

$$\mathrm{mult}(b/a) = n, \ \ \psi(y, a) \text{ је алгебарска над } \{a\} \text{ и}$$
$$b = b_{11} \in \{b_{11}, b_{12}, ...b_{1n}\} = \psi(M, a).$$

Дакле, $\phi(x)$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a)$ и $\psi(y, a)$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/a)$. На основу тврђења о транзитивности изолованости типова (тврђење 2.2.12) и напомене 2.2.13, следи да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(ab)$ изолован формулом $\varphi(x, y) = \phi(x) \wedge \psi(y, a)$

$n = |\psi(M, a)|$, па $\mathcal{M} \models \exists_{=n} y\psi(y, a)$.

Дакле, $\exists_{=n} y\psi(y, x) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a)$, па $\mathcal{M} \models \forall x(\phi(x) \Longrightarrow \exists_{=n} y\psi(y, x))$

Нека је $B_i = \{b_{i1}, b_{i2}, ...b_{in}\} = \psi(M, a_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Тада:

(1) $\quad |\{(a_i, b_{ij}) \,|\, i = 1, 2, ...m \ j = 1, 2, ..., n\}| = m \cdot n;$

(2) $\quad \varphi(M^2) = \{(a_i, b_{ij}) \,|\, i = 1, 2, ...m \ j = 1, 2, ..., n\}.$ □

Последица 5.1.9 Ако је $C \subseteq M$, онда важи (за одговарајући k):

$$\mathrm{mult}(\overline{a}/C) < \aleph_0 \qquad \text{акко} \qquad \overline{a} \in \mathrm{acl}_M(C)^k.$$ □

Напоменимо да кад год је $\overline{d}$ алгебарски над A, онда је

$$\mathrm{mult}(\overline{d}/A \cup B) \leqslant \mathrm{mult}(\overline{d}/A).$$

Тврђење 5.1.10 Ако је $D \subseteq M$ дефинабилан онда је acl_D оператор затворења на D, т.ј. ако су $A, B \subseteq D$, онда важи:

1) $\quad A \subseteq \mathrm{acl}_D(A) = \mathrm{acl}_D(\mathrm{acl}_D(A))$;

2) $\quad A \subseteq B$ повлачи $\mathrm{acl}_D(A) \subseteq \mathrm{acl}_D(B)$;

3) $\quad \mathrm{acl}_D(A) = \bigcup\{\mathrm{acl}_D(A_0) | A_0$ коначан подскуп од $A\}$;

Доказ:

1) За $a \in A$ формула $x \equiv a$ је L_A- формула која дефинише скуп $\{a\}$, који је, очигледно коначан и непразан, па је $a \in \mathrm{acl}_D(A)$, а тиме је и $A \subseteq \mathrm{acl}_D(A)$. Примењујући то на скуп $A_1 = \mathrm{acl}_D(A)$ добијамо $A_1 \subseteq \mathrm{acl}_D(A_1)$, тј. $\mathrm{acl}_D(A) \subseteq \mathrm{acl}_D(\mathrm{acl}_D(A))$.

Нека је $d \in \mathrm{acl}_D(\mathrm{acl}_D(A))$ и нека је $\varphi(x, \overline{y})$ (алгебарска) L_A-формула таква да $\varphi(x, \overline{b})$ изолује тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(d/\mathrm{acl}_D(A))$ и нека је $\phi(\overline{y})$ алгебарска L_A-формула која изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{b}/A)$. По теореми о изолованости типова, $\varphi(x, \overline{y}) \wedge \phi(\overline{y})$ је L_A-формула која изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(d, \overline{b}/A)$. По тврђењу 5.1.8 је $\varphi(x, \overline{y}) \wedge \phi(\overline{y})$ алгебарска формула. Тада је $\exists \overline{y} \varphi(x, \overline{y}) \wedge \phi(\overline{y})$ алгебарска L_A-формула и d је једно њено решење па је $d \in \mathrm{acl}_D(A)$. Одатле, $\mathrm{acl}_D(\mathrm{acl}_D(A)) \subseteq \mathrm{acl}_D(A)$.

Дакле, $A \subseteq \mathrm{acl}_D(A) = \mathrm{acl}_D(\mathrm{acl}_D(A))$;

2) Очигледно;

3) Ако је $b \in \mathrm{acl}_D(A)$, онда је $b \in \varphi(\mathcal{M}, \overline{a}) = \{b, b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ за неке параметре $\overline{a}$ из A.

Тада је $b \in \mathrm{acl}_D(\overline{a}) \subseteq \bigcup\{\mathrm{acl}_D(A_0) \,|\, A_0$ коначан подскуп скупа $A\}$. □

Тврђење 5.1.11 Ако је $D \subseteq M$ дефинабилан онда је dcl_D оператор затворења на D, т.ј. ако су $A, B \subseteq D$, онда важи:

1) $A \subseteq \mathrm{dcl}_D(A) = \mathrm{dcl}_D(\mathrm{dcl}_D(A))$;

2) $A \subseteq B$ повлачи $\mathrm{dcl}_D(A) \subseteq \mathrm{dcl}_D(B)$;

3) $\mathrm{dcl}_D(A) = \bigcup\{\mathrm{dcl}(A_0) | A_0$ коначан подскуп скупа $A\}$; □

5.2 Минималне структуре

У овом делу је T потпуна теорија пребројивог језика, осим ако се другачије не нагласи.

Дефиниција 5.2.1 : Нека је $\mathcal{M}$ бесконачна L-структура и $\varphi(x, \overline{a})$ неалгебарска L_M-формула. Кажемо да је $\varphi(x, \overline{a})$ **минимална у** $\mathcal{M}$, ако је за сваку L_M-формулу $\psi(x, \overline{b})$ тачно један од следећа два скупа коначан

$$\varphi(\mathcal{M}, \overline{a}) \cap \psi(\mathcal{M}, \overline{b}) \text{ и } \varphi(\mathcal{M}, \overline{a}) \cap \neg\, \psi(\mathcal{M}, \overline{b})$$

У том случају и за скуп $D = \varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ кажемо да је **минималан**.

Кажемо да је φ **јако минимална**, ако је за сваку структуру $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ и сваку L_N-формулу $\psi(\overline{x}, \overline{b})$ бар један од скупова $\varphi(\mathcal{N}, \overline{a}) \cap \psi(\mathcal{N}, \overline{b})$ и $\varphi(\mathcal{N}, \overline{a}) \cap \neg\, \psi(\mathcal{N}, \overline{b})$ коначан. У том случају и за скуп $D = \varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ кажемо да је **јако минималан**.

За комплетну теорију кажемо да је **јако минимална** ако је сваки њен модел јако минималан скуп. □

Приметимо да појам минималности зависи од структуре, док појам јаке минималности не зависи од конкретне структуре већ само од теорије.

Лема 5.2.2 Нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ елементарно еквивалентне структуре, $\overline{a} \in M^n$ и $\overline{b} \in N^n$ и $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b})$. За сваку формулу $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ језика L важи:

$$\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \text{ је јако минимална акко је } \varphi(\overline{x}, \overline{b}) \text{ јако минимална.}$$

Доказ: Нека је $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ јако минимална формула. Нека је $\mathcal{N}_1 \succcurlyeq \mathcal{N}$, нека је $\overline{b}' \in N_1$ и нека је $\psi(\overline{x}, \overline{b}')$ L_{N_1}-формула. Из $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b}) = \mathrm{tp}_1^{\mathcal{N}}(\overline{b})$ следи да је пресликавање $\mu : \overline{b} \longrightarrow \mathcal{M}$, дефинисано са $\mu(\overline{b}) = \overline{a}$ делимично елементарно пресликавање из $\mathcal{N}_1$ у $\mathcal{M}$, па се може продужити до делимично елементарног $\mu^\star : \overline{b}\overline{b}' \longrightarrow \mathcal{M}_1$ за неко $\mathcal{M}_1 \succcurlyeq \mathcal{M}$. Нека је $\overline{a}' = \mu^\star(\overline{b}')$. Ако $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \psi(\overline{x}, \overline{b}')$ није алгебарска, онда, због елементарности пресликавања $\mu^\star$, то није ни $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \psi(\overline{x}, \overline{a}')$, па је, због јаке минималности формуле φ, алгебарска формула $\varphi(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \neg\psi(\overline{x}, \overline{a}')$, а онда је таква, због елементарности пресликавања $\mu^\star$, таква и $\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \wedge \neg\psi(\overline{x}, \overline{b}')$.

Дакле, $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ је јако минимална.

Како су структуре $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ у овом резоновању равноправне, следи и симетричан део: из претпоставке да је $\varphi(\overline{x}, \overline{b})$ је јако минимална, да се закључити да је и $\varphi(\overline{x}, \overline{a})$ је јако минимална. $\square$

Тврђење 5.2.3 Ако је $\mathcal{M}$ минимална структура и $A \subset M$, онда је и структура добијена из M абсорбовањем A у језик такође минимална. $\square$

Лема 5.2.4 Ако је $D \subset M$ јако минималан, онда важи Штајницова аксиома замене :

$$a \in \mathrm{acl}_D(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{acl}_D(A) \text{ повлачи } b \in \mathrm{acl}_D(A \cup \{a\}).$$

Доказ: Доказаћемо замену у случају $A = \emptyset$: $a \in \mathrm{acl}_D(\{b\}) \setminus \mathrm{acl}_D(\emptyset)$ повлачи $b \in \mathrm{acl}_D(\{a\})$. Општи се своди на овај када A абсорбујемо у језик.

Нека је $\varphi(x, \overline{m})$ минимална формула која дефинише D.

Претпоставимо супротно: $a \in \mathrm{acl}_D(\{b\}) \setminus \mathrm{acl}_D(\emptyset)$ и $b \notin \mathrm{acl}_D(\{a\})$. Постоји природан број n и L-формула $\phi(x, y)$ који сведоче $a \in \mathrm{acl}_D(\{b\})$:

$$\mathcal{M} \models \varphi(b, \overline{m}) \wedge \varphi(a, \overline{m}) \wedge \phi(b, a) \wedge (\exists_{=n} z)(\varphi(z, \overline{m}) \wedge \phi(b, z)).$$

Означимо $\varphi(x, \overline{m}) \wedge \varphi(y, \overline{m}) \wedge \phi(x, y) \wedge (\exists_{\leqslant n} z)(\varphi(z, \overline{m}) \wedge \phi(x, z))$ са $\psi(x, y)$. Тада:

$$\mathcal{M} \models \psi(x, y) \rightarrow (\exists_{\leqslant n} y)\psi(x, y).$$

Из $\mathcal{M} \models \psi(b, a)$, због $b \notin \mathrm{acl}_D\{a\})$, закључујемо да је скуп решења формуле $\psi(x, a)$ бесконачан, због минималности мора бити ко-коначан; нека му комплемент има k елемената. Како 'за све осим k' можемо изразити формулом имамо: $\mathcal{M} \models (\forall_{\mathrm{but} \leqslant k} t)\psi(t, a)$.

Како $a \notin \mathrm{acl}_D(\emptyset)$ следи де је скуп решења формуле $(\forall_{\mathrm{but} \leqslant k} t)\psi(t, y)$ бесконачан: нека су $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ различити елементи њеног скупа решења. Тада је $|\neg\psi(M, a_i)| \leqslant m$ па како је M бесконачна постоји $b' \in M$ такав да је $\mathcal{M} \models \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \psi(b', a_i)$. Значи $|\psi(b', M)| \geqslant n+1$, што је у контрадикцији са:

$$\mathcal{M} \models \psi(b', a_i) \rightarrow (\exists_{\leqslant n} y)\psi(b', y).$$

$\square$

Тврђење 5.1.10 и лема 5.2.4 заједно кажу да је acl_D предгеометрија.

Последица 5.2.5 Ако је D минималан скуп структуре $\mathcal{M}$ тада је (D, acl_D) предгеометрија. $\square$

Пример 5.2.6 Нека је $M = \{(i, j) \in \omega^2 \,|\, j \leqslant i\}$. Посматрајмо структуру (M, E) где је $E((i, j), (k, l))$ акко $i = k$ (релација еквиваленције чије су све класе коначне и имају редом $1, 2, 3, ...$ елемента). Лако се показује да је она минимална али да јој ниједно (право) елементарно проширење није минимално. $\square$

Пример 5.2.7 (1) Алгебарски затворено поље фиксне карактеристике је јако минимална структура. то следи из чињенице да теорија допушта елиминацију квантора, па се свака формула своди на коњукцију једнакости и неједнакости. Дакле, свака свака формула је еквивалентна коњукцији једног система полиномијалних једначини и негацији другог система полиномијалних једначина,па је опчигледно да је скуп решења система коначан или коконачан.

(2) Векторски простор је, сличном као малопре, због елиминације квантора јако минимална структура. □

Пример 5.2.8 (а) $(\omega,<)$ је минимална структура.
Ако додамо симбол константе за 0 и симболе бинарних релација S_n и дефинишемо $S_n(a,b)$ акко $a+n=b$ имаћемо елиминацију квантора.

(б) $(\omega+\omega^*,<)$ је минимална структура. ω^* је обрнути ω: $\omega^*=\{i^* \mid i\in\omega\}$ и уређење је:

$$0<1<...<i<i+1<...<(j+1)^*<j^*<...<1^*<0^*. \qquad \square$$

Лема 5.2.9 Нека је $A\subseteq M$ и нека је $f: A\longrightarrow N$ парцијално елементарно утапање.

(а) Ако $c\in \mathrm{acl}_M(A)$ тада постоји $d\in \mathrm{acl}_N(f(A))$ такав да се f може продужити до парцијалног елементарног утапања $f\cup\{(c,d)\}$.

(б) f се може продужити до елеменратног $f^\star : \mathrm{acl}_M(A)\longrightarrow N$ и при томе је $f^\star(\mathrm{acl}_M(A))=\mathrm{acl}_N(f(A))$.

Доказ: (а) Нека формула $\phi(x,\overline{a})\in \mathrm{tp}(c/A)$ сведочи $c\in\mathrm{acl}_M(A)$: $\phi(x,\overline{a})\vdash \mathrm{tp}(c/A)$. Тада за сваку A-формулу $\psi(x,\overline{a}_0)$:

$$\text{или } \mathcal{M}\models(\forall x)(\phi(x,\overline{a})\to\psi(x,\overline{a}_0)) \quad \text{или} \quad \mathcal{M}\models(\forall x)(\phi(x,\overline{a})\to\neg\psi(x,\overline{a}_0)),$$

прва опција важи акко $\mathcal{M}\models\psi(c,\overline{a}_0)$ $(\psi(x,\overline{a}_0)\in\mathrm{tp}(c/A))$, а друга акко $\neg\psi(x,\overline{a}_0)\in\mathrm{tp}(c/A)$. Како је f парцијално елементарно имамо:

$$\text{или } \mathcal{N}\models(\forall x)(\phi(x,f(\overline{a}))\to\psi(x,f(\overline{a}_0))) \quad \text{или}$$
$$\mathcal{N}\models(\forall x)(\phi(x,f(\overline{a}))\to\neg\psi(x,f(\overline{a}_0))).$$

Даље, $\mathcal{M}\models\phi(c,\overline{a})$ па $\mathcal{M}\models(\exists x)\phi(x,\overline{a})$. f је парцијално елементарна па: $\mathcal{N}\models(\exists x)\phi(x,f(\overline{a}))$ и постоји $d\in N$ такав да $\mathcal{N}\models\phi(d,f(\overline{a}))$. Због горњег 'или - или' за сваку $f(A)$-формулу $\psi(x,f(\overline{a}_0))$ важи:

$$\mathcal{N}\models\psi(d,f(\overline{a}_0)) \quad \text{акко} \quad \mathcal{N}\models(\forall x)(\phi(x,f(\overline{a}))\to\psi(x,f(\overline{a}_0))).$$

Имамо низ еквиваленција:

$$\mathcal{M}\models\psi(c,\overline{a}_0) \quad \text{акко} \quad \mathcal{M}\models(\forall x)(\phi(x,\overline{a})\to\psi(x,\overline{a}_0)) \quad \text{акко}$$

$$\mathcal{N} \models (\forall x)(\phi(x, f(\overline{a})) \to \psi(x, f(\overline{a}_0))) \quad \text{акко} \quad \mathcal{N} \models \psi(d, f(\overline{a}_0)).$$

Следи да је f^* елементарно и $d \in \mathrm{acl}_N(f(A)))$.

(б) следи директно из дела (а). □

Како је за било који дефинабилан скуп D у $\mathcal{M}$ оператор acl_D дефинисан једнакошћу $\mathrm{acl}_D(A) = D \cap \mathrm{acl}_M(A)$, за све $A \subseteq D$, претходна лема се лако (доказ је ствар компликоване нотације, а не оригиналне идеје) уопшти до

Лема 5.2.10 Нека је D дефинабилан скуп у $\mathcal{M}$ и нека је D' дефинабилан скуп у $\mathcal{N}$. Нека је $A \subseteq D$ и нека је $f : A \longrightarrow N$ елементарно утапање за које је $f(A) \subseteq D'$.

(а) Ако је $c \in \mathrm{acl}_D(A)$ тада постоји $d \in \mathrm{acl}_{D'}(f(A))$ такав да се f може продужити до парцијалног елементарног утапања $f \cup \{(c, d)\}$.

(б) f се може продужити до елеменратног $f^\star : \mathrm{acl}_D(A) \longrightarrow N$ и при томе је $f^\star(\mathrm{acl}_D(A)) = \mathrm{acl}_{D'}(f(A))$.

Лема 5.2.11 Нека је $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}_i$, $a_1, \ldots, a_k \in A \subseteq M$, $\varphi(x, \overline{a})$ јако минимална формула и $A \subseteq B \subseteq N_1$.

1. Постоји тачно један неалгебарски тип у $S_1^{\mathcal{N}_1}(B)$ који садржи φ.

2. Ако је $\mu : B \longrightarrow N_2$ елементарно, $d_1 \in \varphi(N_1, \overline{a}) \setminus \mathrm{acl}(B)$ и $d_2 \in \varphi(N_2, \overline{a}) \setminus \mathrm{acl}(\mu(B))$, онда је $\mu \cup \{(d_1, d_2)\}$ елементарно.

3. Ако су $b_1^i, \ldots, b_n^i \in \varphi(N_i, \overline{a})$ независни над A, онда је
$$\mathrm{tp}^{\mathcal{N}_1}(\overline{b}^1/B) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}_2}(\overline{b}^2/B).$$

Доказ:

1. Нека су p и q у $S_1^{\mathcal{N}_1}(B)$ и нека садрже φ. Нека је p неалгебарски и нека је $p \neq q$. Тада постоји формула ψ са параметрима из B која је у $p \setminus q$. Из $\varphi, \psi \in p$ следи да је и $\psi \wedge \varphi \in p$, па је $\psi \wedge \varphi$ неалгебарска, што због јаке минималности формуле φ повлачи да је $\neg\, \psi \wedge \varphi \in q$ алгебарска, па је такав и q.

2. Нека је $\psi(x)$ било која формула са параметрима из B. Ако је $\mathcal{N}_1 \models \psi(d_1)$, из $d_1 \in \varphi(N_1, \overline{a}) \setminus \mathrm{acl}(B)$, следи да је $\varphi(\mathcal{N}_1) \wedge \psi(\mathcal{N}_1)$ бесконачан скуп, а тиме и $\varphi(\mathcal{N}_1) \wedge \neg\, \psi(\mathcal{N}_1)$ коначан. Дакле, постоји број n такав да важи $\mathcal{N}_1 \models \exists^{=n} x!(\varphi(x) \wedge \neg\, \psi(x))$. Због $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}_i$ мора бити и $\mathcal{N}_2 \models \exists^{=n} x!(\varphi(x) \wedge \neg\, \psi(x))$ (другим речима $\varphi(x) \wedge \neg\, \psi(x)$ је алгебарска формула) па, због $d_2 \in \varphi(N_2, \overline{a}) \setminus \mathrm{acl}(\mu(B))$ не може бити $\mathcal{N}_2 \models \neg\, \psi(d_2))$ и мора бити $\mathcal{N}_2 \models \psi(d_2))$.
Слично, ако $\mathcal{N}_1 \models \psi(d_1)$, онда $\mathcal{N}_1 \models \psi(d_1)$. Дакле, $\mu \cup \{(d_1, d_2)\}$ елементарно.

3. Итерирајући претходни поступак, доказује се ова тачка тврђења. $\square$

Незнатним прилагођавањем доказа претходне леме, доказује се следећа:

Лема 5.2.12 Нека је $\mathcal{M} \models T$, $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}_i$, $\varphi(x)$ јако минимална формула без параметара и $B \subseteq N_1$.

1. Постоји тачно један неалгебарски тип у $S_1^{\mathcal{N}_1}(B)$ који садржи φ.
2. Ако је $\mu : B \longrightarrow N_2$ елементарно, $d_1 \in \varphi(N_1) \backslash \mathrm{acl}(B)$ и $d_2 \in \varphi(N_2) \backslash \mathrm{acl}(\mu(B))$, онда је $\mu \cup \{(d_1, d_2)\}$ елементарно.
3. Ако су $b_1^i, \dots, b_n^i \in \varphi(N_i)$ независни над A, онда је
$$\mathrm{tp}^{\mathcal{N}_1}(\bar{b}^1/B) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}_2}(\bar{b}^2/B).$$

Напомена: Ако се у другу лему (5.2.12) стави да је $A = \emptyset$, онда је заправо она варијанта прве леме (5.2.11). У таквој нотацији је следеће тврђење последица обе претходне леме:

Последица 5.2.13 Ако су $\mathcal{N}_i$, A и φ као у исказима лема 5.2.11 и 5.2.12, и ако је за $i = 1, 2$ B_i бесконачан подскуп $\varphi(\mathcal{N}_i)$ независан над A, онда су они скупови нераспознатљивих истог дијаграма типова над A, тј. за свако елементарно пресликавање $\mu : A \longrightarrow A$ и свако $1-1$ пресликавање $f : B_1 \longrightarrow B_2$, $\mu \cup f$ је елементарно. $\square$

Теорема 5.2.14 Марш[7]:
(А) Нека је T јако минимална и нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ њени модели.

(1) $\mathcal{M}$ се може елементарно утопити у $\mathcal{N}$ акко $\dim_M(\mathcal{M}) \leqslant \dim_N(\mathcal{N})$.

(2) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ су изоморфне ако и само ако $\dim_M(\mathcal{M}) = \dim_N(\mathcal{N})$.

(Б) Нека су $\mathcal{N}_i$, A и φ као у исказима лема 5.2.11 и 5.2.12 и нека је $\dim_{N_1}(\varphi(\mathcal{N}_1)) = \dim_{N_2}(\varphi(\mathcal{N}_2))$. Тада постоји елементарно пресликавање $\mu : \varphi(\mathcal{N}_1) \longrightarrow \mathcal{N}_2$ и при том је $\mu(\varphi(\mathcal{N}_1)) = \varphi(\mathcal{N}_2)$

Доказ:
(Б) Нека је B_i база предгеметрије $\varphi(\mathcal{N}_i)$ и нека је f било која бијекција из B_1 у B_2. Применом последице 5.2.13 се закључује да је f елементарно, леме 5.2.9 и 5.2.10 обезбеђују да се f да продужити до траженог μ.

(А) следи из (Б) $\square$

Ова теорема има занимљиву последицу у случају јако минималне теорије:

Последица 5.2.15 Нека је T јако минимална теорија у пребројивом језику. Тада је T непребројиво категорична. $\square$

Глава 6

Стабилне теорије, Вотови парови и Морлијева теорема

6.1 κ-стабилне теорије

Дефиниција 6.1.1: Нека је κ бесконачан кардинал. За потпуну теорију T кажемо да је κ-стабилна ако из $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $|A| \leqslant \kappa$ следи $|S^{\mathcal{M}}(A)| \leqslant \kappa$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ κ-стабилна ако је таква $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$. $\square$

Често кажемо „ω-стабилност”, уместо „$\aleph_0$-стабилност”. Примери ω-стабилних теорија су јако минималне теорије из претходног поглавља: ACF_0 или теорија бесконачних векторских простора над фиксираним пољем. Пример теорије која није ω-стабилна је DLO зато што постоји континуум типова у $S_1(Q)$; ствар је метода бесконачне комбинаторике показати да DLO није κ-стабилна ни за један бесконачан κ. На сличан начин се може показати да било која теорија која има модел са дефинабилним парцијалним уређењем које има бесконачан строго растући ланац није κ-стабилна ни за један κ.

Наредна лема утврђује да је за испитивање ω-стабилности довољно бројати 1-типове.

Лема 6.1.2 Нека је $n > 1$ природан број, κ бесконачан кардинал и T потпуна теорија произвољног језика. Следећи искази су еквивалентни:

1) Из $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $|A| \leqslant \kappa$ следи $|S_1^{\mathcal{M}}(A)| \leqslant \kappa$;

2) Из $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $|A| \leqslant \kappa$ следи $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| \leqslant \kappa$;

3) Из $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $|A| \leqslant \kappa$ следи $|S^{\mathcal{M}}(A)| \leqslant \kappa$.

Доказ: Довољно је показати да из 1) следи 2). Претпоставимо 1) и нека $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $|A| \leqslant \kappa$. Без умањења општости, $\mathcal{M}$ је засићен и има моћ много већу од κ. Нека $p(\overline{x}) \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ и изаберимо $\overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in M^n$ који реализује p. Због претпоставке 1) о броју 1-типова, има највише κ могућности за $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_1/A)$, највише κ могућности за $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_2/A\,a_1)$, ..., највише κ могућности за $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/A\,a_1...a_{n-1})$. Према томе, има највише κ могућности за $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}/A)$ $\square$

Тврђење 6.1.3 Ако је потпуна теорија T највише пребројивог језика ω-стабилна, онда је она κ-стабилна за све бесконачне кардинале κ.

Доказ: Слично другом делу доказа тврђења 3.1.11: под претпоставком да T није κ-стабилна за неки непребројив κ показаћемо да постоји „бинарно дрво висине ω" формула које производи континуум типова над пребројивим скупом параметара.

Нека је $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$, $|A| = \kappa$ и $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| > \kappa$. Пошто има само κ формула са параметрима из A, мора постојати формула $\varphi_\emptyset(\overline{x})$ таква да је $|\,[\varphi_\emptyset(\overline{x})]\,| > \kappa$.

-корак 1: На основу 3.1.9 постоји $\psi(\overline{x})$ таква да је $|\,[\varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \psi(\overline{x})]\,| > \kappa$ и $|\,[\varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \neg\,\psi(\overline{x})]\,| > \kappa$. Нека је $\varphi_1(\overline{x}) = \varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \psi(\overline{x})$ и $\varphi_0(\overline{x}) = \varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \neg\,\psi(\overline{x})$.

Ако смо за све $\sigma \in 2^i$ конструисали $\varphi_\sigma(\overline{x})$, онда прелазимо на

-корак $\mathbf{i+1}$: Опет на основу тврђења 3.1.9, за све $\sigma \in 2^i$ постоји формула $\psi_\sigma(\overline{x})$ таква да је $|\,[\varphi_\sigma(\overline{x}) \wedge \psi_\sigma(\overline{x})]\,| > \kappa$ и $|\,[\varphi_\sigma(\overline{x}) \wedge \neg\,\psi_\sigma(\overline{x})]\,| > \kappa$. Нека је $\varphi_{\sigma,1}(\overline{x}) = \varphi_\sigma(\overline{x}) \wedge \psi_\sigma(\overline{x})$ и $\varphi_{\sigma,0}(\overline{x}) = \varphi_\sigma(\overline{x}) \wedge \neg\,\psi_\sigma(\overline{x})$.

По конструкцији, за сваке $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ важи следеће:

- $|\,[\varphi_\sigma(\overline{x})]\,| > \kappa$;
- Ако је $\sigma \subset \tau$ онда $\varphi_\tau \models \varphi_\sigma$;
- $\varphi_{\sigma,k}(\overline{x}) \models \neg\,\varphi_{\sigma,1-k}(\overline{x})$.

Нека је A_0 скуп параметара из A који се јављају и $\{\varphi_\sigma(\overline{x}) \,|\, \sigma \in 2^\omega\}$. Очигледно је да је $|A_0| \leqslant \aleph_0$ и да, слично као у доказу тврђења 3.1.11, свакој грани дрвета $\{\varphi_\sigma(\overline{x}) \,|\, \sigma \in 2^\omega\}$ може да се додели тип из $S_n^{\mathcal{M}}(A_0)$, па да је $|S_n^{\mathcal{M}}(A_0)| \geqslant 2^{\aleph_0}$.

Дакле, ако T није κ-стабилна (за $\kappa > \aleph_0$), онда није ни ω-стабилна. $\square$

Тврђење 6.1.4 Ако је потпуна теорија највише пребројивог језика T ω-стабилна, онда су за свако $\mathcal{M} \models T$, $A \subseteq M$ и $n \geqslant 1$ изоловани типови у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ густи.

Доказ: Слично првом делу доказа тврђења 3.1.11.

Претпоставимо супротно: Скуп изолованих типова у $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ није густ. Тада постоји $\varphi_\emptyset(\overline{x})$ такав да није садржан у ниједном изолованом типу а јесте садржан у неком типу (тј. сагласна је с теоријом T).

корак 1: На основу тврђења 3.1.10 постоји $\psi(\overline{x})$ таква да су $[\varphi_1(\overline{x})]$ и $[\varphi_0(\overline{x})]$ непразни скупови без изолованих типова за $\varphi_1(\overline{x}) = \varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \psi(\overline{x})$ и $\varphi_0(\overline{x}) = \varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \neg\, \psi(\overline{x})$.

Ако смо за све $\sigma \in 2^i$ конструисали $\varphi_\sigma(\overline{x})$, онда прелазимо на

корак $\mathbf{i+1}$: За $\sigma \in 2^i$ на основу тврђења 3.1.10 постоји $\psi_\sigma(\overline{x})$ таква да су $[\varphi_{\sigma,1}(\overline{x})]$ и $[\varphi_{\sigma,0}(\overline{x})]$ непразни скупови без изолованих типова за $\varphi_{\sigma,1}(\overline{x}) = \varphi_\sigma(\overline{x}) \wedge \psi_\sigma(\overline{x})$ и $\varphi_{\sigma,0}(\overline{x}) = \varphi_\sigma(\overline{x}) \wedge \neg\, \psi_\sigma(\overline{x})$.

Скуп свих параметара које учествују у формулама дрвета $\{\varphi_\sigma(\overline{x}) \,|\, \sigma \in 2^\omega\}$ означимо са A_0. Очигледно је $|A_0| \leqslant \aleph_0$.

Из конструкције је јасно да за било које $\sigma, \tau \in 2^{\aleph_0}$ важи:

- $[\varphi_\tau]$ је непразан и не садржи изоловане типове;
- Ако је $\sigma \subset \tau$ онда $\varphi_\tau \models \varphi_\sigma$;
- $\varphi_{\tau,j} \models \varphi_{\tau,1-j}$.

Нека је $f \in 2^\omega$. Важи $[\varphi_{f_{|1}}] \supset [\varphi_{f_{|2}}] \supset [\varphi_{f_{|3}}] \supset \ldots$.
Дакле, скуп $\{\, [\varphi_{f_{|i+1}}] \,|\, i \in \omega\}$ представља фамилију затворених скупова која има својство коначног пресека. Пошто је $S_n^{\mathcal{M}}(A_0)$ компактан тополошки простор, фамилија $\{[\varphi_{f_{|i+1}}] \mid i \in \omega\}$ има непразан пресек. Изаберимо произвољан елемент тог пресека и означимо га са p_f. Ако је $f \neq g$ онда постоји $i \in \omega$ такав да је $f_{|i} = g_{|i}$ и $f(i) \neq g(i)$. По конструкцији је $\varphi_{f_{|i+1}} \models \neg \varphi_{g_{|i+1}}$ па су p_f и p_g различити. Дакле, додељивање $f \mapsto p_f$ је $1-1$ па следи

$$2^{\aleph_0} = |2^\omega| = |\{p_f \ \mid \ f \in 2^\omega\}| \leqslant |S_n^{\mathcal{M}}(A_0)|,$$

па T није ω-стабилна. □

Пример 6.1.5 (1) Нека је $T = \mathrm{ACF}$ и P област целих. Ако је F алгебарско затворење поља разломака из P, онда је F прост модел над P. Свако утапање P-а у неко алгебарски затворено поље K се може једнозначно продужити до утапања F-а у K и то утапање је елементарно.

(2) Слично претходном примеру, ако је P уређена област целих и F је реално затворење поља разломака из P, онда је F прост модел теорије RCF над P. □

Дакле, „модел прост над A” је моделско теоретска верзија „алгебре генерисане скупом A”. У том смислу су управо претходни примери били инспирација за увођење појма модела простог над скупом.

Напомена 6.1.6 1. Ако је $A = \emptyset$, онда се појмови „прост над A” и „прост” поклапају.

2. Еквивалентна дефиниција би била: „Кажемо да је $\mathcal{M}$ прост над A ако је прост модел теорије $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$”. Ако је A коначан скуп, онда $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ има мање од континуум потпуних типова акко $T_A = \mathrm{Th}(\mathcal{M}_A)$ има мање од континуум потпуних типова. Отуд теорија која има мање од континуум потпуних типова има прост модел над било којим коначним A.

3. Што се тиче непребројивих теорија, постојање простих и атомских модела је у многоме сложеније. Густина скупа изолованих типова у општем случају не гарантује постојање атомских модела (јер теорема о испуштању типова не важи за теорије непребројивог језика). Харингтон (Harrington) је показао да прост модел не мора бити атомски и да је могуће да постоје (међусобно) неизоморфни прости модели исте теорије. Такође постоји непребројива теорија која има прост модел али ни за један коначан скуп нема прост модел над тим скупом. Ови примери су прилично компликовани.

4. Наредне теореме 6.1.8 и 6.1.9 показују да су ω-стабилне теорије мало „питомије” по питању простих модела. Касније ћемо навести (без доказа) и Шелахову теорему о јединствености простих модела у ω-стабилним теоријама. $\square$

Дефиниција 6.1.7 Нека је T потпуна теорија, $\mathcal{M} \models T$ и $A \subset M$. Кажемо да је $\mathcal{M}$ **минималан модел над A** или да је **моделски минималан над A** ако за сваки $\mathcal{N}$ такав да је $A \subset N$ из $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ следи $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ је (моделски) минималан ако је минималан над $\emptyset$. $\square$

Понекад је прост модел истовремено и моделски минималан. На пример, кад год $\mathcal{M}$ (модел потпуне теорије највише пребројивог језика) реализује само алгебарске типове, онда је минималан и прост модел. Није тешко наћи пример простог модела који није минималан: $(\mathbb{Q}, <)$ је прост модел теорије DLO, али није моделски минималан јер је сваки интервал I са рационалним крајевима његова подструктура различита од саме структуре $(\mathbb{Q}, <)$. Додуше, $(I, <)$ је изоморфан простом $(\mathbb{Q}, <)$ па је и сам прост и није моделски минималан. Пошто је сваки пребројив модел теорије DLO изоморфан моделу $(\mathbb{Q}, <)$, сваки је прост и ниједан није моделски минималан. Јасно је да кад потпуна теорија има и моделски минималан и прост модел, да су они изоморфни један другом, DLO је пример теорије која има прост а нема моделски минималан модел, док је $\mathrm{Th}(\mathbb{Z}, +)$ пример теорије која има бесконачно много неизоморфних минималних модела и нема прост модел.

Постоје и теорије које имају минималан модел који није прост. Пример је теорија $\mathrm{Th}(Z, +)$ којој је $(Z, +)$ минималан модел али није прост (над $\emptyset$); међутим, он је прост над $\{1\}$.

Наредна теорема гарантује постојање простог модела ω-стабилне теорије над било којим скупом параметара, могуће непребројивим. Модел конструисан у доказу је не само прост него и атомски. Међутим, она не гарантује јединственост модела.

Теорема 6.1.8 Ако је T ω-стабилна потпуна теорија највише пребројивог језика, $\mathcal{M} \models T$ и $A \subseteq M$, онда постоји над A прост атомски модел $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}$.

Доказ: Правићемо низ скупова $\{A_\beta \,|\, \beta \leqslant \alpha\}$, а онда ће њихова унија бити скуп носач структуре $\mathcal{M}_0$. На почетку конструкције не знамо који ординал ће играти улогу ординала α.

почетни корак: $A_0 = A$;

гранични корак: Ако је $\cup\gamma = \gamma \neq 0$ и за све $\beta < \gamma$ је направљено A_β, онда нека је $A_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta$;

следбенички корак: Ако ниједан елемент скупа $M \setminus A_\beta$ не реализује изоловани тип над A_β,онда стајемо са конструкцијом и текуће β је с почетка тражено α.

Ако постоји елемент скупа $M \setminus A_\beta$ који реализује изоловани тип над A_β, онда изаберимо један такав, означимо га са a_β и нека је $A_{\beta+1} = A_\beta \cup \{a_\beta\}$.

Нека је $M_0 = A_\alpha$

1. Нека је $\mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \overline{a})$ за неко $\overline{a} \in A_\alpha^{<\omega}$. По тврђењу 6.1.4, изоловани су густи у $S_1^{\mathcal{M}}(A_\alpha)$, па постоји изоловани $p \in [\,\varphi(x, \overline{a})\,]$. Тада се p реализује у $\mathcal{M}$. Рецимо да га реализује неки елемент $b \in M$. Онда је $p = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(b/A_\alpha)$, па ће, по избору ординала α у конструкцији, бити $b \in A_\alpha$, а како је $\varphi(x, \overline{a}) \in p$, биће и $\mathcal{M} \models \varphi(b, \overline{a})$. Због овога је $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}$ (Тарски-Вот тест).

2. Нека је $\mathcal{N} \models T$ и $\mu : A \longrightarrow N$ елементарно пресликавање. Направићемо низ елементарних пресликавања таква да свако следеће продужује свако претходно.

почетни корак: $\mu_0 = \mu : A_0 \longrightarrow N$;

гранични корак: Ако је $\cup\gamma = \gamma \neq 0$ и за све $\beta < \gamma$ је направљено елементарно μ_β, онда нека је $\mu_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \mu_\beta$. Пошто су сви μ_β били елементарни то ће и μ_γбити елементрано;

следбенички корак: Нека је $\beta\alpha$ и $\mu_\beta : A_\beta \longrightarrow N$ конструисано елементарно пресликавање. Нека $\varphi(x, \overline{a})$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\beta/A_\beta)$. Тада, на основу трврђења 2.3.3, формула $\varphi(x, \mu_\beta(\overline{a}))$ изолује[1]

$$\mu_\beta(\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\beta/A_\beta)) \in S_1^{\mathcal{N}}(\mu_\beta(A_\beta)).$$

[1] На основу првог дела тврђења 2.3.3, слика типа је тип, а на основу трећег, слика једночланог базног мора бити једночлан.

$\mathcal{M}_0 \models \exists x \varphi(x, \overline{a})$ и μ_β је елементарно, па

$\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, \mu_\beta(\overline{a}))$, па за неко $b \in N$ важи

$\mathcal{N} \models \varphi(b, \mu_\beta(\overline{a}))$, па ће $\mu_{\beta+1} = \mu_\beta \cup \{(a_\beta, b)\}$ бити елементарно.

Дакле, μ_α је елементарно и домен му је цео M_0 па је елеметарно утапање, тиме је и $\mathcal{M}_0$ прост над A.

3. Елементи структуре $\mathcal{M}_0$ су облика a_β, за неко $\beta \leqslant \alpha$. Покажимо индукцијом да се у $\mathcal{M}_0$ реализују само изоловани типови над скупом A.

По конструкцији је a_β изолован над A_β.

Тачније, покажимо да важи:

„Тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\beta/A)$ изолован за све $\beta \leqslant \alpha$".

почетни корак: a_0 је изабран тако да је тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_0/A_0)$ изолован. С обзиром да је $A_0 = A$ и $S_n^{\mathcal{M}}(A) = S_n^{\mathcal{M}_0}(A)$ (јер је $A \subseteq M_0$ и $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}$), биће и $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_0/A)$ изолован.

гранични корак: У граничном кораку нисмо додавали елементе (a_β је додат скупу $A_{\beta+1}$ у кораку $\beta + 1$).

следбенички корак: Индуктивна хипотеза је да за све $\gamma < \beta$ тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\gamma/A)$ изолован. a_β је изабран тако да је тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_\beta/A_\beta)$ изолован. С обзиром да је $A \subseteq A_\beta$ и, по индуктивној хипотези, свако $b \in A_\beta$ (јер је $b = a_\gamma$ за неко $\gamma < \beta$) тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(b/A)$ је изолован, по тврђењу 2.2.12 ће бити изолован тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}_0}(a_\beta/A)$. □

Наредну, Шелахову (Shelah) теорему наводимо без доказа, пошто је нећемо користити.

Теорема 6.1.9 (Јединственост простих модела у ω-стабилним теоријама) Ако је T ω-стабилна потпуна теорија највише пребројивог језика, $\mathcal{M} \models T$ и $\mathcal{N} \models T$ оба проста над A и ако је $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}_A(\mathcal{N})$, онда постоји изоморфизам структура $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ који фиксира елементе скупа A. □

У доказу теореме 6.1.8 користи се техника која заслужује да се на њу обрати пажња. Структуре дефинисане на тај начин су увек просте и атомске над скупом над којим су конструисане. Пут до доказа Шелахове теореме о јединствености простих модела над скупом се може прећи тако што се прво докаже јединственост модела конструисаних над датим скупом.

Дефиниција 6.1.10 Нека је $\mathcal{M}$ структура највише пребројивог језика L и нека је $B \subseteq M$. Нека је α ординал и $A = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\} \subseteq M$. Нека је

$$A_0 = B \quad \text{и} \quad A_\gamma = B \cup \{a_\beta \mid \beta < \gamma\} \quad \text{за } 0 < \gamma < \alpha.$$

Кажемо да је низ $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ конструкција над B ако је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_\beta/A_\beta)$ изолован тип за свако $\beta < \alpha$.

M је конструисан над B или конструктибилан над B ако се његови елементи могу поређати у низ који је конструкција над B. □

Приметимо да је ако је $\{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$ конструкција над B, онда је конструкција и над A_β за било које $\beta < \alpha$.

Теорема 6.1.8, у светлу нове дефиниције, гласи

Теорема 6.1.11 (1) Нека је T ω-стабилна теорије, $\mathcal{M}$ њен модел и $A \subseteq M$. Постоји $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ који је конструисан над A.

(2) Ако је $\mathcal{M}$ конструисан над A, онда је прост над A и атомски (сваки тип над A реализован у $\mathcal{M}$ је изолован). □

Наредну теорему наводимо без доказа будући да је нећемо користити.

Тврђење 6.1.12 Јединственост Конструктибилних модела
Нека је A скуп и нека су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ конструисани над A. Тада се идентитета на A продужава до изоморфизма структура $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. □

6.2 Вотови парови

Дефиниција 6.2.1 Нека је $\kappa > \lambda \geqslant \aleph_0$. Кажемо да L-теорија T има (κ, λ) модел ако постоје L-структура $\mathcal{M} \models T$ и L-формула $\varphi(\overline{x})$ такви да је $|\mathcal{M}| = \kappa$ и $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| = \lambda$. □

Дефиниција 6.2.2 Кажемо да је $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ Вотов (Vaught) пар модела теорије T ако $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N} \models T$, $M \neq N$ и ако постоји L_M-формула φ таква да је $\varphi(\mathcal{M})$ бесконачно и да је $\varphi(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{N})$. □

Пример 6.2.3 Пример Вотовог пара је пар нестандарних модела теорије $T = \mathrm{Th}(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, <)$. Ако је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N} \models T$, $\mathcal{N}$ је наставак[2] $\mathcal{M}$-а, $a \in \mathcal{M}$ је бесконачан и $\varphi(x) = x < a$, онда је $\varphi(\mathcal{M})$ бесконачан и $\varphi(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{N})$. □

Лема 6.2.4 Ако L-теорија T има (κ, λ) модел за $\kappa > \lambda \geqslant \aleph_0$, онда T има Вотов пар $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$.

Доказ: Нека је $\mathcal{N}$ (κ, λ) модел теорије T и нека је $D = \varphi(\mathcal{N})$, скуп моћи λ. По доњој Сколем-Ловенхајм теореми постоји $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ који садржи D и за који је $|\mathcal{M}| = |D| = \lambda$. $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ је Вотов пар. □

Лема 6.2.5 Ако је $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ Вотов пар модела теорије T, онда теорија T има Вотов пар $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ при чему су $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{N}_0$ пребројиви.

[2] енглески оригинал је „end-extension".

Доказ: Нека је P унарни симбол релације који се не јавља у језику L и $L^* = L \cup \{P\}$. Ако је $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ Вотов пар, онда нека је $\mathcal{N}^*$ структура која настаје из $\mathcal{N}$ тако што P интерпретирамо као M.

Ако је $\varphi(\overline{x})$ формула језика L, онда нека је $\varphi^P(\overline{x})$ формула језика L^* дефинисана на следећи начин:
-ако је φ атомска, онда је $\varphi^P(x_1, \dots, x_k) = \bigwedge_{i \in \{1,2,3,\dots,k\}} P(x_i) \wedge \varphi(x_1, \dots, x_k)$;
-ако је $\varphi = \neg\, \psi$, онда је $\varphi^P = \neg\, \psi^P$;
-ако је $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, онда је $\varphi^P = \psi_1^P \wedge \psi_2^P$;
-ако је $\varphi(\overline{x}) = \exists y \psi(y, \overline{x})$, онда је $\varphi^P(\overline{x}) = \exists y(\, P(y) \wedge \psi^P(y, \overline{x})\,)$.
Индукцијом се лако показује да за све $\overline{a} \in M^i$ важи:

$$\mathcal{M} \models \varphi(\overline{a}) \quad \text{акко} \quad \mathcal{N}^* \models \varphi^P(\overline{a}).$$

Нека је $\theta(x)$ формула језика L_M која сведочи да је $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ Вотов пар, тј. таква да је $\theta(\mathcal{M})$ бесконачан и $\theta(\mathcal{M}) = \theta(\mathcal{N})$. Нека је $\{m_1, \dots, m_l\}$ скуп параметара из M који се јављају у θ. По Сколем-Ловенхајм теореми постоји пребројив модел $\mathcal{N}_0^* \preccurlyeq \mathcal{N}^*$ који садржи $\{m_1, \dots, m_l\}$. Нека је $\mathcal{N}_0$ сужење структуре $\mathcal{N}_0^*$ на језик L.

Пошто је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$, за свако $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ важи

$$\mathcal{N}^* \models \forall \overline{x}((\bigwedge_{i \in \{1,2,3,\dots,k\}} P(x_i) \wedge \varphi(\overline{x})) \Rightarrow \varphi^P(\overline{x})).$$

Из $\mathcal{N}_0^* \preccurlyeq \mathcal{N}^*$следи да за исте φ важи

$$\mathcal{N}_0^* \models \forall \overline{x}((\bigwedge_{i \in \{1,2,3,\dots,k\}} P(x_i) \wedge \varphi(\overline{x})) \Rightarrow \varphi^P(\overline{x})),$$

па ако са M_0 означимо скуп $\{a \in N_0 \,|\, \mathcal{N}_0 \models P(a)\}$ и на њему дефинисану подстурктуру структуре $\mathcal{N}_0$ са $\mathcal{M}_0$, онда важи $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_0$.

Пошто је $\theta(\mathcal{M})$ бесконачан, за сваки природан број k важи

$$\mathcal{N}^* \models \exists \overline{x}_1, \dots, \exists \overline{x}_k \left(\left(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \neg\, (\overline{x}_i \equiv \overline{x}_j) \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant k} \theta^P(\overline{x}_i) \right) \right)$$

а због $\mathcal{N}_0^* \preccurlyeq \mathcal{N}^*$, важиће и

$$\mathcal{N}_0^* \models \exists \overline{x}_1, \dots, \exists \overline{x}_k \left(\left(\bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant k} \neg\, (\overline{x}_i \equiv \overline{x}_j) \right) \wedge \left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant k} \theta^P(\overline{x}_i) \right) \right),$$

па је и $\theta(\mathcal{M}_0)$ бесконачан.

$\theta(\mathcal{M}) = \theta(\mathcal{N})$, па $\mathcal{N}^* \models \forall \overline{x} \left(\theta(x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow \left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant k} P(x_i)\right)\right)$ а због $\mathcal{N}_0^* \preccurlyeq \mathcal{N}^*$, важи и

$\mathcal{N}_0^* \models \forall \overline{x} \left(\theta(x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow \left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant k} P(x_i)\right)\right)$, па је $\theta(\mathcal{M}_0) = \theta(\mathcal{N}_0)$.

$N \setminus M$ је непразан па $\mathcal{N}^* \models \exists x \neg P(x)$. Опет због $\mathcal{N}_0^* \preccurlyeq \mathcal{N}^*$, важиће $\mathcal{N}_0^* \models \exists x \neg P(x)$, па

$N_0 \setminus M_0 \neq \emptyset$.

Дакле, $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$ је Вотов пар модела теорије T. □

Напомена 6.2.6 Доказ претходног тврђења сугерише да се посматрање Вотовог пара $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ заправо своди на посматрање сктруктуре $\mathcal{N}^*$, раширење структуре $\mathcal{N}$ у језик $L^* = L \cup \{P\}$. Писаћемо $(\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1) \preccurlyeq (\mathcal{N}_2, \mathcal{M}_2)$, уместо да пишемо да за структуре језика L^* важи $\mathcal{N}_1^* \preccurlyeq \mathcal{N}_2^*$, при чему је, наравно, $M_1 = \{a \in N_0 \,|\, \mathcal{N}_1^* \models P(a)\}$ и $M_2 = \{a \in N \,|\, \mathcal{N}_2^* \models P(a)\}$. □

Лема 6.2.7 Ако су $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_0 \models T$ пребројиви, ако $\overline{a} \in M_0^{<\omega}$ и ако је $p \in S_n^{\mathcal{M}_0}(\overline{a})$, онда постоје $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{N}'$ такви да важи $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \preccurlyeq (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ и p је реализован у $\mathcal{M}'$.

Доказ: Нека је $\overline{a} \in M_0^{<\omega}$ и нека је $p \in S_n^{\mathcal{M}_0}(\overline{a})$.
Уочимо $\Pi(\overline{x}) = \{\varphi^P(\overline{x}, \overline{a}) \,|\, \varphi(\overline{x}, \overline{a}) \in p\} \cup \mathrm{Th}_{N_0^*}(\mathcal{N}_0^*)$, скуп формула језика L^*. Нека је $\Delta(\overline{x})$ коначан подскуп скупа $\Pi(\overline{x})$ и нека је $\{\varphi_1^P(\overline{x}, \overline{a}), \ldots, \varphi_k^P(\overline{x}, \overline{a})\} = \Delta(\overline{x}) \setminus \mathrm{Th}_{N^*}(\mathcal{N}^*)$. Тада је $\{\varphi_1(\overline{x}, \overline{a}), \varphi_2(\overline{x}, \overline{a}), \ldots, \varphi_k(\overline{x}, \overline{a})\}$ коначан подскуп типа $p \in S_n^{\mathcal{M}_0}(\overline{a}) = S_n^{\mathcal{N}_0}(\overline{a})$, па важи $\mathcal{N}_0 \models \exists \overline{x}\, (\varphi_1(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \varphi_2(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\overline{x}, \overline{a}))$.

Пошто је $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_0$, биће $\mathcal{M}_0 \models \exists \overline{x}\, (\varphi_1(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \varphi_2(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_k(\overline{x}, \overline{a}))$, па $\mathcal{N}_0^* \models \exists \overline{x}\, (\varphi_1^P(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \varphi_2^P(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \cdots \wedge \varphi_k^P(\overline{x}, \overline{a}))$, што уз очигледно $\mathcal{N}_0^* \models \mathrm{Th}_{N_0^*}(\mathcal{N}_0^*)$ значи да је $\mathcal{N}_0^*$ модел скупа Δ.
Дакле, $\Pi(\overline{c})$ је коначно задовољив скуп формула језика $L^* \cup \overline{c}$, па је задовољив. Нека је $\mathcal{N}^{*\prime\prime} \models \Pi(\overline{c})$ и нека је $\mathcal{N}^{*\prime}$ сужење структуре $\mathcal{N}^{*\prime\prime}$ на језик L^*. Из $\mathrm{Th}_{N^*}(\mathcal{N}^*) \subseteq \Pi(\overline{c})$ следи да је $\mathcal{N}_0^* \preccurlyeq \mathcal{N}^{*\prime}$, па ако је $M' = \{a \in N^{*\prime} \,|\, \mathcal{N}^{*\prime} \models P(a)\}$ и ако је $\mathcal{N}'$ сужење структуре $\mathcal{N}^{*\prime}$ на језик L, онда је $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \preccurlyeq (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$. n-торка која је у $\mathcal{N}^{*\prime\prime}$ била интерпретација n-торке $\overline{c}$, очигледно реализује тип p и сваки њен елемент задовољава унарни предикат P. Другим речима $\mathcal{M}'$ реализује тип p. $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ је тражени пар. □

Лема 6.2.8 Ако су $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_0 \models T$ пребројиви, онда постоје $\mathcal{N}'$ и $\mathcal{M}'$, такви да $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \preccurlyeq (\mathcal{N}', \mathcal{M}')$ и за свако $\overline{a} \in M_0^{<\omega}$ и свако $p \in S_n^{\mathcal{M}_0}(\overline{a})$ важи:

Ако је p реализован у $\mathcal{N}_0$, онда је p реализован у $\mathcal{M}'$.

Доказ: $\mathcal{M}_0$ је пребројив па је $M_0^{<\omega}$ пребројив, $\mathcal{N}_0$ је пребројив, па се у њему може реализовати највише пребројиво много типова из $\bigcup_{\overline{a} \in M_0^{<\omega}} S^{\mathcal{M}_0}(\overline{a})$. Итерирањем претходног тврђења прави се пребројиви елементарни ланац пребројивих структура чија унија је тражени Вотов пар. □

Лема 6.2.9 Ако су $\mathcal{M}' \preccurlyeq \mathcal{N}' \models T$ пребројиви, ако $\bar{b} \in N'^{<\omega}$ и ако је $p \in S_n^{\mathcal{N}'}(\bar{b})$, онда постоје $\mathcal{M}''$ и $\mathcal{N}''$ такви да важи $(\mathcal{N}', \mathcal{M}') \preccurlyeq (\mathcal{N}'', \mathcal{M}'')$ и p је реализован у $\mathcal{N}''$.

Доказ: Следи директно из тврђења 2.2.1 и дефиниције (типа) која му следи (тврђењу 2.2.1). Ако је $p \in S_n^{\mathcal{N}'}(\bar{b})$, онда p остаје тип и кад се језик рашири до језика L^* и структура $\mathcal{N}'$ до структуре $\mathcal{N}'^*$ па постоји $\mathcal{N}''^*$, надструктура структуре $\mathcal{N}'^*$, која реализује тип p. Сужење структуре $\mathcal{N}''^*$ на језик L је $\mathcal{N}''$, а њена подструктура чији је скуп носач скуп $P(\mathcal{N}'^*)$ је $\mathcal{M}'$. $\square$

Лема 6.2.10 Нека су $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N}_0 \models T$ пребројиви. Постоје пребројиви, хомогени $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, који имају исти дијаграм типова и важи $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \preccurlyeq (\mathcal{N}, \mathcal{M})$, а тиме и $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Доказ: Правимо елементарни ланац $(\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0) \preccurlyeq (\mathcal{N}_1, \mathcal{M}_1) \preccurlyeq (\mathcal{N}_2, \mathcal{M}_2) \preccurlyeq \dots$

-корак $\mathbf{i + \frac{1}{3}}$: Нека је $(\mathcal{N}'_i, \mathcal{M}'_i)$ Вотов пар такав да је $(\mathcal{N}_i, \mathcal{M}_i) \preccurlyeq (\mathcal{N}'_i, \mathcal{M}'_i)$ и да свако $p \in S(T)$ које је реализовано у $\mathcal{N}_i$ буде реализовано и у $\mathcal{M}'_i$. Постојање таквог пара обезбеђује лема 6.2.8.

-корак $\mathbf{i + \frac{2}{3}}$: Овај корак је сличан поступку у доказу тврђења 3.2.6 и циљ му је, као и у тврђењу 3.2.6, да обезбеди хомогеност структуре.

Ако су $\bar{a}, \bar{b}, d_1 \in M_i'^{<\omega}$ и $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}'_i}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}'_i}(\bar{b})$, онда нека је $(\mathcal{N}''_i, \mathcal{M}''_i)$ Вотов пар (чије постојање се доказује као у твдрњењу 3.2.6) такав да важи $(\mathcal{N}'_i, \mathcal{M}'_i) \preccurlyeq (\mathcal{N}''_i, \mathcal{M}''_i)$ и да у M''_i постоји d_2 такво да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}''_i}(\bar{a}, d_1) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}''_i}(\bar{b}, d_2)$.

-корак $\mathbf{i + \frac{3}{3}}$: Овај корак је сличан претходном, само што је осмишљен да обезбеди хомогеност структуре $\mathcal{N}$.

Ако су $\bar{a}, \bar{b}, d_1 \in N_i''^{<\omega}$ и $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}''_i}(\bar{a}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}''_i}(\bar{b})$, онда нека је $(\mathcal{N}_{i+1}, \mathcal{M}_{i+1})$. Вотов пар (чије постојање се доказује као у твдрњењу 3.2.6) такав да важи $(\mathcal{N}''_i, \mathcal{M}''_i) \preccurlyeq (\mathcal{N}_{i+1}, \mathcal{M}_{i+1})$ и да у N_{i+1} постоји d_2 такво да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}_{i+1}}(\bar{a}, d_1) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}_{i+1}}(\bar{b}, d_2)$.$\diamond$

$$\text{Нека је } (\mathcal{N}, \mathcal{M}) = \bigcup_{i<\omega} (\mathcal{N}_i, \mathcal{M}_i).$$

Очигледно је да су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ пребројиви јер су такви и $\mathcal{M}_i$ и $\mathcal{N}_i$.

Кораци $i + \frac{1}{3}$ обезбеђују да $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ реализују исте типове.

Кораци $i + \frac{2}{3}$ обезбеђују да $\mathcal{M}$ буде хомогена структура.

Кораци $i + \frac{3}{3}$ обезбеђују да $\mathcal{N}$ буде хомогена структура.

Пошто су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ хомогене структуре које реализују исте типове, то су, по твђењу 3.1.17, међусобно изоморфне. $\square$

Следи Вотова теорема о два кардинала.

Теорема 6.2.11 (Вот) Ако T има (κ, λ) модел за $\kappa > \lambda \geqslant \aleph_0$ онда T има $(\aleph_1, \aleph_0)$ модел.

Доказ: По лемама 6.2.4 и 6.2.5, T има пребројив Вотов пар. По леми 6.2.10, T има пребројив Вотов пар $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$, такав да су $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ хомогени и да реализују исте типове из $S(T)$, а тиме су и изоморфни. Нека је $\varphi(\overline{x})$ формула која то утврђује, тј $\varphi(\mathcal{M})$ је бесконачан скуп и $\varphi(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{N})$. Правимо елементарни ланац $(\mathcal{N}_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$, такав да је $(\mathcal{N}_{\alpha+1}, \mathcal{N}_\alpha) \cong (\mathcal{N}_0, \mathcal{M}_0)$, а тиме и $\mathcal{N}_\alpha \cong \mathcal{N}$ за свако $\alpha < \omega_1$.

почетни корак: $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}$ и $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$;

гранични корак: За $0 < \alpha < \omega_1$ и $\alpha = \cup\alpha$, нека је $\mathcal{N}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{N}_\beta$. Пошто је пребројива унија структура изоморфних структури $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_\alpha$ је и сам хомоген, пребројив и реализује исте елементе скупа $S(T)$ као и $\mathcal{N}$, па је, по тврђењу 3.1.17, $\mathcal{N} \cong \mathcal{N}_\alpha$;

следбенички корак: Нека је $0 < \alpha \leqslant \omega_1$ и $\alpha = \beta + 1$ и нека је $\mathcal{N}_\beta$ већ конструисано. Пошто је $\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \cong \mathcal{N}_\beta$. Нека је $\mu : \mathcal{M} \cong \mathcal{N}_\beta$. Ако се μ посматра као пресликавање из дела скупа N у $\mathcal{N}_\beta$, онда се μ, по последици 2.1.8, може продужити до неког елементарног $\widetilde{\mu} : \mathcal{N} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{N}_\beta}$ за неко $\widetilde{\mathcal{N}_\beta} \succcurlyeq \mathcal{N}_\beta$. Означимо са $\mathcal{N}_{\beta+1}$ (сетимо се да је $\beta+1 = \alpha$) структуру $\widetilde{\mu}(\mathcal{N})$.

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{N} \\ \mathcal{M}_0 \cong \mathcal{N}_\beta \\ \mathcal{N} \cong \mathcal{N}_\alpha \end{array}\right\} \text{ па је } \mathcal{N}_\beta \preccurlyeq \mathcal{N}_\alpha \qquad \text{и} \qquad \left.\begin{array}{c} \mathcal{M}_0 \cong \mathcal{N} \\ \mathcal{M}_0 \cong \mathcal{N}_\beta \\ \mathcal{N} \cong \mathcal{N}_\alpha \end{array}\right\} \text{ па је } \mathcal{N}_\beta \cong \mathcal{N}_\alpha.$$

Нека је $\widetilde{\mathcal{N}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{N}_\alpha$. Очигледно је да је $|\widetilde{\mathcal{N}}| = \aleph_1$ и да је:

$$\text{Ако је } \widetilde{\mathcal{N}} \models \varphi(\overline{a}), \text{ онда је } \overline{a} \in M_0^{<\omega},$$

па је $(\widetilde{\mathcal{N}}, \mathcal{M}_0)$ $(\aleph_1, \aleph_0)$ модел. □

6.3 Морлијева теорема

Тврђење 6.3.1 $\aleph_1$-категорична теорија нема Вотов пар.

Доказ: Нека је T $\aleph_1$-категорична теорија. За свако $\kappa \geqslant \aleph_1$ T има модел моћи κ коме је сваки бесконачан дефинабилан скуп непребројиве моћи. Дакле, T има модел моћи $\aleph_1$ коме је сваки бесконачан дефинабилан скуп моћи $\aleph_1$.

Ако би T имала Вотов пар, онда би по Вотовој теореми имала $(\aleph_1, \aleph_0)$ модел, који је, дакле, модел непребројиве моћи који има пребројив дефинабилан подскуп. Та два модела нису изоморфна, па T не може бити $\aleph_1$-категорична. □

Да слично важи за све непребројиво категоричне теорије а не само за $\aleph_1$ категоричне, може се показати тек када се развије техника градње Еренфојхт-Мостовски структура. Прво ћемо у леми 6.3.4 показати да то важи за ω-стабилне теорије, а онда у тврђењу 6.3.8 да је свака непребројиво категорична уједно и ω-стабилна.

Лема 6.3.2 Ако је T ω-стабилна теорија и $\mathcal{M}$ њен модел непребројиве моћи, онда постоји L_M формула $\varphi(x)$ таква да је $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и за сваку L_M формулу $\psi(x)$ је или $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0$ или $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0$.

Доказ: Претпоставимо супротно: Не постоји таква формула, тј. за све L_M формуле са особином $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$, постоји L_M формула $\psi(x)$ таква да је и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$.
Слично као у доказима тврђења 3.1.11 и 6.1.3 конструишимо бинарно дрво формула $\{\varphi_\sigma(x)\,|\,\sigma \in 2^{<\omega}\}$, таквих да за свако $\sigma \in 2^{<\omega}$ важи:

- $|\,\varphi_\sigma(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и
- $\varphi_{\sigma,0}(\mathcal{M}) \cap \varphi_{\sigma,1}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

Нека је $\varphi_\emptyset(x) = x \equiv x$. $\varphi_\emptyset(\mathcal{M}) = M$, па је $|\,\varphi_\emptyset(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$.

корак 1: Нека је $\psi(x)$ L_M формула таква да је и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$. Таква формула постоји по претпоставци. Нека је $\varphi_1(x) = \varphi_\emptyset(x) \wedge \psi(x)$ и $\varphi_0(x) = \varphi_\emptyset(\overline{x}) \wedge \neg\,\psi(x)$.

Ако смо за све $\sigma \in 2^i$ конструисали $\varphi_\sigma(x)$, онда прелазимо на

корак $\mathbf{i+1}$: По претпоставци, за све $\sigma \in 2^i$ постоји формула $\psi_\sigma(x)$ таква да је $|\,\varphi_\sigma(\mathcal{M}) \cap \psi_\sigma(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и $|\,\varphi_\sigma(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi_\sigma(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$. Нека је $\varphi_{\sigma,1}(x) = \varphi_\sigma(x) \wedge \psi_\sigma(x)$ и $\varphi_{\sigma,0}(x) = \varphi_\sigma(x) \wedge \neg\,\psi_\sigma(x)$.

По конструкцији, за сваке $\sigma, \tau \in 2^{<\omega}$ важи следеће:

Особина 1 $|\,\varphi_\sigma(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$;

Особина 2 Ако је $\sigma \subset \tau$ онда $\varphi_\tau \models \varphi_\sigma$, а тиме је $\varphi_\tau(\mathcal{M}) \subseteq \varphi_\sigma(\mathcal{M})$;

Особина 3 $\varphi_{\sigma,k}(x) \models \neg\,\varphi_{\sigma,1-k}(x)$, па је $\varphi_{\sigma,0}(\mathcal{M}) \cap \varphi_{\sigma,1}(\mathcal{M}) = \emptyset$.

Нека је A скуп параметара из M који се јављају и $\{\varphi_\sigma(x)\,|\,\sigma \in 2^\omega\}$. Очигледно је да је $|A| \leqslant \aleph_0$.

Нека су f и g из 2^ω и $f \neq g$. Тада важи

$$\star \qquad \varphi_{f_{|1}}(\mathcal{M}) \subseteq \varphi_{f_{|2}}(\mathcal{M}) \subseteq \cdots \subseteq \varphi_{f_{|i}}(\mathcal{M}) \subseteq \varphi_{f_{|i+1}}(\mathcal{M}) \subseteq \ldots.$$

Дакле, пресек $\bigcap_{i\in\omega} \varphi_{f_{|i+1}}(\mathcal{M})$ је пребројив пресек низа уметнутих непребројивих скупова, па је непразан. Било који његов (пресека) елемент је елемент структуре $\mathcal{M}$ који реализује све формуле гране $\{\,\varphi_{f_{|i+1}}(x)\,|\,i \in \omega\}$, па грана чини један (могуће непотпун) 1-тип. Нека је $d \in \bigcap_{i\in\omega} \varphi_{f_{|i+1}}(\mathcal{M})$. Означимо са p_f тип $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(d/A)$. Важи $\{\, \varphi_{f_{|i+1}}(x) \,|\, i \in \omega\} \subseteq p_f$.

Пошто је $f \neq g$, онда постоји $i \in \omega$ такво да је $f_{|i+1} = g_{|i+1}$ и $f(i+1) \neq g(i+1)$. Тада је[3] $\varphi_{f(i+1)}(\mathcal{M}) \cap \varphi_{f(i+1)}(\mathcal{M}) = \emptyset$ па је $p_f \neq p_g$.

Дакле, свакој грани дрвета $\{\varphi_\sigma(x) \,|\, \sigma \in 2^\omega\}$ може да се додели тип из $S_1^{\mathcal{M}}(A)$, па закључујемо да је $|S_1^{\mathcal{M}}(A)| \geqslant 2^{\aleph_0}$. То значи да T није ω-стабилна теорија, што је у контрадикцији са условима теореме па је претпоставка да за све L_M формуле са особином $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$, постоји L_M формула $\psi(x)$ таква да је и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ неодржива. $\square$

Лема 6.3.3 Нека је $\mathcal{M}$ непребројив модел ω-стабилне теорије T. Постоји право елементарно раширење $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$, такво да за сваки пребројиви тип $p\,(\overline{x})$ над M важи: ако је $p\,(\overline{x})$ реализован у $\mathcal{N}$, онда је реализован у $\mathcal{M}$.

Доказ: Нека је $\varphi(x)$ L_M формула чије постојање обезбеђује лема6.3.2. Тачније нека је $\varphi(x)$ L_M формула таква да је $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$ и за сваку L_M формулу $\psi(x)$ је или $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0$ или $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0$.
Нека је $q(x) = \{\, \psi(x) \,|\, \psi(x)$ је L_M формула таква да је $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1\}$.

Нека су $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x)$ произвољни елементи скупа $q(x)$. Онда је свако $i \in \{1, 2, \ldots k\}$ важи $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi_i(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0$.
Тада је $|\,(\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi_1(\mathcal{M})) \cup (\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi_2(\mathcal{M})) \cup \cdots \cup (\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,\psi_k(\mathcal{M}))\,| \leqslant k \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, па је $|\,\varphi(\mathcal{M}) \wedge \neg\,(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k)(\mathcal{M})^4\,| \leqslant \aleph_0$, а тиме је и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \wedge (\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k)(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$, па постоји елемент a (заправо их има непребројиво много) скупа M који задовољава $\psi_1(x) \wedge \psi_2(x) \wedge \cdots \wedge \psi_k(x)$, тј. такав да важи $\mathcal{M} \models \varphi(a) \wedge \psi_1(a) \wedge \psi_2(a) \wedge \cdots \wedge \psi_k(a)$, а тиме и $\mathcal{M} \models \psi_1(a) \wedge \psi_2(a) \wedge \cdots \wedge \psi_k(a)$.

Дакле, $T \cup \{\exists x(\psi_1(x) \wedge \psi_2(x) \wedge \cdots \wedge \psi_k(x))\}$ задовољив а тиме је $q(x)$ коначно задовољив скуп формула па је тип.

Ако $\psi(x) \notin q(x)$ онда није $|\,\varphi(\mathcal{M}) \wedge \psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$, па мора бити $|\,\varphi(\mathcal{M}) \wedge \neg\,\psi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1$, а тиме и $\neg\,\psi(x) \in q(x)$, па је $q(x)$ потпун тип.

Нека је $\mathcal{M}' \succcurlyeq \mathcal{M}$ структура у којој је реализован $q(x)$ (тврђење 2.2.1 и дефиниција типа) и $d \in M'$ елемент који реализује $q(x)$ и нека је $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}'$ прост модел над $M \cup \{d\}$ чији елементи реализују изоловане типове над $M \cup \{d\}$ (а чије постојање обезбеђује теорема 6.1.8).

Нека је $p\,(\overline{y})$ пребројиви тип над M реализован у $\mathcal{N}$ и нека га реализује $\overline{b}$. Нека је $\theta(\overline{y}, x)$ L_M-формула таква да $\theta(\overline{y}, d)$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b}/M \cup \{d\})$, што уз $p\,(\overline{y}) \subseteq \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b}/M \cup \{d\})$ даје $\mathcal{N}_{M\cup\{d\}} \models \forall \overline{y}\,(\theta(\overline{y}, d) \longrightarrow \phi(\overline{y}))$ за све $\phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y})$. Ако са $\theta_\phi(x)$ означимо формулу $\forall \overline{y}\,(\theta(\overline{y}, x) \longrightarrow \phi(\overline{y}))$, онда за све $\phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y})$ важи $\mathcal{N}_M \models \theta_\phi(d)$. Из $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$ следи да важи $\mathcal{M}_M \models \theta_\phi(d)$, па $\theta_\phi(x) \in q(x)$.

Дакле, за све $\phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y})$ је $\forall \overline{y}\,(\theta(\overline{y}, x) \longrightarrow \phi(\overline{y})) \in q(x)$.
$\exists \overline{y}\,\theta(\overline{y}, x)$ је L_M-формула за коју важи $\mathcal{M}_M \models \exists \overline{y}\,\theta(\overline{y}, d)$, па је $\exists \overline{y}\,\theta(\overline{y}, x) \in q(x)^5$.

---

[3] Особина 3

[4] $(\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \cdots \wedge \psi_k)(x)$ је запис за $\psi_1(x) \wedge \psi_2(x) \wedge \cdots \wedge \psi_k(x)$.

[5] $\theta(\overline{y}, d)$ изолује $\mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{b}/M \cup \{d\})$, па $\mathcal{N}_M \models \exists \overline{y}\,\theta(\overline{y}, d)$, а тиме $\mathcal{M}_M \models \exists \overline{y}\,\theta(\overline{y}, d)$, због чега $\exists \overline{y}\,\theta(\overline{y}, x) \in q(x)$.

Нека је $\Delta = \{\exists \overline{y}\, \theta(\overline{y}, x)\} \cup \{\forall \overline{y}\, (\theta(\overline{y}, x) \longrightarrow \phi(\overline{y})) \,|\, \phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y})\}$. Δ је пребројив подскуп типа $q(x)$. Дакле, Δ се може набројати. Нека је $\Delta = \{\delta_i(x) \,|\, i \in \omega\}$. $\{\delta_i(x) \,|\, i \in \omega\} \subseteq q(x)$, па за свако k важи $\delta_0(x) \wedge \delta_1(x) \wedge \cdots \wedge \delta_k(x) \in q(x)$ (јер је q потпун тип), а тиме и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap (\delta_0 \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(\mathcal{M})^6\,| \geqslant \aleph_1$ и $|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0$ и

$$\Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(\mathcal{M})\Big) \bigcup \Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap \neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M})\Big) = \varphi(\mathcal{M}).$$

За свако k је

$$\Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(\mathcal{M})\Big) = \varphi(\mathcal{M}) \setminus \Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M})\Big), \text{ тј.}$$

$$\bigcap_{k\in\omega} \Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(\mathcal{M})\Big) = \varphi(\mathcal{M}) \setminus \bigcup_{k\in\omega} \Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M})\Big).$$

За $k < j < \omega$ важи $\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M}) \subseteq \varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_j))(\mathcal{M})$ и

$$|\,\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M})\,| \leqslant |\,\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_j))(\mathcal{M})\,| \leqslant \aleph_0, \text{ па}$$

$$\left|\bigcup_{k\in\omega} \Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\neg\,(\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k))(\mathcal{M})\Big)\right| \leqslant \aleph_0, \text{ што уз } |\,\varphi(\mathcal{M})\,| \geqslant \aleph_1 \text{ даје}$$

$$\left|\bigcap_{k\in\omega} \Big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\delta_0 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(\mathcal{M})\Big)\right| \geqslant \aleph_1.$$

Треба још приметити да је скуп $\bigcap_{k\in\omega} \big(\varphi(\mathcal{M}) \cap (\delta_0 \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(\mathcal{M})\big)$, заправо скуп $\{a \in M \,|\, a$ задовољава $\varphi(x)$ и све формуле скупа $\Delta\,\}$.

Дакле, постоји непребројиво много елемената скупа $\{a \in M \,|\, a$ задовољава $\varphi(x)$ и све формуле скупа $\Delta\,\}$. Нека је d' један такав. Важи:

$$(\star) \qquad \mathcal{M}_M \models \{\exists \overline{y}\, \theta(\overline{y}, d')\} \cup \{\forall \overline{y}\, (\theta(\overline{y}, d') \Longrightarrow \phi(\overline{y})) \,|\, \phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y})\}$$

Из $\mathcal{M}_M \models \exists \overline{y}\, \theta(\overline{y}, d')$ следи да постоји $\overline{b}' \in M^n$ таква да је $\mathcal{M}_M \models \theta(\overline{b}', d')$. Дакле,

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \mathcal{M}_M \models \theta(\overline{b}', d'); \\ 2.\ \mathcal{M}_M \models \forall \overline{y}\, (\theta(\overline{y}, d') \Longrightarrow \phi(\overline{y})) \text{ за све } \phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y}), \end{array}\right\} \text{ одакле следи:}$$

За све $\phi(\overline{y}) \in p\,(\overline{y})$ важи $\mathcal{M}_M \models \phi(\overline{b}')$, тј. $\overline{b}' \in M^n$ реализује тип p. □

Лема 6.3.4 Нека је $\kappa > \aleph_1$. Ако је T ω-стабилна теорија која има $(\aleph_1, \aleph_0)$ модел, онда T има и $(\kappa, \aleph_0)$ модел.

Доказ: Нека је $\mathcal{M}$ модел теорије T моћи $\aleph_1$ такав да је $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| = \aleph_0$ и нека је $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ модел теорије T чију егзистенцију обезбеђује лема 6.3.3.

[6] $(\delta_0 \wedge \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_k)(x)$ је запис за $\delta_0(x) \wedge \delta_1(x) \wedge \cdots \wedge \delta_k(x)$.

Нека је $p(x) = \{\varphi(x)\} \cup \{\neg (x \equiv m) \,|\, m \in M$ и $\mathcal{M} \models \varphi(m)\}$. Пошто је $|\,\varphi(\mathcal{M})\,| = \aleph_0$, тип p је пребројив, па како га $\mathcal{M}$ испушта, мора и $\mathcal{N}$ да га испушта, па је $|\,\varphi(\mathcal{N})\,| = |\,\varphi(\mathcal{M})\,|$. $\mathcal{N}$ се може изабрати тако да је $|N| \leqslant \kappa$

Итерирајући претходни поступак, може се направити елементарни ланац структура $\{\mathcal{M}_\alpha \,|\, \alpha < \kappa\}$ такав да $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}_{\alpha+1} \succcurlyeq \mathcal{M}_\alpha$, $M_{\alpha+1} \neq M_\alpha$ и $|\,\varphi(\mathcal{M}_{\alpha+1})\,| = |\,\varphi(\mathcal{M}_\alpha)\,|$, за свако $\alpha < \kappa$.

Означимо са $\widetilde{\mathcal{N}}$ унију ланца. Очигледно је да је $|\,\varphi(\widetilde{\mathcal{N}})\,| = |\,\varphi(\mathcal{M})\,|$, па T има $(\kappa, \aleph_0)$ модел. $\square$

Лема 6.3.5 Нека L^*-теорија T^* има уграђене Сколемове функције и нека пребројив $\mathcal{M} \models T^*$ садржи $(I, <)$ као бесконачан скуп уређених нераспознатљивих. Тада постоји произвољно велики $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ који реализује само оне типове који су већ реализовани у $\mathcal{M}$.

Доказ: Фиксирајмо кардинал κ. Због компактности постоји $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$ који садржи нераспознатљиве $J \supset I$ моћи κ. Нека је $\mathcal{M}'$ Сколемова љуска скупа J. Тада је сваки $a \in M'$ облика $f(j_1, ... j_k)$ за неку Сколемову функцију f. Како је I бесконачнан то постоје $i_1, ..., i_k \in I$ који имају исти уређајни тип као $j_1, ..., j_k$ па, како је $J \supset I$ скуп нераспознатљивих, важи $\mathrm{tp}(i_1, ... i_k) = \mathrm{tp}(j_1, ..., j_k)$. Следи да је и $\mathrm{tp}(f(i_1, ..., i_k)) = \mathrm{tp}(f(j_1, ..., j_k))$ па је $\mathrm{tp}(a)$ реализован у M. Слично, тип сваке n-торке из M' је реализован у $\mathcal{M}$. $\square$

Лема 6.3.6 Нека је L пребројив језик и T његова теорија која има бесконачан модел. За сваки бесконачан кардинал κ теорија T има модел $\mathcal{M}$ моћи κ такав да за свако $A \subseteq M$, $\mathcal{M}$ реализује највише $|A| + \aleph_0$ типова над A.

Доказ: Сличан доказу претодне леме. $\square$

Сад можемо да проширимо тврђење 6.3.1.

Тврђење 6.3.7 Нека је L пребројив језик, T његова потпуна теорија која има бесконачне моделе и κ непребројив кардинал. Ако је T κ-категорична теорија, онда је и ω-стабилна.

Доказ: Ако T није ω-стабилна, онда за неки њен пребројив модел $\mathcal{M} \models T$ и његов скуп $A \subseteq M$ важи $|\,S^{\mathcal{M}}(A)\,| > \aleph_0$. Као последица компактности, постоји модел $\mathcal{N}_1 \succcurlyeq \mathcal{M}$ кардиналности κ који реализује непребројиво много типова из скупа $S^{\mathcal{M}}(A)$. По леми 6.3.6, постоји структура $\mathcal{N}_2 \models T$ моћи κ таква да је за сваки пребројив $B \subseteq N_2$ највише пребројиво много типова из $S^{\mathcal{N}_2}(B)$ реализовано у $\mathcal{N}_2$. Дакле, $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ су неизоморфни модели па теорија T није κ-категорична. $\square$

Тврђење 6.3.8 Нека је L пребројив језик, T његова потпуна и κ-категорична теорија за неки непребројив кардинал κ. T не допушта Вотове парове[7] а тиме ни (κ, λ) моделе за све λ такве да је $\kappa > \lambda \geqslant \aleph_0$.

[7] тј. нема Вотове парове.

Доказ: На основу тврђења 6.3.7, T је ω-стабилна. Ако би T имала Вотов пар, онда би по Вотовој теореми имала $(\aleph_1, \aleph_0)$ модел, а онда би по леми 6.3.4 теорија T имала (κ, λ) модел. Пошто можемо наћи модел теорије T моћи κ у коме је сваки бесконачан дефинабилан скуп исте моћи (κ), онда T не може бити κ-категорична. □

Лема 6.3.9 Сваки бесконачан скуп уређених нераспознатљивих у моделу ω-стабилне теорије је нераспознатљив скуп.

Доказ: Претпоставимо супротно. Тада постоји бесконачнно линеарно уређење $(I, <)$ и скуп уређених нераспознатљивих $A = \{a_1 \,|\, i \in I\}$ у неком моделу $\mathcal{M}$ које не чине скуп нераспозатљивих. Због компактности, можемо претпоставити и да је $(I, <)$ заправо $(Q, <)$. Како A није скуп нераспознатљивих постоје: формула $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$, рационални бројеви $i_1 < i_2 < ... < i_n$ и њихова пермутација π тако да

$$\mathcal{M} \models \neg(\varphi(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(a_{\pi(i_1)}, a_{\pi(i_2)}, ..., a_{\pi(i_n)})).$$

Како од низа $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_n})$ до $(a_{\pi(i_1)}, a_{\pi(i_2)}, ..., a_{\pi(i_n)})$ можемо доћи у коначно много корака заменивши у сваком кораку места нека два узастопна елемента (т.ј. група пермутација скупа $\{1, 2, ..., n\}$ је генерисана скупом транзпозиција $\{(i, i+1) \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$), закључујемо да смо сведоке негирања распознатљивости скупа A могли изабрати тако да

$$\mathcal{M} \models \neg(\varphi(a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, ..., a_{i_n}) \leftrightarrow \varphi(a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, a_{i_{k+1}}, a_{i_k}, a_{i_{k+2}} ..., a_{i_n})).$$

Означимо $\varphi(a_{i_1}, ..., a_{i_{k-1}}, x, y, , a_{i_{k+2}}, ..., a_{i_n})$ са $\psi(x, y)$. Како је A скуп уређених нераспознатливих, за све $i_k \leqslant j_1 < j_2 \leqslant i_{k+1}$ важи

$$\mathcal{M} \models \neg(\psi(a_{j_1}, a_{j_2}) \leftrightarrow \psi(a_{j_2}, a_{j_1}));$$

и, без умањења општости, $\mathcal{M} \models \psi(a_{j_1}, a_{j_2}) \wedge \neg\psi(a_{j_2}, a_{j_1}))$. Закључујемо да $\psi(x, y)$ на скупу $A' = \{a_t \,|\, i_k \leqslant t \leqslant i_{k+1}\}$ дефинише уређење интервала рационалних бројева. Сада није тешко конструисати континуум типова: за сваки реалан број $r \in [j_1, j_2]$ дефинишимо тип

$$p_r(x) = \{\psi(x, a_t) \,|\, t \in Q \cap [j_1, j_2] \text{ i } t < r\} \cup \{\neg\psi(x, a_t) \,|\, t \in Q \cap [j_1, j_2] \text{ i } r < t\}.$$

p_r-ови су међусобно контрадикторни па T није ω-стабилна теорија. Контрадикција! □

У ω-стабилним теоријама можемо наћи јако минималне формуле. То ће се показати корисним за увођење појма димензије.

Лема 6.3.10 Ако је T ω-стабилна и $\mathcal{M} \models T$, онда:

1) Постоји минимална формула у $\mathcal{M}$;

2) Ако је $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-засићена структура и $\varphi(x, \overline{a})$ минимална у $\mathcal{M}$, онда је јако минимална.

Доказ: 1) Контрапозицијом и индукцијом: Претпоставимо да ниједна формула није минимална у $\mathcal{M}$. Направићемо дрво формула $\{\varphi_\sigma \mid \sigma \in 2^{<\omega}\}$ такво да:

1. Ако је $\sigma \subseteq \tau$, онда $\varphi_\tau \models \varphi_\sigma$;
2. $\varphi_{\tau,i} \models \neg\, \varphi_{\tau,1-i}$ и
3. $\varphi(\mathcal{M})$ је бесконачан.

Конструкција индукцијом:

почетни корак: $\varphi_\emptyset = x \equiv x$. $\varphi_\emptyset(\mathcal{M})$ је бесконачан скуп.

следбенички корак: Ако је конструисана φ_σ, онда, по индуктивној хипотези, није минимална па постоји формула ψ таква да и $\varphi_\sigma \wedge \psi$ и $\varphi_\sigma \wedge \neg\psi$ имају бесконачан скуп решења у $\mathcal{M}$, па их можемо означити редом са $\varphi_{\sigma,1}$ и $\varphi_{\sigma,0}$. Очигледно су испуњени сви тражени услови.

Сада се, слично као у доказу тврђења 3.1.11 или 6.1.4, може свакој грани дрвета 2^ω доделити један потпун тип и то тако да то додељивање буде инјективно па теорија није ω-стабилна. Контрадикција.

2) Претпоставимо супротно: за неко $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ и неко $\overline{b} \in N$ нека је $\psi(\mathcal{N}, \overline{b})$ бесконачан, кобесконачан подскуп скупа $\varphi(\mathcal{N}, \overline{a})$. Како је $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-засићен, постоји $\overline{d}$ такав да је $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{d}) = \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(\overline{a}, \overline{b})$. Онда је $\psi(\mathcal{M}, \overline{d})$ бесконачан, кобесконачан подскуп скупа $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$. □

Тврђење 6.3.11 Нека је L највише пребројив језик и T његова потпуна теорија која има бесконачне моделе и нема Вотове парове и нека је $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ формула језика L. Постоји природан број $n = n_\varphi$ такав да је за сваку структуру $\mathcal{M} \models T$ и свако $\overline{a} \in M^{<\omega}$ скуп $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a})$ или бесконачан или има мање од n елемената.

Доказ: Контрапозицијом. Претпоставимо да за $\varphi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$ постоји низ $\overline{a}_1, \overline{a}_2$... такав да је за свако n скуп $\varphi(M, \overline{a}_n)$ коначан скуп који има бар n елемената. Нека су P и $L^* = L \cup \{P\}$ као у напомени 6.2.6 и доказу леме 6.2.5 и нека је $\Gamma(\overline{y})$ тип у језику L^* такав да:

- $T \subseteq \Gamma(\overline{y})$;
- P дефинише праву L-елементарну подструктуру;
- $\bigwedge_{i=1}^{m} P(y_i)$
- постоји бесконачно много елемената $\overline{x}$ таквих да је $\models \varphi(\overline{x}, \overline{y})$;
- $\models \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \Longrightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} P(x_i)$.

За било које $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$ ће за све $\overline{a}_n$, због коначности, бити $\varphi(\mathcal{M}, \overline{a}_n) = \varphi(\mathcal{N}, \overline{a}_n)$. Ако је $\Delta \subseteq \Gamma(\overline{y})$ коначан, онда се може изабрати довољно велики n тако да $\overline{a}_n$ реализује Δ у $(\mathcal{N}, \mathcal{M})$. Дакле, $\Gamma(\overline{y})$ је коначно задовољив, па је, по компактности, задовољив.

Нека $\overline{a}$ реализација типа $\Gamma(\overline{y})$ у $(\mathcal{N}', \mathcal{M}')$. Ако се вратимо у језик L, тада је $\varphi(\mathcal{M}', \overline{a})$ бесконачан скуп за који важи $\varphi(\mathcal{M}', \overline{a}) = \varphi(\mathcal{N}', \overline{a})$, при чему је $\mathcal{N}'$ елементарна права надструктура структуре $\mathcal{M}'$ у језику L. Дакле, T има Вотов пар. $\square$

Напомена 6.3.12 Претходно тврђење има занимљиву синтаксну последицу: За $\varphi(x, \overline{y})$ постоји n_φ такав да за сваки $\mathcal{M}$ и сваки $\overline{a} \in M^k$ важи

$$|\varphi(M, \overline{a})| \text{ је бесконачан} \quad \text{ако и само ако} \quad |\varphi(M, \overline{a})| \geqslant n_\varphi$$

Како $|\varphi(M, \overline{y}| \geqslant n_\varphi$ можемо изразити формулом $\psi(\overline{y})$ то $\psi(\overline{y})$ значи да „постоји бесконачно много x таквих да важи $\varphi(x, \overline{y})$". Другим речима квантификатор $\exists^\infty x$ је дефинабилан у теоријама без Вотових парова па

$$\psi(\overline{y}) \quad \text{означавамо и са} \qquad (\exists^\infty x)\, \varphi(x, \overline{y}). \qquad \square$$

Последица 6.3.13 Нека је L највише пребројив језик и T његова потпуна теорија која има бесконачне моделе и која нема Вотове парове. Тада:

(1) Свака минимална формула је јако минимална;

(2) Из $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(\overline{b})$ следи: $\varphi(x, \overline{a})$ је минимална акко је $\varphi(x, \overline{b})$ минимална.

Доказ: (1) Нека је $\varphi(x, \overline{a})$ минимална формула у $\mathcal{M} \models T$. Свођења на контрадикцију ради, претпоставимо да није јако минимална. Нека су $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}$, $\overline{b} \in N$ и $\psi(x, \overline{y})$ формула таква да је

$$|\varphi(\mathcal{N}, \overline{a}) \cap \psi(\mathcal{N}, \overline{b})| \geqslant \aleph_0 \quad \text{и} \quad |\varphi(\mathcal{N}, \overline{a}) \cap \neg\psi(\mathcal{N}, \overline{b})| \geqslant \aleph_0\ .$$

Како T нема Вотове парове искористимо претходну напомену

$$\mathcal{N} \models (\exists \overline{y})\, ((\exists^\infty x)(\varphi(x, \overline{a}) \wedge \psi(x, \overline{y})) \wedge (\exists^\infty x)(\varphi(x, \overline{a}) \wedge \neg\psi(x, \overline{y})))\ .$$

Пошто је $\mathcal{M} \preccurlyeq \mathcal{N}$, мора постојати $\overline{b}' \in M$ који сведочи егзистенцијални квантификатор у претходној формули. Тада

$$|\varphi(\mathcal{M}, \overline{a}) \cap \psi(\mathcal{M}, \overline{b}')| \geqslant \aleph_0 \quad \text{и} \quad |\varphi(\mathcal{M}, \overline{a}) \cap \neg\psi(\mathcal{M}, \overline{b}')| \geqslant \aleph_0,$$

па $\varphi(x, \overline{a})$ није минимална у $\mathcal{M}$. Контрадикција!

(2) Доказ првог дела тврђења утврђује да минималност формуле $\varphi(x, \overline{a})$ зависи искључиво од $\mathrm{tp}(a)$. $\square$

Последица 6.3.14 Нека је L највише пребројив језик и T његова потпуна теорија која има бесконачне моделе. Ако је T ω-стабилна и нема Вотових парова, онда за свако $\mathcal{M} \models T$ постоји јако минимална формула над $\mathcal{M}$. Посебно, постоји јако минимална формула над простим $\mathcal{M}_0 \models T$. $\square$

Лема 6.3.15 Ако T нема Вотових парова, $\mathcal{M} \models T$ и $A \subseteq M^n$ је бесконачан дефинабилан скуп, онда је $\mathcal{M}$ минималан над A. Ако је T уз то и ω-стабилна и $n = 1$, онда је $\mathcal{M}$ прост и атомски над A.

Доказ: Нека је $\varphi(\overline{x})$ формула која дефинише A. Ако је $\mathcal{N} \preccurlyeq \mathcal{M}$ и ако N садржи A, онда је $A = \varphi(\mathcal{N})$, што уз $A = \varphi(\mathcal{M})$ даје $\varphi(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{N})$, па $\mathcal{N}$ није права подструктура јер T нема Вотове парове.

Ако је уз претходно T још и ω-стабилна теорија и $A \subseteq M$ дефиналилан бесконачан скуп, онда, на основу теореме 6.1.8 постоји конструктибилан над A модел $\mathcal{M}_0 \preccurlyeq \mathcal{M}$; $\mathcal{M}_0$ је прост и атомски над A. По малопређашњем, не сме бити $\mathcal{M}_0 \neq \mathcal{M}$, па је заправо $\mathcal{M}$ прост и атомски над A, што је требало показати. $\square$

Тврђење 6.3.16 Нека је T потпуна теорија највише пребројивог језика, нека има бесконачне моделе и нека је κ непребројив кардинал. T је κ-категорична ако и само ако је ω-стабилна теорија која нема Вотове парове.

Доказ: „ $\Rightarrow$ ” : Следи из тврђења 6.3.7 и 6.3.8.

„ $\Leftarrow$ ” : На основу теореме 6.1.8, свака ω-стабилна теорија има прост модел. Нека је $\mathcal{M}_0 \models T$ прост. Постоји јако минимална формула $\varphi(x)$ са параметрима из M_0 (последица 6.3.14).

Нека су $\mathcal{M} \succcurlyeq \mathcal{M}_0$ и $\mathcal{N} \succcurlyeq \mathcal{M}_0$ моћи κ. Због непребројивости κ важи $\dim(\varphi(M)) = \dim(\varphi(N)) = \kappa$ (постоји $< \kappa$ формула са параметрима из скупа моћи $< \kappa$ па је и алгебарско затворење скупа моћи $< \kappa$ моћи мање од κ). Како базе исте моћи имају исти тип (над параметрима $\overline{b}$ формуле $\varphi(x)$), закључујемо да постоји парцијална елементарна бијекција која фиксира $\overline{b}$ и једну базу пресликава у другу. Можемо је продужити до парцијалне елементарне бијекције $\mu : \varphi(M) \cup \{\overline{b}\} \longrightarrow \varphi(N) \cup \{\overline{b}\}$. Како је $\mathcal{M}$ прост над $\varphi(M) \cup \{\overline{b}\}$, то се μ може продужити до утапања $\mu^\star : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ нема правих елементарних подструктура које садрже $\varphi(\mathcal{N})$ (лема 6.3.15) па мора бити једнак слици пресликавања $\mu^\star$, тј $\mu^\star$ је изоморфизам. Овим смо доказали да су свака два модела моћи κ изоморфна. T је κ-категорична. $\square$

Како услови T је ω-стабилна и T нема Вотове парове не помињу кардиналне бројеве, из претходног тврђења следи Морлијева теорема.

Морлијева теорема: Нека је L највише пребројив језик и T његова потпуна теорија која има бесконачне моделе. Ако је T категорична у неком непребројивом кардиналу, онда је категорична у сваком непребројивом кардиналу. $\square$

Сам доказ тврђења 6.3.16 даје прецизнији опис модела непребројиво категоричне теорије. На основу последице 6.3.14 и леме 6.3.15 следи да у непребројиво категоричним теоријама увек можемо наћи јако минималну формулу и да је сваки модел прост и моделски минималан над скупом њених решења. Према доказу следи да уместо скупа решења можемо узети само параметре формуле и неку базу.

Теорема 6.3.17 : Нека је T непребројиво категорична, $\mathcal{M} \models T$, и нека је $\varphi(x, \overline{a})$ јако минимална формула, при чему је $\overline{a} \in M$.

1. Ако је I acl-база скупа $\varphi(M)$ тада је $\mathcal{M}$ прост и моделски минималан над $I \cup \{\overline{a}\}$.
2. Ако $\mathcal{N} \models T$ тада: $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ акко постоји $\overline{b} \in N$ такав да је $\dim(\varphi(M)) = \dim(\varphi(N))$.
3. T има $\leqslant \aleph_0$ неизоморфних пребројивих модела[8]. □

Напоменимо да је трећи део претходне теореме доказао Морли у [10], који је претпоставио да број пребројивих модела мора бити или 1 или $\aleph_0$ (што су тек Болдвин и Лахлан доказали). У случају када јако минимална формула нема параметара, имамо прецизнији опис модела и потврду ове хипотезе.

Теорема 6.3.18 : Нека је T непребројиво категорична и нека има јако минималну формулу без параметара $\varphi(x)$. Ако су $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ њени модели тада

1. Ако $\mathcal{M} \models T$ и I је acl-база скупа $\varphi(M)$ тада је M прост и моделски минималан над I.
2. Ако $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ тада: $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$ акко $\dim(\varphi(M)) = \dim(\varphi(N))$.
3. T има или 1 или $\aleph_0$ неизоморфних пребројивих модела. □

[8] Шелах је у [14] доказао да свака ω-стабилна теорија има или $\leqslant \aleph_0$ или $2^{\aleph_0}$ пребројивих модела.

Глава 7

Морлијев ранг и тотално трансцендентне теорије

У овом поглављу фиксирамо комплетну, ω-стабилну теорију T и њен универзални домен $\mathbb{U}$. По конвенцији из дела 3.3, у коме смо увели појам универзума, a, b, c означавају елементе а $\overline{a}$, $\overline{b}$,.... n-торке елемената универзума. $A, B, C, ...$ су мали подскупови а $M, N...$ мали елементарни подмодели универзума.

7.1 Морлијев ранг

Мотивација за увођење Морлијевог ранга је мерење „величине” скупова. Идеја потиче из раније познатих појмова димензије. Рецимо, ако векторски простор садржи бесконачно много дисјунктних транслата потпростора, од којих је сваки димензије $\geqslant n$, онда је сам простор димензије $\geqslant n+1$. Морлијев ранг је уопштење таквог резоновања и није појам димензије већ је знатно грубље „мерење величине” дефинабилног скупа.

Морлијев ранг дефинабилног скупа се дефинише индукцијом и кључни корак је већ наведен: Морлијев ранг дефинабилног скупа је $\geqslant \alpha+1$ акко садржи бесконачно много дисјунктних дефинабилних скупова ранга $\geqslant \alpha$.

Дефиниција 7.1.1 (а) За дефинабилне подскупове $D \subseteq \mathbb{U}^n$ и ординал α дефинишемо индуктивно релацију $MR_n(D) \geqslant \alpha$:

(1) $MR_n(D) \geqslant 0$ акко $D \neq \emptyset$;

(2) $MR_n(D) \geqslant \alpha+1$ акко постоји бесконачно много међусобно дисјунктних $D_i \subset D$ таквих да је $MR_n(D_i) \geqslant \alpha$;

(3) За граничне α: $MR_n(D) \geqslant \alpha$ акко за сваки $\beta < \alpha$ важи $MR_n(D) \geqslant \beta$.

(б) $MR_n(D) = \alpha$ акко је α највећи ординал такав да је $MR_n(D) \geqslant \alpha$; уколико такав не постоји онда $MR_n(D) = \infty$.

(в) Морлијев ранг формуле $\phi(x_1, ..., x_n)$ је Морлијев ранг скупа који та формула дефинише. Означавамо га са $\mathrm{MR}_n(\phi(\overline{x}))$. □

На овај начин дефинисан је Морлијев ранг непразних дефинабилних подскупова од $\mathbb{U}^n$ за свако $n \geqslant 1$. Будући да је вредност n обично јасна из контекста пишемо само $MR(D)$ уместо $MR_n(D)$. Уобичајено је, из техничких разлога, дефинисати и $MR(\emptyset) = -1$, при том сматрамо $-1 < \alpha < \infty$ за сваки ординал α.

Из претходне дефиниције лако изводимо:

Лема 7.1.2 1. $MR(D) = \infty$ акко за сваки ординал α важи $MR(D) \geqslant \alpha$.

2. Из $D_1 \subseteq D_2$ следи $MR(D_1) \leqslant MR(D_2)$ и
из $\models \phi(\overline{x}, \overline{a}) \to \psi(\overline{x}, \overline{b})$ следи $MR(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \leqslant MR(\psi(\overline{x}, \overline{b}))$.

3. MR је инваријантан у односу на аутоморфизме: ако је f аутоморфизам домена тада је $MR(D) = MR(f(D))$.

4. Из $\mathrm{tp}(\overline{a}) = \mathrm{tp}(\overline{b})$ следи $MR(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = MR(\phi(\overline{x}, \overline{b}))$ (зато што постоји аутоморфизам који $\overline{a}$ пресликава у $\overline{b}$).

5. $MR(\bigcup_{i=1}^{m} D_i) = \max\{MR(D_i) \,|\, 1 \leqslant i \leqslant m\}$.

6. $MR(\phi(\overline{x})) = 0$ акко је $\phi(\overline{x})$ алгебарска формула. □

Напомена 7.1.3 (1) На исти начин као у претходној дефиницији можемо дефинисати ранг дефинабилних подскупова било ког модела M; означимо тако дефинисан ранг са MR^M.

(2) Ако је M $\aleph_0$-засићен и $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ формула са параметрима из M тада је

$$MR^M(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = MR(\phi(\overline{x}, \overline{a}));$$

што није тешко закључити директном провером услова дефиниције: Ако $\phi_i(\overline{x}, \overline{b}_i)$ дефинишу дисјунктне подскупове скупа $\phi(\mathbb{U}, \bar{a})$ ранга бар α, тада, због $\aleph_0$-засићености, можемо наћи $\overline{b}'_i$-ове у M такве да је $\mathrm{tp}(\overline{b}_1\overline{b}_2.../\bar{a}) = \mathrm{tp}(\overline{b}'_1\overline{b}'_2.../\bar{a})$. Због елементарности, $\phi_i(\overline{x}, \overline{b}'_i)$ сведоче да је $MR^M(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geqslant \alpha + 1$. □

Из дефиниције следи да фиксиран дефинабилан подскуп ранга α не може садржати бесконачну унију дисјунктних подскупова ранга α; свака таква унија мора бити коначна. Наредна лема гарантује да постоји горње ограничење величине такве уније.

Лема 7.1.4 Нека је $D \subseteq \mathbb{U}^n$ дефинабилан.

(а) Ако је $MR(D) = \alpha < \infty$, тада постоји највећи m такав да се D може представити као дисјунктна унија $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$, где је сваки $D_i \subseteq \mathbb{U}^n$ дефинабилан и има ранг α.

(б) Ако је $MR(D) = \infty$, тада се он може представити као дисјунктна унија два дефинабилна подскупа ранга ∞.

Доказ: (а) Претпоставимо супротно. Тада је D дефинабилан, $MR(D) = \alpha$ и за сваки m постоји m дисјунктних подскупова скупа D ранга α; назовимо сваки такав D α-великим. Користећи ову претпоставку D можемо разложити: $D = D_1 \cup E_1$, где је $MR(D_1) = MR(E_1) = \alpha$. Тврдимо да је бар један од D_1 и E_1 α-велики: За фиксно q, нека је $D = \bigcup_{j=1}^q C_j$ разлагање на скупове ранга α. Тада је за сваки j, $MR(D_1 \cap C_j) = \alpha$ или $MR(E_1 \cap C_j) = \alpha$. Следи да је $MR(D_1 \cap C_j) = \alpha$ за бар $q/2$ j-ова или $MR(E_1 \cap C_j) = \alpha$ за бар $q/2$ j-ова; према томе бар један од D_1 и E_1 је α-велики. Овим смо доказали да се сваки α-велики D може разложити на унију $D = D_1 \cup E_1$ скупова ранга α, где је E_1 α-велики. На исти начин разложимо $E_1 = D_2 \cup E_2$, где је E_2 α-велики, потом разложимо $E_2 = D_3 \cup E_3 \ldots$ На тај начин добијамо бесконачну фамилију $D_1, D_2, \ldots$ дисјунктних подскупова ранга α, што је у контрадикцији са $MR(D) < \alpha + 1$.

(б) Приметимо да $MR(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$ зависи искључиво од L-формуле $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ и $\mathrm{tp}(\overline{a})$. Како имамо $\leqslant 2^{\aleph_0}$ могућности закључујемо да постоји $\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$ такав да из $MR(X) \geqslant \alpha$ следи $MR(X) = \infty$. Нека је $MR(D) = \infty$. Због $MR(D) \geqslant \alpha + 1$, из дефиниције, следи да постоје дисјунктни $D_1, D_2 \subset D$ такви да је $MR(D_i) \geqslant \alpha$. Тада је $MR(D_i) = \infty$. □

Кажемо да $D \subset \mathbb{U}^n$ ранга $\alpha < \infty$ има (Морлијев) степен 1 ако не садржи два међусобно дисјунктна подскупа ранга α.

Лема 7.1.5 Предпоставимо да је D дефинабилан подскуп ранга α који се на два начина представља као дисјунктна унија дефинабилних подскупова ранга α и степена 1:

$$D = \bigcup_{i=1}^{p} D_i = \bigcup_{j=1}^{q} C_j.$$

Тада је $p = q$.

Доказ: Нека је m број скупова фамилије

$$\{D_i \cap C_j \mid 1 \leqslant i \leqslant p \ 1 \leqslant j \leqslant q\}$$

који имају ранг α. За фиксирано $i < p$ D_i је представљен као дисјунктна унија скупова $D_i = \bigcup_{j=1}^q (D_i \cap C_j)$. Како D_i има степен 1 можемо закључити да постоји тачно један j такав да $D_i \cap C_j$ има ранг α; одавде следи $m = p$. Слично је и $m = q$. $\square$

Из претходне две леме следи коректност следеће дефиниције.

Дефиниција 7.1.6 Нека је $D \subseteq \mathbb{U}^n$ дефинабилан и $MR(D) = \alpha$. Морлијев степен скупа D је (јединствен) m такав да се D може представити као дисјунктна унија $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$, где је сваки $D_i \subseteq \mathbb{U}^n$ дефинабилан, има ранг α и степен 1. Морлијев степен формуле $\phi(\overline{x})$ је Морлијев степен скупа који она дефинише, означавамо га са $\deg(\phi(\overline{x}))$. $\square$

Тврђење 7.1.7 Ако су $\phi_i(\bar{x})$ за $i = 1, 2, ..., n$ међусобно контрадикторне формуле ранга α и $\deg(\phi_i(\bar{x})) = d_i$ тада је

$$MR(\bigvee_{i=1}^n \phi_i(\bar{x})) = \alpha \quad \text{и} \quad \deg(\bigvee_{i=1}^n \phi_i(\bar{x})) = \sum_{i=1}^n d_i. \qquad \square$$

Тврђење 7.1.8 $\phi(x)$ је јако минимална акко има MR-ранг 1 и степен 1. $\square$

7.2 Морлијев ранг типова

Нека је $\overline{x} = (x_1, ..., x_n)$ и p парцијалан тип по променљивим $\bar{x}$. Дефинишемо:

$$MR_n(p) = \min\{MR_n(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(\overline{x})) \,|\, \varphi_1(\overline{x}), ..., \varphi_n(\overline{x}) \in p\}.$$

За потпуне типове $p \in S_n(A)$ је то исто што и $\mathrm{MR}(p) = \inf\{\mathrm{MR}(\varphi) \,|\, \varphi \in p\}$. $MR(\overline{a}/B)$ означава $MR(\mathrm{tp}(\overline{a}/B))$.

Следеће тврђење повезује Морлијев ранг са тополошким особинама простора типова.

Тврђење 7.2.1 (1) Ако $p \in S_n(\mathbb{U})$ тада

$MR(p) \geqslant \alpha + 1$ акко је p тачка нагомилавања скупа $\{q \in S_n(\mathbb{U}) \,|\, MR(q) = \alpha\}$.

(2) Ако $p \in S(A)$ и p је тачка нагомилавања скупа $\{q \in S(A) \mid MR(q) \geqslant \alpha\}$ тада је $MR(p) \geqslant \alpha + 1$.

(3) Ако је $p \in S(A)$ неизолован тада је он тачка нагомилавања скупа $\{q \in S(A) \mid MR(q) < MR(p)\}$. $\square$

Ако је $MR(p) = \alpha$, дефинишемо Морлијев степен типа p:

$$\deg(p) = \min\{\deg(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(\overline{x})) \mid \varphi_i(\overline{x}) \in p \text{ и } MR(\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(\overline{x}))) = \alpha\}.$$

Тип степена 1 је стационаран тип.

Напомена 7.2.2 Сваки тип $p \in S(A)$ садржи формулу истог Морлијевог ранга и степена. $\square$

Тврђење 7.2.3 Нека је $MR(p(\overline{x})) = \alpha$ ординал.

(1) Ако је p стационаран и $\psi \in p$ има ранг α и степен 1, тада је

$$q(\overline{x}) = \{\varphi(\overline{x}) \mid MR(\psi(\overline{x}) \wedge \neg\varphi(\overline{x})) < \alpha\}$$

његово јединствено проширење $\in S(\mathbb{U})$ ранга α.

(2) Постоји $\deg(p)$ различитих $q \in S(\mathbb{U})$ који садрже $p(\overline{x})$ и имају ранг α.

Доказ: Без умањења општости нека је p затворен за конјукције.

(1) Није тешко уочити да је $p \subseteq q$. Тврдимо да је $q(\overline{x})$ (непротивречан) тип: нека $\varphi_i(\overline{x}) \in q(\overline{x})$ за $i = 1, 2, ..., n$. Тада је $MR(\psi(\mathbb{U}) \setminus \varphi_i(\mathbb{U})) < \alpha$, па

$$MR(\bigcup_{i=1}^{n}(\psi(\mathbb{U}) \setminus \varphi_i(\mathbb{U})) < \alpha \quad \text{и} \quad MR(\psi(\mathbb{U}) \setminus \bigcup_{i=1}^{n}(\psi(\mathbb{U}) \setminus \varphi_i(\mathbb{U})) = \alpha \ ;$$

одавде следи $MR(\psi(\mathbb{U}) \cap \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbb{U}) = \alpha$ и $\bigcap_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbb{U}) \neq \emptyset$, па је q непротивречан. Слично се покаже и да је q комплетан.

(2) Нека је $\deg(p) = n$ и нека је $\phi(\overline{x}) \in p$ формула ранга α и степена n. Према дефиницији 7.1.6 постоје међусобно контрадикторне формуле $\psi_i(\bar{x})$ за $i = 1, 2, ..., n$, ранга α и степена 1, и такве да је $\models \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{x})$.

Прво тврдимо да је $MR(p(\overline{x}) \cup \{\psi_i(\overline{x})\}) = \alpha$ за свако i. Претпоставимо да тврђење није тачно за рецимо $i = n$. Тада постоји $\theta(\overline{x}) \in p(\overline{x})$ таква да је $MR(\theta(\overline{x}) \wedge \psi_n(\overline{x})) < \alpha$, па важи и:

$$\models \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} \psi_i(\overline{x})\right) \vee (\theta(\overline{x}) \wedge \psi_n(\overline{x})) \to (\theta(\overline{x}) \wedge \phi(\overline{x})).$$

Приметимо да формула са леве стране има ранг α и степен $n-1$. Следи да и формула са десне стране има ранг $\leqslant \alpha$ и степен $\leqslant n-1$. Како је она конјукција формула из $p(\overline{x})$ имамо контрадикцију.

$p(\overline{x}) \cup \{\psi_i(\overline{x})\}$ је стационаран према избору ψ_i па, према првом делу, има јединствено проширење $q_i \in S(\mathbb{U})$ ранга α. Како, због $\models \phi(\bar{x}) \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \psi_i(\bar{x})$ свако проширење $\in S(\mathbb{U})$ типа p садржи тачно једну формулу $\psi_i(\overline{x})$, следи тврђење. $\square$

Последица 7.2.4 (1) Сваки $q \in S(\mathbb{U})$ је стационаран.

(2) Ако је M $\aleph_0$-засићен тада је сваки $q \in S(M)$ стационаран. Шта више, q садржи формулу истог ранга и степена 1. $\square$

7.3 Тотално трансцендентне теорије

Дефиниција 7.3.1 Потпуна теорија је тотално трансцендентна (или т.т) ако свака формула са параметрима из $\mathbb{U}$ има (ординалан) Морлијев ранг.$\square$

У леми 7.1.4 б) смо доказали да се сваки дефинабилан подскуп D ранга ∞ може разложити на унију два дисјунктна дефинабилна подскупа ранга ∞. Продужавајући на тај начин добијамо бинарно дрво висине ω (у односу на инклузију) дефинабилних подскупова ранга ∞.

Тврђење 7.3.2 T је тотално трансцендентна ако и само ако не постоји бинарно дрво висине ω које чине дефинабилни подскупови у односу на инклузију у неком $\mathbb{U}^n$.

Доказ: Већ смо напоменули да ако T није т.т. тада бинарно дрво постоји. За други смер, предпоставимо да постоји бинарно дрво дефинабилних подскупова од $\mathbb{U}^n$ и покажимо да T није т.т. У супротном, сваки елемент дрвета има Морлијев ранг и степен; нека је α најмањи ранг и d најмањи степен елемената дрвета ранга α. Нека је D елемент ранга α и степена d. Узмимо два наредна елемента дрвета: $D = D_1 \cup D_2$. Тада бар један D_i има мањи ранг или мањи степен него D. Контрадикција. $\square$

Подсетимо да је T ω-стабилна акко за сваки највише пребројив A важи

$$|S(A)| \leqslant |A| + \aleph_0.$$

Теорема 7.3.3 Пребројива теорија T је тотално трансцендентна ако и само ако је ω-стабилна.

Доказ: $\Rightarrow$) Претпоставимо да је T т.т. Нека је A било који скуп. За φ са параметрима из A, нека је

$$U_\varphi = \{p \in S(A) \,|\, \varphi \in p \text{ и } \mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(\varphi)\}.$$

Сваки елемент скупа $S(A)$ је у неком U_φ и сваки U_φ је коначан, па је

$$|S(A)| \leqslant |For\, L_A| + \aleph_0 = |A| + \aleph_0.$$

Ако је $\kappa > \aleph_0$ и $|A| \leqslant \kappa$, онда је и $|S(A)| \leqslant \kappa$.

$\Leftarrow$) Претпоставимо да T није т.т. Тада постоји бинарно дрво дефинабилних подскупова висине ω. Нека је A скуп свих параметара формула које дефинишу елементе дрвета; тада је $|A| \leqslant \aleph_0$. Како свака грана дрвета одређује тип са параметрима из A, и како различите гране одређују међусобно контрадикторне типове, закључујемо да имамо бар $2^{\aleph_0}$ типова са параметрима из A. Следи $S(A) \geqslant 2^{\aleph_0} > \aleph_0 = |A| + \aleph_0$ $\square$

Глава 8

Независност у Морлијевом рангу

У овом поглављу T је фиксирана комплетна, ω-стабилна теорија и $\mathbb{U}$ њен универзални домен. По конвенцији из дела 3.3, у коме смо увели појам универзума, a, b, c означавају елементе а $\overline{a}$, $\overline{b}$,.... n-торке елемената универзума. $A, B, C, ...$ су мали подскупови а $M, N...$ мали елементарни подмодели универзума. Материјал изложен у овом делу може се наћи у монографијама посвећеним теорији стабилности [2, 3, 5, 6].

8.1 Појам и особине

Дефиниција 8.1.1 Кажемо да је **A независан (слободан) у Морлијевом рангу од B над C** и пишемо

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{MR} B \ \ \langle C \rangle$$

ако за све коначне низове $\overline{a}$ из A важи

$$\mathrm{MR}(\overline{a}/B \cup C) = \mathrm{MR}(\overline{a}/C).$$

У супротном кажемо да **A зависи у Морлијевом рангу од B над C** и пишемо $A \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{MR} B \langle C \rangle$. $\square$

Уместо „A зависи од B над празним скупом", кажемо само „A зависи од B". Слично, изостављамо „над празним скупом" и кажемо само „A је слободно од B". Ако је $q \in S_n(C)$, $C \subseteq B$ и $p \in S_n(B)$ проширење типа q онда кажемо да је p **слободно проширење типа** q ако је

$$\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(q).$$

Такође у том случају, кажемо и да је **p слободно над C**. Кад не доводи до забуне, изостављамо „у Морлијевом рангу" и кажемо само „да је A независно од B над C".

Постојање слободних проширења типова следи из тврђења 7.2.3.

Лема 8.1.2 Сваки тип $p \in S(A)$ има слободно проширење у $S(B)$ за сваки $B \supset A$. $\square$

Лема 8.1.3 1) $\mathrm{MR}(\overline{a}/B) \leqslant \mathrm{MR}(\overline{a}\overline{b}/B)$;

2) $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} \mathrm{acl}(A) \ \langle A \rangle$;

3) За свако $\overline{a}$ и B, постоји коначан $B_0 \subseteq B$такав да $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} B \ \langle B_0 \rangle$;

4) (Транзитивност) За све $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $A \subseteq B$ важи:

$B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} \overline{a}\overline{b} \ \langle A \rangle$ акко $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} \overline{a} \ \langle A\overline{b} \rangle$ и $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} \overline{b} \ \langle A \rangle$.

Доказ: 1) Нека је $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_m)$. Тада је

$$MR(\overline{a}/B) = MR_n(\overline{a}/B) \quad \text{и} \quad MR(\overline{a}\overline{b}/B) = MR_{n+m}(\overline{a}\overline{b}/B).$$

Приметимо:

$$\text{из } \models \varphi(\overline{a}, \overline{b}) \ \ (\text{тј. } \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/B)) \ \text{ следи } \ \exists \overline{y}\, \varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/B).$$

Слично томе, из $\models \psi(\overline{a})$ (тј. $\psi(\overline{x}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/B)$ следи $\widehat{\psi}(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/B)$ за

$$\widehat{\psi}(\overline{x}, \overline{y}) = \psi(\overline{x}) \wedge y_1 \equiv y_1 \wedge y_2 \equiv y_2 \wedge \cdots \wedge y_m \equiv y_m.$$

Индукцијом се провери да важи

$$\mathrm{MR}_n(\exists \overline{y} \varphi(\overline{x}, \overline{y})) \leqslant \mathrm{MR}_{n+m}(\varphi(\overline{x}, \overline{y})) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{MR}_n(\psi(\overline{x})) \leqslant \mathrm{MR}_{n+m}(\widehat{\psi}(\overline{x}, \overline{y})),$$

па је

$$\inf\{\mathrm{MR}(\psi) \mid \psi \in \mathrm{tp}(\overline{a}/B)\} \leqslant \inf\{\mathrm{MR}(\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{tp}(\overline{a}'/B)\}.$$

2) Претпоставимо супротно; тада постоји L_A-формула $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ таква да је

$$\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/\mathrm{acl}(A)) \quad \text{и} \quad \mathrm{MR}(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = \alpha < \mathrm{MR}(\overline{a}/A).$$

Нека $\psi(\overline{y})$ изолује $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$. Приметимо да $\exists \overline{y}\, (\psi(\overline{y}) \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{y})) \in \mathrm{tp}(\overline{a}/A)$.
Нека је $p \in S(\mathrm{acl}(A))$ слободно раширење типа $\mathrm{tp}(\overline{a}/A)$.
Тада $\exists \overline{y}\, (\psi(\overline{y}) \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{y})) \in p$ и, како су сва решења (а има их коначно много) формуле $\psi(\overline{y})$ у $\mathrm{acl}(A)$, постоји $\overline{b}' \in \mathrm{acl}(A)$ такав да $\psi(\overline{b}') \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{b}') \in p$.
Како ψ изолује $\mathrm{tp}(\overline{b}/A)$ закључујемо да је $\mathrm{tp}(\overline{b}/A) = \mathrm{tp}(\overline{b}'/A)$, па је и $MR(\varphi(\overline{x}, \overline{b}')) = MR(\varphi(\overline{x}, \overline{b})) = \alpha$. Дакле,

$$MR(p) \leqslant MR(\varphi(\overline{x}, \overline{b}')) = \alpha < MR(\overline{a}/A),$$

што повлачи да p није слободно раширење $\mathrm{tp}(\overline{a}/A)$. Контрадикција.

3) Следи из дефиниције: сваки тип садржи формулу истог ранга и сваки B_0 који садржи параметре те формуле задовољава тврђење.

4) ($\Longrightarrow$:) Важи $B \mathop{\downarrow}^{MR} \overline{a}\overline{b}\ \langle A\rangle$. Нека је $\overline{d}$ произвољна n-торка из B. Тада

$$\mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{a}\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A).$$

Сад је $\quad \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{a}\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A).$

$$\text{Из}\quad \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{a}\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{b}) \quad \text{следи} \quad B \mathop{\downarrow}^{MR} \overline{a}\ \langle A\overline{b}\rangle.$$

$$\text{Из}\quad \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A) \quad \text{следи} \quad B \mathop{\downarrow}^{MR} \overline{b}\ \langle A\rangle.$$

($\Longleftarrow$:) Нека је $\overline{d}$ произвољна n-торка из B.

$$\text{Из}\quad B \mathop{\downarrow}^{MR} \overline{b}\ \langle A\rangle \quad \text{следи} \quad \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A).$$

$$\text{Из}\quad B \mathop{\downarrow}^{MR} \overline{a}\ \langle A\overline{b}\rangle \quad \text{следи} \quad \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{a}\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{b}).$$

Дакле, $\mathrm{MR}(\overline{d}/A\overline{a}\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{d}/A)$, па је $B \mathop{\downarrow}^{MR} \overline{a}\overline{b}\ \langle A\rangle$. □

Лема 8.1.4 Нека је $(I, <)$ бесконачан скуп уређених нераспознатљивих над A. Онда:

1) I је скуп нераспознатљивих над A;

2) За сваку формулу $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ над A, постоји природан број n такав да за све $\overline{a}$ важи

$$|\{\overline{b} \in I \mid\ \models \varphi(\overline{a}, \overline{b})\}| \leqslant n \text{ или } |\{\overline{b} \in I \mid\ \models \neg\varphi(\overline{a}, \overline{b})\}| \leqslant n.$$

Доказ: 1) је доказано у леми 6.3.9.

2) Без умањења општости нека је $|I| = \aleph_0$. Претпоставимо супротно: за неку формулу $\varphi(\overline{x}, \overline{y})$ и за свако n постоје $I_n, I_n' \subseteq I$ моћи n такви да је скуп

$$\{\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \mid \overline{b} \in I_n\} \cup \{\neg\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \mid \overline{b} \in I_n'\}$$

непротивречан. По компактности и из нераспознатљивости скупа I, следи да је за сваки скуп $I' \subset I$ непротивречан скуп

$$p_{I'}(\overline{x}) = \{\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \mid \overline{b} \in I'\} \cup \{\neg\varphi(\overline{x}, \overline{b}) \mid \overline{b} \in I \setminus I'\}.$$

Приметимо да су, за различите I'-ове типови $p_{I'}(\overline{x})$ међусобно контрадикторни. Како има $2^{\aleph_0}$ различитих I'-ова закључујемо $|S(I)| \geqslant 2^{\aleph_0}$, што је у супротности са ω-стабилношћу. Контрадикција! □

Дефиниција 8.1.5 Нека је $p \in S(C)$ стационаран тип и $B \supseteq C$. Кажемо да је $A = \{\overline{a}_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$ **Морлијев низ над B у p** ако је за све $\beta < \alpha$ тип $\mathrm{tp}(\overline{a}_\beta / B \cup A_\beta)$ јединствено слободно проширење типа p у $S(B \cup A_\beta)$, при чему је $A_\beta = \{\overline{a}_\delta \,|\, \delta < \beta\}$. □

Лема 8.1.6 Нека је $p \in S(C)$ стационаран тип, $B \supseteq C$ и $A = \{\overline{a}_\beta \,|\, \beta < \alpha\}$ Морлијев низ над B у p. Тада је A скуп нераспознатљивих над B.

Доказ: Пренесимо уређење са ординала на скуп A: $a_\beta < a_\gamma$ акко $\beta < \gamma$. На основу леме 8.1.4, довољно је показати да је $(A <)$ скуп уређених нераспознатљивих. Покажимо индукцијом да је

$$\mathrm{tp}(\overline{a}_{\beta_1}, \overline{a}_{\beta_2}, \ldots, \overline{a}_{\beta_m}/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_m}/B),$$

за све $\overline{a}_{\beta_1} < \overline{a}_{\beta_2} < \cdots < \overline{a}_{\beta_m}$ и $\overline{a}_{\gamma_1} < \overline{a}_{\gamma_2} < \cdots < \overline{a}_{\gamma_m}$.

Индуктивна хипотеза: Тврђење важи за све $k < n$.

Нека је $\overline{a}_{\beta_1} < \overline{a}_{\beta_2} < \cdots < \overline{a}_{\beta_n}$ и $\overline{a}_{\gamma_1} < \overline{a}_{\gamma_2} < \cdots < \overline{a}_{\gamma_n}$. По индуктивној хипотези је $\mathrm{tp}(\overline{a}_{\beta_1}, \overline{a}_{\beta_2}, \ldots, \overline{a}_{\beta_{n-1}}/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}/B)$. Дакле, постоји аутоморфизам μ универзума који фиксира тачке скупа B и слика a_{β_i} у a_{γ_i} за $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Дакле,

- $\mu(B \cup \{\overline{a}_{\beta_1}, \overline{a}_{\beta_2}, \ldots, \overline{a}_{\beta_{n-1}}\}) = B \cup \{\overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}\}$;
- аутоморфизми чувају Морлијев ранг па је
$$\mathrm{MR}(p) = \mathrm{MR}(\overline{a}_{\beta_n}/B \cup \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{\beta_{n-1}}\}) = \mathrm{MR}(\mu(\overline{a}_{\beta_n})/B \cup \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}\});$$
- $\mu(\overline{a}_{\beta_n})$ и a_{γ_n} реализују p;
- будући да је стационаран, p има јединствену слободну екстензију $p^* \in S(B \cup \{\overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}\})$.

Из овога следи да су $\mu(\overline{a}_{\beta_n})$ и a_{γ_n} реализације p^*, па важи:

$$\mathrm{tp}(\mu(\overline{a}_{\beta_n}), \overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}_{\beta_n}, \overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}/B).$$

Како је μ аутоморфизам, важи и

$$\mathrm{tp}(\mu(\overline{a}_{\beta_n}), \overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_{n-1}}/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}_{\beta_n}, \overline{a}_{\beta_1}, \overline{a}_{\beta_2}, \ldots, \overline{a}_{\beta_{n-1}}/B),$$

што са претходним даје

$$\mathrm{tp}(\overline{a}_{\beta_1}, \overline{a}_{\beta_2}, \ldots, \overline{a}_{\beta_n}/B) = \mathrm{tp}(\overline{a}_{\gamma_1}, \overline{a}_{\gamma_2}, \ldots, \overline{a}_{\gamma_n}/B).$$

Тиме је показано да је $(A, <)$ скуп уређених нераспознатљивих, па је и скуп нераспознатљивих. □

Лема 8.1.7 (Лема симетрије): За све скупове A, B и C важи:

$$A \downfree^{MR} B \ \langle C\rangle \qquad \text{акко} \qquad B \downfree^{MR} A \ \langle C\rangle.$$

Доказ: Претпоставимо супротно. Тада, због коначног карактера, постоје (коначни) низови $\overline{a}$ и $\overline{b}$ такви да је

$$\overline{a} \downfree^{MR} \overline{b} \ \langle C\rangle \quad \text{и} \quad \overline{b} \not\downfree^{MR} \overline{a} \ \langle C\rangle.$$

$$(\star) \qquad \mathrm{MR}(\overline{a}/C\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{a}/C) = \alpha \qquad \text{и} \qquad \mathrm{MR}(\overline{b}/C\overline{a}) < \mathrm{MR}(\overline{b}/C) = \beta.$$

Прво тврдимо да у $(\star)$ C можемо заменити $\aleph_0$-засићеним моделом $M \supset C$. Нека је $M' \supset C$ $\aleph_0$-засићен и нека $\overline{b}'$ реализује слободно проширење типа $\mathrm{tp}(\overline{b}/C)$ над M':

$$\mathrm{MR}(\overline{b}'/M') = \mathrm{MR}(\overline{b}'/C) = \beta.$$

Нека је $\overline{a}'$ такав да је $\mathrm{tp}(\overline{a}'\overline{b}'/C) = \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/C)$ (чиме одређујемо $\mathrm{tp}(\overline{a}'/C\overline{b}')$) и да $\overline{a}'$ реализује слободно проширење типа $\mathrm{tp}(\overline{a}'/C\overline{b}')$ над $M'\overline{b}'$. Тада:

$$\mathrm{MR}(\overline{a}'/M'\overline{b}') = \mathrm{MR}(\overline{a}'/C\overline{b}') = \mathrm{MR}(\overline{a}'/C) = \alpha \ ,$$

$$\mathrm{MR}(\overline{b}'/M'\overline{a}') \leqslant \mathrm{MR}(\overline{b}'/C\overline{a}') < \beta = MR(\overline{b}/M').$$

Ако је μ аутоморфизам који фиксира C, $\overline{a}'\overline{b}'$ слика у $\overline{a}\overline{b}$, и M' слика у M, тада M задовољава:

$$\mathrm{MR}(\overline{a}/M\overline{b}) = \mathrm{MR}(\overline{a}/M) = \alpha \qquad \text{и} \qquad \mathrm{MR}(\overline{b}/M\overline{a}) < \mathrm{MR}(\overline{b}/M) = \beta.$$

Према последици 7.2.4 $p = \mathrm{tp}(\overline{b}/M)$ и $q = \mathrm{tp}(\overline{a}/M)$ су стационарни типови. Нека је $\varphi(\overline{x},\overline{y}) \in \mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/M)$ таква да је

$$\mathrm{MR}(\varphi(\overline{a},\overline{y})) < \beta = \mathrm{MR}(p) \quad \text{и} \quad \mathrm{MR}(\varphi(\overline{x},\overline{b})) = \alpha = \mathrm{MR}(q).$$

Нека је I бесконачан Морлијев низ над M у q. Тада:

$$\text{за сваки } \overline{a}_i \in I \text{ важи } \mathrm{MR}(\varphi(\overline{a}_i,\overline{y})) < \beta,$$

зато што је $\mathrm{MR}(\varphi(\overline{a},\overline{y})) < \beta$ и $\mathrm{tp}(\overline{a}_i/M) = \mathrm{tp}(\overline{a}/M) = q$. Нека је $\overline{b}''$ реализација типа p која је независна од I над M: $MR(\overline{b}''/M\,I) = MR(p) = \beta$. Тада:

$$\text{за сваки } \overline{a}_i \in I \text{ важи } \models \neg\varphi(\overline{a}_i,\overline{b}'').$$

Нека је $q^* \in S(M\overline{b}''I)$ (јединствено) слободно раширење типа q. Тврдимо да $\varphi(\overline{x},\overline{b}'') \in q^*$: Јединствено слободно раширење типа q над $M\overline{b}$ је $\mathrm{tp}(\overline{a}/M\overline{b})$ који садржи $\varphi(\overline{x},\overline{b})$. Због аутоморфизма, јединствено слободно раширење q' типа q над $M\overline{b}''$ садржи $\varphi(\overline{x},\overline{b}'')$, па како је $q' \subset q^*$ следи $\varphi(\overline{x},\overline{b}'') \in q^*$.

Нека је J бесконачан Морлијев низ над $M\overline{b}''I$ у q^*:

$$\text{за сваки } \ \overline{a}_i \in J \ \text{ важи } \models \varphi(\overline{a}_i, \overline{b}'').$$

Посматрајмо низ IJ релизација q. Према избору I и J, сваки његов члан има ранг $\alpha = MR(q)$ над M и претходним члановима низа, па је IJ Морлијев низ над M у q. Према претходном:

$$\{\overline{a}_i \in IJ \mid \ \models \neg\varphi(\overline{d}, \overline{b}'')\} = I \quad \text{и} \quad \{\overline{a}_i \in IJ \mid \ \models \varphi(\overline{d}, \overline{b}'')\} = J,$$

што је, како су и I и J бесконачни, у контрадикцији с лемом 8.1.4. □

Наредна теорема садржи листу најважнијих особина релације "независност".

Теорема 8.1.8

(I_1) За сваки аутоморфизам универзума μ важи:

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B \ \langle C\rangle \qquad \text{акко} \qquad \mu(A) \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} \mu(B) \ \langle \mu(C)\rangle;$$

(I_2) (коначни карактер)

$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B \ \langle C\rangle$ акко за све коначне $A_0 \subseteq A$ и $B_0 \subseteq B$ важи $A_0 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_0 \ \langle C\rangle$;

(I_3) (транзитивност)

$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1 \ \langle C\rangle$ и $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_2 \ \langle CB_1\rangle$ акко $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1B_2 \ \langle C\rangle$;

(I_4) (симетрија) $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B \ \langle C\rangle$ акко $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} A \ \langle C\rangle$;

(I_5) Ако је $A \subseteq B$, тада:

Сваки $p \in S_n(A)$ има коначно много проширења истог ранга у $S_n(B)$;

(I_6) $\overline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} \mathrm{acl}B \ \langle B\rangle$;

(I_7) (монотоност) Ако је $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1B_2 \ \langle C\rangle$, онда је $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1B_2 \ \langle CB_2\rangle$;

(I_8) (монотоност) Ако је $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1B_2 \ \langle C\rangle$, онда је $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1 \ \langle C\rangle$.

Доказ: (I_1) Следи из дефиниције релације $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR}$ и чињенице да се Морлијев ранг не мења при аутоморфизмима.

(I_2) Следи из дефиниције релације $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR}$ и дефиниције Морлијевог ранга.

(I_3) Доказано у леми 8.1.3.

(I_4) Лема 8.1.7.

(I_5) Следи из тврђења 7.2.3.

(I_6) Део 3 леме 8.1.3.

(I_7) Ако је $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{MR} B_1B_2 \ \langle C\rangle$ и $\overline{a}$ произвољна n-торка скупа A, онда је

$\mathrm{MR}(\overline{a}/B_1B_2C) = \mathrm{MR}(\overline{a}/C)$, па је $\mathrm{MR}(\overline{a}/B_1B_2C) = \mathrm{MR}(\overline{a}/B_2C)$, а то

управо значи да је $A \perp\!\!\!\perp^{MR} B_1 \ \langle B_2C \rangle$.

(I_8) Ако је $A \perp\!\!\!\perp^{MR} B_1B_2 \ \langle C \rangle$ и $\overline{a}$ произвољна n-торка скупа A, онда је

$\mathrm{MR}(\overline{a}/B_1B_2C) = \mathrm{MR}(\overline{a}/C)$. Тада је $\mathrm{MR}(\overline{a}/B_1C) = \mathrm{MR}(\overline{a}/C)$, а то управо

значи (уз чињеницу да је $\overline{a}$ произвољна n-торка скупа A) да је

$$A \perp\!\!\!\perp^{MR} B_1 \ \langle C \rangle. \qquad \square$$

8.2 Независне фамилије

Дефиниција 8.2.1 Скуп (или фамилија скупова) $\{C_i \,|\, i \in I\}$ је независна над A ако за сваки $i \in I$ важи:

$$C_i \perp\!\!\!\perp^{MR} \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} C_j \ \langle A \rangle,$$

у супротном је зависна над A. $\square$

Слично тврђењу 4.1.8 која говори о индуктивној конструкцији независних скупова у предгеометријама, следећа лема омогућава да се иста идеја може применити за конструкцију скупова независних у Морлијевом рангу.

Лема 8.2.2 $\{C_i \,|\, i < \alpha\}$ је независан над A ако и само ако

$$\text{за свако } j < \alpha \text{ важи } C_j \perp\!\!\!\perp^{MR} \{C_i \,|\, i < j\} \ \langle A \rangle.$$

Доказ: $\Rightarrow$) следи директно из дефиниције, доказаћемо само $\Leftarrow$).

Претпоставка је да важи:

$$C_j \perp\!\!\!\perp^{MR} \{C_i \,|\, i < j\} \ \langle A \rangle \text{ за свако } j < \alpha.$$

Свођења на контрадикцију ради, претпоставимо да $\{C_i \,|\, i \leqslant \alpha\}$ није независан над A. Тада постоји $k < \alpha$ такво да је

$$C_k \not\perp\!\!\!\perp^{MR} \{C_i \,|\, k \neq i < \alpha\} \ \langle A \rangle.$$

Нека је m најмањи такав да је

$$C_k \not\perp\!\!\!\perp^{MR} \{C_i \,|\, k \neq i < m+1\} \ \langle A \rangle.$$

Означимо $C = \cup\{C_i \,|\, k \neq i < m\}$. Тада је: $C_k \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C\,C_m \ \langle A \rangle$. Како, због минималности m, имамо $C_k \perp\!\!\!\perp^{MR} C \ \langle A \rangle$, применом транзитивности па симетрије, добијамо:

$$C_k \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C_{m+1} \; \langle A\,C \rangle \quad \text{и} \quad C_{m+1} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C_k \; \langle A\,C \rangle \; .$$

Због монотоности, (I_7) и (I_8), следи да је $C_{m+1} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} \{C_i \,|\, i \leqslant m\} \; \langle A \rangle$, што повлачи да је $\{C_i \,|\, i \leqslant m+1\}$ зависан над A. Контрадикција. □

Ако је $\{C_i \,|\, i \in I\}$ фамилија скупова и $J \subseteq I$ тада са C_J означавамо:

$$C_J = \bigcup_{j \in J} C_j.$$

Лема 8.2.3 Нека је $\{C_i \,|\, i \in I\}$ независан над A.

(1) Ако је $C_I \perp\!\!\!\perp^{MR} B \; \langle A \rangle$ тада је $\{C_i \,|\, i \in I\}$ независан и над AB.

(2) За сваки $J \subset I$ је $\{C_i \,|\, i \in I \setminus J\}$ је независан над AC_J.

(3) Ако је $\{D_j \,|\, j \in J\}$ независан над A и $C_I \perp\!\!\!\perp^{MR} D_J \; \langle A \rangle$ тада је и $\{C_i \,|\, i \in I\} \cup \{D_j \,|\, j \in J\}$ независан над A.

Доказ:

(1) $C_I \perp\!\!\!\perp^{MR} B \; \langle A \rangle$ због симетрије повлачи $B \perp\!\!\!\perp^{MR} C_I \; \langle A \rangle$. Примењујући прво (I_7) а потом (I_8) добијамо:

$$B \perp\!\!\!\perp^{MR} C_I \; \langle C_{I \setminus \{k\}} A \rangle \quad \text{и} \quad B \perp\!\!\!\perp^{MR} C_k \; \langle C_{I \setminus \{k\}} A \rangle.$$

Због симетрије: $C_k \perp\!\!\!\perp^{MR} B \; \langle C_{I \setminus \{k\}} A \rangle$.

Како је, због независности над A, $C_k \perp\!\!\!\perp^{MR} C_{I \setminus \{k\}} \; \langle A \rangle$ применом транзитивности добијамо:

$$C_k \perp\!\!\!\perp^{MR} C_{I \setminus \{k\}} B \; \langle A \rangle.$$

Применом (I_7) па потом (I_8) добијамо:

$$C_k \perp\!\!\!\perp^{MR} C_{I \setminus \{k\}} B \; \langle AB \rangle \quad \text{и} \quad C_k \perp\!\!\!\perp^{MR} C_{I \setminus \{k\}} \; \langle AB \rangle.$$

Како последња релација важи за свако k закључујемо да је $\{C_i \,|\, i \in I\}$ независна над AB.

(2) Нека је $K = I \setminus J$. Поређајмо I у ординални низ тако да прво дођу елементи C_i где $i \in K$ а потом они за $i \in J$:

$$C_{k_1} \; C_{k_2} \; .... \; C_{j_1} \; C_{j_2} \; ...$$

Тај низ задовољава индуктивни услов независности из леме 8.2.2, одакле следи да тај услов задовољава и низ $C_K \; C_{j_1} \; C_{j_2} \; ...$. Применом другог смера леме 8.2.2, закључујемо да је $\{C_K\} \cup \{C_j \,|\, j \in J\}$ независан над A па, када их поређамо у низ тако да C_K буде на крају, закључујемо:

$$C_K \perp\!\!\!\perp^{MR} C_J \; \langle A \rangle.$$

По првом делу ове леме следи да је $\{C_i \,|\, i \in K\}$ независан над AC_J, што је и требало доказати.

(3) Поређајмо $\{C_i \,|\, i \in I\} \cup \{D_j \,|\, j \in J\}$ у низ тако да прво дођу сви C_i-ови а онда D_j-ови. Тврдимо да овај низ задовољава индуктивни услов из леме 8.2.2: C_i-ова га очито задовољавају, па преостаје да то докажемо и за D_j-ове. Из независности $\{D_j \,|\, j \in J\}$ над A и $C_I \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} D_J \ \langle A\rangle$, према првом делу ове леме закључујемо да је он независан и над AC_I. Одатле следи индуктивни услов и за D_j-ове. $\square$

8.3 Тежина типа

Дефиниција 8.3.1 (1) Предтежина комплетног типа $p = \mathrm{tp}(\overline{a}/B)$, у ознаци $\mathrm{pwt}(p)$ или $\mathrm{pwt}(a/B)$, је дефинисана на следећи начин:

- $\mathrm{pwt}(a/B) \geqslant n$ акко постоји $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ независан над B такав да
$$a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} C_i \langle B\rangle \ \text{ за свако } i.$$
- $\mathrm{pwt}(p) = n$ акко је n највећи такав да је $\mathrm{pwt}(p) \geqslant n$; у супротном $\mathrm{pwt}(p) = \infty$.

(2) Тежина комплетног типа је максимална предтежина његовог слободног раширења[1]. Другим речима
$$\mathrm{wt}(a/B) = \sup\{\ \mathrm{pwt}(a/B') \,|\, a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} B' \ \langle B\rangle \text{ и } B \subseteq B'\},$$
ако је супремум природан број, а у супротном $\mathrm{wt}(a/B) = \infty$. $\square$

Напомена 8.3.2 1. Како су $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR}$ и $\not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR}$ коначног карактера нема умањења општости ако се претпостави да су C_i-ови у горњој дефиницији коначни.

2. Предтежина и тежина типа су инваријантне у односу на аутоморфизме универзума:
$$\mathrm{pwt}(a/A) = \mathrm{pwt}(f(a)/f(A)) \quad \text{и} \quad \mathrm{wt}(a/A) = \mathrm{wt}(f(a)/f(A))$$
важи за сваки аутоморфизам универзума.

3. Претпоставимо да $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ сведочи да је $\mathrm{pwt}(\bar{a}/A) \geqslant n$:
$$\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\} \text{ је независан над } A \quad \text{и} \quad a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{MR} C_i\langle A\rangle \text{ за све } i \leqslant n$$
Приметимо да ове две особине зависе искључиво од $\mathrm{tp}(C_1...C_n/A\,\bar{a})$; кад год $C_1'...C_n'$ реализује $\mathrm{tp}(C_1...C_n/A\,\bar{a})$ тада $C_1'...C_n'$ на исти начин сведочи да је $\mathrm{pwt}(\bar{a}/A) \geqslant n$. $\square$

[1] Слободно раширење типа q је комплетан тип $p \supseteq q$ истог Морлијевог ранга.

Из дефиниције директно следи да тежина не опада при преласку на слободно раширење; други део наредног тврђења гарантује да не може ни да порасте.

Тврђење 8.3.3 Претпоставимо да је $A \subseteq B$ и $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B \langle A \rangle$. Тада:

(1) $\mathrm{pwt}(\bar{a}/A) \leqslant \mathrm{pwt}(\bar{a}/B)$;

(2) $\mathrm{wt}(\bar{a}/A) = \mathrm{wt}(\bar{a}/B)$.

Доказ: (1) Претпоставимо да $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ сведочи да је $\mathrm{pwt}(\bar{a}/A) \geqslant n$:

$$\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\} \text{ је независан над } A \quad \text{и} \quad \bar{a} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} C_i \langle A \rangle \text{ за све } i \leqslant n.$$

Како ово зависи само од $\mathrm{tp}(C_1...C_n/A\,\bar{a})$ то можемо претпоставити и да је

$$C_1...C_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B\langle A\,\bar{a}\,\rangle$$

(узмемо реализацију слободног раширења $\mathrm{tp}(C_1...C_n/A\,\bar{a})$ у $S(B\bar{a})$ и заменимо C_i-ове). Показаћемо да $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ сведочи и $\mathrm{pwt}(\bar{a}/B) \geqslant n$.

Како је $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B \langle A \rangle$ применом симетрије и транзитивности следи:

$$B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} \bar{a}\,C_1...C_n \,\langle\, A\,\rangle.$$

Одавде прво закључујемо $C_1...C_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B\langle\, A\,\rangle$ па, према леми 8.2.3(1), је $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ независан над B. Преостаје да докажемо $\bar{a} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} C_i\langle\, B\rangle$. У супротном бисмо из $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} C_i\langle B\rangle$ и $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B\langle\, A\rangle$ применом транзитивности добили $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B\,C_i \,\langle\, A\,\rangle$, што је у противречности са $\bar{a} \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} C_i\langle\, A\rangle$.

Овим смо доказали да за свако n из $\mathrm{pwt}(\bar{a}/A) \geqslant n$ следи $\mathrm{pwt}(\bar{a}/B) \geqslant n$.

$$\mathrm{pwt}(\bar{a}/A) \leqslant \mathrm{pwt}(\bar{a}/B) \quad \text{следи.}$$

(2) Већ смо напоменули да тежина не опада у слободним раширењима, па преостаје да, претпоставивши $\mathrm{wt}(\bar{a}/A) \geqslant n$, докажемо $\mathrm{wt}(\bar{a}/B) \geqslant n$. Нека $D \supset A$ и $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ сведоче $\mathrm{wt}(\bar{a}/A) \geqslant n$:

$$\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} D\langle\, A\rangle, \quad \{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\} \text{ је независан над } D \text{ и } a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} C_i\langle\, D\rangle.$$

Пошто ово зависи само од $\mathrm{tp}(D\,C_1 \dots C_n/A\,\bar{a})$ можемо претпоставити и:

$$D\,C_1 \dots C_n \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B\langle\, A\,\bar{a}\rangle.$$

Одавде прво закључујемо $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} D\langle\, A\,\bar{a}\rangle$, што са $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} \bar{a}\,\langle A\rangle$, због транзитивности повлачи $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} D\bar{a}\langle\, A\rangle$. Како је и $D \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} \bar{a}\langle\, A\rangle$ закључујемо да $\{\bar{a}, D, B\}$ задовољава индуктивну независност над A; према леми 8.2.2 то је независна тројка над A па је и $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{MR} B\,D\langle\, A\rangle$. $\mathrm{tp}(\bar{a}/BD)$ је слободна екстензија $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$.

Довољно је доказати да $\{C_i \,|\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ сведоче $\mathrm{pwt}(\bar{a}/BD) \geqslant n$ (што повлачи $\mathrm{wt}(\bar{a}/B) \geqslant n$).

$$D\,C_1\ldots C_n \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} B\langle A\,\bar{a}\rangle \quad \text{и} \quad B \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} \bar{a}\langle A\rangle$$

због транзитивности повлаче

$$B \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} D\,C_1\ldots C_n\,\bar{a}\langle A\rangle.$$

Због монотоности имамо $B \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} C_1\ldots C_n\,\langle D\rangle$ одакле, због независности $\{C_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$ над D и леме 8.2.3(1), следи да је $\{C_i\,|\,1\leqslant i\leqslant n\}$ независан над BD. Важи и $\bar{a} \mathop{\not\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} C_i\langle BD\rangle$; у супротном из

$$\bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} C_i\langle BD\rangle \quad \text{и} \quad \bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} BD\langle A\rangle$$

следи $\bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} BDC_i\langle A\rangle$ што је у супротности са $\bar{a} \mathop{\not\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} C_i\langle D\rangle$. Овим смо доказали да $\{C_i\,|\,i\leqslant n\}$ сведоче $\mathrm{pwt}(\bar{a}/BD)\geqslant n$ што завршава доказ тврђења. $\square$

Лема 8.3.4 Ако је M $\aleph_0$-засићен тада је $\mathrm{pwt}(\bar{a}/M)=\mathrm{wt}(\bar{a}/M)$.

Доказ: Према последици 7.2.4 постоји коначан $A\subset M$ такав да је $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ стационаран и $\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$ његова слободно раширење. Према тврђењу 8.3.3 тежина се не мења у слободним раширењима па је $\mathrm{wt}(\bar{a}/A)=\mathrm{wt}(\bar{a}/M)=n$. Нека је $D\supset A$ такав да је

$$\bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} D\langle A\rangle \quad \text{и} \quad \mathrm{pwt}(\bar{a}/D)=n.$$

Без умањења општости, можемо претпоставити да је D коначан. Тада због засићености постоји $D'\subset M$ такав да је $\mathrm{tp}(D'/A)=\mathrm{tp}(D/A)$. Како је $\mathrm{tp}(\bar{a}/A)$ стационаран и

$$\bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} D\langle A\rangle \quad \text{и} \quad \bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} D'\langle A\rangle,$$

закључујемо $\mathrm{tp}(\bar{a}D/A)=\mathrm{tp}(\bar{a}D'/A)$, што повлачи $\mathrm{pwt}(\bar{a}/D)=\mathrm{pwt}(\bar{a}/D')=n$. Применом тврђења 8.3.3(1) добијамо $\mathrm{pwt}(\bar{a}/A)\leqslant\mathrm{pwt}(\bar{a}/M)$, одакле следи $\mathrm{pwt}(\bar{a}/M)=n$. $\square$

Лема 8.3.5 Ако је $\bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} \bar{b}\,\langle A\rangle$, ако је $M\supset A$ $\aleph_0$-засићен и ако важи:

$$M \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} \bar{a}\bar{b}\,\langle A\rangle,$$

онда је сваки од $\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$, $\mathrm{tp}(\bar{b}/M)$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/M)$ слободно раширење свог сужења на A и важи:

$$\mathrm{pwt}(\bar{a}/M)=\mathrm{wt}(\bar{a}/A) \quad \mathrm{pwt}(\bar{b}/M)=\mathrm{wt}(\bar{b}/A) \quad \text{и} \quad \mathrm{pwt}(\bar{a}\bar{b}/M)=\mathrm{wt}(\bar{a}\bar{b}/A).$$

Доказ: Из $M \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} \bar{a}\bar{b}\,\langle A\rangle$ следи

$$\bar{a}\bar{b} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} M\,\langle A\rangle, \quad \bar{a} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} M\,\langle A\rangle \quad \text{и} \quad \bar{b} \mathop{\smile\hspace{-0.9em}\downarrow}^{MR} M\,\langle A\rangle,$$

па су $\mathrm{tp}(\bar{a}/M)$, $\mathrm{tp}(\bar{b}/M)$ и $\mathrm{tp}(\bar{a}\bar{b}/M)$ слободна раширења својих сужења на A. Како се тежина чува у слободним раширењима, и како је за типове над $\aleph_0$-засићеним моделима тежина једнака предтежини имамо:

$$\mathrm{pwt}(\overline{a}/M)=\mathrm{wt}(\overline{a}/A)\quad \mathrm{pwt}(\overline{b}/M)=\mathrm{wt}(\overline{b}/A)\quad \text{и}\quad \mathrm{pwt}(\overline{a}\overline{b}/M)=\mathrm{wt}(\overline{a}\overline{b}/A). \qquad \square$$

Тврђење 8.3.6 (Адитивност тежине)
Ако је $\overline{a} \downfree^{MR}\overline{b}\ \langle A\rangle$, онда је $\mathrm{wt}(\overline{a}\overline{b}/A)=\mathrm{wt}(\overline{a}/A)+\mathrm{wt}(\overline{b}/A)$.

Доказ: Нека је $M\supset A$ $\aleph_0$-засићен модел такав да је $M \downfree^{MR}\ \overline{a}\overline{b}\ \langle A\rangle$; приметимо да такав M увек постоји: узмемо $\aleph_0$-засићен $M'\supseteq A$ и M који реализује слободну екстензију $\mathrm{tp}(M'/A)$ над $\bar{a}\bar{b}$. Из $M \downfree^{MR}\ \overline{a}\overline{b}\ \langle A\rangle$ и $\overline{a} \downfree^{MR}\overline{b}\ \langle A\rangle$ није тешко извести

$$\overline{a} \downfree^{MR}\overline{b}\ \langle M\rangle.$$

Такође

$$\overline{a}\overline{b}\ \downfree^{MR}M\ \langle A\rangle,\quad \overline{a}\ \downfree^{MR}M\ \langle A\rangle\ \text{ и }\ \overline{b}\ \downfree^{MR}M\ \langle A\rangle,$$

па су $\mathrm{tp}(\overline{a}/M)$, $\mathrm{tp}(\overline{b}/M)$ и $\mathrm{tp}(\overline{a}\overline{b}/M)$ слободна раширења својих сужења на A. Како се тежина чува у слободним раширењима наше тврђење је еквивалентно са

$$\mathrm{wt}(\overline{a}\overline{b}/M)=\mathrm{wt}(\overline{a}/M)+\mathrm{wt}(\overline{b}/M).$$

(а) Покажимо прво да важи $\mathrm{wt}(\overline{a}\overline{b}/M)\geqslant \mathrm{wt}(\overline{a}/M)+\mathrm{wt}(\overline{b}/M)$:

Нека је $\mathrm{wt}(\overline{a}/M)=n$ и $\mathrm{wt}(\overline{b}/M)=m$. Како је тежина типа над $\aleph_0$-засићеним моделом једнака његовој предтежини, имамо $\mathrm{pwt}(\overline{a}/M)=n$, па постоји $\{C_1,\dots,C_n\}$ који то сведочи:

$$\{C_1,\dots,C_n\}\ \text{ је независан над } M\ \text{ и }\ C_i\ \not\downfree^{MR}\ \overline{a}\ \langle M\rangle.$$

Сваки тип има слободно раширење па тип $\mathrm{tp}(C_1,\dots,C_n/M\overline{a})$ има реализацију независну од $\overline{b}$ (над $M\bar{a}$). Не умањујући општост, можемо претпоставити да је баш $C_1,\dots,C_n$ та реализација. Дакле,

$$C_1,\dots,C_n\ \downfree^{MR}\ \overline{b}\ \ \langle \overline{a}M\rangle,$$

што заједно са горњим условом $\overline{a}\ \downfree^{MR}\ \overline{b}\ \langle M\rangle$ даје

$$\overline{b}\ \downfree^{MR}\ \overline{a}\,C_1,\dots,C_n\ \ \langle M\rangle.$$

Сада бирамо сведока за $\mathrm{pwt}(\overline{b}/M)=m$, нека је то $\{D_1,\dots,D_m\}$

$$\{D_1,\dots,D_m\}\ \text{ је независан над } M\ \text{ и }\ \overline{b}\ \not\downfree^{MR}\ D_i\ \langle M\rangle.$$

Како ове особине D_i-ова зависе искључиво од $M\,\overline{b}$ можемо их пронаћи тако да важи и:

$$D_1,\dots,D_m\ \downfree^{MR}\bar{a}\,C_1,\dots,C_n\ \langle M\overline{b}\rangle.$$

Показаћемо да $\{C_1,\dots,C_n,D_1,\dots,D_m\}$ сведочи $\mathrm{wt}(\bar{a}\,\overline{b}/M)\geqslant n+m$.

1. $\bar{a}\,\bar{b} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} D_i\langle M\rangle$ следи из $\bar{b} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} D_i\langle M\rangle$. Слично и за $\bar{b}\bar{a} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C_j\langle M\rangle$. Према томе $\bar{a}\bar{b}$ зависи од сваког елемента скупа $\{C_1,\dots,C_n,D_1,\dots,D_m\}$ над M.

2. Из $D_1,\dots,D_m \perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{a}\,C_1,\dots,C_n\ \langle M\bar{b}\rangle$ и $\bar{b} \perp\!\!\!\perp^{MR}\ \bar{a}\,C_1,\dots,C_n\ \ \langle M\rangle$, на основу симетрије и транзитивности закључујемо

$$\bar{a}\,C_1,\dots,C_n \perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{b}\,D_1,\dots,D_m\langle M\rangle,$$

одакле следи $D_1,\dots,D_m \perp\!\!\!\perp^{MR} C_1,\dots,C_n\langle M\rangle$, а одавде је, по леми 8.2.3(3), скуп $\{C_1,\dots,C_n,D_1,\dots,D_m\}$ независан над M.

Овим смо доказали да $\{C_1,\dots,C_n,D_1,\dots,D_m\}$ сведочи $\mathrm{wt}(\bar{a}\,\bar{b}/M) \geqslant n+m$, чиме је доказ овог дела завршен.

(б) Покажимо да важи $\mathrm{wt}(\bar{a}\bar{b}/M) \leqslant \mathrm{wt}(\bar{a}/M)+\mathrm{wt}(\bar{b}/M)$:

Нека је $\mathrm{wt}(\bar{a}/M)=n$, $\mathrm{wt}(\bar{b}/M)=m$ и нека је $\{C_i \,|\, i\in I\}$ независан над M и:

$$C_i \not\perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{a}\bar{b}\langle M\rangle \quad \text{за свако } i\in I.$$

Довољно је доказати $|I|\leqslant m+n$; одатле следи $\mathrm{pwt}(\bar{a}\,\bar{b}/M)\leqslant m+n$ и, како је тежина типа над M једнака његовој предтежини, жељени закључак следи.

Нека је $J\subseteq I$ максималан такав да је $C_J \perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{a}\ (M)$. Тада:

$$\bar{a} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C_i\ \langle MC_J\rangle \quad \text{за сваки } i\in I\setminus J;$$

у супротном, због транзитивности, бисмо имали $\bar{a} \perp\!\!\!\perp^{MR} C_{J\cup\{i\}}\langle A\rangle$ што противречи максималности. Даље, како је $\{C_i\,|\,i\in I\setminus J\}$ независан над MC_J (по леми 8.2.3(2)) и како сваки његов елемент зависи од $\bar{a}$ над MC_J мора важити: $|I\setminus J|\leqslant \mathrm{wt}(\bar{a}/M)=n$.

Из независности $\{C_j\,|\,j\in J\}$ над M и $\bar{a} \perp\!\!\!\perp^{MR} C_J\langle M\rangle$ следи (по леми 8.2.3(1)) независност $\{C_j\,|\,i\in j\}$ над $M\bar{a}$. Даље, за сваки $j\in J$ важи

$$C_j \not\perp\!\!\!\perp^{MR}\ \bar{b}\ \ \langle M\bar{a}\rangle\ ;$$

У супротном, из $C_j \perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{b}\langle M\bar{a}\rangle$ и $C_j \perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{a}\langle M\rangle$ због транзитивности следи $C_j \perp\!\!\!\perp^{MR} \bar{a}\bar{b}\langle M\rangle$, што је супротно избору C_j-ова.

Дакле, $\{C_j\,|\,i\in j\}$ је независан над $M\bar{a}$ и сваки његов елемент зависи од $\bar{b}$ над $M\bar{a}$. Одавде следи $|J|\leqslant \mathrm{wt}(\bar{b}/M)=m$.

Све укупно $|I|=|I\setminus J|+|J|\leqslant n+m$. □

Глава 9

Димензија модела $\aleph_1$-категоричне теорије

У овом поглављу фиксирамо $\aleph_1$-категоричну теорију T и њен универзални домен $\mathbb{U}$. По конвенцији из дела 3.3, у коме смо увели појам универзума, a, b, c означавају елементе а $\overline{a}$, $\overline{b}$,.... n-торке елемената универзума. $A, B, C, ...$ су мали подскупови а $M, N...$ мали елементарни подмодели универзума. Према Морлијевој теореми T је ω-стабилна и нема Вотове парове. Једна од последица ω-стабилности је да за сваки модел M постоји јако минимална формула са параметрима из M. Посебно, када је M_0 прост модел постоји јако минимална формула $\Phi(x, \overline{a})$ где $\overline{a} \in M_0$. Како је прост модел уједно и атомичан $\mathrm{tp}(\overline{a})$ је изолован. Такође, јака минималност се чува при аутоморфизмима па је за сваки $\overline{b}$ који реализује $\mathrm{tp}(\overline{a})$ формула $\Phi(x, \overline{b})$ јако минимална. Фиксирајмо ову ситуацију кроз ово поглавље:

1. $p^* = \mathrm{tp}(\overline{a})$ је изолован;
2. $\Phi(x, \overline{a})$ је јако минимална формула;
3. За $\overline{b} \in N$ са $\dim_{\overline{b}}(N)$ означавамо acl-димензију (над $\overline{b}$) скупа $\Phi(N, \overline{b})$. $\dim_{\overline{b}}(N)$ је димензија модела N у односу на $\overline{b}$.

Подсетимо да је acl-димензија (над $\overline{b}$) скупа $\Phi(N, \overline{b})$ величина најмањег (у односу на инклузију) $I \subseteq \Phi(N, \overline{b})$ таквог да је $\mathrm{acl}(I \cup \{\overline{b}\}) = \Phi(N, \overline{b})$ и да је I acl-независан над $\overline{b}$: за сваки $c_i \in I$ важи $c_i \notin \mathrm{acl}(I \cup \{\overline{b}\} \setminus \{c_i\})$.

Како је p^* изолован он је реализован у сваком моделу N, па сваки модел има бар једну димензију. Главни резултат овог поглавља (и целог рада) је да димензија модела не зависи од избора реализације типа p^* у моделу, па $\dim_{\overline{b}}(N)$ можемо означити и са $\dim(N)$.

Теорема (Болдвин, Лахлан) $\dim_{\overline{a}}(M)$ не зависи од избора $\overline{a} \in p^*(M)$. $\square$

9.1 Тотално категоричне теорије

T је тотално категорична ако је κ-категорична за сваки бесконачан кардинал κ. Наша T је већ непребројиво категорична па до тоталне надостаје само $\aleph_0$-категоричност. Подсетимо да је T $\aleph_0$-категорична ако и само ако нема неизолованих типова над коначним доменом. Још један еквивалентан услов је коначност Линденбаумових алгебри, што значи да за сваки коначан скуп $A_0 \subseteq M$ постоји само коначно много A_0-дефинабилних подскупова структуре M.

Лема 9.1.1 Следећи искази су еквивалентни:

1) T је $\aleph_0$-категорична теорија;

2) Ако је $\models p^*(\overline{a})$, онда је $\mathrm{acl}(A) \cap \Phi(\mathbb{U}, \overline{a})$ коначан за све коначне $A \supseteq \overline{a}$;

3) $\dim_{\overline{a}}(M) \geqslant \aleph_0$ за све $M \models T$ и све $\overline{a} \in p^*(M)$.

Доказ: „$1 \Rightarrow 2$” : Нека је T $\aleph_0$-категорична, $\overline{a}$ реализује p^* и $A \supseteq \overline{a}$ коначан скуп. Пошто има само коначно много формула над A са једном слободном промељивом, то је и коначан број алгебарских формула, а самим тим и $\mathrm{acl}(A) \cap \Phi(\mathbb{U}, \overline{a})$ мора бити коначан.
„$2 \Rightarrow 3$” : Претпоставимо да важи 2. Нека је $M \models p^*(\overline{a})$ и нека је I над $\overline{a}$ база скупа $\Phi(M, \overline{a})$; тада је $\Phi(M, \overline{a}) \subseteq \mathrm{acl}(I \cup \{\overline{a}\})$. Ако би I био коначан онда би, на основу 2, и $\mathrm{acl}(I \cup \{\overline{a}\})$ и $\Phi(M, \overline{a})$ били коначни. Како $\Phi(x, \overline{a})$ није алгебарска формула, $\Phi(M, \overline{a})$ је бесконачан па и $I = \dim_{\overline{a}}(M)$ мора бити бесконачан.
„$3 \Rightarrow 1$” : Нека су M и N пребројиви модели теорије T и нека су $a \in p^*(\overline{M})$ и $b \in p^*(\overline{N})$. Нека је I над $\overline{a}$ база скупа $\Phi(M, \overline{a})$ и нека је J над $\overline{b}$ база скупа $\Phi(N, \overline{b})$. Ако важи 3, онда је $|M| = |N| = |I| = |J| = \aleph_0$ па постоји елементарно пресликавање f које слика $I \cup \overline{a}$ у $J \cup \overline{b}$. Пошто је M прост над $I \cup \overline{a}$ и N прост над $J \cup \overline{b}$, онда се f може продужити до изоморфизма структура M и N. Дакле, T је $\aleph_0$-категорична теорија. □

Лема 9.1.2 Претпоставимо да је $\overline{a} \in p^*(M)$ такав да је $\dim_{\overline{a}}(M)$ бесконачан. Тада је M засићен.

Доказ: Нека је I база (над $\overline{a}$) за $\Phi(M, \overline{a})$, тада је $|I| = \aleph_0$. Нека је N пребројив засићен модел, нека $\overline{b} \in p^*(N)$ и нека је J база (над $\overline{b}$) за $\Phi(N, \overline{b})$. Због засићености је $|J| = \aleph_0$. Тада постоји парцијално елементарно пресликавање које $I \cup \{\overline{a}\}$ пресликава на $J \cup \{\overline{b}\}$. Оно се продужава до изоморфизма M и N. □

Из претходне леме изводимо један део Болдвин-Лахланове теореме.

Теорема 9.1.3 Ако је $\dim_{\overline{a}}(M)$ бесконачан за неки $\overline{a} \in p^*(M)$ тада је $\dim_{\overline{a}}(M) = \dim_{\overline{b}}(M)$ за сваки $\overline{b} \in p^*(M)$.

Доказ: Из $|M| > \aleph_0$ и кардиналног рачуна следи $\dim_{\overline{b}}(M) = |M|$ за сваки $\overline{b} \in M$, па остаје да докажемо случај када је $|M| = \aleph_0$. Преостаје да покажемо да је $\dim_{\overline{b}}(M)$ увек бесконачан. У супротном, ако је I коначна база за $\Phi(M, \overline{b})$, тада јединствен неалгебарски 1-тип у $S_1(I\overline{a})$ који садржи $\Phi(x, \overline{b})$ није реализован у M. Како је, према претходној леми, M засићен, то није могуће. □

9.2 Коначност тежине типова

У овом делу ћемо доказати главни технички резултат овог поглавља: коначност тежине типова у непребројиво категоричним теоријама. Заправо, ову особину имају типови у ма којој ω-стабилној теорији, али је доказ тог тврђења знатно комплекснији.

Лема 9.2.1

(1) Ако је $\mathrm{tp}(a/B)$ јако минималан, онда

$$a \mathrel{\not\downarrow}^{MR} A \; \langle B \rangle \qquad \text{акко} \qquad a \in \mathrm{acl}(AB);$$

(2) Ако је $\mathrm{tp}(a/B)$ јако минималан, онда је $\mathrm{wt}(a/B) = 1$;

(3) Ако је $\{a_1, a_2, ...a_n\}$ независан над B и сваки $\mathrm{tp}(a_i/B)$ је јако минималан, тада $\mathrm{wt}(a_1 a_2 ... a_n/B) = n$.

Доказ:

(1) Ако је $\mathrm{tp}(a/B)$ јако минималан, онда је $MR(a/B) = 1$. Следећи услови су еквивалентни:

$$a \mathrel{\not\downarrow}^{MR} A\langle B\rangle; \quad MR(a/B) > MR(a/AB); \quad MR(a/AB) = 0; \quad a \in \mathrm{acl}(AB).$$

(2) Нека је $\mathrm{tp}(a/B)$ јако минималан и нека је $B' \supseteq B$ такав да $a \mathrel{\downarrow}^{MR} B'\langle B\rangle$. Довољно је показати да је $\mathrm{pwt}(a/B') \leqslant 2$. Нека су C_1, C_2 независни над B' и претпоставимо $a \mathrel{\not\downarrow}^{MR} C_1\langle B'\rangle$. Тада, због (1), имамо $a \in \mathrm{acl}(B'C_1)$.

Према особини I_6 из $C_2 \mathrel{\downarrow}^{MR} C_1\langle B'\rangle$ следи

$$C_2 \mathrel{\downarrow}^{MR} \mathrm{acl}(B'C_1)\langle B'\rangle,$$

па, како $a \in \mathrm{acl}(B'C_1)$, закључујемо $C_2 \mathrel{\downarrow}^{MR} a \; (B')$ и $\mathrm{pwt}(a/B') \leqslant 2$.

(3) Следи из другог дела ове леме и адитивности тежине (тврђење 8.3.6). □

Ако је $\mathrm{tp}(a/D)$ јако минималан и $\phi(x) \in \mathrm{tp}(a/D)$ јако минимална формула тада за сваку формулу $\varphi(x)$ са параметрима из D тачно једна од формула

$$\phi(x) \wedge \varphi(x) \quad \text{и} \quad \phi(x) \wedge \neg\varphi(x)$$

је алгебарска. Друга је неалгебарска (има бесконачан скуп решења) и мора бити садржана у $\mathrm{tp}(a/D)$. Отуд следећа лема:

Лема 9.2.2 Ако је $\mathrm{tp}(a/D)$ јако минималан тада за сваку формулу $\varphi(x, \overline{y})$ са параметрима из D:

За свако $\bar{d} \in D$ важи: $\varphi(x, \overline{d}) \in \mathrm{tp}(a/D)$ ако и само ако $\models (\exists^{\infty} x)\varphi(x, \overline{d})$[1].$\square$

Лема 9.2.3 Слободна екстензија јако минималног неизолованог типа је неизолована.

Доказ: Нека је $p \in S_1(A)$ јако минималан, неизолован тип и нека је $q \in S_1(B)$ његова слободна екстензија. Изаберимо јако минималну формулу $\phi(x) \in p$. Како је p неизолован, он је тачка нагомилавања (у $S_1(A)$) типова мањег MR-ранга, па постоји низ различитих типова $\{p_n \,|\, n \in \omega\} \subset S_1(A)$ који садрже $\phi(x)$ и имају мањи MR-ранг од p; самим тим су алгебарски. Дакле, p је тачка нагомилавања скупа $\{p_n \mid n < \omega\}$, будући да је то једини неалгебарски тип који садржи $\phi(x)$.

Нека је $q_n \in S(B)$ екстензија p_n. q_n-ови су различити, па постоји тачка нагомилавања скупа $\{q_n \,|\, n \in \omega\}$ која не може бити алгебарски тип па мора имати MR-ранг бар 1; како садржи $\phi(x)$ она има MR-ранг 1. Будући да је q једини неалгебарски тип у $S_1(B)$ који садржи $\phi(x)$, закључујемо да је то q. q је неизолован будући да је тачка нагомилавања q_n-ова. $\square$

Лема 9.2.4 Ако је $p = \mathrm{tp}(b/\overline{d})$ јако минималан и неизолован, а $\mathrm{tp}(b\overline{d}/C)$ изолован тада $b\overline{d} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C$.

Доказ: Како је $\mathrm{tp}(b\overline{d}/C)$ изолован тада је и $\mathrm{tp}(b/\overline{d}C)$ изолован. С друге стране, према претходној леми, свако слободно проширење типа p је неизоловано, па $\mathrm{tp}(b/\overline{d}C)$ није слободно проширење типа p. Значи: $b \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C\langle \overline{d} \rangle$ одакле, због монотоности, следи $b\overline{d} \not\perp\!\!\!\perp^{MR} C$. $\square$

Тврђење 9.2.5 Сваки тип има коначну тежину.

Доказ: Како се тежина не мења у слободним проширењима, довољно је доказати да сваки тип над $\aleph_0$-засићеним моделом има коначну тежину. Зато фиксирајмо $\aleph_0$-засићен модел M и $\overline{a} \notin \mathrm{acl}(M)$ и докажимо да је $\mathrm{wt}(\bar{a}/M)$ коначан број.

Фиксирајмо јако минималну формулу $\phi(x)$ са параметрима из M и јако минимални тип $q \in S_1(M)$ који садржи $\phi(x)$. Нека је N прост над $M\overline{a}$. Како T нема Вотових парова, N је минималан над $M \cup \phi(N)$. Али над $M \cup \phi(N)$ постоји и конструктибилан (самим тим и прост, атомски) модел

[1] Ово значи да је $\mathrm{tp}(a/D)$ дефинабилан.

који се може утопити у N, па закључујемо да је N конструктибилан (прост, атомичан) и минималан над $M \cup \phi(N)$. Зато је $\mathrm{tp}(\bar{a}/M\phi(N))$ изолован па постоји $\bar{b} \in \phi(N) \setminus M$ такав да је $\mathrm{tp}(\bar{a}/M\bar{b})$ изолован. Претпоставимо да је изабран $\bar{b} = b_1, ..., b_n$ најмање могуће дужине. Доказаћемо $\mathrm{wt}(\bar{a}/M) \leqslant n$.

(1) У првом кораку доказа тврдимо:

(а) $\mathrm{tp}(b_i/M) = q$ је јако минималан;

(б) $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ је независан над M;

(в) $\mathrm{tp}(\overline{a}/Mb_1...b_n)$ је изолован.

(а) и (в) следе непосредно из избора $\bar{b}$. Да докажемо (б), претпоставимо да $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ није независан над M. Тада неки b_i зависи од осталих над M, рецимо $b_n \not\perp^{MR} b_1...b_{n-1}\langle M\rangle$. Према леми 9.2.1(1), $b_n \in \mathrm{acl}(b_1...b_{n-1}M)$ па је $\mathrm{tp}(b_n/b_1...b_{n-1}M)$ изолован. Како је и $\mathrm{tp}(\overline{a}/Mb_1...b_n)$ изолован, по транзитивности изолованости, имамо да је $\mathrm{tp}(\overline{a}b_n/Mb_1...b_{n-1})$ изолован, па је и $\mathrm{tp}(\overline{a}/Mb_1...b_{n-1})$ изолован, што противречи минималности n. Овим је део (б) доказан.

(2) У другом кораку доказујемо:

$$\text{за свако } C\text{:} \quad \text{из} \quad C \perp^{MR} b_1...b_n\langle M\rangle \quad \text{следи} \quad C \perp^{MR} b_1...b_n\overline{a}\langle M\rangle.$$

Приметимо да је довољно доказати ово тврђење за коначне C. Нека је $\theta(\overline{x}, y_1, ..., y_n) \in \mathrm{tp}(\overline{a}b_1...b_n/M)$ таква да

$$\theta(\overline{x}, b_1, ..., b_n) \vdash \mathrm{tp}(\overline{a}/Mb_1...b_n).$$

Претпоставимо, супротно тврђењу, да је $\overline{c}$ такав да

$$\overline{c} \perp^{MR} b_1...b_n \langle M\rangle \quad \text{и} \quad \overline{c} \not\perp^{MR} b_1...b_n\overline{a} \langle M\rangle.$$

Одавде, због транзитивности, закључујемо $\overline{c} \not\perp^{MR} \overline{a} \langle Mb_1...b_n\rangle$, што повлачи да $\mathrm{tp}(\overline{c}/Mb_1...b_n)$ има бар два различита проширења у $S(Mb_1...b_n\overline{a})$ ($\mathrm{tp}(\overline{c}/Mb_1...b_n\overline{a})$ и слободно проширење). Због тога и $\mathrm{tp}(\overline{a}/Mb_1...b_n)$ има бар два проширења у $S(Mb_1...b_n\overline{c})$, па постоји формула $\psi(\overline{x}, y_1...y_n, \overline{z})$ таква да:

$$\models \psi(\overline{a}, b_1...b_n, \overline{c}) \quad \text{и}$$

$$\models (\exists \overline{x}_1\overline{x}_2)(\theta(\overline{x}_1, b_1, ..., b_n) \wedge \theta(\overline{x}_2, b_1, ..., b_n) \wedge \psi(\overline{x}_1, b_1...b_n, \overline{c}) \wedge \neg\psi(\overline{x}_2, b_1...b_n, \overline{c})).$$

Обележимо ову формулу са $\varphi(b_1, ..., b_n, \overline{c})$. Како је $b_1, ..., b_n$ независан над M и $\overline{c} \perp^{MR} b_1...b_n\langle M\rangle$, на основу симетрије и транзитивности следи

$$b_n \perp^{MR} \overline{c}(Mb_1...b_{n-1}),$$

па је $\mathrm{tp}(b_n/Mb_1...b_{n-1}\overline{c})$ јако минимално проширење типа q и важи:

$$\models (\exists^\infty y_n)(\varphi(b_1, ..., b_{n-1}, y_n, \overline{c}) \wedge \phi(y_n)$$

(где је $\phi \in q$ јако минимална формула). Поновивши ово резоновање још $n-1$ пут добијамо:

$$\models (\exists^\infty y_1)...(\exists^\infty y_n)\varphi(y_1...y_{n-1}, y_n, \overline{c}) \wedge \phi(y_1) \wedge ... \wedge \phi(y_n)).$$

Ова формула је задовољена и у M па постоји $\overline{c}' \in M$ такав да:

$$\models (\exists^\infty y_1)...(\exists^\infty y_n)\varphi(y_1...y_{n-1}, y_n, \overline{c}') \wedge \phi(y_1) \wedge ... \wedge \phi(y_n)).$$

Применом леме 9.2.2 добијамо:

$$\models (\exists^\infty y_2)...(\exists^\infty y_n)\varphi(b_1, y_2, ...y_{n-1}, y_n, \overline{c}') \wedge \phi(y_2) \wedge ... \wedge \phi(y_n)).$$

Применивши лему 9.2.2 још $n-1$ пут добијамо:

$$\models \varphi(b_1, b_2, ...b_n, \overline{c}').$$

Значи, важи:

$$\models (\exists \overline{x}_1 \overline{x}_2)(\theta(\overline{x}_1, b_1, ..., b_n) \wedge \theta(\overline{x}_2, b_1, ..., b_n) \wedge \psi(\overline{x}_1, b_1...b_n, \overline{c}') \wedge \neg\psi(\overline{x}_2, b_1...b_n, \overline{c}')).$$

Нађимо $\overline{a}_1, \overline{a}_2$ који сведоче егзистенцијалне кванторе:

$$\models \theta(\overline{a}_1, b_1, ..., b_n) \wedge \theta(\overline{a}_2, b_1, ..., b_n) \wedge \psi(\overline{a}_1, b_1...b_n, \overline{c}') \wedge \neg\psi(\overline{a}_2, b_1...b_n, \overline{c}').$$

Како $\theta(\overline{x}, b_1, ..., b_n) \vdash \mathrm{tp}(\overline{a}/Mb_1...b_n)$ имамо: $\mathrm{tp}(\overline{a}_1/Mb_1...b_n) = \mathrm{tp}(\overline{a}_2/Mb_1...b_n)$, што је, због $\overline{c}' \in M$, у контрадикцији са

$$\models \psi(\overline{a}_1, b_1...b_n, \overline{c}') \wedge \neg\psi(\overline{a}_2, b_1...b_n, \overline{c}').$$

Овим смо завршили други корак доказа.

Приметимо да из (а) и (б), према леми 9.2.1(3), следи $\mathrm{wt}(b_1, \ldots, b_n/M) = n$. Преостаје да докажемо $\mathrm{pwt}(\overline{a}/M) \leqslant n$ (будући да је pwt = wt над M). Зато претпоставимо да је $\{C_1, \ldots, C_{n+1}\}$ независан над M и докажимо да неки C_i не зависи од $\bar{a}$ над M.

Прво, како је $\mathrm{pwt}(b_1, \ldots, b_n/M) = n$, за неко i важи

$$C_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{MR} b_1, \ldots, b_n \quad \langle M \rangle.$$

У другом кораку смо доказали да онда мора важити и

$$C_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{MR} \overline{a} b_1, \ldots, b_n \langle M \rangle,$$

одакле, због монотоности, следи $C_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{MR} \overline{a}\langle M \rangle$, чиме је доказ завршен. $\square$

9.3 Доказ Болдвин-Лахланове теореме

Лема 9.3.1 Нека је M пребројив модел и $\overline{a}, \overline{b} \in M$ реализују $p^\star$. Ако је $\dim_{\overline{a}}(M) \neq \dim_{\overline{b}}(M)$ тада M реализује сваки тип из $S(T)$.

Доказ: Како је M пребројив то је $|\dim_{\overline{c}}(M)| \leqslant \aleph_0$ за свако $\overline{c}$ из M које рализује $p^\star$. Како је $\dim_{\overline{a}}(M) \neq \dim_{\overline{b}}(M)$, бар један од њих мора бити коначан. Шта више, за свако $\overline{a}$ из M које реализује $p^\star$, $\dim_{\overline{a}}(M)$ је коначно. Нека је $\overline{c}$ из M такво да је $i = \dim_{\overline{c}}(M)$ минимална могућа димензија. Нека је I база за $\Phi(M, \overline{c})$. Тада је M прост над $I \cup \overline{c}$.

⌈ Лема: За свако n постоји $\overline{d}$ из M које реализује $p^\star$ такво да је $\dim_{\overline{d}}(M) \geqslant n$.

Претпоставимо супротно, тј. да је скуп

$$\{\dim_{\overline{d}}(M) \,|\, \overline{d} \text{ је из } M \text{ и } \overline{d} \text{ реализује } p^\star\}$$

ограничен. Нека је његов максимум $\dim_{\overline{d}}(M) = j$ и нека је J база за $\Phi(M, \overline{d})$ за неко $\overline{d}$. Како је $\dim_{\overline{a}}(M) \neq \dim_{\overline{b}}(M)$, због минималности i и максималности j, важи $i < j$. Нека је J' подскуп базе J моћи i и $N \subset M$ прост модел над $J' \cup \overline{d}$. Приметимо да је $\mathrm{tp}(I\,\overline{c}) = \mathrm{tp}(J'\,\overline{d})$, па су, због јединствености простих модела, M и N су изоморфни. Зато постоји низ $\overline{d'}$ из N такав да је $\dim_{\overline{d'}}(N) = j$. Како T нема Вотове парове то не може бити $\Phi(M, \overline{d'}) \subseteq N$, па мора бити $\dim_{\overline{d'}}(M) > \dim_{\overline{d'}}(N) = j$, што је у контрадикцији са претпоставком о максималности j. ⌋

Нека је p произвољан елемент скупа $S(T)$, $\overline{c}$ његова реализација и N прост модел над $\overline{c}$. Даље, нека је $\overline{d}$ реализација $p^\star$-а у N. Тада је N прост над $J \cup \overline{d}$ где је J база за $\Phi(N, \overline{d})$ над $\overline{d}$. Постоји коначан $J_0 \subseteq J$ такав да је $q = \mathrm{tp}(\overline{c}/J_0 \cup \overline{d})$ изолован. По леми, постоји $\overline{b}$ из M које реализује $p^\star$ и $\overline{b}$-независан скуп $K \subseteq \Phi(M, \overline{b})$ за који важи $|K| = |J_0|$. Отуд, постоји елементарно пресликавање које слика $\overline{d}$ у $\overline{b}$ и J_0 у K. q је изолован формулом са параметрима из $J_0 \cup \overline{d}$ па је $f(q)$ изолован формулом са параметрима из $K \cup \overline{b}$. Стога га реализује неки $\overline{c'}$ из M. $\overline{c'}$ реализује p у M. □

Наредно тврђење комплетира доказ Болдвин-Лахланове теореме.

Тврђење 9.3.2 Нека је M пребројив модел и $\overline{a}, \overline{b}$ реализације типа $p^\star$ у моделу M. Тада је $\dim_{\bar{a}}(M) = \dim_{\bar{b}}(M)$.

Доказ: Нека је M такав да $\dim_{\bar{a}'}(M) \neq \dim_{\bar{b}'}(M)$ за неке $\bar{a}', \bar{b}'$ који реализују p^*. Тада, према теореми 9.1.3, $\dim_{\bar{a}}(M)$ мора бити коначан за свако $\overline{a}$ које реализује $p^\star$. Фиксирајмо такво $\bar{a}$ и нека је I одговарајућа база; тада је M прост над $I\overline{a}$. Означимо $\bar{a}\,I$ са $\bar{d}$ и приметимо да јако минималан тип

$q \in S_1(\bar{d})$ који садржи $\Phi(x, \bar{a})$ није реализован у M (у супротном I не би била база). Закључујемо да је q неизолован. Нека $\bar{b}$ реализује q.

Нека је $\mathrm{wt}(\overline{d}) = n$ и нека је $r \in S(\emptyset)$ тип независног (над $\emptyset$) скупа реализација $\mathrm{tp}(b\overline{d})$ дужине $n+1$. Према леми 9.3.1, сваки тип је реализован у M, па постоје $b_1\overline{d}_1, b_2\overline{d}_2, ..., b_{n+1}\overline{d}_{n+1}$ који реализују r. Како је M прост над $\bar{d}$, то за сваки i је $\mathrm{tp}(b_i\overline{d}_i/\overline{d})$ изолован.

Значи $p = \mathrm{tp}(b_i\overline{d}_i)$ је јако минималан и неизолован, а $\mathrm{tp}(b_i\overline{d}_i/\bar{d})$ је изолован, па можемо да применимо лему 9.2.4: $b_i\overline{d}_i \not\perp^{MR} \bar{d}$. Према томе, $\bar{d}$ зависи од сваког од $n+1$ независних елемената скупа $\{b_1\overline{d}_1, b_2\overline{d}_2, ..., b_{n+1}\overline{d}_{n+1}\}$ што је у супротности са $\mathrm{wt}(\overline{d}) = n$. □

Као последицу Болдвин-Лахланове теореме имамо прецизан опис типа изоморфизама модела наше теорије. Разликујемо два случаја:

1) T је тотално категорична.

У овом случају постоји елементаран ланац модела

$$M_{\aleph_0} \prec M_{\aleph_1} \prec M_{\aleph_2} \prec ....$$

такав да је $\dim M_{\aleph_\alpha} = \aleph_\alpha$ и сваки модел теорије T је изоморфан тачно једном $M_{\aleph_\alpha}$.

2) T није $\aleph_0$-категорична.

У овом случају, нека је M_0 прост модел и $\dim(M_0) = n_0$. Према леми 9.1.1, n_0 је природан број. Нека је $\bar{a} \in p^*(M_0)$ и I acl-база (над $\overline{a}$) за $\Phi(M_0, \overline{a})$. Тада је јединствен неалгебарски тип $q \in S_1(I\overline{a})$ који садржи $\Phi(x, \overline{a})$ јако минималан и неизолован (будући да није реализован у M_0). Нека је b реализација типа q и нека је M_1 прост над $I\,\overline{a}\,b$. Према леми 9.2.3, тип q_1 који је слободно проширење типа q у $S_1(I\,b\overline{a})$ (и јединствен неалгебарски тип који садржи $\Phi(x, \overline{a})$) је неизолован, па је испуштен у M_1. Закључујемо да је $I\,b$ acl-база (над $\overline{a}$) за $\Phi(M_1, \overline{a})$. Према томе $\dim(M_1) = n_0 + 1$. На овај начин конструишемо елементаран ланац модела

$$M_{n_0} \prec M_{n_0+1} \prec M_{n_0+2} \prec .... \prec M_{\aleph_0} \prec M_{\aleph_1} \prec ...$$

такав да је $\dim M_\kappa = \kappa$ и сваки модел теорије T је изоморфан тачно једном M_κ.

Теорема (Болдвин-Лахлан) Непребројиво категорична теорија има или један или $\aleph_0$ неизоморфних пребројивих модела. □

Литература

[1] J.T.Baldwin, A.H.Lachlan, On strongly minimal sets, J.Symbolic Logic, vol.36(1971), pp.79-96.

[2] J.T.Baldwin, *Fundamentals of Stability Theory*, Springer–Verlag 1988

[3] Steven Buechler, *Essential Stability Theory*, Springer–Verlag berlin Heidelberg 1996.

[4] C.C.Chang, H.J.Keisler, *Model Theory*, Third Edition, North–Holland 1990.

[5] W.Hodges, *Model Theory*, Cambridge University Press 1993.

[6] D.Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer–Verlag New York, Inc 2002.

[7] W.E.Marsh, *On ω_1-categorical and not ω-categorical theories*, PhD Thesis, Darmouth College, 1966.

[8] Ž.Mijajlović, *An Introduction to Model Theory*, University of Novi Sad, Institute of Mathematics 1987.

[9] M.Morley, Categoricity in power, Trans. Amer. Math. Soc., vol.114(1965), pp.514-538.

[10] M.Morley, Countable models of $\aleph_1$-categorical theories, Israel J.Math., vol.5(1965), pp.65-72.

[11] A.Perović, A.Jovanović, B.Veličković, *Teorija skupova*, Matematički fakultet Beograd 2007.

[12] G.E.Sacks, *Saturated Model Theory*, W. A. Benjamin, Inc. 1972.

[13] S.Shelah, *Classification Theory and the Number of Nonisomorphic Models*, North-Holland, 1978, XVI+544 pp.

[14] S.Shelah, L.Harrington, M.Makkai, A proof of Vaught's conjecture for totally transcendental theories, Israel J.Math. vol.49(1984), pp.259-278.