

Математички факултет – Београд

Мастер рад

Луротова теорема и последице

Студент : Самарџић Филип

Ментор : Калајџић Гојко

Садржај

1)	Факторизација у прстену	2
2)	Интегрални елементи над прстеном	7
3)	Локализација	10
4)	Валуациони прстени	13
5)	Проста трансцендентна раширења	20
	а. Луротова теорема	22
	б. Даље последице Луротове теореме	25
6)	Литература	29

1. Факторизација у прстену

У овом раду, уколико се не нагласи другачије, са R ћемо означавати комутативну област целих.

За прави елемент p прстена R кажемо да је *прост* ако за свака два елемента $a, b \in R$ важи следеће :

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b.$$

За прави не-нула елемент p који није инверзибилан у прстену R кажемо да је *нерастављив* или *атом* у прстену R ако задовољава услов :

$$p = ab \Rightarrow a \in R^* \vee b \in R^*,$$

то јест, ако је сваки његов делитељ или 1 или p .

Атомична факторизација елемента $r \in R$ је сваки производ

$$r = \prod r_i,$$

где су r_i атоми. За прстен кажемо да је *атомичан* ако сваки његов елемент има бар једну атомичну факторизацију.

Прстен је са *једнозначном факторизацијом* ако су сваке две атомичне факторизације произвољног елемента тога прстена једнаке (до на редослед и придруженост атома-фактора).

Пример 1: Прстен $Z[\sqrt{-5}]$ није са једнозначном факторизацијом.

Доказ. Узмимо, за пример, елемент:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5}) \cdot (1 - \sqrt{-5}).$$

Треба показати да су елементи $a = 1 + \sqrt{-5}$ и $b = 1 - \sqrt{-5}$ атоми у том прстену. Норме чинилаца су, редом: 4, 9, 6, 6.

Ако би елемент a имао не-тривијалан делилац у прстену $Z[\sqrt{-5}]$, онда би норма тог елемента морала бити не-тривијалан делилац броја 6. Обзиром да једначине $a^2 + 5b^2 = 2$ и $a^2 + 5b^2 = 3$ није могуће решити у Z , закључујемо да је a заиста атом. Слично и за елемент b .

Теорема 1

Атомичан домен R је са једнозначном факторизацијом ако и само ако су у њему сви атоми и прости.

Примедба: Свака два елемента домена R са једнозначном факторизацијом имају и НЗД, а тиме и НЗС. Управо та чињеница чини домен R Гаусовим доменом.

Лема 1

Сваки прост елемент комутативног домена R је прост и у прстену полинома $R[X]$.

Доказ. Нека је p прост елемент у домену R . Тада је pR прост идеал у домену R , што значи да је $\bar{R} = R/pR$ домен. Приметимо природни епиморфизам R на $\bar{R}$:

$$\pi: a \mapsto \bar{a} = a + pR.$$

Сада приметимо „на“ епиморфизам одговарајућих прстена полинома:

$$\Phi: u = \sum a_r X^r \mapsto \sum \bar{a}_r X^r.$$

Домен пресликавања Φ је $F = R[X]$, док је кодомен $\bar{F} = \bar{R}[X]$. Није тешко закључити да је $\ker \Phi = pF$, што нас доводи до закључка да је F/pF домен. Прва теорема о изоморфизмима нам каже да је $F/\ker \Phi \cong \text{Im } \Phi$, што примењено на наш случај даје $F/pF \cong \bar{F}$ је домен. То сада значи да је pF прост идеал у F , па је p просто у $F = R[X]$.

Лема 2

Нека је K поље разломака комутативног домена R са једнозначном факторизацијом. Тада је примитиван полином f атом у прстену $R[X]$ ако и само ако је атом у прстену $K[X]$.

Доказ. Нека су полиноми g и h примитивни над R . Докажимо да је и њихов производ gh такође примитиван над R . Претпоставимо супротно, дакле нека постоји атом p из R , такав да $p \mid gh$. Међутим, обзиром да је прстен R са једнозначном факторизацијом, атоми и прости елементи се у њему подударају (теорема 1), што даље значи да је p и прост у прстену R . Према леми 1, p је прост и у прстену $R[X]$. Дакле, $p \mid g$ или $p \mid h$, што је контрадикција.

Нека је сада $\alpha \in K$, дакле може се представити у облику $\alpha = \frac{a}{b}$, $a, b \in R$. Такође, за сваки полином f из $K[X]$, постоје елементи $a, b \in R$ и примитиван полином g из $R[X]$, такви да је $f = \frac{a}{b}g$, односно $bf = ag$. При том, у прстену $R[X]$, полином g није дељив атомима из R , па важи и:

$$f \in R[X] \Leftrightarrow b \mid a \text{ у прстену } R.$$

Ако је полином f над R растављив у $K[X]$, онда је и $f = \frac{a}{b}gh$, где су $a, b \in R$, а g, h су примитивни над R . Тада је и полином gh примитиван над R . Обзиром да је $f \in R[X]$, знамо да $b \mid a$ у прстену R , односно $\frac{a}{b} = c \in R$.

Сада је због примитивности полинома $f = cgh$ још и $c \in R^*$, што тачно значи да је примитиван полином f над R растављив у прстену $R[X]$ ако и само ако је растављив у прстену $K[X]$.

Примедба: Уколико је домен R са једнозначном факторизацијом, из претходне две леме следи да су атоми прстена $R[X]$ управо сви атоми самог домена R , као и сви његови примитивни елементи који су атоми и у прстену $K[X]$.

Лема 3

Ако је K поље, онда је прстен полинома $K[X]$ главноидеалски.

Доказ. Означимо са U произвољан идеал у прстену $K[X]$. Ако је $U = \{0\}$, U јесте главни идеал. Уколико U садржи још неки елемент осим нуле, онда од свих осталих елемената изаберимо онај најмањег степена, на пример, p . Сада сваки полином $u \in U$ можемо представити у облику $u = pq + r$, где је r мањег степена од p . Лева страна је елемент идеала U , pq такође, дакле мора бити и $r \in U$. Подсетимо да је p елемент најмањег степена идеала U који је различит од нуле, а r је мањег степена од p . Дакле, $r = 0$. Стога закључујемо да p дели сваки елемент идеала U , то јест, $U = \langle p \rangle$.

Лема 4

Сваки главноидеалски прстен је са једнозначном факторизацијом.

Доказ. Докажимо прво да је сваки елемент a (који није инверзибилан или нула) главноидеалског домена R дељив неким атомом. Наиме, ако само a није атом, оно има бар једну праву факторизацију $a = p_1 a_1$. Поред тога је и $aR \subset a_1 R$. Слично, ако a_1 није атом, онда $a_1 = p_2 a_2$, па и $a_1 R \subset a_2 R$. Наставимо ли поступак, формираћемо ланац главних идеала прстена R :

$$aR \subset a_1 R \subset a_2 R \subset \dots \subset a_n R \subset \dots$$

При том је и унија U тих идеала такође идеал. Обзиром да је прстен R главноидеалски, знамо да постоји неко p за које је $U = pR$. Наравно, тада елемент p припада бар једном од идеала $a_r R$. Нека је n најмањи природан број са тим својством. Тада имамо :

$$pR \subset a_n R \subset U = pR ,$$

што значи да је ту и $a_n R = pR$. То посебно значи да је $a_n R$ последњи члан истакнутог ланца. Тиме је a_n и један атом који дели произвољни елемент a . Процес је коначан (мало пре доказано), и отуда лема у целости.

Теорема 2

Ако је прстен R са једнозначном факторизацијом, онда се то својство чува и у прстену полинома $R[X]$.

Доказ. Нека је K поље разломака над R . Тада сваки полином $f \in R[X]$ има факторизацију $f = cg \cdots h$, у којој је $c = \frac{a}{b} \in K$, док су $g, \dots, h$ примитивни полиноми над R . Сви ти примитивни полиноми су атоми у прстену $K[X]$, па стога и у прстену $R[X]$. Као и у лема 2, сада је и $c \in R$. На основу леме 1, атомична факторизација елемента c у R је и његова атомична факторизација у прстену $R[X]$. Сада можемо закључити да је прстен $R[X]$ атомичан.

Означимо са p било који атом прстена $R[X]$ који дели производ wz . Ако је p у R , онда је према теорему 1 p просто и у $R[X]$. Ако p није у R , онда из леме 2 следи да је p примитиван полином који је атом и у $K[X]$. За атоме прстена $K[X]$ знамо да су прости (*), стога можемо закључити да у њему важи $p \mid w$ или $p \mid z$.

Ако $p \mid w$, онда је $w = pq$ за неко $q \in K[X]$. Због $w \in R[X]$, слично као у доказу леме 2 следи да је $w = cvp$, за неко $c \in R$ и неки примитиван полином v над R . Отуда p дели w и у прстену $R[X]$, па су сада сви атоми прстена $R[X]$ и прости. Применимо ли теорему 1 на прстен $R[X]$, закључићемо да је тај прстен са једнозначном факторизацијом.

(*) Лема 3 говори да је $K[X]$ главноидеалски прстен, па и са једнозначном факторизацијом (лема 4), а затим теорема 1 говори да се атоми и прости подударају.

2. Интегрални елементи над прстеном

Дефиниција 1: Елемент x прстена R је *интегралан* над његовим потпрстеном A ако поништава бар један моничан полином из прстена $A[X]$.

Теорема 1

Нека је R прстен, A неки потпрстен од R и нека је x произвољан елемент прстена R . Следећи услови су еквивалентни:

- (1) Постоје $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ такви да је $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$.
- (2) Прстен $A[x]$ је A -модул коначног типа.
- (3) Постоји потпрстен B прстена R који садржи A и x и који је A -модул коначног типа.

Доказ. Означимо са M A -подмодул прстена R генерисан са $1, x, x^2, \dots, x^n$. Према (1) закључујемо да $x^n \in M$. Множењем (1) са x^j , добијамо:

$$x^{n+j} = -a_{n-1}x^{n+j-1} - \dots - a_0x^j.$$

Штавише, индукцијом по j закључујемо да $x^{n+j} \in M$, за све $j \geq 0$. Пошто је прстен $A[x]$ један A -модул генерисан са $x^k, k \geq 0$, видимо да је, у ствари, $A[x] = M$. Отуда (1) повлачи (2). Јасно је да (2) повлачи (3). Докажимо још да (3) повлачи (1).

Нека је $(y_1, \dots, y_n)$ коначан скуп генератора за B (као модул над A), што значи да је $B = Ay_1 + \dots + Ay_n$. Обзиром да је $x \in B$ и да је $B \leq R$, следи да је $xy_i \in B$, за свако $i = 1, \dots, n$. Дакле, имамо и :

$$xy_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j,$$

за све $i = 1, \dots, n$ и $a_{ij} \in A$. То значи да :

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij}x - a_{ij})y_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Посматрајмо претходно као систем од n хомогених једначина по $(y_1, \dots, y_n)$. Означимо са d детерминанту $\det(\delta_{ij}x - a_{ij})$. Према Крамеровом правилу знамо да је $dy_i = 0$, за свако i . То, уопште, значи да је и $db = 0$, за све $b \in B$; па, посебно за $b = 1$ имамо $d \cdot 1 = 0$; стога је и $d = 0$. Међутим, d је очигледно моничан полином по x , обзиром да се израз највећег степена добија кад развијемо производ $\prod_{i=1}^n (x - a_{ii})$ изрази на главној дијагонали. Стога, заиста, (3) повлачи (1).

Истакнимо са f баш онај моничан полином који x поништава (не треба испустити из вида да је $x \in R$, док је $f \in A[X]$). Једначину $f(X) = 0$ зовемо *једначином интегралне зависности* елемента x над прстеном A .

Лако се може доказати да је скуп свих елемената прстена R који су интегрални над прстеном A један потпрстен прстена R који садржи A .

Дефиниција 2: Нека је R прстен, а A његов потпрстен. Прстен састављен од свих елемената прстена R који су интегрални над A означимо са A' и зваћемо га *интегралним затворењем* прстена A у прстену R . Интегрално затворење прстена A у његовом пољу разломака K зваћемо само *интегралним затворењем прстена A* .

Дефиниција 3: Прстен A је *интегрално затворен* ако је област целих и ако је једнак свом интегралном затворењу. Другим речима, у пољу разломака K , осим елемената самог прстена A , нема интегралних елемената над A .

Пример 1: Свака област целих у којој свака два елемента имају највећи заједнички делилац је интегрално затворена.

Доказ. Означимо са A полазну област целих и са K поље разломака од A . Нека је $x \in K$ који је интегралан над A . Нека је

$$(1) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0, \quad a_i \in A$$

једначина интегралне зависности елемента x над A . Представимо сада $x = \frac{a}{b}$, где су $a, b \in A$ и још су a и b узајамно прости (на овом месту користимо претпоставку да свака два елемента прстена A имају највећи заједнички дилац). Заменом x -а у (1) и множењем са b^n , добијамо:

$$(2) \quad a^n + b(a_{n-1}a^{n-1} + \dots + a_1ab^{n-2} + a_0b^{n-1}) = 0.$$

Обзиром да је A област целих, закључујемо да $b \mid a^n$. Знамо да су a и b узајамно прости, па можемо закључити да $b \mid a$. То нам говори да је $x \in A$, стога је и прстен A интегрално затворен.

Овај пример нам говори да је једна широка класа прстена (области целих у којима постоји НЗД) интегрално затворена. Сужавањем те класе можемо закључити да су области целих са једнозначном факторизацијом, главни домени, Еуклидски прстени, Нетерини и Дедекиндови прстени такође интегрално затворени.

3. Локализација

Дефиниција 1: Нека је R област целих. За скуп $S \subset R$ кажемо да је *мултипликативан* ако задовољава следеће услове:

- Не садржи нулу ($0 \notin S$)
- Садржи јединицу ($1 \in S$)
- Затворен је за множење ($a, b \in S \Rightarrow ab \in S$).

Дефиниција 2: Скуп $R[S^{-1}] = \{as^{-1} : a \in R, s \in S\}$ зовемо *локализацијом* прстена R по мултипликативном скупу S .

Примедба: Инверзе елемената из скупа S можемо пронаћи у пољу разломака прстена R .

Пример 1: Свака локализација има структуру прстена.

Доказ. Означимо локализацију са $L = R[S^{-1}]$. Покажимо да су збир и производ свака два елемента из L такође елементи L . Нека су $\frac{a}{s_1}$ и $\frac{b}{s_2}$ елементи L (дакле, $a, b \in R$ и $s_1, s_2 \in S$).

$$\frac{a}{s_1} + \frac{b}{s_2} = \frac{as_2 + bs_1}{s_1s_2}$$

$$\frac{a}{s_1} \cdot \frac{b}{s_2} = \frac{ab}{s_1s_2}$$

Закључак следи из мултипликативности скупа S ($s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1s_2 \in S$). Јасно се види да су и збир и производ два елемента из L одговарајућег облика (бројилац је из прстена R , док је именилац из скупа S).

Локализацију $R[S^{-1}]$ најчешће означавамо и са R_S .

Теорема 1

Нека је R прстен, а P његов прост идеал. Тада је скуп $S = R \setminus P$ мултипликативан. Још више, локализација R_P тада има тачно један максималан идеал.

Доказ. Прво, требало би образложити ознаку R_P . Знамо да се локализација врши по мултипликативном скупу, а такође знамо да прост идеал P није обавезно такав скуп. Међутим, није тешко закључити да његов комплемент $S = R \setminus P$ јесте мултипликативан. Наиме, обзиром да је P прост идеал у R , знамо да важи:

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \vee b \in P.$$

Контрапозиција је:

$$a \notin P \wedge b \notin P \Rightarrow ab \notin P.$$

Преласком на комплемент добијамо:

$$a \in S \wedge b \in S \Rightarrow ab \in S,$$

што је управо доказ својства мултипликативности скупа $S = R \setminus P$. Дакле, када то не може да изазове даљу забуну, под ознаком R_P сматраћемо скуп $R_{R \setminus P}$.

Испитајмо сада елементе локализације R_P (посебну пажњу ћемо обратити на инверзibilне елементе тога прстена - R_P^*), као и идеал у том прстену генерисан скупом P :

$$R_P = \left\{ \frac{a}{u} : a \in R, u \in R \setminus P \right\}.$$

Приметимо да су сви елементи скупа $S = R \setminus P$ инверзibilни у прстену R_P ($1 \in R, u \in R \setminus P \Rightarrow \frac{1}{u} = u^{-1} \in R_P$). Такође, истакнимо да је прстен R један потпрстен прстена R_P ($a \in R, 1 \in R \setminus P \Rightarrow \frac{a}{1} = a \in R_P$). Дакле, $P \triangleleft R \subset R_P$ (P је још и прост). Међутим, само P не мора увек бити идеал прстена R_P . Стога, посматрајмо идеал прстена R_P генерисан скупом P , $\langle P \rangle = M$.

Истакнути идеал смо означили са M јер наслућујемо да је то баш једини максимални идеал у прстену R_P . Елементи идеала M су облика:

$$\frac{a}{u} \cdot p, \quad a \in P, u \in R \setminus P, p \in P,$$

(користимо управо да је M идеал прстена R_P генерисан скупом P). Међутим, обзиром да је P и идеал прстена R , знамо да је $ap \in P$. Отуда закључак:

$$\langle P \rangle = M = \left\{ \frac{p}{u}, p \in P, u \in R \setminus P \right\}.$$

Испитајмо елементе прстена R_P који нису у идеалу M . Наиме, ако је $v \notin M$, онда је $v = \frac{b}{u}, b \in R \setminus P, u \in R \setminus P$. Одмах можемо закључити да је и $v^{-1} = \frac{u}{b}$ такође елемент скупа $R_P \setminus M$ (специјално, инверзибилан је у прстену R_P), из чега следи да идеал M садржи све елементе који нису инверзибилни у прстену R_P . Отуда и теорема у целости јер управо закључена чињеница говори и да је M максималан идеал прстена R_P и једини такав.

Дефиниција 3: Домен R је *локални* ако је у њему сваки идеал коначно генерисан (прстен је *Нетерин*) и ако има тачно један максималан идеал.

4. Валуациони прстени

Дефиниција 1: За комутативан прстен R кажемо да је *валуациони* ако за свака два његова елемента a и b важи да $a \mid b$ или $b \mid a$.

Дефиниција 1': Нека је K поље разломака над облашћу целих R . Ако за сваки елемент $u \in K$ важи $u \in R$ или $u^{-1} \in R$, онда за прстен R кажемо да је *валуациони*.

Пример 1: Локализација прстена Z по комплементу простог идеала $U = 2Z$ је валуациони прстен.

Доказ. Испитајмо елементе задате локализације:

$$L = Z_{2Z} = \left\{ \frac{a}{s}, a \in Z, s \notin 2Z \right\}.$$

Дакле, прстен L се састоји од целобројних разломака у којима именилац није дељив са два. Треба приметити да је скуп L^* (скуп инверзibilних елемената прстена L) управо скуп свих целобројних разломака код којих ни бројилац није дељив са два. Другим речима, прстен L можемо представити и у облику:

$$L = \{ \alpha \cdot 2^m, \alpha \in L^*, m \geq 0 \},$$

дакле, сваки елемент је производ једног инверзibilног елемента и степена броја два. Сада, ако имамо два елемента прстена L , рецимо $a = \alpha \cdot 2^m$ и $b = \beta \cdot 2^n$ (где су $\alpha, \beta \in L^*$), одмах видимо да је бар један од разломака $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot 2^{m-n}$ и $\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot 2^{n-m}$ елемент прстена L (количник два инверзibilна елемента је поново инверзibilан и још је бар једна од неједнакости испуњена : $m - n \geq 0$ или $n - m \geq 0$).

Дефиниција 2: Нека су $R \subset T$ прстени и нека је $I \triangleleft R$. Кажемо да идеал I *преживљава* у прстену T ако : $I \neq R \Rightarrow IT \neq T$.

Лема 1

Нека су $R \subset T$ прстени и нека је елемент λ инверзибилан у прстену T . Произвољан прави идеал прстена R означимо са I . Тада идеал I преживљава у $R[\lambda]$ или у $R[\lambda^{-1}]$.

Доказ. Претпоставимо супротно, дакле нека I не преживљава ни у једном од два поменути прстена. Тада имамо:

$$a_0 + a_1\lambda + \dots + a_n\lambda^n = 1, \quad a_i \in I$$

$$b_0 + b_1\lambda^{-1} + \dots + b_m\lambda^{-m} = 1, \quad b_i \in I.$$

Обезбедимо још да смо изабрали најмање n које одговара нашим потребама, али такво да је $n \geq m$. Помножимо ли другу једначину са λ^n , добијамо:

$$(1 - b_0)\lambda^n = b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_m\lambda^{n-m}.$$

Претходни резултат можемо увести у прву једначину помножену са $1 - b_0$:

$$(1 - b_0)a_0 + (1 - b_0)a_1\lambda + \dots + a_n(b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_m\lambda^{n-m}) = 1 - b_0,$$

што нас доводи до контрадикције јер би онда $n - m$ било најмање које одговара нашим потребама, а претпоставили смо да је баш n такво.

Лема 2

Нека је R прстен и нека је $\lambda \in R$. Тада је λ^{-1} интегрално над R ако и само ако је $\lambda^{-1} \in R[\lambda]$.

Доказ. Претпоставимо да је λ^{-1} интегрално над R , односно:

$$\lambda^{-n} + a_{n-1}\lambda^{-(n-1)} + \dots + a_1\lambda^{-1} + a_0 = 1.$$

Помножимо претходну једнакост са λ^n и после сређивања имамо:

$$\lambda(a_{n-1} + a_{n-2}\lambda + \dots + a_1\lambda^{n-2} + a_0\lambda^{n-1}) = -1,$$

$$\lambda^{-1} = -(a_{n-1} + a_{n-2}\lambda + \dots + a_1\lambda^{n-2} + a_0\lambda^{n-1}),$$

што нам управо говори да је $\lambda^{-1} \in R[\lambda]$. Обзиром да се корак, по корак можемо вратити уназад, имамо и доказ леме у целости.

Теорема 1

Нека је K поље, а R потпрстен тога поља. Поред тога, са I означимо произвољан прави идеал прстена R . Тада постоји валуациони домен V , са својством да је $R \subset V \subset K$, да је K поље разломака над V и да идеал I преживљава у V .

Доказ. Истакнимо скуп парова (R_α, I_α) који имају следећа својства: $R \subset R_\alpha \subset K$, $I_\alpha \subset R_\alpha$, $I_\alpha \neq R$, $I \subset I_\alpha$. У тај скуп можемо увести релацију парцијалног уређења на следећи начин:

$$(R_\alpha, I_\alpha) < (R_\beta, I_\beta) \Leftrightarrow R_\alpha \supset R_\beta \wedge I_\alpha \supset I_\beta.$$

Према Цорновој лемии, у истакнутом скупу парова постоји максимални елемент, односно пар (V, J) . Не треба испустити из вида да се при одређивању максималног елемента чувају сва својства истакнутих парова. Сада још треба доказати да је V валуациони прстен са пољем разломака K . Дакле, треба доказати да : $\lambda \in K \Rightarrow \lambda \in V \vee \lambda^{-1} \in V$.

Претпоставимо супротно. Тада према лемии 1 знамо да идеал J преживљава у $V[\lambda]$ или у $V[\lambda^{-1}]$. Међутим, који год од та два случаја био тачан, пар (V, J) не би био максимални елемент скупа парова.

Теорема 2

Нека је R интегрално затворена област целих са пољем разломака K . Тада је $R = \bigcap V_\alpha$, где су V_α сви валуациони прстени између R и K .

Доказ. Нека је $\mu \in V_\alpha$, кад α прође све прстене између R и K . Претпоставимо да μ није интегрално над R и узмимо да је $\lambda = \mu^{-1}$. Према лемии 2 знамо да λ није инверзибилно у $R[\lambda]$, што нас доводи до закључка да (λ) - идеал генерисан елементом λ - преживљава у $R[\lambda]$. Према теоремии 1, прстен $R[\lambda]$ се може проширити до валуационог домена $V \subset K$, с тим да (λ) преживљава и у домену V . Међутим, μ смо дефинисали тако да припада свим валуационим доменима који садрже R , дакле $\mu = \lambda^{-1} \in V$. То нас доводи до контрадикције јер то тачно значи да (λ) не преживљава у V . Дакле, μ јесте интегрално над R , а обзиром да је R интегрално затворен, тада је и $\mu \in R$.

Примедба: И обрнуто, сваки такав пресек је интегрално затворен јер је сваки валуациони прстен интегрално затворен (у примеру 2.1 смо доказали да је свака област целих у којој свака два елемента имају НЗД интегрално затворена, а јасно је да сваки валуациони домен задовољава овај критеријум); док знамо да је пресек интегрално затворених домена интегрално затворен.

Лема 3

Сваки валуациони домен има тачно један максималан идеал.

Доказ. Означимо са M произвољни максимални идеал валуационог домена V . Изаберимо елемент $b \notin M$ (могуће је јер $1 \notin M$). Тада знамо да је:

$$M + (b) = V,$$

јер је M максималан идеал. Стога, за неко $a \in M$ и $x, y \in V$ важи :

$$ax + by = 1.$$

Обзиром да је V валуациони домен, знамо да $a \mid b$ или $b \mid a$. Ако би било $a \mid b$, онда је $b = aq \in M$, што је контрадикција са $b \notin M$. Дакле, знамо да $b \mid a$ из чега следи да $b \mid 1$, односно да је b инверзибилно. Другим речима, у максималном идеалу M се налазе сви неинверзибилни елементи домена V , што тај идеал чини и јединим максималним.

Пример 2: Сваки коначно генерисан идеал у валуационом домену је главни.

Доказ. Нека је $U = (a_1, \dots, a_n)$ идеал валуационог домена V . Елементе $a_1, \dots, a_n$ можемо поређати тако да $a_1 \mid a_2, a_2 \mid a_3, \dots, a_{n-1} \mid a_n$. Тада знамо да $(a_n) \subset (a_{n-1}) \subset \dots \subset (a_1)$ и одмах закључујемо да је $U = (a_1)$.

Теорема 3

Нека је R главноидеалски домен са пољем разломака K . Означимо са V произвољан валуациони домен између R и K . Тада је $V = R_P$, за неки прост идеал P у R .

Доказ. Означимо са M једини максимални идеал од V и са $P = M \cap R$. Приметимо да је скуп $R \setminus P$ мултипликативан скуп са јединицом (па је P и прост идеал). Ако је $s \in R \setminus P$, онда је $s^{-1} \in V$ (јер би у супротном било $s \in M$, па и $s \in P$). Подсетимо се да је $R_P = \{as^{-1}, a \in R, s \in R \setminus P\}$ и одмах можемо извести закључак $R_P \subset V$.

Изаберимо елемент $v \in V, v \notin R_P$. Уопштење Примера 1 нам говори да је R_P и валуациони домен, дакле $v^{-1} \in R_P$, односно $v^{-1} = \frac{a}{s}$ где је $a \in R$, док је $s \in R \setminus P$. Ако би било $a \notin P$, онда би елемент $\frac{a}{s}$ био инверзибилан у R_P , дакле $v \in R_P$, што је контрадикција. Стога је сигурно $a \in P$, па и $a \in M$. Обзиром да је M идеал у V , и елемент $av = s$ је елемент тога идеала M . Сада је и $s \in P$, што је контрадикција. Дакле, скуп $V \setminus R_P$ је празан, односно $V \subset R_P$.

Теорема 4

Нека је K поље, x неодређена и нека је $K(x)$ поље рационалних функција по неодређеној x . Означимо са V произвољан валуациони домен између K и $K(x)$ коме је поље разломака управо $K(x)$ (с тим да $V \neq K(x)$). Тада је $V = K[x]_P$, где је $P = (f)$, f нерастављив или $V = K[x^{-1}]_{(x^{-1})}$.

Доказ. Обзиром да је домен V валуациони, знамо да је $x \in V$ или $x^{-1} \in V$. Ако је $x \in V$, онда је $V \supset K[x]$ и тада је облика $V = K[x]_P$ (према теорему 3). Облик идеала P следи из чињенице да је прстен полинома над пољем главноидеалски.

Ако је, пак, $x \notin V$, онда је $V \supset K[x^{-1}]$ и облика је $K[x^{-1}]_Q$ (према теорему 3). У доказу теореме 3.1 смо приметили да су сви елементи скупа $K[x] \setminus Q$ инверзибилни у локализацији $K[x^{-1}]_Q$. Из услова $x \notin V$ можемо закључити да елемент x^{-1} није инверзибилан у $K[x^{-1}]_Q$ и тиме мора бити елемент скупа Q . Обзиром да је x^{-1} прост елемент, а прстен $K[x]$ главноидеалски, мора бити $Q = (x^{-1})$.

Пример 3: Елементи прстена $V = K[x^{-1}]_{(x^{-1})}$ су облика $\frac{p(x)}{q(x)}$, где је полином $q(x)$ не мањег степена од полинома $p(x)$.

Доказ. Елементи прстена V су облика :

$$\frac{u(x^{-1})}{v(x^{-1})},$$

где полином $v(x^{-1})$ није дељив полиномом x^{-1} . Простом трансформацијом можемо закључити да су сви елементи облика :

$$\frac{u_0(x^{-1})}{v(x^{-1})} \cdot x^{-k},$$

где ни полином $u_0(x^{-1})$ није дељив полиномом x^{-1} (односно, елемент $\frac{u_0(x^{-1})}{v(x^{-1})}$ је инверзибилан у локализацији V). Да полином по x^{-1} не би био дељив са x^{-1} , неопходно је и довољно да му слободан члан буде различит од нуле. Дакле :

$$u_0(x^{-1}) = a_0 + a_1x^{-1} + \dots + a_nx^{-n}, \quad a_0 \neq 0,$$

$$v(x^{-1}) = 1 + b_1x^{-1} + \dots + b_mx^{-m}.$$

Полиноме u_0 и v можемо представити као количнике полинома по :

$$u_0(x^{-1}) = \frac{a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n}{x^n} = \frac{a(x)}{x^n}$$

$$v(x^{-1}) = \frac{b_m + b_{m-1}x + \cdots + x^m}{x^m} = \frac{b(x)}{x^m}$$

Полином a је степена n , док је полином b степена m . Сада можемо приметити да је сваки елемент локализације V облика :

$$\frac{u_0(x^{-1})}{v(x^{-1})} \cdot x^{-k} = \frac{\frac{a(x)}{x^n}}{\frac{b(x)}{x^m}} \cdot \frac{1}{x^k} = \frac{a(x) \cdot x^m}{b(x) \cdot x^{m+k}}$$

Полином у бројиоцу је степена $m + n$, док је полином у имениоцу степена $m + n + k$. Отуда и тврђење овог примера.

5. Проста трансцендентна раширења

Чисто трансцендентно раширење поља k , коначног степена d је, на пример, управо поље $k(x_1, \dots, x_d)$ - поље рационалних функција по d независних неодређених. Обратићемо највише пажње на случај $d = 1$. Тада имамо поље рационалних функција једне променљиве $k(x)$, које се назива и **просто трансцендентно раширење**.

Елементи поља $k(x)$ су облика:

$$\lambda = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f, g \in k[x], \quad (f, g) = 1,$$

и при том је полином $g(x)$ још и моничан. Дефинишемо *степен* од λ као $\deg \lambda = \max\{\deg f, \deg g\}$.

Надаље ћемо увек сматрати да је сваки елемент поља $k(x)$ задат на овај начин (полиноми $f(x)$ и $g(x)$ су ко-прости и још је $g(x)$ моничан).

Тврђење 1

Нека је $k(x)$ просто трансцендентно раширење и нека је λ било који елемент тога раширења који није у k . Тада је елемент λ трансцендентан над k , x је алгебарско над $k(\lambda)$ и још је $[k(x):k(\lambda)] = \deg \lambda$.

При том, полином $f(X) - \lambda g(X)$ је минимални полином од x над $k(\lambda)$.

Доказ. Нека је λ задат у одговарајућем облику. Тада је x решење једначине:

$$(1) \quad f(X) - \lambda g(X) = 0$$

која је степена $n = \deg \lambda$. Нека је b_i не-нула коефицијент у $g(X)$, а a_i одговарајући коефицијент у $f(X)$; тада је одговарајући коефицијент у (1) $a_i - \lambda b_i$. Тај коефицијент није једнак 0 (у супротном би било $\lambda = \frac{a_i}{b_i} \in k$,

што је супротно претпоставци да $\lambda \notin k$. Стога, не ишчезавају сви коефицијенти у (1), па је заиста x алгебарско над $k(\lambda)$. Ако би, којим случајем, λ било алгебарско над k , онда би и x било алгебарско над k (управо смо показали да је x алгебарско над $k(\lambda) = k$); одатле имамо и да је λ трансцендентно над k .

Остало је још да докажемо да је $f(X) - \lambda g(X)$ нерастављив (као такав ће бити и минимални полином од x над $k(\lambda)$). Претпоставимо супротно. Према лема 1.2, елемент је растављив у прстену $k(\lambda)[X]$ *акко* је растављив у прстену $k[\lambda][X]$. Тада је:

$$f(X) - \lambda g(X) = p * q, \quad p, q \in k[\lambda][X]$$

$$p = p(X, \lambda), \quad q = q(X, \lambda).$$

Лева страна је полином који је линеаран по λ . Стога можемо закључити да је (на пример) $p = p(X)$, а q је линеаран по λ . Дакле, полиноми $f(X)$ и $g(X)$ имају заједнички делилац $p(X)$, а то је супротно претпоставци да су та два полинома ко-проста.

Сада знамо да је $f(X) - \lambda g(X)$ минимални полином од x над $k(\lambda)$. Степен тог полинома је управо $n = \deg \lambda$. То управо значи да је $[k(x):k(\lambda)] = \deg \lambda$, одакле и тврђење у целости.

Последица

Елемент λ генерише $k(x)$ *акко* је степена 1, односно ако је облика:

$$\lambda = \frac{ax + b}{cx + d},$$

где су $a, b, c, d \in k$, такви да је $ad - bc \neq 0$ (овај услов нам гарантује да λ неће бити елемент полазног поља k , што је један од услова Тврђења 1). Ова последица је важна јер сада знамо да опишемо све елементе који генеришу $k(x)$, што нам *de facto* омогућава да истакнемо све аутоморфизме количничког прстена $k(x)/k$.

Луротова теорема

Нека је $k(x)$ просто трансцендентно раширење. Тада свако поље K са својством $k \subset K \subseteq k(x)$ мора бити облика $K = k(\lambda)$, за неко λ које је трансцендентно над k .

Доказ. Обзиром да је k прави подскуп од K , можемо изабрати $\lambda \in K \setminus k$. Управо доказано Тврђење 1 нам сугерише да је x алгебарско над $k(\lambda)$, стога можемо закључити и да је x алгебарско над K , дакле има минимални полином над тим пољем. Истакнимо тај полином:

$$(2) \quad \varphi(X) = X^n + \lambda_1 X^{n-1} + \dots + \lambda_n, \quad \lambda_i \in K.$$

Овде су сви λ_i рационалне функције од x (јер је x алгебарско над $k(\lambda)$), стога полином (2) можемо помножити најмањим заједничким садржаоцем полинома $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и тако добијамо полином:

$$(3) \quad \Phi(X, x) = v_0(x)X^n + v_1(x)X^{n-1} + \dots + v_n(x).$$

$v_i(x)$ су полиноми по x без заједничког не-константног делиоца, што нас доводи до закључка да је Φ нерастављив као полином по X . Обзиром да је x трансцендентно над k , $\lambda_i = \frac{v_i}{v_0}$ нису сви у k . Дакле, можемо изабрати $\lambda_i \notin k$ и нека је $m = \deg \lambda_i$ (знамо још и да је $m > 0$). На овом месту поново зовемо упомоћ Тврђење 1 које нам каже да је x степена m над $k(\lambda_i)$, док нам (2) каже да је x степена n над K . Наслућујемо да је $m = n$. Докажимо то сада.

Прво, приметимо следећу чињеницу:

$$(*) \quad m = [k(x):k(\lambda_i)] = [k(x):K][K:k(\lambda_i)] = n[K:k(\lambda_i)].$$

Стога је $[K:k(\lambda_i)] = \frac{m}{n}$. Сада знамо да n дели m . Знамо и да је $\lambda_i = \frac{f(x)}{g(x)}$, где је $m = \max\{\deg f, \deg g\}$. Дакле, полином $f(X) - \lambda_i g(X)$ није нула-полином, али има нулу x , што значи да је дељив полиномом $\varphi(X)$ који је минимални полином од x . Дакле,

$$f(X) - \lambda_i g(X) = q(X) \cdot \varphi(X).$$

Помножимо ли претходну једнакост са $g(x)$ добијамо:

$$(4) \quad f(X)g(x) - g(X)f(x) = Q(X, x) \cdot \Phi(X, x).$$

Подсетимо се да је Φ нерастављив као полином по X . Приметимо сада да је лева страна једнакости (4) степена m по x , док је на десној страни

полином Φ степена бар m по x (m је дефинисано избором λ_i који фигурише у Φ). То значи да полином Q не зависи од x .

Ако би Q било позитивног степена по X , онда би имало нулу у неком алгебарском раширењу од k . Означимо ту нулу са α . Тако добијамо:

$$f(\alpha)g(x) - g(\alpha)f(x) = 0, \quad f(\alpha), g(\alpha) \neq 0.$$

Одатле је

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda_i,$$

што би значило да је λ_i алгебарско над k , што нас доводи до контрадикције. Дакле, полином Q не зависи ни од X .

Једнакост (4) сада трансформишемо у:

$$f(X)g(x) - g(X)f(x) = \Phi(X, x).$$

Лева страна је степена m по x , док је десна степена n по x . Одатле долазимо до закључка $m = n$. Када овај закључак комбинујемо са једнакошћу (*), добијамо да је $[K:k(\lambda_i)] = 1$, што тачно значи да је K облика $k(\lambda_i)$, где је још λ_i трансцендентно над k .

Последица 1

Нека је k поље, а x неодређена. Сваки прстен R између прстена k и $k[x]$ је облика $k[\lambda]$ или k ако и само ако је интегрално затворен.

Доказ. Поље разломака прстена R означимо са $q(R)$. Луротова теорема нам сугерише да је оно облика $k(\lambda)$, за неко λ трансцендентно над k . Тако истакнуто λ генерише прстен $k[\lambda]$ за који наслућујемо да је баш прстен R . Приметимо сада да је прстен $k[\lambda]$ садржан у сваком валуационом прстену између поља k и $k(\lambda)$, осим посебног валуационог прстена из Примера 4.3. Такође, одмах можемо закључити да је $k[\lambda] \subset R$ (јер је интегрално затворен прстен R пресек свих валуационих прстена између R и $k(\lambda)$). Покажимо сада да је, ипак, и прстен R садржан у пресеку свих валуационих прстена између k и $k(\lambda)$ облика:

$$V = V_p = k[\lambda]_p.$$

Као што смо показали у доказу теореме 4.4, сваки валуациони прстен између поменутих поља је облика : $V = V_p = k[\lambda]_{(p)}$. Означимо са P прост идеал прстена $k[\lambda]$ генерисан простим елементом p . Обзиром да је R натпрстен од $k[\lambda]$, знамо и да је pR један идеал прстена R . Покажимо и да је прави.

Претпоставимо супротно, односно да је $pR = R$. Тада постоји елемент $q \in R$ такав да је $pq = 1$. Не заборавимо да је R и потпрстен прстена $k[x]$. То значи да се производ pq може представити у облику $p_0(x) \cdot q_0(x)$. Тај производ може бити једнак 1 ако и само ако је $p_0(x)$ константа (самим тим је и p константа, што је контрадикција). Дакле, pR је заиста прави идеал прстена R .

Означимо сада са V_s произвољан валуациони прстен између R и $k(\lambda)$. Знамо да је у њему (s) једини максимални идеал. Даље, знамо и да је $pV_s \subset sV_s$. Уз одговарајући избор u, v следећа једнакост важи :

$$p \cdot 1 = s \cdot \frac{u(\lambda)}{v(\lambda)} \cdot s^t$$

Додатно, прост елемент s не дели полином v . Закључујемо да :

$$p \cdot v(\lambda) = s^{t+1} \cdot u(\lambda)$$

Последња једнакост нам сугерише да s мора делити p . Обзиром да је p просто, онда је и $s = p$. Другим речима, имамо $R \subset V_p$ за свако p .

Последица 2

Нека је K потпоље од $k(x)$. Тада K има генератор у $k[x]$ ако и само ако је $K \cap k[x] \supset k$.

Доказ. Нека је $K \cap k[x] \supset k$. Тада је, према Последици 1, прстен $K \cap k[x]$ облика $k[\lambda]$. Управо тај елемент λ је тражени генератор. Обратно је тривијално.

Нека је сада k поље и $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ фамилија неодређених над k . Показаћемо да ако је прстен A Крулове димензије d такав да је $k \subseteq A \subseteq k[\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}]$, онда постоје неодређене $\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_d$ такве да су алгебарски независне над k и постоји бар један k -изоморфизам ϕ такав да је $k \subseteq \phi(A) \subseteq k[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_d]$. То ћемо искористити да покажемо да је једнодимензиони прстен A који задовољава наведене услове обавезно и афини прстен над k и ако је још и интегрално затворен, онда је и полиномни.

Надаље, сматраћемо да је сваки прстен комутативан и да имамо јединицу (различиту од нуле за сабирање). Под димензијом прстена A сматраћемо увек Крулову димензију прстена A .

Лема 1

Нека је D област целих и $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ фамилија неодређених над D . Нека је прстен A такав да задовољава услове:

1. $D \leq A \leq D[\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}]$
2. A задовољава услов опадајућег ланца простих идеала.

Тада постоји коначан број променљивих $\{\bar{X}_i\}_{i=1}^k$ и D -хомоморфизам ϕ такав да $D[\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}] \xrightarrow{\phi} D[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k]$ и такав да је рестрикција тог хомоморфизма на прстен A још и изоморфизам.

Доказ. Означимо са M_0 прост идеал прстена $R = D[\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}]$ генерисан колекцијом $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$. Нека је још и $P_0 = M_0 \cap A$; ако је могуће, изаберимо $f_0 \in P_0$, тако да $f_0 \neq 0$. У полиному f_0 фигурише коначно много неодређених, означимо их са $X_1, \dots, X_{t_0}$.

Нека је M_1 прост идеал прстена R генерисан свим X_α , осим $\{X_i\}_{i=1}^{t_0}$. Сада знамо да $f_0 \notin P_1 = M_1 \cap A$. Као малопре, можемо изабрати не-нула елемент $f_1 \in P_2$ у коме фигурише коначно много неодређених. Проширимо раније одређену колекцију $\{X_i\}_{i=1}^{t_0}$ до $\{X_i\}_{i=1}^{t_1}$ (све неодређене које фигуришу у полиномима f_0 и f_1). Индуктивно можемо наставити поступак и добијамо ланац простих идеала

$$A > P_0 > P_1 > \dots > P_l$$

који мора бити коначан (по претпоставци). Другим речима, за неко l важи $P_l = \{0\}$, што нам даље казује да постоји коначан скуп променљивих $\{X_1, \dots, X_k\}$ таквих да ако је M_k прост идеал прстена R генерисан са

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta} \setminus \{X_1, \dots, X_k\}$, онда је $M_k \cap A = 0$. Узмемо ли у обзир природни D -хомоморфизам :

$$A / (M_k \cap A) \xrightarrow{\phi} R / M_k ,$$

до на изоморфизам имамо :

$$D \leq A \leq D[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_k].$$

Неодређене $\bar{X}_i$ и хомоморфизам ϕ задовољавају тврђење леме.

Лема 2

Претпоставимо да је k поље и да су $X_1, \dots, X_n$ неодређене над k . Нека је A прстен такав да је $k \leq A \leq k[X_1, \dots, X_n]$. Ако је A димензије 1, тада постоји неодређена Y и k -хомоморфизам :

$$\phi : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[Y]$$

који је изоморфизам на A .

Доказ. Индукцијом по n покажимо да постоји елемент $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ такав да је :

- a) *За неко i , $f = X_i - h(X_1, \dots, X_n)$ и h не зависи од X_i*
- b) *Ако је U идеал генерисан са f у прстену $k[X_1, \dots, X_n]$, тада је $U \cap A = 0$.*

Случај $n = 1$ је очигледан.

Нека је P прост идеал прстена A који је минималан у односу на следеће својство : P је облика $(f) \cap A$ за неко $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ које је облика:

$$f = X_i - h(X_1, \dots, X_n)$$

где h не зависи од X_i . У доказу претходне леме смо показали да такво P сигурно постоји и, не умањујући општост, можемо ставити да је $X_i = X_n$. За такво f имамо да је:

$$k[X_1, \dots, X_n]/(f) = k[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_{n-1}].$$

Даље, имамо $k \leq A/P \leq k[X_1, \dots, X_{n-1}]$. Ако би било $P = \{0\}$, доказ је завршен. У супротном, димензија прстена A/P би била једнака 0 (прстен A је димензије 1, па не може постојати још неки прост идеал у ланцу).

Стога би морало бити $P = A$ што је контрадикција са дефиницијом простог идеала. Одатле је заиста $P = \{0\}$ и доказ леме је завршен.

Лема 3

Ако је k поље и X неодређена над k и ако је A било који прстен такав да је $k < A < k[X]$, онда је A и један афини прстен над k чије је интегрално затворење облика $k[\theta]$.

Доказ. Нека је $\bar{A}$ интегрално затворење прстена A . Према последици 1, знамо да је $\bar{A}$ облика $k[\theta]$. Ако је $\theta \in k$, немамо никаквих проблема.

Нека је сада $f \in A - k$. Тада је $k[f] < A < k[\theta]$. Како се f може представити у облику :

$$f = \theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + \alpha_1\theta + \alpha_0 ,$$

θ поништава полином $\mu = \theta^n + \alpha_{n-1}\theta^{n-1} + \dots + \alpha_1\theta + \alpha_0 - f$ (μ посматрамо као полином над $k[f]$). Отуда је θ интегрално над $k[f]$. Покажимо да је $k[\theta]$ коначан $k[f]$ -модул.

Нека је $\phi(\theta)$ било који елемент из $k[\theta]$. Поделимо га полиномом μ и добијамо:

$$\phi(\theta) = \mu(\theta)q(\theta) + r(\theta) ,$$

и ту је још степен полинома r строго мањи од степена полинома μ , односно n . Не заборавимо да је $\mu(\theta) = 0$, па је и :

$$\phi(\theta) = r(\theta).$$

Обзиром да је степен полинома r мањи од n , можемо закључити :

$$k[\theta] \leq k[f][1, \theta, \dots, \theta^{n-1}],$$

односно, $k[\theta]$ је заиста коначан $k[f]$ -модул.

Одатле следи да је и прстен A један коначан $k[f]$ -модул. Прстен $k[f][1, \theta, \dots, \theta^{n-1}]$ можемо написати и као $k[1, \theta, \dots, \theta^{n-1}, f]$, што управо значи да је прстен A и афини прстен над пољем k .

Теорема 1

Нека је k поље, а $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ фамилија неодређених над тим пољем. Нека је A једнодимезиони прстен такав да је $k \leq A \leq k[\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}]$. Тада је A афини прстен над k . И више, ако је A интегрално затворен, онда је и облика $A = k[\theta]$, за неко θ (односно, полиноми је).

Доказ. Према леми 1, фамилију неодређених можемо свести на коначно много неодређених. Према леми 2, тих коначно много сводимо на једну. Закључак следи из леме 3.

Литература

1. Гојко Калајџић, *Алгебра*, Веста – Математички факултет, 1998.
2. P.M. Cohn, *Algebra, Volume 2*, Bedford College, University of London, 1977
3. Irving Kaplansky, *Commutative Rings*, The University of Chicago Press 1974
4. Pierre Samuel, Oscar Zariski, *Commutative Algebra II*, Springer 1976
5. Paul Eakin, *A Note on Finite Dimensional Subrings of Polynomial Rings*, Proceedings of the AMS, Volume 31, No. 1, January 1972