Matematički fakultet

Reprezentacije grupa

- master rad -

mentor:
prof. dr Gojko Kalajdžić

student:
Petar Stojčić

Beograd 2012.

Sadržaj

1 Uvod

Teorija reprezentacija je grana matematike koja se bavi proučavanjem apstraktnih matematičkih struktura putem reprezentacije njihovih elemenata kao linearnih transformacija vektorskih prostora, i proučava module nad tim apstratnih algebarskim strukturama. U suštini, reprezentacija čini apstraktni algebarski objekat konkretnijim, opisujući njegove elemente matricama i predstavljajući algebarske operacije u terminima sabiranja i množenja matrica. Algebarski objekti koji se opisuju uključuju grupe, asocijativne algebre i Lijeve algebre. Najvažnija od ovih i istorijski prva je teorija reprezentacije grupa u kojoj su elementi grupe predstavljeni invertibilnim matricama tako da je operacija grupe množenje matrica. U ovom radu bavimo se teorijom reprezentacija konačnih grupa.

U poglavlju Reprezentacije grupa uvode se pojmovi reprezentacije, ekvivalencije reprezentacija i jezgra reprezentacije.
U poglavlju FG-moduli uvodi se pojam FG-modula i pokazuje veza između FG-modula i reprezentacija.
U poglavlju FG-podmoduli i reducibilnost uvode se osnovni gradivni blokovi teorije - ireducibilni FG moduli.
U poglavlju Algebra grupe uvodi se pojam algebre konačne grupe G kao vektorskog prostora dimenzije $|G|$ koji je nosilac operacije množenja u G. Algebre grupe su, na neki način, izvor svega što treba znati o teoriji reprezentacija. Posebno, krajnji cilj teorije reprezentacija, razumevanje svih reprezentacija konačnih grupa, mogao bi biti postignut ako bi algebre grupa bile u potpunosti proučene. Stoga su one od velikog interesa. Nakon uvođenja definicije algebre grupe G iskoristićemo je da konstruišemo važnu vernu reprezentaciju, znanu i kao regularna reprezentacija od G koja će nam kasnije koristiti.
U poglavlju FG-homomorfizmi uvodimo funkcije za FG-module poznate kao FG-homomorfizmi koje čuvaju strukturu FG-modula.
U poglavlju Maškeova teorema dolazimo do prvog značajnijeg tvrđenja u teoriji reprezentacija, Maškeove teoreme. Posledica ove teoreme je da je svaki FG-modul direktna suma ireducibilnih FG-podmodula, što proučavanje svodi na ireducibilne FG-module.
U sledećem poglavlju, Šurova lema, dokazuje se istoimeno tvrđenje i daju neke njegove primene, posebno sve ireducibilne reprezentacije konačnih abelovih grupa.
U poglavlju Ireducibilni moduli i algebra grupe pokazujemo da je svaki ireducibilni CG-modul izomorfan jednom od ireducibilnih CG-modula u dekompoziciji na direktnu sumu ireducibilnih CG-modula regularnog CG-modula CG. Kao posledica, postoji samo konačno mnogo neizomorfnih ireducibilnih CG-modula.
U poglavlju Više o algebri grupe bavimo se dalje strukturom algebre grupe CG i pitanjem broja ireducibilnih CG-modula u rastavu na direktnu sumu ireducibilnih CG-modula regularnog CG-modula CG, izomorfnih datom ireducibilnom CG modulu.
U poglavlju Klase konjugacije razvijamo dovoljno teorije da odredimo klase konjugacije diedarskih, simetričnih i alternirajućih grupa. Takođe, na kraju, dokazujemo tvrđenje koje povezuje klase konjugacije grupe sa strukturom algebre te grupe.

U poglavlju Karakteri uvodimo pojam karaktera, neke osobine karaktera, jezgra karaktera, regularnog karaktera i permutacionog karaktera. Karakteri su od posebne važnosti, jer kako ćemo kasnije pokazati, CG-modul je u potpunosti određen svojim karakterom.
U poglavlju Unutrašnji proizvodi karaktera ustanovljavamo neke vane osobine karaktera, pokazujemo da dva CG-modula su izomorfna ako i samo ako imaju isti karakter i opisujemo metod za rastav datog CG-modula na direktnu sumu CG-podmodula.
Poglavlje Broj ireducibilnih karaktera posvećujemo teoremi koja kaže da je broj ireducibilnih karaktera konačne grupe jednak broju klasa konjugacije te grupe i nekim posledicama te teoreme.
U sledećem pogalvlju Tabele karaktera i relacije ortogonalnosti uvodimo pojam tabele karaktera i relacija ortogonalnosti vrsta i kolona koje govore o povezanosti elemenata tabele karaktera.
U poglavlju Normalne podgrupe i podignuti karakteri uvodimo pojam podignutih karaktera, ispitujemo neke informacije koje nam tabela karaktera pruža o strukturi grupe i pokazujemo da su linearni karakteri od G podizanja ireducibilnih karaktera od G/N u slučaju kada je N izvedena podgrupa od G. Takođe, prikazujemo kako se linearni karakteri mogu koristiti da bi se iz datih ireducibilnih karaktera dobili novi.
U poslednjem poglavlju ilistrujemo do sada prikazane tehnike kontruišući tabele karaktera grupa S_4, A_4 i diedarskih grupa.

2 Reprezentacije grupa

Reprezentacija grupe G predstavlja način da se grupa G zamisli kao grupa matrica. Tačnije reprezentacija je homomorfizam iz G u grupu invertibilnih matrica. U ovom odeljku se dalje obrazlaže ova ideja, i dati su neki primeri reprezentacija. Uvodi se pojam ekvivalencije matrica i razmatra jezgro reprezentacije.

Neka je G grupa i F polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. $GL(n, F)$ je grupa invertibilnih $n \times n$ matrica sa elementima u F.

Definicija 2.1. *Reprezentacija od G nad F je homomorfizam ρ iz G u $GL(n, F)$, za neko n. Stepen od ρ je n.*

Dakle, ako je ρ funkcija iz G u $GL(n, F)$, onda je ρ reprezentacija ako i samo ako je

$$(gh)\rho = (g\rho)(h\rho), \quad za \quad svako \quad g, h \in G.$$

Pošto je reprezentacija homomorfizam, sledi da za svaku reprezentaciju $\rho : G \to GL(n, F)$, imamo

$$1\rho = I_n, \quad i$$
$$g^{-1}\rho = (g\rho)^{-1} \quad za \quad svako \quad g \in G,$$

gde I_n označava jediničnu $n \times n$ matricu.

Primer 2.1. *Neka je G dihedralna grupa $D_8 = \langle a, b : a^4 = b^2 = 1, \quad b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$. Definišimo matrice A i B sa:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proveri se da je

$$A^4 = B^2 = I, \quad B^{-1}AB = A^{-1}.$$

Sledi da je funkcija $\rho : G \to GL(2, F)$ koja je data sa

$$\rho : a^i b^j \to A^i B^j \quad (0 \le i \le 3, \quad 0 \le j \le 1)$$

reprezentacija od D_8 nad F. Stepen od ρ je 2.
Matrice $g\rho$ za g u D_8 su date u sledećoj tabeli:

g	1	a	a^2	a^3
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g	b	ab	a^2b	a^3b
$g\rho$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Primer 2.2. *Neka je G proizvoljna grupa. Definišimo $\rho : G \to GL(n, F)$ sa*

$$g\rho = I_n \quad za \quad svako \quad g \in G,$$

gde je I_n jedinična matrica. Tada je

$$(gh)\rho = I_n = I_n I_n = (g\rho)(h\rho)$$

za svako $g, h \in G$, pa je ρ reprezentacija za G. Ovo pokazuje da svaka grupa ima reprezentaciju proizvoljno velikog stepena.

Definicija 2.2. *Neka su $\rho : G \to Gl(m, F)$ i $\sigma : G \to Gl(n, F)$ reprezentacije grupe G nad F. Kažemo da je ρ ekvivalentno σ ako je $n = m$ i postoji invertibilna $n \times n$ matrica T takva da za svako $g \in G$, važi*

$$g\sigma = T^{-1}(g\rho)T.$$

Ekvivalencija matrica je relacija ekvivalencije.

Pod jezgrom reprezentacije $\rho : G \to Gl(m, F)$ podrazumevamo skup

$$Ker\rho = \{g \in G : g\rho = I_n\}.$$

$Ker\rho$ je normalna podgrupa u G.

Definicija 2.3. *Reprezentacija $\rho : G \to Gl(1, F)$ data sa*

$$g\rho = (1)$$

za svako $g \in G$, naziva se trivijalna reprezentacija.

Definicija 2.4. *Reprezentacija $\rho : G \to Gl(n, F)$ je verna ako $Ker\rho = 1$.*

Tvrđenje 2.1. *Reprezentacija ρ konačne grupe G je verna akko je $Im\rho$ izomorfno sa G.*

3 FG-moduli

Neka je G grupa, F polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, $V = F^n$ i $\rho : G \to Gl(n, F)$ reprezentacija za G. Kako je ρ homomorfizam važi

$$v((gh)\rho) = v(g\rho)(h\rho)$$

za svako $v \in V$ i $g, h \in G$, kao i

$$v(1\rho) = v$$

za svako $v \in V$.Iz osobina množenja matrica sledi

$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho)), (u + v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho)$$

za sve $u, v \in V, \lambda \in F$ i $g \in G$. Motivisani ovim primerom uvodimo:

Definicija 3.1. *Neka je V vektorski prostor i G grupa. V je $FG-$modul ako je definisano množenje vg koje zadovoljava sledeće uslove za sve $u, v \in V, \lambda \in F$ i $g, h \in G$:*

1. $vg \in V$;
2. $v(gh) = (vg)h$;
3. $v1 = v$;
4. $(\lambda v)g = \lambda(vg)$;
5. $(u + v)g = ug + vg$.

Svojstva $1, 4$ i 5 definicije ukazuju da je za svako $g \in G$ funkcija

$$v \to vg \quad (v \in V)$$

endomorfizam od V, dok zajedno sa 2 i 3 ukazuju da je to i invertibilno preslikavanje.

Definicija 3.2. *Neka je V FG-modul i $\mathcal{B}$ baza od V. Za svako $g \in G$, neka*

$$[g]_{\mathcal{B}}$$

označava matricu endomorfizma $v \to vg$, u odnosu na bazu $\mathcal{B}$.

Veza između FG-modula i reprezentacija od G nad F je data sledećom:

Teorema 3.1. *Neka je $\rho : G \to Gl(n, F)$ reprezentacija od G nad F i $V = F^n$.*

1. *V postaje FG-modul ako definišemo množenje vg sa*

   $$vg = v(g\rho) \quad (v \in V, g \in G).$$

   Postoji baza $\mathcal{B}$ od V takva da

   $$g\rho = [g]_{\mathcal{B}}$$

   za svako $g \in G$.

2. *Neka je V FG-modul i $\mathcal{B}$ baza od V. Tada je funkcija*

   $$g \to [g]_{\mathcal{B}}$$

   reprezentacija za G nad F.

Dokaz:

1. Već smo uočili da za svako $u, v \in F^n, \lambda \in F, g, h \in G$ imamo:

$$v(g\rho) \in F^n,$$

$$v((gh)\rho) = (v(g\rho))(h\rho),$$
$$v(1\rho) = v,$$
$$(\lambda v)(g\rho) = \lambda(v(g\rho)),$$
$$(u+v)(g\rho) = u(g\rho) + v(g\rho).$$

   Stoga, F^n postaje FG-modul ako definišemo

$$vg = v(g\rho),$$

   za svako $v \in F^n, g \in G$. Takođe, ako stavimo da $\mathcal{B}$ bude baza

$$(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)$$

   od F^n, onda $g\rho = [g]_{\mathcal{B}}$ za svako $g \in G$.

2. Neka je V FG-modul sa bazom $\mathcal{B}$. Kako je $v(gh) = (vg)h$ za svako $g, h \in G$ i svako v u bazi $\mathcal{B}$ od V sledi da je:

$$[gh]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}[h]_{\mathcal{B}}.$$

Dakle, $g \to [g]_{\mathcal{B}}$ je homomorfizam iz G u $GL(n, F)$ i time reprezentacija za G. ■

Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza.

Tvrđenje 3.1. *Neka je $v_1, ..., v_n$ baza vektorskog prostora V nad F. Pretpostavimo da je dato množenje vg za svako $v \in V$ i $g \in G$ koje zadovoljava sledeće uslove sa $1 \leq i \leq n$, za svako $g, h \in G$, i $\lambda_1, ...\lambda_n \in F$:*

1. $v_i g \in V$;
2. $v_i(gh) = (v_i g)h$;
3. $v_i 1 = v_i$;
4. $(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n)g = \lambda_1(v_1 g) + ... + \lambda_n(v_n g)$.

Tada je V FG-modul.

Definicija 3.3. *Trivijalni FG-modul je jednodimenzionalni vektorski prostor V nad F sa*

$$vg = v$$

za sve $v \in V, g \in G$.

Definicija 3.4. *FG-modul je veran ako je jedinični element iz G jedini element g za koji*

$$vg = v$$

za sve $v \in V$.

Neka je G podgrupa od S_n, V n-dimenzionalni vektorski prostor nad F sa bazom $v_1, ..., v_n$. Za svako i sa $1 \leq i \leq n$ i svaku permutaciju $g \in G$ definišimo

$$v_i g = v_{ig}.$$

Tada $v_i g \in V$ i $v_i 1 = v_i$. Važi i

$$v_i(gh) = v_{i(gh)} = v_{(ig)h} = (v_i g)h.$$

Ako proširimo akciju svakog g linearno na celo V, tada na osnovu tvrđenja 3.1 sledi da je V FG-modul. Taj modul nazivamo permutacioni modul, a bazu $v_1, ..., v_n$ prirodna baza.

Teorema 3.2. *Neka je V FG-modul sa bazom $\mathcal{B}$ i ρ reprezentacija od G nad F data sa*

$$\rho : g \to [g]_{\mathcal{B}} \quad (g \in G).$$

1. *Ako je $\mathcal{B}'$ neka baza od V tada je reprezentacija*

   $$\phi : g \to [g]_{\mathcal{B}'} \quad (g \in G)$$

   ekvivalentna sa ρ.

2. *Ako je σ reprezentacija od G ekvivalentna sa ρ tada postoji baza $\mathcal{B}''$ od V takva da je*

   $$\sigma : g \to [g]_{\mathcal{B}''} \quad (g \in G).$$

Dokaz:

1. Neka je T matrica promene baze sa $\mathcal{B}$ na $\mathcal{B}'$ onda za svako $g \in G$ imamo

   $$[g]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[g]_{\mathcal{B}'}T,$$

   pa je ϕ ekvivalentno sa ρ.

2. Neka su ρ i σ ekvivalentne reprezentacije. Tada za neku invertibilnu matricu T imamo

   $$g\rho = T^{-1}(g\sigma)T,$$

   za svako $g \in G$. Neka je $\mathcal{B}''$ baza od V takva da je metrica promene baze sa $\mathcal{B}$ na $\mathcal{B}''$ baš T. Tada za svako $g \in G$ važi

   $$[g]_{\mathcal{B}} = T^{-1}[g]_{\mathcal{B}''}T,$$

   pa je $g\sigma = [g]_{\mathcal{B}''}$.

■

4 FG-podmoduli i reducibilnost

Definicija 4.1. *Neka je V FG-modul. Podskup W od V je FG-podmodul od V ako je W podprostor i $wg \in W$ za svako $w \in W$ i $g \in G$.*

Znači FG-podmodul od V je podprostor koji je i FG-modul.

Definicija 4.2. *FG-modul V je ireducibilan ako je neprazan i nema podmodula osim $\{0\}$ i V.*

Ako V ima pravih FG-podmodula W nazivamo ga reducibilnim.
Slično, reprezentacija $\rho : G \to GL(n, F)$ je ireducibilna ako je odgovarajući FG-modul F^n dat sa

$$vg = v(g\rho) \quad (v \in F^n, g \in G)$$

ireducibilan i ρ je reducibilno ako je F^n reducibilan.

Neka je V reducibilan FG-modul. Dakle, postoji pravi FG-podmodul W. Uzmimo bazu $\mathcal{B}_1$ od W i proširimo je do baze $\mathcal{B}$ od V. Tada za svako $g \in G$ matrica $[g]_{\mathcal{B}}$ ima oblik:

$$\left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right)$$

za neke matrice X_g, Y_g i Z_g, gde je X_g formata $k \times k$, gde je $k = \dim W$. Reprezentacija stepena n je reducibilna ako i samo ako je ekvivalentna reprezentaciji oblika (1), gde je X_g formata $k \times k$ i $0 < k < n$. Primetimo da u (1) funkcije $g \to X_g$ i $g \to Z_g$ su reprezentacije od G, a da bi ovo videli uzmimo $g, h \in G$ i pomnožimo matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ i $[h]_{\mathcal{B}}$ oblika (1). Primetimo i da je ako je V reducibilan $\dim V \geq 2$.

5 Algebra grupe

Neka je G konačna grupa čiji su elementi $g_1, ..., g_n$ i F polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Definišimo vektorski prostor nad F sa $g_1, ..., g_n$ kao bazom i nazovimo ga FG. Dakle, elementi od FG su izrazi oblika

$$\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_n g_n \quad (\lambda_i \in F),$$

sa prirodno definisanim operacijama sabiranja i množenja skalarom. U FG možemo definisati množenje koristeći množenje u G na sledeći način:

$$\left(\sum_{g\in G} \lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G} \mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G} \lambda_g \mu_h (gh) = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} (\lambda_h \mu_{h^{-1}g}) g$$

gde su $\lambda_g, \mu_h \in F$.

Definicija 5.1. *Vektorski prostor FG sa množenjem definisanim sa*

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right) = \sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h(gh)$$

gde su $\lambda_g, \mu_h \in F$ nazivamo algebra grupe G nad F.

Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza.

Tvrđenje 5.1. *Množenje u FG zadovoljava sledeće osobine za svako $r, s, t \in FG$ i $\lambda \in F$:*

1. $rs \in FG$;
2. $r(st) = (rs)t$;
3. $r1 = 1r = r$;
4. $(\lambda r)s = \lambda(rs) = r(\lambda s)$;
5. $(r+s)t = rt + st$;
6. $r(s+t) = rs + rt$;
7. $r0 = 0r = 0$.

Sada ćemo iskoristiti pojam algebre grupe da definišemo važan FG-modul.
Neka je $V = FG$, dakle V je vektorski prostor dimenzije n nad F, gde je $n = |G|$.Za svako $u, v \in V, \lambda \in F, g, h \in G$ imamo

$$\begin{aligned} vg &\in V, \\ v(gh) &= (vg)h, \\ v1 &= v, \\ (\lambda v)g &= \lambda(vg), \\ (u+v)g &= ug + vg. \end{aligned}$$

Stoga je V FG-modul.

Definicija 5.2. *Neka je G konačna grupa i F polje $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Vektorski prostor FG sa prirodnim množenjem vg $(v \in FG, g \in G)$ naziva se regularan FG-modul.*

Reprezentacija $g \to [g]_{\mathcal{B}}$ za prirodnu bazu $\mathcal{B}$ od FG nazivamo regularnom reprezentacijom od G nad F. Dimenzija regularnog FG-modula je $|G|$.

Tvrđenje 5.2. *Regularan FG-modul je veran.*

Dokaz: Neka je $g \in G$ za koje za svako $v \in FG$ važi $vg = v$.Onda $1g = 1$, pa je $g = 1$. ■

FG-modul je vektorski prostor nad F sa množenjem vg za svako $v \in V, g \in G$. Proširimo definiciju množenja na sve elemente algebre FG.

Definicija 5.3. *Neka je V FG-modul, i neka je $v \in V, r \in FG$ i neka je $r = \sum_{g \in G} \mu_g g \quad (\mu_g \in F)$. Definišimo vr sa*

$$vr = \sum_{g \in G} \mu_g(vg).$$

Tvrđenje 5.3. *Neka je V FG-modul. Tada važe sledeća svojstva za svako $u, v \in V, \lambda \in F$ i $r, s \in FG$:*

1. $vr \in FG$;
2. $v(rs) = (vr)s$;
3. $v1 = v$;
4. $(\lambda v)r = \lambda(vr) = v(\lambda r)$;
5. $(u + v)r = ur + vr$;
6. $v(r + s) = vr + vs$;
7. $v0 = 0v = 0$.

6 FG-homomorfizmi

Definicija 6.1. *Neka su V i W FG-moduli. Funkcija $\theta : V \to W$ je FG-homomorfizam ako je θ linearna transformacija i*

$$(vg)\theta = (v\theta)g,$$

za svako $v \in V, g \in G$.

Drugim rečima, ako θ preslikava v u w, onda preslikva vg u wg. Ako je G konačna grupa i $\theta : V \to W$ FG-homomorfizam onda za svako $v \in V$ i $r = \sum_{g \in G} \lambda_g g \in FG$, imamo

$$(vr)\theta = (v\theta)r$$

jer je

$$(vr)\theta = \sum_{g \in G} \lambda_g(vg)\theta = \sum_{g \in G} \lambda_g(v\theta)g = (v\theta)r.$$

Tvrđenje 6.1. *Neka su V i W FG-moduli i neka je $\theta : V \to W$ FG-homomorfizam. Tada je Ker θ FG-podmodul od V, a Im θ FG-podmodul od W.*

Dokaz: Primetimo da je Ker θ podprostor od V i Im θ podprostor od W jer je θ linearna transformacija. Neka je $v \in$ Ker θ i $g \in G$. Tada

$$(vg)\theta = (v\theta)g = 0g = 0,$$

pa $vg \in$ Ker θ. Dakle, Ker θ je FG-podmodul od V. Neka je sada $w \in$ Im θ tako da je $w = v\theta$ za neko $v \in V$. Tada za svako $g \in G$,

$$wg = (v\theta)g = (vg)\theta,$$

a $(vg)\theta \in$ Im θ, pa je i Im θ podmodul od W. ■

Definicija 6.2. *Neka su V i W FG-moduli. Funkciju $\theta : V \to W$ nazivamo FG-izomorfizmom ako je FG-homomorfizam i invertibilna. Ako postoji takav FG-izomorfizam, kažemo da su V i W izomorfni FG-moduli i pišemo $V \cong W$.*

U sledecem tvrđenju proveravamo da ako $V \cong W$ onda i $W \cong V$. Tvrđenje dajemo bez dokaza.

Tvrđenje 6.2. *Ako je $\theta : V \to W$ jedan FG-izomorfizam, onda je njemu invertibilno preslikavanje $\theta^{-1} : W \to V$ takođe FG-izomorfizam.*

Neka je $\theta : V \to W$ FG-izomorfizam. Tada se pri prelasku sa V na W očuvavaju svojstva strukture kao što su:

1. dim$V$=dim$W$
2. V je ireducibilan ako i samo ako je W ireducibilan
3. V sadrži trivijalni FG-modul ako i samo ako W sadrži trivijalni FG-modul.

U sledećem tvrđenju pokazujemo da izomorfni FG-moduli odgovaraju ekvivalentnim reprezentacijama.

Teorema 6.1. *Neka je V FG-modul sa bazom $\mathcal{B}$ i W FG-modul sa bazom $\mathcal{B}'$. Tada su V i W izomorfni ako i samo ako su reprezentacije*

$$\rho : g \to [g]_{\mathcal{B}} \quad i \quad \sigma : g \to [g]_{\mathcal{B}'}$$

ekvivalentne.

Dokaz: Najpre ustanovimo sledeće:

Lema 6.1. *Dati FG-moduli V i W su izomorfni ako i samo ako postoje baze $\mathcal{B}_1$ od V i $\mathcal{B}_2$ od W takve da*

$$[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$$

za svako $g \in G$.

Da bi ovo pokazali,pretpostavimo prvo da je θ FG-izomorfizam iz V u W, i neka je $v_1, ..., v_n$ baza $\mathcal{B}_1$ od V i $v_1\theta, ..., v_n\theta$ baza $\mathcal{B}_2$ od W. Neka je $g \in G$. Kako je $(v_i g)\theta = (v_i\theta)g$ za svako i, sledi da je $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$.
Obrnuto, neka je $v_1, ..., v_n$ baza $\mathcal{B}_1$ od V i $w_1, ..., w_n$ baza $\mathcal{B}_2$ od W takva da $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$ za svako $g \in G$.Neka je θ invertibilno linearno preslikavanje iz V u W za koje $v_i\theta = w_i$ za sve i. Neka je $g \in G$. Kako je $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$ zakljucujemo da je $(v_i g)\theta = (v_i\theta)g$ za sve i, pa je θ FG-izomorfizam.To je i kraj dokaza leme.

Sada neka su V i W izomorfni FG-moduli. Na osnovu leme postoje baze $\mathcal{B}_1$ od V i $\mathcal{B}_2$ od W takve da $[g]_{\mathcal{B}_1} = [g]_{\mathcal{B}_2}$ za svako $g \in G$. Definišimo reprezentaciju ϕ od G sa $\phi : g \to [g]_{\mathcal{B}_1}$. Onda je ϕ ekvivalentno sa ρ i σ po Teoremi 3.2. Stoga su ρ i σ ekvivalentni.
Obrnuto, neka su ρ i σ ekvivalentne. Po Teoremi 3.2 postoji baza $\mathcal{B}''$ takva da $g\sigma = [g]_{\mathcal{B}''}$ za sve $g \in G$; tj. $[g]_{\mathcal{B}'} = [g]_{\mathcal{B}''}$ za sve $g \in G$. Stoga su V i W izomorfni FG-moduli. ■

Neka je V FG-modul i neka je

$$V = U \oplus W,$$

gde su U i W FG-podmoduli od V. Neka je $u_1, ..., u_m$ baza $\mathcal{B}_1$ od U i, $w_1, ..., w_n$ baza $\mathcal{B}_2$ od W. Onda je $u_1, ..., u_m, w_1, ..., w_n$ baza $\mathcal{B}$ od V, i za $g \in G$,

$$[g]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} [g]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [g]_{\mathcal{B}_2} \end{array}\right).$$

Opštije ako je $V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$, direktna suma FG-podmodula U_i, i $\mathcal{B}_i$ baza od U_i možemo spojiti $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_r$ u bazu $\mathcal{B}$ od V i za $g \in G$,

$$[\mathrm{g}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [g]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [g]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix} .(0)$$

Direktne sume prirodno određuju FG-homomorfizme.

Tvrđenje 6.3. *Neka je V FG-modul i pretpostavimo da*

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_r$$

gde je svaki U_i FG-podmodul od V. Za $v \in V$ imamo $v = u_1 + ... + u_r$ za jedinstvene vektore $u_i \in U_i$ i definišimo $\pi_i : V \to V$ $(1 \leq i \leq r)$ sa

$$v\pi_i = u_i.$$

Tada je svaki π_i FG-homomorfizam i projekcija od V.

Dokaz: π_i je linearno preslikavanje i FG-homomorfizam jer za $v \in V$ sa $v = u_1 + ... + u_r$ ($u_j \in U_j$ za svako j), $g \in G$ imamo

$$(vg)\pi_i = (u_1 g + ... + u_r g)\pi_i = u_i g = (v\pi_i)g.$$

Takođe,

$$v\pi_i = u_i\pi_i = u_i = v\pi_i,$$

pa je $\pi_i^2 = \pi_i$. Sledi, π_i je projekcija. ■

Tvrđenje 6.4. *Neka je V FG-modul i pretpostavimo da je*

$$V = U_1 + ... + U_r,$$

gde je svako U_i ireducibilan FG-podmodul od V. Onda je V direktna suma nekih od FG-podmodula U_i.

Dokaz: Zamisao je da odaberemo koliko god možemo među FG modulima $U_1, ..., U_r$ tako da suma bude direktna. U ovom smislu odaberimo podskup $Y = W_1, ..., W_s$ od $U_1, ...U_r$ koji imaju osobinu da je $W_1 + ... + W_s$ direktna suma i da $W_1 + ... + W_s + U_i$ nije direktna suma za $U_i \notin Y$ Neka je $W = W_1 + ... + W_s$.
Tvrdimo da je $U_i \subseteq W$ za svako i. Ako je $U_i \in Y$ to je jasno, pa pretpostavimo $U_i \notin Y$. Onda $W + U_i$ nije direktna suma pa je $W \cap U_i \neq 0$ Ali $W \cap U_i$ je FG-podmodul od U_i i U_i je ireducibilan, pa je $W \cap U_i = U_i$ i time $U_i \subseteq W$.
Kako je $U_i \subseteq W$ za svako i sa $1 \leq i \leq r$, imamo $V = W = W_1 \oplus ... \oplus W_s$, što je i trebalo dokazati. ■

7 Maškeova teorema

Posledica sledeće teoreme je da je svaki FG-modul direktna suma ireducibilnih FG-podmodula, gde je $F = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Ovo teoriju reprezentacije svodi na proučavanje ireducibilnih FG-modula.

Teorema 7.1. *Neka je G konačna grupa, $F = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, i neka je V FG-modul. Ako je U FG-podmodul od V, postoji FG-podmodul W od V takav da*

$$V = U \oplus W.$$

Dokaz: Odaberimo bilo koji podprostor W_0 od V takav da

$$V = U \oplus W_0$$

(Postoji veliki izbor za W_0 - uzmimo bazu $v_1, ..., v_m$ of U, proširimo ga do baze $v_1, ..., v_n$ of V i neka je $W_0 = sp(v_{m+1}, ..., v_n)$.)

Za $v \in V$, imamo $v = u + w$ za jedinstvene vektore $u \in U$ i $w \in W_0$, definišimo $\phi : V \to V$ sa $v\phi = u$. ϕ je pojekcija of V sa jezgrom W_0 i slikom U.

Cilj nam je da modifikujemo projekciju ϕ da napravimo FG-homomorfizam iz V u V sa slikom U. Definišimo $\theta : V \to V$

$$v\theta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} vg\phi g^{-1} \quad (v \in V)$$

θ je endomorfizam od V i $\mathrm{Im}\theta \subseteq U$.

Prvo pokažimo da je θ FG-homomorfizam. Za $v \in V$ i $x \in G$,

$$(vx)\theta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in g}(vx)g\phi g^{-1}$$

Kada g prolazi G, to čini i $h = xg$. Odatle

$$(vx)\theta = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in g} vh\phi h^{-1}x$$

$$= \left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in g} vh\phi h^{-1}\right)x$$

$$= (v\theta)x$$

Time je θ FG-homomorfizam.

Sledeće dokazujemo da je $\theta^2 = \theta$. Prvo primetimo da za $u \in U$ i $g \in G$ imamo $ug \in U$, i time $(ug)\phi = ug$. Koristeći ovo,

$$u\theta = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} ug\phi g^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(ug)g^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u = u \tag{1}$$

Neka je $v \in V$. Onda je $v\theta \in U$ pa po prethodnim jednakostima imamo $(v\theta)\theta = v\theta$. Time $\theta^2 = \theta$.

Ustanovili smo da je $\theta V \to V$ projekcija FG-homomorfizam. (2) pokazuje da je $\mathrm{Im}\theta = U$. Neka je W $\mathrm{Ker}\theta$. Tada je W FG-podmodul od V i $V = U \oplus W$. Time je dokaz završen. ■

Zaključak Maškeove teoreme ne mora da važi za $F \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Neka je p prost broj i $G = C_p = \langle a : a^p = 1\rangle$, i neka je F polje celih po modulu p. Proveri se da je funkcija

$$a^j \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j & 1 \end{pmatrix} \quad (j = 0, 1, ..., p-1)$$

reprezentacija iz G u $GL(2, F)$. Odgovarajući FG-modul je $V = sp(v_1, v_2)$, gde za $0 \leq j \leq p-1$,

$$v_1 a^j = v_1,$$

$$v_2 a^j = j v_1 + v_2.$$

$U = sp(v_1)$ je FG-podmodul od V, ali ne postoji FG-podmodul W takav da je $V = U \oplus W$, pošto je U jedini jednodimenzionalni FG-podmodul od V.

Primer 7.1. *Neka je $G = S_3$ i neka je $V = sp(v_1, v_2, v_3)$ permutacioni modul od G nad F. Stavimo $u = v_1 + v_2 + v_3$ i $U = sp(u)$.*

Tada je U FG-podmodul od V, jer je $ug = u$ za svako $g \in G$.

Postoje mnogi podprostori W od V takvi da $V = U \oplus W$, na primer $sp(v_2, v_3)$ i $sp(v_1, v_2 - 2v_3)$, ali postoji tačno jedan FG-podmodul W od V takav da $V = u \oplus W$. Pronaćićemo ga koristeći dokaz Maškeove teoreme.

Neka je $W_0 = sp(v_1, v_2)$ tada je $V = u \oplus W_0$ ali W_0 nije FG-podmodul. Projekcija ϕ na U je data sa

$$\phi : v_1 \to 0, v_2 \to 0, v_3 \to v_1 + v_2 + v_3.$$

Proveri se da je FG-homomorfizam θ iz dokaza teoreme dat sa

$$\theta : v_i \to \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Traženi FG-podmodul W je tada $Ker\theta$ pa je

$$W = sp(v_1 - v_2, v_2 - v_3).$$

Ako je $\mathcal{B}$ baza $v_1 + v_2 + v_3, v_1, v_2$ of V, onda za svako $g \in G$ matrica $[g]_{\mathcal{B}}$ ima oblik

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix}.$$

Nule u matrici su usled toga što je U FG-podmodul od V.

Ako uzmemo $v_1 + v_2 + v_3$, $v_1 - v_2$, $v_2 - v_3$ za bazu $\mathcal{B}'$, imamo:

$$[g]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{pmatrix},$$

jer $sp(v_1 - v_2, v_2 - v_3)$ je FG-podmodul od V.

Ovaj primer ilustruje matričnu verziju Maškeove teoreme: za proizvoljnu konačnu grupu G, ako odaberemo bazu $\mathcal{B}$ $FG-$modula V, takvu da $[g]_{\mathcal{B}}$ ima oblik

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right)$$

za sve $g \in G$, onda možemo naći bazu $\mathcal{B}'$ takvu da $[g]_{\mathcal{B}'}$ ima oblik

$$\left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

za svako $g \in G$.
Pretpostavimo da je ρ reducibilna reprezentacija konačne grupe G nad F stepena n. Znamo da je ρ ekvivalentno reprezentaciji oblika

$$g \to \left(\begin{array}{c|c} X_g & 0 \\ \hline Y_g & Z_g \end{array}\right) \quad (g \in G),$$

za neke matrice X_g, Y_g i Z_g, gde je X_g dimenzija $k \times k$, $0 < k < n$.

Maškeova teorema pokazuje da je ρ reprezentacija oblika

$$g \to \left(\begin{array}{c|c} A_g & 0 \\ \hline 0 & B_g \end{array}\right),$$

gde je A_g matrica $k \times k$.

7.1 Posledice Maškeove teoreme

Možemo iskoristiti Maškeovu teoremu da pokažemo da je svaki nenula $FG-$modul direktna suma ireducibilnih $FG-$podmodula. Pod ireducibilnim $FG-$podmodulima podrazumevamo $FG-$podmodule koji su ireducibilni $FG-$moduli.

Definicija 7.1. *$FG-$modul V je kompletno reducibilan ako je $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, gde je U_i ireducibilan $FG-$podmodul od V.*

Teorema 7.2. *Ako je G konačna grupa i $F = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$, tada je svaki nenula $FG-$modul kompletno reducibilan.*

Dokaz: Neka je V nenula $FG-$modul. Dokazaćemo indukcijom po $\dim V$. Iskaz je tačan za $\dim V = 1$ jer je V ireducibilan u ovom slučaju.

Ako je V ireducibilan, dokaz je trivijalan, međutim pretpostavimo da je V reducibilan. Tada V ima $FG-$podmodul U koji je različit od $\{0\}$ i V. Po Maškeovoj teoremi, postoji $FG-$podmodul W takav da $V = U \oplus W$. Kako je $\dim U < \dim V$ i $\dim W < \dim V$, imamo po indukciji da je:

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r, W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

gde su U_i i W_j ireducibilni $FG-$moduli. Pa je dalje

$$U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \oplus W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

direktna suma ireducibilnih $FG-$modula. ■

Tvrđenje 7.1. *Neka je V $FG-$modul, gde je $F = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ i G konačna grupa. Pretpostavimo da je U $FG-$podmodul od V. Tada postoji surjektivni ("na") homomorfizam iz V u U.*

Dokaz: Po Maškeovoj teoremi, imamo $FG-$podmodul W od V takav da je $V = U \oplus W$. Tada je funkcija $\pi : V \to U$ definisana sa

$$\pi : u + w \to u(u \in U, w \in W)$$

je $FG-$homomorfizam na U. ■

Teorema 7.2 kaže da je svaki nenula $FG-$modul direktna suma ireducibilnih $FG-$modula. Dakle da bismo razumeli $FG-$module, možemo se usredsrediti na ireducibilne $FG-$module. Njima ćemo se baviti u narednom poglavlju.

8 Šurova lema

Šurova lema je jedno od osnovnih tvrđenja koja se odnose na ireducibilne module. Iako su formulacija i dokaz jednostavni Šurova lema je od velikog značaja za teoriju reprezentacija; u ovom poglavlju dajemo direktnu primenu određivanjemm svih ireducibilnih reprezentacija konačnih abelovih grupa.
Šurova lema se odnosi na $\mathbb{C}G-$module i njima ćemo se nadalje baviti.

8.1 Šurova lema

Lema 8.1. *(Šurova lema)*

Neka su V i W ireducibilni $\mathbb{C}G-$moduli.

1. *Ako je $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G-$homomorfizam, tada je ϑ je $\mathbb{C}G-$izomorfizam ili $v\vartheta = 0$ za svako $v \in V$.*
2. *Ako je $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G-$izomorfizam, tada je ϑ jednako identičnom preslikavanju pomnoženom skalarom.*

Dokaz:

1. Pretpostavimo da $v\vartheta \neq 0$ za neko $v \in V$. Tada $Im\vartheta \neq \{0\}$. Kako je $Im\vartheta$ $\mathbb{C}G-$podmodul od W iz *Tvrđenja 6.1.*, i W je ireducibilan, imamo da je $Im\vartheta = W$. Dalje je, na osnovu *Tvrđenja 6.1*, $Ker\vartheta$ $\mathbb{C}G-$podmodul od V. Kako je $Ker\vartheta \neq V$ i V je ireducibilan, $Ker\vartheta = \{0\}$. Stoga je ϑ invertibilan, pa je $\mathbb{C}G-$izomorfizam.

2. Endomorfizam ϑ ima sopstvenu vrednost $\lambda \in \mathbb{C}$ i $Ker(\vartheta - \lambda 1_V) \neq \{0\}$. Stoga je $Ker(\vartheta - \lambda 1_V)$ nenula $\mathbb{C}G-$podmodul od V. Kako je V ireducibilan,

$$Ker(\vartheta - \lambda 1_V) = V.$$

Dakle

$$v(\vartheta - \lambda 1_V) = 0 \text{ za svako } v \in V.$$

Stoga je, $\vartheta = \lambda 1_V$. ■

Za deo (2) Šurove leme važi obratno tvrđenje.

Tvrđenje 8.1. *Neka je V nenula $\mathbb{C}G-$modul i pretpostavimo da je svaki $\mathbb{C}G-$homomorfizam iz V u V skalarni umnožak od 1_V. Tada je V ireducibilan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je V reducibilan, pa V ima $\mathbb{C}G-$podmodul U različit od $\{0\}$ i V. Po Mašekovoj teoremi, postoji $\mathbb{C}G-$podmodul W od V takav da

$$V = U \oplus W.$$

Onda preslikavanje $\pi : V \to V$ definisano sa $(u + w)\pi = u$ za svako $u \in U$, $w \in W$ je $\mathbb{C}G-$homomorfizam i nije skalarni umnožak od 1_V, što je kontradikcija. Sledi da je V ireducibilan. ■

Dalje ćemo prikazati Šurovu lemu i njen obrat u terminima reprezentacija.

Posledica 8.1. *Neka je $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ reprezentacija od G. Tada je ρ ireducibilan ako i samo ako svaka $n \times n$ matrica A koja zadovoljava*

$$(g\rho)A = A(g\rho) \textit{ za svako } g \in G$$

ima oblik $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokaz: Po *Teoremi 3.1*, posmatrajmo $\mathbb{C}^n$ kao $\mathbb{C}G-$modul definišući sa $vg = v(g\rho)$ za svako $v \in \mathbb{C}^n$, $g \in G$.
Neka je A matrica $n \times n$ nad $\mathbb{C}$. Endomorfizam $v \to vA$ od $\mathbb{C}^n$ je $\mathbb{C}G-$homomorfizam ako i samo ako je

$$(vg)A = (vA)g \text{ za svako } v \in \mathbb{C}^n,\ g \in G;$$

što važi ako i samo ako

$$(g\rho)A = A(g\rho) \text{ za svako } g \in G.$$

Tvrđenje sada sledi iz Šurove leme i prethodnog tvrđenja. ■

8.2 Teorija reprezentacije konačnih abelovih grupa

Neka je G konačna abelova grupa i V ireducibilan $\mathbb{C}G-$modul. Odaberimo $x \in G$. Pošto je G abelova,

$$vgx = vxg \text{ za svako } g \in G,$$

odakle je endomorfizam $v \to vx$ od V je $\mathbb{C}G$-homomorfizam. Na osnovu Šurove leme, ovaj endomorfizam je skalarni umnožak identičnog preslikavanja 1_V, tj $\lambda_x 1_V$. Stoga,

$$vx = \lambda_x v \text{ za svako } v \in V.$$

To znači da je svaki podprostor od V $\mathbb{C}G-$podmodul. Kako je V ireducibilan, zaključujemo da je $\dim V = 1$. Time smo dokazali

Tvrđenje 8.2. *Ako je G konačna abelova grupa, tada je svaki ireducibilan $\mathbb{C}G-$modul dimenzije* 1*.*

Sledeća teorema je jedno od bitnijih tvrđenja o abelovim grupama. Nećemo ga dokazivati ovde.

Teorema 8.1. *Svaka konačna abelova grupa je izomorfna direktnom proizvodu cikličnih grupa.*

Dokaz: Odredićemo ireducibilne reprezentacije svih direktnih proizvoda

$$C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots C_{n_r},$$

gde su $n_1, \ldots, n_r$ pozitivni celi brojevi. Po prethodnoj teoremi ovo pokriva sve ireducibilne reprezentacije konačnih abelovih grupa.
Neka je $G = C_{n_1} \times C_{n_2} \times \ldots C_{n_r}$, za $1 \leq i \leq r$, neka je c_i generator C_{n_i}.

$$c_i = (1, \ldots, c_i, \ldots, 1) \ (c_i \text{ na } i-\text{toj poziciji})$$

Tada je

$$G = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle \text{ , za } g_i^{n_i} = 1 \text{ i } g_i g_j = g_j g_i \text{ za sve } i, j.$$

Neka je sada $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ ireducibilna reprezentacija G nad $\mathbb{C}$. Tada je $n = 1$ po *tvrđenju 8.2.*, pa za $1 \leq i \leq r$, postoji $\lambda_i \in \mathbb{C}$, takvo da

$$g_i \rho = (\lambda_i),$$

gde je (λ_i) 1×1 matrica. Kako je g_i reda n_i, imamo da je $\lambda_i^{n_i} = 1$, tj. λ_i n_i-ti koren jedinice. Takođe, vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ određuju ρ, pa pošto za $g \in G$ imamo da je $g = g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}$, za cele brojeve $i_1, \ldots, i_r$, i tada je:

$$g\rho = (g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r})\rho = (\lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r}).$$

Za reprezentaciju ρ grupe G koja zadovoljava prethodnu formulu za sve $i_1, \dots, i_r$ pišemo

$$\rho = \rho_{\lambda_1,\dots,\lambda_r}.$$

Obrnuto, za date n_i-te korene jedinice λ_i $(1 \leq i \leq r)$, funkcija

$$g_i^{i_1} \dots g_r^{i_r} \to (\lambda_1^{i_1} \dots \lambda_r^{i_r})$$

je reprezentacija G. Imamo $n_1 n_2 \dots n_r$ takvih reprezentacija i među njima nema ekvivalentnih. Time je dokazana sledeća teorema. ■

Teorema 8.2. *Neka je G abelova grupa $C_{n_1} \times \dots \times C_{n_r}$. Reprezentacije $\rho_{\lambda_1,\dots,\lambda_r}$ od G, konstruisane na navedeni način, su ireducibilne i stepena 1. Postoji $|G|$ takvih reprezentacija, i svaka ireducibilna reprezentacija od G nad $\mathbb{C}$ je ekvivalentna tačno jednoj od njih.*

Primer 8.1.

1. *Neka je $G = C_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$ i $\omega = e^{2\pi i/n}$. n ireducibilnih reprezentacija od G nad $\mathbb{C}$ su ρ_{ω^j} $(0 \leq j \leq n-1)$, gde je*

$$a^k \rho_{\omega^j} = (\omega^{jk}) \ (0 \leq k \leq n-1).$$

2. *Četiri ireducibilna $\mathbb{C}G-$modula za $G = C_2 \times C_2 = \langle g_1, g_2 \rangle$ su V_1, V_2, V_3, V_4, gde su V_i jednodimenzionalni prostori sa bazom v_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ i*

$$\begin{array}{ll} v_1 g_1 = v_1, & v_1 g_2 = v_2 \\ v_2 g_1 = v_2, & v_2 g_2 = -v_2 \\ v_3 g_1 = -v_3, & v_3 g_2 = v_3 \\ v_4 g_1 = -v_4, & v_4 g_2 = -v_4. \end{array}$$

8.3 Dijagonalizacija

Neka je $H = \langle g \rangle$ ciklična grupa reda n, i neka je V nenula $\mathbb{C}H-$modul. Na osnovu *Teoreme 7.2.* imamo

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r,$$

direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}H-$podmodula U_i od V. Svako U_i je dimenzije 1 na osnovu *tvrđenja 8.2.*; neka je u_i vektor koji razapinje U_i. Neka je $\omega = e^{2\pi i/n}$. Tada za svako i postoji ceo broj m_i takav da

$$u_i g = \omega^{m_i} u_i.$$

Stoga ako je $\mathcal{B}$ baza $u_1, \dots, u_r$ od V, tada

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega^{m_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega^{m_r} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Sledeće tvrđenje je direktna posledica ovoga.

Tvrđenje 8.3. *Neka je G konačna grupa i V $\mathbb{C}G-$modul. Ako je $g \in G$, tada postoji baza $\mathcal{B}$ od V takva da je matrica $[g]_{\mathcal{B}}$ dijagonalna. Ako je g reda n, tada su elementi na dijagonali matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ $n-$ti koren jedinice.*

Dokaz: Neka je $H = \langle g \rangle$. Kako je V $\mathbb{C}H-$modul, dokaz sledi. ■

8.4 Neke primene Šurove leme

Sledeća primena tiče se važnog podprostora algebre $\mathbb{C}G$.

Definicija 8.1. *Neka je G konačna grupa. Centar algebre $\mathbb{C}G$, zapisan kao $Z(\mathbb{C}G)$, definiše se na sledeći način*

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz \text{ za sve } r \in \mathbb{C}G\}$$

Na osnovu osobina podprostora lako se proverava da je $Z(\mathbb{C}G)$ podprostor od $\mathbb{C}G$. Za abelove grupe G, centar $Z(\mathbb{C}G)$ je cela algebra. Za proizvoljne grupe G videćemo da $Z(\mathbb{C}G)$ igra ključnu ulogu u razmatranju reprezentacija grupe G (na primer, njegova dimenzija je jednaka broju ireducibilnih reprezentacija od G (videti poglavlje 16 *Broj ireducibilnih karaktera*)).

Primer 8.2. *Elementi 1 i $\sum_{g \in G} g$ pripadaju u $Z(\mathbb{C}G)$. Ako je H normalna podgrupa G, tada*

$$\sum_{h \in H} h \in Z(\mathbb{C}G).$$

Da bi to pokazali, predstavimo $z = \sum_{h \in H} h$. Tada za svako $g \in G$,

$$g^{-1}zg = \sum_{h \in H} g^{-1}hg = \sum_{h \in H} h = z,$$

i tada $zg = gz$. Sledi $zr = rz$ za svako $r \in \mathbb{C}G$. Na primer, ako je $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$, tada $\{1\}$, $\langle a \rangle$ i G su normalne podgrupe grupe G, pa elementi

$$1,\ 1 + a + a^2 \ \text{ i } 1 + a + a^2 + b + ab + a^2b$$

pripadaju $Z(\mathbb{C}G)$. Videćemo kasnije da ovi elementi formiraju bazu $Z(\mathbb{C}G)$.

Iskoristićemo Šurovu lemu da dokažemo sledeću karakteristiku elemenata $Z(\mathbb{C}G)$.

Tvrđenje 8.4. *Neka je V ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul, i neka je $z \in Z(\mathbb{C}G)$. Tada postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ tako da*

$$vz = \lambda v \textit{ za sve } v \in V.$$

Dokaz: Za sve $r \in \mathbb{C}G$ i $v \in V$ važi
$$vrz = vzr,$$
dakle funkcija $v \to vz$ je $\mathbb{C}G-$homomorfizam iz V u V. Po Šurovoj lemi, ovaj homomorfizam je jednak $\lambda 1_V$ za neko $\lambda \in \mathbb{C}$. Odatle dokaz sledi. ■

Neki elementi centra $\mathbb{C}G$ su uzeti iz centra G, koje ćemo sada definisati.

Definicija 8.2. *Centar grupe G, u oznaci $Z(G)$, definišemo sa*

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \textit{ za sve } g \in G\}.$$

Očigledno je $Z(G)$ normalna podgrupa grupe G i podskup $Z(\mathbb{C}G)$. Iako smo videli u *Tvrđenju 5.2.* da za svaku konačnu grupu postoji veran $\mathbb{C}G-$modul, nije neophodno da postoji uvek veran ireducibilan $\mathbb{C}G-$modul. Sledeće tvr đenje pokazuje da postojanje vernog ireducibilnog $\mathbb{C}G-$modula povlači snažnu restrikciju strukture G.

Tvrđenje 8.5. *Ako postoji veran ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul, tada je $Z(G)$ ciklična.*

Dokaz: Neka je V veran ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul. Ako je $z \in Z(G)$ tada $z \in Z(\mathbb{C}G)$, iz *Tvrđenja 8.4* sledi da postoji $\lambda_z \in \mathbb{C}$ tako da

$$vz = \lambda_z v \text{ za sve } v \in V.$$

Kako je V veran, funkcija
$$z \to \lambda_z (z \in Z(G))$$
je injektivni homomorfizam iz $Z(G))$ u multiplikativnu grupu $\mathbb{C}^*$ nenula kompleksnih brojeva. Stoga $Z(G) \cong \{\lambda_z : z \in Z(G)\}$ je ciklična kao konačna podgrupa od $\mathbb{C}^*$. ■

Primer 8.3. *Ako je G abelova grupa, tada je $G = Z(G)$, i po prethodnom tvrđenju ne postoji veran ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul ako G nije ciklična. Na primer, $C_2 \times C_2$ nema vernu ireducibilnu reprezentaciju (uporediti sa Primerom 8.1.(2).*

Ireducibilne reprezentacije neabelovih grupa je teže konstruisati od onih od abelovih. Nisu svi stepena 1, što je pokazano sledećim obratom *Tvrđenja 8.2.*

Tvrđenje 8.6. *Pretpostavimo da je G konačna grupa takva da je svaki ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul dimenzije 1. Tada je G abelova grupa.*

Dokaz: Po *Teoremi 7.2.* možemo napisati

$$\mathbb{C}G = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n,$$

gde je svako V_i ireducibilni $\mathbb{C}G-$podmodul regularnog $\mathbb{C}G-$modula $\mathbb{C}G$. Tada je $\dim V_i = 1$ za svako i jer je pretpostavka da su svi ireducibilni $\mathbb{C}G-$moduli dimenzije 1. Za $1 \leq i \leq n$ neka je v_i vektor koji razapinje V_i. Tada je $v_1, \ldots, v_n$ baza za $\mathbb{C}G$; označimo je sa $\mathcal{B}$. Za sve $x, y \in G$ matrice $[x]_{\mathcal{B}}$ i $[y]_{\mathcal{B}}$ su dijagonalne i stoga komutiraju. Pošto je reprezentacija

$$g \to [g]_{\mathcal{B}}(g \in G)$$

od G verna, videti *Tvrđenje 5.2*, zaključujemo da x i y komutiraju. Stoga, G je abelova, što je trebalo dokazati. ■

9 Ireducibilni moduli i algebra grupe

Neka je G konačna grupa i $\mathbb{C}G$ algebra grupe G nad $\mathbb{C}$. Posmatrajmo $\mathbb{C}G$ kao regularan $\mathbb{C}G-$modul. Na osnovu *Teoreme 7.2.* možemo zapisati

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$$

gde je svako U_i ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul. U ovom poglavlju pokazaćemo da je svaki ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul izomorfan sa jednom od $\mathbb{C}G-$modula $U_1, \ldots, U_r$. Posledica toga je da postoji samo konačno mnogo neizomorfnih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula (to smo već ustanovili za abelove grupe u *Teoremi 8.2*). Takođe teoretski, za određivanje svih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula dovoljno je zapisati $\mathbb{C}G$ kao direktnu sumu ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula. Međutim, to je nije praktično ukoliko G nije mala grupa.

9.1 Ireducibilni podmoduli od $\mathbb{C}G$

Počećemo sa još jednom posledicom Maškeove teoreme.

Tvrđenje 9.1. *Neka su V i W $\mathbb{C}G-$moduli i neka je $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G-$homomorfizam. Tada postoji $\mathbb{C}G-$podmodul U od V takav da je $V = Ker\vartheta \oplus U$ i $U \cong Im\vartheta$.*

Dokaz: Kako je $Ker\vartheta$ $\mathbb{C}G-$podmodul od V na osnovu *tvrđenja 6.1*, postoji na osnovu Maškeove teoreme $\mathbb{C}G-$podmodul U od V takav da $V = Ker\vartheta \oplus U$. Definišimo funkciju $\overline{\vartheta} : U \to Im\vartheta$ na sledeći način:

$$u\overline{\vartheta} = u\vartheta(u \in U).$$

Pokazujemo da je $\overline{\vartheta}$ $\mathbb{C}G-$izomorfizam iz U u $Im\vartheta$. Očigledno je da je $\overline{\vartheta}$ je $\mathbb{C}G-$homomorfizam, pošto je ϑ $\mathbb{C}G-$homomorfizam. Ako je $u \in Ker\overline{\vartheta}$ onda $u \in Ker\vartheta \cap U = \{0\}$; sledi $Ker\overline{\vartheta} = \{0\}$. Sada neka je $w \in Im\vartheta$; pa je $w = v\vartheta$ za neko $v \in V$. Zapišimo $v = k + u$ gde je $k \in Ker\vartheta$, $u \in U$. Tada

$$w = v\vartheta = k\vartheta + u\vartheta = u\vartheta = u\overline{\vartheta}.$$

Sledi $Im\overline{\vartheta} = Im\vartheta$. Sada smo pokazali da je $\overline{\vartheta} : U \to Im\vartheta$ invertibilni $\mathbb{C}G-$homomorfizam. Stoga je $U \cong Im\vartheta$, što je trebalo dokazati. ■

Tvrđenje 9.2. *Neka je V $\mathbb{C}G-$modul i predstavimo*

$$V = U_1 \oplus \dots U_s,$$

kao direktnu sumu ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i. Ako je U ireducibilni $\mathbb{C}G-$podmodul od V, tada je $U \cong U_i$ za neko i.

Dokaz: Za $u \in U$, imamo da je $u = u_1 + \cdots + u_s$ za jedinstvene vektore $u_i \in U_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Definišemo $\pi_i : U \to U_i$ kao $u\pi_i = ui$. Birajući i tako da $u_i \neq 0$ za neko $u \in U$, imamo $\pi_i \neq 0$.

Sada je π_i $\mathbb{C}G-$homomorfizam. Kako su U i U_i ireducibilni i $\pi_i \neq 0$, iz Šurove leme zaključujemo da je π_i $\mathbb{C}G-$izomorfizam. Stoga $U \cong U_i$. ■

Naravno da se može desiti da je U ireducibilni $\mathbb{C}G-$podmodul od $U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$ (svako U_i ireducibilno) pri čemu je U različito od U_i, kao što sledeći primer pokazuje.

Primer 9.1. *Neka je G bilo koja grupa i V 2−dimenzionalni $\mathbb{C}G-$modul, sa bazom v_1, v_2, tako da $vg = v$ za sve $v \in V$ i $g \in G$. Tada*

$$V = U_1 \oplus U_2,$$

gde su $U_1 = sp(v_1)$ i $U_2 = sp(v_2)$ ireducibilni $\mathbb{C}G-$podmoduli. Međutim, $U = sp(v_1 + v_2)$ je ireducibilni $\mathbb{C}G-$podmodul koji nije jednak U_1 ni U_2.

Definicija 9.1.
1. *Ako je V $\mathbb{C}G-$modul i U je ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul, tada kažemo da je U faktor kompozicije od V ako V ima $\mathbb{C}G-$podmodul koji je izomorfan sa U.*
2. *Za dva $\mathbb{C}G-$modula V i W kažemo da imaju zajednički faktor kompozicije ako postoji ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul koji je faktor kompozicije od oba, V i W.*

Sada dolazimo do glavnog dela ovog poglavlja, koji pokazuje da je svaki ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul faktor kompozicije regularnog $\mathbb{C}G-$modula.

Teorema 9.1. *Posmatrajmo $\mathbb{C}G$ kao regularan $\mathbb{C}G-$modul i zapišimo*

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

kao direktnu sumu ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula. Tada je svaki ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul izomorfan jednom od $\mathbb{C}G-$modula U_i.

Dokaz: Neka je W ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul, i izaberimo nenula vektor $w \in W$. Primetimo da je $\{wr : r \in \mathbb{C}G\}$ $\mathbb{C}G-$podmodul od W; pošto je W ireducibilan, to povlači da je

$$W = \{wr : r \in \mathbb{C}G\}. \tag{3}$$

Sada definišimo $\vartheta : \mathbb{C}G \to W$ sa

$$r\vartheta = wr(r \in \mathbb{C}G).$$

Očigledno je da je ϑ linearna transformacija, i $Im\vartheta = W$ po (3). ϑ je $\mathbb{C}G-$homomorfizam, pošto za $r, s \in \mathbb{C}G$ važi

$$(rs)\vartheta = w(rs) = (wr)s = (r\vartheta)s.$$

Po *Tvrđenju 9.1*, postoji $\mathbb{C}G-$podmodul U od $\mathbb{C}G$, takav da

$$\mathbb{C}G = U \oplus Ker\vartheta \text{ i } U \cong Im\vartheta = W.$$

Kako je W iredicibilan, to je i U iredicibilan. Po *Tvrđenju 9.2.* imamo da je $U \cong U_i$ za neko i; tada $W \cong U_i$, pa je dokaz završen. ■

Ova teorema pokazuje da postoji konačan skup iredicibilnih $\mathbb{C}G-$modula takvih da je svaki iredicibilni $\mathbb{C}G-$modul izomorfan jednom od njih. To formulišemo sledećom posledicom.

Posledica 9.1. *Ako je G konačna grupa, tada postoji samo konačno mnogo neizomorfnih iredicibilnih $\mathbb{C}G-$modula.*

Po *Teoremi 9.1.* za nalaženje svih iredicibilnih $\mathbb{C}G-$modula, potrebno je samo rasčlaniti regularne $\mathbb{C}G-$module na direktnu sumu iredicibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula. To ćemo uraditi za nekoliko primera; međutim to nije praktična metoda proučavanja $\mathbb{C}G-$modula.

Primer 9.2. *1. Neka je $G = C_3 = \langle a : a^3 = 1 \rangle$, i neka je $\omega = e^{2\pi i/3}$. Definišimo $v_0, v_1, v_2 \in \mathbb{C}G$ sa*

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 + a + a^2, \\ v_1 &= 1 + \omega^2 a + \omega a^2, \\ v_2 &= 1 + \omega a + \omega^2 a^2, \end{aligned}$$

i neka je $U_i = sp(v_i)$ za $i = 0, 1, 2$. Tada je $v_1 a = a + \omega^2 a^2 + \omega 1 = \omega v_1$, i slično

$$v_i a = \omega^i v_i \text{ za } i = 0, 1, 2.$$

Stoga, U_i je $\mathbb{C}G-$podmodul od $\mathbb{C}G$ za $i = 0, 1, 2$.

Lako se proveri da je v_0, v_1, v_2 baza za $\mathbb{C}G$, i stoga je

$$\mathbb{C}G = U_0 \oplus U_1 \oplus U_2,$$

direktna suma iredicibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i. Po Teoremi 9.1, svaki iredicibilni $\mathbb{C}G-$modul je izomorfan sa U_0, U_1 ili U_2. Iredicibilna reprezentacija od G koja odgovara U_i je reprezentacija ρ_{ω^i} iz Primera 8.1(1).

2. Neka je $G = D_6 = \langle a, b : a^3 = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1}\rangle$*. Napišimo* $\mathbb{C}G$ *kao direktnu sumu ireducibilnih* $\mathbb{C}G-$*podmodula. Neka je* $\omega = e^{2\pi i/3}$ *i definišimo*

$$\begin{array}{ll} v_0 = 1 + a + a^2, & w_0 = bv_0 \quad (= b + ba + ba^2), \\ v_1 = 1 + \omega^2 a + \omega a^2, & w_1 = bv_1 \\ v_2 = 1 + \omega a + \omega^2 a^2, & w_2 = bv_2. \end{array}$$

Kao u prvom primeru, $v_i a = \omega^i$ *za* $i = 0, 1, 2$*, i zato su* $sp(v_i)$ *i* $sp(w_i)$ $\mathbb{C}\langle a\rangle$*. Sada, primetimo da*

$$\begin{array}{ll} v_0 b = w_0, & w_0 b = v_0, \\ v_1 b = w_2, & w_1 b = v_2, \\ v_2 b = w_1, & w_2 b = v_1. \end{array}$$

Prema tome, $sp(v_0, w_0)$*,* $sp(v_1, w_2)$ *i* $sp(v_2, w_1)$ *su* $\mathbb{C}\langle b\rangle-$*moduli, i stoga su* $\mathbb{C}G-$ *podmoduli od* $\mathbb{C}G$*.* $\mathbb{C}G-$*podmoduli* $U_3 = sp(v_1, w_2)$ *i* $U_4 = sp(v_2, w_1)$ *su ireducibilni. Međutim,* $sp(v_0, w_0)$ *je reducibilan, jer su* $U_1 = sp(v_0 + w_0)$ *i* $U2 = sp(v_0 - w_0)$ $\mathbb{C}G-$*podmoduli.*
Sada je $v_0, v_1, v_2, w_0, w_1, w_2$ *je baza za* $\mathbb{C}G-$*, i sledi*

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4,$$

je direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$ *podmodula. Primetimo da je* U_1 *trivijalni* $\mathbb{C}G-$*podmodul, i da* U_1 *nije izomorfan sa* U_2*, drugim jednodimenzionalnim* U_i*. Ali* $U_3 \cong U_4$ *(postoji* $\mathbb{C}G-$*izomorfizam koji slika* $v_1 \to w_1$ *,* $w_2 \to v_2$ *).*

Iz Teoreme 9.1. zaključujemo da postoje tačno tri neizomorfna ireducibilna $\mathbb{C}G-$*modula,* U_1 *,* U_2 *i* U_3*. Stoga, svaka ireducibilna reprezentacija od* D_6 *nad* $\mathbb{C}$ *je ekvivalentna tačno jednom od sledećih:*

$$\rho_1 : a \to (1), b \to (1);$$
$$\rho_2 : a \to (1), b \to (-1);$$
$$\rho_3 : a \to \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix}, b \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

10 Više o algebri grupe

Sada idemo dublje u strukturu algebre grupe $\mathbb{C}G$ konačne grupe G. Kao u *Poglavlju* 9, pišemo kao

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

direktnu sumu ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula U_i. U *Teoremi 9.1* smo dokazali da svaki ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul U je izomorfan sa jednim od U_i. Sada se postavlja pitanje: koliko U_i je izomorfno sa U? Odgovor na ovo pitanje je $\dim U$ (videti *Teoremu 10.1.*).
Naš dokaz *Teoreme 10.1.* se bazira na teoriji vektorskog prostora $\mathbb{C}G-$homomorfizama iz jednog $\mathbb{C}G-$modula u drugi.

10.1 Prostor $\mathbb{C}G-$homomorfizama

Definicija 10.1. *Neka su V i W $\mathbb{C}G-$moduli. Označavamo sa $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ skup svih $\mathbb{C}G-$homomorfizama iz V u W.*
Definišemo sabiranje i množenje skalarom u $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ na slede 'ci način: za $\vartheta, \phi \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$, definisemo $\vartheta + \phi$ i $\lambda\vartheta$ sa

$$v(\vartheta + \phi) = v\vartheta + v\phi,$$

$$v(\lambda\vartheta) = \lambda(v\vartheta)$$

za svako $v \in V$. Tada $\vartheta + \phi, \lambda\vartheta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$. Na osnovu ove definicije je $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ vektorski prostor nad $\mathbb{C}$.

Počinjemo proučavanje vektorskog prostora $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$ sa jednostavnom posledicom Šurove leme.

Tvrđenje 10.1. *Pretpostavimo da su V i W ireducibilni $\mathbb{C}G-$moduli. Tada*

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)) = \begin{cases} 1, & \text{ako } V \cong W, \\ 0, & \text{ako } V \ncong W. \end{cases}$$

Dokaz: Ako $V \ncong W$ tvrđenje sledi iz Šurove leme.

Sada pretpostavimo da $V \cong W$, i neka je $\vartheta : V \to W$ $\mathbb{C}G-$izomorfizam. Ako $\phi \in Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$, tada je $\phi\vartheta^{-1}$ $\mathbb{C}G-$izomorfizam iz V u V, pa po Šurovoj lemi postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ takvo da

$$\phi\vartheta^{-1} = \lambda 1_V.$$

Tada je $\phi = \lambda\vartheta$, i dalje je $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) = \{\lambda\vartheta : \lambda \in \mathbb{C}\}$ jednodimenzionalni prostor. ■

Podsetimo se definicije faktora kompozicije $\mathbb{C}G-$modula (videti *Definiciju 9.1.*).

Tvrđenje 10.2. *Neka su V i W $\mathbb{C}G-$moduli i pretpostavimo da je $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W) \neq \{0\}$. Tada V i W imaju zajednički faktor kompozicije.*

Dokaz: Neka je ϑ nenula element iz $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$. Tada je $V = Ker\vartheta \oplus U$, za neki nenula $\mathbb{C}G-$modul U, po Maškeovoj teoremi. Neka je X ireducibilni $\mathbb{C}G-$podmodul od U. Pošto $X\vartheta \neq \{0\}$, ňa osnovu Surove leme je $X\vartheta \cong X$. Prema tome X je zajednički faktor kompozicije za V i W. ■

Sledećih nekoliko tvrđenja pokazuju kako se u opštem slučaju računa dimenzija $Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)$. Ključni korak je prikazan sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 10.3. *Neka su V, V_1, V_2 i W, W_1, W_2 $\mathbb{C}G-$moduli. Tada*

1. $\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2) = \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1)) + \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_2))$,

2. $\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)) = \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_1, W)) + \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_2, W))$.

Dokaz:

1. Definišimo funkcije $\pi_1 : W_1 \oplus W_2 \to W_1$ i $\pi_2 : W_1 \oplus W_2 \to W_2$ na sledeći način

$$(w_1 + w_2)\pi_1 = w_1,$$

$$(w_1 + w_2)\pi_2 = w_2$$

za sve $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. π_1 i π_2 su $\mathbb{C}G-$homomorfizmi. Ako $\vartheta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$, tada $\vartheta\pi_1 \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ i $\vartheta\pi_2 \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$.

Sada definišimo funkciju f iz $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ u (spoljašnju) direktnu sumu $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1)$ i $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$ na sledeći način

$$f : \vartheta \to (\vartheta\pi_1, \vartheta\pi_2)(\vartheta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2).$$

Očigledno je da je f linearna transformacija. Pokazujemo da je f invertibilno.

Za zadato $\phi_i \in Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_i)(i = 1, 2)$, funkcija

$$\phi : v \to v\phi_1 + v\phi_2 \ (v \in V)$$

pripada $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$, i slika od ϕ funkcijom f je (ϕ_1, ϕ_2). Stoga, f je surjektivna.

Ako je $\vartheta \in Kerf$, tada $v\vartheta\pi_1 = 0$ i $v\vartheta\pi_2 = 0$, za sve $v \in V$, pa sledi da je $v\vartheta = v\vartheta(\pi_1 + \pi_2) = 0$. Sledi $\vartheta = 0$, pa je $Kerf = \{0\}$ i f je injektivna.

Pokazali smo da je f invertibilna linearna transformacija iz $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus W_2)$ u $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1) \oplus Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_2)$. Sledi da ova dva vektorska prostora imaju iste dimenzije, pa smo dokazali deo (1).

2. Za $\vartheta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$, definiv́ si-mo $\vartheta_{V_i} : V_i \to W \ i = 1, 2$ kao restrikciju ϑ na V_i; tj. ϑ_{V_i} je funkcija

$$v_i\vartheta_{V_i} = v_i\vartheta \ (v_i \in V_i).$$

Tada $\vartheta_{V_i} \in Hom_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$ za $i = 1, 2$.

Sada neka je h funkcija iz $Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$ u $Hom_{\mathbb{C}G}(V_1, W) \oplus Hom_{\mathbb{C}G}(V_2, W)$ zadata sa

$$h : \vartheta \to (\vartheta_{V_1}, \vartheta_{V_2}) \ \vartheta \in Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W).$$

Očigledno je h injektivna linearna transformacija. Zadato $\phi_i \in Hom_{\mathbb{C}G}(V_i, W)$ $(i = 1, 2)$, funkcija

$$\phi : v_1 + v_2 \to v_1\phi_1 + v_1\phi_2 \ (v_i \in V_i \text{ za } i = 1, 2)$$

pripada $Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus V_2, W)$ i ima sliku (ϕ_1, ϕ_2) preslikavanjem h. Dakle, h je surjektivna. Pokazali smo da je h invertibilna linearna transformacija, odnosno deo (2).

■

Sada pretpostavimo da imamo $\mathbb{C}G-$module V, W, V_i, W_j $(1 \leq i \leq r)$, $(1 \leq j \leq s)$. Indukcijom, koristeći *Tvrđenje 10.3.* imamo

(♣)

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{j=1}^{s} \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V, W_j))$$

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_i, W)).$$

Iz prethodna dva sledi

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_1 \oplus \cdots \oplus V_r, W_1 \oplus \cdots \oplus W_s)) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V_i, W_j)).$$

Ako primenimo (3) kada su svi V_i i W_j ireducibilni, koristeći *Tvrđenje 10.1.*, možemo naći $\dim Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$ uopšte. U sledećoj posledici izdvojićemo slučaj kada je jedan od $\mathbb{C}G-$modula ireducibilan.

Posledica 10.1. *Neka je V $\mathbb{C}G-$modul takav da*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s,$$

gde je svako U_i ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul. Neka je W proizvoljni ireducibilni $\mathbb{C}G-$modul. Tada dimenzije $Hom_{\mathbb{C}G}(V, W)$ i $Hom_{\mathbb{C}G}(W, V)$ su jednake i jednake broju $\mathbb{C}G-$modula U_i takvih da $U_i \cong W$.

Dokaz: Iz (10.1)

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(V,W)) = \sum_{i=1}^{s} \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(U_i,W)),$$
$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(W,V)) = \sum_{i=1}^{s} \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(W,U_i)).$$

Sledi po *Tvrđenju 10.1.*

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(U_i,W)) = \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(W,U_i)) = \begin{cases} 1, & ako \quad U_i \cong W, \\ 0, & ako \quad U_i \ncong W. \end{cases}$$

■

Primer 10.1. *Za $G = D_6$ videli smo u Primeru 9.2.(2) da je*

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4,$$

direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula, gde važi $U_3 \cong U_4$, ali U_3 nije izomorfno sa U_1 ni sa U_2. Iz Posledice 10.1 sledi

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U_3)) = \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(U_3,\mathbb{C}G)) = 2.$$

Sledeće tvrđenje se odnosi na prostor $\mathbb{C}G-$homomorfizama iz regularnog $\mathbb{C}G-$modula u bilo koji $\mathbb{C}G-$modul. Kombinovanjem sa Posledicom 10.1. doćićemo do suštine ovog poglavlja.

Tvrđenje 10.4. *Ako je U $\mathbb{C}G-$modul, tada*

$$\dim(Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)) = \dim U.$$

Dokaz: *Neka je $d = \dim U$. Biramo bazu $u_1, \dots u_d$ za U. Za $1 \leq i \leq d$, definišimo $\phi_i : \mathbb{C}G \to U$ sa*

$$r\phi_i = u_i r \ (r \in \mathbb{C}G).$$

Tada $\phi_i \in Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)$ pošto za sve $r,s \in \mathbb{C}G$ važi

$$(rs)\phi_i = u_i(rs) = (u_i r)s = (r\phi_i)s.$$

Dokazaćemo da je $\phi_1, \dots, \phi_d$ baza od $Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)$.

Pretpostavimo da $\phi \in Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)$. Tada

$$1\phi = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d$$

za neko $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Pošto je ϕ $\mathbb{C}G-$homomorfizam, za sve $r \in \mathbb{C}G$ imamo

$$r\phi = (1r)\phi = (1\phi)r = \lambda_1 u_1 r + \cdots + \lambda_d u_d r = r(\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d).$$

Sledi $\phi = \lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d$. Stoga $\phi_1, \dots, \phi_d$ razapinju $Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G,U)$.

Sada pretpostavimo da

$$\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d = 0 \ (\lambda_i \in \mathbb{C})$$

Vrednujući obe strane u jedinici imamo

$$0 = 1(\lambda_1\phi_1 + \cdots + \lambda_d\phi_d) = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_d u_d,$$

pa sledi da je $\lambda_i = 0$ *za sve* i. *Stoga,* $\phi_1, \dots, \phi_d$ *je baza za* $Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)$, *koje je na osnovu toga dimenzije* d. ■

Sada dolazimo do glavne teoreme ovog poglavlja, koja nam govori koliko često se svaki ireducibilni $\mathbb{C}G-$*modul pojavljuje u regularnom* $\mathbb{C}G-$*modulu.*

Teorema 10.1. *Pretpostavimo da*

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$*podmodula. Ako je* U *ireducibilni* $\mathbb{C}G-$*modul, tada je broj* $\mathbb{C}G-$*modula* U_i, *gde je* $U_i \cong U$, *jednak dimenziji* U.

Dokaz: *Po Tvrđenju 10.4,*

$$\dim U = \dim(Hom_{\mathbb{C}G}(\mathbb{C}G, U)),$$

i to je po Posledici 10.1 jednako broju U_i *takvih da* $U_i \cong U$. ■

Primer 10.2. *Podsetimo se iz Primera 9.2.(2) da ako je* $G = D_6$ *tada*

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4,$$

gde su U_1, U_2 *neizomorfni jednodimenzionalni* $\mathbb{C}G-$*moduli, i* U_3, U_4 *su izomorfni ireducibilni dvodimenzionalni* $\mathbb{C}G-$*moduli. Ovo ilustruje Teoremu 10.1:*

$$U_1 \text{ jedno pojavljivanje, } \dim U_1 = 1;$$
$$U_2 \text{ jedno pojavljivanje, } \dim U_2 = 1;$$
$$U_3 \text{ dva pojavljivanja, } \dim U_3 = 2.$$

Zaključujemo ovo poglavlje bitnom posledicom Teoreme 10.1 koja se odnosi na dimenzije ireducibilnih $\mathbb{C}G-$*modula.*

Definicija 10.2. *Kažemo da ireducibilni* $\mathbb{C}G-$*moduli* $V_1, \dots, V_k$ *formiraju kompletni skup neizomorfnih ireducibilnih* $\mathbb{C}G-$*modula ako je svaki ireducibilni* $\mathbb{C}G-$*modul izomorfan sa nekim* V_i, *i nikoja dva* $V_1, \dots, V_k$ *nisu izomorfna. (Po Posledici 9.1, za svaku konačnu grupu* G *postoji kompletni skup neizomorfnih ireducibilnih* $\mathbb{C}G-$*modula.)*

Teorema 10.2. *Neka $V_1, \ldots, V_k$ formiraju komletni skup neizomorfnih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula. Tada*

$$\sum_{i=1}^{k} (\dim V_i)^2 = |G|.$$

Dokaz: *Neka je $\mathbb{C}G = U + 1 \oplus \cdots \oplus U_r$, direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula. Za $1 \leq i \leq k$, imamo $d_i = \dim V_i$. Na osnovu Teoreme 10.1. za svako i, broj $\mathbb{C}G-$modula U_j takvih da $U_j \cong V_i$ jednak je d_i. Stoga,*

$$\dim \mathbb{C}G = \dim U_1 + \cdots + \dim U_r = \sum_{i=1}^{k} d_i(\dim V_i) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2.$$

$\dim \mathbb{C}G = |G|$, *pa dokaz sledi.* ■

11 Klase konjugacije

Na kraju ovog poglavlja dokazaćemo tvr đenje koje povezuje klase konjugacije grupe sa strukturom algebre grupe.
Kroz celo poglavlje, G je konačna grupa.

11.1 Klase konjugacije

Definicija 11.1. *Neka su $x, y \in G$. Kažemo da je x konjugat od y u G ako*

$$y = g^{-1}xg \text{ za neko } g \in G.$$

Skup svih elemenata konjugata od x u G je

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\},$$

i naziva se klasa konjugacije od x u G.

Različite klase konjugacije nemaju zajedničkih elemenata.

Tvrđenje 11.1. *Ako su $x, y \in G$, tada važi ili $x^G = y^G$ ili $x^G \cap y^G$ je prazan skup.*

Dokaz: *Pretpostavimo da je $x^G \cap y^G$ neprazan, i izaberimo $z \in x^G \cap y^G$. Tada postoje $g, h \in G$ takvi da*

$$z = g^{-1}xg = h^{-1}yh.$$

Stoga $x = gh^{-1}yhg^{-1} = k^{-1}yk$, gde je $k = hg^{-1}$. Pa važi

$$\begin{aligned} a \in x^G &\Rightarrow a = b^{-1}xb \text{ za neko } b \in G \\ &\Rightarrow a = b^{-1}k^{-1}ykb \\ &\Rightarrow a = c^{-1}yc \text{ gde je } c = kb \\ &\Rightarrow a \in y^G. \end{aligned}$$

Sledi da je $x^G \subseteq y^G$. Slično se dokazuje $y^G \subseteq x^G$ (koristeći $y = kxk^{-1}$), i stoga $x^G = y^G$. ■

Pošto svaki element x iz G pripada klasi konjugacije x^G (kako je $x = 1^{-1}x1$ sa $1 \in G$), G je unija njenih klasa konjugacije i zaključujemo

Posledica 11.1. *Svaka grupa je unija klasa konjugacije, i različite klase konjugacije su disjunktne.*

Konjugovanost je relacija ekvivalencije, i klase konjugacije su klase ekvivalencije.

Definicija 11.2. *Ako je $G = x_1^G \cup \cdots \cup x_l^G$, gde su klase konjugacije $x_1^G, \ldots, x_l^G$ različite, tada $x_1, \ldots, x_l$ nazivamo predstavnicima klasa konjugacije od G.*

Tvrđenje 11.2. *Neka su $x, y \in G$. Ako je x konjugat od y, tada je x^n konjugat od y^n u G za svaki ceo broj n, i x i y su istog reda.*

Dokaz: *Primetimo da za $a, b \in G$, vazi*

$$g^{-1}abg = (g^{-1}ag)(g^{-1}bg).$$

Stoga $g^{-1}x^ng = (g^{-1}xg)^n$. Pretpostavimo da je x konjugat do y u G, pa je $y = g^{-1}xg$ za neko $g \in G$. Tada je $y^n = g^{-1}x^ng$ i stoga je x^n konjugat od y^n u G. Neka je x reda m. Tada $y^m = g^{-1}x^mg = 1$, i za $0 < r < m$, $y^r = g^{-1}x^rg \neq 1$, pa je y takođe reda m. ■

11.2 Veličine klasa konjugacije

Sledeća teorema određuje veličine klasa konjugacije u G u terminima odre đenih podgrupa koje ćemo sada definisati.

Definicija 11.3. *Neka je $x \in G$. Centralizator od x u G, u oznaci $C_G(x)$, je skup elemenata od G koji komutiraju sa x; tj,*

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gh\}.$$

(Takođe $C_G(x) = \{g \in G : g^{-1}xg = x\}$.)

Lako se proverava da je $C_G(x)$ podgrupa od G. Primetimo da $x \in C_G(x)$ i $\langle x \rangle \subseteq C_G(x)$ za sve $x \in G$.

Teorema 11.1. *Neka je $x \in G$. Tada je veličina klase konjugacije x^G data sa*

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|.$$

Posebno, $|x^G|$ deli $|G|$.

Dokaz: *Primetimo da za $g, h \in G$, važi*

$$g^{-1}xg = h^{-1}xh \Leftrightarrow hg^{-1}x = xhg^{-1} \Leftrightarrow hg^{-1} \in C_G(x) \Leftrightarrow C_G(x)g = C_G(x)h.$$

Imajući ovo u vidu, možemo definisati injektivnu funkciju f iz x^G u skup desnih koseta od $C_G(x)$ u G na sledeći način

$$f : g^{-1}xg \to C_G(x)g(g \in G).$$

Očigledno je da je f surjektivna. Stoga f je bijekcija, što dokazuje da je $|x^G| = |G : C_G(x)|$. ■

Pre nego što sumiramo rad na klasama konjugacije, primetimo da

$$|x^G| = 1 \Leftrightarrow g^{-1}xg = x \text{ za sve } g \in G \Leftrightarrow x \in Z(G) \tag{4}$$

gde je $Z(G)$ centar od G. Time smo dokazali

(4) Jednačina klasa
Neka su $x_1, \ldots, x_l$ predstavnici klasa konjugacije od G. Tada

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} |x_i^G|,$$

gde je $|x_i^G| = |G : C_G(x_i)|$, i oba $|Z(G)|$ i $|x_i^G|$ dele $|G|$.

11.3 Klase konjugacije diedarskih grupa

Iskoristićemo Teoremu 11.1. da nađemo klase konjugacije svih diedarkih grupa.
Neka je $G = D_{2n}$, diedarska grupa reda $2n$. Tada

$$G = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

Kada tražimo klase konjugacije od G, pogodno je razmatrati posebno slučajeve kada je n neparan i kada je n paran.

1. n ***neparan***

   Razmotrimo prvo a^i $(1 \leq i \leq n-1)$. *Pošto* $C_G(a^i)$ *sadrži* $\langle a \rangle$,

$$|G : C_G(a^i)| \leq |G : \langle a \rangle| = 2.$$

   Takođe $b^{-1}a^ib = a^{-1}$, *pa* $\{a^i, a^{-i}\} \subseteq (a^i)^G$. *Kako je* n *neparno,* $a^i \neq a^{-i}$, *tada je* $|(a^i)^G| \geq 2$. *Koristeći Tepremu 11.1, imamo da je*

$$2 \geq |G : C_G(a^i)| = |(a^i)^G| \geq 2$$

   Stoga ovde postoji jednakost i

$$CG(a^i) = \langle a \rangle, (a^i)^G = \{a^i, a^{-i}\}.$$

   Dalje, $C_G(b)$ *sadrži* $\{1, b\}$; *i kako* $b^{-1}a^ib = a^{-i}$, *ni* a^i *ni* a^ib $(1 \leq i \leq n-1)$ *ne komutira sa* b. *Stoga*

$$C_G(b) = \{1, b\}$$

   Po Teoremi 11.1 sledi $|b^G| = n$. *Pošto su svi elementi* a^i *uračunati,* b^G *mora sadrzati* n *preostalih elemenata* G. *To jest,*

$$b^G = \{b, ab, \ldots, a^{n-1}b\}.$$

   Dokazali smo: Diedarska grupa D_{2n} *(*n *neparno) ima tačno* $1/2(n+3)$ *klasa konjugacije:*

$$\{1\}, \{a, a^{-1}\}, \ldots, \{a^{(n-1)/2}\}, \{b, ab, \ldots, a^{n-1}b\}. \tag{5}$$

2. n ***paran***

   Zadajmo $n = 2m$. *Kako je* $b^{-1}a^mb = a^{-m} = a^m$, *centralizator od* a^m *u* G *sadrži i* a *i* b, *i stoga* $C_G(a^m) = G$. *Sledi klasa konjugacije od* a^m *u* G *je samo* $\{a^m\}$. *Kao u prvom slučaju,* $(a^i)^G = \{a^i, a^{-i}$ *za* $1 \leq i \leq m-1$.
   Za svako celobrojno j,

$$a^jba^{-j} = a^{2j}b,\ a^j(ab)a^{-j} = a^{2j+1}b.$$

   Sledi da

$$b^G = \{a^{2j}b : 0 \leq j \leq m-1\},\ (ab)^G = \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq m-1\}.$$

   Stoga
   (♢) *Diedarska grupa* D_{2n} *(*n *paran,* $n = 2m$*) ima tačno m+3 klasa konjugacije:*

$$\{1\}, \{a^m\}, \{a, a^{-1}\}, \ldots, \{a^{m-1}, a^{-m+1}\},$$

$$\{a^{2j}b : 0 \leq j \leq m-1\}, \{a^{2j+1}b : 0 \leq j \leq m-1\}.$$

11.4 Klase konjugacije od S_n

Kasnije će nam biti potrebno da znamo klase konjugacije simetrične grupe S_n.

Tvrđenje 11.3. *Neka je x $k-$ciklus $(i_1 i_2 \dots i_k)$ u S_n, i neka je $g \in S_n$. Tada je $g^{-1}xg$ $k-$ciklus $(i_1 g i_2 g \dots i_k g)$.*

Dokaz: *Neka je $A = \{i_1, \dots, i_k\}$. Za $i_r \in A$,*

$$i_r g(g^{-1}xg) = i_r xg = i_{r+1}g \text{ (ili } i_1 g \text{ ako } r = k).$$

Takođe, za $1 \le i \le n$ i $i \notin A$,

$$ig(g^{-1}xg) = ixg = ig.$$

Stoga $g^{-1}(i_1 i_2 \dots i_k)g = (i_1 g i_2 g \dots i_k g)$, što je i trebalo dokazati. ■

Posmatrajmo sada proizvoljnu permutaciju $x \in S_n$. Tada je

$$x = (a_1 \dots a_{k_1})(b_1 \dots b_{k_2}) \dots (c_1 \dots c_{k_s}),$$

proizvod disjunktnih ciklusa, $k_1 \ge k_2 \ge \dots \ge k_s$. Po Tvrđenju 11.3, za $g \in S_n$ važi

$$\begin{aligned} g^{-1}xg &= g^{-1}(a_1 \dots a_{k_1})gg^{-1}(b_1 \dots b_{k_2})g \dots g^{-1}(c_1 \dots c_{k_s})g \\ &= (a_1 g \dots a_{k_1} g)(b_1 g \dots b_{k_2} g) \dots (c_1 g \dots c_{k_s} g) \end{aligned} \tag{6}$$

Za $(k_1, \dots, k_s)$ kažemo da je ciklusni tip od x, i primetimo da x i $g^{-1}xg$ imaju isti ciklusni tip. Sa druge strane, za bilo koje dve permutacije x, y istog ciklusnog tipa

$$x = (a_1 \dots a_{k_1}) \dots (c_1 \dots c_{k_s}),$$

$$y = (a'_1 \dots a'_{k_1}) \dots (c'_1 \dots c'_{k_s}),$$

(proizvod disjunktnih ciklusa), postoji $g \in S_n$ koje slika $a_1 \to a'_1, \dots, c_{k_s} \to c'_{k_s}$, i po (6),

$$g^{-1}xg = y.$$

Dokazali smo sledeće tvrđenje.

Teorema 11.2. *Za $x \in S_n$ klasa konjugacije x^{S_n} od x u S_n sastoji se od svih permutacija u S_n koje imaju isti ciklusni tip kao x.*

Primer 11.1. *1. Klasa konjugacije od S_3 su*

Klasa	*Ciklusni tip*
$\{1\}$	(1)
$\{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$	(2)
$\{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$	(3)

2. *Klasa konjugacije od (1 2)(3 4) u S_4 se sastoji od svih elemenata ciklusnog tipa (2,2) i to je*

$$\{(1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

3. *Postoji tačno pet klasa konjugacije S_4, sa predstavnicima (pogledati Definiciju 11.2):*

$$1,\ (1\ 2),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 2\ 3\ 4).$$

Da izračunamo veličine klasa konjugacije, prosto izbrojimo broj $2-$*ciklusa,* $3-$*ciklusa, itd. Broj* $2-$*ciklusa je jednak broju parova koji mogu biti izabrani između* $\{1,2,3,4\}$*, što je* $\binom{4}{2}=6$*. Broj* $3-$*cliklusa je* 4×2 *(4 za izbor fiksne tačke i 2 jer postoje dva* $3-$*ciklusa koji fiksiraju datu tačku). Slično postoje tri elementa ciklusnog tipa (2,2) i postoji šest* $4-$*ciklusa. Stoga za* $G=S_4$*, predstavnici klasa konjugacije* g*, veličine klasa konjugacije* $|g^G|$ *i redovi centralizatora* $|C_G(g)|$ *(dobijeni koristeći Teoremu 11.1) su sledeći:*

Predstavnik	g	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)
Veličina klase	$\|g^G\|$	1	6	8	3	6
	$\|C_G(g)\|$	24	4	3	8	4

Proveravamo računicu napominjući da

$$|S_4| = 1+6+8+3+6.$$

4. *Slično, odgovarajuća tabela za* $G=S_5$ *je*

Pred.	g	1	(1 2)	(1 2 3)	(1 2)(3 4)	(1 2 3 4)	(1 2 3)(4 5)	(1 2 3 4 5)
	$\|g^G\|$	1	10	20	15	30	20	24
	$\|C_G(g)\|$	120	12	6	8	4	6	5

11.5 Klase konjugacije od A_n

Za datu parnu permutaciju $x\in A_n$*, videli smo u Teoremi 11.2 da se klasa konjugacije* x^{S_n} *sastoji od svih permutacija u* S_n *koje imaju isti ciklusni tip kao* x*. Klasa konjugacije* x^{A_n} *od* x *u* A_n*, data kao*

$$x^{A_n} = \{g^{-1}xg : g\in A_n\},$$

naravno sadržano u x^{S_n}*; ali,* x^{A_n} *možda nije jednako sa* x^{S_n}*. Prost primer gde jednakost ne važi, podrazumevajući da* $x=(1\,2\,3)\in A_3$*; ovde* $x^{A_3}=\{x\}$*, dok je* $x^{S_3}=\{x,x^{-1}\}$*.*
Sledeće tvrđenje određuje tačno kada su x^{A_n} *i* x^{S_n} *jednaki, i šta se dešava kada jednakost ne važi.*

Tvrđenje 11.4. *Neka je $x \in A_n$ i neka je $n > 1$.*

1. *Ako x komutira sa nekom neparnom permutacijom u S_n, tada $x^{S_n} = x^{A_n}$.*
2. *Ako x ne komutira ni sa jednom neparnom permutacijom u S_n tada se x^{S_n} deli na dve klase konjugacije u A_n iste veličine, sa predstavnicima x i $(1\,2)^{-1}x(1\,2)$.*

Dokaz:

1. *Predpostavimo da x komutira sa neparnom permutacijom g. Neka $y \in x^{S_n}$, tako da $y = h^{-1}xh$ za neko $h \in S_n$. Ako je h parno tada $y \in x^{A_n}$; i ako je h neparno tada $gh \in A_n$ i*
$$y = h^{-1}xh = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-1}x(gh),$$
pa opet $y \in x^{A_n}$. Stoga $x^{S_n} \subseteq x^{A_n}$ i $x^{S_n} = x^{A_n}$.

2. *Pretpostavimo da x ne komutira ni sa jednom neparnom permutacijom. Tada*
$$C_{S_n}(x) = C_{A_n}(x).$$
Stoga po Teoremi 11.1. (i kako je $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$
$$|x^{A_n}| = |A_n : C_{A_n}(x)| = \tfrac{1}{2}|S_n : C_{A_n}(x)| = \tfrac{1}{2}|S_n : C_{S_n}(x)| = \tfrac{1}{2}|x^{S_n}|.$$
Primetimo sada da je
$$\{h^{-1}xh : h \text{ je neparno}\} = ((12)^{-1}x(12))^{A_n}$$
pošto svaka neparna permutacija ima oblik $(12)a$ za neko $a \in A_n$. Sada
$$x^{S_n} = \{h^{-1}xh : h \text{ je parno}\} \cup \{h^{-1}xh : h \text{ je neparno}\} = x^{A_n} \cup ((1\,2)^{-1}x(1\,2))^{A_n}.$$

Posto je $|x^{A_n}| = \frac{1}{2}|x^{S_n}|$, klase konjugacije x^{A_n} i $((1\,2)^{-1}x(1\,2))^{A_n}$ moraju biti disjunktne i jednakih veličina, što je trebalo dokazati. ■

Primer 11.2. *1. Nalazimo klase konjugacije od A_4. Elementi A_4 su identitet, zajedno sa permutacijama ciklusnog tipa $(2, 2)$ i (3). Pošto $(1\,2)(3\,4)$ komutira sa neparnom permutacijom $(1\,2)$, iz Tvrđenja 11.4. sledi da*
$$(1\,2)(3\,4)^{A_4} = (1\,2)(3\,4)^{S_4} = \{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$
Ipak, 3-ciklus (123) ne komutira ni sa jednom neparnom permutacijom: jer ako $g^{-1}(1\,2\,3)g = (1\,2\,3)$ tada je $(1\,2\,3) = (1\,g\,2\,g\,3\,g)$ po Tvrđenju 11.1 , pa g je $1, (1\,2\,3)$ ili $(1\,3\,2)$, parna permutacija. Stoga po Tvrđenju 11.4 , $(1\,2\,3)^{S_4}$ se deli na dve klase konjugacije u A_4 veličine 4, sa predstavnicima $(1\,2\,3)$i $(1\,2)^{-1}(1\,2\,3)(1\,2) = (1\,3\,2)$.
Sledi klase konjugacije od A_4 su

Predstavnik	*1*	*(1 2)(3 4)*	*(1 2 3)*	*(1 3 2)*
Veličina klase	*1*	*3*	*4*	*4*
Red centralizatora	*12*	*4*	*3*	*3*

2. *Nalazimo klase konjugacije od* A_5. *Neidentične parne permutacije u* S_5 *su ciklusnog tipa* (3), $(2,2)$ *i* (5). *Elementi* $(1\,2\,3)$ *i* $(2\,3)(4\,5)$ *komutiraju sa neparnom permutacijom* $(4\,5)$*; ali* $(1\,2\,3\,4\,5)$ *ne komutira ni sa jednom neparnom permutacijom. Iz Tvrđenja 11.4 sledi da su pedstavnici klase konjugacije od* A_5 $1, (1\,2\,3), (1\,2)(3\,4), (1\,2\,3\,4\,5)$, *i* $(1\,2)^{-1}(1\,2\,3\,4\,5)(1\,2) = (1\,3\,4\,5\,2)$. *Koristeći Tvrđenje 11.4(2) , vidimo da su veličine klasa i redovi centralizatora prikazani tabelom:*

Predstavnik	*1*	*(1 2 3)*	*(1 2)(3 4)*	*(1 2 3 4 5)*	*(1 3 4 5 2)*
Veličina klase	*1*	*20*	*15*	*12*	*12*
Red centralizatora	*60*	*3*	*4*	*5*	*5*

11.6 Normalne podgrupe

Normalne podgrupe su povezane sa klasama konjugacije sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 11.5. *Neka je* H *podgrupa grupe* G. *Tada* $H \lhd G$ *ako i samo ako je* H *unija klasa konjugacije od* G.

Dokaz: *Ako je* H *unija klasa konjugacije, tada*

$$h \in H, g \in G \Rightarrow g^{-1}hg \Rightarrow H,$$

pa $g^{-1}Hg \subseteq H$. *Stoga* $H \lhd G$.
Obratno, ako je $H \lhd G$ *tada za sve* $h \in H, g \in G$, *imamo da* $g^{-1}hg \in H$, *pa* $h^G \subseteq H$. *Sledi*

$$H = \bigcup_{h \in H} h^G,$$

pa je H *unija klase konjugacije od* G. ■

Primer 11.3. *Nalazimo sve normalne podgrupe od* S_4. *Neka je* $H \lhd S_4$. *Tada po Tvrđenju 11.5 ,* H *je unija klasa konjugacije od* S_4. *Kao što smo videli u Primeru 11.1(3), ove klase konjugacije su veličina* $1, 6, 8, 3, 6$. *Pošto* $|H|$ *deli* 24 *po Lagranževoj teoremi, i* $1 \in H$, *postoje samo četiri mogućnosti:*

$$|H| = 1, 1+3, 1+8+3 \text{ ili } 3+6+8+3+6.$$

U prvom slučaju $H = \{1\}$, u poslednjem slučaju $H = S_4$, i u trećem slučaju $H = A_4$. U slučaju gde je $|H| = 1 + 3$, imamo

$$H = 1^{S_4} \cup (1\,2)(3\,4)^{S_4} = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$

Lako se proverava da je ovo podgrupa od S_4; pišemo ga kao V_4.
Pokazali smo da S_4 ima tačno četiri normalne podgrupe:

$$\{1\}, S_4, A_4 \text{ i } V_4 = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$

11.7 Centar algebre grupe

U ovom delu povezaćemo klase konjugacije grupe G sa centrom algebre grupe $\mathbb{C}G$. Podsetimo se iz Definicije 8.1 da je centar od $\mathbb{C}G$

$$Z(\mathbb{C}G) = \{z \in \mathbb{C}G : zr = rz \text{ za sve } r \in \mathbb{C}G\}.$$

Znamo da je $Z(\mathbb{C}G)$ podprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}G$. Postoji baza za ovaj podprostor koja se moze opisati u terminima klasa konjugacije od G.

Definicija 11.4. *Neka su $C_1, \ldots, C_l$ različite klase konjugacije od G. Za $1 \le i \le l$, definišimo*

$$\overline{C_i} = \sum_{g \in C_i} g \in \mathbb{C}G.$$

Elementi $\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_l}$ od $\mathbb{C}G$ se zovu sume klasa.

Tvrđenje 11.6. *Sume klasa $\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_l}$ formiraju bazu od $Z(\mathbb{C}G)$.*

Dokaz: *Prvo pokazujemo da svaki $\overline{C_i}$ pripada $Z(\mathbb{C}G)$. Neka se C_i sastoji od r različitih konjugata $y_1^{-1}gy_1, \ldots, y_r^{-1}gy_r$ elementa g, i*

$$\overline{C_i} = \sum_{j=1}^{r} y_j^{-1} g y_j.$$

Za sve $h \in G$,

$$h^{-1}\overline{C_i}h = \sum_{j=1}^{r} h^{-1} y_j^{-1} g y_j h.$$

Kako j ide od 1 do r, elementi $h^{-1}y_j^{-1}gy_jh$ prolaze kroz C_i, pošto

$$h^{-1}y_j^{-1}gy_jh = h^{-1}y_k^{-1}gy_kh \Rightarrow y_j^{-1}gy_j = y_k^{-1}gy_k.$$

Stoga

$$\sum_{j=1}^{r} h^{-1}y_j^{-1}gy_jh = \overline{C_i},$$

pa je $h^{-1}\overline{C_i}h = \overline{C_i}$. *To jest,*

$$\overline{C_i}h = h\overline{C_i}.$$

Sledi da svaki $\overline{C_i}$ *komutira sa svim* $h \in G$, *stoga i sa svakim* $\sum_{h\in G}\lambda_h h \in \mathbb{C}G$, *pa tako* $\overline{C_i} \in Z(\mathbb{C}G)$.

Zatim, primetimo da su $\overline{C_1},\ldots,\overline{C_l}$ *linearno nezavisne: ako* $\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\overline{C_i} = 0$ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$, *tada svi* $\lambda_i = 0$ *kako su klase* $C_1,\ldots,C_l$ *u parovima disjunktne po Posledici 11.1.*

Ostaje da pokažemo da $\overline{C_1},\ldots,\overline{C_l}$ *razapinju* $Z(\mathbb{C}G)$. *Neka je* $r = \sum_{g\in G}\lambda_g g \in Z(\mathbb{C}G)$. *Za* $h \in G$, *imamo* $rh = hr$, *pa je* $h^{-1}rh = r$. *To jest,*

$$\sum_{g\in G}\lambda_g h^{-1}gh = \sum_{g\in G}\lambda_g g.$$

Sledi da za svaki $h \in G$, *koeficijent* λ_g *od* g *je jednak koeficijentu* $\lambda_{h^{-1}gh}$ *od* $h^{-1}gh$. *Tj. funkcija* $g \to \lambda_g$ *je konstantna na klasama konjugacije od* G. *Sledi da je* $r = \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\overline{C_i}$ *gde je* λ_i *koeficijent* λ_{g_i} *za neko* $g_i \in C_i$. *Time je dokaz završen.* ■

12 Karakteri

Pretpostavimo da je $\rho : G \to GL(n,\mathbb{C})$ *reprezentacija konačne grupe* G. *Svakoj* $n\times n$ *matrici* $g\rho$ $(g \in G)$ *pridružujemo kompleksan broj dobijen sabiranjem dijagonalnih elemenata matrice, i ovaj broj označavamo sa* $\chi(g)$. *Funkcija* $\chi : G \to \mathbb{C}$ *se naziva karakter reprezentacije* ρ *. Karakter reprezentacije ima puno značajnih osobina, i one su bitne za računanje u teoriji reprezentacija. U ovom delu prikazaćemo neke osnovne osobine i primere.*

12.1 Trag matrice

Definicija 12.1. *Ako je* $A = (a_{ij})$ $n\times n$ *matrica, tada je trag matrice* A, *u oznaci* trA, *zadat na sledeći način*

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

To jest, trag matrice A je suma dijagonalnih članova matrice A.

Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza.

Tvrđenje 12.1. *Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ $n \times n$ matrice. Tada važi*

$$trA(A + B) = trA + trB, \text{ i}$$
$$tr(AB) = tr(BA).$$

Ako je T invertibilna $n \times n$ matrica, tada

$$tr(T^{-1}AT) = trA.$$

Primetimo da, za razliku od determinante, trag nije multiplikativan, tj. $tr(AB)$ ne mora biti jednako $(trA)(trB)$.

12.2 Karakteri

Definicija 12.2. *Predpostavimo da je V $\mathbb{C}G-$modul sa bazom $\mathcal{B}$. Tada je karakter od V funkcija $\chi : G \to \mathbb{C}$ definisana na sledeći način*

$$\chi(g) = tr[g]_{\mathcal{B}} \ (g \in G).$$

Karakter od V ne zavisi od baze $\mathcal{B}$, jer ako su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$ baze od V, tada je

$$[g]_{\mathcal{B}'} = T^{-1}[g]_{\mathcal{B}}T$$

za neke invertibilne matrice T i po Tvrđenju 12.1,

$$tr[g]_{\mathcal{B}'} = tr[g]_{\mathcal{B}} \text{ za sve } g \in G.$$

Definišimo karakter reprezentacije $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ da bude karakter χ odgovarajućeg $\mathbb{C}G-$modula $\mathbb{C}^n$, naime

$$\chi(g) = tr(g\rho) \ g \in G$$

Definicija 12.3. *Kažemo da je χ karakter od G ako je χ karakter od nekog $\mathbb{C}G-$modula. Dalje, χ je ireducibilan karakter od G ako je χ karakter ireducibilnog $\mathbb{C}G-$modula; i χ je reducibilan ako je karakter reducibilnog $\mathbb{C}G-$modula.*

Primetimo da pišemo karakter kao funkcije s leva. To jest, pisemo $\chi(g)$ a ne $g\chi$.

Tvrđenje 12.2. 1. *Izomorfni $\mathbb{C}G-$moduli imaju isti karakter.*

2. *Ako su x i y konjugovani elementi grupe G, tada*

$$\chi(x) = \chi(y)$$

za sve karaktere χ od G.

Dokaz:

1. *Predpostavumo da su V i W izomorfni $\mathbb{C}G-$moduli. Tada postoji baza $\mathcal{B}_1$ za V i baza $\mathcal{B}_2$ za W takve da*

$$[g]_{\mathcal{B}1} = [g]_{\mathcal{B}2} \text{ za sve } g \in G.$$

Kao posledica važi $tr[g]_{\mathcal{B}1} = tr[g]_{\mathcal{B}2}$ za sve $g \in G$, tako i V i W imaju isti karakter.

2. *Predpostavimo da su x i y konjugovani elementi od G, takvi da važi $x = g^{-1}yg$ za neko $g \in G$. Neka je V $\mathbb{C}G-$modul, i neka je $\mathcal{B}$ baza za V. Tada*

$$[x]_{\mathcal{B}} = [g^{-1}yg]_{\mathcal{B}} = [g]_{\mathcal{B}}^{-1}[y]_{\mathcal{B}}[g]_{\mathcal{B}}.$$

Iz Tvrđenja 12.1. važi $tr[x]_{\mathcal{B}} = tr[y]_{\mathcal{B}}$. Stoga $\chi(x) = \chi(y)$, gde je χ karakter od V. ■

Tvrđenje koje odgovara Tvrđenju 12.2.(1) za reprezentacije je da ekvivalentne reprezentacije imaju isti karakter.

Kasnije ćemo dokazati obrat Tvrđenja 12.2.(1): ako dva $\mathbb{C}G-$modula imaju isti karakter, tada su oni izomorfni.

Definicija 12.4. *Ako je χ karakter $\mathbb{C}G-$modula V, tada se dimenzija od V naziva stepen od χ.*

Primer 12.1. 1. *Ako je V jednodimenzioni $\mathbb{C}G$-modul, onda za svako $g \in G$ postoji kompleksan broj λ_g takav da $vg = \lambda_g v$ za svako $v \in V$. Karakter χ od V je dat sa $\chi(g) = \lambda_g$ za $g \in G$ i χ ima stepen 1. Karakteri stepena 1 nazivaju se linearni karakteri i oni su ireducibilni.*
Primetimo da nam Teorema 8.2 daje sve ireducibilne karaktere konačnih abelovih grupa, svi su linearni.
Svaki linearni karakter od G je homomorfizam iz G u muiltiplikativnu grupu ne-nula kompleksnih brojeva. Ovo su jedini ne-nula karakteri od G koji su homomorfizmi.

2. *Karakter trivijalnog $\mathbb{C}G$-modula je linearan karakter koji se naziva trivijalni karakter od G. Označavamo ga sa 1_G. Stoga je*

$$1_G : g \to 1,$$

za sve $g \in G$.
Dakle, za datu grupu G znamo barem jedan ireducibilan karakter, tj. trivijalan karakter.

12.3 Vrednosti karaktera

Sledeće tvrđenje daje informaciju o kompleksnim brojevima $\chi(g)$, gde je χ karakter od G i $g \in G$.

Tvrđenje 12.3. *Neka je χ karakter $\mathbb{C}G-$modula V. Predpostavimo da $g \in G$ i g je reda m. Tada*

1. $\chi(1) = \dim V$;
2. $\chi(g)$ *je suma $m-$tih korena jedinice;*
3. $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$;
4. $\chi(g)$ *je realan broj ako je g konjugat od g^{-1}.*

Dokaz:

1. *Neka je $n = \dim V$, i neka je $\mathcal{B}$ baza za V. Tada je matrica $[1]_{\mathcal{B}}$ jediničnog elementa 1 u bazi $\mathcal{B}$ je jednak I_n, $n \times n$ jediničnoj matrici. Stoga*

$$\chi_1 = tr[1]_{\mathcal{B}} = trI_n = n,$$

pa je $\chi(1) = \dim V$.

2. *Po Tvrđenju 8.3. postoji baza $\mathcal{B}$ za V takva da je*

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

gde je svako ω_i $m-$ti koren iz jedinice. Stoga

$$\chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_n,$$

suma $m-$tih koren iz jedinice.

3. *Imamo da je*

$$[g^{-1}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^{-1} \end{pmatrix}$$

i tako je $\chi(g^{-1}) = \omega_1^{-1} + \dots \omega_n^{-1}$. *Svaki kompleksni* $m-$*ti koren iz jedinice od* ω *zadovoljava* $\omega^{-1} = \overline{\omega}$, *pošto za sve realne* ϑ *važi,*

$$(e^{i\vartheta})^{-1} = e^{-i\vartheta},$$

što je kompleksni konjugat od $e^{i\vartheta}$. *Stoga*

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\omega_1} + \cdots + \overline{\omega_n} = \overline{\chi(g)}.$$

4. *ako je* g *konjugat sa* g^{-1} *tada je* $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ *po Tvrđenju 12.2.(2). Takođe* $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$ *po prethodnom primeru, i tada je* $\chi(g) = \overline{\chi(g)}$*; tj.* $\chi(g)$ *je realno.*

■

Kada su elementi $g \in G$ *reda 2, možemo konkretnije odrediti mogućnosti za* $\chi(g)$*:*

Posledica 12.1. *Neka je* χ *karakter od* G*, i neka je* g *element reda* 2 *u* G*. Tada je* $\chi(g)$ *celobrojan, i*

$$\chi(g) \equiv \chi(1) mod 2.$$

Dokaz: *Iz Tvrđenja 12.3, imamo da*

$$\chi(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_n,$$

gde je $n = \chi(1)$ *i svako* ω_i *je kvadratni koren iz jedinice. Tada svako* ω_i *je* $+1$ *ili* -1*. Predpostavimo da su* r *njih* $+1$*, a* s *njih* -1*, pa važi*

$$(g) = r - s, \ i \ \chi(1) = r + s.$$

Tada je $\chi(g) \in \mathbb{Z}$*, i pošto je* $r - s = r + s - 2s \equiv (r + s) mod 2$*, imamo da je* $\chi(g) \equiv \chi(1) mod 2$*.*
■

Sledeća teorema otktriva prvi nagoveštaj važnosti karaktera, pokazujući da možemo odrediti jezgro reprezentacije ako znamo njen karakter.

Teorema 12.1. *Nega je* $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ *reprezentacija od* G*, i neka je* χ *karakter od* ρ*.*

1. *Za* $g \in G$ *važi*

$$|\chi(g)| = \chi(1) \Leftrightarrow g\rho = \lambda I_n \text{ za neko } \lambda \in \mathbb{C}.$$

2. $Ker\rho = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$.

Dokaz:

1. *Neka je $g \in G$, i pretpostavimo da je g reda m. Ako je $g\rho = \lambda I_n$ gde je $\lambda \in \mathbb{C}$, tada je λ $m-$ti koren iz jedinice, i $\chi(g) = n\lambda$, pa je $|\chi(g)| = n = \chi(1)$.*

   Obratno, pretpostavimo da je $|\chi(g)| = \chi(1)$. Iz Tvrđenja 8.3. sledi da postoji baza $\mathcal{B}$ za $\mathbb{C}^\ltimes$ takva da je

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n \end{pmatrix}$$

   gde je svako ω_i $m-$ti koren jedinice. Tada je

$$|\chi(g)| = |\omega_1 + \cdots + \omega_n| = \chi(1) = n. \tag{8}$$

   Primetimo da za proizvoljne kompleksne brojeve $z_1, \ldots, z_n$ važi

$$|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

   gde jednakost važi ako i samo ako su $z_1, \ldots, z_n$ svi jednaki.

   Pošto je $|\omega_i| = 1$ za svako i, zaključujemo iz (8) da je $\omega_i = \omega_j$ za svako i, j. Stoga

$$[g]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_1 \end{pmatrix} = \omega_1 I_n.$$

   Sledi da za sve baze $\mathcal{B}'$ od $\mathbb{C}^n$ važi $[g]_{\mathcal{B}'} = \omega_1 I_n$, i tada je $g\rho = \omega_1 I_n$. Time je dokaz završen.

2. *Ako $g \in Ker\rho$ tada je $g\rho = I_n$, i važi $\chi(g) = n = \chi(1)$.
Obratno, pretpostavimo da je $\chi(g) = \chi(1)$. Tada iz prvog primera sledi da je $g\rho = \lambda I_n$ za neko $\lambda \in \mathbb{C}$. Sledi da je $\chi(g) = \lambda\chi(1)$, odakle je $\lambda = 1$. Stoga je $g\rho = I_n$, pa $g \in Ker\rho$, što je trebalo dokazati.* ■

Podstaknuti Teoremom 12.1.(2), definišemo jezgro karaktera na sledeći način.

Definicija 12.5. *Ako je χ karakter od G, tada je jezgro od χ, u oznaci $Ker\chi$, definisano sa*

$$Ker\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}.$$

Po Teoremi 12.1.(2), ako je ρ reprezentacija od G sa karakterom χ, tada je $Ker\rho = Ker\chi$. Posebno, $Ker\chi \lhd G$. χ zovemo veran karakter ako je $Ker\chi = \{1\}$.

Sada ćemo dokazati tvrđenje koje je ponekad korisno za konstruisanje novog karaktera od već zadatog. Za karakter χ od G, definišimo $\overline{\chi}(g) : G \to \mathbb{C}$ na sledeći način

$$\overline{\chi}(g) = \overline{\chi(g)}(g \in G).$$

Stoga vrednosti $\overline{\chi}$ su kompleksni konjugati vrednosti χ.

Tvrđenje 12.4. *Neka je χ karakter grupe G. Tada je $\overline{\chi}$ karakter grupe G. Ako je χ ireducibilan, tada je i $\overline{\chi}$ ireducibilan.*

Dokaz: *Predpostavimo da je χ karakter reprezentacije $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$. Tada je*

$$\chi(g) = tr(g\rho) \ (g \in G).$$

Ako je $A = (a_{ij})$ $n \times n$ matrica nad $\mathbb{C}$, tada definišimo $\overline{A}$ kao $n \times n$ matricu (a_{ij}). Primetimo da su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ $n \times n$ matrice nad $\mathbb{C}$, tada je

$$\overline{(AB)} = \overline{A}\overline{B}, \tag{9}$$

pošto je $ij-$ti element $\overline{A}\overline{B}$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{a_{ik}}\overline{b_k j},$$

što je jednako kompleksnom konjugatu od $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $ij-$tog elementa od AB.

Iz (9) sledi da funkcija $\overline{\rho} : G \to GL(n, \mathbb{C})$ definisana sa

$$g\overline{\rho} = \overline{(g\rho)} \ (g \in G)$$

je reprezentacija G. Pošto je

$$tr(g\overline{\rho}) = tr\overline{(g\rho)} = \overline{tr(g\rho)} = \overline{\chi(g)} \ (g \in G),$$

karakter reprezentacije $\overline{\rho}$ je $\overline{\chi}$.

Očigledno je da ako je ρ reducibilan onda je $\overline{\rho}$ reducibilan. Stoga χ je ireducibilan ako i samo ako je $\overline{\chi}$ ireducibilan. ■

12.4 Regularni karakter

Definicija 12.6. *Regularni karakter od G je karkater regularnog $\mathbb{C}G-$modula. Regularni karakter označavamo sa χ_{reg}*

U Teoremi 12.2, izrazićemo regularni karakter u terminima ireducibilnih karaktera od G. Prethodno nam je potrebno sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 12.5. *Neka je V $\mathbb{C}G-$modul, i predpostavimo da je*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula U_i. Tada je karakter od V jednak sumi karaktera $\mathbb{C}G-$modula $U_1, \ldots, U_r$.

Dokaz: *Dokaz direktno sledi iz (6).* ■

Teorema 12.2. *Neka su $V_1, \ldots, V_k$ kompletan skup neizomorfnih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula (videti Definiciju 10.2), i za $i = 1, \ldots, k$ neka je χ_i karakter V_i i $d_i = \chi_i(1)$. Tada*

$$\chi_{reg} = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k.$$

Dokaz: *Po Teoremi 10.1*

$$\mathbb{C}G \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k),$$

gde za svako i postoje d_i faktora V_i. Sada dokaz sledi po Tvrđenju 12.5. ■

Vrednosti χ_{reg} elemenata od G se lako opisuju, i dati su u sledećem tvrđenju.

Tvrđenje 12.6. *Ako je χ_{reg} regularan karakter od G, tada je*

$$\chi_{reg}(1) = |G|, \text{ i}$$
$$\chi_{reg}(g) = 0 \text{ ako } g \neq 1.$$

Dokaz: *Neka su $g_1, \ldots, g_n$ elementi od G, i neka je $\mathcal{B}$ baza $g_1, \ldots, g_n$ od $\mathbb{C}G$. Po Tvrđenju 12.3.(1), $\chi_{reg}(1) = \dim \mathbb{C}G = |G|$.*
Sada neka je $g \in G$ gde $g \neq 1$. Tada za $1 \leq i \leq n$, imamo da je $g_i g = g_j$ za neko j gde $j \neq i$. Stoga $i-$ta vrsta matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ ima nule na svakom mestu osim u preseku sa kolonom j; posebno, element na poziciji ii je nula za svako i. Sledi da je

$$\chi_{reg}(g) = tr[g]_{\mathcal{B}} = 0.$$

■

12.5 Permutacioni karakteri

U slučaju gde je G podgrupa simetrične grupe S_n, postoji konstrukcija koja koristi permutacioni modul koja daje karakter stepena n, i sada ćemo to opisati.

Predpostavimo da je G podgrupa od S_n, tako da je G grupa permutacija od $\{1, \ldots, n\}$. Permutacioni modul V za G nad $\mathbb{C}$ ima bazu $v_1, \ldots, v_n$ gde za sve $g \in G$ važi

$$v_i g = v_{ig} \ (1 \leq i \leq n)$$

Neka $\mathcal{B}$ označava bazu $v_1, \ldots, v_n$. Tada su $ii-$ti članovi matrice $[g]_{\mathcal{B}}$ 0 ako je $ig \neq i$, a 1 ako je $ig = i$. Stoga je karakter π permutacionog modula V dat sa

$$\pi(g) = (\text{broj i-ova takvih da je } ig = i).$$

Za $g \in G$, neka je

$$fix(g) = \{i : 1 \leq i \leq n \ i \ ig = i\}.$$

Tada,

$$\pi(g) = |fix(g)| g \in G. \tag{10}$$

π zovemo permutacionim karakterom od G.

Tvrđenje 12.7. *Neka je G podgrupa od S_n. Tada je funkcija $v : G \to \mathbb{C}$ definisana sa*

$$v(g) = |fix(g)| - 1 (g \in G)$$

karakter od G.

Dokaz: *Neka je $v_1, \ldots, v_n$ baza permutacionog modula V kao iznad, i neka*

$$u = v_1 + \cdots + v_n, \ i \ U = sp(u).$$

Primetimo da $ug = u$ za sve $(g \in G)$, pa je U $\mathbb{C}G-$podmodul od V. U je izomorfan sa trivijalnim $\mathbb{C}G-$modulom, pa je karakter od U trivijalni karakter 1_G. Po Maškeovoj teoremi, postoji $\mathbb{C}G-$podmodul W od V takav da

$$V = U \oplus W.$$

Neka je v karakter od W. Tada je

$$\pi = 1_G + v,$$

pa je $|fix(g)| = 1 + v(g)$ za sve $g \in G$, i sledi

$$v(g) = |fix(g)| - 1 \ (g \in G).$$

■

13 Unutrašnji proizvod karaktera

U ovom poglavlju ćemo utvrditi neke značajne osobine karaktera, i posebno, dokazaćemo važno tvrđenje Teorema 13.4. koje kaže da ako dva $\mathbb{C}G-$modula imaju isti karakter onda su izomorfni. Takođe, opisaćemo metodu za razlaganje datog $\mathbb{C}G-$modula na direktnu sumu $\mathbb{C}G-$podmodula, koristeći karaktere.
Dokaz se zasniva na unutrašnjem proizvodu karaktera grupe.

13.1 Unutrašnji proizvodi

Karakteri konačne grupe G su neke funkcije iz G u $\mathbb{C}$. Skup svih funkcija iz G u $\mathbb{C}$ formira vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, ako usvojimo prirodna pravila sabiranja funkcija i množenja funkcija kompleksnim brojevima. To jest, ako su ϑ, ϕ funkcije iz G u $\mathbb{C}$, i $\lambda \in \mathbb{C}$, tada definišimo $\vartheta + \phi : G \to \mathbb{C}$ sa

$$(\vartheta + \phi)(g) = \vartheta(g) + \phi(g) \ (g \in G)$$

i definišimo $\lambda\vartheta : G \to \mathbb{C}$ sa

$$\lambda\vartheta(g) = \lambda(\vartheta(g)) \ g \in G.$$

(Ove funkcije zapisujemo s leva da bismo usaglasili oznake sa oznakama karaktera.)

Vektorski prostor svih funkcija iz G u $\mathbb{C}$ može biti opremljen unutrašnjim proizvodom na način koji ćemo dole opisati. Svakom uređenom paru vektora ϑ, ϕ u vektorskom prostoru, dodeljen je komleksan broj $\langle \vartheta, \phi \rangle$ koji zadovoljava sledeće uslove:

$\langle \vartheta, \phi \rangle = \overline{\langle \phi, \vartheta \rangle}$ *za svako* ϑ, ϕ;

$\langle \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2, \phi \rangle = \lambda_1 \langle \vartheta_1, \phi \rangle + \lambda_2 \langle \vartheta_2, \phi \rangle$ *za sve* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ *i za sve vektore* $\vartheta_1, \vartheta_2, \phi$;

$\langle \vartheta, \vartheta \rangle > 0$ *ako* $\vartheta \neq 0$.

(11)

Primetimo da uslov (a) implicira da je $\langle \vartheta, \vartheta \rangle$ uvek realno, i da uslovi (a) i (b) daju

$$\langle \phi, \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle \phi, \vartheta_1 \rangle + \lambda_2 \langle \phi, \vartheta_2 \rangle$$

za sve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ i za sve vektore $\vartheta_1, \vartheta_2, \phi$.

Sada ćemo predstaviti unutrašnji proizvod vektorskog prostora svih funkcija iz G u $\mathbb{C}$. Ovo će biti značajno u našem istraživanju karaktera.

Definicija 13.1. *Predpostavimo da su* ϑ *i* ϕ *funkcije iz* G *u* $\mathbb{C}$. *Definišimo*

$$\langle \vartheta, \phi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \vartheta(g) \overline{\phi(g)}.$$

Jasno je da uslovi (13.1) važe, pa je $\langle \ , \ \rangle$ unutrašnji proizvod vektorskog prostora finkcija iz G u $\mathbb{C}$.

13.2 Unutrašnji proizvodi karaktera

Iskoritićemo činjenicu da su karakteri konstantni na klasama konjugacije da uprostimo izračunavanje unutrašnjeg proizvoda dva karaktera.

Tvrđenje 13.1. *Predpostavimo da* G *ima tačno* l *klasa konjugacije, sa predstavnicima* $g_1, \ldots, g_l$. *Neka su* χ *i* ψ *karakteri od* G.

1. $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1})$, *i ovo je realan broj.*
2. $\langle \chi, \psi \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{l} \frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{|C_G(g_i)|}$.

Dokaz:

1. Imamo da je $\overline{\psi(g)} = \psi(g^{-1})$ za sve $g \in G$, po *Tvrđenju 12.3.(3)*. Stoga

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\psi(g^{-1}).$$

   Pošto je $\{g^{-1} : g \in G\} = G$, imamo

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = \langle \psi, \chi \rangle.$$

   Pošto je $\langle \psi, \chi \rangle = \overline{\langle \chi, \psi \rangle}$, sledi da je $\langle \chi, \psi \rangle$ realno.

2. Podsetimo se da g_i^G označava klasu konjugacije od G koja sadrži g_i. Pošto su karakteri konstantni na klasama konjugacije, važi

$$\sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = |g_i^G| \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}.$$

   Sada

$$G = \bigcup_{i=1}^{l} g_i^G \text{ i } |g_i^G| = |G|/|C_G(g_i)|,$$

   po *Posledici 11.1.* i *Teoremi 11.1.* Stoga

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{l} \sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)}$$

$$\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{l} \frac{g_i^G}{|G|} \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)} = \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{|C_G(g_i)|} \chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}.$$

■

Sada ćemo prikazati dokaz ključne čninjenice (*Teoreme 13.1*) da ireducibilni karakteri od G formiraju ortogonalni skup vektora u vektorskom prostoru funkcija iz G u $\mathbb{C}$; tj. za različite ireducibilne karaktere χ i ψ od G, imamo da je $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ i $\langle \chi, \psi \rangle = 0$.

Podsetimo se iz *Poglavlja* 10 da je regularni $\mathbb{C}G-$modul direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula,

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

i svi ireducibilni $\mathbb{C}G-$moduli su izomorfni sa jednim od $\mathbb{C}G-$modula $U_1, \ldots, U_r$. Postoji nekoliko načina biranja $\mathbb{C}G-$podmodula W_1 i W_2 od $\mathbb{C}G$ tako da je $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$ i W_1 i W_2

nemaju zajednički faktor kompozicije (videti *Definiciju 9.1*). Na primer, možemo izabrati W_1 da bude suma onih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i koji su izomorfni sa zadatim ireducibilnim $\mathbb{C}G-$modulom, i neka je W_2 suma preostalih $\mathbb{C}G-$modula U_i. Istražićemo neke posledice zapisivanja $\mathbb{C}G$ na ovaj način; stoga, privremeno usvajamo sledeću hipotezu.

Hipoteza 13.1. *Neka je $\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$, gde su W_1 i W_2 $\mathbb{C}G-$podmoduli koji nemaju zajednički faktor kompozicije. Pišemo $1 = e_1 + e_2$ gde $e_1 \in W_1$ i $e_2 \in W_2$.*

Izvešćemo formulu za e_1 u terminima karaktera od W_1.

Tvrđenje 13.2. *Za sve $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$, važi*

$$\begin{gathered} w_1e_1 = w_1,\ w_2e_1 = 0, \\ w_1e_2 = 0,\ w_2e_2 = w_2. \end{gathered}$$

Dokaz: Ako je $w_1 \in W_1$ tada funkcija $w_2 \to w_1w_2$ $(w_2 \in W_2)$ je očigledno $\mathbb{C}G-$homomorfizam iz W_2 u W_1. Ali W_2 i W_1 nemaju zajednički faktor kompozicije, pa je svaki $\mathbb{C}G-$homomorfizam iz W_2 u W_1 nula, po *Tvrđenju 10.2.* Sledi da je $w_1w_2 = 0$ za sve $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Slično je $w_2w_1 = 0$. Posebno, $w_1e_2 = w_2e_1 = 0$. Sada je

$$\begin{gathered} w_1 = w_1 1 = w_1(e_1 + e_2) = w_1e_1, \text{ i} \\ w_2 = w_2 1 = w_2(e_1 + e_2) = w_2e_2, \end{gathered}$$

i dokaz je završen. ■

Posledica 13.1. *Za elemente e_1 i e_2 od $\mathbb{C}G$ koji se pojavljuju u Hipotezi 13.1, važi*

$$e_1^2 = e_1,\ e_2^2 = e_2 \text{ i } e_1e_2 = e_2e_1 = 0.$$

Dokaz: Iz *Tvrđenja 13.2*, uzmemo da je $w_1 = e_1$ i $w_2 = e_2$. ■

Sada, procenimo e_1.

Tvrđenje 13.3. *Neka je χ karakter $\mathbb{C}G-$modula W_1 koje se pojavljuje u Hipotezi 13.1. Tada važi*

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g.$$

Dokaz: Neka je $x \in G$. Tada je funkcija

$$\vartheta : w \to we_1x^{-1}\ (w \in \mathbb{C}G)$$

endomorfizam od $\mathbb{C}G$. Odredićemo trag od ϑ na dva načina.

Prvo, za $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$ važi po *Tvrđenju 13.2*,

$$w_1\vartheta = w_1 e_1 x^{-1} = w_1 x^{-1},$$
$$w_2\vartheta = w_2 e_1 x^{-1} = 0.$$

Stoga ϑ deluje na W_1 sa $w_1 \to w_1 x^{-1}$ i na W_2 sa $w_2 \to 0$. Po definiciji karaktera χ od W_1, endomorfizam $w_1 \to w_1 x^{-1}$ od W_1 ima trag jednak $\chi(x^{-1})$, i naravno endomorfizam $w_2 \to 0$ od W_2 ima trag 0. Pa sledi

$$tr\vartheta = \chi(x^{-1}).$$

Drugo, $e_1 \in \mathbb{C}G$, pa

$$e_1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g$$

za neko $\lambda_g \in \mathbb{C}$. Po *Tvrđenju 12.6*, endomorfizam $w \to wgx^{-1}$ ($w \in \mathbb{C}G$) od $\mathbb{C}G$ ima trag 0 ako $g \neq x$ i ima trag $|G|$ ako je $g = x$. Stoga, kako je $\vartheta : w \to w \sum_{g \in G} \lambda_g g x^{-1}$, važi

$$tr\vartheta = \lambda_\chi |G|.$$

Ako izjednačimo ove dve jednakosti za $tr\vartheta$, vidimo da je za svako $x \in G$,

$$\lambda_\chi = \chi(x^{-1})/|G|.$$

Sledi da je

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g.$$

■

Posledica 13.2. *Neka je χ karakter $\mathbb{C}G-$modula W_1 koji se pojavljuje u Hipotezi 13.1. Tada je*

$$\langle \chi, \chi \rangle = \chi(1).$$

Dokaz: Koristeći definiciju množenja u $\mathbb{C}G$, zaključujemo iz *Tvrđenja 13.3* da je koeficijent od 1 u e_1^2

$$\frac{1}{|G|^2} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \chi(g) = \frac{1}{|G|} \langle \chi, \chi \rangle.$$

Sa druge strane, iz *Posledice 13.1.* znamo da je $e_1^2 = e_1$, i da je koeficijent od 1 u e_1 $\chi(1)/|G|$. Sledi da je $\langle \chi . \chi \rangle = \chi(1)$, što je i trebalo dokazati. ■

Sada možemo dokazati glavnu teoremu koja se tiče unutrašnjeg proizvoda $\langle \ , \ \rangle$.

Teorema 13.1. *Neka su U i V neizomorfni ireducibilni $\mathbb{C}G-$moduli, sa karakterima χ i ψ, redom. Tada je*

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \ , \ i$$
$$\langle \chi, \psi \rangle = 0.$$

Dokaz: Podsetimo se iz *Teoreme 10.1.* da je $\mathbb{C}G$ direktna suma ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula,

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

gde je broj $\mathbb{C}G-$modula U_i koji su izomorfni sa U $\dim U$. Neka je $m = \dim U$, i definišimo W kao sumu m ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula U_i koji su izomorfni sa U; neka je X suma preostalih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i. Tada je

$$\mathbb{C}G = W \oplus X.$$

Štaviše, svaki faktor kompozicije od W je izomorfan sa U, i ni jedan faktor kompozicije od X nije izomorfan sa U. Posebno, W i X nemaju zajedničkih faktora kompozicije. Karakter od W je $m\chi$, pošto je W direktna suma m $\mathbb{C}G-$podmodula, svaki ima karakter χ.

Sada primenjujemo *Posledicu 13.2.* na karakter od W, i dobijamo

$$\langle m\chi, m\chi \rangle = m\chi(1).$$

Kako je $\chi(1) = \dim U = m$, sledi da je $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.

Sada, neka je Y suma onih $\mathbb{C}G-$modula U_i od $\mathbb{C}G$ koji su izomorfni ili sa U ili sa V, i neka je Z suma preostalih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i. Tada je

$$\mathbb{C}G = Y \oplus Z,$$

i Y i Z nemaju zajednički faktor kompozicije. Karakter od Y je $m\chi + n\psi$, gde je $n = \dim V$. Po *Posledici 13.2.* važi

$$m\chi(1) + n\psi(1) = \langle m\chi + n\psi, m\chi + n\psi \rangle = m^2\langle \chi, \chi \rangle + n^2\langle \psi, \psi \rangle + mn(\langle \chi, \psi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle).$$

Sada je $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$, po delu teoreme koju smo već dokazali; i $\chi(1) = m$, $\psi(1) = n$. Stoga

$$\langle \chi, \psi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle = 0.$$

Po *Tvrđenju 13.1(1)*, $\langle \chi, \psi \rangle = \langle \psi, \chi \rangle$, i stoga je $\langle \chi, \psi \rangle = 0$.

■

13.3 Primena *Teoreme 13.1*

Neka je G konačna grupa, i neka je $V_1, \ldots, V_k$ kompletan skup neizomorfnih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula (videti *Definiciju 10.2.*). Ako je χ_i karakter od V_i $(1 \leq i \leq k)$, tada po *Teoremi 13.1*, imamo da je

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} \text{ za sve } i, j, \tag{12}$$

gde je δ_{ij} Kronekerova delta funkcija (tj. δ_{ij} je 1 ako je $i = j$ a 0 ako je $i \neq j$). Posebno, iz toga sledi da su ireducibilni karakteri $\chi_1, \ldots, \chi_k$ različiti.

Sada neka je V $\mathbb{C}G-$modul. Po *Teoremi 7.2*, V je jednako direktnoj sumi ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula. Svaki od njih je izomorfan sa V_i, pa postoje ne-negativni celi brojevi $d_1, \ldots, d_k$ takvi da važi

$$V \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k), \tag{13}$$

gde za svako i, postoji d_i faktora V_i.

Stoga karakter ψ od V je dat sa

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k. \tag{14}$$

Koristeći (12), dobijamo

$$\begin{aligned} c\langle \psi, \chi_i \rangle = \langle \chi_i, \psi \rangle &= d_i \text{ za } 1 \leq i \leq k, \text{ i} \\ \langle \psi, \psi \rangle &= d_1^2 + \cdots + d_k^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Sumirajući sve, dobijamo sledeće

Teorema 13.2. *Neka su $\chi_1, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri od G. Ako je ψ proizvoljan karakter od G, tada je*

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k$$

za neke nenegativne cele brojeve $d_1, \ldots, d_k$. Takođe,

$$d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \text{ za } 1 \leq i \leq k, \text{ i}$$

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2.$$

Definicija 13.2. *Predpostavimo da je ψ karakter od G, i da je χ ireducibilan karakter od G. Kažemo da je χ konstituent od ψ ako je $\langle \psi, \chi \rangle \neq 0$. Stoga, konstituenti od ψ su ireducibilni karakteri χ_i od G za koje su celobrojni d_i u izrazu $\psi = d_1\chi 1 + \cdots + d_k\chi_k$ ne-nula.*

Sledeća teorema je značajna posledica *Teoreme 13.1.* Ona nam daje brz i koristan metod određivanja da li je zadati $\mathbb{C}G-$modul ireducibilan ili ne.

Teorema 13.3. *Neka je V $\mathbb{C}G-$modul sa karakterom ψ. Tada je V ireducibilan ako i samo ako je $\langle \psi, \psi \rangle = 1$.*

Dokaz: Ako je V ireducibilan tada je $\langle \psi, \psi \rangle = 1$ po *Teoremi 13.1.*

Suprotno, predpostavimo da je $\langle \psi, \psi \rangle = 1$. Imamo da je

$$\psi = d_1\chi_1 + \cdots + d_k\chi_k$$

za neke ne-negativne cele brojeve d_i, i po (13) važi

$$1 = \langle \psi, \psi \rangle = d_1^2 + \cdots + d_k^2.$$

Sledi da jedan od celih brojeva je d_i 1 i ostali su nule. Tada po (13), $V \cong V_i$ za neko i, pa je V ireducibilan. ■

Sada smo u mogućnosti da dokažemo značajnu teoremu koja kaže da je $\mathbb{C}G-$modul određen svojim karakterom. Na osnovu ove činjenice na veliki broj pitanja o $\mathbb{C}G-$modulima odgovorićemo koristeći teoriju karaktera.

Teorema 13.4. *Predpostavimo da su V i W $\mathbb{C}G-$moduli, sa karakterima χ i ψ, redom. Tada su V i W izomorfni ako i samo ako je $\chi = \psi$.*

Dokaz: U *Tvrđenju 13.2.* dokazali smo da ako je $V \cong W$ tada je $\chi = \psi$. Obrat tog tvrđenja dokazujemo u ovoj teoremi.

Dakle, predpostavimo da je $\chi = \psi$. Neka su $V_1, \ldots, V_k$ potpun skup neizomorfnih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula sa karakterima $\chi_1, \ldots, \chi_k$. Iz (13) znamo da postoje ne-negativni celi brojevi c_i, d_i $(1 \leq i \leq k)$ takvi da

$$V \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

sa c_i faktora V_i za svako i, i

$$W \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

sa d_i faktora V_i za svako i. Po (15),

$$c_i = \langle \chi, \chi_i \rangle \ , \ d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \ (1 \leq i \leq k).$$

Pošto je $\chi = \psi$, sledi da je $c_i = d_i$ za svako i, i stoga je $V \cong W$. ■

Teorema 13.5. *Neka su $\chi_1, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri od G. Tada su $\chi_1, \ldots, \chi_k$ linearno nezavisni vektori u vektorskom prostoru svih funkcija iz G u $\mathbb{C}$.*

Dokaz: Predpostavimo da je

$$\lambda_1 \chi_1 + \cdots + \lambda_k \chi_k = 0 \ (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

Tada za svako i, koristeći (12) imamo da je

$$0 = \langle \lambda_1 \chi_1 + \ldots \lambda_k \chi_k \rangle = \lambda_i.$$

Sledi da su $\chi_1, \ldots, \chi_k$ linearno nezavisni. ■

Sada povezujemo unutrašnji proizvod sa prostorima $\mathbb{C}G-$homomorfizmima koje smo konstruisali u *Poglavlju 10*.

Teorema 13.6. *Neka su V i W $\mathbb{C}G-$moduli sa karakterima χ i ψ, redom. Tada je*

$$\dim(\hom_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \langle \chi, \psi \rangle.$$

Dokaz: Iz (13) znamo da postoje ne-negativni celi brojevi c_i, d_i $(1 \leq i \leq k)$ takvi da

$$V \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

sa c_i faktora V_i za svako i, i

$$W \cong (V_1 \oplus \cdots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus \cdots \oplus V_2) \oplus \cdots \oplus (V_k \oplus \cdots \oplus V_k)$$

sa d_i faktora V_i za svako i. Po *Tvrđenju 10.2*, za bilo koje i, j imamo da je

$$\dim(\hom_{\mathbb{C}G}(V_i, V_j)) = \delta_{ij}.$$

Stoga, koristeći ♣.(3) vidimo da je

$$\dim(\hom_{\mathbb{C}G}(V, W)) = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i.$$

Sa druge strane,

$$\chi = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i \text{ i } \psi = \sum_{i=1}^{k} d_i \chi_i$$

pa iz (12) sledi da je

$$\langle \chi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} c_i d_i.$$

Time je dokaz završen. ■

13.4 Dekompozicija $\mathbb{C}G-$modula

Ponekad je od praktične važnosti raščlaniti dati $\mathbb{C}G-$modul na direktnu sumu $\mathbb{C}G-$podmodula, i sada ćemo opisati jedan način da se to uradi.
Još jednom usvajamo *Hipotezu 13.1*:

$\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2$, gde $\mathbb{C}G-$moduli W_1 i W_2 nemaju zajednički faktor kompozicije; i $1 = e_1 + e_2$ gde su $e_1 \in W_1$, $e_2 \in W_2$.

Neka je V proizvoljan $\mathbb{C}G-$modul. Možemo zapisati $V = V_1 \oplus V_2$ gde je svaki faktor kompozicije od V_1 faktor kompozicije od W_1 i svaki faktor kompozicije od V_2 je faktor kompozicije od W_2.

Tvrđenje 13.4. *Koristeći prethodnu notaciju, za sve $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ važi*

$$v_1 e_1 = v_1,\ v_2 e_1 = 0,$$
$$v_1 e_2 = 0,\ v_2 e_2 = v_2.$$

Dokaz: Ako je $v_1 \in V_1$ tada je funkcija $v_2 \to v_1 w_2$ ($w_2 \in W_2$) očigledno $\mathbb{C}G-$homomorfizam iz W_2 u V_1. Pošto W_2 i V_1 nemaju zajednički faktor kompozicije, zaključujemo da tvrđenje važi kao u dokazu *Tvrđenja 13.2.* ■

Tvrđenje 13.5. *Ako je χ ireducibilni karakter od G, i V bilo koji $\mathbb{C}G-$modul, tada*

$$V(\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g)$$

je jednako sumi onih $\mathbb{C}G-$podmodula od V koji imaju karakter χ (gde za $r \in \mathbb{C}G-$ definišemo $V_r = \{vr : v \in V\}$).

Dokaz: Zapisujemo

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

kao direktnu sumu ireducibilnih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i. Neka je W_1 suma onih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i koji imaju karakter χ, i neka je W_2 suma preostalih $\mathbb{C}G-$podmodula U_i. Tada je karakter od W_1 $m\chi$ gde je $m = \chi(1)$, po *Teoremi 10.1.* Takođe W_1 i W_2 zadovoljavaju *Hipotezu 13.1*, i po *Tvrđenju 13.3* , element e_1 od W_1 je dat sa

$$e_1 = \frac{m}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g.$$

Neka je W_1 suma onih $\mathbb{C}G-$podmodula od V koji imaju karakter χ. *Tvrđenje 13.4* kaže da je $Ve_1 = V_1$. Očigledno možemo zanemariti konstantu $\frac{m}{|G|}$, pa

$$V_1 = V(\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g).$$

■

Ukoliko su ireducibilni karakteri grupe G poznati *Tvrđenje 13.5* predstavlja koristan način za nalaženje $\mathbb{C}G-$podmodula zadatog $\mathbb{C}G-$modula V. Postupak je sledeći:

1. Izaberimo bazu $v_1, \ldots, v_n$ od V.
2. Za svaki ireducibilni karakter χ od G izračunamo vektore $v_i(\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})g)$ za $1 \leq i \leq n$, i neka je V_χ podprostor od V razapet ovim vektorima.
3. Tada je V direktna suma $\mathbb{C}G-$modula V_χ kad χ prolazi kroz ireducibilne karaktere od G. Karakter od V_χ je umnožak od χ.

14 Broj ireducibilnih karaktera

Ovo poglavlje ćemo posvetiti teoremi koja kaže da je broj ireducibilnih karaktera konačne grupe jednak broju klasa konjugacije grupe, i nekim posledicama ove teoreme. Zajedno sa materijalom iz *Poglavlja 13* teorema nam omogućuje istraživanje karaktera.

Podrazumevamo da je G, kao i obično, konačna grupa.

14.1 Klasne funkcije

Definicija 14.1. *Klasna funkcija na G je funkcija $\psi : G \to \mathbb{C}$ takva da je $\psi(x) = \psi(y)$ kada su x i y konjugovani elementi od G (tj, ψ je konstantna na klasama konjugacije).*

Po *Tvrđenju 12.2(2)* , karakteri od G su klasne funkcije na G. Skup C svih klasnih funkcija na G je podprostor vektorskog prostora svih funkcija iz G u $\mathbb{C}$. Baza od C je zadata onim funkcijama koje uzimaju vrednost 1 na tačno jednoj klasi konjugacije a 0 na svim ostalim klasama. Stoga, ako je l broj klasa konjugacije od G, tada

$$\dim C = l. \tag{16}$$

Teorema 14.1. *Broj ireducibilnih karaktera od G je jednak broju klasa konjugacije od G.*

Dokaz: Neka su $\chi_1, \dots, \chi_k$ ireducibilni karakteri od G i neka je l broj klasa konjugacije od G. po *Teoremi 13.5.* $\chi_1, \dots, \chi_k$ su linearno nezavisni elementi od C, pa iz (16) sledi da je $k \leq l$.

Da bismo dokazali obrnutu nejednakost $l \leq k$, razmatramo regularni $\mathbb{C}G-$modul. Ako je $V_1, \dots, V_k$ kompletan skup neizomorfnih ireducibilnih $\mathbb{C}G-$modula, iz *Teoreme 7.2.* znamo da je

$$\mathbb{C}G = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k,$$

gde za svako i, W_i je izomorfno direktnoj sumi kopija od V_i. Pošto $\mathbb{C}G$ sadrži identični element 1, možemo napisati

$$1 = f_1 + \cdots + f_k$$

gde $f_i \in W_i$, za $1 \leq i \leq k$.

Sada neka je $z \in Z(\mathbb{C}G)$ centra od $\mathbb{C}G$. Po *Tvrđenju 8.4*, za svako i postoji $\lambda_i \in \mathbb{C}$ tako da za svako $v \in V_i$ važi

$$vz = \lambda_i v.$$

Stoga je $wz = \lambda_i w$ za svako $w \in W_i$, i posebno

$$f_i z = \lambda_i f_i \ (1 \leq i \leq k).$$

Sledi

$$z = 1z = (f_1 + \cdots + f_k)z = f_1 z + \cdots + f_k z = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k.$$

Ovo pokazuje da je $Z(\mathbb{C}G)$ sadržano u podprostoru od $\mathbb{C}G$ razapetom sa $f_1, \dots, f_k$. Pošto je $Z(\mathbb{C}G)$ dimenzije l po *Tvrđenju 11.6* zaključujemo da je $l \leq k$. Time smo dokazali da je $k = l$. ■

Posledica 14.1. *Ireducibilni karakteri $\chi_1, \dots, \chi_k$ od G formiraju bazu vektorskog prostora svih klasnih funkcija na G. Zaista, ako je ψ klasna funkcija, tada je*

$$\psi = \sum_{r=1}^{k} \lambda_i \chi_i$$

gde je $\lambda_i = \langle \psi, \chi_i \rangle$ za $1 \leq i \leq k$.

Dokaz: Pošto su $\chi_1, \dots, \chi_k$ linearno nezavisni, oni razapinju podprostor od C dimenzije k. Po (16) $\dim C = l$, što je jednako k po *Teoremi 14.1.* Stoga, $\chi_1, \dots, \chi_k$ razapinju C i formiraju bazu za C. Poslednje sledi iz (12). ■

Posledica 14.1 ima sledeću korisnu posledicu:

Tvrđenje 14.1. *Pretpostavimo da $g, h \in G$. Tada je g konjugat od h ako i samo ako je $\chi(g) = \chi(h)$ za sve karaktere χ od G.*

Dokaz: Ako je g konjugat od h, tada je $\chi(g) = \chi(h)$ za sve karaktere χ od G po *Tvrđenju 12.2(2).*

Obratno, pretpostavimo da je $\chi(g) = \chi(h)$ za sve karaktere χ. Tada po *Posledici 14.1.* $\psi(g) = \psi(h)$ za sve klasne funkcije ψ na G. Posebno, ovo je tačno za klasnu funkciju ψ koja uzima vrednost 1 na klasi konjugacije od g, a inače uzima vrednost 0. Tada je $\psi(g) = \psi(h) = 1$, pa je g konjugat od h. ■

Posledica 14.2. *Pretpostavimo da je $g \in G$. Tada je g konjugovano sa g^{-1} ako i samo ako je $\chi(g)$ realan za sve karaktere χ od G.*

Dokaz: Pošto je $\chi(g)$ realan ako i samo ako je $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ (videti *Tvrđenje 12.3(3)*), dokaz sledi direktno iz *Tvrđenja 14.1.* ■

15 Tabele karaktera i relacije ortogonalnosti

Ireducibilni karakteri grupe G su klasne funkcije, i njihov broj je jednak broju klasa konjugacije od G. Stoga je pogodno zapisati sve vrednosti ireducibilnih karaktera od G u kvadratnu matricu. Tu matricu nazivamo tabela karaktera od G. Elementi tabele karaktera su povezani na više načina, od kojih su mnogi sadržani u relacijama ortogonalnosti (*Teorema 15.1.*). Razumevanje tabela karaktera je od velike važnosti u teoriji reprezentacija. Osnova za ovo je *Teorema 13.4.* koja kaže da je svaki $\mathbb{C}G-$modul određen njegovim karakterom. Stoga, mnogi problemi u teoriji reprezentacija se mogu rešiti razmatranjem karaktera.

15.1 Tabele karaktera

Definicija 15.1. *Neka su $\chi_i, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri od G i neka su $g_1, \ldots, g_k$ predstavnici klasa konjugacije od G. Matricu $k \times k$ čiji je $ij-$ti element $\chi_i(g_j)$ (za sve i, j takve da $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k$) nazivamo tabela karaktera od G.*

Uobičajeno je da numerišemo ireducibilne karaktere i klase konjugacije od G tako da $\chi_1 = 1_G$, trivijalni karakter, i $g_1 = 1$, identični element G. Osim toga, numerisanje je proizvoljno. Primetimo da su u tabeli karaktera vrste indeksirane ireducibilnim karakterima od G, a kolone klasama konjugacije (tj. predstavnicima klasa konjugacije).

Tvrđenje 15.1. *Tabela karaktera od G je invertibilna matrica.*

Dokaz: Dokaz direktno sledi iz činjenice da su ireducibilni karakteri od G, a stoga i vrste tabele karaktera, linearno nezavisni. (*Teorema 13.5*) ■

15.2 Relacije ortogonalnosti

Već smo više puta koristili relacije (12),

$$\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \delta_{rs},$$

između ireducibilnih karaktera $\chi_1, \ldots, \chi_k$ od G. Ove relacije se mogu predstaviti u terminima vrsta tabele karaktera, tako što ih zapišemo kao

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

(videti *Tvrđenje 13.1(2)*). Slične relacije postoje između kolona tabele karaktera, i one su date u delu (2) sledeće teoreme.

Teorema 15.1. *Neka su $\chi_i, \ldots, \chi_k$ ireducibilni karakteri od G, i neka su $g_1, \ldots, g_k$ predstavnici klasa konjugacije od G. Tada važe sledeće relacije za sve $r, s \in \{1, \ldots, k\}$.*

1. *Relacije ortogonalnosti vrsta:*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs}$$

2. *Relacije ortogonalnosti kolona:*

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)|.$$

Dokaz: Relacije ortogonalnosti vrsta su već dokazane. Ovde su zapisane samo zbog upoređivanja sa relacijama ortogonalnosti kolona.

Za $1 \leq s \leq k$, neka je ψ_s klasna funkcija koja zadovoljava uslov

$$\psi_s(g_r) = \delta_{rs} \ (1 \leq r \leq k).$$

Po *Posledici 14.1*, ψ_s je linearna kombinacija $\chi_1, \ldots, \chi_k$, npr.

$$\psi_s = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i \ (\lambda_i \in \mathbb{C}).$$

Znamo da je $\langle \psi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij}$, pa je

$$\lambda_i = \langle \psi_s, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)}.$$

Sada $\psi_s(g) = 1$ ako je g konjugovan sa g_s, i $\psi_s(g) = 0$ inače; takođe postoji $|G|/|C_G(g_s)|$ elemenata od G koji su konjugovani sa g_s, po *Teoremi 11.1*. Sledi

$$\lambda_i = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in g_s^G} \psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} = \frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|}.$$

Stoga je

$$\delta_{rs} = \psi_s(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_i(g_r) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|},$$

i relacije ortogonalnosti kolona slede. ■

15.3 Vrste i kolone

Tabela karaktera od G je $k \times k$ matrica; uvedimo $k \times k$ matricu M, tako da $ij-$ti element matrice M bude

$$\frac{\chi_i(g_j)}{|C_G(g_j)|^{1/2}}.$$

Neka $\overline{M^t}$ označava transponovani kompleksni konjugat matrice M.

Sada je $rs-$ti element matrice $M\overline{M^t}$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs},$$

po relacijama ortogonalnosti vrste, pa je $M\overline{M^t} = I$. Zaista, jednakost $M\overline{M^t} = I$ je samo drugi način predstavljanja relacija ortogonalnosti vrste. S druge strane, $rs-$ti element matrice $\overline{M^t}M$ je

$$\frac{1}{|C_G(g_r)|^{1/2}|C_G(g_s)|^{1/2}} \sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i(g_r)}\chi_i(g_s) = \delta_{rs},$$

po relacijama ortogonalnosti kolona, pa je $\overline{M^t}M = I$.

Pošto su osobine $\overline{M^t}M = I$ i $M\overline{M^t} = I$ kvadratne matrice M ekvivalentne jedna drugoj, vidimo da su relacije ortogonalnosti vrsta i kolona ekvivalentne.

16 Normalne podgrupe i podignuti karakteri

Ako je N normalna podgrupa konačne grupe G, i $N \neq \{1\}$, tada je faktor grupa G/N manja od G. Karaktere od G/N bi stoga trebalo da je lakše pronaći nego karaktere od G. U stvari, možemo iskoristiti karaktere od G/N za pronalaženje nekih karaktera G, postupkom koji se naziva podizanje. Stoga, normalne podgrupe nam omogućuju da nađemo karaktere od G. U suprotnom smeru, takođe je tačno da nam tabela karaktera od G omogućuva nalaženje normalnih podgrupa od G; posebno, lako je videti iz tabele karaktera da li je G prosta ili ne.

Linearni karakteri od G (tj. karakteri stepena 1) su dobijeni podizanjem ireducibilnih karaktera od G/N za slučaj kad je N izvedena podgrupa od G.(Izvedena podgrupa biće definisana u *Definiciji 16.2*). Linearni karakteri se mogu upotrebiti za pronalaženje novih ireducibilnih karaktera iz datih ireducibilnih karaktera, na način koji ćemo opisati.

16.1 Podignuti karakteri

Početćemo konstruisanjem karaktera od G na osnovu karaktera od G/N.

Tvrđenje 16.1. *Pretpostavimo da je $N \lhd G$ i neka je $\tilde{\chi}$ karakter od G/N. Definišimo $\chi : G \to \mathbb{C}$ na sledeći način*

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng) \;\; (g \in G).$$

Tada je χ karakter od G, i χ i $\tilde{\chi}$ su istog stepena.

Dokaz: Neka je $\tilde{\rho} : G/N \to GL(n, \mathbb{C})$ reprezentacija od G/N sa karakterom $\tilde{\chi}$. Funkcija $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ koja je zadata kompozicijom

$$g \to Ng \to (Ng)\tilde{\rho} \; (g \in G)$$

je homomorfizam iz G u $GL(n, \mathbb{C})$. Stoga je ρ reprezentacija od G. Karakter χ od ρ zadovoljava

$$\chi(g) = tr(g\rho) = tr((Ng)\tilde{\rho}) = \tilde{\chi}(Ng)$$

za sve $g \in G$. Takođe, $\chi(1) = \tilde{\chi}(N)$, pa su χ i $\tilde{\chi}$ istog stepena. ■

Definicija 16.1. *Ako je $N \lhd G$ i $\tilde{\chi}$ karakter od G/N, tada se karakter χ od G dat sa*

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng) \;\; (g \in G)$$

naziva podizanje od $\tilde{\chi}$ u G.

Teorema 16.1. *Pretpostavimo da je $N \lhd G$. Pridruživanjem svakog karaktera od G/N njegovom podizanju u G, dobijamo bijektivnu korespondenciju između skupa karaktera od G/N i skupa karaktera χ od G koji zadovoljavaju uslov $N \leqslant Ker\chi$. Ireducibilni karakteri od G/N odgovaraju ireducibilnim karakterima od G koji sadrže N u svom jezgru.*

Dokaz: Ako je $\tilde{\chi}$ karakter od G/N, i χ je podizanje od $\tilde{\chi}$ u G, tada $\tilde{\chi}(N) = \chi(1)$. Takođe, ako $k \in N$ tada

$$\chi_(k) = \tilde{\chi}(Nk) = \tilde{\chi}(N) = \chi(1),$$

pa je $N \leqslant Ker\chi$.

Sada neka je χ karakter od G sa $N \leqslant Ker\chi$. Pretpostavimo da je $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ reprezentacija od G sa karakterom χ. Ako $g_1, g_2 \in G$ i $Ng_1 = Ng_2$ tada $g_1 g_2^{-1} \in N$, pa je $(g_1 g_2)^{-1})\rho = I$, iz stoga $g_1\rho = g_2\rho$. Sada možemo definisati funkciju $\tilde{\rho} : G/N \to G(n, \mathbb{C})$ na sledeći način

$$(Ng)\tilde{\rho} = g\rho \ (g \in G).$$

Tada za sve $g, h \in G$ imamo

$$((Ng)(Nh))\tilde{\rho} = (Ngh)\tilde{\rho} = (gh)\rho = (g\rho)(h\rho) = ((Ng)\tilde{\rho})((Nh)\tilde{\rho}),$$

pa je $\tilde{\rho}$ reprezentacija od G/N. Ako je $\tilde{\chi}$ karakter od $\tilde{\rho}$, tada

$$\tilde{\chi}(Ng) = \chi(g) \ (g \in G).$$

Sledi da je χ podizanje od $\tilde{\chi}$.

Ustanovili smo da je funkcija koja slika svaki karakter od G/N u njegovo podizanje u G bijekcija između skupa karaktera od G/N i skupa karaktera od G koji sadrže N u jezgru. Preostaje da pokažemo da ireducibilni karakteri odgovaraju ireducibilnim karakterima. Da bi ovo pokazali, neka je U podporostor od $\mathbb{C}^n$ i primetimo da

$$u(g\rho) \in U \text{ za sve } u \in U \Leftrightarrow u(Ng)\tilde{\rho} \in U \text{ za sve } u \in U.$$

Stoga, U je $\mathbb{C}G-$podmodul od $\mathbb{C}^n$ ako i samo ako je U $\mathbb{C}(G/N)-$podmodul od $\mathbb{C}^n$. Reprezentacija ρ je odatle ireducibilna ako i samo ako je reprezentacija $\tilde{\rho}$ ireducibilna. Sledi da je χ ireducibilna ako i samo ako je $\tilde{\chi}$ ireducibilna. ■

Ako znamo tabelu karaktera od G/N za neku normalnu podgrupu N od G, tada *Teorema 16.1.* omogućuje da zapišemo onoliko ireducibilnih karaktera od G koliko ima ireducibilnih karaktera od G/N.

Primer 16.1. *Neka je $G = S_4$ i*

$$N = V_4 = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\},$$

tako da $N \lhd G$ (vidi Primer 11.3). Ako je $a = N(1\,2\,3)$ i $b = N(1\,2)$ tada

$$G/N = \langle a, b\rangle \ i \ a^3 = b^2 = N, \ b^{-1}ab = a^{-1},$$

pa je $G/N \cong D_6$. Znamo da je tabela karaktera od G/N

	N	$N(1\,2)$	$N(1\,2\,3)$
$\overline{\chi_1}$	1	1	1
$\overline{\chi_2}$	1	-1	1
$\overline{\chi_1}$	2	0	-1

Za izračunavanje podizanja χ od karaktera $\tilde{\chi}$ od G/N, primetimo da

$$\chi((1\,2)(3\,4)) = \tilde{\chi}(N) \text{ pošto } (1\,2)(3\,4) \in N,$$
$$\chi((1\,2\,3\,4)) = \tilde{\chi}(N(1\,3)) \text{ pošto } N(1\,2\,3\,4) = N(1\,3).$$

Sledi da su podizanja od $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{\chi}_3$ su χ_1, χ_2, χ_3, koja su data tabelom

	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	-1	1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0

Tada su χ_1, χ_2, χ_3 ireducibilni karakteri od G, pošto su $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{\chi}_3$ ireducibilni karakteri od G/N

16.2 Nalaženje normalnih podgrupa

Tabela karaktera sadrži pristupačne informacije o strukturi grupe, što će pokazati sledeća dva tvrđenja. Prvo ćemo pokazati kako naći sve normalne podgrupe od G kada znamo tabelu karaktera od G. Podsetimo se da možemo lako odrediti jezgro ireducibilnog karaktera χ iz tabele karaktera, pošto je

$$Ker\chi = \{g \in G : \chi(g) = \chi(1)\}$$

(videti *Definiciju 12.5*) Takođe $Ker\chi \lhd G$. Svaka podgrupa koja je presek jezgara ireducibilnih karaktera je normalna podgrupa. Sledeće tvrđenje pokazuje da svaka normalna podgrupa nastaje na ovaj način.

Tvrđenje 16.2. *Ako je $N \lhd G$ tada postoje ireducibilni karakteri $\chi_1, \ldots, \chi_s$ od G takvi da*

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} Ker\chi_i.$$

Dokaz: Ako g pripada jezgru svakog ireducibilnog karaktera od G, tada je $\chi(g) = \chi(1)$ za sve karaktere χ, pa je $g = 1$ po *Tvrđenju 14.1.* Stoga, presek jezgara svih ireducibilnih karaktera od G je $\{1\}$.

Sada neka su $\overline{\chi_1}, \dots, \overline{\chi_s}$ ireducibilni karakteri od G/N. Po prethodnom delu važi

$$\bigcap_{i=1}^{s} Ker\overline{\chi_i} = \{N\}.$$

Za $1 \leq i \leq s$ neka je χ_i podizanje u G od $\tilde{\chi}_i$. Ako je $g \in Ker\chi_i$ tada

$$\overline{\chi_i}(N) = \chi_i(1) = \chi_i(g) = \overline{\chi_i}(Ng),$$

pa $Ng \in Ker\overline{\chi_i}$. Stoga, ako $g \in \cap Ker\chi_i$ tada $Ng \in \cap Ker\overline{\chi_i} = \{N\}$, pa $g \in N$. Sledi da je

$$N = \bigcap_{i=1}^{s} Ker\chi_i.$$

■

Veoma je lako odrediti iz tabele karaktera da li je G prosta ili nije:

Tvrđenje 16.3. *Grupa G nije prosta ako i samo ako*

$$\chi(g) = \chi(1)$$

za neki netrivijalni ireducibilni karakter χ od G i neki od jedinice različit element g od G.

Dokaz: Pretpostavimo da postoji netrivijalni ireducibilni karakter χ takav da je $\chi(g) = \chi(1)$ za neki od jedinice različit element g. Tada $g \in Ker\chi$, pa $Ker\chi \neq \{1\}$. Ako je ρ reprezentacija od G sa karakterom χ, tada je $Ker\chi = Ker\rho$ po *Teoremi 12.1.(2).* Pošto je χ netrivijalan i ireducibilan, $Ker\rho \neq G$; stoga $Ker\chi \neq G$. Sledi da je $Ker\chi$ normalna podgrupa od G koja nije jednaka $\{1\}$ ili G, pa G nije prosta.

Obratno, pretpostavimo da G nije prosta, pa postoji normalna podgrupa N od G, pri čemu $N \neq \{1\}$ i $N \neq G$. Po *Tvrđenju 16.2* postoji ireducibilni karakter χ od G takav da $Ker\chi$ nije $\{1\}$, ni G. Kako $Ker\chi \neq G$, χ je netrivijalan; uzmiajući da $1 \neq g \in Ker\chi$, imamo da je $\chi(g) = \chi(1)$. ■

16.3 Linearni karakteri

Podsetimo se da je linearni karakter grupe karakter stepena 1. Pokazaćemo kako naći sve linearne karaktere bilo koje grupe G, pošto je često prvi korak u konstruisanju tabele karaktera od G zapisivanje linearnih karaktera. Pre toga, potrebno je odrediti izvedenu podgrupu od G, koja je definisana na sledeći način.

Definicija 16.2. *Za grupu G, neka je G' podgrupa od G generisana svim elementima oblika*

$$g^{-1}h^{-1}gh \ (g, h \in G).$$

Tada G' nazivamo izvedena podgrupa od G ili izvod grupe G.

Označimo $g^{-1}h^{-1}gh$ sa $[g, h]$. Stoga,

$$G' = \langle [g, h] : g, h \in G \rangle.$$

Primer 16.2. *1. Ako je G abelova, tada $[g, h] = 1$ za sve $g, h \in G$, pa je $G' = \{1\}$.*

2. Neka je $G = S_3$. Očigledno je $[g, h]$ uvek parna permutacija, pa je $G' \leqslant A_3$. Ako je $g = (12)$ i $h = (23)$, tada $[g, h] = (123)$. Stoga je $G' = \langle (123) \rangle = A_3$.

Pokazaćemo da je $G' \lhd G$ i da su linearni karakteri od G podizanja u G ireducibilnih karaktera od G/G'. Jedan korak je omogućen sledećim tvrđenjem.

Tvrđenje 16.4. *Ako je χ linearni karakter od G, tada je $G' \leqslant Ker\chi$.*

Dokaz: Neka je χ linearni karakter od G. Tada je χ homomorfizam iz G u multiplikativnu grupu ne-nula kompleksnih brojeva. Stoga, za sve $g, h \in G$,

$$\chi(g^{-1}h^{-1}gh) = \chi(g)^{-1}\chi(h)^{-1}\chi(g)\chi(h) = 1.$$

Sledi da je $G' \leqslant Ker\chi$. ■

Sledeće tvrđenje navodimo bez dokaza.

Tvrđenje 16.5. *Pretpostavimo da je $N \lhd G$. Tada je*

1. $G' \lhd G$.

2. $G' \leqslant N$ ako i samo ako je G/N abelova grupa. Posebno, G/G' je abelova.

Sledi iz *Teoreme 16.5.* da je G' najmanja podgrupa od G sa komutativnom faktor grupom.

Uz datu izvedenu podgrupu G' možemo dobiti linearne karaktere od G primenjujući sledeću teoremu.

Teorema 16.2. *Linearni karakteri od G su tačno podizanje u G ireducibilnih karaktera od G/G'. Posebno, broj različitih linearnih karaktera od G je jednak $|G/G'|$, i deli $|G|$.*

Dokaz: Neka je $m = |G/G'|$. Pošto je G/G' abelova, iz *Teoreme 8.2* sledi da G/G' ima tačno m ireducibilnih karaktera $\overline{\chi_1}, \ldots, \overline{\chi_m}$, svi stepena 1. Podizanja $\chi_1, \ldots, \chi_m$ ovih karaktera su takođe stepena 1 i po *Teoremi 16.1.* oni su upravo ireducibilni karakteri χ od G takvi da $G' \leqslant Ker\chi$. Po *Tvrđe nju 16.4.* karakteri $\chi_1, \ldots, \chi_m$ su svi linearni karakteri od G. ■

Primer 16.3. *Neka je $G = S_n$. Pokazaćemo da je $G' = A_n$. Ako je $n = 1$ ili $n = 2$ tada je S_n abelova, pa je $G' = \{1\} = A_n$. Dokazali smo da je $S_3' = A_3$ u Primeru 16.2(2), pa pretpostavljamo da je $m \geq 4$.*

Kako je $S_n/A_n \cong C_2$, imamo da je $G' \leqslant A_n$ po Tvrđenju 16.5.(2). Ako je $g = (12)$, $h = (23)$ i $k = (12)(34)$, tada

$$[g, h] = (123),\ [h, k] = (14)(23).$$

Pošto je $G' \lhd G$, svi elementi u $(123)^G$ i $(14)(23)^G$ pripada G'. Iz Teoreme 12.12 sledi da G sadrži sve $3-$cikluse i sve elemente ciklusnog tpa $(2, 2)$. Ali svaki proizvod dve transpozicije je jednak identitetu, $3-$ciklusu ili elementu ciklusnog tipa $(2, 2)$; a A_n se sastoji od permutacija, od kojih je svaka proizvod parnog broja transpozicija. Stoga $A_n \leqslant G'$. Sada smo dokazali da je $G' = A_n$.

Primer 16.4. *Nalazimo linearne karaktere od S_n ($n \geq 2$). Iz prošlog primera znamo da je $S_n' = A_n$. Pošto je $S_n/S_n' = \{A_n, A_n(12)\} \cong C_2$, grupa S_n/S_n' ima dva linearna karaktera $\overline{\chi_1}$ i $\overline{\chi_2}$, gde je*

$$\overline{\chi_1}(A_n(12)) = 1,$$
$$\overline{\chi_2}(A_n(12)) = -1.$$

Iz Teoreme 16.1. sledi da S_n ima tačno dva linearna karaktera χ_1, χ_2 koji su dati sa

$$\chi_1 = 1_{S_n},$$

$$\chi_2(g) = \begin{cases} \textit{1}, & \textit{ako } g \in A_n, \\ \textit{-1}, & \textit{ako } g \notin A_n. \end{cases}$$

Ne samo da su linearni karakteri od G bitni kao ireducibilni karakteri, veće oni mogu biti korisni u konstrukciji novih ireducibilnih karaktera iz starih, kao što pokazuje sledeće tvrđenje.

Tvrđenje 16.6. *Pretpostavimo da je χ karakter od G i λ linearni karakter od G. Tada je proizvod $\chi\lambda$, definisan sa*

$$\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g)\ (g \in G)$$

je karakter od G. Štaviše, ako je χ ireducibilan, tada je i $\chi\lambda$ ireducibilan.

Dokaz: Neka je $\rho : G \to GL(n, \mathbb{C})$ reprezentacja sa karakterom χ. Definišimo $\rho\lambda : G \to GL(n, \mathbb{C})$ na sledeći način.

$$g(\rho\lambda) = \lambda(g)(g\rho)\ (g).$$

Stoga je $g(\rho\lambda)$ matrica $g\rho$ pomnožena kompleksnim brojem $\lambda(g)$. Pošto su ρ i λ homomorfizmi, lako sledi da je $\rho\lambda$ homomorfizam. Matrica $g(\rho\lambda)$ ima trag $\lambda(g)tr(g\rho)$, koji je $\lambda(g)\chi(g)$. Sledi da je $\rho\lambda$ reprezentacija od G sa karakterom $\chi\lambda$.

Sada za sve $g \in G$, kompleksan broj $\lambda(g)$ je koren jedinice, pa je $\lambda(g)\overline{\lambda(g)} = 1$. Stoga

$$\langle \chi\lambda, \chi\lambda \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g)\lambda(g)\overline{\chi(g)\lambda(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \langle \chi, \chi \rangle.$$

Iz *Teoreme 13.3.* sledi da je $\chi\lambda$ ireducibilan ako i samo ako je χ ireducibilan. ■

17 Neke elementarne tabele karaktera

Sada ćemo ilustrovati tehnike koje smo do sada predstavili konstruisanjem tabele karaktera grupa S_4, A_4 i svih diedarskih grupa.

17.1 Grupa S_4

U *Primeru 16.1.* našli smo tri ireducibilna karaktera χ_1, χ_2, χ_3 od S_4 podizanjem karaktera faktor grupe S_4/V_4. Sada ćemo upotrebiti {Tvrđenje 16.6. koje se odnosi na proizvod karaktera i linearnog karaktera, da kompletiramo tabelu karaktera od S_4.

Neka je χ_4 karakter

$$\chi_4(g) = |fix(g)| - 1 \ (g \in S_4)$$

koji je dat u *Tvrđenju 12.7.* Vrednosti χ_2, χ_4 i $\chi_4\chi_2$ su sledeće

g_i	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_4	3	1	0	-1	-1
$\chi_2\chi_4$	3	-1	0	-1	1

Primetimo da je

$$\langle \chi_4, \chi_4 \rangle = \frac{9}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = 1,$$

pa je χ_4 ireducibilan. Karakter $\chi_4\chi_2$ je takođe ireducibilan, na isti način ili korišćenjem *tvrđenja 16.6.* Neka je $\chi_5 = \chi_4\chi_2$. Pošto S_4 ima 5 klasa konjugacije i imamo 5 ireducibilnih karaktera, odredili smo kompletnu tabelu karaktera od S_4.

g_i	1	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3\,4)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	24	4	3	8	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1
χ_3	2	0	-1	2	0
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	-1	1

17.2 Grupa A_4

Neka je $G = A_4$ alternirajuća grupa stepena 4. Tada je $|G| = 12$, i G ima 4 klase konjugacije sa predstavnicima

$$1, (1\,2)(3\,4), (1\,2\,3), (1\,3\,2)$$

(videti *Primer 11.2.(1)*).

Neka je v karakter od A_4 dat u *Tvrđenju 12.7* tako da je $v(g) = |fix(g)| - 1$ za sve $g \in A_4$. Vrednosti v su sledeće:

g_i	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
v	3	-1	0	0

Primetimo da je

$$\langle v, v\rangle = \frac{9}{12} + \frac{1}{4} = 1,$$

pa je v ireducibilni karakter od G stepena 3.

Pošto G ima 4 ireducibilna karaktera i suma kvadrata njihovih stepena je 12 mora postojati tačno 3 linearna karaktera od G. Stoga, $|G/G'| = 3$ po *Teoremi 16.2.* Nije teško potvrditi ovo pokazujući da

$$G' = V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Sada je $G/G' = \{G', G'(123), G'(132)\} \cong C_3$, i tabela karaktera od G/G' je

	G'	$G'(1\,2\,3)$	$G'(1\,3\,2)$
$\overline{\chi_1}$	1	1	1
$\overline{\chi_2}$	1	ω	ω^2
$\overline{\chi_1}$	1	ω	ω

(gde je $\omega = e^{2\pi i/3}$). Podizanja od $\tilde{\chi_1}, \tilde{\chi_2}, \tilde{\chi_3}$ u G zajedno sa karakterom $\chi_4 = v$, daju kompletnu tabelu karaktera od A_4:

g_i	1	$(1\,2)(3\,4)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	12	4	3	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	1	ω	ω^2
χ_3	1	1	ω^2	ω
χ_4	3	-1	0	0

17.3 Diedarske grupe

Neka je G diedarska grupa D_{2n} reda $2n$, gde je $n \geq 3$, tako da

$$G = \langle a, b : a^n = b^2 = 1, b^{-1}ab = a^{-2} \rangle.$$

Izvešćemo tabelu karaktera od G.

Neka je $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. Za svaki ceo broj j gde je $1 \leq j < n/2$, definišimo

$$A_j = \begin{pmatrix} \varepsilon^j & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-j} \end{pmatrix}, B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proverimo da

$$A_j^n = B_j^2 = I, B_j^{-1} A_j B_j = A_j^{-1}.$$

Sledi da definisanjem $\rho_j : G \to GL(2, \mathbb{C})$ sa

$$(a^r b^s)\rho_j = (A_j)^r (B_j)^s \ (r, s \in \mathbb{Z}),$$

dobijamo reprezentaciju ρ_j od G za svako j gde je $1 \leq j < n/2$.

Svako ρ_j je ireducibilna reprezentacija.

Ako su i, j različiti celi brojevi takvi da $1 \leq i, j < n/2$, tada $\varepsilon^i \neq \varepsilon^j$ i $\varepsilon^i \neq \varepsilon^{-j}$, pa $a\rho_i$ i $a\rho_j$ imaju različite sopstvene vrednosti. Sledi da ne postoji matrica T gde je $a\rho_i = T^{-1}(a\rho_j)T$, pa ρ_i i ρ_j nisu ekvivalentne.

Neka je ψ_j karakter od ρ_j. Sada smo konstruisali različite ireducibilne karaktere ψ_j od G, po jedan za svako j za koje važi $1 \leq j < n/2$.

U ovom trenutku pogodno je razmatrati posebno slučajeve kada je n neparan i kada je n paran.

Slučaj 1: n neparan

Po (5) klase konjugacije od D_{2n} (n neparan) su

$$\{1\}, \{a^r, a^{-r}\}(1 \leq r \leq (n-1)/2), \{a^s b : 0 \leq s \leq n-1\}.$$

Stoga, postoji $(n+3)/2$ klasa konjugacije.

Svaki od $(n-1)/2$ ireducibilnih karaktera

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{(n-1)/2}$$

je stepena 2. Kako G ima $(n+3)/2$ ireducibilnih karaktera, postoje još dva koja bi trebalo naći.

Pošto je $\langle a \rangle \lhd G$ i $G/\langle a \rangle \cong C_2$, dobijamo dva linearna karaktera χ_1, χ_2 od G tako što podignemo ireducibilne karaktere od $G/\langle a \rangle$ u G. Ovi karakteri χ_1 i χ_2 su dati sa $\chi_1 = 1_G$ i

$$\chi_2(g) = \begin{cases} 1, & \text{ako } g = a^r \text{ za neko } r, \\ \text{-1}, & \text{ako } g = a^r b \text{ za neko } r. \end{cases}$$

Sada smo pronašli sve ireducibilne karaktere od D_{2n}. (Dokazali smo i da je $D'_{2n} = \langle a \rangle$ za neparno n u *Teoremi 16.2*).

Stoga je tabela karaktera od D_{2n} za n neparan(gde je $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$):

g_i	1	$a^r(1 \leq r \leq (n-1)/2)$	b
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	2^n	n	2
χ_1	1	1	1
χ_2	1	1	-1
ψ_j $(1 \leq j \leq (n-1)/2)$	2	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr}$	0

Slučaj 2: n paran

Ako je n paran, npr. $n = 2m$, tada klase konjugacije od D_{2n} kao u delu ($\diamondsuit$) su

$$\{1\}, \{a^m\}, \{a^r, a^{-r}\}(1 \leq r \leq m-1), \{a^s b : s \text{ paran}\}, \{a^s b : s \text{ neparan}\}.$$

Sledi da G ima $m+3$ ireducibilnih karaktera, od kojih su $m-1$ dati sa

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-1}.$$

Za nalaženje preostala 4 ireducibilna karaktera, prvo primetimo da je $\langle a^2 \rangle = \{a^j : j \text{ paran}\}$ normalna podgrupa od G i

$$G/\langle a^2 \rangle = \{\langle a^2 \rangle, \langle a^2 \rangle a, \langle a^2 \rangle b, \langle a^2 \rangle ab\} \cong C_2 \times C_2.$$

Sledi da G ima 4 linearna karaktera $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$ (i $G' = \langle a^2 \rangle$). Pošto su ovi linearni karakteri podizanja ireducibilnih karaktera od $G/\langle a^2 \rangle$, lako ih je izračunati, i njihove vrednosti su date u sledećoj kompletnoj tabeli karaktera od D_{2n} (n paran, $n = 2m$, $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$).

g_i	1	a^m	$a^r (1 \leq r \leq (n-1)/2)$	b	ab
$\lvert C_G(g_i) \rvert$	$2n$	$2n$	n	4	4
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	1	-1
χ_2	1	$(-1)^m$	$(-1)^r$	-1	1
ψ_j $(1 \leq j \leq (n-1)/2)$	2	$2(-1)^j$	$\varepsilon^{jr} + \varepsilon^{-jr}$	0	0

18 Zaključak

Teorija reprezentacija je korisno oruđe jer svodi probleme u apstraktnoj algebri na probleme u linearnoj algebri koju dobro razumemo. Dalje, vektorski prostor na kom je grupa predstavljena mo ze biti beskonačno dimenzionalan i ukoliko je taj prostor Hilbertov, metode analize mogu biti primenjene na teoriju grupa. Teorija reprezentacija je važna i u fizici, na primer, opisuje kako simetrična grupa fizičkog sistema utiče na rešenje jednačina koje opisuju taj sistem.
Teorija reprezentacija poznata je po mnoštvu grana i različitosti pristupa proučavanju reprezentacija grupa i algebri. Iako teorije imaju zajedničke osnovne koncepte, prilično se razlikuju. Razlike su barem trostruke.
Prvo, teorija reprezentacije zavisi od tipa algebarskog objekta koji se predstavlja. Postoji nekoliko klasa grupa, asocijativnih algebri i Lijevih algebri i odgovarajuće teorije reprezentacije su zasebne.
Drugo, teorija reprezentacije zavisi od prirode vektorskog prostora preko kojeg je algebarski objekat predstavljen. Najvažnija razlika je između konačno dimenzionih reprezentacija i beskonačno dimenzionih. U beskonačno dimenzionom slučaju dodatne strukture su važne (da li je prostor Hilbertov, Banahov, itd.). Dodatne algebarske strukture mogu biti nametnute i u konačno dimenzionom slučaju.
Treće, teorija reprezentacija zavisi od tipa polja nad kojim je vektorski prostor definisan. Najvažniji slučaj je polje kompleksnih brojeva. Drugi važni slučajevi su polje realnih brojeva, konačna polja, itd. Dodatne teškoće se pojavljuju za polja pozitivne karakteristike i polja koja nisu algebarski zatvorena. Ako polje skalara vektorskog prostora ima karakteristiku p i ako p deli red grupe, tada se ovo naziva modularna teorija reprezentacija. Ovaj poseban slučaj ima vrlo različita svojstva.
Posebno svojstvo teorije reprezentacija je njena široka primena u matematici. Uz uticaj na algebru, teorija reprezentacija generalizuje Furijeovu analizu preko harmonijske analize, povezana je sa geometrijom preko teorije invarijanti i Erlangen programa i ima dubok uticaj u teoriji brojeva preko automorfnih formi i Langlandovog programa. Drugo važno svojstvo je različitost pristupa teoriji reprezentacija; isti objekti mogu se proučavati koristeći metode algebarske geometrije, teorije modula, analitičke teorije brojeva, diferencijalne geometrije, teorije operatora i topologije.

Literatura

[1] J. L. Alperin R. B. Bell, **Groups and Representations**, Springer-Verlag, 1995.

[2] J. B. Fraleigh, **A First Course in Abstract Algebra, 5th Edition**, Adison-Wesley, 1994.

[3] Gordon James, Martin Liebeck, **Representations and Characters of Groups**, Cambridge University Press, 2003.

[4] G. Kalajdžić, **Algebra**, Matematički fakultet, Beograd, 2004.

[5] J-P. Serre, **Linear Representations and Finite Groups**, Springer-Verlag, 1977.